

Józef Borkowski

**Metody interpolacji widma
i metoda LIDFT w estymacji
parametrów sygnału
wieloczęstotliwościowego**



**Oficina Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2011**

Recenzenci
Ryszard MAKOWSKI
Tomasz ZIELIŃSKI

Opracowanie redakcyjne
Alina KACZAK

Korekta
Agata KACZAK

Projekt okładki
Marcin ZAWADZKI

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
<http://www.oficyna.pwr.wroc.pl>
e-mail: oficwyd@pwr.wroc.pl

ISBN 978-83-7493-595-1

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 477/2011.

*Drogim Rodzicom –
Mamie Longinie i Tacie Ludwikowi
z wyrazami głębokiej wdzięczności*

Spis treści

Wykaz wybranych oznaczeń i terminów	7
Wprowadzenie	10
1. Obliczanie widma sygnału wieloczęstotliwościowego	20
1.1. Model sygnału, dyskretnoczasowa i dyskretna transformata Fouriera	20
1.2. Renumeracja próbek	22
1.3. Podstawowe właściwości okien czasowych	23
1.4. Okna czasowe z bazą kosinusową	33
1.5. Okna czasowe I klasy Rife'a–Vincenta	38
1.6. Estymacja widma DFT i DtFT sygnału zakłóconego szumem	41
1.7. Metoda uzupełniania zerami	44
2. Metody interpolacji widma	48
2.1. Wprowadzenie	48
2.2. Estymacja parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego zakłóconego szumem ...	50
2.3. Interpolacja funkcjami uniwersalnymi	59
2.4. Interpolacja dla okna prostokątnego	60
2.5. Interpolacja dla okien z bazą kosinusową	62
2.6. Metoda MWIDFT	64
2.6.1. Wprowadzenie	64
2.6.2. Metoda 3-punktowej interpolacji MWIDFT	65
2.6.3. Metoda 5-punktowej i 7-punktowej interpolacji MWIDFT	67
2.6.4. Metoda $(2J + 1)$ -punktowej i $(L + 3)$ -punktowej interpolacji MWIDFT	69
3. Metoda liniowej interpolacji DFT	73
3.1. Założenia metody liniowej interpolacji DFT (LIDFT)	73
3.2. Linearyzacja widma sygnału oraz algorytm LIDFT	74
3.3. Przeznaczone dla metody LIDFT parametryczne okno czasowe	78
3.4. Uzupełnianie zerami w metodzie LIDFT	84
4. Metoda LIDFT jako interpolacja z zastosowaniem pary okien czasowych	92
4.1. Wprowadzenie	92
4.2. Interpretacja aproksymacji widma okna czasowego funkcjami liniowymi	93
4.3. Alternatywna aproksymacja widma okna czasowego funkcjami liniowymi	98

4.4. Zmniejszenie nieciągłości aproksymacji widma okna czasowego funkcjami liniowymi	101
4.5. Aproksymacja okręgu jednostkowego wielokątem metodą najmniejszych kwadratów	109
4.6. Alternatywna aproksymacja okręgu jednostkowego wielokątem	116
4.7. Minimalizacja błędów aproksymacji okręgu jednostkowego i dobór parametrów aproksymacji	120
4.7.1. Wprowadzenie	120
4.7.2. Minimalizacja części rzeczywistej błędu aproksymacji	120
4.7.3. Minimalizacja części urojonej błędu aproksymacji	123
4.7.4. Minimalizacja różnicy argumentów	127
4.7.5. Zakres najkorzystniejszych wartości parametrów aproksymacji	132
4.8. Liniowe równanie macierzowe metody LIDFT	134
4.9. Interpretacja liniowego równania macierzowego metody LIDFT	137
4.10. Metoda LIDFT jako metoda interpolacji widma z zastosowaniem pary okien czasowych	139
4.11. Przykład zastosowania metody LIDFT w estymacji sygnału wieloczęstotliwościowego	142
4.12. Błędy systematyczne metody LIDFT dla sygnału złożonego z wielu oscylacji	148
4.13. Błędy systematyczne metody LIDFT dla sygnału złożonego z dwóch oscylacji ...	152
4.14. Błędy metody LIDFT dla sygnału zakłóconego szumem	160
4.15. Dodatek: wybrane zależności matematyczne do rozdziału 4	170
Podsumowanie	173
Literatura	176
Streszczenie w j. angielskim	186

Wykaz wybranych oznaczeń i terminów

• Definicja sygnału wieloczęstotliwościowego

sygnał wieloczęstotliwościowy	– sygnał będący sumą niezależnych oscylacji sinusoidalnych
oscylacja sinusoidalna	– składowa sygnału o postaci $A_m \sin(\omega_m t + \varphi_m)$
oscylacja zespolona	– składowa sygnału o postaci $B_m e^{j\omega_m t}$
oscylacja	– oscylacja (w skrócie): sinusoidalna lub zespolona w zależności od kontekstu
$A_m, \omega_m, f_m, \varphi_m$	– amplituda, pulsacja, częstotliwość i faza m -tej oscylacji sinusoidalnej sygnału wieloczęstotliwościowego ($m = 1, \dots, K$)
B_m, ω_m, f_m	– amplituda zespolona, pulsacja i częstotliwość m -tej oscylacji zespolonej sygnału wieloczęstotliwościowego ($m = 1, \dots, P$)
K	– liczba składowych sinusoidalnych sygnału
P	– liczba składowych oscylacji zespolonych sygnału
$y(t)$	– ciągły sygnał wieloczęstotliwościowy

• Próbkowanie, okno czasowe i uzupełnianie próbkami zerowymi

f_s, T	– częstotliwość próbkowania i okres próbkowania: $f_s = 1/T$
y_n	– próbki sygnału mierzonego
w_n (lub h_n, g_n)	– dyskretne wartości okna czasowego
$w(t)$	– ciągła funkcja okna czasowego
N	– liczba próbek y_n uzyskanych w procesie próbkowania
$n = 0, \dots, N-1$	– numeracja naturalna wielkości y_n, w_n

$n = -N/2, \dots, N/2 - 1$	– numeracja symetryczna (względem $n=0$) wielkości y_n , w_n
λ_m	– częstotliwość unormowana oscylacji w bin: $\lambda_m = f_m NT$
M	– liczba wszystkich próbek po uzupełnieniu N próbek y_n próbkami zerowymi
R	– krotność uzupełniania zerami: $R = M / N$
x_n	– przeskalowana wartość n : $x_n = \pi n / N$ lub $x_n = \pi n / M$

• Widmo sygnału

f	– częstotliwość w Hz
λ	– częstotliwość unormowana w bin: $\lambda = f NT$
$F(\lambda), F_\lambda$	– dyskretnoczasowa transformata Fouriera (DtFT) dla czę- stotliwości unormowanej λ
$W(\lambda)$	– dyskretnoczasowa transformata Fouriera (DtFT) okna czasowego w_n w funkcji λ (widmo okna)
$F(k), F_k, F_i$	– dyskretna transformata Fouriera (DFT) sygnału
W_N	– współczynnik obrotu DFT: $W_N = e^{-j2\pi/N}$
B_k, λ_k (lub B_i, λ_i)	– parametry składowej oscylacji położonej w widmie w otoczeniu k -tej (lub i -tej) wartości obliczonego DFT; w zależności od metody spełniony jest jeden z warunków równań: (2.1), (3.8), (3.29), (4.90)–(4.92), (4.160)
bin	– jednostka częstotliwości unormowanej: $\lambda = f NT$ w bin
dB/oct.	– decybele na oktawę: jednostka określająca asymptotycz- ne nachylenie amplitudowej charakterystyki widmowej

• Uniwersalna notacja matematyczna

j	– jednostka urojona: $j^2 = -1$
$\text{Re}\{z\}, \text{Im}\{z\}$	– część rzeczywista i część zespolona wyrażenia z
$\max_{a,b} z, \max_{a,b} z$	– wartość maksymalna wyrażenia z względem a, b
$Ex, E[x], E(x), \mu_x$	– wartość oczekiwana zmiennej losowej x
$\text{var } x, \text{var}[x], \sigma_x^2$	– wariancja zmiennej losowej x
σ_x	– odchylenie standardowe zmiennej losowej x

$\sigma_{CR x}$	– ograniczenie Craméra–Rao dla odchylenia standardowego zmiennej losowej x
$\sigma_{0 CR B }, \sigma_{0 CR \omega}, \sigma_{0 CR \lambda}, \sigma_{0 CR \varphi}$	– ograniczenie Craméra–Rao odchylenia standardowego estymatorów amplitudy, pulsacji, częstotliwości i fazy dla przypadku jednej oscylacji zespolonej
$\sigma_{CR \lambda}$	– ograniczenie Craméra–Rao odchylenia standardowego estymatora częstotliwości dla przypadku sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych
$p(x)$	– funkcja gęstości prawdopodobieństwa jednowymiarowej zmiennej losowej x
$p(\mathbf{x})$	– łączna gęstość prawdopodobieństwa wielowymiarowej zmiennej losowej \mathbf{x}
$N(\mu, \sigma^2)$	– rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2
\hat{y}	– estymator (przybliżenie) wartości y
Δy	– błąd bezwzględny estymatora \hat{y} : $\Delta y = \hat{y} - y$
δy	– błąd względny estymatora \hat{y} : $\delta y = \Delta y / y = (\hat{y} - y) / y$
błąd deterministyczny	– błąd wyznaczony w modelowaniu deterministycznym
błąd losowy	– błąd wyznaczony w modelowaniu statystycznym
\mathbf{a}, \mathbf{A}	– wektor, macierz
\mathbf{I}	– macierz jednostkowa
$\mathbf{0}$	– macierz o wszystkich elementach równych 0

Wprowadzenie

Obecne przetwarzanie danych zarówno w systemach pomiarowych, akustycznych, wizyjnych, telekomunikacyjnych, jak i wielu innych dziedzinach techniki odbywa się z użyciem cyfrowego przetwarzania sygnałów (DSP – *Digital Signal Processing*). Przetwarzanie jest poprzedzone konwersją sygnału analogowego na sygnał cyfrowy. Wynika to z faktu, że przeważająca większość sygnałów otaczającej nas rzeczywistości generowana i opisana jest w sposób analogowy, jak np. zmiana temperatury, ciśnienia, napięcia, natężenia prądu, pola itp. Najistotniejsze jest to, że człowiek będący odbiorcą informacji z otaczającej go rzeczywistości odbiera je w sposób analogowy, bo tak skonstruowane są jego zmysły (wzroku, słuchu, dotyku, węchu, smaku). W długim procesie podporządkowania otaczającej go rzeczywistości stworzył „nowy wirtualny świat cyfrowy”. W ten sposób przyzwyczył się do słuchania muzyki zapisanej w sposób cyfrowy, oglądania świata obrazów zapisanych w postaci cyfrowej i odtwarzania nieskończonej gamy wrażeń smakowych i zapachowych wytwarzanych w sposób cyfrowy („inteligentny nos i smak”), co podyktowane było koniecznością eliminacji wszystkich niedogodności, jakie sygnał analogowy powoduje w technice przetwarzania i podczas pomiaru. W tym procesie interakcji człowieka ze stworzonym „światem cyfrowym” komunikuje się on za pomocą coraz to doskonalszych twórców ludzkiego umysłu dotyczących przetwarzania analogowo-cyfrowego i cyfrowo-analogowego. To w „świecie wirtualnej cyfry” człowiek przełamuje swoje ograniczenia dotyczące szybkości reakcji jego zmysłów i ich czułości oraz szybkości i dokładności przetwarzania informacji. W tej przestrzeni realizowane są również tezy niniejszej pracy, nie jesteśmy bowiem w stanie za pomocą swoich zmysłów dokonywać precyzyjnej separacji i analizy nałożonych na siebie sygnałów sinusoidalnych. Niemniej ważna jest konieczność automatyzacji takiej analizy. Stąd też zakres i treść niniejszej pracy wkomponowuje się w coraz bardziej rozbudowany „świat cyfrowy” stworzony przez człowieka, aby sprawniej i łatwiej się z nim kontaktować.

Przetwarzanie zaś w sposób cyfrowy zmienności (w funkcji czasu, odległości lub innej wielkości fizycznej) zmierzonego (przetwornikiem analogowo-cyfrowym) sygnału pozwala na uzyskanie szczegółowych informacji o obiekcie będącym źródłem tego sygnału i ma kluczowe znaczenie w badaniach podstawowych w różnych dzie-

dzinach nauki, w diagnostyce (medycznej, urządzeń technicznych, prognozowaniu pogody czy katastrof naturalnych), w automatyce i robotyce, telekomunikacji itd.

Istotne jest również to, że wiele zjawisk w otaczającym nas świecie ma charakter oscylacji wyrażonych w postaci funkcji sinusoidalnej – są to oscylacje mechaniczne, akustyczne, elektryczne i inne, jak np. opisujące ruch wahadła, pojedynczy ton muzyczny, drgania układu rezonansowego. Cechą otaczającego nas świata jest więc wyjątkowe wyróżnienie funkcji sinusoidalnej, która jest rozwiązaniem odpowiedniego równania różniczkowego opisującego podstawowe oscylacje mechaniczne, akustyczne i inne. W praktyce najczęściej występują drgania złożone, które są wynikiem złożenia się wielu oscylacji o charakterze sinusoidalnym.

Właściwości zjawisk zachodzących w przyrodzie spowodowały, że sygnał będący sumą sinusoid jest jednym z najważniejszych rodzajów sygnałów fizycznych i elektronicznych, narzędzie matematyczne go opisujące – transformata Fouriera – ważnym narzędziem analizy takich sygnałów, a estymacja parametrów takiego sygnału jest zagadnieniem mającym kluczowe znaczenie w wielu dziedzinach życia. I choć obecne aplikacje DSP korzystają niejednokrotnie z coraz nowszych transformacji matematycznych, to zalety transformaty Fouriera pozostają dalej aktualne, a jej rozwinięcia umożliwiają uwzględnienie dodatkowych zjawisk, jak np. niestacjonarności sygnału (np. wykorzystujące tzw. krótkookresową transformatę Fouriera). Wymagania dotyczące dokładności estymacji takich sygnałów stale zwiększają się, co powoduje, że konieczne jest doskonalenie dotychczasowych metod estymacji. Niniejsza praca dotyczy zwiększenia dokładności estymacji parametrów takiego właśnie sygnału złożonego (często określanego w literaturze nazwą „wieloczęstotliwościowy”) i definiowanego w sposób możliwie najszerszy (nie należy utożsamiać go z sygnałem okresowym, który jest tylko szczególnym jego przypadkiem).

Sygnałem wieloczęstotliwościowym (*multifrequency signal*) określa się w niniejszej pracy sygnał złożony z sumy wielu składowych sinusoidalnych, z których każda charakteryzuje się, w sposób niezależny od pozostałych, trzema parametrami: częstotliwością, amplitudą i fazą. Szczególnym przypadkiem jest np. sygnał okresowy, w którym częstotliwości kolejnych harmonicznych są całkowitą wielokrotnością częstotliwości podstawowej sygnału. Jeśli do takiego sygnału (np. sygnału trójkątnego) dodana zostanie sinusoida o częstotliwości niebędącej całkowitą wielokrotnością sygnału okresowego, to oprócz jego harmonicznych (*harmonics*) pojawi się w widmie tzw. składowa interharmoniczna (*interharmonic*) lub subharmoniczna (*subharmonic*). Może być też tak, że sygnał nie zawiera żadnego sygnału okresowego, a jedynie sumę wielu sinusoid o dowolnych częstotliwościach, generowanych przez niezależne źródła sygnału. Taki właśnie najogólniej zdefiniowany sygnał nazywamy w niniejszej pracy sygnałem wieloczęstotliwościowym i obejmuje on również szczególne przypadki, jak np. sygnały okresowe.

Potrzeba określania parametrów składowych sinusoidalnych sygnału wieloczęstotliwościowego występuje w wielu dziedzinach techniki [108, 123] – w przetwarzaniu

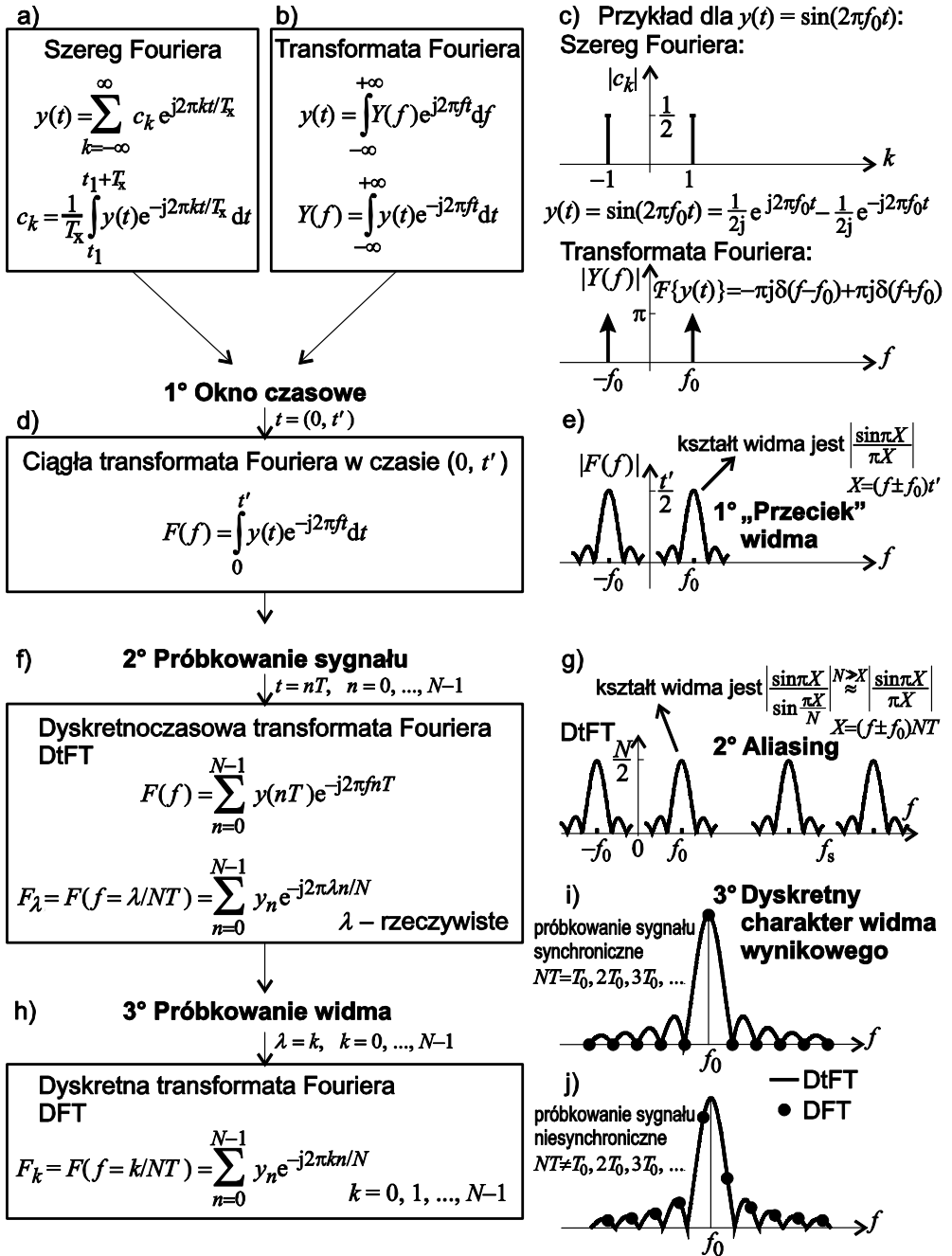
sygnałów dźwiękowych mowy i muzyki (akustyka, przetwarzanie mowy), radarowych i sonarowych (meteorologia, oceanografia), elektrycznych (badanie jakości energii elektrycznej), drgań mechanicznych (mechanika, sejsmologia), biomedycznych, optycznych (przetwarzanie obrazów), radiowych (radioastronomia) itp. Oczywiście nie zawsze sygnały takie modeluje się sygnałem wieloczęstotliwościowym [2, 6, 10, 14, 17, 22, 42–44, 64, 73, 99, 134, 155, 182, 190–192], ale taki model znajduje swoje istotne i szerokie zastosowanie. Z oczywistych względów konieczne jest również założenie, że użyteczny sygnał wieloczęstotliwościowy może być skażony zakłóceniami (szumem), jak to jest zawsze w praktycznych zastosowaniach, a przetwarzanie sygnału odbywa się za pomocą jego cyfrowego przetwarzania po uprzednim spróbkowaniu w systemie z przetwornikiem analogowo-cyfrowym (A/C) [111].

Istnieje wiele metod wyznaczania (estymacji) parametrów składowych oscylacji (czyli parametrów sinusoid: częstotliwości, amplitudy i fazy) [108, 123, 125]. Jedną z nich jest metoda wyznaczenia widma za pomocą transformaty Fouriera [101, 119, 135–138, 179, 191, 192] najczęściej szybkim algorytmem FFT (*Fast Fourier Transform*), która musi być często uzupełniona o dodatkowe przetwarzanie uzyskanego widma, aby uzyskać wymaganą w wielu zastosowaniach dokładność estymacji. Jedną z ważnych metod tego dodatkowego przetwarzania w dziedzinie częstotliwości są metody interpolacji widma [1–17, 21, 22, 28–39, 47–62, 64, 67–72, 78, 80, 85, 88–90, 92, 95, 98, 99, 102, 103, 107, 110, 115–118, 120, 124, 127, 128, 130, 134, 139, 141, 142, 144–148, 150, 151, 155, 156, 160, 161, 163, 165, 173, 177, 187–189].

Należy na wstępie wyjaśnić, dlaczego widmo takiego sygnału uzyskane za pomocą transformaty Fouriera jest istotnie zniekształcone, co jest powodem stosowania metod interpolacyjnych. Punktem wyjścia są wzory definiujące szereg i transformatę Fouriera (rys. 1a, b).

Skończony czas pomiaru (okno czasowe) powoduje przejście do ciągłej transformaty Fouriera z ograniczeniem granic całkowania (rys. 1d), próbkowanie sygnału powoduje przejście do dyskretnoczasowej transformaty Fouriera (DtFT – *Discrete-time Fourier Transform*) (rys. 1f), a obliczenie próbek w ściśle określonych punktach DtFT powoduje przejście do dyskretnego transformaty Fouriera (DFT – *Discrete Fourier Transform*) (rys. 1h). Wymienione modyfikacje wyjściowych zależności są nieuniknione: okno czasowe wynika z konieczności skończonego czasu pomiaru, próbkowanie sygnału – z konieczności zastosowania przetwornika A/C i próbkowanie numeryczne widma DtFT – z konieczności zakończenia obliczeń w skończonym czasie.

Operacje te zniekształcają widmo sygnału. Rozpatrzmy np. widmo sygnału sinusoidalnego o amplitudzie jednostkowej i zerowej fazy. Składa się ono z dwóch prążków (jeden dla częstotliwości dodatniej i sprzężony do niego dla częstotliwości ujemnej), ponieważ sinusoida jest sumą dwóch sprzężonych ze sobą oscylacji zespolonych zdefiniowanych przez wzór Eulera wiążący funkcję sinusoidalną z zespoloną funkcją wykładniczą (rys. 1c).



Rys. 1. Od definicji przekształcenia Fouriera (a, b) przez kolejne jej modyfikacje (d, f) do wyznaczonej w praktyce transformaty DFT (h) i widmo sinusoidy (c) po kolejnych przekształceniach (e, g, i, j)

Zastosowanie okna czasowego powoduje rozmycie widma – tzw. przeciek widma (rys. 1e), zastosowanie próbkowania sygnału powoduje, że widmo staje się okresowe, zmieniając tym samym kształt i wprowadzając w każdym okresie widma jego powielenie (i możliwość zniekształcenia przez tzw. *aliasing*) (rys. 1g), a próbkowanie numeryczne widma DtFT powoduje, że widmo znane jest tylko dla wybranych wartości. Jeśli próbkowanie jest synchroniczne (koherentne), to lokalne maksimum DFT pokrywa się z lokalnym maksimum DtFT (rys. 1i), a jeśli próbkowanie jest niesynchroniczne (niekoherentne), to lokalne maksimum DFT nie pokrywa się z lokalnym maksimum DtFT (rys. 1j).

Synchroniczność próbkowania oznacza tutaj synchroniczność czasu pomiaru z okresem składowej sinusoidalnej, tzn. czas pomiaru jest wówczas całkowitą wielokrotnością tego okresu. Synchroniczność dla każdej składowej sygnału wieloczęstotliwościowego można zapewnić tylko dla wąskiej klasy sygnałów wieloczęstotliwościowych, tj. dla sygnałów okresowych (bez interharmonicznych), gdy czas pomiaru jest całkowitą wielokrotnością okresu składowej podstawowej. Aby jednak w takim przypadku znacząco zminimalizować zjawisko przecieku widma w obliczanym DtFT (DFT), synchroniczność ta musi być spełniona z dużą dokładnością (około 10^{-5}) dla każdej(!) harmonicznej ze względu na dużą stromość funkcji opisującej składową w widmie (rys. 1i, j) w punktach, dla których przyjmuje ona wartość równą zeru. Takie próbkowanie synchroniczne można zapewnić dla specjalnych przypadków (np. gdy dysponuje się sygnałem zegarowym skorelowanym z badanym obiektem lub możliwy jest pomiar okresu klasycznymi metodami, a sygnał jest stacjonarny) poprzez odpowiedni dobór częstotliwości próbkowania i liczby wszystkich próbek (w sposób sprzętowy, np. [76] z wykorzystaniem DPLL – cyfrowej pętli PLL) lub poprzez interpolację sygnału w dziedzinie czasu i ponowne programowe repróbkiwanie sygnału [45, 46, 76, 96, 161] w celu spełnienia warunku synchroniczności (w najprostszym przypadku można uwzględnić tylko część próbek [65, 155]). Jednakże dla sygnału wieloczęstotliwościowego, zdefiniowanego na wstępie w znacznie szerszym znaczeniu, metody próbkowania synchronicznego nie są skuteczne.

Przedstawione na rysunku 1 trzy efekty: przeciek (*leakage*) widma spowodowany oknem czasowym, lustrzane powielenie (możliwość aliasingu) oraz dyskretny charakter widma wynikowego DFT spowodowany numerycznym próbkowaniem widma ciągłego DtFT, w różnym stopniu utrudniają interpretację widma i estymację parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego. Dlatego też stosuje się różne metody przeciwdziałające tym efektom. W celu zmniejszenia przecieku widma stosuje się okna czasowe inne niż prostokątne (lub dla wąskiej klasy sygnałów próbkowanie synchroniczne), aby zapobiec zjawisku aliasingu stosuje się analogowy filtr antyaliasingowy na wejściu przetwornika A/C, gwarantujący spełnienie warunków twierdzenia o próbkowaniu i aby zwiększyć precyzję wyznaczania lokalnego maksimum DtFT stosuje się metody interpolacji widma na bazie sąsiednich próbek DFT.

Okno czasowe, inne niż prostokątne, powoduje, że amplitudy bocznych gasnących fragmentów widma, tzw. listków bocznych (*sidelobes*) (widocznych na rys. 1i, j) maleją, zmniejszając ich wpływ na widmo sąsiednich składowych, a poszerza się centralna część widma składowej oscylacji, tzw. listek główny (*mainlobe*), co zmniejsza rozdzielczość częstotliwościową analizy (gdyż poszerzony listek główny może zniekształcić widmo sąsiedniej składowej, jeśli będzie ona dostatecznie blisko). Im większe jest tłumienie listków bocznych, tym bardziej poszerza się listek główny i tym bardziej wzmacniany jest szum w widmie DtFT (DFT). Konieczny jest więc kompromis podczas doboru okna czasowego (między polepszeniem pewnych parametrów i pogorszeniem innych) i wykorzystanie w tym celu dodatkowych informacji o systemie pomiarowym, sygnale mierzonym i poziomie zakłóceń [19, 25–27, 74, 91, 94, 112, 129, 133, 149, 154, 162, 186].

Przeciek widma, pochodzący od składowej sprzężonej (wynikającej z wzoru Eulera) oraz od innych składowych sinusoidalnych, określany jest jako *long-range leakage* w odróżnieniu od rozmycia listka głównego – *short-range leakage*. Podczas estymacji parametrów widma danej składowej najczęściej stosuje się takie okno czasowe, aby stłumić przeciek *long-range* do pomijalnego poziomu, a kształt przecieku *short-range* wykorzystuje się do określenia lokalnego maksimum DtFT. Maksimum to wyznacza z kolei parametry analizowanej składowej sinusoidalnej, z dokładnością ograniczoną przez *long-range leakage*, szumy w widmie i dokładność stosowanych przybliżeń interpolacyjnych.

Tak rozumiana interpolacja widma DFT jest więc dalszym przetwarzaniem widma (obliczonego najczęściej za pomocą jednego z algorytmów FFT) i najczęściej podczas analizy danej oscylacji składowej uwzględnia się niewielką (w stosunku do całego widma) liczbę próbek widma DFT. Pierwsze opisane w literaturze wzory interpolacyjne [21, 92, 151] poprawiały znacząco wyniki estymacji parametrów składowych oscylacji przy założeniu braku interferencji sąsiednich składowych (*long-range leakage*) kosztem stosunkowo niewielkich nakładów obliczeniowych, co w połączeniu ze stosowaniem algorytmu FFT czyniło całe przetwarzanie szybkim, choć mniej dokładnym od innych metod estymacji parametrów sygnału (w dziedzinie czasu bądź częstotliwości). Z czasem metody interpolacji stały się dokładniejsze, uwzględniając również przeciek widma od innych składowych oscylacji [5, 28, 70], ale kosztem bardziej złożonych wzorów, a tym samym zwiększenia liczby koniecznych obliczeń. Ten naturalny trend (większa dokładność kosztem większej liczby obliczeń) jest rekompensowany znaczącym zwiększeniem możliwości obliczeniowych współczesnych narzędzi cyfrowego przetwarzania sygnałów, jak np. procesorów sygnałowych czy technik komputerowych w ogólności.

Próbkowanie widma ciągłego DtFT w klasyczny sposób prowadzi do dyskretnego przekształcenia Fouriera (DFT), które jest operacją bezstratną (jeśli pominąć skończoną dokładność przeprowadzanych obliczeń), tzn. obliczając odwrotne dyskretnie przekształcenie Fouriera (IDFT) można otrzymać pierwotne próbki sygnału w dziedzinie

czasu. Przekształcenie DFT daje w wyniku tyle samo próbek widma zespolonego, ile jest próbek sygnału poddanych transformacji, a więc z krokiem 1 bin na osi częstotliwości unormowanej (względem odwrotności czasu pomiaru). Dokładniejsze obliczenie widma, a więc z krokiem mniejszym niż 1 bin, bez dodatkowych założeń o sygnale, umożliwiają metody nieparametrycznej interpolacji widma [77, 193, 194], z których najważniejsze to: metoda interpolacji przez dodanie próbek zerowych na końcu sygnału i obliczenie DFT tak uzupełnionych danych, czyli tzw. metoda uzupełniania zerami (*zero padding*), interpolacja przez decymację, transformata *chirp-Z*, transformata WDFT (*warped DFT, frequency warping*). Jedynie dwie pierwsze z tych metod są w pełni odwracalne (również metoda przez decymację przy dodatkowych warunkach dotyczących ograniczenia pasma sygnału), a ponadto różnią się one dynamiką uzyskanego widma. Żadna z tych metod nie zmniejsza jednak problemów wynikających z przecieku widma, a jedynie może stanowić swego rodzaju „lupę powiększającą” wyznaczającą (z różną dokładnością i w różnym zakresie częstotliwości) próbki ciągłej DtFT z sygnału pomnożonego przez okno czasowe. Podkreślmy wyraźnie ten fakt w kontekście jednej z najważniejszych właściwości prezentowanej w rozdz. 3 i 4 metody liniowej interpolacji DFT (LIDFT) polegającej na tym, że oprócz funkcji odpowiednio rozumianej „lupy powiększającej” redukuje ona wpływ przecieku widma na wyniki estymacji w stosunku do wymienionych metod.

Metoda uzupełniania zerami jest stosunkowo wymagająca co do nakładów obliczeniowych, które można jednak zmniejszyć, eliminując nadmiarowe operacje związane z przetwarzaniem próbek zerowych (*prunning FFT*) [84, 86, 100, 147, 164, 169, 171]. *Prunning FFT* umożliwia również wyznaczanie tylko wybranych części widma DFT. Uzupełnianie zerami w obliczaniu DFT jest często stosowane przede wszystkim w aparaturze pomiarowej (oscylloskopy cyfrowe, analizatory widma) w celu uzyskania efektu „lupy powiększającej” dla obliczanego widma, a także w celu zapewnienia warunku dotyczącego liczby próbek sygnału dla transformaty FFT, gdy liczba próbek otrzymanych z przetwornika A/C nie spełnia tego warunku. Metoda uzupełniania zerami nie znalazła jednak szerszego uznania w dotychczasowych metodach precyzyjnej estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego ze względu na to, że przy zwiększonych wymaganiach obliczeniowych zmniejsza ona jedynie błąd spowodowany dyskretnym charakterem widma DFT, nie zmniejszając błędu spowodowanego efektem przecieku widma od innych składowych (*long-range*). Przedstawiona w rozdz. 3, 4 niniejszej pracy metoda liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT) uwzględnia w swojej rozszerzonej wersji metodę uzupełniania zerami w sposób umożliwiający zmniejszenie błędów estymacji spowodowanych zarówno przez dyskretny charakter DFT, jak i przez przeciek *long-range*, a współczesne narzędzia cyfrowego przetwarzania sygnałów, np. procesory sygnałowe [24, 75, 125], oraz stosowanie szybkiego algorytmu FFT (w tym jego wersji *prunning*) częściowo rekompensują zwiększone wymagania obliczeniowe.

Widmo DtFT (DFT) jest w praktycznych sytuacjach zakłócone szumem zawartym w sygnale mierzonym, zakłóceniami wprowadzanymi przez filtr antyaliasingowy i przetwornik A/C i błędami obliczeń spowodowanymi zastosowaniem arytmetyki stało- lub zmiennoprzecinkowej o skończonej precyzji. Całość zakłóceń sygnału mierzonych modeluje się w najprostszy sposób, zakładając, że jest to losowe zakłócenie addytywne o rozkładzie normalnym o zerowej wartości średniej, założonej wartości wariancji i równomiernym rozkładzie mocy w widmie (szum biały). Takie podejście, stosowane przez różnych autorów do oceny właściwości statystycznych różnych metod (czyli ich odporności na szum zakłócający), pozwala na porównanie różnych metod między sobą, a także porównanie z potencjalnie najlepszą metodą, która jest możliwa do uzyskania dla założonych parametrów pomiaru, wynikającą z twierdzenia (ograniczenia) Craméra–Rao. Bardziej dokładne analizy zakłóceń wnoszonych przez sam pomiar dotyczą: dokładności stosowanej arytmetyki [41], filtrów antyaliasingowych [180, 181], ale przede wszystkim zagadnień związanych z przetwornikiem A/C, takich jak: rozkład i moc szumu kwantowania [172], drżenie okresu próbkowania (*timing jitter*) [41, 170, 185], nieliniowość przetwarzania [109]. W przypadku gdy szum kwantowania jest dominującym zakłóceniem w widmie DtFT (DFT), wówczas dokładność stosowanego przetwornika A/C może być czynnikiem pierwszoplanowym w doborze stosowanego okna czasowego.

W rozdziale pierwszym niniejszej pracy zawarto formalne definicje sygnału, parametrów próbkowania, transformaty DtFT i DFT. Zamieszczono w nim również zagadnienia związane z oknami czasowymi w zakresie koniecznym do późniejszego opisu metod interpolacyjnych, ze szczególnym uwzględnieniem okien I klasy Rife’a–Vincenta, które pełnią ważną rolę w metodach interpolacji widma. Wyjaśniono też w nim podstawowe zagadnienia związane z wpływem szumu na widmo sygnału i przedstawiono szerzej metodę uzupełniania zerami, ze względu na rolę, którą pełni ona w omówionej później metodzie liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera (LIDFT).

Skrótowe omówienie dostępnych obecnie metod interpolacji widma zawarto w rozdziale drugim, a w rozdziale trzecim zawarto omówienie dotychczasowego rozwoju metody LIDFT [48–62]. Głównym wynikiem niniejszej pracy jest przedstawione w rozdziale czwartym uogólnienie dotychczas opracowanej przez autora metody LIDFT do postaci, która znacząco zwiększa jej efektywność i dokładność.

Przykładowe udokumentowane zastosowania lub analizy dotyczące możliwości aplikacji opisanych w pracy metod interpolacji DFT:

- badanie rozchodzenia się dźwięku w atmosferze [64],
- pomiar częstotliwości okresowych sygnałów złożonych (np. zmodulowanych), dla których pomiar metodami klasycznymi (np. przez wykrywanie zbrocza narastającego) zawodzi [15],
- pomiar drgań mechanicznych [156],

- pomiar mocy sygnału i wartości skutecznej [9, 13, 127, 128],
- pomiar różnicy fazy i wzmocnienia dla systemów dwukanałowych (tj. dwóch sygnałów o tej samej częstotliwości) [16],
- obliczanie początkowych parametrów dla dokładniejszych iteracyjnych metod nieliniowych w celu zapewnienia ich zbieżności i zmniejszenia liczby iteracji [23, 144],
- pomiar parametrów sygnału akustycznego w układzie dwóch, blisko siebie położonych, mikrofonów [163],
- pomiary podstawowe w fizyce, np. kwantowych oscylacji nadprzewodników [107] czy oscylacji betatronowych wiązek cząstek elementarnych wielkich energii [72, 89, 90, 173],
- pomiar częstotliwości zakłócenia w systemie jego redukcji [98],
- badanie parametrów przetworników A/C [27, 29, 39, 124],
- separacja interharmonicznego i sygnału okresowego z sygnału będącego ich sumą [88],
- estymacja parametrów sygnału zmodulowanego PSK [99],
- pomiar grubości warstwy szkła z wykorzystaniem wiązki laserowej [95].

Niniejsza praca dotyczy wybranej grupy metod estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego, jaką są metody interpolacji widma DFT, do których należy również metoda LIDFT. Warto jednak wspomnieć o innych metodach estymacji parametrów takiego sygnału [108, 123, 125, 158, 192], które można podzielić na kilka grup: metodę Prony'ego i jej modyfikacje, metody modelowania transmitancyjnego (AR – *Autoregressive*, MA – *Moving Average*, ARMA – połączenie AR i MA) i metody dekompozycji macierzowych, tzw. metody podprzestrzeni (Pisarenki, MUSIC – *Multiple Signal Classification*, EV – *Eigenvector*, MN – *Minimum Norm*, ESPRIT – *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*, PC – *Principal Component* i in.). Podane grupy metod różnią się ujęciem matematycznym. W metodzie Prony'ego dopasowuje się próbki sygnału do zespolonego modelu eksponencjalnego, w metodach transmitancyjnych modeluje się transmitancję układu liniowego odpowiadającą widmu sygnału, a metody podprzestrzeni bazują na właściwościach macierzy autokorelacji sygnału. Pomimo wymienionej różnicy w ujęciu matematycznym, podane grupy metod są często prezentowane wspólnie [108, 125, 158, 192], gdyż szczegółowa analiza matematyczna pokazuje duże podobieństwo dla części z tych metod. Przykładowo w [108] stwierdza się, że metoda Prony'ego i metoda kowariancyjna jest identyczna; w [158], że metoda PC (*Principal Component*) jest rozszerzoną wersją metody Prony'ego najmniejszych kwadratów, a w [192], że metoda Prony'ego należy do grupy modelowania transmitancyjnego. W podstawowej metodzie Prony'ego liczba estymowanych sinusoid jest równa połowie liczby próbek sygnału, co jest podstawową wadą tej metody. Wady tej pozbawione są nowsze wersje metody Prony'ego [125]: najmniejszych kwadratów, najmniejszych kwadratów z wstępną filtracją, z wstępnym filtrem adaptacyjnym i z zastosowaniem dekompozy-

cji macierzy według wartości osobliwych (SVD – *Singular Value Decomposition*). Wszystkie one mają dwie istotne wady: minimalizowany błąd średniokwadratowy nie pokrywa się z błędem średniokwadratowym definiowanym w estymacji optymalnej ML (*Maximum Likelihood*) oraz wyznaczenie częstotliwości składowych sygnału wymaga znajdowania zer wielomianu wysokiego rzędu dla dużej liczby składowych w sygnale. W metodach podprzestrzeni estymowane częstotliwości składowych oscylacji oblicza się na podstawie odpowiedniego estymatora częstotliwościowego, a estymator ten bazuje na analizie wartości własnych macierzy autokorelacji. Częstotliwości składowych oscylacji oblicza się w nich poprzez wyznaczenie lokalnych maksimów estymatora. Dla niektórych z tych metod, m.in. metody Pisarenki, można również wyznaczyć częstotliwości podobnie jak w metodzie Prony’ego, tj. obliczając zera odpowiedniego wielomianu. W metodach opartych na właściwościach macierzy autokorelacji nie ma możliwości estymacji fazy składowych sygnału wieloczęstotliwościowego.

Porównanie metod interpolacji widma i pozostałych metod parametrycznej analizy sygnału wieloczęstotliwościowego wskazuje na różny zakres ich zastosowania [156]. Metody interpolacji widma DFT są metodami szybkimi (wyniki uzyskiwane są najczęściej szybkim algorytmem FFT uzupełnionym o obliczenia wzorami interpolacyjnymi), ale z powodu przecieku widma uzyskiwane są mniejsze dokładności, a podstawowym ograniczeniem jest fakt, że minimalna odległość między składowymi w widmie jest najczęściej wielokrotnie większa od rozdzielczości Fouriera (czyli 1 bin na osi częstotliwości unormowanej). Rozszerzone wersje metody Prony’ego i metody bazujące na właściwościach macierzy autokorelacji są dokładniejsze, ale wymagają większych nakładów obliczeniowych. Ponadto metody te umożliwiają estymację składowych sygnału, dla których minimalna odległość między składowymi jest wielokrotnie mniejsza niż w metodach interpolacji widma, a niektóre z nich (m.in. MUSIC, ESPRIT) są metodami o dużej rozdzielczości z minimalną odległością między składowymi znacząco mniejszą niż rozdzielczość Fouriera (1 bin) [174–176].

Pragnę serdecznie podziękować kierownikowi Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej Panu prof. dr. hab. inż. Januszowi Mroczce za cenne uwagi oraz życzliwe i wytrwałe zachęcanie i mobilizowanie do napisania niniejszej pracy.

Autor

1. Obliczanie widma sygnału wieloczęstotliwościowego

1.1. Model sygnału, dyskretnoczasowa i dyskretna transformata Fouriera

Zakładamy, że celem pomiaru jest estymacja parametrów A_m , f_m , $\omega_m = 2\pi f_m$ oraz φ_m sygnału $y(t)$ opisanego zależnością:

$$y(t) = \sum_{m=1}^K A_m \sin(\omega_m t + \varphi_m) \quad (1.1)$$

tj. będącego sumą skończonej liczby oscylacji sinusoidalnych, z których każda charakteryzuje się amplitudą A_m , częstotliwością f_m (pulsacją ω_m) i fazą φ_m . Równanie (1.1) można zapisać w postaci:

$$y(t) = \sum_{m=1}^P B_m z_m^t \quad (1.2)$$

gdzie: $B_m = (A_m / 2)e^{j\varphi_m}$, $z_m = e^{j\omega_m}$, $P = 2K$, $B_{P-m+1} = B_m^*$, $z_{P-m+1} = z_m^*$.

Wskutek spróbkowania sygnału $y(t)$ z częstotliwością próbkowania $f_s = 1/T$ ($t \rightarrow t_n = nT$, $n = 0, \dots, N-1$) otrzymuje się N próbek sygnału y_n , a (1.2) przyjmuje wówczas postać:

$$y_n = y(t = nT) = \sum_{m=1}^P B_m e^{j2\pi f_m nT} = \sum_{m=1}^P B_m e^{j2\pi n \lambda_m / N} \quad (1.3)$$

gdzie $\lambda_m = f_m NT$ (w jednostkach bin) – unormowana częstotliwość, a B_m – zespolona amplituda m -tej oscylacji zespolonej $B_m e^{j2\pi n \lambda_m / N}$.

Dyskretnoczasową transformatę Fouriera (DtFT) dla próbek sygnału y_n pomnożonych przez próbki okna czasowego w_n definiuje się zależnością:

$$F_\lambda = F(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (1.4)$$

z której wyznacza się widmo dla częstotliwości unormowanej $\lambda = fNT$ (w jednostkach bin).

DtFT może być wyrażona przez zależność:

$$F(\lambda) = \sum_{m=1}^P B_m W(\lambda - \lambda_m) \quad (1.5)$$

gdzie $W(\lambda)$ – DtFT zastosowanego okna czasowego w_n :

$$W(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (1.6)$$

Zależność (1.5) oznacza, że widmo dyskretnoczasowej transformaty Fouriera jest sumą rozmytych składowych (o kształcie funkcji $W(\lambda)$ zależnej od użytego okna czasowego) umieszczonych na osi częstotliwości unormowanej λ w punktach odpowiadających częstotliwościom oscylacji zespolonych λ_m i pomnożonych przez amplitudy tych oscylacji B_m – zgodnie z modelem sygnału z (1.3).

Ponieważ zmienna λ we wzorze (1.4) jest ciągła (jedynie czas jest dyskretny – stąd nazwa *dyskretnoczasowa transformata Fouriera*), w praktyce konieczne jest obliczanie $F(\lambda)$ dla skończonego zbioru wartości λ , na podstawie których wyznacza się parametry B_m oraz λ_m sygnału wieloczęstotliwościowego za pomocą metod interpolacji widma.

Szczególnym tego przypadkiem jest wyznaczenie **dyskretnej transformaty Fouriera (DFT)**, czyli wyznaczenie $F(\lambda)$ ze wzoru (1.4) dla całkowitych wartości $\lambda = 0, \dots, N-1$:

$$F_k = F(\lambda = k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.7)$$

Widmo to jest najczęściej obliczane jednym z algorytmów FFT, z których najbardziej znany jest algorytm typu radix-2, dla którego liczba próbek poddawanych transformacie Fouriera jest równa całkowitej potędze liczby 2 ($N = 2^r$). Oznaczono k -tą wartość tak obliczonego widma (z próbek $y_n w_n$ tworzących N -elementowy zbiór $\{y_n w_n\}_N = \{y_0 w_0, \dots, y_{N-1} w_{N-1}\}$) jako $\text{FFT}_k \{y_n w_n\}_N$:

$$\text{FFT}_k \{y_n w_n\}_N = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.8)$$

Ze względu na okresowość funkcji $e^{-j2\pi nk/N}$ (z okresem N) obliczone wartości F_k wyznaczają widmo dla wartości całkowitych $k + iN$: $F_{k+iN} = F_k$.

Transformata DFT zdefiniowana przez (1.7) nie jest jedyną możliwością obliczania próbek widma DtFT. Najczęściej stosuje się:

- DFT według wzoru (1.7) – uzyskuje się N próbek widma DtFT z zakresu $\lambda = 0, \dots, N-1$ [bin] (co odpowiada zakresowi $f = 0, \dots, f_s(N-1)/N$ [Hz]), a więc N próbek dokładnie jednego okresu DtFT – w celu ich obliczenia najczęściej jest stosowany algorytm szybkiej transformaty Fouriera (FFT), który jest szybkim sposobem liczenia DFT [63, 82, 119, 191, 192].
- Algorytm Goertzela – stosowany, gdy zachodzi potrzeba obliczenia tylko jednej wartości DtFT dla dowolnego λ rzeczywistego (można również go stosować do obliczenia kilku lub więcej punktów widma przez odpowiednie powielenie tego algorytmu) [75, 125, 135, 191, 192].
- Technika uzupełniania zerami (rozd. 1.7) [119, 192].
- Interpolacja przez decymację, która stanowi „lupe powiększającą” dla wybranego ciągłego pasma częstotliwości z obliczonymi wartościami widma równomiernie odległymi na osi częstotliwości [193].
- Transformata *chirp-Z* (CZT, algorytm świergotowy) – oblicza widmo dla punktów z wycinka spirali (z jednakowym odstępem kątowym) przybliżającego wycinek okręgu jednostkowego [18, 81, 135, 143, 157, 191, 192].
- Transformata WDFT (*warped* DFT) – oblicza widmo dla punktów nierównomiernie rozmieszczonych na okręgu jednostkowym, a skoncentrowanych w pobliżu wybranego punktu tego okręgu, który jest zdefiniowany przez parametr transformaty (*warping parameter*) [87, 122, 184].

Pierwsza z tych metod jest podstawowym sposobem obliczania widma sygnału, a każda z pozostałych może być traktowana jako nieparametryczna metoda interpolacji widma. Za przykład podano (rozd. 1.7) metodę uzupełniania zerami. Jest ona również stosowana w metodzie LIDFT (rozd. 3, 4).

1.2. Renumeracja próbek

Jeżeli liczba próbek N jest parzysta, a próbki sygnału y_n i próbki okna czasowego w_n oznaczymy indeksami $n = -N/2, \dots, N/2-1$ (numeracja symetryczna), zamiast $n = 0, \dots, N-1$ (numeracja naturalna), to dla wielu okien definiujące je równania są prostsze [94]. Prostsze jest również wyprowadzenie metody LIDFT [48–62], co zastosowano również w niniejszej pracy. Nie wprowadzono osobnych oznaczeń dla

rozdzielenia obu sposobów indeksowania czasu, ponieważ wynika on jednoznacznie z zakresu indeksu przy znaku sumowania. Wówczas (1.4) ma postać DtFT jak dla sygnału przesuniętego w czasie o $-NT/2$ ($-N/2$ próbek):

$$F_\lambda = F(\lambda) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (1.9)$$

a (1.6) jest DtFT okna przesuniętego w czasie o $-NT/2$ ($-N/2$ próbek) i ma postać:

$$W(\lambda) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (1.10)$$

Wartości obliczane z (1.4) i (1.9) oraz (1.6) i (1.10) są związane zależnościami:

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} = e^{j\pi\lambda} \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (1.11)$$

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} = e^{j\pi\lambda} \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (1.12)$$

Aby uniknąć mnożenia przez czynnik $e^{j\pi\lambda}$, można utworzyć z ciągu $\{y_{-N/2}w_{-N/2}, \dots, y_{N/2-1}w_{N/2-1}\}$ ciąg $\{z_n\} = \{z_0, \dots, z_{N-1}\}$ przez zamianę miejscami pierwszej i drugiej połowy próbek:

$$\{z_n\} = \{z_0, \dots, z_{N-1}\} = \{y_0 w_0, \dots, y_{N/2-1} w_{N/2-1}, y_{-N/2} w_{-N/2}, \dots, y_{-1} w_{-1}\} \quad (1.13)$$

Wówczas zamiast (1.11) zachodzi:

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (1.14)$$

W ten sposób można obliczyć widmo zdefiniowane przez (1.9), korzystając z jednego z algorytmów FFT i obliczając widmo z (1.8) bez konieczności mnożenia przez czynnik $e^{j\pi\lambda}$. Analogiczne przestawianie próbek może być stosowane w metodzie uzupełniania zerami w celu podobnego uproszczenia obliczeń (rozd. 1.7).

1.3. Podstawowe właściwości okien czasowych

Najważniejsze okna czasowe i ich właściwości, zaczynając od okna prostokątnego, są następujące:

Okno prostokątne dla numeracji naturalnej zdefiniowane jest zależnością:

$$w_n = 1, \quad \text{dla } n = 0, \dots, N-1 \quad (1.15)$$

i również $w_n = 1$ dla numeracji symetrycznej, a dla czasu ciągłego odpowiednikiem (1.15) jest:

$$w(t) = 1, \quad \text{dla } t \in [0, t'] \quad (1.16)$$

Widmo DtFT okna otrzymujemy z zależności (1.15) i (1.6) oraz zależności na sumę szeregu geometrycznego:

$$W(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j2\pi\lambda/N} \right)^n = \frac{1 - e^{-j2\pi\lambda}}{1 - e^{-j2\pi\lambda/N}} = \frac{e^{-j\pi\lambda}}{e^{-j\pi n\lambda/N}} \cdot \frac{e^{j\pi\lambda} - e^{-j\pi\lambda}}{e^{j\pi n\lambda/N} - e^{-j\pi n\lambda/N}} = D_N(\lambda) \quad (1.17)$$

gdzie $D_N(\lambda)$ jest jądrem (funkcją) Dirichleta N -punktowej DFT (*aliasowaną funkcją sinc*) [119]:

$$D_N(\lambda) = e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\sin(\pi\lambda/N)} \quad (1.18)$$

Ciągła transformata Fouriera dla okna prostokątnego (1.16) wynosi (dla $\lambda = ft'$):

$$W(\lambda = ft') = \int_0^{t'} e^{-j2\pi ft} dt = D(\lambda) \quad (1.19)$$

gdzie $D(\lambda)$ jest jądrem Dirichleta ciągłej transformaty Fouriera w przedziale $[0, t']$:

$$D(\lambda) = t' e^{-j\pi\lambda} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} \quad (1.20)$$

Funkcja $D_N(\lambda)$ jest funkcją okresową z okresem N (okresem mianownika (1.18)), a funkcja $D(\lambda)$ jest funkcją nieokresową. Widmo okna prostokątnego przyjmuje wartość maksymalną dla $\lambda = 0$ oraz zeruje się dla całkowitych wartości λ (różnych od zera), ponieważ:

$$D_N(k) = \begin{cases} N & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.21)$$

$$D(k) = \begin{cases} t' & \text{dla } k = 0 \\ 0 & \text{dla } k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.22)$$

Dla określenia podobieństwa wzorów (1.18) i (1.20) można wykorzystać następujące wzory:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \frac{\sin(\pi\lambda)}{N \sin(\pi\lambda / N)} = e^{-j\pi\lambda} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} \quad (1.23)$$

$$e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \frac{\sin(\pi\lambda)}{N \sin(\pi\lambda / N)} \approx e^{-j\pi\lambda} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}, \quad \text{dla } \lambda \ll N \quad \text{oraz} \quad N \gg 1 \quad (1.24)$$

$$e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \frac{\sin(\pi\lambda)}{N \sin(\pi\lambda / N)} \approx e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}, \quad \text{dla } \lambda \ll N \quad \text{oraz} \quad N \gg 1 \quad (1.25)$$

Zależności (1.23), (1.24) oznaczają, że w praktycznych sytuacjach ($N \gg 1$) listek główny okna prostokątnego wyznaczonego przez DtFT w niewielkim tylko stopniu zależy od N , a jego kształt z dużą dokładnością można przybliżyć funkcją $|D(\lambda)|$, tj. funkcją $|\text{sinc}(\pi\lambda)|$. To przybliżenie polepsza się ze wzrostem liczby próbek N . W dokładniejszych analizach można użyć przybliżenia niepełnego (1.25), ale dokładniejszego.

Widmo okna prostokątnego definiuje tzw. rozdzielczość Fouriera DtFT, nazywaną też rozdzielczością Rayleigha, która pierwotnie została zdefiniowana dla obrazów dyfrakcyjnych w optyce. Mówi ona, że dwie składowe widmowe są rozróżnialne, jeśli w widmie maksimum jednej wypada w minimum drugiej. Dla dwóch sinusoid o jednakowej amplitudzie wynosi ona $1/(NT)$, czyli rozdzielczość τ_F Fouriera DtFT w jednostkach częstotliwości unormowanej wynosi:

$$\tau_F = 1 \text{ bin} \quad (1.26)$$

Rozdzielczość bezwzględna $\tau_F / (NT)$, wyrażona w Hz, polepsza się ze wzrostem czasu pomiaru równego $(N-1)T \approx NT$.

W praktyce, jeśli nie stosuje się dodatkowych obliczeń, rozróżnialność dwóch składowych oscylacji w widmie DtFT jest mniej korzystna. Po pierwsze ze względu na stosowanie okna innego niż prostokątne (co poszerza listek główny), po drugie ze względu na to, że amplitudy składowe najczęściej różnią się i to znacząco, i po trzecie rozdzielczość pogarsza się dla sygnału zakłóconego szumem. Wielkość ze wzoru (1.26) należy więc traktować jako orientacyjną wartość odniesienia, a w szczegółowych analizach można skorzystać z wprowadzonej przez Harrisa [94] minimalnej rozdzielczości RBW (*Resolution Bandwidth*), zdefiniowanej jako wartość $\tau_{6\text{dB}}$, dla której amplituda listka głównego stosowanego okna czasowego ma wartość o 6dB mniejszą od wartości maksymalnej. Współczynnik RBW wynosi od 1,2 bin (dla okna prostokątnego) do ok. 2,6 dla typowych okien z [94].

Okno Hanninga dla numeracji naturalnej jest zdefiniowane zależnością:

$$w_n = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right), \quad \text{dla } n = 0, \dots, N-1, \quad (1.27)$$

a dla numeracji symetrycznej wzorem:

$$w_n = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi n}{N} \right) = \cos^2 \left(\frac{\pi n}{N} \right), \quad \text{dla } n = -N/2, \dots, N/2-1, \quad (1.28)$$

Można prosto wyznaczyć ze wzorów (1.6), (1.17), (1.18) oraz (1.27), że widmo okna Hanninga:

$$W(\lambda) = 0,5D_N(\lambda) - 0,25[D_N(\lambda-1) + D_N(\lambda+1)] \quad (1.29)$$

co oznacza, że transformata tego okna jest sumą (z wagami 0,5 i 0,25) trzech odpowiednio przesuniętych na osi częstotliwości funkcji Dirichleta (transformat okna prostokątnego), dając dwukrotnie poszerzony listek główny i stłumione listki boczne w stosunku do okna prostokątnego. Ponadto obwiednia listków bocznych opada znacząco szybciej (18 dB/oct) niż dla okna prostokątnego (6 dB/oct).

Z faktu liniowości transformaty Fouriera oraz wzoru (1.29) wynika, że po obliczeniu DFT sygnału (1.1) z zastosowaniem okna prostokątnego (widmo $F(k)$) można uzyskać widmo z zastosowaniem okna Hanninga (widmo $F_H(k)$), stosując wzór:

$$F_H(k) = 0,5[F(k) - 0,5(F(k-1) + F(k+1))], \quad (1.30)$$

który oznacza praktyczną implementację odpowiedniości mnożenia w dziedzinie czasu dyskretnego ze splotem dyskretnym w dziedzinie częstotliwości.

Na podstawie (1.18), (1.24), (1.29) oraz zależności:

$$\sin(\pi(\lambda+k)) = \sin(\pi\lambda)\cos(\pi k) + \cos(\pi\lambda)\sin(\pi k) = (-1)^k \sin(\pi\lambda), \quad (1.31)$$

$$\text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

otrzymuje się analityczne przybliżenie widma okna Hanninga [92]:

$$W(\lambda) = \frac{N}{2} e^{j\pi\lambda} \frac{1}{1-\lambda^2} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} \quad \text{dla } \lambda \ll N \quad \text{oraz} \quad N \gg 1 \quad (1.32)$$

Okno Hanninga jest szczególnie często stosowane w taniej, komercyjnej aparaturze pomiarowej (oscylloskopy, analizatory widma, mierniki jakości energii), ponieważ ma bardzo korzystną cechę obliczeniową, która wynika ze wzoru (1.30). Polega ona na możliwości realizacji obliczeń wg tego wzoru na procesorze stałoprzecinkowym, gdyż oprócz operacji dodawania i odejmowania występuje tylko mnożenie przez wartość 0,5, co uzyskuje się przez przesunięcie liczby stałoprzecinkowej zapisanej w kodzie

uzupełnienia do dwóch o 1 bit w prawo – a to oznacza zmniejszenie kosztów (tańszy procesor). Ponadto okno Hanninga, biorąc pod uwagę szerokość listka głównego i parametry listków bocznych, jest oknem uniwersalnym w wielu zastosowaniach, co predestynuje je do uniwersalnej aparatury pomiarowej.

Okno Hanninga jest szczególnym przypadkiem okien z bazą kosinusową (szerzej omówionych w rozdz. 1.4) oraz szczególnym przypadkiem okien klasy I Rife’a–Vincenta (rozdz. 1.5). Okno Hanninga może być też traktowane, ze względu na postać wzoru (1.27) bądź (1.28), jako przypadek okien parametrycznych $\sin^p(\pi n / N)$, bądź $\cos^p(\pi n / N)$ dla $p = 2$ [94].

Okno trójkątne dla numeracji naturalnej jest zdefiniowane przez:

$$w_n = \begin{cases} n / (N / 2) & \text{dla } n = 0, \dots, N / 2 \\ w_{N-n} & \text{dla } n = N / 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (1.33)$$

oraz dla numeracji symetrycznej przez:

$$w_n = 1 - |n| / (N / 2) \quad \text{dla } n = -N / 2, \dots, N / 2 - 1 \quad (1.34)$$

Po podstawieniu (1.33) do (1.6) otrzymujemy [94]:

$$W(\lambda) = \frac{2}{N} e^{j\pi\lambda} \left(\frac{\sin \pi\lambda / 2}{\sin \pi\lambda / N} \right)^2 \quad (1.35)$$

Okno trójkątne jest przykładem okna o nieujemnym widmie, a jego parametry pozwalają go zaliczyć do okien o uniwersalnym zastosowaniu. Warunek nieujemnej transformaty oznacza:

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \geq 0 \quad (1.36)$$

lub

$$e^{-j\pi\lambda} \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} = e^{-j\pi\lambda} W(\lambda) \geq 0 \quad (1.37)$$

Do innych okien o nieujemnym widmie zalicza się [94]: okno parametryczne Poissona, okno parametryczne Hanninga–Poissona, okno de la Valle’a–Poissona.

Okno Hamminga jest oknem zdefiniowanym zależnością:

$$w_n = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n / N) & \text{dla } n = 0, \dots, N - 1 \\ 0,54 + 0,46 \cos(2\pi n / N) & \text{dla } n = -N / 2, \dots, N / 2 - 1 \end{cases} \quad (1.38)$$

Okno Hamminga jest szczególnym przypadkiem okien z bazą kosinusową (rozd. 1.4).

Okno Blackmana jest oknem zdefiniowanym zależnością:

$$w_n = \begin{cases} 0,42 - 0,50 \cos(2\pi n / N) + 0,08 \cos(4\pi n / N) & \text{dla } n = 0, \dots, N-1 \\ 0,42 + 0,50 \cos(2\pi n / N) + 0,08 \cos(4\pi n / N) & \text{dla } n = -N/2, \dots, N/2-1 \end{cases} \quad (1.39)$$

Okno Blackmana również jest jednym z okien z bazą kosinusową (rozd. 1.4).

Okno Kaisera jest optymalizowane dla minimalnej szerokości listka głównego dla danej maksymalnej energii zawartej w listkach bocznych. Okno Kaisera jest oknem parametrycznym z parametrem β :

$$w_n = I_0\left(\beta \sqrt{1 - (n / (N/2))^2}\right) / I_0(\beta), \quad n = -N/2, \dots, N/2-1, \quad (1.40)$$

gdzie $I_0(x)$ jest funkcją Bessela zerowego rzędu:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 \quad (1.41)$$

Okno Dolpha–Czebyszewa (*okno Czebyszewa*, *okno Dolpha*) jest optymalizowane dla minimalnej szerokości listka głównego przy danej maksymalnej amplitudzie listka bocznego. W tym sensie jest to okno optymalne i nadaje się dobrze do analizy składowych oscylacji leżących blisko siebie na osi częstotliwości. Okno to jest oknem parametrycznym z parametrem γ , który określa tłumienie maksymalnego listka bocznego [126, 192]:

$$w_n = \frac{1}{N+1} \left[\frac{1}{\gamma} + 2 \sum_{k=1}^{N/2} T_k(\beta \cos[k\pi / (N+1)]) \cos[2nk\pi / (N+1)] \right], \quad n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (1.42)$$

gdzie:

$$\beta = \cosh[(1/N) \cosh^{-1}(1/\gamma)] \quad (1.43)$$

a $T_k(x)$ jest wielomianem Czebyszewa rzędu k :

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \cos^{-1}x) & \text{dla } |x| \leq 1 \\ \cosh(k \cosh^{-1}x) & \text{dla } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (1.44)$$

Postać czasowa (1.42) okna Dolpha–Czebyszewa jest rzadko podawana w literaturze, ze względu na trudności w praktycznym jej wykorzystaniu. Z tego względu stosowane są aproksymacje zależności (1.42). Jedną z nich jest okno II klasy Rife’a–Vincenta.

Okna II klasy Rife’a–Vincenta (*II class Rife–Vincent windows, Taylor two parameter, nbar windows*) to jedna z aproksymacji okien optymalnych Dolpha–Czebyszewa zdefiniowanych przez (1.42) i, podobnie jak przedstawione okno Hanninga, Hamminga, Blackmana, należą one do okien z bazą kosinusową (szerzej opisanych w rozdz. 1.4). Współczynniki a_h kolejnych funkcji bazowych (kosinusoidalnych) są zdefiniowane dla okna rzędu H jako [151]:

$$a_h = - \prod_{k=1}^{H-1} \left[1 - \frac{(h/\alpha)^2}{\beta^2 + (k-1/2)^2} \right] \bigg/ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{H-1} \left[1 - \left(\frac{h}{k} \right)^2 \right] \quad (1.45)$$

gdzie α i β są parametrami okna:

$$\alpha^2 = \frac{H^2}{\beta^2 + (H-1/2)^2} \quad (1.46)$$

$$\beta = \frac{1}{\pi} \ln[R + \sqrt{R^2 - 1}], \quad R = \cosh(\pi\beta) \quad (1.47)$$

Parametr β jest funkcją tłumienia R pierwszych listków bocznych, ale kolejne listki boczne mogą mieć większą amplitudę. Dlatego do końcowej oceny właściwości tego okna konieczne są wykresy charakterystyki amplitudowej dla danego H [70, 151, 162].

Okna III klasy Rife’a–Vincenta (*III class Rife–Vincent windows*) to okna o parametrach pośrednich pomiędzy parametrami okien Rife’a–Vincenta I i II klasy (rozdz. 1.5). Podobnie jak I i II klasa są to okna z bazą kosinusową, a więc zdefiniowane przez współczynniki kolejnych funkcji bazowych (kosinusoidalnych). Okna te mają nieznacznie węższy listek główny niż okna I klasy (co poprawia rozdzielczość częstotliwościową dla składowych leżących blisko siebie) i nieznacznie większe tłumienie, niż okna II klasy, listków bocznych w dużej odległości od listka głównego (co jest korzystne przy analizie składowych odległych od siebie w widmie). Asymptotyczne tłumienie listków bocznych wynosi dla tych okien $(2H - 1)$ dB/oct. Tłumienie to jest znacząco większe niż dla okien II klasy (6dB/oct) i nieznacznie mniejsze niż okien I klasy $((2H + 1)$ dB/oct). Okna te są więc bardziej zbliżone do okien I klasy niż II klasy [70].

Szczegółowe dane dotyczące wartości współczynników oraz charakterystyk widmowych okien Rife'a–Vincenta III klasy można znaleźć w [21, 70, 151, 162].

Najważniejsze parametry okien czasowych są następujące [94]:

Współczynnik MLBW (Main Lobe Band Width) to pasmo, jakie zajmuje na dodatniej osi częstotliwości unormowanej λ listek główny charakterystyki amplitudowej okna czasowego:

$$\text{MLBW} = \min_{\lambda} \{ \lambda : |W(\lambda)| = 0 \} \quad (1.48)$$

Okno prostokątne ma współczynnik MLBW równy 1, dla pozostałych okien jest on większy.

Szerokość listka głównego okna czasowego jest najczęściej przyjmowana jako równa MLBW, ale w pewnych sytuacjach przyjmowana jest jako 2MLBW . Jest to wówczas pasmo, jakie zajmuje listek główny łącznie na dodatniej i ujemnej osi częstotliwości unormowanej. Dla precyzyjnego rozróżnienia można mówić o jednostronnej i dwustronnej szerokości listka głównego, ale w praktyce w obu przypadkach używa się najczęściej terminu „szerokość listka głównego”, a dokładna interpretacja wynika z kontekstu jego użycia.

Maksymalna amplituda listków bocznych określa tłumienie listka bocznego o największej amplitudzie względem wartości maksymalnej listka głównego. Bardzo często jest to pierwszy listek boczny, ale nie zawsze.

Szybkość opadania listków bocznych (ich wartości maksymalnych) określana jest najczęściej w dB/oct i wyznacza asymptotyczne nachylenie amplitudy listków bocznych dla warunku $\lambda \gg 1$. Wraz z maksymalną amplitudą listków bocznych szybkość ta jest najważniejszym parametrem dotyczącym listków bocznych.

Współczynnik NPSG (Normalized Peak Signal Gain) jest dany wzorem:

$$\text{NPSG} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_n \quad (1.49)$$

i wyznaczany jest najczęściej, gdy okno spełnia warunek normujący zdefiniowany przez równanie:

$$\max_n w_n = 1 \quad (1.50)$$

Współczynnik NPSG określa wartość, przez jaką trzeba podzielić widmo DtFT (DFT), aby wartość maksymalna charakterystyki amplitudowej w razie braku przecieku widma była taka sama jak w przypadku zastosowania okna prostokątnego. Wynika

to bowiem z faktu, że na podstawie (1.6) i (1.49) zachodzi $W(0) = N \cdot \text{NPSG}$. Jeśli w'_n jest oknem, które nie spełnia warunku (1.50), to można je przekształcić do okna w_n , które ten warunek spełnia, mnożąc przez odpowiednią stałą:

$$w_n = w'_n / \max_k w'_k \quad (1.51)$$

Aby uzyskane widmo DtFT (DFT) było już wyskalowane z uwzględnieniem współczynnika NPSG, można w miejsce (1.50) zastosować inny warunek normujący:

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_n = N \quad (1.52)$$

a dla okna w''_n niespełniającego tego warunku uzyskuje się okno w_n , które go spełnia przez zastosowanie równania:

$$w_n = N w''_n / \sum_{k=0}^{N-1} w''_k \quad (1.53)$$

Dla okna prostokątnego $\text{NPSG}=1$ i są spełnione jednocześnie warunki (1.50) i (1.52).

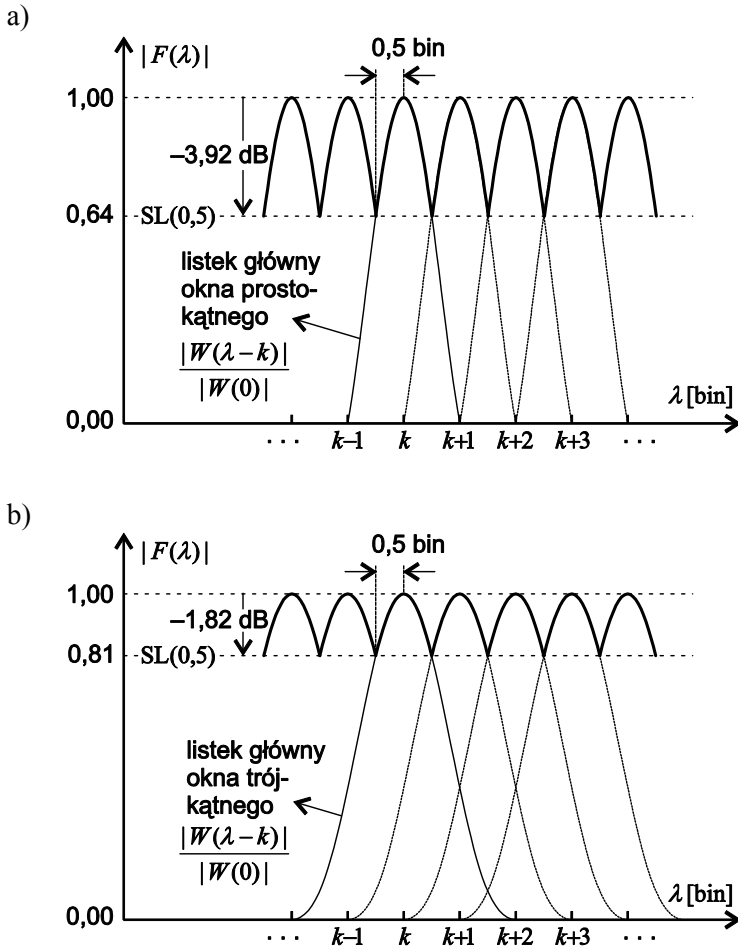
Współczynnik NNPG (Normalized Noise Power Gain) jest zdefiniowany jako współczynnik NPG (*Noise Power Gain*) [94] unormowany względem tej wartości dla okna prostokątnego [167]:

$$\text{NNPG} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_n^2 \quad (1.54)$$

Współczynnik SL(0,5) (Scalloping Loss) określa względny spadek amplitudy w odległości 0,5 bin od maksimum listka głównego:

$$\text{SL}(0,5) = \frac{|W(0,5)|}{|W(0)|} \quad (1.55)$$

Wartość współczynnika $\text{SL}(0,5)$ jest związana z efektem „zafalowania” (*picket fence effect*), którego nazwa wynika z wykresu kształtu listka głównego okna czasowego w zakresie $[-0,5; 0,5]$ bin powtórnego co 1 bin (rys. 1.1) [119]. Zafalowania te wyznaczają błąd estymacji amplitudy oscylacji w widmie, przy warunku braku interferencji składowych oscylacji między sobą, w funkcji jej częstotliwości. Dla wartości λ_k całkowitych k -ta próbka widma pokrywa się z lokalnym maksimum DtFT i błąd spowodowany efektem zafalowania jest zerowy, a dla wartości $\lambda_k = k + 0,5$ (dla k całkowitych) k -ta próbka widma jest odległa od lokalnego maksimum DtFT o 0,5 bin



Rys. 1.1. Efekt „zafalowania” (*picket fence effect*) – przykład dla okna:
a) prostokątnego, b) trójkątnego

i błąd spowodowany efektem zafalowania jest wówczas maksymalny, a jego wartość względna jest zdefiniowana przez (1.55). Błąd ten jest największy dla okna prostokątnego i przy wyznaczaniu amplitudy wynosi ok. $-3,92$ dB (tj. -36%), a dla innych typowych okien czasowych z [94] zawiera się w przedziale $[-2,2$ dB, $-0,8$ dB] (tj. $[-22\%$, -9%). Maksymalny błąd przy wyznaczaniu częstotliwości wynosi $\pm 0,5$ bin, a jego wartość nie zależy od stosowanego okna czasowego. Jednym z głównych powodów stosowania metod interpolacji widma opisanych w niniejszej pracy, w tym również metody LIDFT, jest potrzeba znacznego zmniejszenia błędów spowodowanych właśnie przez opisany efekt „zafalowania” połączony z faktem wyznacza-

nia widma w dyskretnych punktach (w najmniej korzystnej sytuacji w punktach o wartościach minimalnych krzywej z rys. 1.1, tj. dla wartości $SL(0,5)$).

Współczynnik ENBW (Equivalent Noise Band Width) okna czasowego jest zdefiniowany jako szerokość pasma idealnego filtra dolnoprzepustowego (o prostokątnym module transmitancji), który filtruje z szumu białego taką samą część energii jak dane okno czasowe. W odniesieniu do częstotliwości unormowanej szerokość ta wynosi [167]:

$$ENBW [\text{bin}] = \frac{NNPG}{(NPSG)^2} \quad (1.56)$$

a po uwzględnieniu (1.49), (1.54), (1.56) otrzymujemy [167]:

$$ENBW = N \left(\sum_{n=0}^{N-1} w_n^2 \right) / \left(\sum_{n=0}^{N-1} w_n \right)^2 \quad (1.57)$$

Za pomocą współczynnika ENBW można wyznaczyć stosunek sygnał/szum, którym charakteryzuje się widmo dyskretnoczasowej transformaty Fouriera z zastosowaniem danego okna czasowego. Okno czasowe inne niż prostokątne pogarsza właściwości statystyczne uzyskanego widma (rozd. 1.6). Odwrotność współczynnika ENBW jest nazywana w [94] współczynnikiem PG (*Processing Gain*).

Współczynnik PL (worst case Processing Loss) został wprowadzony w [94] jako heurystyczna miara łącząca ocenę polepszenia, z zastosowaniem okna innego niż prostokątne, błędu systematycznego spowodowanego efektem „zafalowania” i dyskretnym charakterem widma DFT (i zdefiniowanego przez (1.55)) i jednoczesnego pogorszenia błędu losowego spowodowanego wzmocnieniem szumu w widmie DFT (i zdefiniowanego przez (1.57)):

$$PL = \frac{ENBW}{SL^2(0,5)} \quad (1.58)$$

Poprawność tej miary, wprowadzonej w [94] w sposób intuicyjny, formalnie udowodnili Offelli i Petri [131, 132].

1.4. Okna czasowe z bazą kosinusową

Okna czasowe z bazą kosinusową (*cosine-class windows, cosine windows, cosine window family*) rzędu $(H-1)$ są definiowane przez współczynniki jego rozwinięcia w skończony kosinusowy szereg Fouriera o H współczynnikach:

$$w_n = \sum_{h=0}^{H-1} a_h \cos \frac{2\pi h(n - N/2)}{N} = \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h a_h \cos \frac{2\pi nh}{N}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1.59)$$

$$w_n = \sum_{h=0}^{H-1} a_h \cos \frac{2\pi nh}{N}, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (1.60)$$

a warunek unormowania (1.50) otrzymuje się dla numeracji naturalnej, przyjmując $n = N/2$ w (1.59) i dla numeracji symetrycznej, przyjmując $n = 0$ w (1.60):

$$\sum_{h=0}^{H-1} a_h = 1 \quad (1.61)$$

Jeśli okno czasowe o współczynnikach a'_h nie spełnia tego warunku, to można zastosować (1.51), skąd uzyskuje się:

$$a_h = a'_h \left(\sum_{l=0}^{H-1} a'_l \right)^{-1} \quad (1.62)$$

Transformata DtFT okna z bazą kosinusową wynika z (1.6), (1.17), (1.59):

$$W(\lambda) = \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h \frac{a_h}{2} [D_N(\lambda - h) + D_N(\lambda + h)] \quad (1.63)$$

która jest uogólnieniem zależności (1.29) dla okna Hanninga, a redukcja amplitudy listków bocznych kosztem poszerzenia listka głównego jest uzyskiwana w sposób analogiczny, ale z uwzględnieniem kolejnych przesunięć funkcji Dirichleta $D_N(\lambda \pm h)$ (dla $h \geq 2$). Dzięki temu możliwe jest kształtowanie właściwości charakterystyki widmowej w zależności od współczynników wagowych tych funkcji $((-1)^h a_h / 2)$.

Z równania (1.63) po uwzględnieniu (1.21) wynika, że:

$$a_h = \begin{cases} W(0) / N & \text{dla } h = 0 \\ 2W(h) / N & \text{dla } h = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.64)$$

Gdy w zależności (1.63) zastosuje się przybliżenie (1.24), tzn. funkcję $D(\lambda)$ zamiast $D_N(\lambda)$ oraz zależność (1.31), otrzymuje się:

$$W(\lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \sin(\pi\lambda) e^{-j\pi\lambda} \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h \frac{a_h}{\lambda^2 - h^2}, \quad \text{dla } \lambda \ll N \text{ oraz } N \gg 1 \quad (1.65)$$

Po zastosowaniu przybliżenia (1.25) zamiast (1.24) zachodzi:

$$W(\lambda) = \frac{\lambda}{\pi} \sin(\pi\lambda) e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h \frac{a_h}{\lambda^2 - h^2}, \text{ dla } \lambda \ll N \text{ oraz } N \gg 1 \quad (1.66)$$

Zależność (1.65) można również uzyskać korzystając z szeregu Shanona, wywodzącego się z szeregu interpolacyjnego Whittakera, będącego jedną z postaci szeregu kardynalnego (*cardinal series*) [97, 104]. Otóż najczęściej przedstawianym wzorem w kontekście twierdzenia o próbkowaniu jest właśnie szereg Shanona:

$$f(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} f(hT) \frac{\sin[\pi(t-hT)/T]}{\pi(t-hT)/T} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} f(hT) \operatorname{sinc}[\pi(t-hT)/T] \quad (1.67)$$

który mówi o (teoretycznej) możliwości odtworzenia sygnału analogowego z próbek sygnału $f(t)$, jeśli spełnione są warunki twierdzenia o próbkowaniu, a więc sygnał jest sygnałem o odpowiednio ograniczonym widmie. Ze względu na symetrię dualną transformaty Fouriera, wzór ten można zastosować do próbkowania widma dla sygnałów czasowych o ograniczonym czasie (tj. $f(t) = 0$ dla $|t| > t'/2$) i w odniesieniu do częstotliwości unormowanej $\lambda = ft'$ ma on wtedy postać:

$$F(\lambda) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} F(h) \frac{\sin(\pi(\lambda-h))}{\pi(\lambda-h)} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} F(h) \operatorname{sinc}(\pi(\lambda-h)) \quad (1.68)$$

Wzór ten więc zastosujemy do okna (1.60), ale zdefiniowanego dla czasu ciągłego:

$$w(t) = \begin{cases} \sum_{h=0}^{H-1} a_h \cos \frac{2\pi ht}{t'} & \text{dla } |t| < t'/2 \\ 0 & \text{dla } |t| > t'/2 \end{cases} \quad (1.69)$$

Po uwzględnieniu zależności (1.31) otrzymuje się z (1.68) szereg:

$$F(\lambda) = \sin(\pi\lambda) \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^h F(h)}{\pi(\lambda-h)} = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi} \left\{ \frac{F(0)}{\lambda} + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \left[\frac{F(h)}{(\lambda-h)} + \frac{F(-h)}{(\lambda+h)} \right] \right\} \quad (1.70)$$

Po zastosowaniu szeregu (1.70) do symetrycznego okna czasowego (1.69): $f(t) = w(t)$ (zatem $F(h) = W(h)$ jest funkcją rzeczywistą i parzystą: $W(-h) = W(h)$) i po uwzględnieniu (1.64) oraz (1.12), otrzymujemy zależność (1.65).

Składniki szeregu (1.65) można zapisać ze wspólnym mianownikiem:

$$W(\lambda) = e^{-j\pi\lambda} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} \frac{P(\lambda)}{\prod_{h=1}^{H-1} (\lambda^2 - h^2)}, \text{ dla } \lambda \ll N \text{ oraz } N \gg 1 \quad (1.71)$$

gdzie $P(\lambda)$ jest wielomianem zmiennej λ :

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left[\prod_{h=1}^{H-1} (\lambda^2 - h^2) \right] \left[\sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h \frac{a_h}{\lambda^2 - h^2} \right] = \sum_{h=0}^{H-1} \left[(-1)^h \frac{a_h}{\lambda^2 - h^2} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{H-1} (\lambda^2 - k^2) \right] \quad (1.72)$$

$$= \sum_{h=0}^{H-1} [(-1)^h a_h \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{H-1} (\lambda^2 - k^2)]$$

Dla całkowitych wartości λ otrzymuje się:

$$P(h) = (-1)^h a_h \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{H-1} (h^2 - k^2), \quad \text{dla } h = 0, 1, \dots, H-1 \quad (1.73)$$

Podane zależności zastosowano w projektowaniu okien I klasy Rife'a-Vincenta [151] (rozdz. 1.5).

Szereg (1.65) można też przekształcić, rozwijając $(\lambda^2 - h^2)^{-1}$ w szereg potęgowy zmiennej $(h/\lambda)^2$ – otrzymuje się wówczas dla $\lambda \geq H$:

$$W(\lambda) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} e^{-j\pi\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2m}} \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h h^{2m} a_h, \quad \text{dla } H \leq \lambda \ll N \text{ oraz } N \gg 1 \quad (1.74)$$

Nuttall [129] wykorzystał tę zależność oraz wynikające z definicji (1.69) zależności:

$$w(-t'/2) = \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h a_h \quad (1.75)$$

$$\left. \frac{d^m w(t)}{dt^m} \right|_{t=-t'/2} = w^{(m)}(-t'/2) = \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h h^{2m} a_h \quad (1.76)$$

do określenia asymptotycznej (dla $\lambda \gg H$) szybkości opadania amplitudy listków bocznych w funkcji częstotliwości dla okien czasowych z bazy kosinusowej ($H \ll N/2$, w praktyce najczęściej $H \leq 6$):

- jeśli okno (1.69) jest nieciągłe na krańcach przedziału ($w(-t'/2) \neq 0$), to listki boczne odległe od listka głównego ($\lambda \gg H$) opadają zaledwie 6 dB/oct ($W(\lambda) \sim 1/\lambda$ dla $\lambda \gg H$ na podstawie (1.74) i (1.75)),
- jeśli okno (1.69) jest ciągłe na krańcach przedziału ($w(-t'/2) = 0$), ale jego m -ta pochodna na krańcach przedziału jest nieciągła ($w^{(m)}(-t'/2) \neq 0$), to listki boczne odległe od listka głównego ($\lambda \gg H$) opadają $6(2m+1)$ dB/oct

($W(\lambda) \sim 1/\lambda^{2m}$ dla $\lambda \gg H$ na podstawie (1.74)–(1.76)), a ceną za zwiększoną szybkość opadania listków bocznych jest szerszy listek główny; warunek $w(-t'/2) = 0$, po uwzględnieniu (1.75) ma postać:

$$\sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h a_h = 0 \quad (1.77)$$

a warunek $w^{(m)}(-t'/2) = 0$ po uwzględnieniu (1.76) ma postać:

$$\sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h h^{2m} a_h = 0, \quad m \geq 1 \quad (1.78)$$

Okna z bazą kosinusową mają zwykle relatywnie małą liczbę współczynników, najczęściej $H \leq 6$. Dla $H = 1$ otrzymujemy okno prostokątne. Najbardziej znane okna z bazą kosinusową to: okno Hanninga (1.27), Hamminga (1.38), Blackmana (1.39). Zaletą okien z bazą kosinusową jest możliwość efektywnej realizacji zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości, ale przede wszystkim duże możliwości wykorzystania ich wzorów definicyjnych (1.59), (1.60) do wyznaczania współczynników a_h dla różnych celów projektowych:

- maksymalizacji szybkości opadania listków bocznych (okna I klasy Rife'a–Vincenta) [151],
- maksymalizacji tłumienia listków bocznych i ich stałej amplitudy [19],
- minimalizacji zmian charakterystyki amplitudowej w okolicach maksimum listka głównego (okna maksymalnie „płaskie”) [74, 149, 154], co zmniejsza błędy estymacji amplitudy spowodowane dyskretnym charakterem widma DFT i efektem „zafałowania”, ale kosztem powiększenia błędów estymacji częstotliwości,
- minimalizacji poziomu listków bocznych przy zadaniu wybranych parametrów takich jak: szybkości opadania listków bocznych, liczby zer charakterystyki widmowej, szerokości listka głównego i szybkości opadania listków bocznych, poziomu listków bocznych od wybranej częstotliwości [162].

Dla okien z bazą kosinusową można wybrane parametry tych okien wyznaczyć z definicji (1.49), (1.54), (1.56), (1.59) w zależności od współczynników okna [26]:

$$\text{NPSG} = a_0 \quad (1.79)$$

$$\text{NNPG} = a_0^2 + 0,5 \sum_{h=1}^{H-1} a_h^2 \quad (1.80)$$

$$\text{ENBW} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{H-1} \left(\frac{a_h}{a_0} \right)^2 \quad (1.81)$$

W projektowaniu okien z bazą kosinusową punktem wyjściowym są ich definicje w dziedzinie czasu (1.59), (1.60) oraz widmo (1.65), (1.71). Rife i Vincent zdefiniowali trzy klasy okien z bazy kosinusowej (rozdz. 1.3), z których w rozdz. 1.5 szerzej omówiono I klasę.

1.5. Okna czasowe I klasy Rife'a–Vincenta

Okna czasowe I klasy Rife'a–Vincenta (*I class Rife–Vincent windows, binomial coefficient windows, maximum decay sidelobes windows, H-term max. decay windows*) [26, 129, 151] to okna z bazą kosinusową, których współczynniki optymalizowane są pod kątem maksymalnego tłumienia listków bocznych dla warunku $\lambda \gg 1$. Rife i Vincent stwierdzili w [151], że aby $|W(\lambda)|$ z zależności (1.71) najszybciej malało ze wzrostem λ , to $P(\lambda)$ powinno być stałą, czyli $P(\lambda) = P(0)$. Na tej podstawie oraz (1.73) dla $\lambda = h$:

$$(-1)^h a_h \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq h}}^{H-1} (h^2 - k^2) = a_0 \prod_{k=1}^{H-1} (-k^2), \quad \text{dla } h = 0, 1, \dots, H-1 \quad (1.82)$$

czyli

$$(-1)^h a_h \prod_{k=0}^{h-1} (h-k) \prod_{k=0}^{h-1} (h+k) \prod_{k=h+1}^{H-1} (h-k) \prod_{k=h+1}^{H-1} (h+k) = a_0 (-1)^{H-1} ((H-1)!)^2 \quad (1.83)$$

a uwzględniając w (1.83) równania:

$$\prod_{k=0}^{h-1} (h-k) = \prod_{k=1}^h k = h! \quad (1.84)$$

$$\prod_{k=0}^{h-1} (h+k) = \prod_{k=1}^{2h-1} k / \prod_{k=1}^{h-1} k = (2h-1)! / (h-1)! \quad (1.85)$$

$$\prod_{k=h+1}^{H-1} (h-k) = (-1)^{H-1-h} \prod_{k=1}^{H-1-h} k = (-1)^{H-1-h} (H-1-h)! \quad (1.86)$$

$$\prod_{k=h+1}^{H-1} (h+k) = \prod_{k=1}^{H-1+h} k / \prod_{k=1}^{2h} k = (H-1+h)! / (2h)! \quad (1.87)$$

otrzymuje się wynik z [151]:

$$a_h = 2a_0 \frac{[(H-1)!]^2}{(H-1-h)!(H-1+h)!} = 2a_0 \prod_{k=1}^h \frac{H-1-h+k}{H-1+k} = 2a_0 \prod_{k=0}^{h-1} \frac{H-h+k}{H+k}, \quad \text{dla } h \geq 1 \quad (1.88)$$

Rife i Vincent założyli, że $a_0 = 1$ i stąd wzór (1.88) w pełni definiuje okno o maksymalnym asymptotycznym zmniejszaniu się amplitudy listków bocznych. Definicja ta nie spełnia warunku unormowania (1.50), ale w praktycznym zastosowaniu nie jest to istotna przeszkoda. Aby jednak uzyskać warunek unormowania (1.50) i odpowiadający mu (1.61), można wykorzystać (1.62) w odniesieniu do (1.88). W tym celu w pierwszym kroku przekształceń zależność (1.88) można zapisać w postaci:

$$a_h = 2a_0 \frac{[(H-1)!]^2}{(H-1-h)!(H-1+h)!} = 2a_0 \left(\frac{2(H-1)}{H-1} \right)^{-1} \left(\frac{2(H-1)}{H-1-h} \right), \quad \text{dla } h \geq 1 \quad (1.89)$$

Ze wzoru Newtona: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ wynika, że $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} = 2^{2n}$ (dowód otrzymano w [105] na podstawie układu dwóch równań: dla $a=b=1$ i $n \rightarrow 2n$ oraz dla $a=1, b=-1$ i $n \rightarrow 2n$), a stąd i (1.89) oraz $a_0 = 1$ otrzymuje się:

$$\sum_{h=0}^{H-1} a_h = 2 \left(\frac{2(H-1)}{H-1} \right)^{-1} \sum_{h=0}^{H-1} \left(\frac{2(H-1)}{H-1-h} \right) = 2^{2H-2} \left(\frac{2(H-1)}{H-1} \right)^{-1} \quad (1.90)$$

i uwzględniając dodatkowo (1.89) i (1.62), uzyskuje się zależności końcowe:

$$a_0 = \frac{C_{2^{2H-2}}^{H-1}}{2^{2H-2}}, \quad a_h = \frac{C_{2^{2H-2}}^{H-h-1}}{2^{2H-3}}, \quad h=1, \dots, H-1 \quad (1.91)$$

gdzie:

$$C_m^p = \binom{m}{p} = \frac{m!}{(m-p)!p!} \quad (1.92)$$

Zależności (1.91) określające współczynniki okna I klasy Rife'a–Vincenta spełniającego warunek unormowania (1.50), zostały po raz pierwszy opublikowane przez Belegę [26], gdzie autor uzyskał je w sposób heurystyczny i udowodnił *ex-post*, że spełniają warunki zdefiniowane przez (1.61), (1.77), (1.78).

Widmo okien o współczynnikach (1.91) można uzyskać, korzystając z zależności (1.88) i (1.65) [151] lub z (1.91) i (1.24) albo z dokładniejszego przybliżenia (1.25), jak w [28, 31]:

$$W(\lambda) = \frac{N}{2^{2H-2}} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \frac{(2H-2)!}{\prod_{h=1}^{H-1} (h^2 - \lambda^2)}, \text{ dla } \lambda \ll N \text{ oraz } N \gg 1 \quad (1.93)$$

Analityczna znajomość (1.91) współczynników okna a_h umożliwia również wyznaczenie parametrów (1.48), (1.55), (1.79)–(1.81) [31]:

$$\text{MLBW} = H \quad (1.94)$$

$$\text{SL}(0,5) = \frac{2^{4H-3} [(H-1)!]^4}{\pi(2H-1)!(2H-2)!} \quad (1.95)$$

$$\text{NPSG} = a_0 = \frac{C_{2H-2}^{H-1}}{2^{2H-2}} \quad (1.96)$$

$$\text{NNPG} = a_0^2 + 0,5 \sum_{h=1}^{H-1} a_h^2 = \frac{C_{4H-4}^{2H-2}}{2^{4H-4}} \quad (1.97)$$

$$\text{ENBW} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{H-1} \left(\frac{a_h}{a_0} \right)^2 = \frac{\text{NNPG}}{(\text{NPSG})^2} = \frac{C_{4H-4}^{2H-2}}{(C_{2H-2}^{H-1})^2} \quad (1.98)$$

Wartości współczynników (1.91) dla okien z liczbą współczynników $H \leq 7$ oraz podstawowe parametry zawiera tab. 1.1. Zauważmy, że współczynniki okna spełniają warunek unormowania (1.61) oraz warunek (1.77), a także (1.78).

Tabela 1.1. Parametry okien I klasy Rife'a–Vincenta

Parametr okna	H						
	1 – okno prost.	2 – okno Hanninga	3	4	5	6	7
a_0	1	1/2	3/8	10/32	35/128	126/512	462/2048
a_1	–	1/2	4/8	15/32	56/128	210/512	792/2048
a_2	–	–	1/8	6/32	28/128	120/512	495/2048
a_3	–	–	–	1/32	8/128	45/512	220/2048
a_4	–	–	–	–	1/128	10/512	66/2048
a_5	–	–	–	–	–	1/512	12/2048
a_6	–	–	–	–	–	–	1/2048
MLBW	1	2	3	4	5	6	7
LISTKI BOCZNE [DB/OCT]	6	18	30	42	54	66	78
SL(0,5)	0,637	0,859	0,905	0,931	0,946	0,956	0,962
ENBW	1,00	1,50	1,94	2,31	2,63	2,91	3,17

1.6. Estymacja widma DFT i DtFT sygnału zakłóconego szumem

Załóżmy, że próbki sygnału y_n ($n=0, \dots, N-1$) są zakłócone addytywnym szumem białym Δy_n o średniej $\mu=0$ i wariancji σ^2 :

$$\hat{y}_n = y_n + \Delta y_n \quad (1.99)$$

Taki model szumu zakłada, że ciąg N próbek szumu Δy_n jest ciągiem zmiennych niezależnych o następujących parametrach:

$$\mu = E[\Delta y_n] = 0 \quad (1.100)$$

$$\sigma^2 = \text{var } \Delta y_n = E[\Delta y_n - E[\Delta y_n]]^2 = E[\Delta y_n]^2 \quad (1.101)$$

$$E[\Delta y_n \Delta y_m] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m \end{cases} \quad (1.102)$$

gdzie $E[x]$ – wartość oczekiwana zmiennej losowej x .

Stopień „zaszumienia” sygnału użytecznego określa się w dziedzinie czasu przez współczynnik SNR (*Signal to Noise Ratio*) jako stosunek mocy sygnału użytecznego do mocy szumu obecnego w sygnale. Dla sygnału użytecznego (1.1) lub (1.2) oraz zależności (1.99)–(1.102) i niezależności statystycznej składowych oscylacji, można go wyrazić przez wzór:

$$\text{SNR} = \sum_m \text{SNR}_m \quad (1.103)$$

gdzie SNR_m – składnik całkowitego SNR odpowiadający m -tej składowej oscylacji obecnej w sygnale dla modelu (1.1) lub (1.2):

$$\text{SNR}_m = \begin{cases} \frac{A_m^2 / 2}{\sigma^2} = \frac{A_m^2}{2\sigma^2} & \text{dla } m = 1, \dots, K \\ \frac{|B_m|^2}{\sigma^2} & \text{dla } m = 1, \dots, P \end{cases} \quad (1.104)$$

Część rzeczywista próbek widma DtFT szumu Δy_n ($n=0, \dots, N-1$) oraz jej część urojona są zmiennymi losowymi, a ponieważ zwykle liczba próbek sygnału $N \gg 1$, to na mocy centralnego twierdzenia granicznego, część rzeczywistą widma i część urojoną można z dużą dokładnością przybliżyć zmienną losową o rozkładzie normalnym [159].

Schoukens i Renneboog wykazali [159], że estymator $\hat{F}(k)$ widma DFT szumu Δy_n posiada następujące właściwości:

$$\mu_{\text{DFT}} = E(\hat{F}(k)) = \begin{cases} N\mu & \text{dla } k=0 \\ 0 & \text{dla } k \neq 0 \end{cases} \quad (1.105)$$

$$\sigma_{\text{ReIm}\{\text{DFT}\}}^2 = \sigma_{\text{Re}\{\text{DFT}\}}^2 = \sigma_{\text{Im}\{\text{DFT}\}}^2 = E[(\text{Re } \hat{F}(k))^2] = E[(\text{Im } \hat{F}(k))^2] = \frac{N}{2} \sigma^2 \quad (1.106)$$

$$E[(\text{Re } \hat{F}(k))(\text{Im } \hat{F}(k))] = 0 \quad (1.107)$$

Część widma DFT sygnału (1.99), dla której powinno ono być zerowe ($F(k)=0$) ma niezerową amplitudę spowodowaną niezerową wartością (1.106), a szum ten jest zwykle określany terminem *noise floor*. Jest on zmienną losową i jest najczęściej obserwowany w oscyloskopach wyposażonych w moduł FFT lub w analizatorach widma jako nieregularny szum w widmie amplitudowym. Często zdarza się, że obserwowany na wykresie widma jest jedynie *noise floor* spowodowany szumem kwantowania (jeśli inne zakłócenia są pomijalne).

Solomon, analizując zastosowanie wzorów (1.105), (1.106) dla szumu kwantowania [167], zwraca uwagę, że można na tej podstawie wyznaczyć parametry rozkładu estymatora $|\hat{F}(k)|$ oraz $|\hat{F}(k)|^2$ szumu, gdyż część rzeczywista i część urojona $\hat{F}(k)$ to zmienne losowe o rozkładzie normalnym i parametrach określonych przez (1.105)–(1.107), a wówczas $|\hat{F}(k)|$ ma rozkład Rayleigha. Z zależności na pierwszy i drugi moment tego rozkładu oraz (1.105), (1.106) wynikają uśrednione wartości *noise floor*:

$$\mu_{|\text{DFT}|} = E(|\hat{F}(k)|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{\text{ReIm}\{\text{DFT}\}} = \frac{\sqrt{\pi N}}{2} \sigma \quad (1.108)$$

$$\sigma_{|\text{DFT}|}^2 = \mu_{|\text{DFT}|^2} = E(|\hat{F}(k)|^2) = 2\sigma_{\text{ReIm}\{\text{DFT}\}}^2 = N\sigma^2 \quad (1.109)$$

Zależności (1.104) i (1.109) są wystarczające do zdefiniowania współczynnika $\text{SNR}_{m \text{ DFT}}$ dla m -tej składowej oscylacji w widmie DFT jako:

$$\text{SNR}_{m \text{ DFT}} = \begin{cases} \frac{(NA_m/2)^2}{\sigma_{|\text{DFT}|}^2} = N \frac{(A_m/2)^2}{\sigma^2} = \frac{N}{2} \text{SNR}_m & \text{dla sinusoidy} \\ \frac{(N|B_m|)^2}{\sigma_{|\text{DFT}|}^2} = N \frac{|B_m|^2}{\sigma^2} = N \text{SNR}_m & \text{dla oscylacji zespolonej} \end{cases} \quad (1.110)$$

lub w skali logarytmicznej:

$$\text{SNR}_{m \text{ DFT}} [\text{dB}] = \begin{cases} \text{SNR}_m [\text{dB}] + 20 \log_{10} \frac{N}{2} & \text{dla sinusoidy} \\ \text{SNR}_m [\text{dB}] + 20 \log_{10} N & \text{dla oscylacji zespolonej} \end{cases} \quad (1.111)$$

Szum kwantowania b -bitowego typowego przetwornika A/C i o ziarnie kwantowania równym Q (otrzymujemy go przez podzielenie zakresu przetwornika przez 2^b) modeluje się najczęściej zmienną losową o rozkładzie równomiernym [111, 172]. Jego wariancja wynosi wówczas $Q^2/12$. Podstawiając tę wartość do (1.108) i (1.109), uzyskuje się wartości *noise floor* szumu kwantowania stosowanego przetwornika. Poziom *noise floor* przetwornika A/C można teoretycznie zmniejszyć (jak wynika to z (1.110), (1.111)) bez zmiany przetwornika A/C przez zwiększenie liczby próbek N transformaty DFT. W praktyce metoda ta jest jednak ograniczona innymi rodzajami błędów przetwornika, np. nieliniowością. Ta sama uwaga dotyczy również zmniejszenia poziomu zakłóceń w DFT innych niż szum kwantowania. Ich zmniejszenie przez zwiększenie N jest możliwe dopóki zakłócenie spełnia założone warunki szumu białego. Ponadto znaczące zwiększenie N albo wymaga szybszego przetwornika A/C, albo założenia stacjonarności sygnału w dłuższym czasie, a często warunki te są trudne do spełnienia lub niemożliwe.

W zależnościach (1.110), (1.111) znajduje się liczbowe potwierdzenie prostego intuicyjnie faktu, że sygnał wąskopasmowy zakłócony szumem szerokopasmowym (zwłaszcza szumem białym) ma korzystniejszy stosunek sygnał/szum w dziedzinie DFT niż w dziedzinie czasu. Dla sygnału sinusoidalnego zysk ten jest $(N/2)$ -krotny, a dla oscylacji zespolonej N -krotny. Jednym z zastosowań przedstawionych zależności jest pomiar efektywnej liczby bitów przetwornika A/C przez pomiar poziomu *noise floor* w DFT w stosunku do sygnału użytecznego. Można to wykonać metodą Welch'a uśredniania periodogramu $|\hat{F}(k)|^2$ (równanie (1.109)), można też analogicznie uśredniać moduł amplitudy $|\hat{F}(k)|$ (równanie (1.108)). Ponieważ $E(|\hat{F}(k)|^2) \neq (E|\hat{F}(k)|)^2$, więc uśrednianie $|\hat{F}(k)|$ daje stosunek sygnał/szum korzystniejszy (o wartość $10 \log_{10}(4/\pi) \cong 1,05 \text{ dB}$) niż uśrednianie $|\hat{F}(k)|^2$ [167]. W praktyce do pomiaru parametrów przetworników A/C (głównie efektywnej liczby bitów i poziomu zniekształceń nieliniowych) stosuje się oprócz wspomnianego uśredniania również okna czasowe inne niż prostokątne, a ich dobór musi być ściśle związany z dokładnością badanego przetwornika A/C [25, 168].

Solomon uogólnia zależności (1.109) i (1.110) na przypadek obliczania DFT z zastosowaniem okna innego niż prostokątne (ale z zachowaniem warunku próbkowania synchronicznego, tj. sytuacji, w której nie jest zauważalny w DFT przeciek widma przy stosowaniu okna prostokątnego) [167]. Okno inne niż prostokątne

(o współczynniku $\text{ENBW} > 1$) wzmacnia szum w DFT proporcjonalnie do wartości ENBW:

$$\sigma_{\text{DFT}}^2 = \text{ENBW} \cdot N\sigma^2 \quad (1.112)$$

$$\text{SNR}_{m \text{ DFT}} = \begin{cases} \frac{N}{2} \frac{\text{SNR}_m}{\text{ENBW}} & \text{dla sinusoidy} \\ N \frac{\text{SNR}_m}{\text{ENBW}} & \text{dla oscylacji zespolonej} \end{cases} \quad (1.113)$$

Proporcjonalność σ_{DFT}^2 czy σ_{DFT}^2 od ENBW (a więc $\text{SNR}_{m \text{ DFT}}$ od ENBW^{-1}) jest również stwierdzana w pracach [131, 132].

W bardziej szczegółowych analizach można uwzględnić wartość współczynnika korelacji dwóch próbek widma DtFT (DFT) leżących na osi częstotliwości blisko siebie (gdym odległość ta wynosi więcej niż połowa szerokości listka głównego zastosowanego okna czasowego, wówczas można przyjąć, że próbki te są nieskorelowane) [131], czy też analogiczną zależność dla okien z bazą kosinusową [127].

1.7. Metoda uzupełniania zerami

Metoda uzupełniania zerami stosowana w obliczaniu widma sygnału próbkowanego y_n ($n = 0, \dots, N-1$ w numeracji naturalnej lub $n = -N/2, \dots, N/2-1$ w numeracji symetrycznej) oraz pomnożonego przez okno czasowe w_n , a więc sygnału tworzącego N -elementowy zbiór $\{y_n w_n\}_N$, polega na rozszerzeniu tego zbioru o próbki zerowe, a następnie obliczeniu widma dla tak uzupełnionego sygnału. Rozszerzenie zbioru N -elementowego $\{y_n w_n\}_N$ do zbioru NR -elementowego $\{y_n w_n\}_{NR}$ oznacza R -krotne uzupełnienie zerami i może być przeprowadzone na kilka sposobów, w zależności od tego czy próbki zerowe będą dodane w centralnej części sygnału próbkowanego, czy też na początku lub końcu sygnału. Możliwe jest też odpowiednie połączenie tych wersji wraz z jednoczesnym przestawianiem kolejności wybranych segmentów danych w celu uzyskania odpowiednich właściwości numerycznych danego algorytmu obliczania widma (jak np. zgodnie z (1.13) w celu uzyskania właściwości (1.14)). Celem zaś metody R -krotnego uzupełniania zerami, rozumianej jako metody interpolacji widma, jest próbkowanie widma (1.4) (dla numeracji naturalnej) lub (1.9) (dla numeracji symetrycznej) z krokiem $1/R$ bin zamiast z krokiem 1 bin (jak jest w (1.7)); k -tą próbkę tak policzonego widma oznacza się przez $F_k \{y_n w_n\}_{NR}$ i definiuje za pomocą zależności (1.4) lub (1.9) przez podstawienie w nich $\lambda = k/R$:

$$F_k \{y_n w_n\}_{NR} = F_{k/R} = F(\lambda = k / R) = \sum_n y_n w_n e^{-j2\pi nk/NR} \quad (1.114)$$

Ze względów obliczeniowych najkorzystniej jest zdefiniować uzupełnianie zerami w sposób następujący:

$$\{z_n\}_{NR} = \{z_0, \dots, z_{N/2-1}, 0, \dots, 0, z_{-N/2}, \dots, z_{-1}\}_{NR}, \quad \text{dla } n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (1.115)$$

$$\{z_n\}_{NR} = \{z_0, \dots, z_{N-1}, 0, \dots, 0\}_{NR}, \quad \text{dla } n = 0, \dots, N-1 \quad (1.116)$$

ponieważ korzystając ze wzorów (1.8) i (1.115), otrzymuje się dla $n = -N/2, \dots, N/2-1$:

$$\begin{aligned} \text{FFT}_k \{y_n w_n\}_{NR} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi nk/NR} + \sum_{n=NR-N/2}^{NR-1} y_{n-NR} w_{n-NR} e^{-j2\pi nk/NR} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi nk/NR} + \sum_{n=-N/2}^{-1} y_n w_n e^{-j2\pi(n+NR)k/NR} = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi nk/NR} \end{aligned} \quad (1.117)$$

oraz korzystając ze wzorów (1.8) i (1.116), otrzymuje się dla $n = 0, \dots, N-1$:

$$\text{FFT}_k \{y_n w_n\}_{NR} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n e^{-j2\pi nk/NR} \quad (1.118)$$

a następnie po uwzględnieniu wzoru (1.114) w (1.117), (1.118) uzyskuje się zależność:

$$F_k \{y_n w_n\}_{NR} = \text{FFT}_k \{y_n w_n\}_{NR} \quad (1.119)$$

Zależność (1.119) jest prawdziwa zarówno dla $n = -N/2, \dots, N/2-1$ (po wykorzystaniu (1.115)), jak i $n = 0, \dots, N-1$ (po wykorzystaniu (1.116)). Oznacza to, że w celu uzyskania widma sygnału y_n indeksowanego dla $n = -N/2, \dots, N/2-1$ należy próbki te pomnożyć przez okno czasowe w_n , następnie uzupełnić zerami wraz z zamianą kolejności próbek w sposób zdefiniowany przez (1.115) i wykonać algorytm FFT dla tak zdefiniowanego zbioru wartości. Uzyskuje się wówczas próbki widma wg wzoru (1.9) z krokiem $1/R$ bin. Natomiast w celu uzyskania widma sygnału y_n indeksowanego dla $n = 0, \dots, N-1$ postępowanie jest analogiczne. Po pomnożeniu próbek przez okno czasowe uzupełnia się zerami w sposób zdefiniowany przez (1.116) i wykonuje algorytm FFT, uzyskując próbki widma wg wzoru (1.4) również z krokiem $1/R$ bin. Chociaż uzupełnianie zerami wg wzoru (1.116) wydaje się prostsze niż wg wzoru (1.115), gdyż w pierwszym przypadku nie ma zamiany kolejności próbek, jednak w praktyce różnica ta nie ma istotnego znaczenia. W przypadku np. stosowania tzw. bufora kołowego (powszechnie stosowanego np. w aplikacjach procesorów sygnałowych [24]) inna będzie jedynie wartość początkowa wskaźnika bufora

kołowego (dla (1.115) wskaźnik początkowy będzie wskazywać próbkę $z_{-N/2}$, a dla (1.116) wskaźnik początkowy wskaże próbkę z_0) i w obu przypadkach wskaźnik bufora będzie inkrementowany do kolejnych elementów tablicy z zachowaniem reguł typowych dla działania bufora kołowego.

Inny sposób uzupełniania zerami niż zdefiniowany przez (1.115), (1.116) również umożliwia obliczanie widma (1.4) lub (1.9) z użyciem algorytmu FFT, ale wymaga wykonania dodatkowych obliczeń, np. dla $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \text{FFT}_k \{y_n w_n, 0, \dots, 0\}_{NR} &= \sum_{n=0}^{N-1} y_{n-N/2} w_{n-N/2} e^{-j2\pi nk/NR} = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi(n+N/2)k/NR} \\ &= e^{-j\pi k/R} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi nk/NR} = e^{-j\pi k/R} F_k \{y_n w_n\}_{NR} \end{aligned} \quad (1.120)$$

a więc występuje dodatkowo mnożenie przez funkcję $e^{-j\pi k/R}$.

Metoda uzupełniania zerami przy obliczaniu widma sygnału za pomocą algorytmu FFT jest stosowana nie tylko w celu zmniejszenia kroku próbkowania widma. Innym powodem jej stosowania jest uzupełnienie liczby próbek wartościami zerowymi do takiej ich liczby, która umożliwia użycie algorytmu FFT w przypadku, gdy liczba próbek nie spełnia wymagań tego algorytmu. Przykładowo, jeśli uzyskano z przetwornika A/C 800 próbek sygnału, a dysponujemy procedurą FFT typu *radix-2*, to mamy dwie możliwości: wykorzystać w algorytmie tylko 512 próbek z przetwornika A/C (rezygnując z informacji zawartej w pozostałych próbkach) lub uzupełnić próbkami zerowymi wszystkie 800 próbek sygnału do całkowitej liczby 1024 (lub 2048, 4096 itp.) i dla takiego zbioru próbek zastosować algorytm FFT. Jest to częsty przypadek stosowany w praktyce, gdzie jedynym celem metody uzupełniania zerami jest tylko spełnienie wymagań co do liczby próbek stosowanego algorytmu FFT. W takim przypadku parametr R jest mniejszy niż 2, a często tylko nieznacznie większy niż 1. Ta numeryczna właściwość metody uzupełniania zerami, choć w praktyce bardzo przydatna, nie jest celem analizy niniejszej pracy, gdyż nie jest związana ze znaczącą poprawą dokładności estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego. Taką poprawę dokładności uzyskuje się natomiast wraz ze znaczącym zwiększeniem wartości parametru R , jednakże po spełnieniu dodatkowych warunków, które w istotny sposób ograniczają jej praktyczne wykorzystanie. W dokładniejszej analizie tych ograniczeń można wykorzystać zależność na błąd względny $\delta_Z |B_k|$ estymacji modułu amplitudy $|B_k|$ metodą uzupełniania zerami (okno czasowe + uzupełnianie zerami + FFT) sygnału będącego sumą dwóch oscylacji zespolonych: pierwszej o amplitudzie zespolonej B_k i częstotliwości unormowanej λ_k , drugiej o parametrach (B_i, λ_i) i wzajemnej odległości obu składowych w widmie równej $|\lambda_k - \lambda_i|$ [60, 62]:

$$\max \delta_Z |B_k| \approx \delta_{1Z} |B_k| + \delta_{2Z} |B_k| \quad (1.121)$$

gdzie w przypadku stosowania okna trójkątnego składowe błędy (1.121) są wyznaczone przez:

$$\delta_{1Z} |B_k| \approx 0,206 / R^2 \quad (1.122)$$

$$\delta_{2Z} |B_k| \approx \frac{|B_i| |W(\lambda_k - \lambda_i)|}{|B_k| |W(0)|} \quad (1.123)$$

Zależność (1.121) oznacza, że maksymalny błąd estymacji modułu amplitudy składowej (B_k, λ_k) jest sumą dwóch błędów. Pierwszy z nich $(\delta_{1Z} |B_k|)$ jest spowodowany dyskretnym charakterem widma DFT oraz efektem „zafalowania” (rys. 1.1) i można go, zgodnie z (1.122), zmniejszyć, zwiększając liczbę uzupełnianych próbek zerowych, a drugi $(\delta_{2Z} |B_k|)$ jest spowodowany przeciekiem widma od składowej (B_i, λ_i) i nie zależy od parametru R , a jedynie od odległości między składowymi, stosunkiem ich amplitud i charakterystyką widmową $W(\lambda)$ stosowanego okna czasowego. Istotnym ograniczeniem metody uzupełniania zerami jest więc składnik (1.123), który powoduje, że w wielu sytuacjach zwiększanie liczby uzupełnianych zer nie spowoduje zmniejszenia błędu całkowitego (1.121). Analogiczne ograniczenie dotyczy również błędu estymacji częstotliwości [60]. Przewyciężenie tego ograniczenia jest możliwe w metodzie LIDFT wykorzystującej technikę uzupełniania zerami (rozdz. 3, 4), w której zwiększanie liczby uzupełnianych zer prowadzi do zmniejszenia również składnika spowodowanego przeciekiem widma przez jego odpowiednie uwzględnienie w równaniach metody LIDFT.

2. Metody interpolacji widma

2.1. Wprowadzenie

Założmy, że częstotliwość unormowana λ_k oscylacji zespolonej z modelu (1.2) spełnia warunek:

$$\lambda_k \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}] \quad (2.1)$$

co oznacza, przy założeniu pomijalnego wpływu efektu przecieku widma od innych składowych (*long-range leakage*) oraz braku szumu, że jest spełniony warunek:

$$|F(k)| \geq |F(k+1)| \quad \text{oraz} \quad |F(k)| \geq |F(k-1)| \quad (2.2)$$

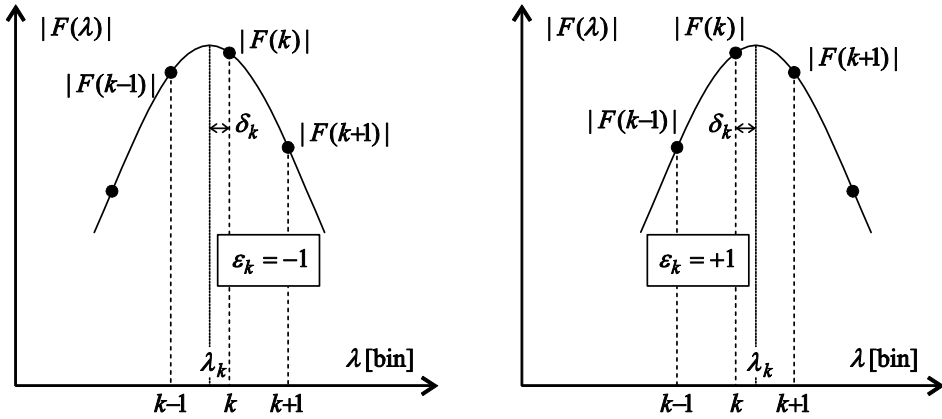
a więc $|F(k)|$ jest lokalnym maksimum w widmie DFT i jest ono położone w odległości δ_k ($\delta_k \leq 0,5$) od lokalnego maksimum DFT (rys. 2.1), które leży pomiędzy punktem $|F(k)|$ a $|F(k + \varepsilon_k)|$, gdzie:

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{gdy } |F(k+1)| > |F(k-1)| \\ -1 & \text{gdy } |F(k+1)| < |F(k-1)| \end{cases} \quad (2.3)$$

Celem interpolacji jest wyznaczenie wartości δ_k z obliczonego widma DFT, a z niej częstotliwości unormowanej z równania:

$$\lambda_k = k + \varepsilon_k \delta_k \quad (2.4)$$

Wyznaczenie λ_k jest możliwe przez odpowiednie iteracyjne połączenie metod nieparametrycznej interpolacji widma wyszczególnionych w końcowej części rozdz. 1.1. W pierwszym etapie wstępnie wyznacza się lokalne maksimum widma z wykorzystaniem metody uzupełniania zerami. W drugim etapie precyzyjnie wyznacza się maksimum widma przez dychotomiczne (względem osi częstotliwości) obliczanie dodatkowych próbek widma [188], np. algorytmem Goertzela. Praca [95] wykorzystuje również w takich iteracjach transformatę *chirp-Z*. Jednak w większości przypadków



Rys. 2.1. Definicja znaku ε_k poprawki częstotliwości δ_k w metodach interpolacji widma

metody interpolacji widma bazują na bardziej złożonej matematycznie analizie problemu, dzięki czemu cechują je korzystniejsze właściwości numeryczne i/lub dokładniejsza estymacja.

Wyznaczenie δ_k może odbywać się na podstawie dwóch (interpolacja dwupunktowa) najbliższych wartości DFT ($F(k)$ i $F(k + \varepsilon_k)$), trzech (interpolacja trzypunktowa) wartości ($F(k)$ i $F(k \pm 1)$) lub więcej (interpolacja wielopunktowa). W zależności od założeń metod interpolacyjnych zakłada się w nich, że albo przeciek widma pochodzący od innych składowych jest pomijalny, tzn. że rzeczywiste położenie składowej oscylacji w widmie pokrywa się z maksimum lokalnym DtFT, albo też stosowane wzory interpolacyjne mogą uwzględniać ten przeciek, wyznaczając wówczas rzeczywiste położenie oscylacji w widmie, a nie położenie maksimum lokalnego DtFT. Stosowane wzory interpolacyjne mogą wyznaczać δ_k w sposób jawny (niewymagający procedur iteracyjnych) lub uwikłany, który wymaga stosowania procedur iteracyjnych.

W rozdziale 2 podano znane procedury interpolacyjne wyznaczania λ_k przez wyznaczenie δ_k , a następnie wyznaczania pozostałych parametrów oscylacji (amplitudy i fazy). Ze względu na obszerność materiału pominięto więc wiele wzorów wyznaczających amplitudę i fazę, koncentrując się na estymacji częstotliwości, ponieważ wzory te bazują na znajomości częstotliwości λ_k . Dokładne wyznaczenie wartości δ_k warunkuje dokładne wyznaczenie amplitudy i fazy. Szczegółowe analizy interpolacji DFT odnoszące się wyłącznie do wyznaczania fazy składowych oscylacji są zawarte w pracach [7, 8, 12, 80].

Niewzględniono w szerszym opisie metody interpolacji wymagające procedur iteracyjnych oraz procedur interpolacji wykorzystujących zmienność kolejnych seg-

mentów próbek danych przesuniętych w czasie, a więc bazujących na zmianach charakterystyki fazowej obliczanego widma DFT. Bardziej szczegółowy opis tych metod można znaleźć w [3, 148, 156, 183, 189]. Pominięto też stosowanie iteracyjne w celu uwzględnienia przecieku widma metod ze swej natury nieiteracyjnych i nieuwzględniających w swoich równaniach przecieku widma od innych składowych (*long-range leakage*) [67, 78, 116–118, 150]. Zdaniem autora metody te mogą mieć takie iteracyjne zastosowanie tylko w szczególnych sytuacjach przy dodatkowej (w stosunku do metod szerzej opisanych w niniejszej pracy) wiedzy *a priori* o sygnale i starannym zbadaniu warunków zbieżności stosowanej iteracji i wymagań obliczeniowych.

Omówienie znanych metod interpolacji widma (rozd. 2.3–2.6) poprzedzone jest rozdz. 2.2, dotyczącym wybranych zagadnień estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego zakłóconego szumem. Jest to rozwinięcie rozdz. 1.6 ukierunkowane dla konkretnej klasy sygnałów – sygnału wieloczęstotliwościowego oraz w kontekście metod interpolacji widma. Właściwości statystyczne metod interpolacji widma (opisujące w sposób jakościowy i ilościowy odporność metody na szum w sygnale) są koniecznym elementem całościowej ich oceny.

2.2. Estymacja parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego zakłóconego szumem

Analiza wyników estymacji parametrów sygnału (1.1) zakłóconego szumem addytywnym (1.99)–(1.102) różnymi metodami, przedstawionymi w dalszej części rozdz. 2, wymaga oceny dokładności estymacji w stosunku do granic dokładności, które potencjalnie są możliwe do uzyskania w rzeczywistości. Podejście takie ułatwia nie tylko porównanie tych metod między sobą, ale również ocenę, czy należy doskonalic daną metodę, by zmniejszyć błędy estymacji, czy może błędy te są tak blisko możliwych minimalnych wartości, że można je uznać w praktyce za optymalne. Współczesne metody statystycznej analizy danych dostarczają narzędzi takiej oceny: estymację największej wiarygodności (ML, *Maximum Likelihood*) i ograniczenie (nierówność) Craméra–Rao (*CR bound*, *Cramér-Rao bound*). Zagadnienia te, w kontekście estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego, są ze sobą ściśle związane [152, 158, 174, 175], dlatego omówione są w tym samym rozdziale.

Problem estymacji, to problem znalezienia, na bazie skończonego zbioru próbek, takiego wektora parametrów $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p]$, który będzie możliwie dokładnym przybliżeniem wielkości $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_p]$ spośród zbioru Θ wszystkich możliwych ($\boldsymbol{\theta} \in \Theta$). Oceną jakości przybliżenia może być w najprostszym przypadku nieobciążoność estymatora ($E[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \approx \boldsymbol{\theta}$) i jego mała wariancja ($E[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}]^2 \approx \mathbf{0}$). Założmy też, że jest zdefiniowana parametryczna (z parametrem $\boldsymbol{\theta}$, czyli szukanych wartości) funkcja gęstości

prawdopodobieństwa $p_{\theta}(\mathbf{x})$ wektorowej zmiennej losowej \mathbf{x} , której realizacji $\hat{\mathbf{x}}$ (czyli wspomniany zbiór próbek), są znane w efekcie przeprowadzonego pomiaru z zastosowaniem przetwornika A/C.

Definicja 2.1

Estymatorem największej wiarygodności (*maximum likelihood estimator*) $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LM}}$ jest ten, dla którego logarytm funkcji wiarygodności:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{x}}) = \ln p_{\theta}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.5)$$

osiąga maksimum, co (przy pewnych warunkach dodatkowych) oznacza, że:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p_{\theta}(\hat{\mathbf{x}}) \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LM}}} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

a nazwa estymatora (*największej wiarygodności*) wynika z faktu, że wartość $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LM}}$ wektora parametru $\boldsymbol{\theta}$ czyni wektor obserwacji $\hat{\mathbf{x}}$ najbardziej prawdopodobną (tj. o *największej wiarygodności*) realizacją zmiennej losowej \mathbf{x} :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{LM}} = \arg[\max_{\boldsymbol{\theta}} p_{\theta}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (2.7)$$

Definicja 2.2

Ograniczenie Craméra–Rao (*Cramér–Rao bound*) dowolnego estymatora $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nieobciążonego, który jest estymowany na podstawie zmierzonej realizacji $\hat{\mathbf{x}}$ wektorowej zmiennej losowej \mathbf{x} o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p_{\theta}(\mathbf{x})$, stwierdza, że dolna granica wariancji $\text{var} \hat{\theta}_i = E[\hat{\theta}_i - \theta_i]^2$ jest i -tym elementem diagonalnym odwrotności macierzy $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\text{var} \hat{\theta}_i \geq (\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1})_{ii} \quad (2.8)$$

gdzie $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ jest macierzą informacyjną Fishera, zdefiniowaną z wykorzystaniem logarytmu funkcji wiarygodności (2.5), jako:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = E \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p_{\theta}(\hat{\mathbf{x}}) \right] \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p_{\theta}(\hat{\mathbf{x}}) \right]^T = -E \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln p_{\theta}(\hat{\mathbf{x}}) \right]^T \right] \quad (2.9)$$

Jeśli część parametrów θ_i jest znana, a więc nie podlega estymacji, to w macierzy $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ należy skreślić odpowiadające im wiersze i kolumny przed obliczeniem jej odwrotności. Definicja 2.2 podaje uproszczoną wersję ograniczenia CR dla estymatorów

nieobciążonych, gdyż w niniejszej pracy rozpatrywane są metody estymacji z małym błędem systematycznym w stosunku do mierzonej wartości.

Dwie ogólne definicje (estymatora ML i ograniczenie CR) odnieśmy teraz do modelu sygnału (1.1) oraz szumu (1.99)–(1.102) z założeniem dodatkowego warunku w stosunku do (1.99)–(1.102), iż szum ten charakteryzuje się rozkładem normalnym $N(0, \sigma^2)$, czyli funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x (opisującej próbkę szumu) jest dana wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.10)$$

a wektor $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]^T$ zmiennych x_n (z których każda ma rozkład $N(0, \sigma^2)$) ma rozkład normalny N -wymiarowy, którego łączna gęstość prawdopodobieństwa wynosi:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sigma^N} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2\sigma^2}\right) \quad (2.11)$$

a jeśli dodatkowo każda próbka x_n jest zespolona (gdzie część rzeczywista i część urojona ma rozkład $N(0, \sigma^2 / 2)$), to (2.11) przyjmuje postać:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}{\sigma^2}\right) \quad (2.12)$$

Sygnał (1.1) po spróbkowaniu (1.3) może być zapisany w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{B} + \mathbf{n} \quad (2.13)$$

gdzie $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]^T$ – wektor próbek sygnału zakłóconego szumem, $\mathbf{n} = [\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{N-1}]^T$ – wektor próbek addytywnego szumu białego o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$, $\mathbf{B} = [B_1, B_2, \dots, B_p]^T$ – wektor estymowanych amplitud oscylacji zespolonych, a \mathbf{V} – zespolona macierz Vandermonda, której elementy są zdefiniowane przez częstotliwości $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tych oscylacji:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & & z_p^1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}, \quad z_k = e^{j2\pi\lambda_k/(NT)} \quad (2.14)$$

Funkcja wiarygodności (2.5) ma wówczas postać:

$$L_{\mathbf{B}, \mathbf{V}}(\mathbf{y}) = \ln \left[\frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} \exp \left(-\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{VB})^H (\mathbf{y} - \mathbf{VB}) \right) \right] \quad (2.15)$$

Estymator największej wiarygodności \mathbf{B} i \mathbf{V} wyznacza się z równania (2.6) przez minimalizację formy kwadratowej wykładnika z (2.15):

$$\min_{\mathbf{B}, \mathbf{V}} (\mathbf{y} - \mathbf{VB})^H (\mathbf{y} - \mathbf{VB}) \quad (2.16)$$

która w tym przypadku jest rozwiązaniem nieliniowego problemu najmniejszych kwadratów:

$$\min_{B_k, z_k} \sum_{n=0}^{N-1} \left| y_n - \sum_{k=1}^P B_k z_k^n \right|^2 \quad (2.17)$$

Estymacja parametrów sygnału (1.1) z warunku (2.17) może odbywać się metodami w dziedzinie czasu lub w dziedzinie częstotliwości. Największym problemem jest wyznaczenie wartości $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, względem których minimalizacja ma charakter nieliniowy. Przykładowo w metodach opartych na metodzie Prony'ego wyznaczane są one przez wyznaczenie zer wielomianu wysokiego rzędu.

Rife i Boorstyn wyznaczyli [152] estymatory ML i ograniczenie CR dla przypadku sygnału (1.2), który zawiera tylko jedną oscylację zespoloną $B_k e^{j\omega_k t} = (A_k/2) e^{j(\omega_k t + \phi_k)}$, a proces estymacji parametrów $|\hat{B}| = \hat{A}_k/2$, $\hat{\omega} = \hat{\omega}_k$, $\hat{\phi} = \hat{\phi}_k$ jest dokonywany na podstawie N próbek sygnału mierzonego od chwili $t_0 = n_0 T$, gdzie n_0 jest dowolnie przyjętym indeksem pierwszej próbki (zwłaszcza $n_0 = 0$ dla numeracji naturalnej i $n_0 = -N/2$ dla numeracji symetrycznej).

Po wyznaczeniu macierzy Fishera z (2.9) Rife i Boorstyn wyznaczyli ograniczenie CR dla estymowanych parametrów z (2.8), dla kilku przypadków liczby wyznaczanych parametrów, z których najważniejszy to ograniczenie CR przy estymacji wszystkich trzech parametrów (jako nieznanymi) [108, 152, 174]:

$$\sigma_{|B|}^2 \geq \sigma_{0 \text{ CR } |B|}^2 = \sigma^2 / (2N) \quad (2.18)$$

$$\sigma_{\omega}^2 \geq \sigma_{0 \text{ CR } \omega}^2 = \frac{\sigma^2}{|B|^2 T^2} \frac{6}{N(N^2 - 1)} \quad (2.19)$$

$$\sigma_{\phi}^2 \geq \sigma_{0 \text{ CR } \phi}^2 = \frac{\sigma^2}{|B|^2 N} \frac{6}{N(N^2 - 1)} \left(n_0^2 N + 2n_0 \frac{N(N-1)}{2} + \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \right) \quad (2.20)$$

Wprowadzony w (2.18)–(2.20) indeks 0 stanowi wyraźne zaznaczenie przypadku jednej oscylacji zespolonej, dla odróżnienia od rozpatrywanego później przypadku sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych.

Wariancja $\sigma_{0\text{CR}|B|}^2$ nie zmienia się, gdy estymacji podlega tylko $|B|$ dla znanej pulsacji ω i/lub fazy φ . Dla znanej fazy φ zmienia się $\sigma_{0\text{CR}\omega}^2$, a dla znanej pulsacji ω zmienia się $\sigma_{0\text{CR}\varphi}^2$, niezależnie od tego czy znana jest wartość $|B|$:

$$\sigma_{\omega}^2 \geq \sigma_{0\text{CR}\omega}^2 = \frac{\sigma^2}{2|B|^2 T^2} \left(n_0^2 + 2n_0 \frac{N(N-1)}{2} + \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \right)^{-1}, \quad \varphi \text{ jest znane} \quad (2.21)$$

$$\sigma_{\varphi}^2 \geq \sigma_{0\text{CR}\varphi}^2 = \frac{\sigma^2}{2|B|^2 N}, \quad \omega \text{ jest znane} \quad (2.22)$$

Największe znaczenie mają zależności (2.18) i (2.19). Zależność (2.19) zapisana w odniesieniu do estymatora częstotliwości unormowanej λ ($\omega = 2\pi\lambda / (NT)$) ma postać:

$$\sigma_{\lambda}^2 \geq \sigma_{0\text{CR}\lambda}^2 = \frac{1,5\sigma^2}{|B|^2 \pi^2} \frac{N^2}{N(N^2-1)} \approx \frac{\sigma^2}{|B|^2 \pi^2 N} \cdot 1,5 \quad (2.23)$$

Minimalne wartości wariancji z (2.18), (2.19), (2.22), (2.23) nie zależą od momentu rozpoczęcia pomiaru (n_0), ale wariancje z (2.20) i (2.21) wykazują taką zależność od n_0 i osiągają maksimum dla $n_0 = -(N-1)/2$ (przypadek symetrii osi czasu wokół zera). Ich praktyczne wykorzystanie jest ograniczone do przypadku, gdy wartość fazy jest istotna (wzór (2.20)) oraz gdy faza jest znana (wzór (2.21)), tj. dostępna jest dodatkowa wiedza *a priori* o sygnale.

Rife i Boorstyn pokazują również [152], że w przypadku jednej oscylacji zespolonej estymator największej wiarygodności, to taki, który jest wyznaczony przez maksimum modułu DtFT sygnału. Dla jednej oscylacji zespolonej maksimum lokalne widma nie jest bowiem zniekształcone zjawiskiem przecieku widma. Gdy analizujemy więc sygnał złożony z jednej oscylacji zespolonej (pomnożonej przez okno prostokątne) w widmie DtFT, wówczas powinniśmy wyznaczyć parametry sygnału (amplitudę, częstotliwość, fazę) wyznaczając położenie maksimum DtFT, a uzyskane estymatory są estymatorami ML i rozwiązaniem nieliniowego problemu najmniejszych kwadratów w sensie zdefiniowanym przez warunek (2.17). Przypomnijmy, że szereg Fouriera jest właśnie rozwiązaniem problemu metodą najmniejszych kwadratów [101]. Jednocześnie wariancja tych estymatorów osiąga swoje minimalne możliwe wartości zdefiniowane przez (2.18)–(2.23). Ponieważ w praktyce nie jest możliwe idealne wyznaczenie lokalnego maksimum DtFT, wówczas różne metody estymacji szukanych parametrów będą charakteryzować się, oprócz swoich błędów systematycznych (ob-

ciążenia estymatora), również wariancją większą niż wartości $\sigma_{0\text{ CR } \lambda}^2$, $\sigma_{0\text{ CR } |B|}^2$ oraz $\sigma_{0\text{ CR } \varphi}^2$. Często zmniejszając obciążenie estymacji danej metody zwiększamy jej wariancję i odwrotnie. Aby uzyskać kompromis przeprowadza się minimalizację błędu *rmse* (*root mean square error*), będącego pierwiastkiem z sumy kwadratu obciążenia i wariancji estymatora. Błąd *rmse* jest w tym przypadku miarą błędu całkowitego.

Zależności z (2.18) i (2.23) można odnieść do (1.104) i (1.110) uzyskując wzory:

$$\frac{\sigma_{0\text{ CR } |B|}^2}{|B|^2} = \frac{1}{2N \text{SNR}_m} = \frac{1}{2\text{SNR}_m \text{ DFT z oknem prost.}} \quad (2.24)$$

$$\sigma_{0\text{ CR } \lambda}^2 \approx \frac{1,5 / \pi^2}{N \text{SNR}_m} = \frac{1,5 / \pi^2}{\text{SNR}_m \text{ DFT z oknem prost.}} \quad (2.25)$$

z których wynika, że względny losowy błąd estymacji amplitudy $|B|$ (który jest proporcjonalny do $\sigma_{0\text{ CR } |B|} / |B|$) oraz bezwzględny błąd estymacji częstotliwości unormowanej λ_m (proporcjonalny do $\sigma_{0\text{ CR } \lambda}$) spowodowane wariancją ich estymatorów są odwrotnie proporcjonalne do liczby próbek N i współczynnika SNR_m tej składowej. Wzór (2.25) jest *explicite* podany w pracy [120].

Gdy analizowany jest sygnał złożony z dwóch lub więcej oscylacji zespolonych, ograniczenie CR uzyskuje się również z (2.8) i (2.9) z tą różnicą, że wymiary macierzy Fishera \mathbf{J} są znacząco większe. Uzyskanie elementów diagonalnych macierzy odwrotnej \mathbf{J} było więc przeprowadzane przede wszystkim za pomocą obliczeń numerycznych, częściowo analitycznych i wnioskowania heurystycznego [153, 178]. Szczególne znaczenie ma w tym przypadku analiza ograniczenia $\sigma_{\text{CR } \lambda}$ (brak indeksu 0 oznacza przypadek dwóch oscylacji zespolonych). Znajomość $\sigma_{\text{CR } \lambda}$ w funkcji odległości τ między składowymi na osi częstotliwości unormowanej λ pozwala zdefiniować tzw. graniczną rozdzielczość statystyczną SRL (*Statistical Resolution Limit*, *Theoretical Resolution Limit*) danego estymatora, zdefiniowaną jako minimalną odległość τ_{SRL} między składowymi na osi częstotliwości unormowanej, dla której można przy danym stosunku sygnał/szum z dużym prawdopodobieństwem rozróżnić dwie składowe oscylacje w sygnale. Definiuje się ją jako:

$$\tau_{\text{SRL}} = 2\sigma_{\text{CR } \lambda} \quad (2.26)$$

Wartość tę można odnieść do rzeczywistej rozdzielczości danej metody estymacji $\tau_{\text{SR}} = 2\sigma_\lambda$ lub $\tau_{\text{SR}} = 2 \max\{\sigma_{\lambda_1}, \sigma_{\lambda_2}\}$ (gdy wartości σ_{λ_1} i σ_{λ_2} są różne) [20, 79, 83].

O ile więc rozdzielczość Fouriera (Rayleigha) τ_F z (1.26) odnosi się do błędu systematycznego estymatora (w przypadku DtFT spowodowanego przeciekiem widma

od sąsiednich składowych), o tyle rozdzielczość statystyczna $\tau_{SR} = 2\sigma_\lambda$ odnosi się do błędu spowodowanego szumem w sygnale. Dla praktycznych wartości SNR zachodzi $\tau_{SRL} \ll 1$, co przy $\tau_F = 1$ oznacza, że dla składowych leżących blisko siebie na osi częstotliwości dominować będzie przy analizie DtFT (DFT) błąd deterministyczny estymacji spowodowany przeciekiem widma. Możliwe jest jednak zmniejszenie tego błędu przez dalsze, złożone przetwarzanie widma sygnału lub estymację metodami bezpośrednio w dziedzinie czasu. Estymatory, dla których w ich niedokładności dominuje wariancja estymatora i dla których $\tau_{SR} \ll 1$ nazywa się estymatorami wysokiej rozdzielczości. W praktycznych zastosowaniach ich rozdzielczość τ_{SR} osiąga wartość od jednej dziesiątej do jednej czwartej wartości rozdzielczości Fouriera τ_F [166].

Dilaveroğlu uzyskał [79] w pełni analityczną zależność na ograniczenie $\sigma_{CR\lambda}^2$ w postaci niemacierzowej dla przypadku sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych, które przedstawiono w odniesieniu do częstotliwości unormowanej λ :

$$\sigma_{CR\lambda_m}^2 = \frac{1}{4\pi^2 N \text{SNR}_m} \frac{1}{X_0 + X_C \cos(2(\varphi_2 - \varphi_1)) + X_S \sin(2(\varphi_2 - \varphi_1))} \quad (2.27)$$

gdzie SNR_m jest stosunkiem sygnał/szum estymowanej oscylacji zgodnie z (1.104) oraz:

$$X_0 = 2K_0 - \frac{K_C^2 + K_S^2}{K_C} \quad (2.28)$$

$$X_C = \frac{K_S^2 + K_C^2}{K_0} \quad (2.29)$$

$$X_S = -\frac{2K_C K_S}{K_0} \quad (2.30)$$

a K_0 , K_C i K_S są zdefiniowane przez:

$$K_0 = \frac{\Gamma_2(\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2) - \Gamma_0(\Gamma_1^2 + C_1^2 + S_1^2) + 2\Gamma_1(C_0C_1 + S_0S_1)}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (2.31)$$

$$K_C = \frac{-C_2(\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2) - C_0(\Gamma_1^2 + C_1^2 - S_1^2) + 2C_1(\Gamma_0\Gamma_1 - S_0S_1)}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (2.32)$$

$$K_S = \frac{S_2(\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2) + S_0(\Gamma_1^2 - C_1^2 + S_1^2) - 2S_1(\Gamma_0\Gamma_1 - C_0C_1)}{\Gamma_0^2 - C_0^2 - S_0^2} \quad (2.33)$$

$$\Gamma_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} n^r, \quad \text{dla } r=0,1,2 \quad (2.34)$$

$$C_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} n^r \cos(2\pi n(\lambda_1 - \lambda_2)), \quad \text{dla } r=0,1,2 \quad (2.35)$$

$$S_r = \frac{1}{N^{r+1}} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} n^r \sin(2\pi n(\lambda_1 - \lambda_2)), \quad \text{dla } r=0,1,2 \quad (2.36)$$

Ograniczenie estymacji λ_m (2.27) jednej ze składowych ($m=1,2$) zależy nie tylko od współczynnika SNR_m tej składowej oraz ich wzajemnej odległości ($\lambda_1 - \lambda_2$) na osi częstotliwości, ale również od momentu rozpoczęcia próbkowania n_0 (zdefiniowanego jak dla (2.21)) oraz różnicy faz obu składowych ($\varphi_2 - \varphi_1$). Dla ich najmniej oraz najbardziej korzystnych wartości uzyskuje się maksymalne i minimalne wartości ograniczenia CR:

$$\left(\sigma_{\text{CR } \lambda_m}^2\right)_{\max} = \frac{1}{4\pi^2 N \text{SNR}_m} \frac{1}{X_0 - \sqrt{X_C^2 + X_S^2}} = \frac{1}{4\pi^2 N \text{SNR}_m} \frac{K_0}{2(K_0^2 - K_C^2 - K_S^2)} \quad (2.37)$$

$$\left(\sigma_{\text{CR } \lambda_m}^2\right)_{\min} = \frac{1}{4\pi^2 N \text{SNR}_m} \frac{1}{X_0 + \sqrt{X_C^2 + X_S^2}} = \frac{1}{4\pi^2 N \text{SNR}_m} \frac{1}{2K_0} \quad (2.38)$$

Asymptotyczne zachowanie się wzorów (2.37) i (2.38) dla małych wartości ($\lambda_2 - \lambda_1$) uzyskuje się rozwijając (2.31)–(2.33) w szereg Taylora względem ($\lambda_1 - \lambda_2$) [79]:

$$\left(\sigma_{\text{CR } \lambda_m}^2\right)_{\max} = \frac{M'}{4\pi^2 N \text{SNR}_m} [N(\lambda_1 - \lambda_2)]^{-4} + o\{[N(\lambda_1 - \lambda_2)]^{-2}\} \quad (2.39)$$

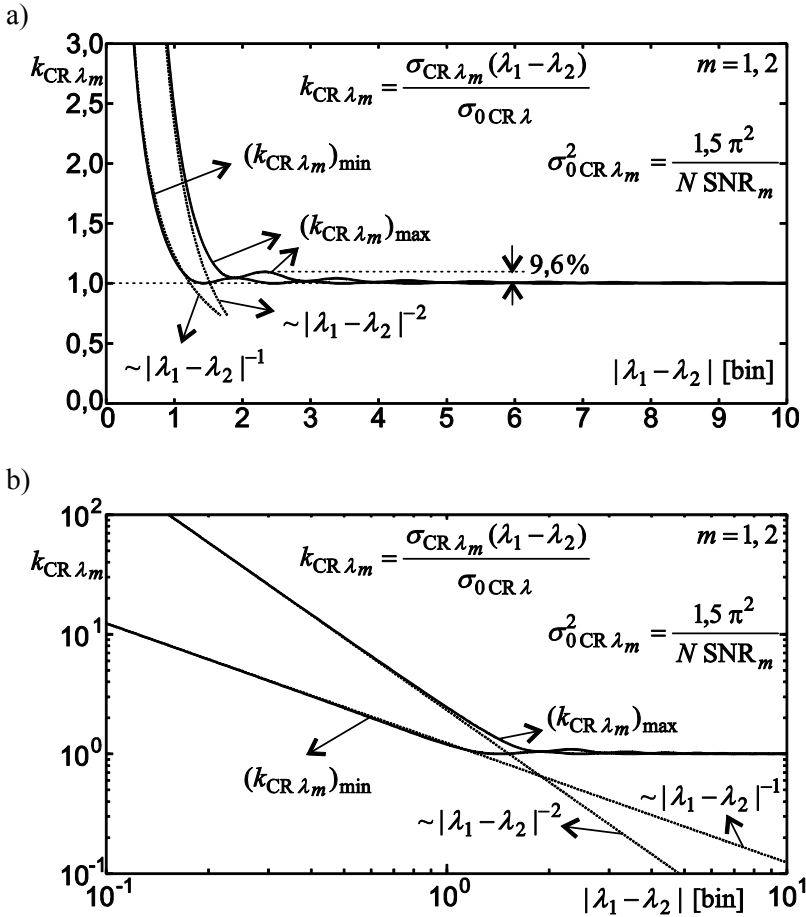
$$\left(\sigma_{\text{CR } \lambda_m}^2\right)_{\min} = \frac{m'}{4\pi^2 N \text{SNR}_m} [N(\lambda_1 - \lambda_2)]^{-2} + o\{1\} \quad (2.40)$$

gdzie M' i m' są wyznaczone przez współczynniki tego rozwinięcia w szereg Taylora.

Qing i Zhenhui, analizując w [140] przedstawione niemacierzowe zależności z pracy [79] dla przypadku jednej sinusoidy (złożonej z dwóch oscylacji zespolonych), stwierdzają, że uzyskane wartości maksymalne i minimalne z (2.37)–(2.40) uzyskuje się dla odpowiednio dwóch przypadków: gdy sygnał przechodzi przez zero w środku

okna czasowego (minimalna wartość $\sigma_{\text{CR } \lambda_m}^2$) i gdy sygnał osiąga maksimum w środku okna czasowego (maksymalna wartość $\sigma_{\text{CR } \lambda_m}^2$).

Równania (2.39), (2.40) potwierdzają wyniki wcześniejszych analiz [153, 178], które dla $(\lambda_2 - \lambda_1) \ll 1$ uzyskiwały zależność $\sigma_{\text{CR } \lambda_m}^2$ proporcjonalną do $[N(\lambda_1 - \lambda_2)]^{-k}$ z wartością k pomiędzy 2 i 4. Zależność $\sigma_{\text{CR } \lambda_m} / \sigma_{0 \text{ CR } \lambda_m}$ w funkcji odległości między składowymi oraz ich asymptoty dla $(\lambda_2 - \lambda_1) \ll 1$ przedstawiono na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Ograniczenie Craméra–Rao odchylenia standardowego estymatora częstotliwości λ_m dwóch oscylacji zespolonych względem tego estymatora dla przypadku jednej oscylacji – wykres w skali: a) liniowej, b) logarytmicznej

Charakterystyki z rysunku 2.2 wskazują, że dla $|\lambda_1 - \lambda_2| > 1,67$ bin można dla przypadku dwóch oscylacji zespolonych stosować zależność (2.25), tj. dla przypadku jednej oscylacji, z błędem nieprzekraczającym 10%.

Bardziej szczegółowe analizy dotyczące ograniczenia CR dotyczą:

- asymptotycznej zależności ograniczenia CR dla przypadku n oscylacji w widmie rozmieszczonych równomiernie na osi częstotliwości w odległości τ/n między sąsiednimi oscylacjami [113]: $\sigma_{CR,\lambda}^2$ jest wówczas proporcjonalna do $\tau^{-2(n-1)} / (NSNR)$,
- poziomu progowej (krytycznej) wartości SNR_T współczynnika sygnał/szum (*threshold SNR*), poniżej której wariancja estymatora bardzo znacząco wzrasta (jest to cecha właściwa estymacji nieliniowej) [114, 120, 152, 176],
- definicji rozdzielczości statystycznej estymatora uwzględniającej korelację błędów estymacji występującej dla bardzo małych odległości τ pomiędzy składowymi: $\tau_{SR} > \sigma_\tau$ [20, 166],
- szczegółowych zależności granicznej rozdzielczości statystycznej τ_{SRL} od poziomu prawdopodobieństwa rozróżnienia sygnałów (między 0,5 a 1), kształtu sygnału, SNR i czasu obserwacji [20].

2.3. Interpolacja funkcjami uniwersalnymi

Najprostsza interpolacja funkcją uniwersalną jest oparta o interpolację wielomianem drugiego stopnia, na podstawie trzech sąsiednich wartości modułu DFT [1, 2, 89, 90], dzięki czemu położenie maksimum można wyznaczyć analitycznie w sposób bardzo prosty przez przyrównanie pochodnej do zera. Samo zwiększenie stopnia wielomianu nie poprawia radykalnie dokładności. Przy aproksymacji krzywą trzeciego stopnia uzyskuje się ok. 3-krotne zmniejszenie błędu wyznaczenia amplitudy i ok. 4-krotne zmniejszenie błędu wyznaczenia częstotliwości w stosunku do błędów wynikających z efektu zafalowania (rys. 1.1) [107], a dalsze zwiększanie stopnia wielomianu skutkuje koniecznością stosowania numerycznych procedur znajdowania zer wielomianu stopnia wyższego niż trzy.

Dalsze zmniejszenie błędów interpolacji (10-krotne lub więcej w zależności od stosowanego okna czasowego) uzyskuje się przy zastosowaniu paraboli w odniesieniu do logarytmu widma amplitudowego (a więc zastosowanie krzywej eksponencjalnej z wielomianem drugiego stopnia w wykładniku w odniesieniu do widma amplitudowego) [1, 89, 90] lub jej połączenie z techniką uzupełniania zerami [1]. Gąsior [89, 90] uzyskuje znaczące zmniejszenie błędu estymacji częstotliwości (do wartości poniżej $3 \cdot 10^{-4}$ bin) przez interpolację z zastosowaniem krzywej nazwanej przez siebie jako

„potęgowana parabola”, tzn. wielomianem drugiego stopnia podniesionym do odpowiednio dobranej potęgi (będącej liczbą rzeczywistą).

Większą dokładność (poniżej 10^{-5} bin) można uzyskać, stosując funkcję eksponencjalną z wielomianem szóstego stopnia w wykładniku, ale jej dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów i wyznaczenie parametrów sygnału wymaga procedury iteracyjnej [107]. Przykładową implementację sprzętowo-programową tej metody podano w [47].

Jacobsen [102] podaje zależności dla poprawki δ_k z (2.4), wyznaczającej położenie lokalnego maksimum widma, w postaci ilorazu sum kilku wartości widma DFT (zespolonych lub ich modułów) z otoczenia jego lokalnego maksimum ze współczynnikami dobieranymi eksperymentalnie dla stosowanego okna ([102] podaje te współczynniki dla okna Hamminga, Hanninga, Blackmana i Blackmana–Harrisa, a uzyskiwany błąd estymacji częstotliwości jest wówczas mniejszy niż 0,01 bin).

2.4. Interpolacja dla okna prostokątnego

Problem interpolacji DFT po zastosowaniu okna prostokątnego rozpatrywany był po raz pierwszy w pracy [151], jako szczególny przypadek okna I klasy Rife’a–Vincenta, a następnie w [103, 150]. Rozwiązania przybliżone [103, 151] bazują na współczynniku:

$$\alpha_k = \frac{|F(k + \varepsilon_k)|}{|F(k)|} \quad (2.41)$$

gdzie spełniony jest warunek (2.2) oraz (2.3).

Część ułamkowa częstotliwości unormowanej jest wyznaczana wówczas z zależności [151]:

$$\delta_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_k + 1} \quad (2.42)$$

czyli

$$\delta_k = \frac{|F(k + \varepsilon_k)|}{|F(k)| + |F(k + \varepsilon_k)|} \quad (2.43)$$

a częstotliwość unormowana z równania (2.4).

Praca [150] przedstawia analityczne rozwiązanie dla okna prostokątnego, które ze względu na swoją złożoność nie jest w praktyce stosowane, ale dobrze ilustruje złożoność matematyczną dokładnego rozwiązania interpolacji widma i to w przypadku najprostszego okna, czyli okna prostokątnego:

$$\lambda_k = \frac{N}{2\pi} \arccos \frac{Z_2 \cos(2\pi(k + \varepsilon_k) / N) - Z_1 \cos(2\pi k / N)}{Z_2 - Z_1} \quad (2.44)$$

gdzie:

$$Z_1 = V_k \frac{K_{\text{opt}} - \cos(2\pi k / N)}{\sin(2\pi k / N)} + U_k \quad (2.45)$$

$$Z_2 = V_{k+\varepsilon_k} \frac{K_{\text{opt}} - \cos(2\pi(k + \varepsilon_k) / N)}{\sin(2\pi(k + \varepsilon_k) / N)} + U_{k+\varepsilon_k} \quad (2.46)$$

$$K_{\text{opt}} = \frac{\sin(2\pi k)(V_{k+\varepsilon_k} - V_k) + \cos(2\pi k)(U_{k+\varepsilon_k} - U_k)}{U_{k+\varepsilon_k} - U_k} \quad (2.47)$$

$$F(k) = U_k + jV_k, \quad F(k + \varepsilon_k) = U_{k+\varepsilon_k} + jV_{k+\varepsilon_k} \quad (2.48)$$

W przypadku, gdy $\delta_k \approx 0,5$, a sygnał jest zakłócony szumem, wówczas obliczenie ε_k z (2.3) może być błędne, do obliczeń we wzorze (2.42) zamiast pary punktów ($|F(k)|$, $|F(k + \varepsilon_k)|$) uwzględnimy parę ($|F(k)|$, $|F(k - \varepsilon_k)|$), a wówczas znak ε_k poprawki δ_k będzie błędny. Powstaje w ten sposób interpolacja w złym kierunku i właściwości statystyczne (obciążenie i wariancja) pogarszają się. Problem błędu kierunku interpolacji dwupunktowej dla okna prostokątnego jest analizowany w pracach Quinna, Macleoda, Yanga, Suna i in. [120, 141, 142, 177, 187]. Efektem tych prac są dwie nowe klasy metod, które łącznie z dotychczas przedstawioną tworzą trzy klasy:

- klasa metod interpolacyjnych opartych na module widma (*modulus-based interpolation*): to metody, które wykorzystują tylko moduł widma, jak (2.41)–(2.43) i które określają kierunek interpolacji (czyli wartość ε_k) na podstawie (2.3),
- klasa metod interpolacyjnych opartych na module widma lub funkcji rzeczywistej wyznaczonej z widma zespolonego wraz z określeniem kierunku interpolacji na podstawie estymacji charakterystyki fazowej (*modulus-based interpolation referred to the phase*),
- klasa metod opartych na zespolonych wartościach widma (*complex spectrum based interpolation*).

Niezależnie od problemu określenia kierunku interpolacji, dla części metod, dla których warunek precyzyjnej lokalizacji lokalnego maksimum DFT nie jest konieczny, możliwe jest odpowiednie uśrednianie wartości δ_k uzyskane w obu kierunkach w celu polepszenia właściwości statystycznych estymatora. Uśrednianie takie po raz pierwszy zaproponowano w [21] dla okien I klasy Rife'a–Vincenta.

Quinn, Macleod, Sun i in. przedstawili dla okna prostokątnego kilka metod interpolacyjnych z określaniem kierunku interpolacji na podstawie charakterystyki fazowej [120, 141, 142, 177] oraz z uśrednianiem w obu kierunkach [120, 142]. Ze względu na

ich obszerność i ograniczone zastosowanie z powodu dużego przecieku widma okna prostokątnego dla sygnału wieloczęstotliwościowego, pominięta jest ich prezentacja w niniejszej pracy.

Dla okna prostokątnego Yang i in. przedstawili w [187] metodę opartą na zespolonych wartościach widma:

$$\delta_k = -\frac{F(k + \varepsilon_k)}{F(k) - F(k + \varepsilon_k)} \quad (2.49)$$

dla której uzyskuje się nieobciążoność estymatora, nawet gdy wartość ε_k (kierunek interpolacji) jest wyznaczony niepoprawnie.

Wykorzystując (1.5) oraz (1.17), (1.18) i przybliżenie (1.24), łatwo można pokazać dla pojedynczej oscylacji zespolonej, że wzór (2.49) jest tożsamy z wzorem (2.43), oraz że obliczona wartość δ_k jest rzeczywista. Jednak ze względu na fakt, że (1.24) jest jedynie przybliżeniem oraz z powodu szumów w sygnale wzór (2.49) może dać wartość zespoloną. Wówczas jako δ_k należy przyjąć jej część rzeczywistą.

Chen i in. w [70] podali tożsamy z (2.49) wzór dla okna prostokątnego, jako szczególny przypadek metody MWIDFT dla okien I klasy Rife'a–Vincenta rzędu zerowego (rozdz. 2.6.4).

Na podstawie estymatora (2.49) obliczonego dla obu kierunków interpolacji w [187] zdefiniowano estymator uśredniony ze średnią ważoną, ale dobór wag tego uśredniania wymaga informacji *a priori* o przybliżonej wartości δ_k lub procedury iteracyjnej.

2.5. Interpolacja dla okien z bazą kosinusową

Rozwiązania problemu interpolacji dla okien z bazą kosinusową mogą być rozwiązaniami ogólnymi, tj. poprawnymi dla wszystkich okien tego typu oraz rozwiązaniami szczegółowymi dotyczącymi szczególnych klas tych okien, jak np. I–III klasy Rife'a–Vincenta.

Rife i Vincent zdefiniowali rozwiązanie analityczne dla okna I klasy oraz procedurę iteracyjną dla okien I–III klasy. Procedurę iteracyjną podaje również praca [21]. Offelli i Petri podają rozwiązanie przybliżone dla okien z bazą kosinusową [130].

Rozwiązanie analityczne [151] dla okien I klasy Rife'a–Vincenta o H współczynnikach bazuje, podobnie jak w (2.41), na wykorzystaniu dwóch największych (co do modułu) wartości próbek lokalnego maksimum widma ($|F(k)|$, $|F(k + \varepsilon_k)|$):

$$\delta_k = \frac{H |F(k + \varepsilon_k)| - (H - 1) |F(k)|}{|F(k + \varepsilon_k)| + |F(k)|} \quad (2.50)$$

Możliwa jest estymacja δ_k również na podstawie pary próbek ($|F(k)|$, $|F(k - \varepsilon_k)|$), jednak zalecane jest obliczenie δ_k z (2.50) ze względu na mniejszą wariancję estymatora. Możliwe jest obliczenie wartości średniej dla obu kierunków interpolacji, co prowadzi do interpolacji trzypunktowej [21]:

$$\delta_k = (H - \frac{1}{2}) \frac{|F(k)|(|F(k+1)| - |F(k-1)|)}{(|F(k)| + |F(k+1)|)(|F(k)| + |F(k-1)|)} \quad (2.51)$$

Zauważmy, że dla $H = 2$ (okno Hanninga) wzór (2.50) przyjmuje postać:

$$\delta_k = \frac{2\alpha_k - 1}{\alpha_k + 1} \quad (2.52)$$

gdzie:

$$\alpha_k = \frac{|F(k + \varepsilon_k)|}{|F(k)|} \quad (2.53)$$

czyli

$$\delta_k = \frac{2|F(k + \varepsilon_k)| - |F(k)|}{|F(k)| + |F(k + \varepsilon_k)|} \quad (2.54)$$

a więc jest to rezultat identyczny z tym, jaki uzyskał Grandke w pracy [92] dotyczącej interpolacji widma z wykorzystaniem okna Hanninga.

Belega i Dallet [31] wykorzystują dla interpolacji według (2.50) zależność (1.93), uzyskując zależności analityczne dla estymatorów amplitudy, częstotliwości i fazy. W szczególności znacząco uproszczono zależność dla estymatora amplitudy w stosunku do wcześniejszej wersji z [21].

Li i Chen w [115] uogólniają zależność (2.54) dla okna Hanninga do postaci opartej na wartościach zespolonych widma (w sposób podobny jak w (2.49) dla okna prostokątnego [187]), uzyskując estymator nieobciążony dla obu kierunków interpolacji:

$$\delta_k = -\frac{2F(k + \varepsilon_k) + F(k)}{F(k) - F(k + \varepsilon_k)} \quad (2.55)$$

Chen i in. w [68] wyznaczyli tożsamy z (2.55) wzór dla okna Hanninga, a następnie w [70] jako szczególny przypadek metody MWIDFT dla okien I klasy Rife'a–Vincenta pierwszego rzędu (rozdz. 2.6.4).

Zmniejszenie wariancji estymatora uzyskano w pracy [68], definiując estymator uśredniony ze średnią ważoną (z wartości dla obu kierunków interpolacji), ale dobór wag tego uśredniania wymaga informacji *a priori* o przybliżonej wartości δ_k lub procedury iteracyjnej.

W poszukiwaniu rozwiązania dla okien z bazą kosinusową, Offelli i Petri [130] wykorzystali fakt, że α_k z (2.53) zależy od δ_k oraz widma okna czasowego:

$$\alpha_k = \frac{|W(\varepsilon_k - \delta_k)|}{|W(-\delta_k)|} \quad (2.56)$$

ale problem odwrócenia funkcji (2.56) $\alpha_k = f(\delta_k)$ i uzyskania $\delta_k = f^{-1}(\alpha_k)$ jest problemem nieliniowym. Offelli i Petri rozwiązują ten problem [130], przybliżając funkcję $\delta_k = f^{-1}(\alpha_k)$ wielomianem 5, 7 i 9 stopnia (w zależności od wymaganej dokładności estymacji). Współczynniki wielomianu aproksymującego muszą być wcześniej wyznaczone dla danego okna czasowego, ale w pomijalnym stopniu zależą one od liczby próbek N (przy założeniu $N \geq 32$) [130]. Po wyznaczeniu częstotliwości można wyznaczyć amplitudę i fazę metodą najmniejszych kwadratów [66]. Natomiast Qian i in. [139] przybliżają licznik i mianownik (2.56) wielomianem czwartego stopnia i rozwiązują równanie na δ_k przez numeryczne wyznaczenie zer uzyskanego wielomianu czwartego stopnia, podając przykłady dla kilku czterowspółczynnиковych okien z bazą kosinusową (okno Blackmana–Harrisa, I klasy Rife’a–Vincenta i III klasy Rife’a–Vincenta). Ferrero i Salicone [85] proponują tablicowanie zależności (2.56).

Bardziej szczegółowe analizy związane z metodami interpolacyjnymi dla okien I klasy Rife’a–Vincenta dotyczą:

- interpolacji dla okna Hanninga uwzględniającej przeciek widma od składowej sprzężonej (*long-range leakage*) uzyskanej w pracy [69], która jest szczególnie przydatna, gdy czas pomiaru sygnału jest rzędu zaledwie kilku okresów mierzonego sygnału sinusoidalnego,
- określenie dla estymatora (2.50) zależności na minimalną liczbę okresów mierzonej składowej sinusoidalnej i minimalną liczbę próbek w funkcji wymaganej dokładności estymacji i dokładności stosowanego przetwornika A/C (poziomu szumu kwantowania) [30, 33, 34].

2.6. Metoda MWIDFT

2.6.1. Wprowadzenie

Metodę ważonej wielopunktowej interpolacji DFT (MWIDFT lub MWIpDFT – *Multipoint Weighted Interpolated DFT*) zdefiniował początkowo Agrež dla okna Hanninga i okna prostokątnego jako interpolację 3-punktową [4, 5], a następnie uogólnił ją na interpolację o nieparzystej liczbie punktów również dla okna Hanninga [11]. Belega i Dallet rozwinęli tę metodę dla okien I klasy Rife’a–Vincenta dla interpolacji 5-punktowej i 7-punktowej [28], a następnie [35, 36] uogólnili (dla tej samej klasy okien rzędu $H \geq 2$) dla interpolacji $(2J + 1)$ -punktowej ($J \leq H - 1$). Szczególnym przypadkiem tego uogólnienia są uzyskane przez Agreža w [11] zależności dla okna

Hanninga. Wszystkie te metody aproksymują przeciek widma od sąsiednich oscylacji (*long-range leakage*) stałą. Chen i in. [70] rozwinęli metodę (również tylko dla okien I klasy Rife’a–Vincenta), aproksymując ten przeciek odpowiednim wielomianem L -tego stopnia, uzyskując zależności na interpolację $(L+3)$ -punktową ($L \geq -1$), a w szczególności, podając jawne rozwiązanie dla interpolacji 2–9-punktowej. Część z tych wzorów jest tożsama z prezentowanymi wcześniej w pracach Agreża i innych autorów, część się jednak różni. Można więc powiedzieć, że metoda MWIDFT jest już właściwie klasą metod. Ich wspólnym mianownikiem jest podobne podejście do uwzględniania w rozwiązaniu przecieku widma od sąsiednich składowych (*long-range leakage*), wykorzystując w tym celu szczególne cechy okien I klasy Rife’a–Vincenta. Wybrane przypadki szczegółowe tej klasy metod MWIDFT dla okna prostokątnego i okna Hanninga zostały już w skrócie przedstawione w rozdz. 2.5.

Organizacja dalszej części rozdz. 2.6 jest następująca: w rozdz. 2.6.2 przedstawiono pierwszą wersję metody [4, 5, 11], dla okna prostokątnego i Hanninga w wersji interpolacji trzypunktowej i kolejne [28, 70] uogólnienia (dla okien I klasy Rife’a–Vincenta) przypadku interpolacji trzypunktowej, w rozdz. 2.6.3 omówiono interpolację 5- oraz 7-punktową [28], a w rozdz. 2.6.4 przedstawiono metody interpolacji $(2J+1)$ -punktowej (tj. o dowolnej nieparzystej liczbie punktów) [35, 36] i $(L+3)$ -punktowej (tj. o dowolnej parzystej lub nieparzystej liczbie punktów) [70], będące najbardziej zaawansowanymi przypadkami metody MWIDFT.

2.6.2. Metoda 3-punktowej interpolacji MWIDFT

Pierwszym krokiem do wyprowadzenia tej metody jest spostrzeżenie, że przeciek widma pochodzący od sąsiedniej składowej (*long-range leakage*) zmienia znak co 1 bin na osi częstotliwości unormowanej dla okien z bazy kosinusowej ponieważ:

$$\sin(\pi(k + \delta_k)) = -\sin(\pi(k \pm 1 + \delta_k)) \quad (2.57)$$

i że dla składowych wystarczająco odległych od siebie obwidnia zmian amplitudowych jest „płaska”, tzn. zmiana amplitudy co 1 bin pochodząca od sąsiedniej składowej $|\Delta(k)|$ spełnia warunek [5]:

$$|C| = |\Delta(k-1)| \approx |\Delta(k)| \approx |\Delta(k+1)| \quad (2.58)$$

co odpowiada aproksymacji zależności (1.5) dla kolejnych trzech punktów lokalnego maksimum widma przez zależności:

$$\begin{cases} F(k-1) = B_k W(k-1 - \delta_k) + \Delta(k-1) \approx B_k W(k-1 - \delta_k) - C \\ F(k) = B_k W(k - \delta_k) + \Delta(k) \approx B_k W(k - \delta_k) + C \\ F(k+1) = B_k W(k+1 - \delta_k) + \Delta(k+1) \approx B_k W(k+1 - \delta_k) - C \end{cases} \quad (2.59)$$

Definiując współczynnik α_k trzech punktów lokalnego maksimum widma:

$$\alpha_k = \frac{|F(k)| + |F(k-1)|}{|F(k)| + |F(k+1)|} \quad (2.60)$$

uzyskuje się z (1.5), (2.59) i (2.53):

$$\alpha_k = \frac{|W(\delta_k)| + |\Delta(k)| + |W(1+\delta_k)| - |\Delta(k-1)|}{|W(\delta_k)| + |\Delta(k)| + |W(1-\delta_k)| - |\Delta(k+1)|} \approx \frac{|W(\delta_k)| + |W(1+\delta_k)|}{|W(\delta_k)| + |W(1-\delta_k)|} \quad (2.61)$$

a po uwzględnieniu (1.32) zależność (2.61) ma postać:

$$\alpha_k \approx \frac{2 - \delta_k}{2 + \delta_k} \quad (2.62)$$

skąd:

$$\delta_k \approx 2 \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k} \quad (2.63)$$

i po uwzględnieniu (2.60) dla okna Hanninga:

$$\delta_k = 2 \frac{|F(k+1)| - |F(k-1)|}{|F(k-1)| + 2|F(k)| + |F(k+1)|} \quad (2.64)$$

Po uwzględnieniu (1.30) uzyskujemy analogiczną zależność dla okna prostokątnego:

$$\delta_k = \frac{|F(k+1)| + |F(k-1)|}{2|F(k)| + ||F(k+1)| - |F(k-1)||} \quad (2.65)$$

Belega i Dallet [28] uzyskują (2.64) jako szczególny przypadek interpolacji $(2J+1)$ -punktowej po wyprowadzeniu interpolacji 5-punktowej i 7-punktowej (rozd. 2.6.3).

Chen i in. [70] wyprowadzają podobne zależności, ale definiują współczynnik (2.60) jako współczynnik zespolony:

$$\alpha_k = \frac{F(k+1) - F(k)}{F(k) - F(k-1)} \quad (2.66)$$

skąd, po założeniu (2.59) i po przekształceniach analogicznych do tych z (2.61)–(2.64) uzyskują:

$$\delta_k = H \frac{F(k+1) - F(k-1)}{F(k+1) - 2F(k) + F(k+1)} \quad (2.67)$$

dla okna $(H-1)$ -rzędu I klasy.

Wzór jest uogólnieniem wzoru (2.65) przede wszystkim dlatego że może być stosowany do okna I klasy Rife'a–Vincenta o liczbie współczynników $H \geq 2$, a nie tylko do okna Hanninga. Ponadto estymator (2.67) jest niewrażliwy na błąd kierunku interpolacji [70]. Stosunkowo łatwo można wzór ten uogólnić do interpolacji z większą liczbą punktów niż 3 (rozdz. 2.6.4).

2.6.3. Metoda 5-punktowej i 7-punktowej interpolacji MWIDFT

Przedstawiona przez Belegę i Dalleta w [28] metoda definiuje równanie wielomianowe rzędu J zmiennej δ_k dla interpolacji $(2J+1)$ -punktowej dla okna I klasy Rife'a–Vincenta o H współczynnikach ($H \geq 2$). Jednak rozwiązanie jawne tego równania jest możliwe tylko dla $J=1$ (co daje znaną już interpolację 3-punktową (2.64) dla okna Hanninga) oraz dla $J=2$ (interpolacja 5-punktowa jako rozwiązanie równania kwadratowego) i $J=3$ (interpolacja 7-punktowa jako rozwiązanie równania trzeciego stopnia). Omawiamy tę metodę w punkcie dotyczącym wyłącznie metody 5- i 7-punktowej, ponieważ w praktyce jej użyteczność ogranicza się do takiego właśnie przypadku. Teoretycznie jednak dla $J \geq 4$ możliwe jest wyznaczanie δ_k za pomocą którejś z metod wyznaczania zer wielomianu wyższego stopnia. Konieczna byłaby wówczas odpowiedź na pytanie: czy wyznaczenie zer takiego wielomianu pozwala na wybór jednego jednoznacznego rozwiązania, tak jak to się dzieje w tej metodzie dla $J=2$ oraz $J=3$?

Punktem wyjścia dla tej metody jest równanie (1.94), czyli stwierdzenie, że obustronna szerokość listka głównego okna I klasy Rife'a–Vincenta o H współczynnikach wynosi $2H$ oraz przyjmuje się założenie, że do interpolacji uwzględnia się $(2J+1)$ próbek lokalnego widma uzyskanego z zastosowaniem okna o H współczynnikach. Po to, aby wszystkie te próbki były próbkami listka głównego, musi być spełniony warunek $J \leq H-1$. Uwzględniając zależność (2.59), uogólnioną na $(2J+1)$ próbek widma, uzyskuje się:

$$F(k+i) = B_k W(k+i-\delta_k) + C, \quad \text{dla } i = -J, \dots, J \quad (2.68)$$

Definiując współczynnik:

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=0}^J C_J^{J-i} |F(k-i)|}{\sum_{i=0}^J C_J^{J-i} |F(k+i)|} \quad (2.69)$$

oraz korzystając z założenia (2.59), wzoru (2.57) i tego, że liczba próbek widma uwzględnianych w interpolacji jest nieparzysta, wykazano w [28], iż:

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=0}^J C_J^{J-i} |W(i + \delta_k)|}{\sum_{i=0}^J C_J^{J-i} |W(i - \delta_k)|} \quad (2.70)$$

Wykorzystując (1.93) w (2.70) uzyskuje się po dłuższych przekształceniach [28]:

$$\alpha_k = \frac{\prod_{h=H}^{H+J-1} (h - \delta_k)}{\prod_{h=H}^{H+J-1} (h + \delta_k)} \quad (2.71)$$

a stąd następujący wielomian rzędu J zmiennej δ_k

$$\prod_{h=H}^{H+J-1} (h - \delta_k) - \alpha_k \prod_{h=H}^{H+J-1} (h + \delta_k) = 0 \quad (2.72)$$

w rozwiązaniu którego trzeba znaleźć $\delta_k \in [-1/2, 1/2]$.

Dla $J=1$ (3-punktowa interpolacja) oraz $H=2$ (okno Hanninga) uzyskuje się rozwiązanie (2.64). Dla $J=2$ (5-punktowa interpolacja) uzyskuje się równanie kwadratowe:

$$(1 - \alpha_k)\delta_k^2 - (2H+1)(1 + \alpha_k)\delta_k + H(H+1)(1 - \alpha_k) = 0 \quad (2.73)$$

które ma dwa rozwiązania. Jedno z nich daje wartość spoza zakresu $[-1/2, 1/2]$, a drugie jest właściwym rozwiązaniem:

$$\delta_k = \frac{-\sqrt{(1 + \alpha_k)^2 + 16\alpha_k H(H+1)}}{2(1 - \alpha_k)} \quad (2.74)$$

Dla $J=3$ (7-punktowa interpolacja) uzyskuje się równanie trzeciego stopnia:

$$(1 + \alpha_k)\delta_k^3 + 3(H+1)(\alpha_k - 1)\delta_k^2 + (3H^2 + 6H + 2)(1 + \alpha_k)\delta_k + H(H+1)(H+2)(\alpha_k - 1) = 0 \quad (2.75)$$

które można rozwiązać analitycznie, wykorzystując wzory Cardana. Równanie to ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste:

$$\delta_k = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} - \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} - \frac{(H+1)(\alpha_k + 1)}{\alpha_k + 1} \quad (2.76)$$

gdzie:

$$p = \frac{4\alpha_k(H+1)^2}{(1+\alpha_k)^2} - \frac{1}{3} \quad (2.77)$$

$$q = \frac{4\alpha_k(1-\alpha_k)(H+1)^3}{(1+\alpha_k)^3} - \frac{1}{3} \quad (2.78)$$

Dla $J \geq 4$ trzeba stosować numeryczne metody wyznaczania zer wielomianu wyższego stopnia niż trzeci.

Rozwinięcia metody MWIDFT dokonane w późniejszych pracach przez Belegę i Dalleta oraz Chena i in., a przedstawione w niniejszej pracy w rozdz. 2.6.4, umożliwiają interpolację 5- i 7-punktową za pomocą prostszych wzorów: są to równania (2.65) i (2.82) dla $J=2$ i $J=3$ oraz równania rekurencyjne (2.84) i (2.85) dla $L=2$ i $L=4$ lub nierekurencyjne (2.89) i (2.91).

2.6.4. Metoda $(2J+1)$ -punktowej i $(L+3)$ -punktowej interpolacji MWIDFT

Belega i Dallet w [35, 36] zaprezentowali zmodyfikowaną wersję metody MWIDFT przedstawionej wcześniej w [28] (i mówionej w rozdz. 2.6.3), eliminując jej największą niedogodność, jaką jest konieczność rozwiązywania równania nieliniowego. Pozostaje dalej warunek stosowania okna I klasy Rife'a–Vincenta rzędu $H \geq 2$ uwzględniającej interpolację $(2J+1)$ -punktową ($J \leq H-1$).

Współczynnik α_k , będący uogólnieniem (2.60) i modyfikacją (2.69), jest zdefiniowany przez:

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^J C_{2J-2}^{J-i} (|F(k+i)| - |F(k-i)|) - \sum_{i=1}^{J-2} C_{2J-2}^{J-i-2} (|F(k+i)| - |F(k-i)|)}{\sum_{i=1}^J C_{2J}^{J-i} (|F(k-i)| + |F(k+i)|) + C_{2J}^J |F(k)|} \quad (2.79)$$

skąd na podstawie (1.5) otrzymuje się:

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^J C_{2J-2}^{J-i} (|W(i-\delta_k)| - |W(i+\delta_k)|) - \sum_{i=1}^{J-2} C_{2J-2}^{J-i-2} (|W(i-\delta_k)| - |W(i+\delta_k)|)}{\sum_{i=1}^J C_{2J}^{J-i} (|W(i-\delta_k)| + |W(i+\delta_k)|) + C_{2J}^J |W(\delta_k)|} \quad (2.80)$$

Wykorzystując (1.93) po odpowiednich przekształceniach [35, 36], uzyskuje się:

$$\alpha_k \approx \frac{\delta_k}{H + J - 1} \quad (2.81)$$

skąd:

$$\delta_k \approx (H + J - 1)\alpha_k \quad (2.82)$$

dla $(2J + 1)$ -punktowej MWIDFT.

Estymator amplitudy, bazujący na estymacji częstotliwości według (2.82), jest wyznaczony w [32], a jego właściwości statystyczne (względem granicy Craméra–Rao) określono w symulacjach numerycznych, z których wynika, że ze wzrostem J maleje błąd systematyczny, a rośnie wariancja. Dla okna Hanninga, tj. $H = 2$, wariancja estymatora amplitudy dla $J = 1$ jest 3-krotnie większa od granicy Craméra–Rao i dla $J = 3$ jest niespełna 4,4-krotnie większa od granicy CR. Odchylenie standardowe estymatora częstotliwości znacząco przekracza ograniczenie Craméra–Rao. Osiąga bowiem [36] wartość maksymalną dla $\delta_k \approx 0,5$ wynoszącą dla $H = 2$ ok. $8\sigma_{CR,\lambda}$ (dla $J = 1$), $10\sigma_{CR,\lambda}$ ($J = 2$), $11\sigma_{CR,\lambda}$ ($J = 3$) oraz dla $H = 3$ ok. $10\sigma_{CR,\lambda}$ (dla $J = 1$), $11\sigma_{CR,\lambda}$ ($J = 2$), $12\sigma_{CR,\lambda}$ ($J = 3$). Szczegółowa analiza dokładności estymacji [37] umożliwia, w zależności od wymaganej dokładności, dobór minimalnego czasu pomiaru, liczby próbek, liczby współczynników okna czasowego i liczbę punktów interpolacji oraz właściwości statystycznych estymacji.

Chen i in. prezentują w [70] rozwinięcie metody MWIDFT zastępując stałą C w zależności (2.68) wielomianem stopnia L ze współczynnikami C_0, \dots, C_L :

$$F(m) = B_k W(m - \delta_k) + \sum_{i=0}^L C_i m^i, \quad m = l, \dots, l + L + 2 \quad (2.83)$$

gdzie indeksami $m = l, \dots, l + L + 2$ oznaczono $L + 3$ próbek widma wokół estymowanej częstotliwości $\lambda_k = k + \delta_k$.

Dysponując w ten sposób $L + 3$ -układami równań podane są w [70] równania wyznaczające δ_k rekurencyjnie dla $L \leq 6$, a więc dla interpolacji 2–9-punktowej. Równania te, ze względu na swoją złożoność, uzyskano ze wsparciem oprogramowania do obliczeń symbolicznych Mathematica. Dla $L > 6$ wymagają one dodatkowej weryfikacji, której autorzy nie przeprowadzili, ze względu na znikome znaczenie praktyczne, ponieważ nie stosuje się okien I klasy Rife’a–Vincenta z większą liczbą współczynników. Uzyskane zależności rekurencyjne mają postać:

$$\delta_k = l + \frac{L}{2} + 1 + \left(\frac{L}{2} + H \right) \frac{\Delta^{L+1} F(l) + \Delta^{L+1} F(l+1)}{\Delta^{L+2} F(l)} \quad (2.84)$$

gdzie $\Delta^{L+1}F(l)$ jest różnicą skończoną L -tego rzędu wartości $F(l)$:

$$\begin{cases} \Delta^0 F(l) = F(l) \\ \Delta^1 F(l) = \Delta F(l) = F(l+1) - F(l) \\ \Delta^2 F(l) = \Delta F(l+1) - \Delta F(l) = F(l+2) - 2F(l+1) + F(l) \\ \vdots \\ \Delta^P F(l) = \Delta^{P-1} F(l+1) - \Delta^{P-1} F(l) \end{cases} \quad (2.85)$$

Nawet gdy w (2.84) przyjmiemy $L = -1$, wówczas uzyska się poprawny wzór:

$$\delta_k = l + \frac{1}{2} + \left(H - \frac{1}{2} \right) \frac{F(l) + F(l+1)}{F(l+1) - F(l)} \quad (2.86)$$

który oznacza dwupunktową interpolację dla okna prostokątnego ($H = 1$) i dla okna Hanninga ($H = 2$). Uwzględniając zależności (2.41)–(2.43) dla okna prostokątnego oraz (2.53), (2.54) dla okna Hanninga i po uwzględnieniu zmiany indeksowania próbek widma okazuje się, że (2.86) dla $H = 1, 2$ są rozwinięciami wzorów (2.53), (2.54). Różnica polega na zastąpieniu modułów wartości widma przez wartości zespolone tego widma. Uzyskany rezultat dla $L = -1$ (interpolacja dwupunktowa) oznacza, że dla tego przypadku $C = 0$ w (2.68), a więc nie uwzględnia się przecieku widma od sąsiednich składowych (*long-range leakage*). Można więc stwierdzić, że podstawowe założenie metody MWIDFT, tj. zmniejszenie składnika błędu estymacji spowodowanego tym przeciekiem, jest spełnione dla $L \geq 0$ (interpolacja co najmniej 3-punktowa).

Wartości δ_k z (2.84) dla kolejnych $L \geq 0$ mogą być też wyrażone w postaci nierekurencyjnej [70]:

$L = 0$:

$$\delta_k = l + 1 + H \frac{F_{l+2} - F_l}{F_{l+2} - 2F_{l+1} + F_l} \quad (2.87)$$

$L = 1$:

$$\delta_k = l + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} + H \right) \frac{F_{l+3} - F_{l+2} - F_{l+1} + F_l}{F_{l+3} - 3F_{l+2} + 3F_{l+1} - F_l} \quad (2.88)$$

$L = 2$:

$$\delta_k = l + 2 + (1 + H) \frac{F_{l+4} - 2F_{l+3} + 2F_{l+1} - F_l}{F_{l+4} - 4F_{l+3} + 6F_{l+2} - 4F_{l+1} + F_l} \quad (2.89)$$

$L = 3$:

$$\delta_k = l + \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2} + H \right) \frac{F_{l+5} - 3F_{l+4} + 2F_{l+3} + 2F_{l+2} - F_{l+1} + F_l}{F_{l+5} - 5F_{l+4} + 10F_{l+3} - 10F_{l+2} + 5F_{l+1} - F_l} \quad (2.90)$$

$L = 4 :$

$$\delta_k = l + 3 + (3 + H) \frac{F_{l+6} - 4F_{l+5} + 5F_{l+4} - 5F_{l+2} + 4F_{l+1} - F_l}{F_{l+6} - 6F_{l+5} + 15F_{l+4} - 20F_{l+3} + 15F_{l+2} - 6F_{l+1} + F_l} \quad (2.91)$$

$L = 5 :$

$$\delta_k = l + \frac{7}{2} + \left(\frac{5}{2} + H \right) \frac{F_{l+7} - 5F_{l+6} + 9F_{l+5} - 5F_{l+4} - 5F_{l+3} + 9F_{l+2} - 5F_{l+1} + F_l}{F_{l+7} - 7F_{l+6} + 21F_{l+5} - 35F_{l+4} + 35F_{l+3} - 21F_{l+2} + 7F_{l+1} - F_l} \quad (2.92)$$

$L = 6 :$

$$\delta_k = l + 4 + (3 + H) \frac{F_{l+7} - 6F_{l+6} + 14F_{l+5} - 14F_{l+4} + 14F_{l+3} - 14F_{l+2} + 6F_{l+1} - F_l}{F_{l+8} - 8F_{l+7} + 28F_{l+6} - 56F_{l+5} + 70F_{l+4} - 56F_{l+3} + 28F_{l+2} - 8F_{l+1} + F_l} \quad (2.93)$$

Po zbadaniu wariancji estymatora (2.86) interpolacji dwupunktowej dla okna Hanninga ($H = 2$) Chen i Mei zaproponowali [71] uśredniony estymator powstały po zastosowaniu wzoru (2.86) dla każdej pary wartości widma spośród czterech o maksymalnej amplitudzie. Estymator taki ma ok. dwukrotnie mniejszą wariancję od estymatora dwupunktowego (2.86). Ponieważ uśrednienie estymatora jest uśrednieniem ważonym, więc optymalny dobór wag uśredniania wymaga informacji *a priori* o sygnale lub procedury iteracyjnej. Uśrednianie optymalne pozwala na uzyskanie estymatora wariancji ok. 1,8–2,6 razy większego od ograniczenia CR [71]. Analogiczne uśrednianie estymatora można dokonać dla $L \geq 0$.

3. Metoda liniowej interpolacji DFT

3.1. Założenia metody liniowej interpolacji DFT (LIDFT)

Podstawowym założeniem umożliwiającym wyprowadzenie równań metody liniowej interpolacji DFT (LIDFT) jest aproksymacja charakterystyki widmowej okna czasowego funkcjami liniowymi w taki sposób, aby widmo sygnału wieloczęstotliwościowego aproksymować odpowiednią sumą ważoną tych funkcji liniowych, gdzie wagi te to amplitudy składowych oscylacji. Ponadto funkcje są odpowiednio przesunięte względem siebie o wartość odpowiadającą częstotliwościom składowych oscylacji. W ten sposób można uzyskać liniowe równanie macierzowe, którego macierze składowe są wyznaczone na podstawie odpowiednich wartości widma sygnału pomnożonego przez okno czasowe, które oblicza się algorytmem FFT, oraz odpowiednio dobranych współczynników również obliczonych algorytmem FFT. Prawidłowy dobór zarówno współczynników, jak i próbek widma sygnału pomnożonego przez odpowiednie okno czasowe wymaga wstępnej lokalizacji składowych oscylacji w widmie, co jest typowe dla wszystkich metod interpolacji widma (rozdz. 2). Wstępna lokalizacja składowych w widmie wraz z doбором okna czasowego stanowią warunki początkowe metody LIDFT.

Rozwiązaniem tak skonstruowanego liniowego równania macierzowego są amplitudy składowych oscylacji oraz poprawki względem wartości wyznaczonych przez warunki początkowe, częstotliwości unormowanych składowych oscylacji. Poprawki te umożliwiają wyznaczenie końcowych wartości tych częstotliwości. Z rozszerzonych operacji matematycznych metoda LIDFT wymaga jedynie algorytmu FFT i algorytmu rozwiązywania liniowego równania macierzowego, a podstawową właściwością metody LIDFT, wyróżniającą ją spośród innych metod interpolacji widma, jest liniowość równania, z którego wyznacza się podstawowe parametry sygnału wieloczęstotliwościowego i uwzględnienie przecieku widma w równaniach metody.

Przedstawiono dotychczasową wersję metody LIDFT, uzyskaną zgodnie z założeniami. Rozdział jest podstawą do przedstawienia w rozdziale 4 uogólnionej wersji metody LIDFT. Z tego względu rozdział 3 ma charakter skrótowego przeglądu prac [48–62], z pominięciem wielu szczegółowych wyprowadzeń i analiz zawartych

w cytowanej literaturze. W opisie ograniczono się jedynie do tych aspektów, które są pomocne w zapoznaniu się z treścią rozdz. 4 i przedstawionymi wnioskami. Jest to również uzasadnione faktem, że rozdział 4 zawiera pełne wyprowadzenia, ale dotyczące już znacząco rozszerzonej wersji metody LIDFT, która umożliwi istotne zwiększenie dokładności estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego oraz uproszczenie koniecznych obliczeń.

3.2. Linearyzacja widma sygnału oraz algorytm LIDFT

Charakterystyka widmowa $W(\lambda)$ okna czasowego, zdefiniowana przez (1.10) jest aproksymowana w metodzie LIDFT funkcjami liniowymi w sposób pokazany na rysunku 3.1a, tj. przez funkcje $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$ dla $\lambda \in [k, k+1]$ z najmniejszym błędem średniokwadratowym Q :

$$Q = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \int_k^{k+1} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.1)$$

Minimum (3.1) uzyskuje się przez przyrównanie pochodnej Q względem a_k, b_k do zera, skąd otrzymuje się [50, 55, 56, 61]:

$$a_k = 12 \int_k^{k+1} [\lambda - (k + 1/2)] W(\lambda) d\lambda \quad (3.2)$$

$$b_k = 12 \int_k^{k+1} [(k + 1/2)^2 - \lambda(k + 1/2) + 1/12] W(\lambda) d\lambda \quad (3.3)$$

Minimum to wynosi:

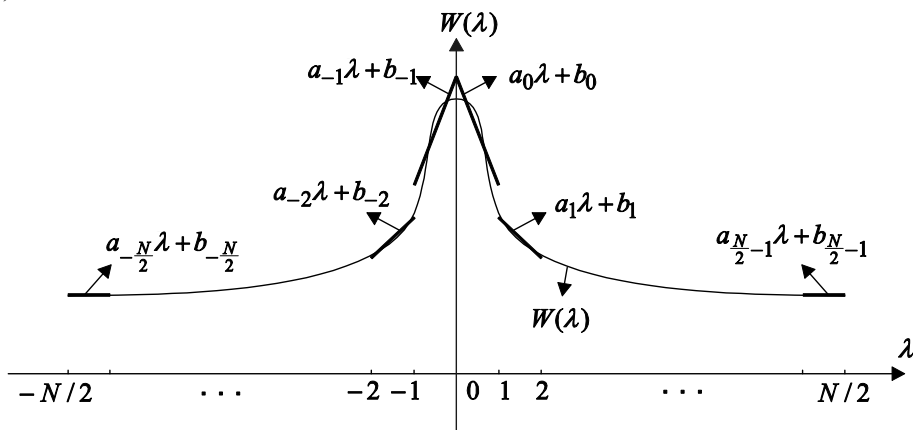
$$Q_{\min} = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n w_n^2 \quad (3.4)$$

gdzie w_n są próbkami okna czasowego, a c_n współczynnikami zdefiniowanymi jako:

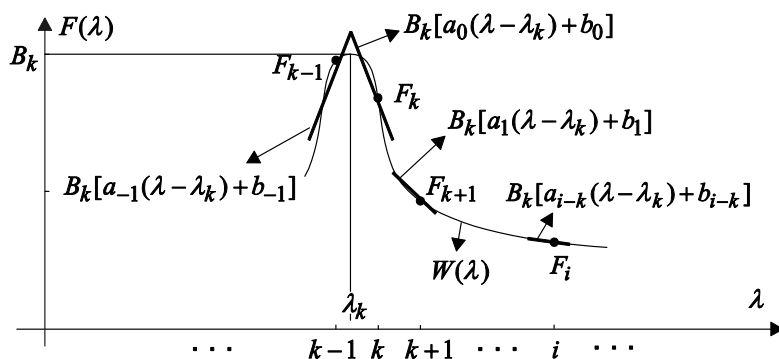
$$c_n = 1 - \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^2 - 3 \left(\frac{\cos x_n - (\sin x_n)/x_n}{x_n} \right)^2, \quad x_n = \frac{\pi n}{N} \quad (3.5)$$

i przedstawionymi na rysunku 3.2.

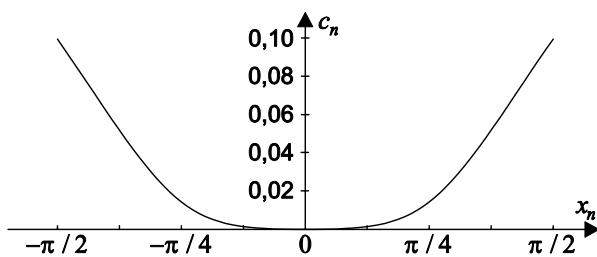
a)



b)



Rys. 3.1. Aproxymacja funkcjami liniowymi w metodzie LIDFT: a) charakterystyki widmowej $W(\lambda)$ okna czasowego, b) widma jednej oscylacji o częstotliwości λ_k i amplitudzie B_k



Rys. 3.2. Wartości współczynnika c_n z równ. (3.5) w funkcji x_n

Uzyskane we wzorach (3.2), (3.3) współczynniki funkcji liniowych $\hat{W}_k(\lambda)$ aproksymujących charakterystykę $W(\lambda)$ okna czasowego są następnie zastosowane do aproksymacji widma sygnału. Aproksymacja widma (1.9) sygnału złożonego z jednej oscylacji zespolonej o amplitudzie B_k i częstotliwości unormowanej $\lambda_k \in [k-1, k]$ jest opisana przez (rys. 3.1b):

$$F_i = F(\lambda = i) \cong B_k [a_{i-k}(i - \lambda_k) + b_{i-k}], \quad i = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (3.6)$$

a uogólnienie na przypadek N oscylacji o amplitudach $B_{-N/2}, \dots, B_{N/2-1}$ i częstotliwościach $\lambda_{-N/2}, \dots, \lambda_{N/2-1}$ ma postać:

$$F_i \cong \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} B_k [a_{i-k}(i - \lambda_k) + b_{i-k}], \quad i = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (3.7)$$

Po wprowadzeniu zmiennej γ_k zgodnie z równaniem:

$$\gamma_k = \lambda_k - (k - 1/2), \quad \lambda_k = \gamma_k + (k - 1/2), \quad \gamma_k \in [-1/2, 1/2] \quad (3.8)$$

równanie (3.7) można zapisać jako:

$$F_i \cong \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} B_k [a_{i-k}(i - k + 1/2) + b_{i-k}] - \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} B_k \gamma_k a_{i-k}, \quad i = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (3.9)$$

lub w postaci macierzowej:

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = \mathbf{V}_{N \times 2N} \cdot \mathbf{B}_{2N \times 1} \quad (3.10)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = [F_n]^T = [F_{-N/2}, \dots, F_{N/2-1}]^T \quad (3.11)$$

$$\mathbf{V}_{N \times 2N} = [V'_{ik} \quad V''_{ik}] = [a_{i-k}(i - k + 1/2) + b_{i-k} \quad -a_{i-k}]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_0 + b_0 & \cdots & [-(N-1) + \frac{1}{2}]a_{-(N-1)} + b_{-(N-1)} & -a_0 & \cdots & -a_{-(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [(N-1) + \frac{1}{2}]a_{N-1} + b_{N-1} & \cdots & \frac{1}{2}a_0 + b_0 & -a_{(N-1)} & \cdots & -a_0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{B}_{N \times 1} = [B_i \quad \gamma_i B_i]^T = [B_{-N/2} \quad \cdots \quad B_{N/2-1} \quad \gamma_{-N/2} B_{-N/2} \quad \cdots \quad \gamma_{N/2-1} B_{N/2-1}]^T \quad (3.13)$$

Równanie (3.10) nie ma jednoznacznego rozwiązania ze względu na \mathbf{B} , czyli zmienne B_k i $\gamma_k B_k$ ($k = -N/2, \dots, N/2-1$), bo nie można wyznaczyć $2N$ zmiennych z N równań. Dlatego trzeba ograniczyć liczbę oscylacji do $P \leq N/2$. Wówczas (3.10) ma postać:

$$\mathbf{F}_{N \times 1} = \mathbf{V}_{N \times 2P} \cdot \mathbf{B}_{2P \times 1} \quad (3.14)$$

a \mathbf{F} , \mathbf{V} , \mathbf{B} są zdefiniowane jak w (3.11)–(3.13) z tą różnicą, że $i, k = k_1, \dots, k_p$ (bez zmian pozostaje zakres $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$). Dla $P < N/2$ można zastosować metodę najmniejszych kwadratów w odniesieniu do (3.14), co prowadzi [158] do równania:

$$\mathbf{V}^H \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{V}^H \mathbf{F} \quad (3.15)$$

a po uwzględnieniu (3.2), (3.3), (3.11)–(3.13) i wielu przekształceniach [50, 56, 61] (3.15) ma postać:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} B_k \\ C_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1}, \quad C_k = \gamma_k B_k, \quad i, k \in S_1 = \{k_1, \dots, k_p\} \quad (3.16)$$

gdzie:

$$r_m = (-1)^m \text{FFT}_m \{ \alpha_n^2 w_n^2 \}_N \quad (3.17)$$

$$s_m = j(-1)^m \text{FFT}_m \{ \alpha_n \beta_n w_n^2 \}_N \quad (3.18)$$

$$t_m = (-1)^m \text{FFT}_m \{ \beta_n^2 w_n^2 \}_N \quad (3.19)$$

$$u_m = (-1)^m \text{FFT}_m \{ y_n w_n^2 \alpha_n e^{jx_n} \}_N \quad (3.20)$$

$$v_m = j(-1)^m \text{FFT}_m \{ y_n w_n^2 \beta_n e^{jx_n} \}_N \quad (3.21)$$

$$\alpha_n = (\sin x_n) / x_n, \quad \beta_n = 6[\cos x_n - (\sin x_n) / x_n] / x_n, \quad x_n = n\pi / N \quad (3.22)$$

$$m = 0, \dots, N-1, \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (3.23)$$

a $\text{FFT}_m \{ z_n \}_N$ oznacza, zgodnie z (1.8), m -tą próbkę widma uzyskaną algorytmem FFT z N próbek z_n .

Równania (3.16)–(3.23) wyznaczają algorytm metody LIDFT, który można podzielić na następujące etapy:

1. Próbujemy sygnał $y(t)$, uzyskując próbki y_n indeksowane, zgodnie ze wzorem (3.23) w zakresie $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$.
2. Wybieramy okno czasowe i obliczamy współczynniki r_m, s_m, t_m, u_m, v_m na podstawie (3.17)–(3.22).
3. Jako wstępną lokalizację składowych w widmie wybieramy zbiór $S = \{k_1, \dots, k_K\}$, co oznacza, że sygnał składa się z K -składowych sinusoidalnych o częstotliwo-

ściach unormowanych $\lambda_{k_m} \in [k_m - 1, k_m]$. Biorąc pod uwagę składowe sprzężone, przyjmujemy, że $i, k \in S_1 = \{k_1, \dots, k_p\} = \{k_1, \dots, k_K, N - k_K + 1, \dots, N - k_1 + 1\}$.

4. Na podstawie wyznaczonych wartości i, k z punktu 3 obliczamy B_k, C_k z równania (3.16), a stąd $\gamma_k = C_k / B_k$ i na podstawie (3.8) częstotliwości unormowane jako $\lambda_k = k - 1/2 + \text{Re} \gamma_k$. Amplitudę i fazę każdej składowej sinusoidalnej wyznacza się z równania $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$.
5. Sprawdzamy wartość $\text{Im} \gamma_k$ i w razie potrzeby powtarzamy pkt 3–5 algorytmu w celu lepszego doboru zbioru S , uzyskując zmniejszenie $\text{Im} \gamma_k$. W idealnym przypadku $\text{Im} \gamma_k = 0$.

Wstępna lokalizacja składowych w widmie (wybór zbioru S) oraz stosowane okno czasowe nazywa się warunkami początkowymi metody LIDFT.

3.3. Przeznaczone dla metody LIDFT parametryczne okno czasowe

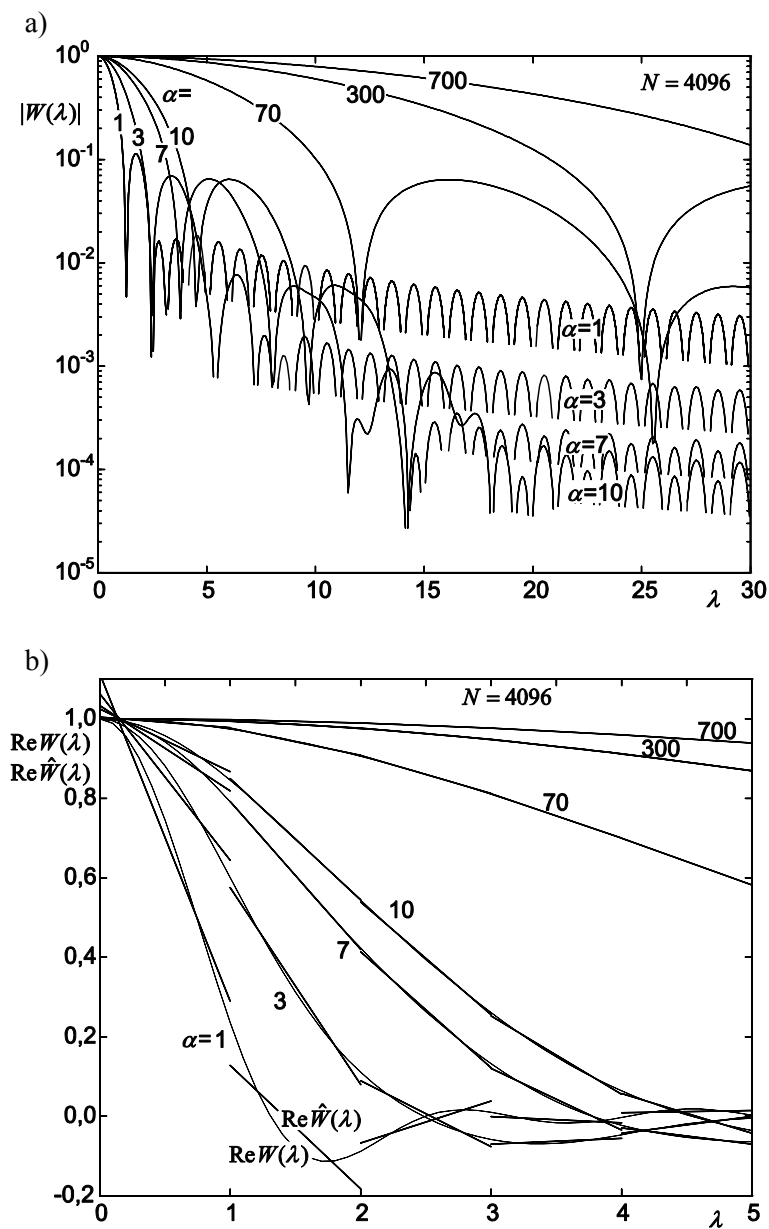
W pierwszej wersji metody LIDFT korzysta się z przeznaczonego dla tej metody okna czasowego, które jest zdefiniowane na bazie współczynników c_n z (3.5) [50, 55]:

$$w_n = N \frac{1 - e^{-\alpha^2 x_n^4}}{c_n} \left(\sum_{i=-N/2}^{N/2-1} \frac{1 - e^{-\alpha^2 x_i^4}}{c_i} \right)^{-1} \quad (3.24)$$

okno parametryczne (z parametrem α) – rysunek 3.3.

Analiza metrologiczna metody LIDFT z zastosowaniem okna czasowego (3.24) wyznacza [50, 57, 61] następujące charakterystyki błędów estymacji parametrów sygnału:

- rozkład deterministycznych błędów metody (oznaczonych jako: $\delta_m |B_k|$, $\Delta_m \lambda_k$, $\Delta_m \arg B_k$) w funkcji γ_k (lokalizacji składowej w widmie) dla przypadku jednej oscylacji zespolonej (rys. 3.4),
- wariancji estymatora $|B_k|$ oraz λ_k i wyznaczenie na ich podstawie (oraz $\delta_m |B_k|$, $\Delta_m \lambda_k$) dla najmniej korzystnych warunków pomiaru (tj. wartości γ_k , $\arg B_k$) wartości błędów średniokwadratowych estymacji $|B_k|$ oraz λ_k (rys. 3.5):

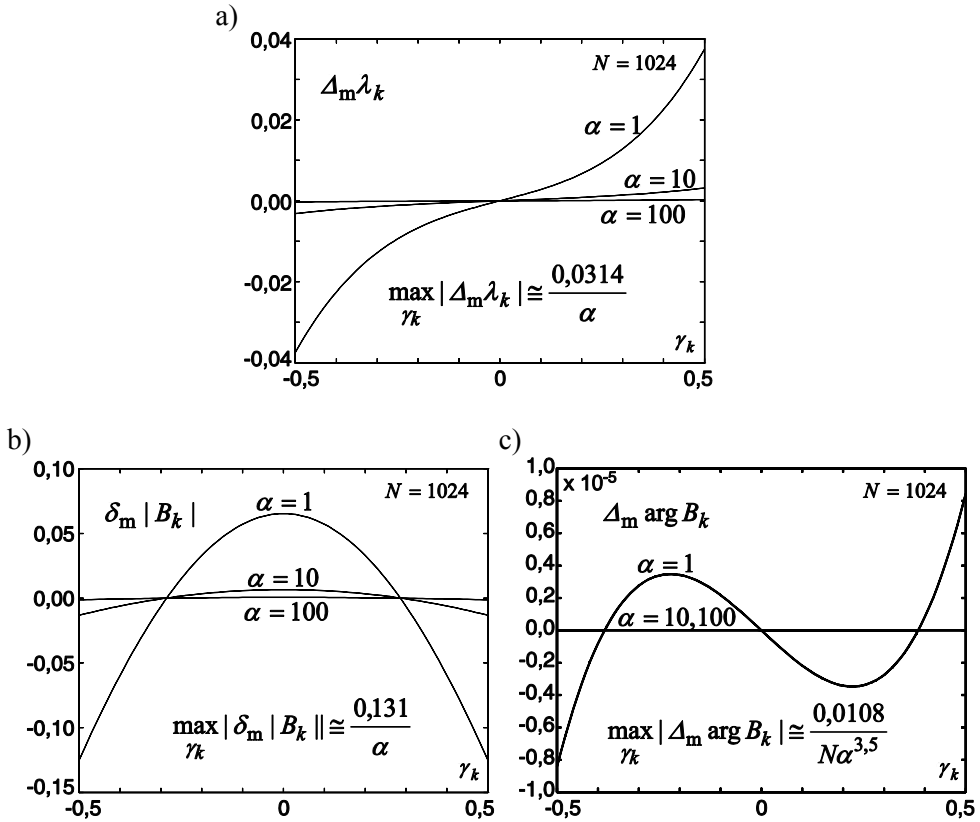


Rys. 3.3. Parametryczne okno czasowe metody LIDFT w jej pierwszej wersji: a) charakterystyka amplitudowa, b) aproksymacja funkcjami liniowymi

$$\delta |B_k| = \sqrt{\left(\frac{0,131}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1,66\alpha^{0,25}}{\sqrt{N \text{SNR}_k}}\right)^2} \quad (3.25)$$

$$\Delta\lambda_k = \sqrt{\left(\frac{0,0314}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1,06\alpha^{0,75}}{\sqrt{N \text{SNR}_k}}\right)^2} \quad (3.26)$$

- błędy deterministyczne (oznaczone jako: $\delta_d |B_k|$, $\Delta_d \lambda_k$) dla przypadku dwóch oscylacji zespolonych i najmniej korzystnych warunków pomiaru (tj. wartości γ_k , $\arg B_k$) w funkcji odległości τ między składowymi (odpowiednio zaokrąglonej do wartości całkowitej na osi częstotliwości unormowanej w bin),



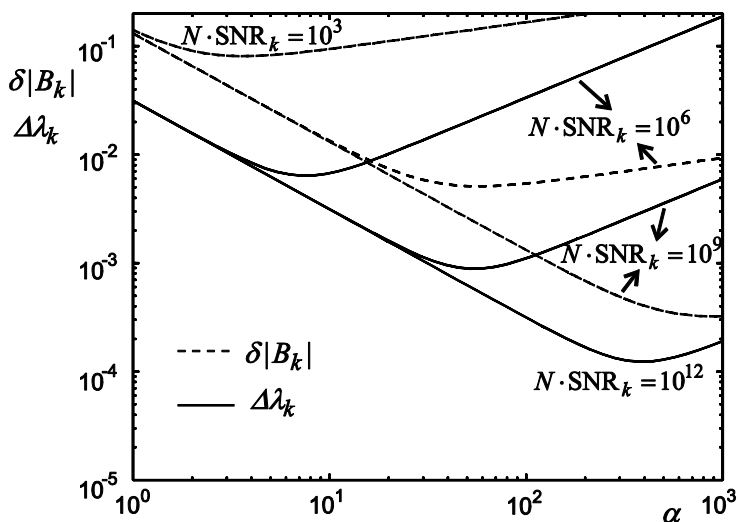
Rys. 3.4. Wpływ wartości γ_k (lokalizacji składowej w widmie) oraz parametru α okna czasowego z pierwszej wersji metody LIDFT na błędy estymacji parametrów jednej oscylacji zespolonej w metodzie LIDFT: a) częstotliwości, b) amplitudy, c) fazy

stosunku amplitud obu składowych ($|B_i|/|B_k|$) i parametru α (rys. 3.6–3.9); na tej podstawie możliwy jest taki dobór parametru α , dla którego błędy estymacji są najmniejsze dla danego τ i $|B_i|/|B_k|$ (rys. 3.10, 3.11) – uproszczona zależność dla takiego doboru parametru α , która minimalizuje błąd $\Delta_d \lambda_k$ jest następująca (rys. 3.12):

$$\alpha_{\lambda_{\text{opt}}} \approx \frac{\tau^2}{K}, \quad K = \begin{cases} 10 & \text{dla } |B_i|/|B_k| < 10 \text{ dB} \\ |B_i|/|B_k| & \text{dla } 10 \text{ dB} < |B_i|/|B_k| < 140 \text{ dB} \\ 140 & \text{dla } |B_i|/|B_k| > 140 \text{ dB} \end{cases} \quad (3.27)$$

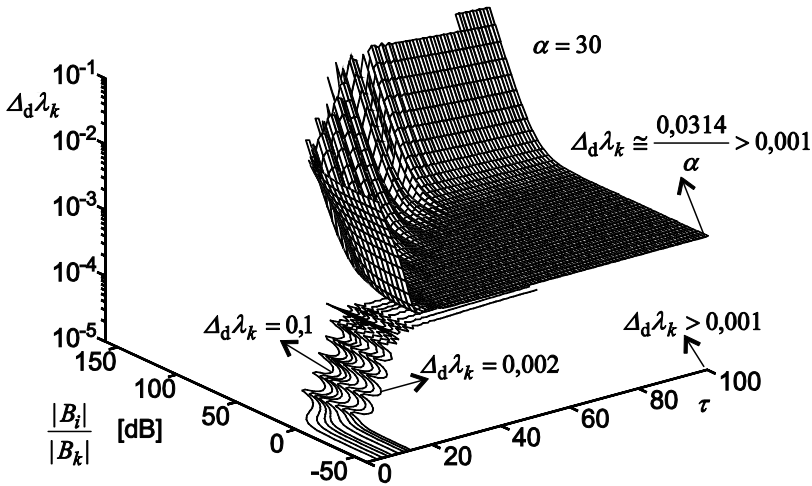
a minimalizacja $\delta_d |B_k|$ występuje dla wartości α ok. 2-krotnie większej niż $\alpha_{\lambda_{\text{opt}}}$.

Kolejne rozwinięcia metody LIDFT, w tym uwzględnienie techniki uzupełniania zerami (rozd. 3.4) oraz przedstawione w rozdziale 4, umożliwiają zastosowanie innych okien czasowych niż zdefiniowane przez (3.24), o znacząco korzystniejszych właściwościach, w tym również okien czasowych, które są używane w klasycznych analizach widma z użyciem DFT (FFT). Przedstawiono inną analizę metrologiczną metody LIDFT, niż przedstawiona poprzednio, umożliwiającą powiązanie uzyskanych wyników z charakterystyką widmową stosowanego okna czasowego. Wskazano również na potrzebę uwzględnienia właściwości okna czasowego w przypadku niewystar-

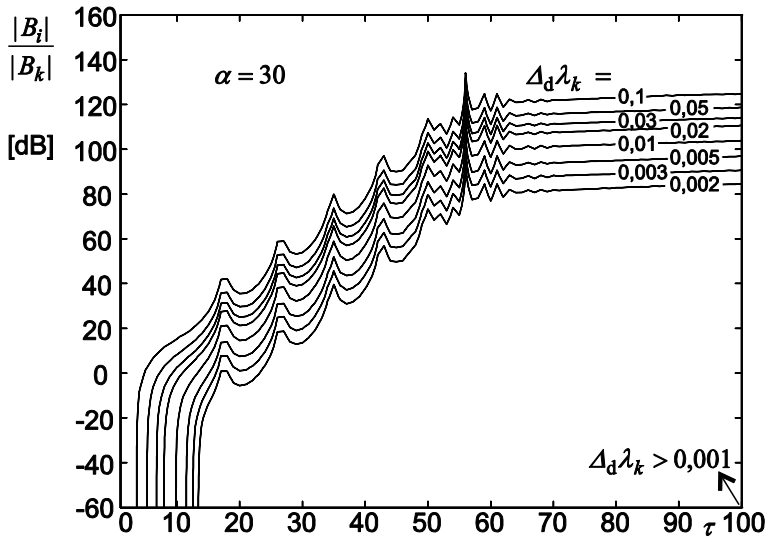


Rys. 3.5. Błąd średniokwadratowy według (3.25)–(3.26) wyznaczenia częstotliwości i amplitudy w metodzie LIDFT dla przypadku jednej oscylacji zespolonej

czającej wstępnej lokalizacji składowych i stosowaniu metody LIDFT w sposób iteracyjny (choć sama metoda LIDFT nie jest metodą *sensu stricte* iteracyjną). Okno czasowe z (3.24) nie ma korzystnych właściwości do stosowania takiej iteracji. Jednakże wnioski jakościowe z przedstawionej w niniejszym punkcie analizy metrologicznej mają charakter ogólny. Należy do nich przede wszystkim stwierdzenie zależności błę-

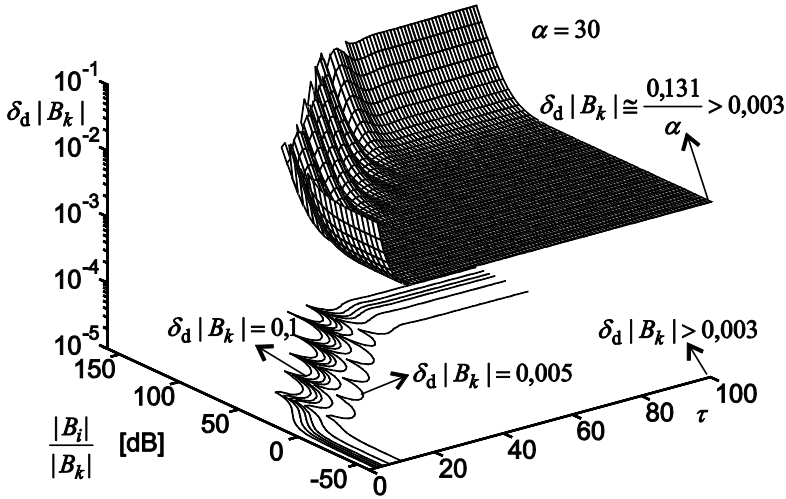


Rys. 3.6. Błąd $\Delta_d\lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$ dla $\alpha = 30$

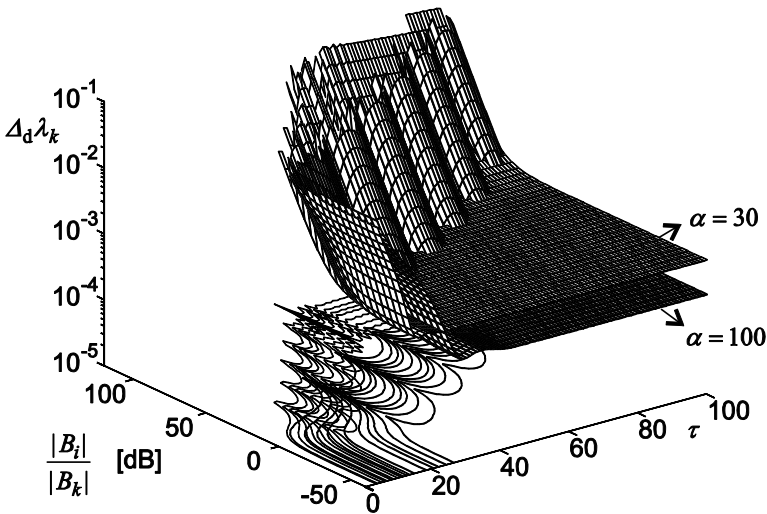


Rys. 3.7. Błąd $\Delta_d\lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$ dla $\alpha = 30$

dów estymacji od odległości między składowymi i stosunkiem ich amplitud, konieczność kompromisu między zmniejszeniem błędu deterministycznego metody i błędu losowego (wariancji) estymatora oraz możliwość doboru okna czasowego (lub parametru okna dla okien parametrycznych) optymalnego dla danych warunków pomiaru.



Rys. 3.8. Błąd $\delta_d |B_k|$ w funkcji τ oraz $|B_i| / |B_k|$ dla $\alpha = 30$



Rys. 3.9. Błąd $\Delta_d \lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i| / |B_k|$ dla $\alpha = 30, 100$

3.4. Uzupelnianie zerami w metodzie LIDFT

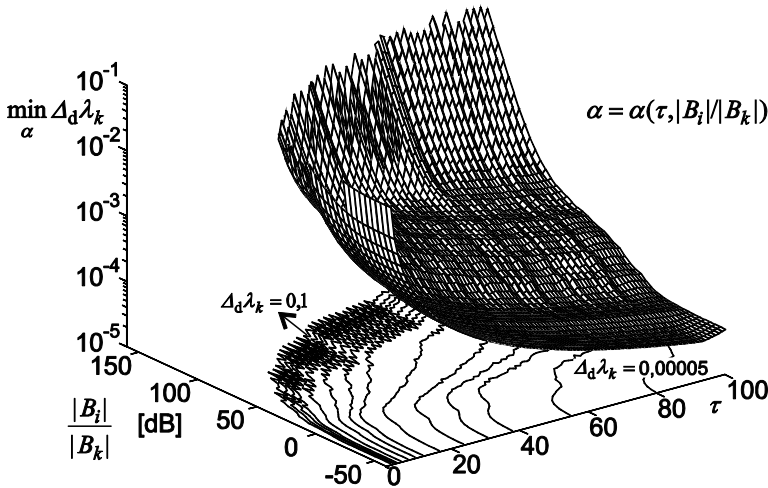
Rozwinięcie metody LIDFT, uzyskane po uwzględnieniu techniki uzupełniania zerami [60–62], umożliwiło zastosowanie w tej metodzie okien czasowych z klasycznej analizy widma (omówionej w rozdziale 1). Punktem wyjścia tej modyfikacji jest uwzględnienie parametru R (krotności uzupełniania zerami – zgodnie z (1.114)) w definicji (3.1) odpowiadające aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego $W(\lambda)$ przez funkcje $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$ dla $\lambda \in [k/R, (k+1)/R]$ (rys. 3.13):

$$Q = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda \quad (3.28)$$

skąd, w podobny sposób jak w rozdz. 3.2 (przyprowadzając pochodne Q względem a_k , b_k do zera) uzyskuje się zależności (3.4)–(3.5) z tą różnicą, że zamiast $x_n = \pi n / N$ zachodzi $x_n = \pi n / (NR)$, co umożliwi zmniejszenie błędu aproksymacji (3.28) przez zwiększenie wartości R . Wzrost R dwukrotnie zmniejsza wartość Q 16 razy (na podstawie (3.4) i rys. 3.14).

Ponadto zamiast (3.8) zachodzi:

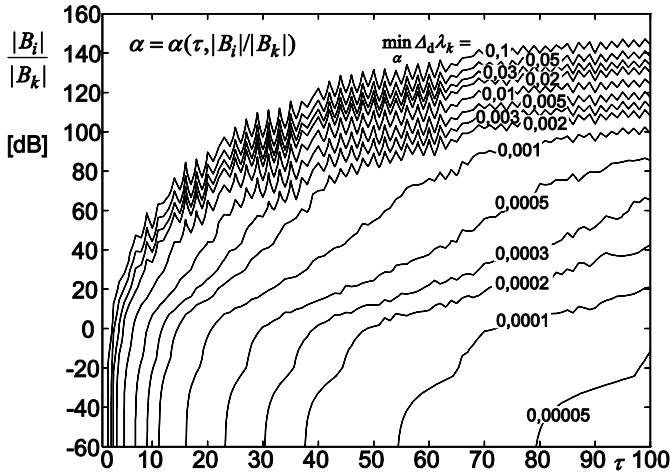
$$\gamma_k = R\lambda_k - (k-1/2), \quad \lambda_k = [\gamma_k + (k-1/2)] / R, \quad \gamma_k \in [-1/2, 1/2] \quad (3.29)$$



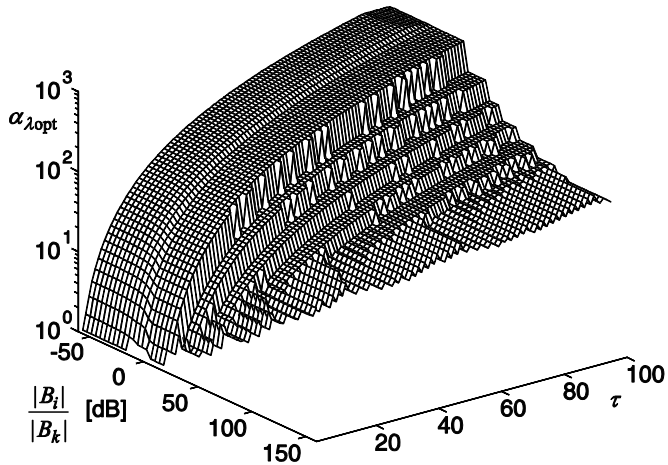
Rys. 3.10. Błąd $\min_{\alpha} \Delta_d \lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i|/|B_k|$

Następnie, podobnie jak w rozdz. 3.2 dla przypadku pierwszej wersji metody LIDFT, uzyskuje się [60–62] zmodyfikowane liniowe równanie macierzowe uwzględniające technikę uzupełniania zerami:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & -s_{i-k} \\ s_{i-k} & t_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} B_k \\ C_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1}, \quad C_k = \gamma_k B_k, \quad i, k \in S_1 = \{k_1, \dots, k_p\} \quad (3.30)$$



Rys. 3.11. Błąd $\min_{\alpha} \Delta_d \lambda_k$ w funkcji τ oraz $|B_i| / |B_k|$



Rys. 3.12. Optymalna dla $\min_{\alpha} \Delta_d \lambda_k$ wartość parametru α w funkcji τ oraz $|B_i| / |B_k|$

gdzie:

$$r_m = e^{j\pi m/R} \text{FFT}_m \{ \alpha_n^2 w_n^2 \}_{NR} \quad (3.31)$$

$$s_m = j e^{j\pi m/R} \text{FFT}_m \{ \alpha_n \beta_n w_n^2 \}_{NR} \quad (3.32)$$

$$t_m = e^{j\pi m/R} \text{FFT}_m \{ \beta_n^2 w_n^2 \}_{NR} \quad (3.33)$$

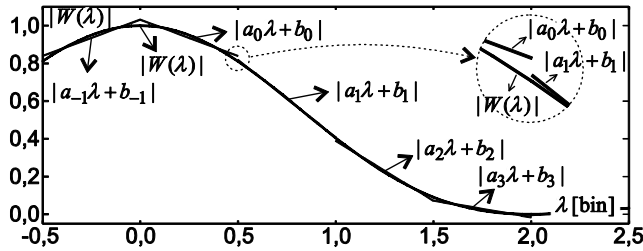
$$u_m = e^{j\pi m/R} \text{FFT}_m \{ y_n w_n^2 \alpha_n e^{jx_n} \}_{NR} \quad (3.34)$$

$$v_m = j e^{j\pi m/R} \text{FFT}_m \{ y_n w_n^2 \beta_n e^{jx_n} \}_{NR} \quad (3.35)$$

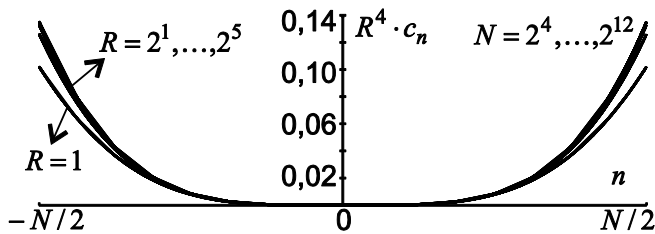
$$\alpha_n = (\sin x_n) / x_n, \quad \beta_n = 6[\cos x_n - (\sin x_n) / x_n] / x_n, \quad x_n = \pi n / (NR) \quad (3.36)$$

$$m = 0, \dots, NR - 1, \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (3.37)$$

a $\{z_n\}_{NR}$ oznacza uzupełnianie zerami N -elementowego zbioru próbek $\{z_n\}_N$ przez dołączenie próbek zerowych na końcu sygnału (wg wzoru (1.116)). Można jednak uprościć podane zależności, stosując uzupełnienia według (1.115) zamiast (1.116) i eliminując w ten sposób konieczność mnożenia przez funkcję $e^{j\pi m/R}$, co uwzględniono po rozszerzeniu metody LIDFT przedstawionej w rozdz. 4.



Rys. 3.13. Linearyzacja charakterystyki widmowej $W(\lambda)$ okna czasowego w metodzie LIDFT z uwzględnieniem uzupełniania zerami – przykład dla okna trójkątnego i $R = 2$



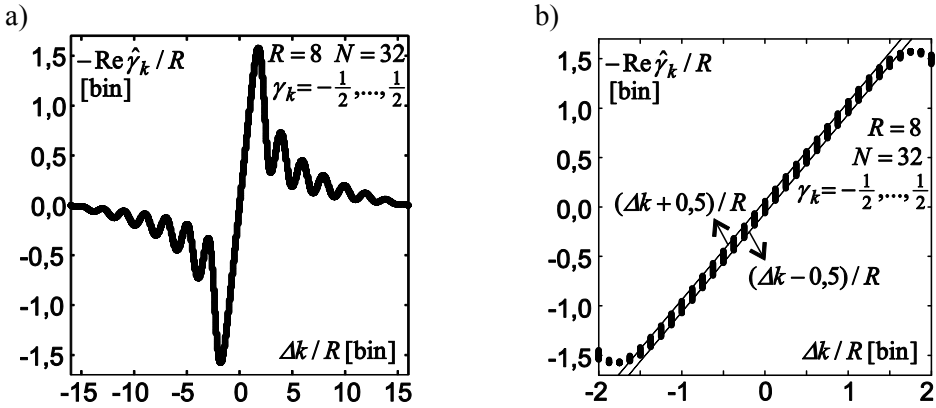
Rys. 3.14. Wartości $R^4 c_n$ dla c_n według (3.5) z uwzględnieniem $x_n = \pi n / (NR)$

Równania (3.29)–(3.37) wyznaczają algorytm metody LIDFT uwzględniającej technikę uzupełniania zerami, który można podzielić na następujące etapy:

1. Próbkujemy sygnał $y(t)$, uzyskując próbki y_n indeksowane, zgodnie z (3.37) w zakresie $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$.
2. Wybieramy okno czasowe i obliczamy współczynniki r_m, s_m, t_m, u_m, v_m na podstawie (3.31)–(3.37).
3. Jako wstępną lokalizację składowych w widmie wybieramy zbiór $S = \{k_1, \dots, k_K\}$, co oznacza, że sygnał składa się z K składowych sinusoidalnych o częstotliwościach unormowanych $\lambda_{k_m} \in [(k_m - 1)/R, k_m/R]$. Biorąc pod uwagę składowe sprzężone przyjmujemy, że $i, k \in S_1 = \{k_1, \dots, k_P\} = \{k_1, \dots, k_K, NR - k_K + 1, \dots, NR - k_1 + 1\}$.
4. Na podstawie wyznaczonych wartości i, k z punktu 3 obliczamy B_k, C_k z równania (3.30), a stąd $\gamma_k = C_k / B_k$ i na podstawie (3.29) częstotliwości unormowane λ_k . Amplitudę i fazę każdej składowej sinusoidalnej wyznacza się z równania $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$.
5. Sprawdzamy wartość $\text{Im} \gamma_k$ i w razie potrzeby powtarzamy pkt 3–5 algorytmu w celu lepszego doboru zbioru S , uzyskując zmniejszenie $\text{Im} \gamma_k$. W idealnym przypadku $\text{Im} \gamma_k = 0$.

W tym przypadku warunki początkowe metody LIDFT stanowią: wstępna lokalizacja składowych w widmie (dobór zbioru S), wybór okna czasowego i parametru R .

W porównaniu do pierwszej wersji metody LIDFT (rozdz. 3.2) pojawia się pewna niedogodność. Dokładność wstępnej lokalizacji składowych w widmie musi być R -krotnie większa ($\lambda_k \in [(k-1)/R, k/R]$ zamiast $\lambda_k \in [k-1, k]$), co w praktyce często nie jest możliwe do spełnienia dla dużych wartości R . Trudności te można wyeliminować, stosując algorytm LIDFT iteracyjnie. Wówczas można poprzestać na dotychczasowym warunku $\lambda_k \in [(k-1), k]$, a nawet jeszcze mniej wymagającej lokalizacji składowych w widmie. Pokazuje to następująca analiza. Załóżmy, że wstępną lokalizację składowej $B_k e^{j2\pi\lambda_k n/N}$ przyjmujemy z błędem $\Delta k/R$ (w bin), gdzie Δk jest liczbą całkowitą, tzn. $\lambda_k \in [(k + \Delta k - 1)/R, (k + \Delta k)/R]$ zamiast $\lambda_k \in [(k-1)/R, k/R]$. Załóżmy, że sygnał składa się z jednej takiej składowej i że taki sygnał poddajemy analizie metodą LIDFT, uzyskując estymatory \hat{B}_k, \hat{C}_k oraz $\hat{\gamma}_k = \hat{B}_k / \hat{C}_k, \hat{\lambda}_k = (k + \Delta k - \frac{1}{2} + \text{Re} \hat{\gamma}_k) / R$. Istotna jest zależność $-\text{Re} \hat{\gamma}_k / R$ w funkcji $\Delta k/R$, którą dla okna trójkątnego przedstawiono na rysunku 3.15. Dla $\gamma_k = 0$ oraz $\Delta k/R \in (-1, 5; 1, 5)$ zachodzi $-\text{Re} \hat{\gamma}_k / R \approx \Delta k/R$, a dla innych wartości γ_k z zakresu $[-0, 5; 0, 5]$ następuje przesunięcie charakterystyki o wartość z zakresu $[-0, 5/R; 0, 5/R]$ bin (rys. 3.15b).

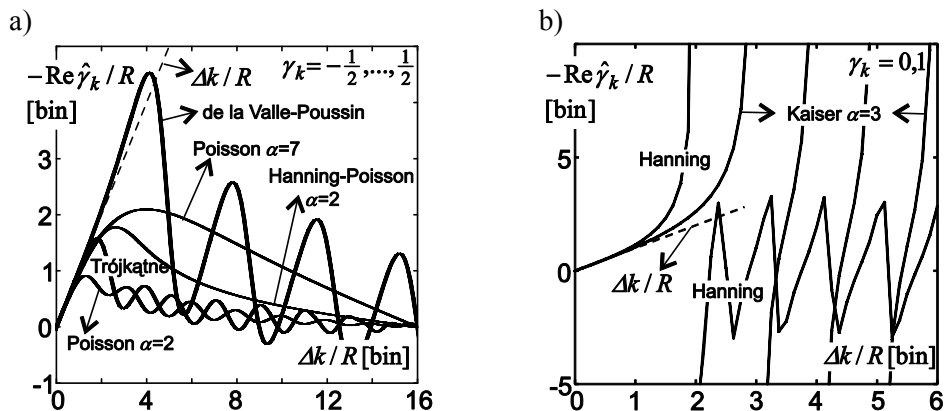


Rys. 3.15. Wpływ niedokładnej wstępnej lokalizacji składowej w widmie w metodzie LIDFT z użyciem techniki uzupełniania zerami i oknem trójkątnym na wyniki estymacji częstotliwości – symulacje dla sygnału złożonego z jednej oscylacji: a) zależność $-\text{Re} \hat{\gamma}_k / R$ w funkcji błędu $\Delta k / R$ lokalizacji składowej, b) przybliżony zakres $\Delta k / R$ wyznaczający możliwość iteracyjnego stosowania algorytmu LIDFT

Jeśli błąd wstępnej lokalizacji składowej nie przekracza ok. $(-1,5; 1,5)$ bin (ten zakres nie zależy od wartości R , a od szerokości listka głównego okna czasowego), to można zastosować algorytm LIDFT dwukrotnie: pierwszy raz z błędem lokalizacji składowej $\Delta k / R \in (1,5; 1,5)$ bin, otrzymując $\hat{\gamma}_k = \hat{C}_k / \hat{B}_k$ i drugi raz dokonując korekty wstępnej lokalizacji składowej o wartość $\text{round}(\text{Re} \hat{\gamma}_k) / R$ (gdzie funkcja $\text{round}(x)$ zaokrągla wartość x do najbliższej liczby całkowitej). Na przykładzie sygnału zdefiniowanego w tabeli 3.1 pokazano jednak, że dla sygnału wieloczęstotliwościowego potrzebnych może być kilka kolejnych iteracji. Pozostaje jeszcze odpowiedzieć na pytanie, czy dla innych okien czasowych uzyskamy podobne jak na rysunku 3.15 charakterystyki. Na rysunku 3.16a przedstawiono przykładowe charakterystyki dla okien spełniających warunek z równań (1.36), (1.37), a na rysunku 3.16b dla okien niespełniających tego warunku.

Na rysunku 3.16b dla okna Hanninga i Kaisera (z parametrem $\alpha = 3$) pokazano, że dla pewnych wartości γ_k oraz $\Delta k / R$ otrzymuje się duże wartości $|\text{Re} \hat{\gamma}_k / R|$ równocześnie ze zmianą znaku $\text{Re} \hat{\gamma}_k / R$ dla małej zmiany $\Delta k / R$ (dla niektórych całkowitych wartości $\Delta k / R$, gdy transformata okna zmienia znak). Dlatego przy iteracyjnym stosowaniu metody LIDFT korzystniejsze będą okna o właściwościach pokazanych na rysunku 3.16a. Tego zalecenia nie spełnia okno wprowadzone w pierwszej wersji metody (rozdz. 3.3).

Dla pokazania możliwości zastosowania techniki uzupełniania zerami i klasycznego okna czasowego w metodzie LIDFT przeanalizowano sygnał złożony z $K = 3$ składowych sinusoidalnych o parametrach zdefiniowanych w tabeli 3.1.



Rys. 3.16. Wpływ niedokładnej wstępnej lokalizacji składowej w widmie w metodzie LIDFT z użyciem techniki uzupełniania zerami i różnymi oknami czasowymi na wyniki estymacji częstotliwości – symulacje dla sygnału złożonego z jednej oscylacji: a) dla okien z nieujemną transformatą wg równ. (1.36), (1.37), b) dla okien niespełniających równ. (1.36), (1.37)

Tabela 3.1. Parametry sygnału analizowanego w rozdziale 3.4

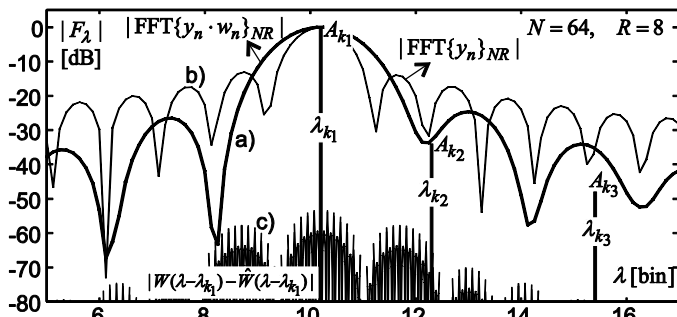
i	$\lambda_{k_i} = f_{k_i} NT$ [bin]	A_{k_i}	φ_{k_i} [rad]
1	10,2	1	0,5
2	12,3	0,02	1,0
3	15,4	0,004	1,5

$$y_n = \sin(2\pi 10,2n / N + 0,5) + 0,02 \sin(2\pi 12,3n / N + 1,0) + 0,004 \sin(2\pi 15,4n / N + 1,5) \text{ dla } n = -32, \dots, 31$$

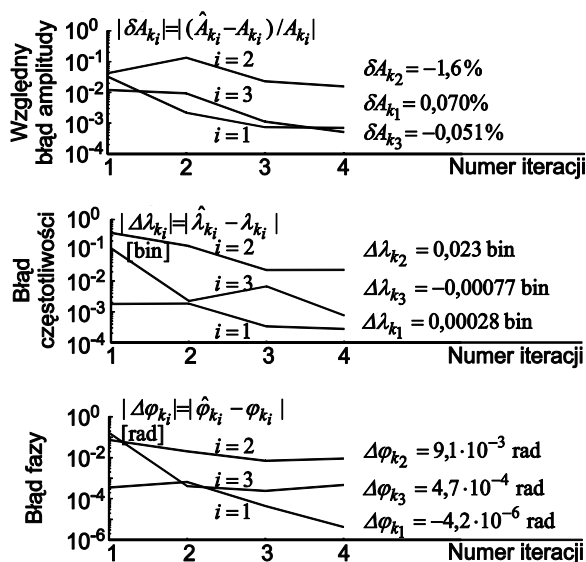
Zastosowanie okna trójkątnego do 64 próbek tego sygnału i uzupełnienie zerami do 512 próbek oraz wykonanie algorytmu FFT (klasyczna analiza DFT) nie daje możliwości poprawnej estymacji dwóch spośród trzech składowych sinusoidalnych, tj. drugiej i trzeciej (rys. 3.17).

W zastosowaniu dla tego sygnału metody LIDFT założono nieznaną dokładną lokalizację składowych, przyjęto na początek stały ich odstęp co 3 bin w zakresie od 10 do 16 bin. Wybór tych trzech wartości (10, 13, 16 bin), wybór okna trójkątnego oraz $R = 8$ to określenie warunków początkowych metody LIDFT. Po kolejnym zastosowaniu algorytmu LIDFT koryguje się o wartości $(\text{round}(\text{Re } \hat{\gamma}_k)) / R$ lokalizację składowych w widmie, aż do momentu kiedy $|\text{Re } \hat{\gamma}_k| \leq 0,5$ dla wszystkich składowych. Wyniki czterech kolejnych realizacji algorytmu LIDFT dla wszystkich trzech składowych sinusoid są przedstawione na rysunku 3.18, wraz z definicjami błędów. Wstępna lokalizacja składowych dla pierwszej iteracji wynosi (w bin): $\{80/R, 104/R, 128/R\}$, dla drugiej: $\{82/R, 96/R, 125/R\}$, dla trzeciej: $\{82/R, 100/R, 124/R\}$ i dla

czwartej: $\{82/R, 99/R, 124/R\}$. Analiza wyników z rysunku 3.18 pokazuje, że zadowalające wyniki można uzyskać np. po dwóch lub trzech iteracjach, jednak pełne możliwości metody LIDFT można uzyskać po wszystkich iteracjach.



Rys. 3.17. Sygnał wieloczęstotliwościowy (3 sinusoidy) z tabeli 3.1 przedstawiony w postaci 3 prążków: a) moduł widma sygnału uzyskany algorytmem FFT dla 64 próbek sygnału pomnożonych przez okno trójkątne i uzupełnionych zerami do 512 próbek, b) analogiczny moduł widma z zastosowaniem okna prostokątnego, c) błąd aproksymacji widma pierwszego prążka funkcjami liniowymi



Rys. 3.18. Wyniki czterech iteracji metody LIDFT dla sygnału wieloczęstotliwościowego (3 sinusoidy) zdefiniowanego w tabeli 3.1 oraz uzyskane błędy estymacji amplitud, częstotliwości i faz składowych sinusoidalnych

Dla metody LIDFT rozszerzonej o technikę uzupełniania zerami błąd estymacji amplitudy, dla przypadku składowych wystarczająco odległych od siebie w widmie (dla których można pominąć dodatkowe efekty wynikające z ograniczenia rozdzielności częstotliwościowej metody) jest sumą dwóch składników:

$$\max \delta |B_k| \approx \delta_1 |B_k| + \delta_2 |B_k| \quad (3.38)$$

gdzie w przypadku stosowania okna trójkątnego składowe błędy (3.38) są wyznaczone przez:

$$\delta_1 |B_k| \approx 0,0823 / R^2 \quad (3.39)$$

$$\delta_2 |B_k| \approx 0,4 \frac{|B_i| |\Delta \tilde{W}(\lambda_k - \lambda_i)|}{|B_k| |W(0)|} \quad (3.40)$$

a $\Delta \tilde{W}(\lambda)$ jest obwiednią błędu aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego, która jest odwrotnie proporcjonalna do R^2 .

Porównując (3.38)–(3.40) z tradycyjną metodą uzupełniania zerami (okno czasowe + uzupełnianie zerami + FFT), tj. równaniami (1.121)–(1.123) zauważyć można zasadniczą różnicę. Przez zwiększenie wartości R następuje zmniejszenie obu składowych błędów z (3.38), a więc i błędu całkowitego, co nie jest możliwe dla metody tradycyjnej.

Pominięto część przekształceń zależności matematycznych i wyników szczegółowych dotyczących rozszerzenia metody LIDFT o technikę uzupełniania zerami, przedstawionych w [60–62], ograniczając się jedynie do przedstawienia najważniejszych aspektów, ponieważ pełne wyprowadzenie odpowiednich zależności uwzględniających uzupełnianie zerami w metodzie LIDFT jest zawarte w rozdz. 4. Wyprowadzenia i analizy z rozdz. 4 uwzględniają również pewne szczegółowe modyfikacje przedstawionej metody, jak np. eliminację konieczności mnożenia przez funkcję $e^{j\pi m/R}$ w (3.31)–(3.35), eliminację konieczności mnożenia przez funkcję e^{jx_n} w (3.34), (3.35), uwzględnienie indeksowania próbek w zakresie $n = 0, \dots, N - 1$ (lub jak dotychczas $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$) czy parametryzacja funkcji α_n, β_n z (3.36) wprowadzająca parametr μ wpływający na stopień nieciągłości funkcji aproksymującej charakterystykę widmową okna czasowego. Jednak przede wszystkim rozdz. 4 wprowadza inną postać funkcji α_n, β_n , definiując uniwersalną aproksymację okręgu jednostkowego odpowiednim wielokątem oraz uogólnia metodę LIDFT na metodę wykorzystującą parę okien czasowych. Wszystkie modyfikacje poprawiają właściwości obliczeniowe metody LIDFT oraz dokładność estymacji.

4. Metoda LIDFT jako interpolacja z zastosowaniem pary okien czasowych

4.1. Wprowadzenie

Dotychczasowe publikacje dotyczące metody LIDFT [48–62], których wyniki w skrócie przedstawiono w rozdziale 3, stanowią podstawę do rozwinięcia metody LIDFT. Rozwinięcie to zawiera kilka znaczących modyfikacji tej metody. W większym stopniu niż dotychczas wykorzystano w tym celu przekształcenia macierzowe [40, 93, 106, 121], dowodząc, że aproksymacja charakterystyki widmowej okna czasowego jest równoważna odpowiednio zdefiniowanej aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem (rozd. 4.2–4.5), a to z kolei doprowadziło do dalszych udoskończeń metody LIDFT (rozd. 4.6–4.10). Przekształcenia macierzowe wyeliminowały uciążliwe przekształcenia algebraiczne zawarte w pełnej formie w pracach [50, 56, 61] (przede wszystkim w dołączonych tam dodatkach), ale było to możliwe, zdaniem autora, dzięki temu, że wyniki zawarte w cytowanych pracach pozwoliły na takie zdefiniowanie macierzy w niniejszym rozdziale, które znacznie uprościło dalszy rachunek macierzowy i pozwoliło na istotne rozwinięcie metody. W rozdziale 4 podano pełne wyprowadzenie uogólnionej wersji metody LIDFT. W poprzedzającym go rozdziale 3 pokazano (w skróconej wersji) ewolucję metody, począwszy od jej pierwszej wersji, co ułatwia porównanie wyników uzyskanych w niniejszym rozdziale z dotychczasowymi możliwościami metody.

Układ rozdziału 4 jest następujący. Przedstawiono różne sposoby aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego funkcjami liniowymi (rozd. 4.2–4.4). Udowodniono, że aproksymację tę można zastąpić odpowiednią aproksymacją okręgu jednostkowego wielokątem (rozd. 4.5). Zaprezentowano uniwersalną aproksymację okręgu jednostkowego wielokątem wraz ze szczegółową analizą sposobu doboru parametrów tej aproksymacji minimalizujących jej błędy maksymalne (rozd. 4.6–4.7). Zawarto interpretację równań metody LIDFT i na tej podstawie jej uogólnienie do metody wykorzystującej parę okien czasowych (rozd. 4.8–4.10). Podano przykłado-

wą implementację algorytmu LIDFT w języku Matlab (rozdz. 4.11) i analizę błędów metody wyznaczającą zakres jej zastosowania i uzyskiwane dokładności dla najmniej korzystnych warunków pomiaru (błędy maksymalne) (rozdz. 4.12–4.14).

4.2. Interpretacja aproksymacji widma okna czasowego funkcjami liniowymi

Metoda LIDFT, rozszerzona o technikę uzupełniania zerami (rozdz. 3.4), zakłada odpowiednią aproksymację charakterystyki widmowej $W(\lambda)$ okna czasowego funkcjami liniowymi $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$ dla $k = -M/2, \dots, M/2 - 1$ (gdzie $M = NR$) oraz $\lambda \in [k/R, (k+1)/R]$ (rys. 3.13). Średniokwadratowy błąd (3.28) takiej aproksymacji może być wyrażony na podstawie (4.290) w postaci macierzowej:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda = Q_0 + (\mathbf{c} - \mathbf{z})^H \mathbf{A} (\mathbf{c} - \mathbf{z}) - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z} \\ &= Q_0 + \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{z} - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{c} \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie:

$$Q_0 = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-N/2}^{N/2} |W(\lambda)|^2 d\lambda \quad (4.2)$$

$$\mathbf{A} = R \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 3\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}'^T \quad \mathbf{c}''^T]^T \quad (4.4)$$

$$\mathbf{c}' = [c'_{-M/2}, \dots, c'_{M/2-1}]^T, \quad c'_k = \frac{1}{R} \left(a_k \frac{k+1/2}{R} + b_k \right) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{c}'' = [c''_{-M/2}, \dots, c''_{M/2-1}]^T, \quad c''_k = \frac{a_k}{6R^2} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}'^T \quad \mathbf{z}''^T]^T \quad (4.7)$$

$$\mathbf{z}' = [z'_{-M/2}, \dots, z'_{M/2-1}]^T, \quad z'_k = \int_{k/R}^{(k+1)/R} W(\lambda) d\lambda \quad (4.8)$$

$$\mathbf{z}'' = [z''_{-M/2}, \dots, z''_{M/2-1}]^T, \quad z''_k = 2R \int_{k/R}^{(k+1)/R} \left(\lambda - \frac{k+1/2}{R} \right) W(\lambda) d\lambda \quad (4.9)$$

Współczynniki z'_k i z''_k z (4.8)–(4.9) można, korzystając z (1.10), zapisać jako:

$$z'_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \int_{k/R}^{(k+1)/R} e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda \quad (4.10)$$

$$z''_k = 2R \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \int_{k/R}^{(k+1)/R} \left(\lambda - \frac{k+1/2}{R} \right) e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda \quad (4.11)$$

Po obliczeniu całek w obu powyższych zależnościach otrzymuje się:

$$\int_{k/R}^{(k+1)/R} e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda = \frac{\text{sinc } x_n}{R} e^{-jx_n} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.12)$$

$$\int_{k/R}^{(k+1)/R} \left(\lambda - \frac{k+1/2}{R} \right) e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda = j \frac{\text{sinc}' x_n}{2R^2} e^{-jx_n} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.13)$$

gdzie:

$$x_n = \frac{\pi n}{M}, \quad M = NR, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (4.14)$$

$$\text{sinc } x_n = \frac{\sin x_n}{x_n} \quad (4.15)$$

$$\text{sinc}' x_n = \frac{d(\text{sinc } x_n)}{dx_n} = \frac{\cos x_n - (\sin x_n)/x_n}{x_n} \quad (4.16)$$

Macierze (4.8), (4.9) można zapisać po uwzględnieniu (4.10)–(4.16) jako:

$$\mathbf{z}' = R^{-1} \mathbf{W}_R \cdot \mathbf{w}', \quad \mathbf{z}'' = R^{-1} \mathbf{W}_R \cdot \mathbf{w}'' \quad (4.17)$$

gdzie \mathbf{W}_R jest macierzą $M \times N$ współczynników obrotu $W_M^n = e^{-j2\pi n/M}$ wg wzoru:

$$\mathbf{W}_R = [e^{-j2\pi nk/M}]_{M \times N}, \quad k = -M/2, \dots, M/2-1, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (4.18)$$

a wektory \mathbf{w}' , \mathbf{w}'' są zdefiniowane jako:

$$\mathbf{w}' = [w'_{-N/2}, \dots, w'_{N/2-1}]^T, \quad w'_n = w_n (\text{sinc } x_n) e^{-jx_n} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{w}'' = [w''_{-N/2}, \dots, w''_{N/2-1}]^T, \quad w''_n = jw_n (\text{sinc}' x_n) e^{-jx_n} \quad (4.20)$$

Zauważmy, że:

$$\mathbf{W}_R^H \mathbf{W}_R = M \mathbf{I} \quad (4.21)$$

Macierz \mathbf{z} (4.7) jest po uwzględnieniu macierzy (4.17) dana przez zależność:

$$\mathbf{z} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}' \\ \mathbf{w}'' \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Zadanie określenia współczynników a_k , b_k aproksymujących funkcji liniowych, które minimalizują wielkość Q z zależności (4.1) można zastąpić równoważnym zadaniem określenia współczynników c'_k i c''_k ze wzorów (4.5), (4.6). Określa się je na podstawie równania:

$$\frac{dQ}{d\mathbf{c}} = 2\mathbf{A}(\mathbf{c} - \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

i otrzymuje:

$$\mathbf{c} = \mathbf{z} \quad (4.24)$$

a błąd Q przyjmuje wówczas wartość minimalną wyznaczoną na podstawie (4.1) i (4.24):

$$Q_{\min} = Q_0 - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (4.25)$$

Po uwzględnieniu na podstawie (1.10) i (4.2), że:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_{-N/2}^{N/2} \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \right) \left(\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n e^{j2\pi n\lambda/N} \right) d\lambda \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w_n w_m \int_{-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi(n-m)\lambda/N} d\lambda = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

oraz na podstawie (4.3), (4.19)–(4.22), że:

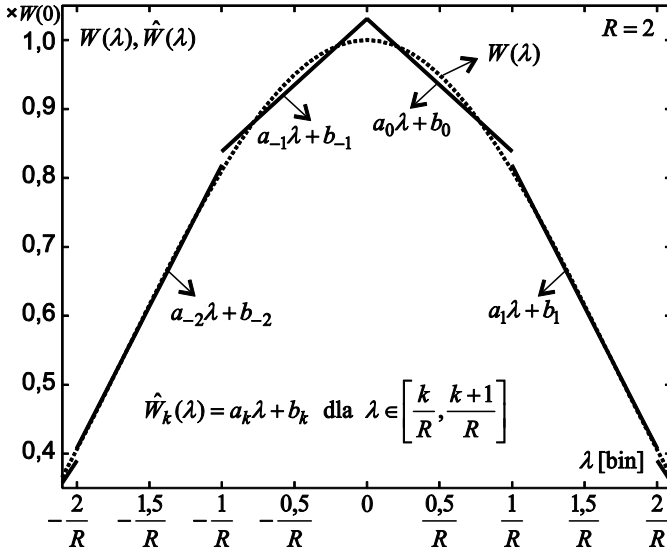
$$\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z} = N[(\mathbf{w}')^H \mathbf{w}' + 3(\mathbf{w}'')^H \mathbf{w}''] = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 [(\text{sinc } x_n)^2 + 3(\text{sinc}' x_n)^2] \quad (4.27)$$

otrzymano z (4.25)–(4.27):

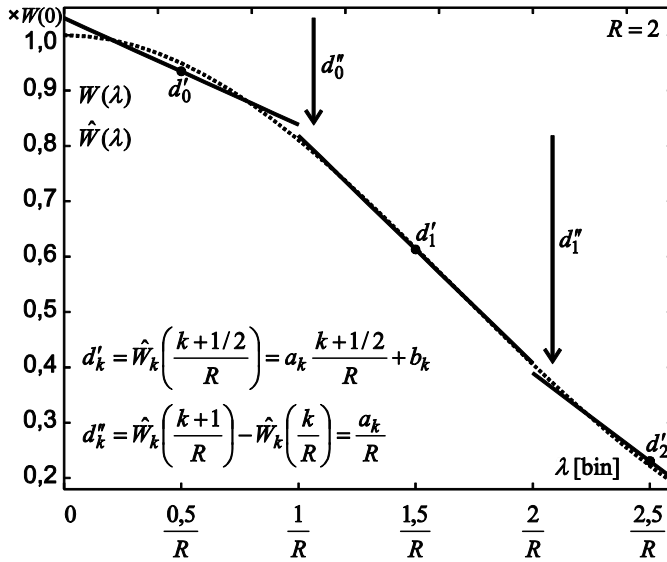
$$Q_{\min} = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n w_n^2 \quad (4.28)$$

$$c_n = 1 - (\text{sinc } x_n)^2 - 3(\text{sinc}' x_n)^2 \quad (4.29)$$

a)



b)



Rys. 4.1. Aproksymacja charakterystyki widmowej $W(\lambda)$ okna czasowego funkcjami liniowymi $\hat{W}_k(\lambda)$ dla $\lambda \in [k/R, (k+1)/R]$ (przykład dla okna trójkątnego i $R=2$) i równoważność ich opisu, zgodnie z (4.34), (4.35), za pomocą współczynników:

a) a_k, b_k , b) d'_k, d''_k

Zgodnie z (4.29) i rysunkiem 3.14, zwiększenie R dwukrotnie zmniejsza wartość c_n 16-krotnie i, jak wynika z (4.28), zmniejsza 16-krotnie błąd Q_{\min} aproksymacji charakterystyki $W(\lambda)$ okna czasowego funkcjami liniowymi.

Definiując wektory \mathbf{d}' i \mathbf{d}'' o współczynnikach d'_k i d''_k na podstawie wartości funkcji aproksymującej $\hat{W}_k(\lambda)$ dla wartości $\lambda = k/R, (k+1/2)/R, (k+1)/R$ (dwie wartości skrajne i wartość środkowa zakresu $[k/R, (k+1)/R]$) jako:

$$\mathbf{d}' = [d'_{-M/2}, \dots, d'_{M/2-1}]^T, \quad d'_k = \hat{W}_k\left(\frac{k+1/2}{R}\right) = a_k \frac{k+1/2}{R} + b_k \quad (4.30)$$

$$\mathbf{d}'' = [d''_{-M/2}, \dots, d''_{M/2-1}]^T, \quad d''_k = \hat{W}_k\left(\frac{k+1}{R}\right) - \hat{W}_k\left(\frac{k}{R}\right) = \frac{a_k}{R} \quad (4.31)$$

możemy je zapisać na podstawie wzorów (4.4)–(4.6) jako:

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}'^T \quad \mathbf{d}''^T]^T = R \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 6\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{c} \quad (4.32)$$

a po uwzględnieniu (4.22), (4.24) jako:

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}'^T \quad \mathbf{d}''^T]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_R & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{W}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}' \\ 6\mathbf{w}'' \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

lub w postaci niemacierzowej:

$$d'_k = \hat{W}_k\left(\frac{k+1/2}{R}\right) = a_k \frac{k+1/2}{R} + b_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \operatorname{sinc} x_n e^{-jx_n} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.34)$$

$$d''_k = \hat{W}_k\left(\frac{k+1}{R}\right) - \hat{W}_k\left(\frac{k}{R}\right) = \frac{a_k}{R} = j6 \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \operatorname{sinc}' x_n e^{-jx_n} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.35)$$

Zależności (4.33)–(4.35) umożliwiają obliczenie parametrów d'_k i d''_k aproksymujących funkcji liniowych, a stąd można obliczyć ich współczynniki a_k i b_k . Związek między tymi współczynnikami pokazano na rysunku 4.1.

4.3. Alternatywna aproksymacja widma okna czasowego funkcjami liniowymi

Zdefiniujmy aproksymację alternatywną w stosunku do przedstawionej w rozdz. 4.2, tzn. aproksymację charakterystyki widmowej $W(\lambda)$ okna czasowego funkcjami liniowymi $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$ dla $\lambda \in [(k-0,5)/R, (k+0,5)/R]$ (rys. 4.2a). Średniokwadratowy błąd takiej aproksymacji różni się od (4.1) zakresem całkowania i wynosi, na podstawie (4.293):

$$Q = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda = Q_0 + (\mathbf{c} - \mathbf{z})^H \mathbf{A}(\mathbf{c} - \mathbf{z}) - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (4.36)$$

$$= Q_0 + \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{z} - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{c}$$

gdzie:

$$Q_0 = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} |W(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-N/2-1/2R}^{N/2-1/2R} |W(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-N/2}^{N/2} |W(\lambda)|^2 d\lambda \quad (4.37)$$

jest tożsame z (4.2), macierze \mathbf{A} , \mathbf{c} , \mathbf{c}'' , \mathbf{z} są zdefiniowane przez wzory (4.3), (4.4), (4.6), (4.7), a \mathbf{c}' , \mathbf{z}' , \mathbf{z}'' są zdefiniowane przez zależności:

$$\mathbf{c}' = [c'_{-M/2}, \dots, c'_{M/2-1}]^T, \quad c'_k = \frac{1}{R} \left(a_k \frac{k}{R} + b_k \right) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{z}' = [z'_{-M/2}, \dots, z'_{M/2-1}]^T, \quad z'_k = \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} W(\lambda) d\lambda \quad (4.39)$$

$$\mathbf{z}'' = [z''_{-M/2}, \dots, z''_{M/2-1}]^T, \quad z''_k = 2R \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} \left(\lambda - \frac{k}{R} \right) W(\lambda) d\lambda \quad (4.40)$$

Współczynniki z'_k i z''_k z (4.39), (4.40) można, korzystając ze wzoru (1.10), zapisać jako:

$$z'_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} e^{-j2\pi n \lambda / N} d\lambda \quad (4.41)$$

$$z''_k = 2R \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} \left(\lambda - \frac{k}{R} \right) e^{-j2\pi n \lambda / N} d\lambda \quad (4.42)$$

Po obliczeniu całek w obu zależnościach otrzymuje się:

$$\int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda = \frac{\operatorname{sinc} x_n}{R} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.43)$$

$$\int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} \left(\lambda - \frac{k}{R} \right) e^{-j2\pi n\lambda/N} d\lambda = j \frac{\operatorname{sinc}' x_n}{2R^2} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.44)$$

gdzie x_n , $\operatorname{sinc} x_n$, $\operatorname{sinc}' x_n$ są zdefiniowane przez wzory (4.14)–(4.16).

Macierze (4.39), (4.40) można zapisać jak w (4.17), tj. $\mathbf{z}' = R^{-1} \mathbf{W}_R \mathbf{w}'$, $\mathbf{z}'' = R^{-1} \mathbf{W}_R \mathbf{w}''$, gdzie \mathbf{W}_R jest zdefiniowana przez (4.18), a wektory \mathbf{w}' , \mathbf{w}'' są zdefiniowane jako:

$$\mathbf{w}' = [w'_{-N/2}, \dots, w'_{N/2-1}]^T, \quad w'_n = w_n(\operatorname{sinc} x_n) \quad (4.45)$$

$$\mathbf{w}'' = [w''_{-N/2}, \dots, w''_{N/2-1}]^T, \quad w''_n = jw_n(\operatorname{sinc}' x_n) \quad (4.46)$$

Zadanie określenia współczynników a_k , b_k (c'_k , c''_k) aproksymujących funkcji liniowych, które minimalizują wielkość Q ze wzoru (4.36) uzyskuje się po zastosowaniu równań (4.23), (4.24), a przekształcenia podobne jak we wzorach (4.25)–(4.27) dają ten sam wynik na średniokwadratowy błąd Q_{\min} aproksymacji alternatywnej jak we wzorach (4.28), (4.29).

Definiując nowe wektory \mathbf{d}' i \mathbf{d}'' o współczynnikach d'_k i d''_k na podstawie wartości funkcji aproksymującej $\hat{W}_k(\lambda)$ dla wartości $\lambda = (k-1/2)/R, k/R, (k+1/2)/R$ (dwie wartości skrajne i wartość środkowa zakresu $[(k-1/2)/R, (k+1/2)/R]$) jako:

$$\mathbf{d}' = [d'_{-M/2}, \dots, d'_{M/2-1}]^T, \quad d'_k = \hat{W}_k\left(\frac{k}{R}\right) = a_k \frac{k}{R} + b_k \quad (4.47)$$

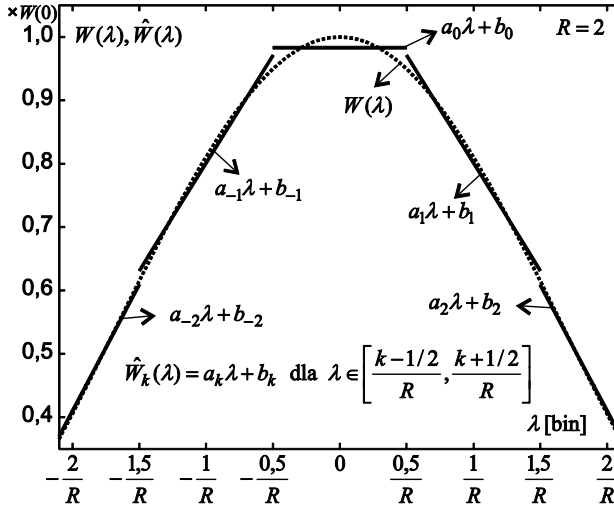
$$\mathbf{d}'' = [d''_{-M/2}, \dots, d''_{M/2-1}]^T, \quad d''_k = \hat{W}_k\left(\frac{k+1/2}{R}\right) - \hat{W}_k\left(\frac{k-1/2}{R}\right) = \frac{a_k}{R} \quad (4.48)$$

można je uzależnić od (4.4), (4.6), (4.38), (4.45), (4.46) w postaci macierzowej (4.32), (4.33) lub w postaci niemacierzowej:

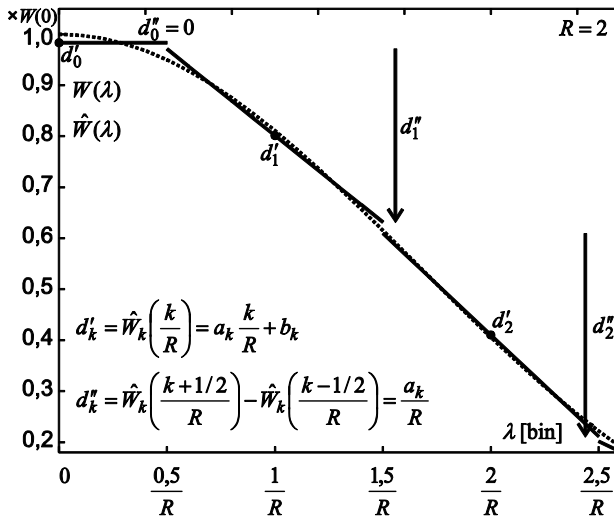
$$d'_k = \hat{W}_k\left(\frac{k}{R}\right) = a_k \frac{k}{R} + b_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \operatorname{sinc} x_n e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.49)$$

$$d''_k = \hat{W}_k\left(\frac{k+1/2}{R}\right) - \hat{W}_k\left(\frac{k-1/2}{R}\right) = \frac{a_k}{R} = j6 \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \operatorname{sinc}' x_n e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.50)$$

a)



b)



Rys. 4.2. Aproksymacja charakterystyki widmowej $W(\lambda)$ okna czasowego funkcjami liniowymi $\hat{W}_k(\lambda)$ dla $\lambda \in [(k-1/2)/R, (k+1/2)/R]$ (przykład dla okna trójkątnego i $R=2$) i równoważność ich opisu, zgodnie z (4.49), (4.50), za pomocą współczynników: a) a_k, b_k , b) d'_k, d''_k

Zależności (4.49), (4.50) umożliwiają obliczenie parametrów d'_k i d''_k aproksymujących funkcji liniowych, a stąd można obliczyć ich współczynniki a_k i b_k . Związek między tymi współczynnikami pokazano na rysunku 4.2.

Zarówno aproksymacja przedstawiona na rysunku 4.1, jak i ta z rysunku 4.2 charakteryzuje się punktami nieciągłości (przy przejściu między kolejnymi odcinkami aproksymującymi). Zmniejszenie lub całkowitą eliminację tej nieciągłości przedstawiono w rozdziale 4.4.

4.4. Zmniejszenie nieciągłości aproksymacji widma okna czasowego funkcjami liniowymi

Analizując wyniki uzyskane aproksymacją charakterystyki widmowej okna funkcjami liniowymi (rozd. 4.2–4.3) nasuwa się pytanie, czy można wyeliminować lub przynajmniej zmniejszyć nieciągłość aproksymacji w punktach przejścia do kolejnego odcinka aproksymującego (rys. 4.1, 4.2 oraz w powiększeniu na rys. 3.13). W tym celu można zmodyfikować minimalizowany błąd (4.1), uwzględniając z wagą μ dodatkowy składnik, który jest globalną miarą wielkości średniokwadratowego błędu nieciągłości:

$$Q_1 = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda + \mu \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \left| \hat{W}_{k+1}\left(\frac{k+1}{R}\right) - \hat{W}_k\left(\frac{k+1}{R}\right) \right|^2 \quad (4.51)$$

lub błąd (4.36) w taki sam sposób:

$$Q_1 = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda + \mu \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \left| \hat{W}_{k+1}\left(\frac{k+1/2}{R}\right) - \hat{W}_k\left(\frac{k+1/2}{R}\right) \right|^2 \quad (4.52)$$

W obu przypadkach na podstawie (4.294) otrzymuje się:

$$Q_1 = Q_0 + (\mathbf{c} - \mathbf{z})^H \mathbf{A}(\mathbf{c} - \mathbf{z}) - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z} + \mu \mathbf{c}^H \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]^T [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}] \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.53)$$

gdzie Q_0 i \mathbf{A} są zdefiniowane przez wzory (4.2), (4.3), natomiast \mathbf{c} i \mathbf{z} są określone przez wzory (4.4)–(4.9) dla aproksymacji z rozdz. 4.2 i przez wzory (4.4), (4.6), (4.7), (4.38)–(4.40) dla aproksymacji z rozdz. 4.3 oraz dodatkowo macierz \mathbf{E} jest macierzą cyrkularną wg wzoru:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Minimalizację błędu (4.53) osiąga się dla warunku:

$$\frac{dQ_1}{d\mathbf{c}} = 2\mathbf{A}(\mathbf{c} - \mathbf{z}) + 2\mu\mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]^T [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4.55)$$

skąd

$$\mathbf{c} + \mu[\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]^T [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{z} \quad (4.56)$$

czyli

$$\mu\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{z} \quad (4.57)$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \mu^{-1}\mathbf{A}^{-1} + [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]^T [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}] \quad (4.58)$$

W rozwiązaniu równania (4.57) ze względu na \mathbf{c} obliczenie macierzy \mathbf{A}^{-1} jest proste (\mathbf{A} jest macierzą diagonalną), a w obliczeniu macierzy \mathbf{B}^{-1} można wykorzystać szczególne właściwości macierzy \mathbf{B} , w tym również to, że macierz \mathbf{E} występująca we wzorze (4.58) jest macierzą cyrkularną (*circulant matrix*), dla której można przeprowadzić dekompozycję do postaci diagonalnej z wykorzystaniem macierzy współczynników obrotu \mathbf{W} [40, 93, 121]. Rozwiązaniem równania (4.57) jest, na podstawie (4.298), wektor \mathbf{c} zdefiniowany jako:

$$\mathbf{c} = \mathbf{z} - \frac{4\mu}{M} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_A^2 & -j\Lambda_A\Lambda_B \\ j\Lambda_A\Lambda_B & \Lambda_B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^H \end{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (4.59)$$

lub

$$\mathbf{c} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \left(\mathbf{I} - 4\mu \begin{bmatrix} \Lambda_A^2 & -j\Lambda_A\Lambda_B \\ j\Lambda_A\Lambda_B & \Lambda_B^2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{W}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^H \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (4.60)$$

gdzie $\mathbf{W} = [e^{-j2\pi nk/M}]$ jest macierzą o wymiarach $M \times M$ współczynników obrotu ($n, k = -M/2, \dots, M/2 - 1$), a macierze $\Lambda_A = [\Lambda_{An}]$, $\Lambda_B = [\Lambda_{Bn}]$ są M -elementowymi macierzami diagonalnymi o elementach zdefiniowanych przez:

$$\Lambda_{An} = (\sin x_n) \left[1 + 12\mu R \left(\cos^2 x_n + \frac{1}{3} \sin^2 x_n \right) \right]^{-1/2}, \quad x_n = \frac{\pi n}{M} \quad (4.61)$$

$$\Lambda_{Bn} = (\cos x_n) \left[1 + 12\mu R \left(\cos^2 x_n + \frac{1}{3} \sin^2 x_n \right) \right]^{-1/2}, \quad x_n = \frac{\pi n}{M} \quad (4.62)$$

z zakresem $n = -M/2, \dots, M/2 - 1$.

Korzystając z zależności (4.22) w macierzy (4.60) oraz, że $\mathbf{W}^H \mathbf{W}_R = M \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$, uzyskuje się:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - 4\mu R (\Lambda'_A)^2 & j12\mu R \cdot \Lambda'_A \Lambda'_B \\ -j4\mu R \cdot \Lambda'_A \Lambda'_B & \mathbf{I} - 12\mu R (\Lambda'_B)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}' \\ \mathbf{w}'' \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

gdzie macierze $\Lambda'_A = [\Lambda_{An}]$, $\Lambda'_B = [\Lambda_{Bn}]$ są N -elementowymi macierzami diagonalnymi o elementach zdefiniowanych przez zależności (4.61), (4.62) dla zakresu $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$, a wektory \mathbf{w}' , \mathbf{w}'' są określone przez zależności (4.19), (4.20) dla aproksymacji z rozdz. 4.2 lub przez (4.45), (4.46) dla aproksymacji z rozdz. 4.3. Wzór (4.63) można przekształcić, korzystając z (4.61), (4.62) oraz zależności na \mathbf{w}' , \mathbf{w}'' do postaci:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_\alpha \\ (1/6)\Lambda_\beta \end{bmatrix} \mathbf{w}, \quad \mathbf{c}' = \frac{1}{R} \mathbf{W}_R \Lambda_\alpha \mathbf{w}, \quad \mathbf{c}'' = \frac{1}{R} \mathbf{W}_R \Lambda_\beta \mathbf{w} \quad (4.64)$$

gdzie $\mathbf{w} = [w_{-N/2}, \dots, w_{N/2-1}]^T$ jest wektorem próbek okna czasowego, macierze diagonalne Λ_α , Λ_β są zdefiniowane jako:

$$\Lambda_\alpha = \begin{cases} [\alpha_n e^{-jx_n}] & \text{dla aproksymacji z rozdz. 4.2 (rys. 4.1)} \\ [\alpha_n] & \text{dla aproksymacji z rozdz. 4.3 (rys. 4.2)} \end{cases} \quad (4.65)$$

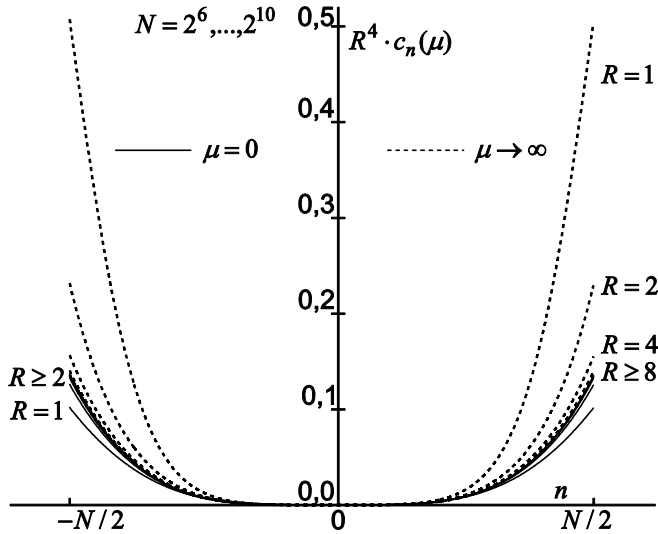
$$\Lambda_\beta = \begin{cases} j[\beta_n e^{-jx_n}] & \text{dla aproksymacji z rozdz. 4.2 (rys. 4.1)} \\ j[\beta_n] & \text{dla aproksymacji z rozdz. 4.3 (rys. 4.2)} \end{cases} \quad (4.66)$$

ze współczynnikami α_n , β_n określonymi przez:

$$\alpha_n(\mu) = (\text{sinc } x_n) \frac{1 + 12\mu R \cos x_n \text{sinc } x_n}{1 + 12\mu R (\cos^2 x_n + \frac{1}{3} \sin^2 x_n)} \quad (4.67)$$

$$\beta_n(\mu) = 6 \frac{\text{sinc}' x_n - 4\mu R \sin x_n \text{sinc}^2 x_n}{1 + 12\mu R (\cos^2 x_n + \frac{1}{3} \sin^2 x_n)} \quad (4.68)$$

Na podstawie wzorów (4.32) i (4.64) oraz wprowadzonych definicji (4.65), (4.66) uzyskuje się:



Rys. 4.3. Wartości $R^4 c_n$ dla c_n według (4.75) z uwzględnieniem współczynnika μ

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_R & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_\alpha \\ \Lambda_\beta \end{bmatrix} \mathbf{w}, \quad \mathbf{d}' = \mathbf{W}_R \Lambda_\alpha \mathbf{w}, \quad \mathbf{d}'' = \mathbf{W}_R \Lambda_\beta \mathbf{w} \quad (4.69)$$

lub w postaci niemacierzowej, po uwzględnieniu zależności (4.19), (4.20) dla aproksymacji z rozdz. 4.2:

$$d'_k = \hat{W}_k \left(\frac{k+1/2}{R} \right) = a_k \frac{k+1/2}{R} + b_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \alpha_n(\mu) e^{-jx_n} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.70)$$

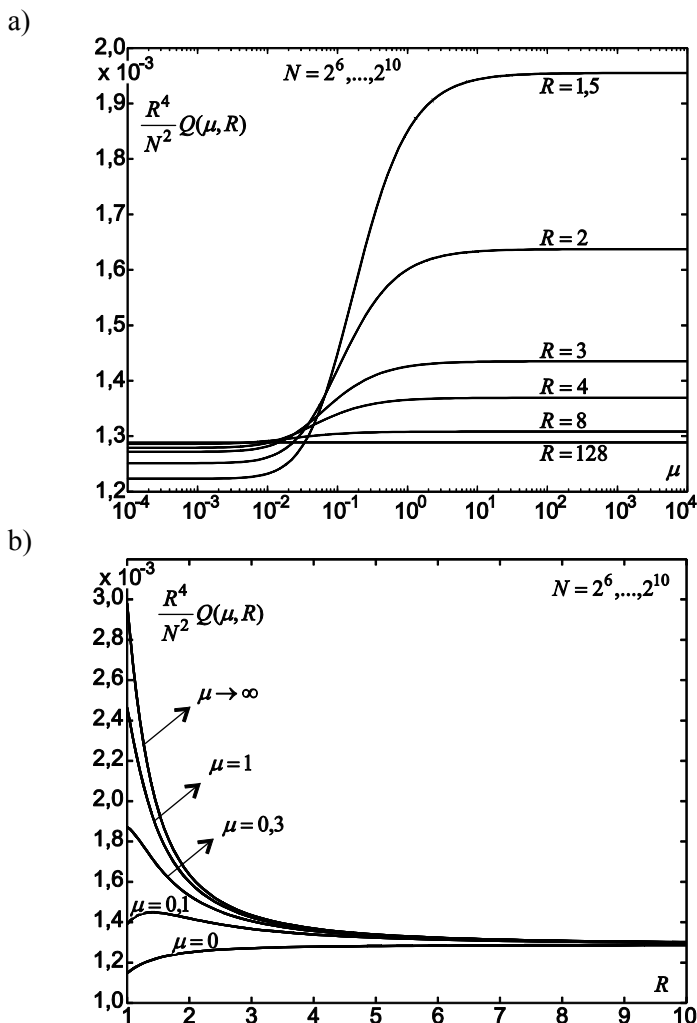
$$d''_k = \hat{W}_k \left(\frac{k+1}{R} \right) - \hat{W}_k \left(\frac{k}{R} \right) = \frac{a_k}{R} = j \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \beta_n(\mu) e^{-jx_n} e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.71)$$

i analogicznie, po uwzględnieniu zależności (4.45), (4.46) dla aproksymacji z rozdz. 4.3:

$$d'_k = \hat{W}_k \left(\frac{k}{R} \right) = a_k \frac{k}{R} + b_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \alpha_n(\mu) e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.72)$$

$$d''_k = \hat{W}_k \left(\frac{k+1/2}{R} \right) - \hat{W}_k \left(\frac{k-1/2}{R} \right) = \frac{a_k}{R} = j \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \beta_n(\mu) e^{-j2\pi nk/M} \quad (4.73)$$

Dla $\mu = 0$ wzory (4.70), (4.71) są tożsame z (4.34), (4.35), a (4.72), (4.73) są tożsame z (4.49), (4.50).



Rys. 4.4. Zależność średniokwadratowego błędu aproksymacji $Q(\mu, R)$ charakterystyki widmowej okna czasowego (przykład dla okna trójkątnego) funkcjami liniowymi (rozdz. 4.4), według (4.74), (4.75); na wykresie $R^4 N^{-2} Q(\mu, R)$ w funkcji: a) parametru μ (określającego stopień nieciągłości aproksymacji), b) parametru R

Zauważmy też, że dla $\mu = 0$ zależność (4.64) jest tożsama z (4.22), tj. $\mathbf{z} = \mathbf{c}(\mu = 0)$, a stąd i z (4.64) można wyznaczyć $(\mathbf{c} - \mathbf{z})^H \mathbf{A}(\mathbf{c} - \mathbf{z})$ i wykorzystując dodatkowo zależności (4.26), (4.27), otrzymuje się całkowity średniokwadratowy błąd Q aproksymacji zdefiniowany przez (4.1) lub (4.36):

$$Q(\mu, R) = N \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} c_n(\mu) w_n^2 \quad (4.74)$$

gdzie:

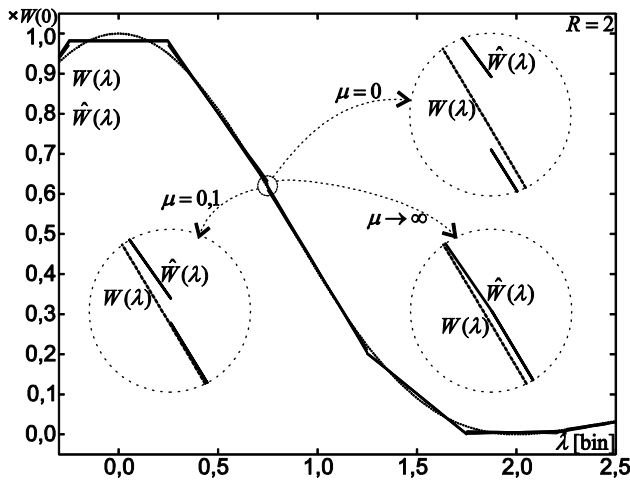
$$c_n(\mu, R) = 1 - \alpha_n^2(0) - \frac{1}{12} \beta_n^2(0) + [\alpha_n(\mu) - \alpha_n(0)]^2 + \frac{1}{12} [\beta_n(\mu) - \beta_n(0)]^2 \quad (4.75)$$

Dla $\mu = 0$ zależności (4.74), (4.75) są tożsame z (4.28), (4.29).

Z porównania rozwinięcia $c_n(\mu)$ w szereg Maclaurina dla $\mu = 0$ oraz $\mu \rightarrow \infty$:

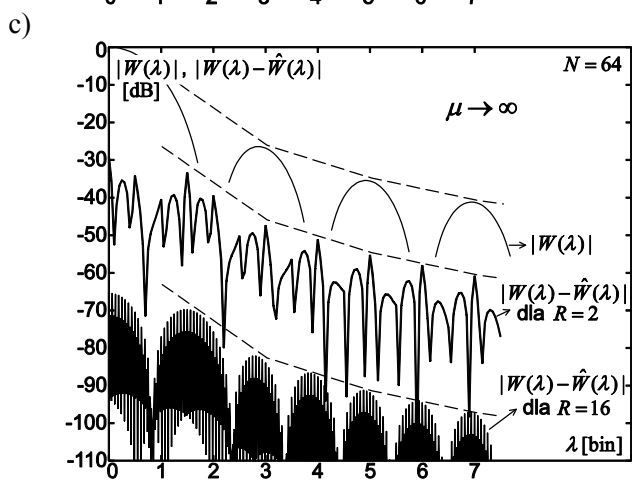
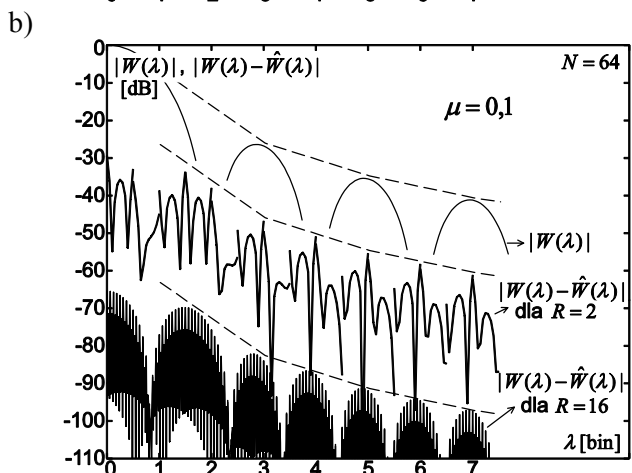
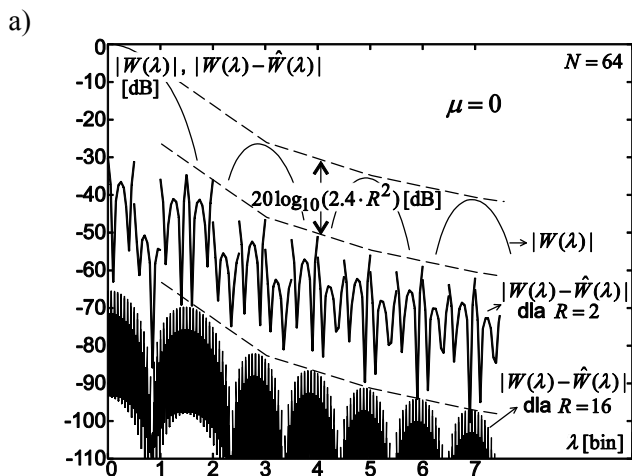
$$c_n(\mu = 0) = \frac{x_n^4}{45} - \frac{4x_n^6}{1575} + \frac{2x_n^8}{14175} - \frac{16x_n^{10}}{3274425} + o(x_n^{12}) \quad (4.76)$$

$$c_n(\mu \rightarrow \infty) = \frac{x_n^4}{45} + \frac{4x_n^6}{189} + \frac{14x_n^8}{2025} + \frac{16x_n^{10}}{18711} + o(x_n^{12}) \quad (4.77)$$



Rys. 4.5. Wpływ parametru μ na nieciągłość aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego – w powiększeniu (dla punktu $\lambda = 0,75$ bin) trzy przypadki: $\mu = 0; 0,1; \infty$ (przykład dla okna trójkątnego, aproksymacji dla $\lambda \in [(k-1/2)/R, (k+1/2)/R]$ oraz $R = 2$)

Rys. 4.6. Wykresy $|W(\lambda)|$ i $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$ dla okna trójkątnego: a) $\mu = 0$, b) $\mu = 0,1$, c) $\mu \rightarrow \infty$



oraz z faktu, że $x_n = \pi n / (NR)$ i $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ wynika, że ze wzrostem wartości R $Q(\mu \rightarrow \infty)$ jest zbieżne do $Q(\mu = 0)$. Potwierdza to również wykres przedstawiający zależność współczynników c_n od μ oraz R na wykresie $R^4 c_n$ w funkcji n (rys. 4.3), który jest uogólnieniem wykresu z rysunku 3.14.

Przykładowe wyniki obliczeń błędu średniokwadratowego aproksymacji $Q(\mu, R)$ dla okna trójkątnego (rys. 4.4) potwierdzają przedstawione wnioski: błąd Q jest odwrotnie proporcjonalny do R^4 , szczególnie dla dużych wartości R , oraz że zależność Q od μ jest znacząca dla małych wartości R , podczas gdy dla dużych wartości R zależność od μ jest nieznacząca. Wpływ wartości parametru μ na stopień nieciągłości aproksymacji jest widoczny na rysunku 4.5 w trzech powiększonych fragmentach dla punktu charakterystyki $\lambda = 0,75$ bin: dla $\mu = 0$ nieciągłość ta jest największa (a błąd Q najmniejszy – rys. 4.4), dla $\mu = 0,1$ nieciągłość zmniejsza się ponaddwukrotnie (ale rośnie błąd Q) i dla $\mu \rightarrow \infty$ aproksymacja jest ciągła, ale błąd średniokwadratowy tej aproksymacji jest największy.

Najważniejszą charakterystykę okna czasowego, tj. charakterystykę amplitudową $|W(\lambda)|$ można uzupełnić o charakterystykę błędu aproksymacji $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$, tak jak w przykładzie dla okna trójkątnego na rysunku 4.6. Dla tego okna czasowego i $R \geq 2$ obwódka błędu aproksymacji jest ok. $2,4 \cdot R^2$ mniejsza niż obwódka charakterystyki amplitudowej samego okna czasowego, tj. przecieku widma (rys. 4.6). Błąd aproksymacji $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$ ma największą nieciągłość dla $\mu = 0$ (rys. 4.6a), nieciągłość ta jest zmniejszona dla $\mu = 0,1$ (rys. 4.6b) i jest ciągła dla $\mu \rightarrow \infty$ (rys. 4.6c). Zgodnie z rysunkiem 4.4 największa różnica charakterystyk błędu aproksymacji $|W(\lambda) - \hat{W}(\lambda)|$ przedstawionych na rysunku 4.6 występuje dla małych wartości R , tzn. dla $R = 2$.

Przedstawiona w rozdz. 4.4 aproksymacja charakterystyki widmowej okna czasowego jest uogólnieniem omówionych w rozdz. 4.2 i 4.3 dwóch sposobów aproksymacji z dodatkowym uwzględnieniem możliwości zmniejszenia stopnia nieciągłości charakterystyki aproksymującej (dla skończonej wartości $\mu > 0$), a w granicznym przypadku uzyskanie charakterystyki ciągłej (dla $\mu \rightarrow \infty$). Najważniejszym wynikiem są równania (4.67) i (4.68) na funkcje α_n , β_n wykorzystywane w zależnościach (4.70)–(4.73). Ten sam rezultat uzyskuje się przez aproksymację okręgu jednostkowego odpowiednim wielokątem metodą najmniejszych kwadratów (rozd. 4.5), a wyprowadzenie zależności (4.67) i (4.68) jest wówczas znacząco prostsze niż w rozdz. 4.4.

4.5. Aproksymacja okręgu jednostkowego wielokątem metodą najmniejszych kwadratów

Aproksymację charakterystyki widmowej okna czasowego, przedstawioną w rozdz. 4.2–4.4, można rozpatrywać jako równoważną aproksymację okręgu jednostkowego odpowiednim wielokątem. W celu wykazania tej równoważności należy rozpatrzyć w pierwszej kolejności aproksymację funkcji $W_M^{n\gamma}$, która dla $\gamma = \lambda R$ jest wycinkiem okręgu jednostkowego:

$$W_N^{\lambda} = e^{-j2\pi n\lambda/N} \quad (4.78)$$

dla $\lambda \in [-0,5/R; 0,5/R]$ oraz $M = NR$, tzn. wycinek ten jest wyznaczony kątem $2x_n$, gdzie $x_n = \pi n/M$ oraz $\gamma \in [-0,5; 0,5]$ (rys. 4.7). Zdefiniowany wycinek okręgu jest aproksymowany funkcją $\hat{W}_M^{n\gamma}$ określoną jako:

$$\hat{W}_M^{n\gamma} = \alpha_n + j\gamma\beta_n \quad (4.79)$$

a miarą jakości aproksymacji jest błąd średniokwadratowy Q_n zdefiniowany jako:

$$Q_n = \int_{-1/2}^{1/2} |W_M^{n\gamma} - \hat{W}_M^{n\gamma}|^2 d\gamma = \int_{-1/2}^{1/2} (W_M^{n\gamma} - \alpha_n - j\gamma\beta_n)(W_M^{-n\gamma} - \alpha_n + j\gamma\beta_n) d\gamma \quad (4.80)$$

który po przekształceniu, polegającym na wymnożeniu nawiasów i obliczeniu całek, ma postać:

$$Q_n = 1 - 2\alpha_n \operatorname{sinc} x_n - \beta_n \operatorname{sinc}' x_n + \alpha_n^2 + \frac{1}{12} \beta_n^2 \quad (4.81)$$

gdzie x_n , $\operatorname{sinc} x_n$ oraz $\operatorname{sinc}' x_n$ są zdefiniowane przez (4.14)–(4.16).

Błąd Q_n przyjmuje minimum dla warunku:

$$\frac{dQ_n}{d\alpha_n} = 0, \quad \frac{dQ_n}{d\beta_n} = 0 \quad (4.82)$$

który, po uwzględnieniu (4.81), wyznacza wartości α_n oraz β_n :

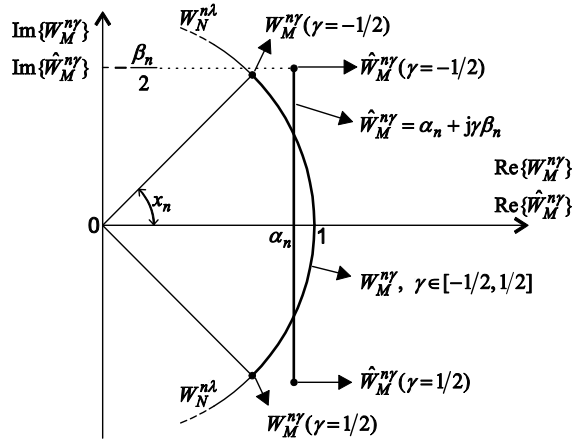
$$\alpha_n = \operatorname{sinc} x_n, \quad \beta_n = 6\operatorname{sinc}' x_n \quad (4.83)$$

Uzyskany w ten sposób odcinek $(\alpha_n + j\gamma\beta_n)$ aproksymujący łuk $W_M^{n\gamma}$ nie pokrywa pełnego kąta $2x_n$, tzn. odcinek Δ_n zdefiniowany na rysunku 4.8 ma niezerową długość. Z zależności trygonometrycznych dla dwóch kątów x_n , pokazanych na rysunku 4.8, otrzymuje się:

$$\tan x_n = \frac{-\beta_n / 2 + \Delta_n / \cos x_n}{\alpha_n} \quad (4.84)$$

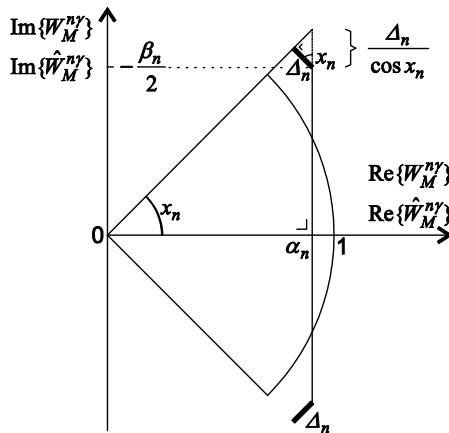
a stąd długość odcinka Δ_n wynosi:

$$\Delta_n = \alpha_n \sin x_n + \frac{1}{2} \beta_n \cos x_n \quad (4.85)$$



Rys. 4.7. Aproxymacja wycinka okręgu jednostkowego

$$W_M^{ny} \text{ odcinkiem } \hat{W}_M^{ny} = \alpha_n + j\gamma\beta_n$$



Rys. 4.8. Definicja odcinka Δ_n wyznaczającego nieciągłość aproksymacji wycinka okręgu jednostkowego przez odcinek $\alpha_n + j\gamma\beta_n$

Na podstawie zależności (4.85) można zmodyfikować miarę (4.80) jakości aproksymacji łuku W_M^{ny} odcinkiem $(\alpha_n + j\gamma\beta_n)$ przez dodanie z odpowiednim współczynnikiem wagowym $4\mu R$ składnika Δ_n^2 zdefiniowanego przez zależność (4.85):

$$Q_n = \int_{-1/2}^{1/2} \left| W_M^{ny} - \hat{W}_M^{ny} \right|^2 d\gamma + 4\mu R \left(\alpha_n \sin x_n + \frac{1}{2} \beta_n \cos x_n \right)^2 \quad (4.86)$$

przy czym współczynnik $4R$ ($R = M/N$) jest jedynie stałą skalującą i nie zmienia ogólności rozważań. Został on dobrany w sposób ułatwiający porównanie uzyskanych wyników z rezultatami z rozdz. 4.4.

Po zastosowaniu do zależności (4.86) warunku (4.82) uzyskuje się układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 + 4\mu R \sin^2 x_n & 2\mu R \sin x_n \cos x_n \\ 4\mu R \sin x_n \cos x_n & \frac{1}{6} + 2\mu R \cos^2 x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sinc } x_n \\ \text{sinc}' x_n \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

który jest uogólnieniem uzyskanej wcześniej zależności (4.83) dla założeń (4.80), (4.81).

Rozwiązaniem układu równań (4.87) są wzory dla $\alpha_n(\mu)$ oraz $\beta_n(\mu)$ zdefiniowane przez (4.67), (4.68). Po podstawieniu (4.67), (4.68) do (4.80), (4.81) uzyskuje się:

$$Q_n = c_n \quad (4.88)$$

gdzie c_n jest zdefiniowane przez (4.75) i charakteryzujące się omówionymi w rozdz. 4.4 właściwościami wynikającymi z (4.76), (4.77) i rysunku 4.3.

Równania (4.78), (4.79), (4.67), (4.68) wyznaczają przybliżenie łuku W_M^{ny} przez odcinek $(\alpha_n(\mu) + j\gamma\beta_n(\mu))$:

$$W_M^{ny} = e^{-j2\pi n\gamma/M} \approx \alpha_n + j\gamma\beta_n, \quad \gamma \in [-1/2, 1/2] \quad (4.89)$$

który, przez obrót o kąt $-2kx_n$ (mnożenie przez e^{-j2kx_n}) lub o kąt $-2(k \pm 1/2)x_n$ (mnożenie przez $e^{-j2(k \pm 1/2)x_n}$) wyznacza przybliżenie przez odcinki pozostałych fragmentów okręgu jednostkowego dla $\lambda_k \in [(k-0,5)/R, (k+0,5)/R]$ – rysunek 4.9a oraz $\lambda_k \in [k/R, (k+1)/R]$ – rysunek 4.9b (lub $\lambda_k \in [(k-1)/R, k/R]$ – rys. 4.9c) przy całkowitych wartościach k :

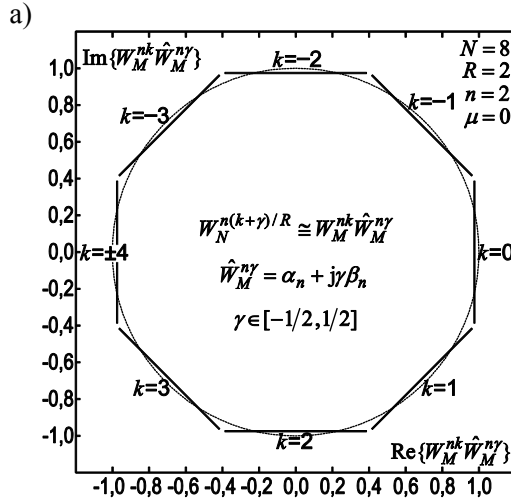
$$e^{-j2\pi n\lambda_k/N} \approx e^{-j2\pi nk/M} [\alpha_n + j\gamma_k \beta_n], \quad \lambda_k = \frac{1}{R}(k + \lambda_k) \quad (4.90)$$

$$e^{-j2\pi n\lambda_k/N} \approx e^{-j2\pi nk/M} e^{-jx_n} [\alpha_n + j\gamma_k \beta_n], \quad \lambda_k = \frac{1}{R}(k + \frac{1}{2} + \gamma_k) \quad (4.91)$$

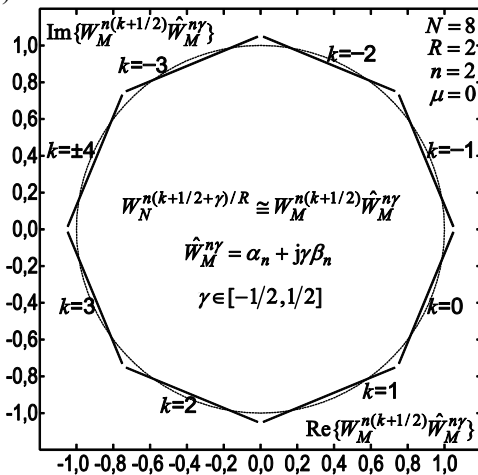
$$e^{-j2\pi n\lambda_k/N} \approx e^{-j2\pi nk/M} e^{jx_n} [\alpha_n + j\gamma_k \beta_n], \quad \lambda_k = \frac{1}{R} \left(k - \frac{1}{2} + \gamma_k \right) \quad (4.92)$$

gdzie

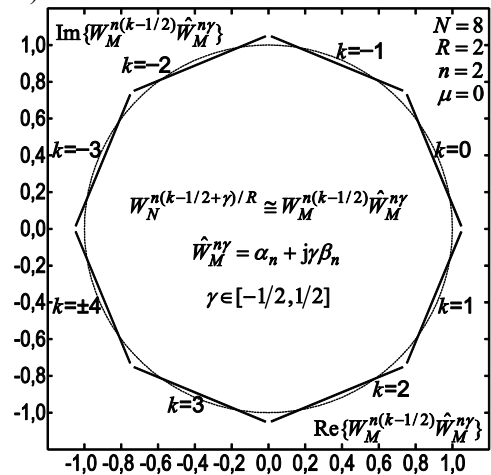
$$\gamma_k \in [-1/2, 1/2] \quad (4.93)$$



b)



c)



Rys. 4.9. Aproksymacja okręgu jednostkowego $W_N^{n\lambda}$ wielokątem, według (4.90)–(4.93), jako efekt aproksymacji wycinka okręgu jednostkowego $W_M^{n\gamma}$ odcinkiem $\hat{W}_M^{n\gamma} = \alpha_n + j\gamma\beta_n$ oraz obrotu tego odcinka o kąt $-2kx_n$ lub $-2(k \pm 1/2)x_n$, tj. mnożeniu przez: a) e^{-j2kx_n} lub b, c) $e^{-j2(k \pm 1/2)x_n}$

Dotychczasowe wyniki (rozd. 4.2–4.5) umożliwiają sformułowanie twierdzenia 4.1.

Twierdzenie 4.1

Aproksymacja charakterystyki widmowej okna czasowego funkcjami liniowymi metodą najmniejszych kwadratów, z definicją (4.51) lub (4.52) błędu średniokwadratowego, jest równoważna aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem z zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów z definicją (4.86) błędu średniokwadratowego. Równania opisujące aproksymujący wielokąt są zdefiniowane przez (4.90)–(4.93).

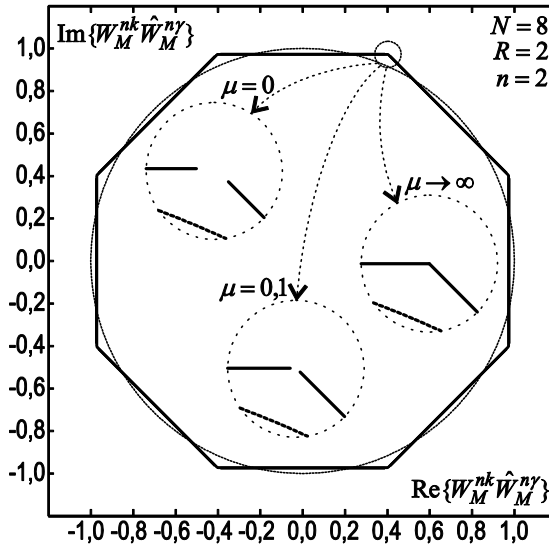
Dowód

Minimalizacja błędu średniokwadratowego (4.51) lub (4.52) prowadzi na podstawie (4.53)–(4.69) do zależności (4.70)–(4.73), wyznaczających współczynniki d'_k , d''_k liniowych funkcji aproksymujących, a funkcje $\alpha_n(\mu)$, $\beta_n(\mu)$ są zdefiniowane przez (4.67), (4.68). Minimalizacja zaś błędu średniokwadratowego (4.86) aproksymacji wycinka okręgu jednostkowego odcinkiem $\alpha_n + j\gamma\beta_n$ prowadzi do (4.87), którego rozwiązaniem są równania (4.67), (4.68). Przez obrót tego odcinka uzyskuje się zależności (4.90)–(4.93) opisujące wielokąt aproksymujący. Po podstawieniu (4.90) lub (4.91) do (1.10) uzyskuje się $W(\lambda) \approx d'_k + \gamma_k d''_k$, co odpowiada aproksymacji charakterystyki widmowej zgodnej z równaniami (4.70)–(4.73). Zależności (4.67), (4.68) wyznaczają jednoznacznie zarówno aproksymację charakterystyki widmowej okna czasowego, jak i aproksymację okręgu jednostkowego wielokątem, co dowodzi twierdzenia 4.1.

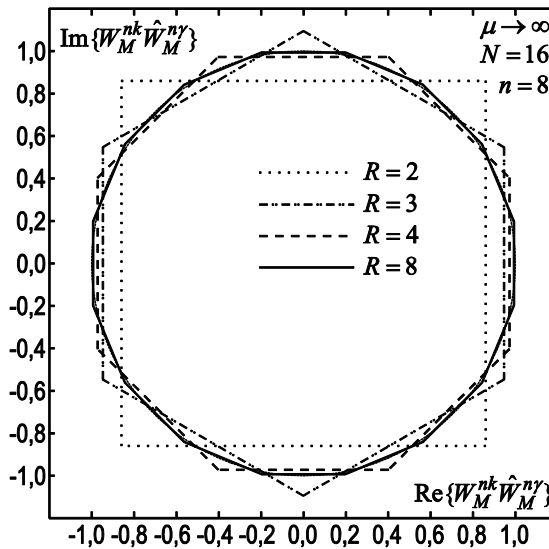
Wartość parametru μ określa stopień nieciągłości wielokąta aproksymującego okrąg jednostkowy w sposób podobny jak w przypadku aproksymacji widma okna czasowego funkcjami liniowymi z rozdz. 4.4 i rysunków 4.5, 4.6. Dla $\mu = 0$ błąd średniokwadratowy jest najmniejszy, ale nieciągłość największa, dla $\mu \rightarrow \infty$ wielokąt jest ciągły, ale błąd średniokwadratowy wzrasta, a dla $\mu = 0,1$ występuje sytuacja pośrednia (przedstawiona również na rys. 4.10).

W celu zmniejszenia błędu aproksymacji dla danego n oraz parametru μ można zwiększyć wartość R , co prowadzi do zwiększenia liczby ramion wielokąta aproksymującego (rys. 4.11).

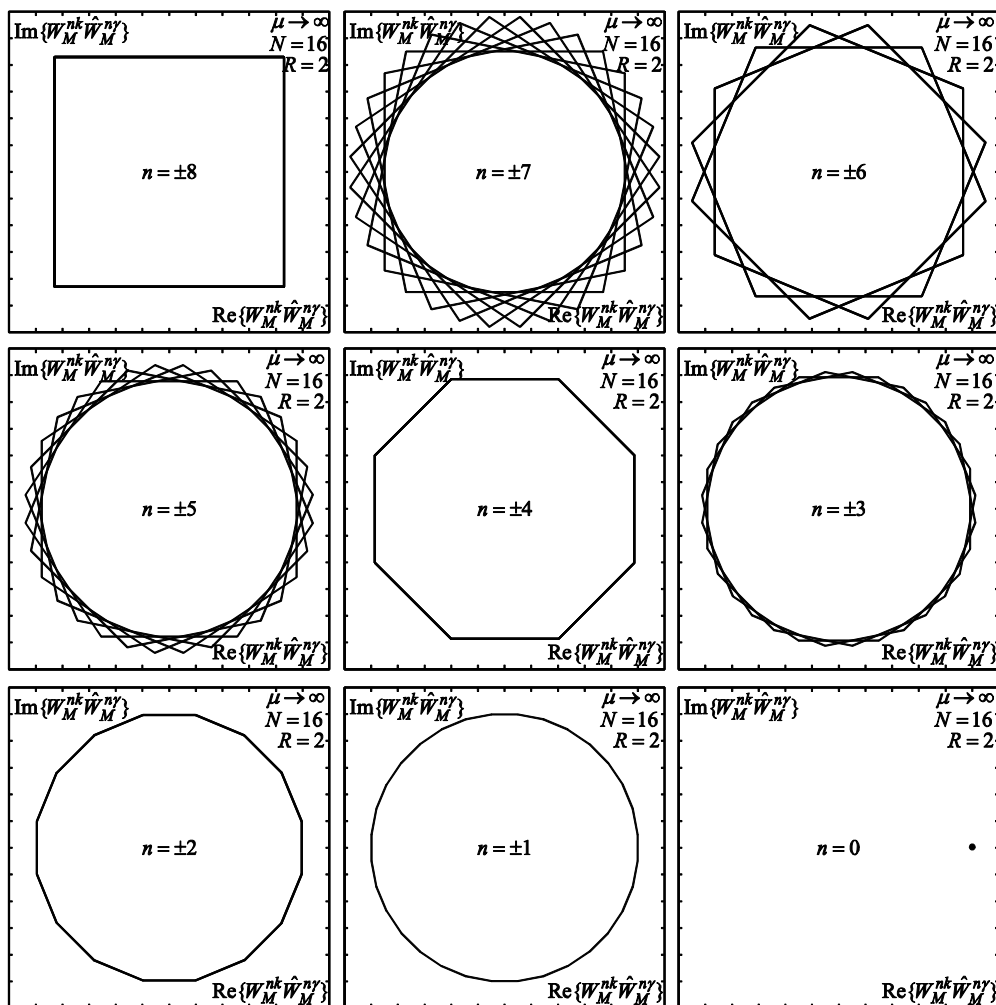
Najczęściej (jak np. w DFT) algorytm wykorzystuje wartości $W_N^{n\lambda}$ dla wszystkich n z zakresu $n \in [-N/2, N/2 - 1]$, co oznacza, uwzględniając $M = NR$, że $x_n = n\pi / M$ zmienia się w zakresie $x_n \in [-\pi / 2R, \pi / 2R]$. Największy błąd aproksymacji



Rys. 4.10. Wpływ parametru μ na nieciągłość wielokąta aproksymującego okrąg jednostkowy według (4.90) dla trzech przypadków z rys. 4.5, 4.6: $\mu = 0; 0,1; \infty$ (przykład dla $n = 2, N = 8, R = 2$)



Rys. 4.11. Efekt zmniejszenia błędu aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem według (4.90) ze wzrostem parametru R (przykład dla $n = 8, N = 16, \mu \rightarrow \infty$)



Rys. 4.12. Aproksymacja okręgu jednostkowego $W_N^{n(k+\gamma)/R}$ wielokątem dla $n = -N/2, \dots, N/2$ (oraz dla $k = -NR/2, \dots, NR/2 - 1$ i ustalonego n); widoczne jest wzajemne przesunięcie wielokątów dla $n \neq \pm 2^m$ i nakładanie się ich dla $n = \pm 2^m$ oraz wzrost błędu aproksymacji ze wzrostem $|n|$

okręgu jednostkowego przez wielokąt występuje dla dużych wartości n , bliskich $\pm N/2$ (rys. 4.12), ale wpływ tych przypadków jest w praktyce ograniczany stosowaniem okien czasowych innych niż prostokątne, które mają wartości bliskie zero dla n bliskich $\pm N/2$. W razie potrzeby dodatkowe zmniejszenie błędu aproksymacji

uzyskuje się przez zwiększenie wartości R , co oznacza w praktyce zwiększenie liczby zer w metodzie uzupełniania zerami. Dla wartości n o postaci $n = \pm 2^m$ (m – liczba naturalna) wielokąty powstałe dla kolejnych wartości k z zakresu $k \in [-M/2, M/2 - 1]$ nakładają się na siebie, a w pozostałych przypadkach są względem siebie przesunięte (rys. 4.12).

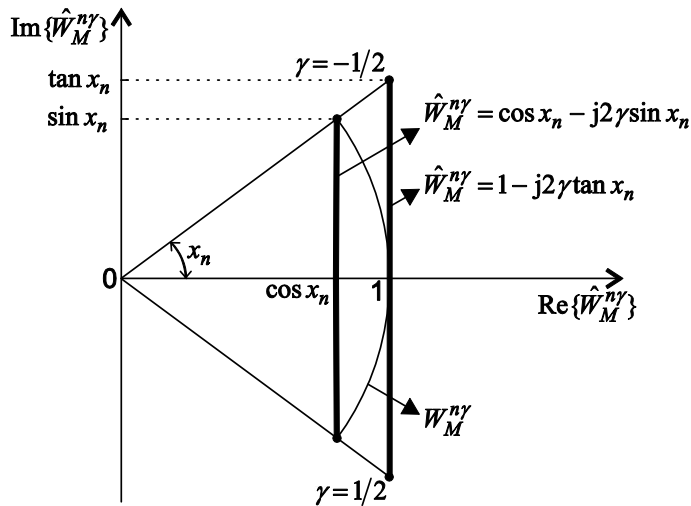
4.6. Alternatywna aproksymacja okręgu jednostkowego wielokątem

Aproksymację okręgu jednostkowego można przeprowadzić nie stosując metody najmniejszych kwadratów (jak w rozdz. 4.5), lecz korzystając z dwóch wielokątów wyznaczonych przez okrąg jednostkowy (4.78): wielokąta wpisanego w okrąg i zdefiniowanego przez aproksymację łuku W_M^{ny} funkcją (4.79) o postaci (rys. 4.13):

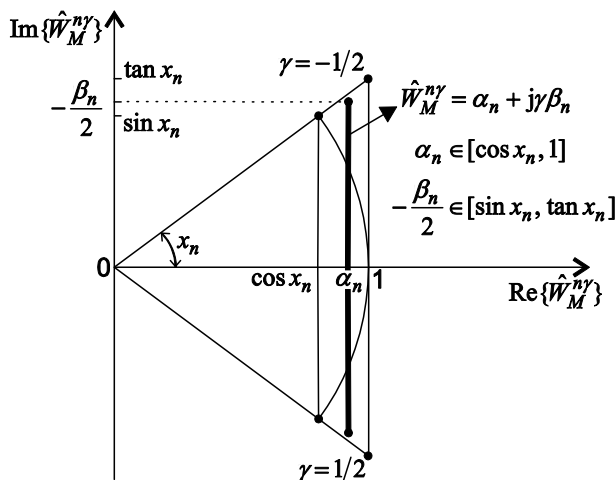
$$\hat{W}_M^{ny} = \cos x_n - j\gamma 2 \sin x_n \quad (4.94)$$

oraz wielokąta opisanego na okręgu, o funkcji (4.79) zdefiniowanej przez (rys. 4.13):

$$\hat{W}_M^{ny} = 1 - j\gamma 2 \tan x_n \quad (4.95)$$



Rys. 4.13. Dwa przypadki aproksymacji wycinka okręgu przez odcinek wyznaczające wielokąt wpisany w okrąg jednostkowy i opisany na okręgu jednostkowym



Rys. 4.14. Definicja aproksymacji wycinka okręgu przez odcinek zdefiniowany przez (4.96), (4.97) lub przez (4.98), (4.99) – przypadek pośredni między dwoma aproksymacjami z rys. 4.13

Pomiędzy tymi dwoma wielokątami można umieścić wielokąt wyznaczony przez aproksymację łuku W_M^{ny} funkcją (4.79), będącą wagowym (z wagą η) połączeniem (4.94) i (4.95) – rysunek 4.14:

$$\alpha_n(\eta) = (1 - \eta) \cos x_n + \eta, \quad \eta \in [0, 1] \quad (4.96)$$

$$\beta_n(\eta) = 2(\eta - 1) \sin x_n - 2\eta \tan x_n = 2[(\eta - 1) \cos x_n - \eta] \tan x_n, \quad \eta \in [0, 1] \quad (4.97)$$

Dla $\eta = 0$ zależności (4.96), (4.97) są tożsame z funkcją (4.94) wyznaczającą wielokąt wpisany w okrąg jednostkowy, a dla $\eta = 1$ są one tożsame z funkcją (4.95) wyznaczającą wielokąt opisany na okręgu jednostkowym. Aproksymację pełnego okręgu przez funkcję (4.97) otrzymuje się, uwzględniając dodatkowo zależności (4.90)–(4.93).

Definicje (4.96), (4.97) można uogólnić na wielokąt, który może mieć miejsca nieciągłości (podobnie jak dla wielokąta wyznaczonego w rozdz. 4.5 dla skończonych wartości $\mu \geq 0$). Taką sytuację uzyskuje się, przyjmując zamiast jednego parametru η dla (4.96), (4.97) parametry niezależne η_1, η_2 :

$$\alpha_n(\eta_1) = (1 - \eta_1) \cos x_n + \eta_1, \quad \eta_1 \in [0, 1] \quad (4.98)$$

$$\beta_n(\eta_2) = -2[(1 - \eta_2) \sin x_n + \eta_2 \tan x_n], \quad \eta_2 \leq \eta_1 \quad (4.99)$$

Jeżeli $\eta_2 = \eta_1$, to równania (4.98), (4.99) są tożsame z (4.96), (4.97), a aproksymacja okręgu wielokątem jest ciągła.

Szczególony przypadek aproksymacji (4.98), (4.99) może być wyznaczony dla warunku zbieżności tej aproksymacji (dla małych wartości x_n) z aproksymacją zdefiniowaną przez (4.67), (4.68). Podczas wyznaczania warunków takiej zbieżności stosuje się rozwinięcie (4.67), (4.68), (4.98), (4.99) w szereg Maclaurina względem x_n :

$$\alpha_n(\mu) = 1 - \frac{1}{6}x_n^2 + \frac{1}{120} \frac{1-116\mu R}{1+12\mu R} x_n^4 + o(x_n^6) \quad (4.100)$$

$$\beta_n(\mu) = -2x_n + \frac{1}{5} \frac{1-20\mu R}{1+12\mu R} x_n^3 + o(x_n^5) \quad (4.101)$$

$$\alpha_n(\eta_1) = 1 - \frac{1}{2}(1-\eta_1)x_n^2 + o(x_n^4) \quad (4.102)$$

$$\beta_n(\eta_2) = -2x_n + \left(\frac{1}{3} - \eta_2\right) x_n^3 + o(x_n^5) \quad (4.103)$$

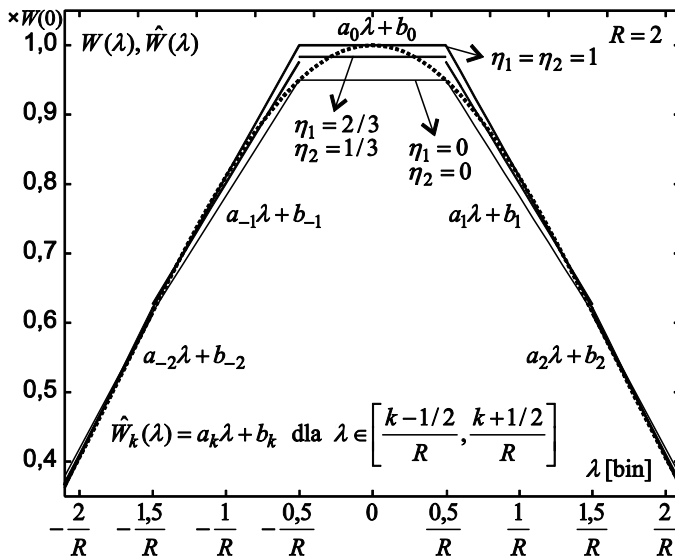
Dla dużych wartości R (czyli małych x_n) zbieżność (4.102), (4.103) z (4.100), (4.101) uzyskuje się przyjmując:

$$\eta_1 = 2/3, \quad \eta_2 = \frac{1}{3} \frac{1+4,1\mu R}{1+12\mu R}, \quad \mu R = -10 \frac{1-3\eta_2}{41-360\eta_2} \quad (4.104)$$

Dla zakresu $\mu \in [0, \infty]$ uzyskuje się stałą $\eta_1 = 2/3$ i zakres ok. $\eta_2 \in [0,114; 0,333]$, a więc aproksymacja z parametrem $\eta_2 \leq \eta_1 \leq 1$ zdefiniowana przez (4.98), (4.99) jest szersza niż aproksymacja z parametrem $\mu \in [0, \infty]$ zdefiniowana przez (4.67), (4.68). Jest to intuicyjnie zrozumiałe, biorąc pod uwagę przyjęte założenia przy ich wyprowadzeniu: dla aproksymacji z parametrem μ – minimalizację błędu średniokwadratowego aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego skorygowanego o błąd średniokwadratowy błędu nieciągłości (rozdz. 4.2–4.5) i dla aproksymacji z parametrami η_1, η_2 – rozmieszczenie wielokąta aproksymującego (ciągłego dla $\eta_2 = \eta_1$ i nieciągłego dla $\eta_2 < \eta_1$) pomiędzy wielokątami granicznymi, tj. wielokątem wpisanym w okrąg jednostkowy i wielokątem opisującym okrąg jednostkowy (rys. 4.14). Oznacza to, że aproksymacja z parametrem $\mu \in [0, \infty]$ nie umożliwia uzyskania wszystkich wielokątów pomiędzy wielokątami granicznymi. Aproksymację z parametrem $\mu \in [0, \infty]$ można uogólnić i uzyskać szerszy zakres zmienności $\beta_n(\mu)$, przyjmując na podstawie (4.104) zakres ok. $\mu R \in [-0,244; -0,050]$ dla $\eta_2 \in [0,2/3]$. Przyjęcie ujemnych wartości μ jest możliwe w aspekcie matematycznym, niezależnie od trudności w interpretacji intuicyjnej takiego rozwiązania. Pomimo takiego uogólnienia, aproksymacja (4.98), (4.99) z parametrami $\eta_2 \leq \eta_1 \leq 1$ jest znacznie szersza

i ona jest podstawą dalszych rozważań w rozdz. 4.7. Warto też zauważyć, że aproksymacja (4.98), (4.99) wykorzystuje podstawowe funkcje trygonometryczne $\sin x_n$, $\cos x_n$, $\tan x_n$ (zamiast $\text{sinc} x_n$ i $\text{sinc}' x_n$ z (4.67), (4.68)), z których dwie pierwsze można zapisać, korzystając z wzorów Eulera za pomocą funkcji $\exp(\pm jx_n)$, a to może ułatwić obliczenia dla wybranych algorytmów (przyjmując $\eta_2 = 0$, wykorzystuje się nawet wyłącznie funkcje $\sin x_n$, $\cos x_n$).

Kolejny szczególny przypadek aproksymacji uzyskuje się dla równań (4.98), (4.99), przyjmując $\mu = 0$ w (4.104), co prowadzi do warunku $\eta_1 = 2/3$, $\eta_2 = 1/3$, który jest zbieżny (ze wzrostem wartości R) z przypadkiem $\mu = 0$ przedstawionym na rysunku 4.2. Taka aproksymacja zastosowana do aproksymacji charakterystyki widmowej okna trójkątnego poprzez zależność (1.10) oraz (4.90) daje wynik przedstawiony na rysunku 4.15, który jest zbieżny z wynikiem z rysunku 4.2. Wykorzystanie w tym samym celu aproksymacji skrajnych z rysunku 4.13 (odpowiadających sytuacji $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ oraz $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1$) jest równoważne aproksymacji ograniczającej od dołu lub od góry charakterystyki widmowej okna czasowego w sposób pokazany na rysunku 4.15.



Rys. 4.15. Trzy przypadki zastosowania aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem według (4.98), (4.99) do aproksymacji widma okna czasowego (przykład dla okna trójkątnego):

$$\eta_1 = \eta_2 = 1 \text{ (wielokąt opisany na okręgu), } \eta_1 = \eta_2 = 0$$

$$\text{(wielokąt wpisany w okrąg) oraz } \eta_1 = 2/3, \eta_2 = 1/3$$

4.7. Minimalizacja błędów aproksymacji okręgu jednostkowego i dobór parametrów aproksymacji

4.7.1. Wprowadzenie

Zależności (4.90)–(4.93) opisują aproksymację okręgu jednostkowego wielokątem ze współczynnikami α_n , β_n , które są funkcjami parametru aproksymacji μ (dla równań (4.67), (4.68)) lub parametrów η_1 , η_2 (dla równań (4.98), (4.99)). Warunki zbieżności obu rodzajów aproksymacji omówiono w rozdz. 4.6, zależność (4.104). Wyznaczają one minimalizację błędu średniokwadratowego aproksymacji zmodyfikowanego w sposób uwzględniający stopień nieciągłości wielokąta aproksymującego okrąg jednostkowy, co odpowiada nieciągłości aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego funkcjami liniowymi. Jednak minimalizacja błędu średniokwadratowego nie gwarantuje minimalizacji błędu maksymalnego, gdyż bardzo często położenie minimum błędu średniokwadratowego nie pokrywa się z minimum błędu maksymalnego.

W niniejszym rozdziale wyznaczone są wartości parametrów η_1 , η_2 , dla których błędy maksymalne estymacji parametrów sygnału przyjmują wartości minimalne dla typowych założeń. Pominęto aproksymację z parametrem μ , gdyż w rozdz. 4.6 wykazano, że aproksymacja z parametrami η_1 , η_2 ma szerszy charakter i jest łatwiejsza w stosowaniu. Celem takiego oszacowania parametrów aproksymacji η_1 , η_2 jest wyznaczenie zakresu ich wartości, który jest przydatny w metodzie estymacji parametrów sygnału korzystającej z aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem, w naszym przypadku metody LIDFT.

W dalszych analizach stosuje się również następujące rozwinięcia w szereg MacLaurina względem x_n :

$$\sin 2\gamma x_n = 2\gamma x_n - \frac{4}{3}\gamma^3 x_n^3 + o(x_n^5), \quad \cos 2\gamma x_n = 1 - 2\gamma^2 x_n^2 + o(x_n^4) \quad (4.105)$$

Analiza błędów maksymalnych jest różna w zależności od tego jakiego błędu ona dotyczy i jaki błąd podlega minimalizacji. W kolejnych punktach podano najważniejsze rodzaje błędów, metody ich minimalizacji i wyznaczenie parametrów aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem.

4.7.2. Minimalizacja części rzeczywistej błędu aproksymacji

Część rzeczywista Δ_r błędu aproksymacji jest zdefiniowana jako część rzeczywista różnicy przybliżenia (4.79) wycinka okręgu (4.78):

$$\Delta_r(\gamma) = \operatorname{Re}\{\hat{W}_M^{n\gamma} - W_M^{n\gamma}\} = \alpha_n - \cos 2\gamma x_n \quad (4.106)$$

a szukane minimum $|\Delta_{r0}|$ jest zdefiniowane przez:

$$|\Delta_{r0}| = \min_{\eta_1} \max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)| \quad (4.107)$$

Zadanie minimalizacji polega na wyznaczeniu wartości parametru η_1 , które wyznacza minimum $|\Delta_{r0}|$ z (4.107). Minimalizację wartości $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$ uzyskuje się przez obliczenie wartości średniej z dwóch wartości granicznych (rys. 4.16), co odpowiada warunkowi:

$$\eta_1 = 1/2 \quad (4.108)$$

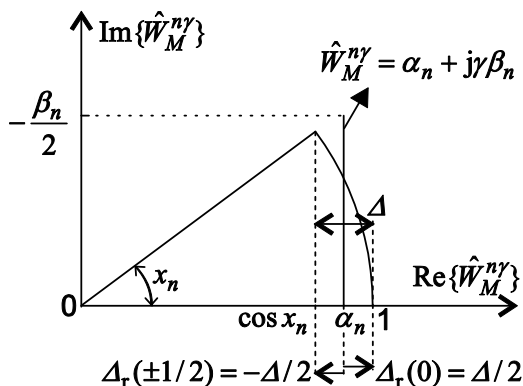
w równaniu (4.98), a wartość maksymalna $|\Delta_r(\gamma)|$ występuje dla $\gamma=0$ i $\gamma=\pm 1/2$ (rys. 4.16–4.18) i jest dana przez:

$$|\Delta_{r0}| = [(1 - \cos x_n) / 2] \quad (4.109)$$

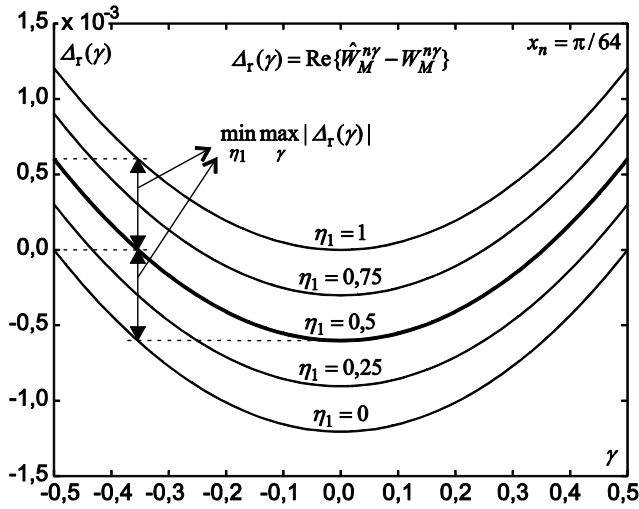
Dla dowolnych wartości parametru η_1 można zdefiniować współczynnik k_r jako stosunek $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$ do $|\Delta_{r0}|$ z (4.107):

$$k_r(\eta_1) = \frac{\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|}{\min_{\eta_1} \max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|} \quad (4.110)$$

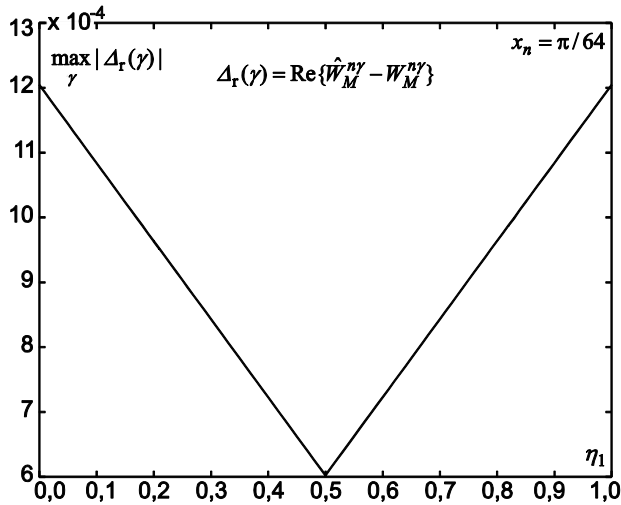
i wówczas spełniony jest warunek $k_r(\eta_1) \geq 1$ (jest równy 1 dla warunku (4.108)).



Rys. 4.16. Minimalizacja błędu $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$

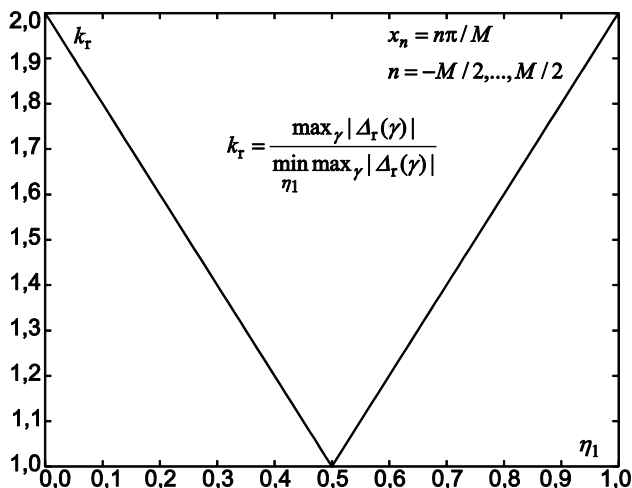


Rys. 4.17. Błąd $\Delta_r(\gamma)$ w funkcji γ i minimalizacja $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$ dla $\eta_1 = 0,5$



Rys. 4.18. Błąd $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$ w funkcji parametru η_1

Wykres współczynnika k_r (rys. 4.19) zamiast $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$ (rys. 4.18) w funkcji parametru η_1 pozwala na ocenę ile razy rośnie wartość $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$ w stosunku do wartości minimalnej, bez konieczności dokonywania przeliczeń, gdyż oś wartości jest

Rys. 4.19. Współczynnik k_r w funkcji parametru η_1

już wyskalowana do takiej właśnie interpretacji oraz umożliwia porównanie wyników dla różnych wartości x_n . Dla wszystkich n z zakresu $n \in [-M/2, \dots, M/2]$ wykresy funkcji $k_r = k_r(\eta_1)$ nakładają się na siebie, a warunek minimum jest zdefiniowany przez (4.108). Błąd rośnie w przybliżeniu liniowo ze wzrostem różnicy parametru η_1 do wartości optymalnej (4.108), zwiększając się o 100% ($k_r = 2$) dla wartości skrajnych η_1 (0 lub 1).

4.7.3. Minimalizacja części urojonej błędu aproksymacji

Część urojona Δ_i błędu aproksymacji jest zdefiniowana jako część urojona różnicy przybliżenia (4.79) wycinka okręgu (4.78):

$$\Delta_i(\gamma) = \text{Im} \left\{ \hat{W}_M^{n\gamma} - W_M^{n\gamma} \right\} = \gamma \beta_n + \sin 2\gamma x_n \quad (4.111)$$

a szukane minimum $|\Delta_{i0}|$ jest zdefiniowane przez:

$$|\Delta_{i0}| = \min_{\eta_2} \max_{\gamma} |\Delta_i(\gamma)| \quad (4.112)$$

Zadanie minimalizacji polega na określeniu takiej wartości parametru η_2 , która wyznacza minimum maksymalnej wartości modułu $\Delta_i(\gamma)$ z (4.111).

Pierwsza i druga pochodna $\Delta_i(\gamma)$ względem γ wynosi:

$$\frac{d\Delta_i(\gamma)}{d\gamma} = \beta_n + 2x_n \cos 2\gamma x_n, \quad \frac{d^2\Delta_i(\gamma)}{d\gamma^2} = -4x_n^2 \sin 2\gamma x_n \quad (4.113)$$

a warunek istnienia ekstremum $\Delta_i(\gamma)$ otrzymuje się z przyrównania pierwszej pochodnej do zera (ze znaku drugiej pochodnej wynika, że jest to minimum dla $\gamma x_n < 0$ i maksimum dla $\gamma x_n > 0$):

$$\gamma_0 = \pm(2x_n)^{-1} \arccos[-\beta_n / (2x_n)] \quad (4.114)$$

Stosując wzór (4.99) oraz rozwinięcie (4.105) w szereg Maclaurina względem x_n , do przyrównania pierwszej pochodnej z (4.113) do zera, otrzymuje się dla $o(x_n^2) = 0$:

$$\gamma_0 \approx \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} - \eta_2}, \quad \eta_2 \approx \frac{1}{3} - 4\gamma_0^2 \quad (4.115)$$

Dla $\gamma \in [-0,5; 0,5]$ zachodzi $-2/3 \leq \eta_2 \leq 1/3$. Błąd $\max_\gamma |\Delta_i(\gamma)|$ osiąga minimum, jeżeli $y = \Delta_i(\gamma_0) + \Delta_i(-1/2) = 0$ dla $\gamma_0 < 0$ ($y = \Delta_i(\gamma_0) + \Delta_i(1/2) = 0$ dla $\gamma_0 > 0$) – rysunek 4.20:

$$y = \gamma_0 \beta_n + \sin 2\gamma_0 x_n - \frac{\beta_n}{2} - \sin x_n = 0, \quad \gamma_0 = -(2x_n)^{-1} \arccos[-\beta_n / (2x_n)] \quad (4.116)$$

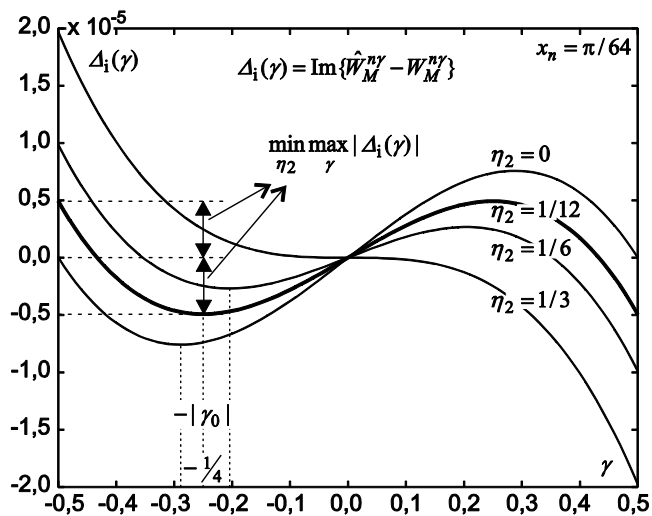
Po podstawieniu do zależności (4.116) zależności (4.99) i rozwinięciu y w szereg Maclaurina względem x_n :

$$y = -\frac{18\eta_2^2 - (12 - 27\sqrt{1/3 - \eta_2})\eta_2 + 2}{54\sqrt{1/3 - \eta_2}} x_n^3 + o(x_n^5) = 0 \quad (4.117)$$

oraz założeniu $o(x_n^5) = 0$ i po rozwiązaniu (4.117) ze względu na η_2 otrzymuje się pierwiastek dwukrotny $(\eta_2)_1 = -2/3$ tego równania i pierwiastek jednokrotny będący rozwiązaniem zadania minimalizacji (4.112):

$$\eta_2 = 1/12 \quad (4.118)$$

dla którego, z (4.115) wynika $\gamma_0^2 \approx 1/16$. Pierwiastek $(\eta_2)_1 = -2/3$ został wykluczony, gdyż dla niego z (4.115) wynika $\gamma_0^2 \approx 1/4$ i z odpowiednich rozwinięć $\Delta_i(\gamma_0)$

Rys. 4.20. Błąd $\Delta_1(\gamma)$ w funkcji γ i minimalizacja

$$\max_{\gamma} |\Delta_1(\gamma)| \text{ dla } \eta_2 = 1/12$$

i $\Delta_1(\pm 1/2)$ w szereg Maclaurina (oraz rys. 4.20) wynika, że dla tego przypadku błąd maksymalny jest wielokrotnie większy niż dla warunku (4.118).

Minimum (4.112) jest więc, uwzględniając (4.99), (4.111), (4.118) i $\Delta_1(\gamma_0) = -\Delta_1(-1/2)$, dane zależnością:

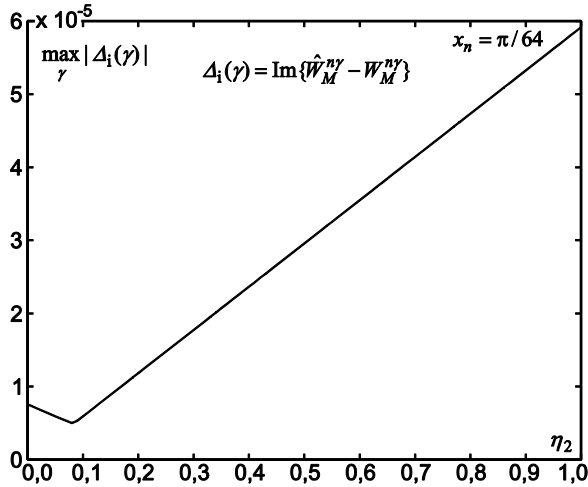
$$|\Delta_{10}| = |(\sin x_n - \tan x_n) / 12| \quad (4.119)$$

Podobnie jak w rozdziale 4.7.2 dla dowolnych wartości parametru η_1 można zdefiniować współczynnik k_i jako moduł stosunku $\max_{\gamma} |\Delta_1(\gamma)|$ z (4.111) do $|\Delta_{10}|$ z (4.112), (4.119):

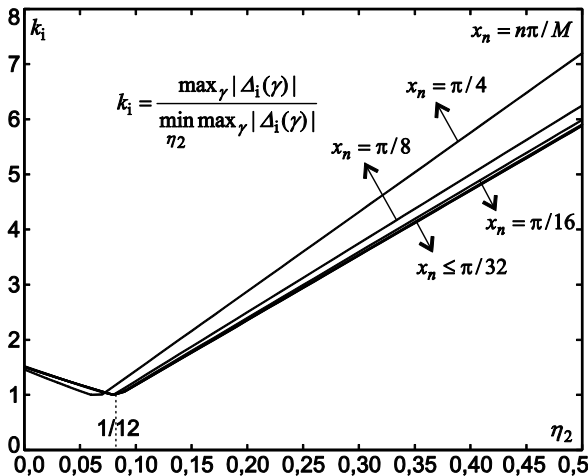
$$k_i(\eta_2) = \frac{\max_{\gamma} |\Delta_1(\gamma)|}{\min_{\eta_2} \max_{\gamma} |\Delta_1(\gamma)|} \quad (4.120)$$

który jest wygodną miarą oceny wartości błędu $\max_{\gamma} |\Delta_1(\gamma)|$ dla różnych wartości parametru η_2 w stosunku do wartości minimalnej (4.112).

Charakterystyki błędu Δ_1 w funkcji γ oraz η_2 i współczynnika (4.120) są przedstawione na rysunkach 4.20–4.22. Optymalna wartość parametru η_2 jest nieznacznie



Rys. 4.21. Błąd $\max_{\gamma} |\Delta_i(\gamma)|$ w funkcji parametru η_2



Rys. 4.22. Współczynnik k_i w funkcji η_2 i przesunięcie minimum dla $|x_n| > \pi/32$

mniejsza od określonej przez zależność (4.118) (wyznaczonej po założeniu $o(x_n^5) = 0$) dla dużych wartości x_n (rys. 4.22). Dla wartości $|x_n| \leq \pi/32$ wykresy $k_i = k_i(\eta_2)$ nakładają się na siebie, z dokładnością nie mniejszą, niż wynikająca z rozdzielczości wykresu z rysunku 4.22. Zgodnie z uwagą z rozdz. 4.5, wpływ wartości $|x_n| > \pi/32$ jest ograniczany w praktyce stosowaniem okien czasowych innych niż prostokątne.

4.7.4. Minimalizacja różnicy argumentów

Różnica argumentów Δ_a jest zdefiniowana jako różnica argumentów przybliżenia (4.79) wycinka okręgu (4.78):

$$\Delta_a(\gamma) = \arg\{\hat{W}_M^{ny}\} - \arg\{W_M^{ny}\} = 2\gamma x_n + \arctan \frac{\gamma\beta_n}{\alpha_n} \quad (4.121)$$

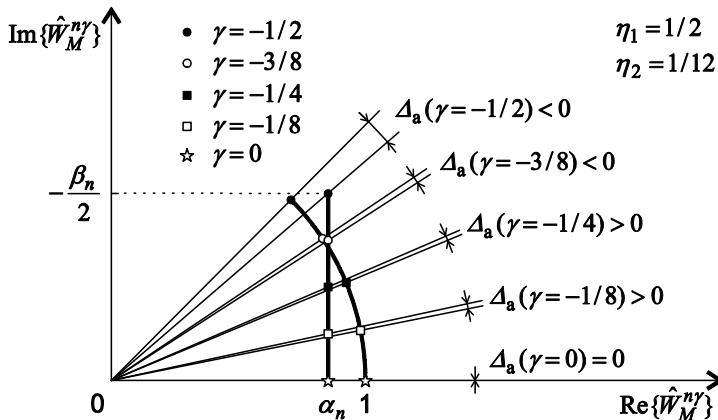
a szukane minimum $|\Delta_{a0}|$ jest zdefiniowane przez:

$$|\Delta_{a0}| = \min_{\eta_1, \eta_2} \max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)| \quad (4.122)$$

Zadanie minimalizacji polega na określeniu wartości parametrów η_1 i η_2 , które wyznaczają minimum maksymalnej wartości modułu $\Delta_a(\gamma)$ z zależności (4.121).

Po zastosowaniu aproksymacji, z parametrami (4.108) i (4.118), optymalnej ze względu na maksymalny błąd amplitudy, powstaje błąd estymacji argumentu kolejnych punktów okręgu jednostkowego. Na rysunku 4.23 przedstawiono błędy estymacji argumentu $\Delta_a(\gamma)$ dla $\gamma = 0, -1/8, -1/4, -3/8, -1/2$. Podobna sytuacja występuje dla aproksymacji z innymi parametrami niż $\eta_1 = 1/2$, $\eta_2 = 1/12$. Błąd estymacji $\Delta_a(\gamma)$ powoduje niedokładne wyznaczenie wartości γ , co prowadzi do niedokładnego wyznaczenia częstotliwości składowych sygnału wieloczęstotliwościowego.

W celu minimalizacji maksymalnej wartości modułu błędu (4.121) można przeprowadzić jego analizę podobną do przeprowadzonej w rozdz. 4.7.3.



Rys. 4.23. Definicja błędu $\Delta_a(\gamma)$ dla wybranych wartości γ

Ekstremum $\Delta_a(\gamma)$ uzyskuje się dla warunku:

$$\left. \frac{d\Delta_a(\gamma)}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = 2x_n + \frac{\beta_n}{\alpha_n} \left[1 + \gamma_0^2 (\beta_n / \alpha_n)^2 \right]^{-1} = 0 \quad (4.123)$$

czyli

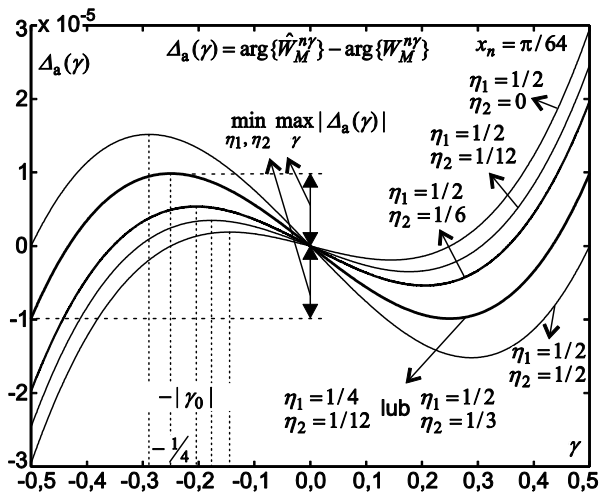
$$\gamma_0^2 = -\frac{\alpha_n}{\beta_n} \left(\frac{1}{2x_n} + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right) \quad (4.124)$$

Gdy zastosuje się zależności (4.98) i (4.99) i rozwinię wzór (4.124) w szereg MacLaurina względem x_n oraz założy $o(x_n^2) = 0$, otrzymuje się:

$$\gamma_0 \approx \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\eta_2 - 3\eta_1 + 2}{6}} \quad (4.125)$$

Maksymalny błąd $|\Delta_a(\gamma)|$ osiąga swoje minimum, jeżeli $y = \Delta_a(\gamma_0) + \Delta_a(-1/2) = 0$ dla $\gamma_0 < 0$ ($y = \Delta_a(\gamma_0) + \Delta_a(1/2) = 0$ dla $\gamma_0 > 0$) – rysunek 4.24:

$$y = 2\gamma_0 x_n + \arctan \frac{\gamma_0 \beta_n}{\alpha_n} - x_n - \arctan \frac{\beta_n}{2\alpha_n} = 0, \quad \gamma_0 = -\sqrt{-\frac{\alpha_n}{\beta_n} \left(\frac{1}{2x_n} + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)} \quad (4.126)$$



Rys. 4.24. Błąd $\Delta_a(\gamma)$ w funkcji γ dla wybranych wartości parametrów η_1, η_2

Po zastosowaniu w zależnościach (4.126) zależności (4.98) i (4.99) i rozwinięcia y w szereg Maclaurina względem x_n :

$$y = \frac{1}{18} \left[2\sqrt{4/3 - 2\eta_1 + 2\eta_2} - \eta_1 \left(9 + \sqrt{6(2 - 3\eta_1 + 3\eta_2)} \right) + \eta_2 \left(9 + \sqrt{6(2 - 3\eta_1 + 3\eta_2)} \right) \right] x_n^3 + o(x_n^5) = 0 \quad (4.127)$$

oraz po przyjęciu $o(x_n^5) = 0$ i rozwiązaniu (4.127) ze względu na η_2 otrzymuje się 5 pierwiastków tego równania:

$$(\eta_2)_1 = \eta_1 + 4/3, \quad (\eta_2)_2 = \eta_1 - 1/6 \quad (4.128)$$

$$(\eta_2)_3 = \eta_1 + 31/18 - a/18 - 1009/(18a) \quad (4.129)$$

$$(\eta_2)_4 = \eta_1 + 31/18 + ab/36 + 1009c/(36a) \quad (4.130)$$

$$(\eta_2)_5 = \eta_1 + 31/18 + ac/36 + 1009b/(36a) \quad (4.131)$$

$$a = \left(-31159 + 432j\sqrt{302} \right)^{1/3}, \quad b = 1 - j\sqrt{3}, \quad c = 1 + j\sqrt{3} \quad (4.132)$$

z których tylko dwa pierwsze są rzeczywiste – z zależności (4.125) otrzymuje się $|\gamma_0| = 1/2$ dla $(\eta_2)_1$ oraz $|\gamma_0| \approx 1/4$ dla $(\eta_2)_2$. Ze względu na definicję (4.126) minimum maksymalnej wartości $|\Delta_a(\gamma)|$ występuje dla $|\gamma_0| = 1/4$ (zob. również rys. 4.24), a więc optymalna wartość η_2 odpowiada $(\eta_2)_2$ z równania (4.128):

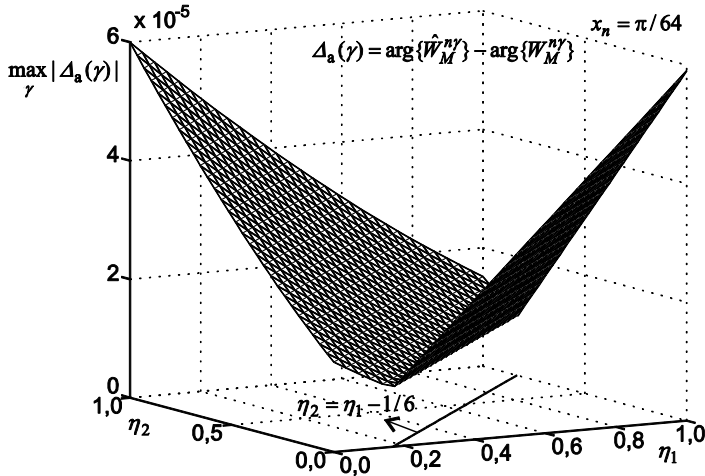
$$\eta_2 = \eta_1 - 1/6 \quad (4.133)$$

Warunku (4.133) nie spełniają jednocześnie wartości z zależności (4.108) i (4.118) wyznaczone przy minimalizacji części rzeczywistej i urojonej maksymalnego błędu aproksymacji.

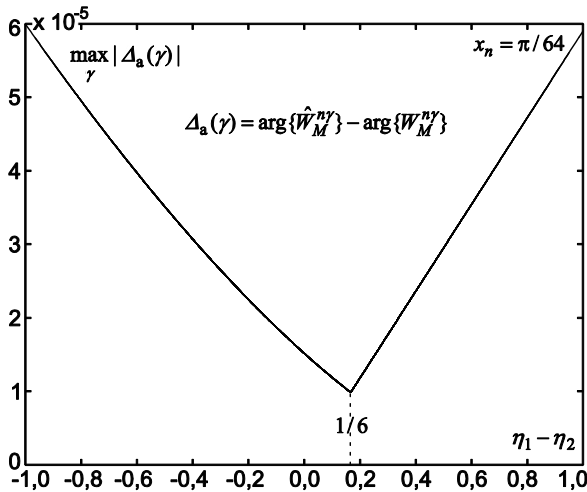
Dla dowolnych wartości parametrów η_1, η_2 można zdefiniować współczynnik k_a jako stosunek $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ do $|\Delta_{a0}|$ z równania (4.122):

$$k_a(\eta_1, \eta_2) = \frac{\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|}{\min_{\eta_1, \eta_2} \max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|} \quad (4.134)$$

Przykładowe charakterystyki błędu Δ_a w funkcji γ oraz η_1, η_2 i współczynnika (4.134) są przedstawione na rysunkach 4.24–4.28. Na rysunku 4.24 zilustrowano wy-

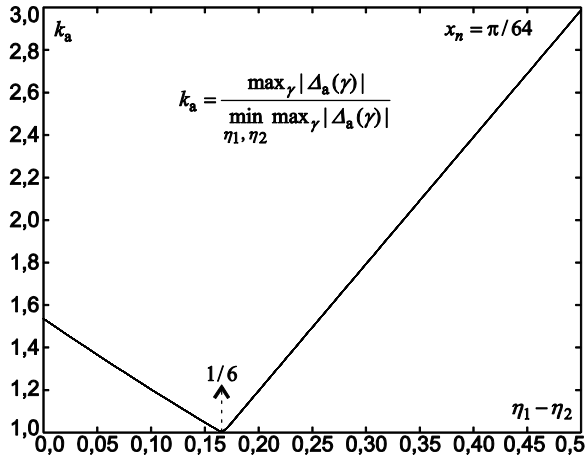
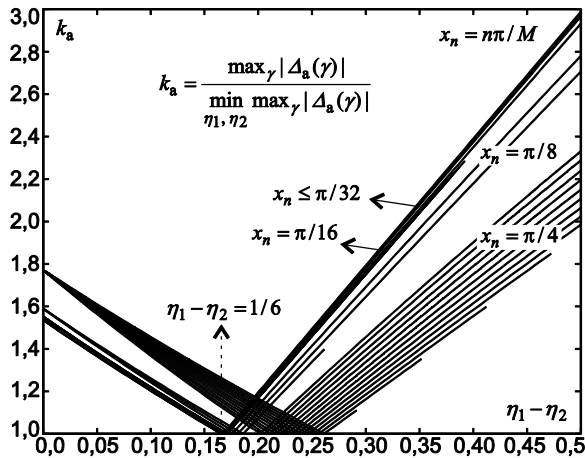


Rys. 4.25. Błąd $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ w funkcji parametrów η_1, η_2



Rys. 4.26. Błąd $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ w funkcji $\eta_1 - \eta_2$

prowadzone zależności, a zwłaszcza przypadek optymalny (minimalizacji $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$) występujący dla różnych wartości η_1, η_2 , jak np. $\eta_1 = 1/4, \eta_2 = 1/12$ lub $\eta_1 = 1/2, \eta_2 = 1/3$, spełniających jednak warunek (4.133) oraz, że maksimum błędu $|\Delta_a(\gamma)|$, przy spełnieniu warunku (4.133), występuje dla $\gamma = \pm 1/2$ i, zgodnie z (4.125), dla $\gamma \approx \pm 1/4$. Warunek (4.133) potwierdza wykres z rysunku 4.25 z zazna-

Rys. 4.27. Współczynnik k_a w funkcji $\eta_1 - \eta_2$ Rys. 4.28. Współczynnik k_a w funkcji $\eta_1 - \eta_2$ i przesunięcie minimum dla $|x_n| > \pi/32$

czoną prostą $\eta_2 = \eta_1 - 1/6$ na wykresie konturowym na płaszczyźnie (η_1, η_2) znajdującym się pod wykresem $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ w funkcji dwóch zmiennych: η_1, η_2 . Zależność $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ wyłącznie w funkcji $(\eta_1 - \eta_2)$ oznacza, że na wykresie $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ w funkcji $(\eta_1 - \eta_2)$ (będących zbiorem przekrojów dwuwymiarowych wykresu trójwymiarowego z rys. 4.25) wszystkie te przekroje nakładają się na siebie (rys. 4.26–4.27), a ich minimum potwierdza słuszność warunku (4.133).

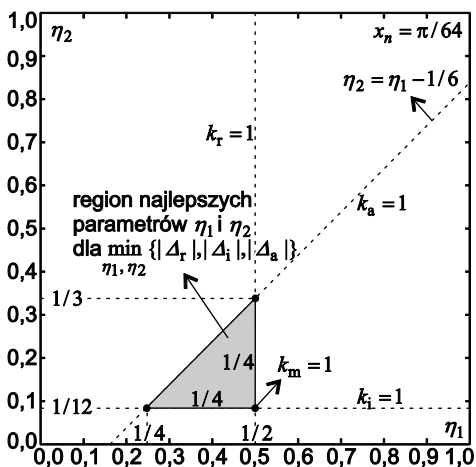
Dla małych wartości x_n , czyli spełniających warunek $|x_n| \leq 32$, również wykresy współczynnika (4.134) można przedstawić w funkcji $(\eta_1 - \eta_2)$, z dokładnością wynikającą z rozdzielczości rysunku 4.27. Dla $|x_n| > 32$ zachodzi sytuacja odmienna, ponieważ przekroje dwuwymiarowe z wykresu trójwymiarowego z rysunku 4.25 nie pokrywają się ze sobą (rys. 4.28). Oznacza to, że funkcja nie zależy już tylko od $(\eta_1 - \eta_2)$, a minimum błędu maksymalnego przesuwają się w kierunku wartości $(\eta_1 - \eta_2)$ większych niż wartość $1/6$ wynikająca z warunku (4.133). Jednak wpływ wartości $|x_n| > 32$ można zmniejszyć, zwiększając wartość R , a ponadto efekt ten jest ograniczony przez stosowanie okien czasowych innych niż prostokątne, o wartościach bliskich zeru dla n bliskich $\pm N/2$.

4.7.5. Zakres najkorzystniejszych wartości parametrów aproksymacji

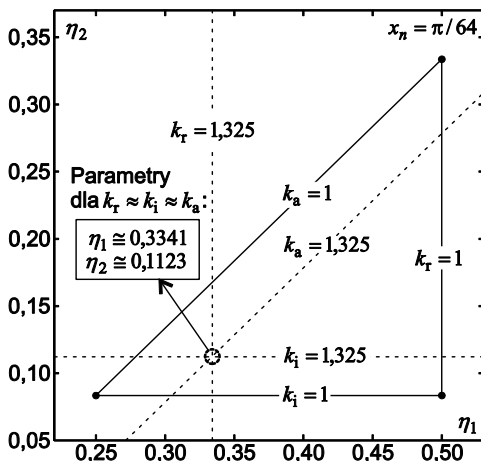
Zakres najkorzystniejszych wartości parametrów aproksymacji jest wyznaczony równoczesną minimalizacją błędów z rozdz. 4.7.2–4.7.4: $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$, $\max_{\gamma} |\Delta_i(\gamma)|$, $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ – odpowiednio części rzeczywistej, części urojonej argumentu przybliżenia (4.79) wycinka okręgu (4.78), oraz różnicy argumentów funkcji z zależności (4.78)–(4.79). Wykorzystując wyniki minimalizacji przeprowadzonej w rozdz. 4.7.2–4.7.4, polegającej na wyznaczeniu zależności na parametry η_1 , η_2 (dla których maksymalne błędy wyznaczenia amplitudy i częstotliwości po aproksymacji okręgu odpowiednim wielokątem są możliwie najmniejsze) można sformułować wnioski dotyczące praktycznego doboru wartości tych parametrów. Warunki (4.108), (4.118) i (4.133) wyznaczają trójkąt na płaszczyźnie (η_1, η_2) – rysunek 4.29.

Wszystkie pary wartości (η_1, η_2) z pola wewnątrz trójkąta wyznaczają różne kompromisy pomiędzy minimalizacją trzech rodzaju błędów, a więc współczynników: k_r , k_i , k_a . Szczególny przypadek określa sytuacja, w której wszystkie trzy wartości są w przybliżeniu równe i wynoszą 1,325. Oznacza to wzrost o 32,5% błędów $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$, $\max_{\gamma} |\Delta_i(\gamma)|$, $\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ powyżej ich wartości minimalnych. Dla tego przypadku (rys. 4.30) wartości parametrów wynoszą ok.: $\eta_1 \cong 0,3341$, $\eta_2 \cong 0,1123$.

Ostateczny dobór η_1 , η_2 zależy od szczegółowego sposobu wykorzystania przedstawionej aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem, gdyż w różnych metodach

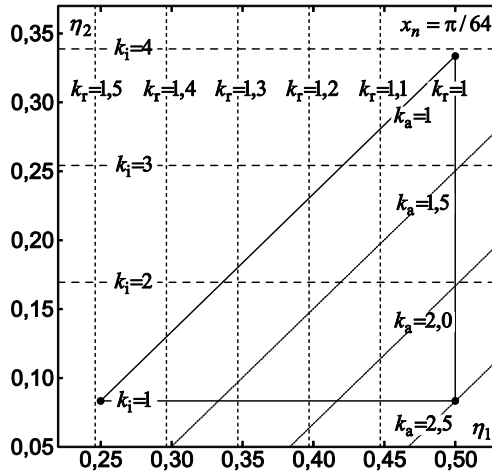


Rys. 4.29. Trójkąt najkorzystniejszych parametrów η_1, η_2 – warunki (4.108), (4.118), (4.133)



Rys. 4.30. Przypadek jednakowego wzrostu k_r, k_i, k_a : $\eta_1 \cong 0,3341, \eta_2 \cong 0,1123$

może być potrzeba minimalizacji współczynników k_r, k_i, k_a z różną wagą. Przykład z rysunku 4.30 przedstawia sytuację, gdy wagi te są sobie równe. Dla bardziej ogólnych sytuacji pomocnym jest wykres konturowy z rysunku 4.31, na którym zaznaczony jest wzrost błędu $\max_{\gamma} |\Delta_r(\gamma)|$ o 10%, 20%, ..., 50% ($k_r = 1,1; 1,2; \dots; 1,5$), wzrost błędu $\max_{\gamma} |\Delta_i(\gamma)|$ do 200%, 300%, 400% ($k_i = 2, 3, 4$) oraz wzrost błędu



Rys. 4.31. Wykres konturowy k_r , k_i , k_a w funkcji η_1 , η_2 w ramach trójkąta najkorzystniejszych parametrów

$\max_{\gamma} |\Delta_a(\gamma)|$ o 50%, 100% i 150% ($k_a = 1,5; 2,0; 2,5$). Najmniej czułym na zmiany parametrów η_1 , η_2 aproksymacji, w ramach analizowanego trójkąta najlepszych przypadków, jest współczynnik k_r (maksymalny wzrost do niespełna 1,5), a najbardziej czułym jest współczynnik k_i (maksymalny wzrost do niespełna 4). Dlatego przypadek z rysunku 4.30 (jednakowego wzrostu wszystkich trzech współczynników) wyznacza punkt leżący najbliżej wierzchołka $(\eta_1, \eta_2) = (1/4, 1/12)$ spośród wszystkich trzech wierzchołków trójkąta najlepszych przypadków.

Przedstawione wyniki, z których końcowe rezultaty podsumowano na rysunkach 4.29–4.31, są podstawą do dalszego doboru wartości parametrów η_1 , η_2 w konkretnej metodzie estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego – metodzie LIDFT prezentowanej w niniejszej pracy, będącej treścią kolejnych rozdz. 4.8–4.14. Dobór wartości η_1 , η_2 jest przedstawiony w przykładzie w rozdz. 4.11, a dla sytuacji bardziej ogólnych w rozdz. 4.13. Analizy te są poprzedzone przedstawieniem równań metody LIDFT w postaci uogólnionej w rozdz. 4.8–4.10.

4.8. Liniowe równanie macierzowe metody LIDFT

Jeśli charakterystyka widmowa okna czasowego jest aproksymowana funkcjami liniowymi $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$ dla zakresu $\lambda \in [k/R, (k+1)/R]$ w sposób przedsta-

wiony na rysunkach 4.1 oraz 3.13, to jej zastosowanie do aproksymacji sygnału wieloczęstotliwościowego złożonego z P oscylacji zespolonych wymaga uwzględnienia zależności (1.5). Rozpatrzmy w pierwszej kolejności (1.5) dla $P=1$, tj. jedną składową o amplitudzie B_k i częstotliwości unormowanej λ_k spełniającej warunek $\lambda_k \in [(k-1)/R, k/R]$. Dla tej składowej widmo odpowiada widmu okna czasowego $W(\lambda)$ (rys. 3.1a, ale z uwzględnieniem $R > 1$ – np. rys. 3.13, 4.1) przesuniętego na osi częstotliwości o wartość λ_k i pomnożonego przez wartość B_k (rys. 3.1b, ale z uwzględnieniem $R > 1$), a wartość $F_{i/R}$ widma (1.5) uzyskana z (1.9) może być aproksymowana przez wartość funkcji aproksymującej $\hat{W}_{i-k}(\lambda - \lambda_k)$:

$$F_{i/R} \cong B_k \left[a_{i-k} \left(i/R - \lambda_k \right) + b_{i-k} \right] = B_k \left[a_{i-k} \left(\frac{i-k+1/2}{R} \right) + b_{i-k} \right] - \gamma_k B_k \frac{a_{i-k}}{R} \quad (4.135)$$

gdzie, zgodnie z (3.29), $\lambda_k = (k-1/2 + \gamma_k)/R$. Po uwzględnieniu (4.30)–(4.31) w (4.135) otrzymuje się zależność $F_{i/R}$ od d'_{i-k} , d''_{i-k} zamiast od a_{i-k} , b_{i-k} :

$$F_{i/R} \cong B_k \left[a_{i-k} \left(i/R - \lambda_k \right) + b_{i-k} \right] = B_k d'_{i-k} - \gamma_k B_k d''_{i-k} \quad (4.136)$$

Uogólniając (4.136) na przypadek $P > 1$ oscylacji zespolonych o amplitudach B_{k_1}, \dots, B_{k_p} i częstotliwościach unormowanych $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_p}$, uzyskuje się:

$$F_{i/R} \cong \sum_{k \in S_1} (B_k d'_{i-k} - \gamma_k B_k d''_{i-k}), \quad i = -M/2, \dots, M/2-1 \quad (4.137)$$

gdzie:

$$S_1 = \{k_1, \dots, k_p\} \quad (4.138)$$

Równanie (4.137) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{f} \cong \mathbf{D} \mathbf{b} \quad (4.139)$$

gdzie:

$$\mathbf{f} = \left[F_{-(M/2)/R}, \dots, F_{(M/2-1)/R} \right]^T \quad (4.140)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}' \quad -\mathbf{D}''] \quad (4.141)$$

$$\mathbf{D}' = [d'_{i-k}]_{M \times P}, \quad i = -M/2, \dots, M/2-1, \quad k \in S_1 \quad (4.142)$$

$$\mathbf{D}'' = [d''_{i-k}]_{M \times P}, \quad i = -M/2, \dots, M/2-1, \quad k \in S_1 \quad (4.143)$$

$$\mathbf{b} = \left[\mathbf{b}'^T \quad \mathbf{b}''^T \right]^T, \quad \mathbf{b}' = [B_k]_{P \times 1}, \quad \mathbf{b}'' = [\gamma_k B_k]_{P \times 1}, \quad k \in S_1 \quad (4.144)$$

lub w postaci niemacierzowej uwzględniającej dodatkowo (1.9), (4.70), (4.71):

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{-j2\pi ni/M} \cong \sum_{k \in S_1} B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \alpha_n(\mu) e^{-jx_n} e^{-j2\pi n(i-k)/M} - j \sum_{k \in S_1} \gamma_k B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \beta_n(\mu) e^{-jx_n} e^{-j2\pi n(i-k)/M} \quad (4.145)$$

Dla $\mu = 0$ i $R = 1$ równanie (4.139) jest tożsame z (3.14) (z innymi nazwami macierzy).

Wektor próbek widma \mathbf{f} z równania (4.139) można zapisać, na podstawie (1.9), (1.114) w postaci macierzowej:

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}_R \mathbf{\Lambda}_w \mathbf{y} \quad (4.146)$$

gdzie \mathbf{W}_R jest zdefiniowane przez (4.18), macierz $\mathbf{\Lambda}_w$ jest macierzą diagonalną o elementach równych wartościom okna czasowego:

$$\mathbf{\Lambda}_w = \text{diag}\{w_n\}, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1, \quad (4.147)$$

a \mathbf{y} jest wektorem próbek sygnału:

$$\mathbf{y} = [y_{-N/2}, \dots, y_{N/2-1}]^T \quad (4.148)$$

Metoda LIDFT przedstawiona w rozdz. 3 rozwiązuje równanie (4.139) metodą najmniejszych kwadratów ze względu na \mathbf{b} :

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} \mathbf{b} = \mathbf{D}^H \mathbf{f} \quad (4.149)$$

Po uwzględnieniu (4.69) i (4.141)–(4.143) otrzymuje się:

$$\mathbf{D} = \mathbf{W}_R \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{\Lambda}_w \\ -\mathbf{\Lambda}_\beta \mathbf{\Lambda}_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_R^H \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

gdzie $\mathbf{\Lambda}_\alpha = [\alpha_n e^{-jx_n}]$, $\mathbf{\Lambda}_\beta = j[\beta_n e^{-jx_n}]$ to macierze diagonalne zdefiniowane w (4.65), (4.66), a \mathbf{V}_R jest podmacierzą macierzy \mathbf{W}_R (4.18) powstałą po usunięciu wszystkich wierszy, z wyjątkiem wyznaczonych przez (4.138):

$$\mathbf{V}_R = [e^{-j2\pi nk/M}]_{P \times N}, \quad k \in S_1, \quad n = -N/2, \dots, N/2-1 \quad (4.151)$$

Korzystając z (4.21) i (4.150), otrzymuje się:

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D} = M \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_\alpha^* \mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{\Lambda}_w^2 & -\mathbf{\Lambda}_\alpha^* \mathbf{\Lambda}_\beta \mathbf{\Lambda}_w^2 \\ -\mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{\Lambda}_\beta^* \mathbf{\Lambda}_w & \mathbf{\Lambda}_\beta^* \mathbf{\Lambda}_\beta \mathbf{\Lambda}_w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_R^H \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

$$\mathbf{D}^H \mathbf{W}_R \mathbf{\Lambda}_w = M \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_\alpha^* \mathbf{\Lambda}_w^2 \\ -\mathbf{\Lambda}_\beta^* \mathbf{\Lambda}_w^2 \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

Równanie (4.149) można więc zapisać, uwzględniając (4.146), (4.152)–(4.153) jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_\alpha^* \mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{\Lambda}_w^2 & -\mathbf{\Lambda}_\alpha^* \mathbf{\Lambda}_\beta \mathbf{\Lambda}_w^2 \\ -\mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{\Lambda}_\beta^* \mathbf{\Lambda}_w^2 & \mathbf{\Lambda}_\beta^* \mathbf{\Lambda}_\beta \mathbf{\Lambda}_w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_R^H \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_\alpha^* \mathbf{\Lambda}_w^2 \\ -\mathbf{\Lambda}_\beta^* \mathbf{\Lambda}_w^2 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad (4.154)$$

lub w postaci niemacierzowej jako układ $2P$ równań ($i \in S_1$):

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \alpha_n(\mu) y_n e^{jx_n} e^{-j2\pi n i/M} = \sum_{k \in S_1} B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \alpha_n^2(\mu) e^{-j2\pi n(i-k)/M} - j \sum_{k \in S_1} \gamma_k B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \alpha_n(\mu) \beta_n(\mu) e^{-j2\pi n(i-k)/M} \quad (4.155)$$

$$j \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \beta_n(\mu) y_n e^{jx_n} e^{-j2\pi n i/M} = j \sum_{k \in S_1} B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \alpha_n(\mu) \beta_n(\mu) e^{-j2\pi n(i-k)/M} + \sum_{k \in S_1} \gamma_k B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n^2 \beta_n^2(\mu) e^{-j2\pi n(i-k)/M} \quad (4.156)$$

Równanie (4.154) dla $\mu = 0$ jest tożsame z (3.16)–(3.23) (dla $R = 1$) pierwszej wersji metody (rozdz. 3.2) oraz z (3.30)–(3.37) dla $R \geq 1$ – wersji rozszerzonej o technikę uzupełniania zerami (rozdz. 3.4).

Równanie (4.154) i odpowiadające mu zależności algebraiczne (4.155), (4.156) są w rozdz. 4.10 uogólnione do postaci, gdzie korzysta się z pary okien czasowych przez odpowiednią interpretację (rozdz. 4.9), z uwzględnieniem aproksymacji alternatywnej z rozdz. 4.3 zamiast tej z rozdz. 4.2.

4.9. Interpretacja liniowego równania macierzowego metody LIDFT

Na początku rozdz. 4.8 wprowadzono założenie, że widmo okna czasowego jest aproksymowane funkcjami liniowymi $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$ dla zakresu $\lambda \in [k/R, (k+1)/R]$ w sposób przedstawiony na rysunku 4.1 i korzystano z tej aproksymacji

w (4.137) dla próbek widma $F_{i/R}$ dla $i = -M/2, \dots, M/2 - 1$, a więc dla widma w całym jego zakresie. Następnie uzyskano przybliżenie (4.145), które jest spełnione dla $i = -M/2, \dots, M/2 - 1$. W analogiczny sposób można zastosować aproksymację alternatywną funkcjami liniowymi $\hat{W}_k(\lambda) = a_k \lambda + b_k$ dla zakresu $\lambda \in [(k-1/2)/R, (k+1/2)/R]$ w sposób przedstawiony na rysunku 4.2, po dokonaniu tego wprowadza się zmianę polegającą na tym, że zamiast aproksymacji alternatywnej próbek widma $F_{i/R}$ przeprowadza się tę aproksymację dla próbek widma $F_{(i-1/2)/R}$. Dla tych dwóch założeń (aproksymacja z rys. 4.2 zamiast z rys. 4.1 i dla próbek $F_{(i-1/2)/R}$ zamiast $F_{i/R}$) oraz po wprowadzeniu wzorów takich samych jak (4.135)–(4.144) otrzymujemy równanie odpowiadające równaniu (4.145):

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} y_n w_n e^{jx_n} e^{-j2\pi n i/M} \cong \sum_{k \in S_1} B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \alpha_n(\mu) e^{-j2\pi n(i-k)/M} - j \sum_{k \in S_1} \gamma_k B_k \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w_n \beta_n(\mu) e^{-j2\pi n(i-k)/M} \quad (4.157)$$

które jest spełnione dla całego widma ($i = -M/2, \dots, M/2 - 1$), zwłaszcza dla $i \in S_1$ z (4.138).

Najważniejsze wnioski dotyczące porównania (4.155)–(4.157) są następujące:

- zależności te można uzyskać z aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem według (4.92) oraz z (1.9), (1.114) przyjmując $\lambda = (i-1/2)/R$,
- zależność (4.155) uzyskujemy po podstawieniu w (4.157) w miejsce w_n wyrażenia $w_n^2 \alpha_n(\mu)$,
- zależność (4.156) uzyskujemy po podstawieniu w (4.157) w miejsce w_n wyrażenia $jw_n^2 \beta_n(\mu)$.

Wnioski te oznaczają, że równoważne są dwie procedury postępowania. Pierwsza z tych procedur to zastosowanie okna czasowego w_n do spróbkowanego sygnału y_n i obliczenie jego widma, a następnie zastosowanie metody najmniejszych kwadratów równaniem (4.149) w odniesieniu do wszystkich próbek tego widma aproksymowanych w sposób zdefiniowany na rysunku 4.1, co prowadzi do równań (4.155), (4.156). Druga z tych procedur to metoda aproksymacji zdefiniowanej na rysunku 4.2 i prowadząca wprost (już bez stosowania metody najmniejszych kwadratów w dziedzinie częstotliwości) do równania (4.157) stosowanego do wybranych próbek widma (zdefiniowanych przez (4.138)) dwukrotnie: raz dla okna czasowego h_n , a następnie dla

okna czasowego g_n , określonych na podstawie okna czasowego w_n w następujący sposób:

$$h_n = w_n^2 \alpha_n(\mu), \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (4.158)$$

$$g_n = w_n^2 \beta_n(\mu), \quad n = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (4.159)$$

Ponieważ funkcja $\alpha_n(\mu)$ jest parzysta względem argumentu n , a funkcja $\beta_n(\mu)$ jest nieparzysta, to charakterystyki widmowe $H(\lambda)$ i $G(\lambda)$ okien czasowych h_n i g_n również mają te cechy.

W dalszej części niniejszej pracy metoda LIDFT jest traktowana w sposób możliwie najbardziej ogólny, tj. z zastosowaniem odpowiedniej aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem (jak w rozdz. 4.5, 4.6) równoważnej aproksymacji charakterystyki widmowej funkcjami liniowymi (rozd. 4.2–4.4) oraz z zastosowaniem pary okien czasowych: okna parzystego h_n i okna nieparzystego g_n . W rozdziale 4.10 przedstawiono, na bazie tych założeń, uogólnioną wersję metody LIDFT, a w rozdziałach kolejnych – przykład implementacji, analizę dokładności i sposób doboru parametrów.

4.10. Metoda LIDFT jako metoda interpolacji widma z zastosowaniem pary okien czasowych

Po uwzględnieniu wniosków zawartych w rozdz. 4.9 dotyczących dotychczasowych wersji metody LIDFT można zdefiniować jej wersję uogólnioną, wychodząc z następujących założeń:

- model sygnału jest zdefiniowany przez (1.1)–(1.3), tzn. zakłada się, że sygnał jest sygnałem wieloczęstotliwościowym złożonym z P oscylacji zespolonych, każda o amplitudzie zespolonej B_k i częstotliwości unormowanej λ_k spełniającej warunek dla k całkowitego:

$$\lambda_k = \frac{k + \gamma_k}{R}, \quad |\gamma_k| \leq \frac{1}{2}, \quad k \in S_1 \quad (4.160)$$

czyli

$$\gamma_k = R\lambda_k - k \quad (4.161)$$

a zbiór S_1 wyznacza wstępną lokalizację składowych w widmie:

$$S_1 = \{k_1, \dots, k_P\} \quad (4.162)$$

- w celu obliczenia widma sygnału stosowana jest zależność (1.114) dla N próbek y_n sygnału z użyciem okna parzystego h_n i okna nieparzystego g_n , a wartości y_n , h_n , g_n definiują wektory \mathbf{y} , \mathbf{h} oraz \mathbf{g} :

$$\mathbf{y} = [y_{-N/2}, \dots, y_{N/2-1}]^T \quad (4.163)$$

$$\mathbf{h} = [h_{-N/2}, \dots, h_{N/2-1}]^T, \quad \mathbf{g} = [g_{-N/2}, \dots, g_{N/2-1}]^T \quad (4.164)$$

- dla zależności (1.114) stosowana jest aproksymacja (4.90) okręgu jednostkowego wielokątem o współczynnikach α_n , β_n , tworzących wektory $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{-NR/2}, \dots, \alpha_{NR/2-1}]^T, \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_{-NR/2}, \dots, \beta_{NR/2-1}]^T \quad (4.165)$$

Uzyskuje się w ten sposób liniowe równanie macierzowe:

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (4.166)$$

gdzie \mathbf{x} jest wektorem wyznaczanych parametrów:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{k_1}, \dots, B_{k_p}]^T \\ [C_{k_1}, \dots, C_{k_p}]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_k]^T \\ [C_k]^T \end{bmatrix}, \quad k \in S_1 \quad (4.167)$$

z których określa się częstotliwości unormowane λ_k z (4.160) na podstawie:

$$\gamma_k = C_k / B_k \quad (4.168)$$

Wektor \mathbf{f} we wzorze (4.166) zawiera wartości widma sygnału wyznaczone dla indeksów ze zbioru (4.162), uzyskane z zastosowaniem okna h_n i g_n :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{j}\mathbf{g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_i \{y_n h_n\}_{NR}]^T \\ [F_i \{j y_n g_n\}_{NR}]^T \end{bmatrix}, \quad i \in S_1 \quad (4.169)$$

a macierz \mathbf{F} zawiera wartości widma współczynników α_n oraz β_n aproksymujących zgodnie z (4.90) okrąg jednostkowy i z wykorzystaniem obu okien czasowych h_n , g_n :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{h}) & -\mathbf{F}(\mathbf{j}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{h}) \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{j}\mathbf{g}) & -\mathbf{F}(\mathbf{j}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{j}\mathbf{g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{i-k} \{\alpha_n h_n\}_{NR}] & -[F_{i-k} \{j\beta_n h_n\}_{NR}] \\ [F_{i-k} \{\alpha_n jg_n\}_{NR}] & -[F_{i-k} \{j\beta_n jg_n\}_{NR}] \end{bmatrix} \quad i, k \in S_1 \quad (4.170)$$

gdzie $F_m \{a_n b_n\}_{NR}$ (dla $m = i, i - k$) występujące w (4.169), (4.170) – m -ta próbka widma zdefiniowana przez (1.114).

W przypadku stosowania algorytmu FFT korzystnie jest wybrać obliczanie tego widma przez zależność (1.115) spośród (1.115), (1.116) zdefiniowanych w rozdz. 1.7.

Wygodnie jest zapisać równania (4.166), (4.167), (4.169), (4.170) w postaci skróconej:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & s_{i-k} \\ p_{i-k} & q_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} B_k \\ C_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}_{2P \times 1}, \quad i, k \in S_1 \quad (4.171)$$

gdzie:

$$r_m = \text{FFT}_m \{ \alpha_n h_n \}_{NR}, \quad s_m = -j \text{FFT}_m \{ \beta_n h_n \}_{NR} \quad (4.172)$$

$$p_m = j \text{FFT}_m \{ \alpha_n g_n \}_{NR}, \quad q_m = \text{FFT}_m \{ \beta_n g_n \}_{NR} \quad (4.173)$$

$$u_m = \text{FFT}_m \{ y_n h_n \}_{NR}, \quad v_m = j \text{FFT}_m \{ y_n g_n \}_{NR} \quad (4.174)$$

$$m = 0, \dots, NR - 1 \quad (4.175)$$

a $\text{FFT}_m \{ z_n \}_{NR}$ oznacza, zgodnie z (1.117), m -tą próbkę widma uzyskaną algorytmem FFT z N próbek z_n uzupełnionych $N(R-1)$ zerami umieszczonymi zgodnie z (1.115).

Na podstawie przedstawionych zależności można zdefiniować algorytm uogólnionej metody LIDFT jako interpolacji z parą okien czasowych, który wymaga wykonania następujących etapów:

1. Próbujemy sygnał $y(t)$ uzyskując próbki y_n indeksowane z $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ lub w zakresie $n = 0, \dots, N - 1$.
2. Wybieramy okna czasowe h_n, g_n oraz definicję współczynników α_n, β_n (a więc parametr μ dla (4.67), (4.68) lub parametry η_1, η_2 dla (4.98), (4.99)) oraz krotność R uzupełnianych zer, a następnie obliczamy współczynniki $r_m, s_m, p_m, q_m, u_m, v_m$ na podstawie (4.172)–(4.175).
3. Jako wstępną lokalizację składowych w widmie wybieramy zbiór $S = \{k_1, \dots, k_K\}$, co oznacza, że sygnał składa się z K -składowych sinusoidalnych o częstotliwościach unormowanych $\lambda_{k_m} \in [(k_m - 0,5)/R, (k_m + 0,5)/R]$ w jednostkach [bin]. Biorąc pod uwagę składowe sprzężone, zakładamy, że $i, k \in S_1 = \{k_1, \dots, k_P\}$, gdzie $S_1 = \{k_1, \dots, k_K, NR - k_K, \dots, NR - k_1\}$, jeśli $k_1 > 0$ oraz $S_1 = \{0, k_2, \dots, k_K, NR - k_K, \dots, NR - k_2\}$ jeśli $k_1 = 0$.

4. Na podstawie wyznaczonych wartości i , k obliczamy B_k , C_k z (4.171), a stąd γ_k z (4.168) i na podstawie (4.160) częstotliwości unormowane jako $\lambda_k = (k + \operatorname{Re} \gamma_k) / R$. Amplitudę i fazę każdej składowej sinusoidalnej wyznacza się z równania $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$ dla próbek y_n indeksowanych w zakresie $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ lub $A_k e^{j(\varphi_k + \pi\lambda_k)} = 2jB_k$ dla próbek y_n indeksowanych w zakresie $n = 0, \dots, N - 1$.
5. Sprawdzamy wartość $\operatorname{Im} \gamma_k$ oraz $\operatorname{Re} \gamma_k$ i w razie potrzeby powtarzamy pkt 3–5 algorytmu dla nowego zbioru S (określonego na podstawie wartości $\operatorname{Re} \gamma_k$ i dotychczasowego zbioru S). W idealnym przypadku $\operatorname{Im} \gamma_k = 0$ oraz $|\operatorname{Re} \gamma_k| \leq 0,5$.

Wstępna lokalizacja składowych w widmie, tj. wybór zbioru S , dobór krotności R uzupełnianych zer, dobór okien czasowych h_n , g_n oraz współczynników α_n , β_n nazywa się warunkami początkowymi metody LIDFT. Dobór tych danych wydaje się kluczowym zagadnieniem w efektywnym stosowaniu metody LIDFT.

Dobór okien czasowych h_n , g_n na podstawie (4.158), (4.159) oraz przyjęcie α_n , β_n na podstawie (4.67), (4.68) z warunkiem $\mu = 0$, a także aproksymacji okręgu jednostkowego wyznaczonej przez (4.92) zamiast (4.90), prowadzi do wcześniejszej wersji metody LIDFT, przedstawionej w rozdziale 3 i równaniach (3.16)–(3.23) dla $R = 1$ oraz (3.30)–(3.37) dla $R \geq 1$.

W rozdziale 4.11 przedstawiony jest przykład zastosowania metody LIDFT nawiązujący do przykładu przedstawionego w rozdz. 3.4, a w rozdziałach kolejnych – analizie dokładności metody.

4.11. Przykład zastosowania metody LIDFT w estymacji sygnału wieloczęstotliwościowego

Uogólnioną postać metody LIDFT jako interpolacji z użyciem pary okien czasowych, zdefiniowaną w rozdz. 4.10 (w tym równania (4.171)–(4.175) i 5-punktowy algorytm opisany poniżej zależności (4.175)) sprawdzono w niniejszym rozdziale dla sygnału zdefiniowanego w rozdz. 3.4 (tab. 3.1, rys. 3.17). Umożliwia to porównanie metody LIDFT wykorzystującej aproksymację okręgu jednostkowego opisaną w rozdz. 4.6 i 4.7, z dotychczasową wersją metody z rozdz. 3. Jednocześnie dla tego przykładu przedstawiona jest implementacja zasadniczej części algorytmu LIDFT w języku Matlab. Implementacja algorytmu w języku Matlab musi uwzględniać specyfikę tego języka programowania, w tym m.in. fakt, że indeksy do tablic numerowa-

ne są od 1, a nie od 0, stąd do numeru próbki sygnału lub widma trzeba dodać 1, gdy numer ten jest odwołaniem do elementu macierzy zdefiniowanej w języku Matlab.

Parametry sygnału z tab. 3.1 (amplitudy, częstotliwości unormowane i fazy każdej ze składowych) można zapisać w zmiennych języka Matlab:

```
Ax=[1, 0.02, 0.004]';
lx=[10.2, 12.3, 15.4]';
px0=[0.5, 1, 1.5]';
px1=[0.5, 1, 1.5]'-pi*lx;
```

gdzie ph_0 zawiera fazy składowych przy indeksowaniu próbek sygnału dla zakresu $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$, a ph_1 – fazy przy indeksowaniu próbek dla $n = 0, \dots, N - 1$.

Próbki sygnału indeksowane dla $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ uzyskuje się za pomocą poleceń:

```
N=64; n=-N/2:N/2-1;
y=Ax'*sin(2*pi*lx*n/N+px0*ones(size(n)));
```

a dla indeksowania $n = 0, \dots, N - 1$ za pomocą poleceń:

```
N=64; n=0:N-1;
y=Ax'*sin(2*pi*lx*n/N+px1*ones(size(n)));
```

Algorytm LIDFT w części wstępnej zawiera deklarację wartości N , n , R , $M = NR$ i obliczenie x_n , $\text{sinc}x_n$, $\text{sinc}'x_n$ zgodnie z (4.14)–(4.16):

```
N=64; % N
n=-N/2:N/2-1; % n
R=8; % R
M=R*N; % M
x=pi*n./M; % x_n
sx=sin(x)./x; % sincx_n
sx(N/2+1)=1;
cx=(cos(x)-sx)./x; % sinc'x_n
cx(N/2+1)=0;
```

Pierwsza analiza sygnału wykonana jest dla okien czasowych h_n oraz g_n , stosując zależności (4.67), (4.68) dla $\mu = 0$ oraz (4.158), (4.159) dla okna trójkątnego w_n zdefiniowanego przez (1.34):

```
a=sx; % alpha_n
b=6*cx; % beta_n
w=1-abs(n)/(N/2); % w_n
```

```
h=a.*w.^2;           %  $h_n$ 
g=b.*w.^2;           %  $g_n$ 
```

Druga analiza sygnału wykonana jest dla okien czasowych h_n oraz g_n stosując zależności (4.98), (4.99) dla $\eta_1=1/2$, $\eta_2=1/6$ (rozdz. 4.13) oraz (4.158), (4.159) dla okna trójkątnego w_n zdefiniowanego przez (1.34). Wówczas definicje dla α_n , β_n są następujące:

```
a=(1-1/2)*cos(x)+1/2;           %  $\alpha_n$ 
b=-2*((1-1/6)*sin(x)+(1/6)*tan(x)); %  $\beta_n$ 
```

Następnie oblicza się ciągi z (4.172)–(4.174):

```
z0=zeros(1,N*(R-1)); i1=N/2+1:N; i2= 1:N/2;
z=a.*h; r=real(fft([z(i1), z0, z(i2)])); %  $r_m$ 
z=-j*b.*h; s=real(fft([z(i1), z0, z(i2)])); %  $s_m$ 
z=j*a.*g; p=real(fft([z(i1), z0, z(i2)])); %  $p_m$ 
z=b.*g; q=real(fft([z(i1), z0, z(i2)])); %  $q_m$ 
z=y.*h; u=fft([z(i1), z0, z(i2)]); %  $u_m$ 
z=j*y.*g; v=fft([z(i1), z0, z(i2)]); %  $v_m$ 
```

Wstępna lokalizacja składowych w widmie to wartości zbioru S :

```
k0=round(lx.*R); %  $S$ 
```

a uwzględniając składowe sprzężone – wartości zbioru S_1 zdefiniowanego przez (4.162):

```
k=[k0; flipud(M-k0)]; %  $S_1$ 
```

Macierze składowe równania (4.171) są wyznaczone poleceniami:

```
ik1=k*ones(size(k'))-ones(size(k))*k'; %  $i-k$ 
ik=rem((ik1+M),M)+1;
F=[r(ik), s(ik); p(ik), q(ik)]; %  $\mathbf{F}$ 
f=[u(k+1).'; v(k+1).']; %  $\mathbf{f}$ 
```

Rozwiązaniem równania (4.171) są wektory estymatorów \hat{B}_k , \hat{C}_k :

```
bc=F\f; P=length(bc)/2; %  $\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{f}$ 
B=bc(1:P); %  $\hat{B}_k$ 
C=bc(P+1:2*P); %  $\hat{C}_k$ 
```


Estymatory częstotliwości unormowanych $\hat{\lambda}_k$ wyznaczone są z zależności (4.160) i (4.168):

$$\text{clx} = (\text{k} + \text{real}(C ./ B)) / R; \quad \% \hat{\lambda}_k$$

a amplitudy z zależności $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$:

$$\text{cAx} = \text{abs}(2 * B); \quad \% \hat{A}_k$$

Natomiast fazy składowych wyznacza się (z dokładnością do całkowitej wielokrotności 2π) ze wzoru $A_k e^{j\varphi_k} = 2jB_k$ dla próbek y_n indeksowanych w zakresie $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$:

$$\text{cpx0} = \text{angle}(2 * j * B); \quad \% \hat{\varphi}_k \text{ dla } n = -N/2, \dots, N/2 - 1$$

lub z wzoru $A_k e^{j(\varphi_k + \pi\lambda_k)} = 2jB_k$ dla próbek y_n indeksowanych w zakresie $n = 0, \dots, N - 1$.

$$\text{cpx1} = \text{angle}(2 * j * B) - \pi * \text{clx}; \quad \% \hat{\varphi}_k \text{ dla } n = 0, \dots, N - 1$$

W przypadku iteracyjnego stosowania algorytmu LIDFT wstępną lokalizację składowych w widmie (zbiór S) dla kolejnej iteracji wyznacza się w następujący sposób:

$$\text{k0} = \text{k0} + \text{round}(\text{real}(C(1:P/2) ./ B(1:P/2))); \quad \% k + \text{round}(\hat{C}_k / \hat{B}_k)$$

Błąd względny amplitudy i błędy bezwzględne częstotliwości i fazy wyznacza się poleceniami:

$$\text{i3} = 1:P/2;$$

$$\text{dAx} = (\text{cAx}(\text{i3}) - \text{Ax}) ./ \text{Ax}; \quad \% \delta A_k = (\hat{A}_k - A_k) / A_k$$

$$\text{dlx} = \text{clx}(\text{i3}) - \text{lx}; \quad \% \Delta \lambda_k = \hat{\lambda}_k - \lambda_k$$

$$\text{dpx0} = \text{rem}(\text{cpx0}(\text{i3}) - \text{px0}, 2 * \pi); \quad \% \Delta \varphi_k = \hat{\varphi}_k - \varphi_k \text{ dla } n = -N/2, \dots, N/2 - 1$$

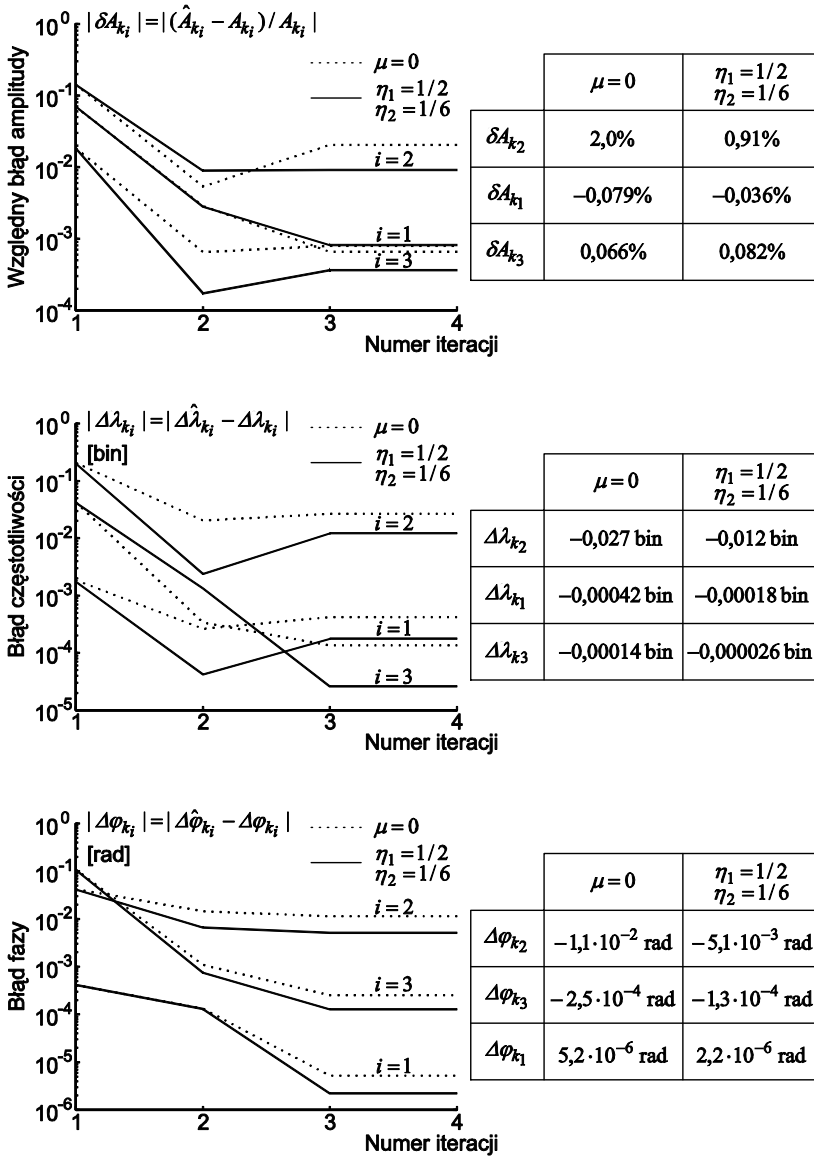
$$\text{dpx1} = \text{angle}(\exp(j * \text{cpx1}(\text{i3}))) - \text{angle}(\exp(j * \text{px1})); \quad \% \Delta \varphi_k, n = 0, \dots, N - 1$$

W praktyce wstępna lokalizacja składowych w widmie może być wyznaczona z mniejszą dokładnością. Zakładając w analizowanym przykładzie (podobnie jak w analizie z rozdz. 3.4), że sygnał zawiera trzy składowe o częstotliwościach unormowanych 10, 13 i 16 bin, powyższe obliczenia można przeprowadzić w sposób iteracyjny, uwzględniając wyniki końcowe w każdym etapie do uściślenia warunków po-

czątkowych powtórnych obliczeń. Wstępną lokalizację składowych koryguje się o wartości $(\text{round}(\text{Re}\gamma_k))/R$ aż do uzyskania warunku $|\text{Re}\gamma_k| \leq 0,5$ dla wszystkich składowych. Wyniki kolejnych obliczeń dla analizowanego przykładu sygnału złożonego z trzech składowych sinusoid przedstawia rysunek 4.32 dla dwóch przypadków: $\mu = 0$ (aproksymacja (4.67), (4.68)) oraz $\eta_1 = 1/2$, $\eta_2 = 1/6$ (aproksymacja (4.98), (4.99)). Wstępna lokalizacja składowych (zarówno dla $\mu = 0$, jak i dla $\eta_1 = 1/2$, $\eta_2 = 1/6$) dla pierwszej iteracji wynosi (w jednostkach [bin]) $\{80/R, 104/R, 128/R\}$, dla drugiej iteracji $\{82/R, 97/R, 124/R\}$, dla trzeciej – $\{82/R, 98/R, 123/R\}$ i dla czwartej jest taka sama jak dla trzeciej, co oznacza, że pełną dokładność metody (i spełnienie warunku $|\text{Re}\gamma_k| \leq 0,5$ dla wszystkich składowych) uzyskuje się po 3 iteracjach.

Dobór liczby składowych (3 sinusoidy) oraz wstępna ich lokalizacja w widmie (10, 13, 16 bin) wymaga informacji uzyskanej na podstawie dodatkowej analizy, jak np. analizy lokalnych maksimów widma DFT typowej dla metod interpolacji omówionych w rozdz. 2 lub informacji *a priori* o sygnale uzyskanej innymi metodami. Pierwsza z tych metod (wyznaczanie lokalnych maksimów DFT) jest możliwa do zastosowania w analizowanym przykładzie tylko dla pierwszej składowej, ponieważ dla drugiej i trzeciej składowej ta metoda wstępnej lokalizacji składowych w widmie jest niemożliwa z powodu wysokiego poziomu przecieku widma pochodzącego od pierwszej składowej. Można więc stwierdzić, że dodatkowe możliwości metody LIDFT estymacji składowych oscylacji „ukrytych” w przecieku widma pochodzącego od innych składowych oscylacji w widmie wymagają dodatkowej informacji dotyczącej wstępnej lokalizacji składowych estymowanych w widmie.

Wyniki dla $\mu = 0$ są zbliżone do uzyskanych w rozdz. 3.4 na rysunku 3.18, ale nie są z nimi identyczne. Inne są wartości błędów i mniejsza o 1 liczba iteracji, po których osiąga się warunek $|\text{Re}\gamma_k| \leq 0,5$, pomimo że analizowany jest ten sam sygnał oraz z wykorzystaniem tego samego okna czasowego, wartości R i $\mu = 0$. Jest tak, ponieważ uogólnienie metody LIDFT zaprezentowane w rozdz. 4.10 i wykorzystane w analizie sygnału w niniejszym rozdziale, różni się od metody z rozdz. 3.4 sposobem aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem. Mianowicie w rozdz. 3.4 wykorzystano aproksymację (4.92) z warunkiem $\lambda_k = (k - 1/2 + \gamma_k)/R$, a w rozdz. 4.10, 4.11 wykorzystano aproksymację (4.90) z warunkiem $\lambda_k = (k + \gamma_k)/R$. To z kolei oznacza, że w obu przypadkach estymacja wykonywana jest dla innej wartości γ charakterystyk z rysunków 3.4, 4.17, 4.20, 4.24, co skutkuje innymi wartościami błędów estymacji. Błędy maksymalne (dla najmniej korzystnej fazy oraz wartości γ w każdym z tych przypadków) są jednak takie same.



Rys. 4.32. Wyniki czterech iteracji uogólnionej wersji (równ. (4.171)–(4.175)) metody LIDFT dla sygnału wieloczęstotliwościowego (3 sinusoidy) zdefiniowanego w rozdz. 3.4 (tab. 3.1 i rys. 3.17) oraz uzyskane końcowe błędy estymacji amplitud, częstotliwości i faz składowych dla przypadku $\mu = 0$ z aproksymacją (4.67), (4.68) oraz dla $\eta_1 = 1/2, \eta_2 = 1/6$ z aproksymacją (4.98), (4.99)

Zastosowanie metody aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem z równania (4.90) zamiast (4.92) nie poprawia więc dokładności metody, ale upraszcza zależności matematyczne. Natomiast przyjęcie innych postaci funkcji α_n , β_n z rozdz. 4.6, 4.7 w miejsce (3.36) zastosowanej w rozdz. 3 (jest to przypadek (4.67), (4.68) dla $\mu = 0$) daje znacząco lepsze rezultaty, ponieważ dla $\eta_1 = 1/2$, $\eta_2 = 1/6$ (aproksymacja (4.98), (4.99)) błędy estymacji po końcowej iteracji są w większości ponad dwukrotnie mniejsze niż dla $\mu = 0$ (rys. 4.32).

Wyniki estymacji przykładowego sygnału nie pozwalają jednak na ich uogólnienie dla sygnałów o innych parametrach i muszą one być zweryfikowane w bardziej ogólnej analizie, w której uwzględnia się najbardziej niekorzystne warunki estymacji. Taka analiza jest przedstawiona w kolejnych rozdziałach 4.12–4.14.

4.12. Błędy systematyczne metody LIDFT dla sygnału złożonego z wielu oscylacji

Dla sygnału złożonego z P oscylacji zespolonych, każda o amplitudzie zespolonej B_k i częstotliwości unormowanej λ_k i warunkach (4.160)–(4.162) próbki sygnału y_n są określone przez (1.3), a zastosowanie równań (4.171)–(4.175) metody LIDFT pozwala na uzyskanie zamiast dokładnych wartości B_k , $C_k = B_k \gamma_k$ ich estymatory \hat{B}_k , \hat{C}_k . Biorąc pod uwagę (1.3) równanie (4.171) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & s_{i-k} \\ p_{i-k} & q_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} \hat{B}_k \\ \hat{C}_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} H_{i-k}(-\gamma_k) \\ G_{i-k}(-\gamma_k) \end{bmatrix}_{2P \times P} [B_k]_{P \times 1}, \quad i, k \in S_1 \quad (4.176)$$

w której $H_{i-k}(-\gamma_k)$, $G_{i-k}(-\gamma_k)$ są zdefiniowane przez:

$$H_m(\gamma) = H\left(\frac{m+\gamma}{R}\right), \quad G_m(\gamma) = G\left(\frac{m+\gamma}{R}\right), \quad |\gamma| \leq 1/2 \quad (4.177)$$

gdzie $m = i - k$ jest liczbą całkowitą, $\gamma = -\gamma_k$, a $H(\lambda)$ i $G(\lambda)$ są DtFT według (1.10) z N próbek okna h_n , g_n :

$$H(\lambda) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} h_n e^{-j2\pi n \lambda / N}, \quad G(\lambda) = j \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} g_n e^{-j2\pi n \lambda / N} \quad (4.178)$$

Wprowadzając wartości M_{mk} , N_{mk} zgodnie z równaniem:

$$\begin{bmatrix} r_{i-m} & s_{i-m} \\ p_{i-m} & q_{i-m} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} M_{mk} \\ N_{mk} \end{bmatrix}_{2P \times P} = \begin{bmatrix} H_{i-k}(-\gamma_k) \\ G_{i-k}(-\gamma_k) \end{bmatrix}_{2P \times P}, \quad i, m, k \in S_1 \quad (4.179)$$

otrzymuje się na podstawie (4.176) i (4.179):

$$\hat{B}_k = \sum_{i \in S_1} M_{ki} B_i, \quad \hat{C}_k = \sum_{i \in S_1} N_{ki} B_i \quad (4.180)$$

Z równania (4.180) dla \hat{B}_k można określić maksymalny (dla najmniej korzystnych wartości $\arg B_i$ oraz γ_i) względny błąd deterministyczny $\delta_d |B_k|$ wyznaczenia $|B_k|$ (przy przekształceniu wykorzystuje się wynikający z (4.180) fakt, że $M_{kk} \approx 1$ dla przypadku małego błędu systematycznego estymacji zarówno fazy $\arg B_k$, jak i modułu amplitudy $|B_k|$):

$$\begin{aligned} \delta_d |B_k| &= \max_{\substack{\gamma_i, \arg B_i \\ i \in S_1}} \left| \frac{|\hat{B}_k|}{|B_k|} - 1 \right| = \max_{\substack{\gamma_i, \arg B_i \\ i \in S_1}} \left| M_{kk} + \sum_{\substack{i \in S_1 \\ i \neq k}} M_{ki} \frac{B_i}{B_k} - 1 \right| \\ &= \max_{\substack{\gamma_i \\ i \in S_1}} |M_{kk} - 1| + \sum_{\substack{i \in S_1 \\ i \neq k}} \frac{|B_i|}{|B_k|} \max_{\substack{\gamma_i \\ i \in S_1}} |M_{ki}| = \delta_{dk} |B_k| + \sum_{\substack{i \in S_1 \\ i \neq k}} \delta_{di} |B_k| \end{aligned} \quad (4.181)$$

czyli

$$\delta_d |B_k| = \delta_{dk} |B_k| + \sum_{\substack{i \in S_1 \\ i \neq k}} \delta_{di} |B_k| \quad (4.182)$$

gdzie:

$$\delta_{dk} |B_k| = \max_{\substack{\gamma_i \\ i \in S_1}} |M_{kk} - 1| \quad (4.183)$$

$$\delta_{di} |B_k| = \sum_{\substack{i \in S_1 \\ i \neq k}} \frac{|B_i|}{|B_k|} \delta'_{di} |B_k|, \quad \delta'_{di} |B_k| = \max_{\substack{\gamma_i \\ i \in S_1}} |M_{ki}| \quad (4.184)$$

są składnikami błędu całkowitego (4.182). Pierwszy składnik (4.183) występuje, nawet gdy amplitudy pozostałych składowych są zerowe, pozostałe składniki są proporcjonalne do stosunku amplitudy danej oscylacji do amplitudy oscylacji estymowanej.

Wszystkie składniki są zgodnie z (4.179), zależne od odległości $(i-k)/R$ w widmie między oscylacjami (tj. odległości $(\lambda_i - \lambda_k)$ zaokrąglonej odpowiednio na osi częstotliwości unormowanej). Aby uzyskać warunek dużej dokładności metody, czyli $\delta_d |B_k| \ll 1$, musi być spełniony warunek $|M_{ki}| |B_i| / |B_k| \ll 1$. Wykorzystując ten warunek można wyznaczyć, podobnie jak dla $\delta_d |B_k|$, maksymalny (dla najmniej korzystnych wartości $\arg B_i$ oraz γ_i) bezwzględny błąd deterministyczny $\Delta_d \lambda_k$ wyznaczenia λ_k przez uwzględnienie (4.160), (4.168), (4.180) i odpowiedniego rozwinięcia w szereg Maclaurina względem zmiennych $M_{ki} B_i / B_k$:

$$\begin{aligned}
 \Delta_d \lambda_k &= \max_{\substack{\gamma_i, \arg B_i \\ i \in S_1}} \frac{1}{R} \left| \operatorname{Re} \frac{\hat{C}_k}{\hat{B}_k} - \gamma_k \right| = \max_{\substack{\gamma_i, \arg B_i \\ i \in S_1}} \frac{1}{R} \left| \operatorname{Re} \frac{\sum_{i \in S_1} N_{ki} B_i}{\sum_{i \in S_1} M_{ki} B_i} - \gamma_k \right| \\
 &= \max_{\substack{\gamma_i, \arg B_i \\ i \in S_1}} \frac{1}{R} \left| \operatorname{Re} \frac{N_{kk} + \sum_{i \in S_1, i \neq k} \frac{N_{ki}}{M_{ki}} \left(M_{ki} \frac{B_i}{B_k} \right)}{M_{kk} + \sum_{i \in S_1, i \neq k} \left(M_{ki} \frac{B_i}{B_k} \right)} - \gamma_k \right| \quad (4.185) \\
 &\cong \max_{\substack{\gamma_i, \arg B_i \\ i \in S_1}} \frac{1}{R} \left| \operatorname{Re} \frac{N_{kk}}{M_{kk}} - \gamma_k + \operatorname{Re} \sum_{i \in S_1, i \neq k} \frac{1}{M_{kk}} \left(N_{ki} - \frac{N_{kk}}{M_{kk}} M_{ki} \right) \right| \\
 &= \max_{\gamma_i, i \in S_1} \frac{1}{R} \left| \operatorname{Re} \frac{N_{kk}}{M_{kk}} - \gamma_k \right| + \sum_{i \in S_1, i \neq k} \frac{|B_i|}{|B_k|} \max_{\gamma_i, i \in S_1} \frac{1}{R} \left| \frac{1}{M_{kk}} \left(N_{ki} - \frac{N_{kk}}{M_{kk}} M_{ki} \right) \right|
 \end{aligned}$$

czyli

$$\Delta_d \lambda_k = \Delta_{dk} \lambda_k + \sum_{i \in S_1, i \neq k} \Delta_{di} \lambda_k \quad (4.186)$$

gdzie:

$$\Delta_{dk} \lambda_k = R^{-1} \max_{\gamma_i, i \in S_1} \left| \operatorname{Re} \frac{N_{kk}}{M_{kk}} - \gamma_k \right| \leq R^{-1} \max_{\gamma_i, i \in S_1} \left| \frac{N_{kk}}{M_{kk}} - \gamma_k \right| \quad (4.187)$$

$$\Delta_{di} \lambda_k = \sum_{i \in S_1, i \neq k} \frac{|B_i|}{|B_k|} \Delta'_{di} \lambda_k, \quad \Delta'_{di} \lambda_k = R^{-1} \max_{\gamma_i, i \in S_1} \left| \frac{1}{M_{kk}} \left(N_{ki} - \frac{N_{kk}}{M_{kk}} M_{ki} \right) \right| \quad (4.188)$$

są składnikami błędu całkowitego (4.186). Podobnie jak dla (4.182), (4.183) pierwszy składnik (4.187) występuje nawet gdy amplitudy pozostałych składowych są zerowe,

pozostałe składniki z (4.188) są proporcjonalne do stosunku amplitudy danej oscylacji do amplitudy oscylacji estymowanej.

Dla przypadków małych błędów systematycznych zachodzi $\delta_{dk} |B_k| \ll 1$, czyli $|M_{kk} - 1| \ll 1$, a więc można skorzystać z przybliżenia:

$$M_{kk}^{-1} = [1 + (M_{kk} - 1)]^{-1} = 1 - (M_{kk} - 1) + o(M_{kk} - 1) \approx 1 - (M_{kk} - 1) \quad (4.189)$$

które wykorzystane w (4.187), (4.188) i dla warunków:

$$\delta_{dk} |B_k| \ll 1, \quad \delta'_{di} |B_k| \ll 1, \quad \Delta_{dk} \lambda_k \ll 1, \quad \Delta'_{di} \lambda_k \ll 1 \quad (4.190)$$

prowadzą do zależności:

$$\Delta_{dk} \lambda_k \cong R^{-1} \max_{\gamma_i, i \in S_1} |N_{kk} - \gamma_k - (N_{kk} - \gamma_k + \gamma_k)(M_{kk} - 1)| \cong R^{-1} \max_{\gamma_i, i \in S_1} |(N_{kk} - \gamma_k) - \gamma_k (M_{kk} - 1)| \quad (4.191)$$

$$\Delta'_{di} \lambda_k = R^{-1} \max_{\gamma_i, i \in S_1} \left| \frac{N_{ki} (M_{kk} - 1) + N_{ki} - \gamma_k M_{ki} - (N_{kk} - \gamma_k) M_{ki}}{[1 + (M_{kk} - 1)]^2} \right| \cong R^{-1} \max_{\gamma_i, i \in S_1} |N_{ki} - \gamma_k M_{ki}| \quad (4.192)$$

Do wyznaczenia (4.182)–(4.184) oraz (4.186)–(4.188) lub uproszczeń (4.191), (4.192) potrzebne jest wyznaczenie N_{mk} , M_{mk} z równania (4.179). Prawą stronę tego równania można zapisać, uwzględniając (4.172)–(4.174), (4.177), (4.178) jako:

$$\begin{bmatrix} H_{i-k}(-\gamma_k) \\ G_{i-k}(-\gamma_k) \end{bmatrix}_{2P \times P} = \begin{bmatrix} r_{i-k} & s_{i-k} \\ p_{i-k} & q_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \Lambda_\gamma \end{bmatrix}_{2P \times P} - \begin{bmatrix} \Delta r_{i-k}(\gamma_k) & \Delta s_{i-k}(\gamma_k) \\ \Delta p_{i-k}(\gamma_k) & \Delta q_{i-k}(\gamma_k) \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \Lambda_\gamma \end{bmatrix}_{2P \times P} \quad i, k \in S_1 \quad (4.193)$$

gdzie $\Lambda_\gamma = [\gamma_k]$ jest macierzą diagonalną o elementach γ_k ($k \in S_1$), a wykorzystując notację z (4.172), (4.173) oraz $m = i - k$, nowe symbole wprowadzone w (4.193) są zdefiniowane jako:

$$\Delta r_m(\gamma_k) = \text{FFT}_m \{ \Delta \alpha_n(\gamma_k) h_n \}_{NR}, \quad \Delta s_m(\gamma_k) = -j \text{FFT}_m \{ \Delta \beta_n(\gamma_k) h_n \}_{NR} \quad (4.194)$$

$$\Delta p_m(\gamma_k) = j \text{FFT}_m \{ \Delta \alpha_n(\gamma_k) g_n \}_{NR}, \quad \Delta q_m(\gamma_k) = \text{FFT}_m \{ \Delta \beta_n(\gamma_k) g_n \}_{NR} \quad (4.195)$$

$$\Delta \alpha_n(\gamma_k) = \alpha_n - \cos(2\gamma_k x_n), \quad \Delta \beta_n(\gamma_k) = \beta_n + \gamma_k^{-1} \sin(2\gamma_k x_n) \quad (4.196)$$

Po zastosowaniu (4.193) w (4.179) otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} r_{i-m} & s_{i-m} \\ p_{i-m} & q_{i-m} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} [M_{mk}] - \mathbf{I} \\ [N_{mk}] - \mathbf{\Lambda}_\gamma \end{bmatrix}_{2P \times P} = - \begin{bmatrix} \Delta r_{i-k}(\gamma_k) & \Delta s_{i-k}(\gamma_k) \\ \Delta p_{i-k}(\gamma_k) & \Delta q_{i-k}(\gamma_k) \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{\Lambda}_\gamma \end{bmatrix}_{2P \times P} \\ i, m, k \in S_1 \quad (4.197)$$

Zależności (4.182)–(4.184) oraz (4.186)–(4.188) dowodzą, że błąd całkowity estymacji parametrów danej oscylacji składowej sygnału wieloczęstotliwościowego w metodzie LIDFT jest sumą błędów podstawowych dla tej składowej i błędów pochodzących od pozostałych oscylacji w widmie. Przedstawione zależności określają sposób sumowania tych błędów dla najmniej korzystnych warunków pomiaru (tj. wartości fazy i położenia każdej ze składowych w widmie) w funkcji odpowiednio zaokrąglonej odległości między składowymi. Taka charakterystyka błędów estymacji pozwala na określenie ich podstawowych właściwości na podstawie analizy przypadku sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych, co jest przedstawione w rozdz. 4.13. Do wyznaczenia koniecznych do tego celu wartości N_{mk} , M_{mk} używa się równania (4.197).

4.13. Błędy systematyczne metody LIDFT dla sygnału złożonego z dwóch oscylacji

Założmy, że sygnał składa się z dwóch oscylacji zespolonych $B_k e^{j2\pi n \lambda_k / N}$, $B_i e^{j2\pi n \lambda_i / N}$, gdzie $\lambda_i > \lambda_k$, $\lambda_k = (k + \gamma_k) / R$, $\lambda_i = (i + \gamma_i) / R$, $|\gamma_i| \leq 1/2$, $|\gamma_k| \leq 1/2$, liczby i , k , $\tau = (i - k)$ są wartościami całkowitymi, a $S_1 = \{k, i\}$. Równanie (4.197) ma wówczas postać:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_{-\tau} & s_0 & s_{-\tau} \\ r_\tau & r_0 & s_\tau & s_0 \\ p_0 & p_{-\tau} & q_0 & q_{-\tau} \\ p_\tau & p_0 & q_\tau & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{kk} - 1 & M_{ki} \\ M_{ik} & M_{ii} - 1 \\ N_{kk} - \gamma_k & N_{ki} \\ N_{ik} & N_{ii} - \gamma_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta r_0(\gamma_k) & \Delta r_{-\tau}(\gamma_i) & \Delta s_0(\gamma_k) & \Delta s_{-\tau}(\gamma_i) \\ \Delta r_\tau(\gamma_k) & \Delta r_0(\gamma_i) & \Delta s_\tau(\gamma_k) & \Delta s_0(\gamma_i) \\ \Delta p_0(\gamma_k) & \Delta p_{-\tau}(\gamma_i) & \Delta q_0(\gamma_k) & \Delta q_{-\tau}(\gamma_i) \\ \Delta p_\tau(\gamma_k) & \Delta p_0(\gamma_i) & \Delta q_\tau(\gamma_k) & \Delta q_0(\gamma_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_i \end{bmatrix} \\ (4.198)$$

W dalszych analizach przyjmuje się dwa założenia:

- funkcja okna h_n jest parzysta (względem n), czyli $h_n = h_{-n}$, co jest prawdziwe dla wszystkich okien czasowych stosowanych w analizie DFT [94],

- początkowa próbka okna h_n jest zerowa: $h_{-N/2} = 0$, co jest spełniona dla większości okien czasowych; do nielicznych okien, które nie spełniają tego warunku należą okna z bazą kosinusową niespełniające warunku (1.77), a więc są to okna o spadku listków bocznych zaledwie 6 dB/oct – np. okno Hamminga.

Parzystość h_n oznacza, uwzględniając (4.158), (4.159) oraz postać funkcji α_n , β_n , że g_n jest funkcją nieparzystą. Z tych założeń wynika na podstawie (4.178) parzystość (względem λ) funkcji $H(\lambda)$ i nieparzystość $G(\lambda)$, a uwzględniając (4.177):

$$H_{-\tau}(-\gamma) = H_{\tau}(\gamma), \quad G_{-\tau}(-\gamma) = -G_{\tau}(\gamma) \quad (4.199)$$

Z warunku $h_{-N/2} = 0$ wynika $g_{-N/2} = 0$. Stąd i z parzystości h_n i nieparzystości g_n wynika, że współczynniki r_m , s_m , p_m , q_m z (4.172), (4.173) są rzeczywiste i spełniają następujące warunki:

$$r_{-\tau} = r_{\tau}, \quad s_{-\tau} = -s_{\tau}, \quad p_{-\tau} = -p_{\tau}, \quad q_{-\tau} = q_{\tau}, \quad s_0 = p_0 = 0 \quad (4.200)$$

Analogiczne warunki są spełnione również dla (4.194), (4.195):

$$\Delta r_{-\tau} = \Delta r_{\tau}, \quad \Delta s_{-\tau} = -\Delta s_{\tau}, \quad \Delta p_{-\tau} = -\Delta p_{\tau}, \quad \Delta q_{-\tau} = \Delta q_{\tau}, \quad \Delta s_0 = \Delta p_0 = 0 \quad (4.201)$$

Równanie (4.198), uwzględniając (4.200), (4.201), ma postać:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_{\tau} & 0 & -s_{\tau} \\ r_{\tau} & r_0 & s_{\tau} & 0 \\ 0 & -p_{\tau} & q_0 & q_{\tau} \\ p_{\tau} & 0 & q_{\tau} & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{kk}-1 & M_{ki} \\ M_{ik} & M_{ii}-1 \\ N_{kk}-\gamma_k & N_{ki} \\ N_{ik} & N_{ii}-\gamma_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta r_0(\gamma_k) & \Delta r_{\tau}(\gamma_i) & 0 & -\Delta s_{\tau}(\gamma_i) \\ \Delta r_{\tau}(\gamma_k) & \Delta r_0(\gamma_i) & \Delta s_{\tau}(\gamma_k) & 0 \\ 0 & -\Delta p_{\tau}(\gamma_i) & \Delta q_0(\gamma_k) & \Delta q_{\tau}(\gamma_i) \\ \Delta p_{\tau}(\gamma_k) & 0 & \Delta q_{\tau}(\gamma_k) & \Delta q_0(\gamma_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_i \end{bmatrix} \quad (4.202)$$

W celu skrócenia zapisu kolejnych przekształceń wprowadzamy 18 symboli: a, b, \dots jako:

$$a = r_0 - r_{\tau}, \quad b = -s_{\tau}, \quad c = p_{\tau}, \quad d = q_0 + q_{\tau}, \quad e = r_0 + r_{\tau}, \quad f = q_0 - q_{\tau} \quad (4.203)$$

$$u = \gamma_k \Delta s_{\tau}(\gamma_k), \quad v = \Delta r_0(\gamma_k) - \Delta r_{\tau}(\gamma_k), \quad w = \Delta r_0(\gamma_k) + \Delta r_{\tau}(\gamma_k) \quad (4.204)$$

$$u' = \gamma_i \Delta s_{\tau}(\gamma_i), \quad v' = \Delta r_0(\gamma_i) - \Delta r_{\tau}(\gamma_i), \quad w' = \Delta r_0(\gamma_i) + \Delta r_{\tau}(\gamma_i) \quad (4.205)$$

$$x = \Delta p_{\tau}(\gamma_k), \quad y = \gamma_k (\Delta q_0(\gamma_k) - \Delta q_{\tau}(\gamma_k)), \quad z = \gamma_k (\Delta q_0(\gamma_k) + \Delta q_{\tau}(\gamma_k)) \quad (4.206)$$

$$x' = \Delta p_{\tau}(\gamma_i), \quad y' = \gamma_i (\Delta q_0(\gamma_i) - \Delta q_{\tau}(\gamma_i)), \quad z' = \gamma_i (\Delta q_0(\gamma_i) + \Delta q_{\tau}(\gamma_i)) \quad (4.207)$$

Po przekształceniach (4.202) odpowiadających sumowaniu odpowiednich kolumn i wierszy oraz uwzględnieniu (4.203)–(4.207):

$$\begin{bmatrix} e & a & b & -b \\ e & -a & -b & -b \\ -c & c & d & f \\ c & c & d & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1)+M_{ik} & M_{ki}+(M_{ii}-1) \\ (M_{kk}-1)-M_{ik} & M_{ki}-(M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k)+N_{ik} & N_{ki}+(N_{ii}-\gamma_i) \\ (N_{kk}-\gamma_k)-N_{ik} & N_{ki}-(N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} w+v & w'-v'-2u' \\ w-v+2u & w'+v' \\ y+z & z'-y'-2x' \\ z-y+2x & z'+y' \end{bmatrix} \quad (4.208)$$

$$\begin{bmatrix} e & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ -c & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1)+M_{ik} & M_{ki}+(M_{ii}-1) \\ (M_{kk}-1)-M_{ik} & M_{ki}-(M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k)+N_{ik} & N_{ki}+(N_{ii}-\gamma_i) \\ (N_{kk}-\gamma_k)-N_{ik} & N_{ki}-(N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} w+u & w'-u' \\ v-u & -v'-u' \\ z+x & z'-x' \\ y-x & -y'-x' \end{bmatrix} \quad (4.209)$$

otrzymuje się, pomijając elementy zerowe w (4.209), w miejsce (4.202) układ dwóch równań:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1)-M_{ik} & M_{ki}-(M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k)+N_{ik} & N_{ki}+(N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v-u & -v'-u' \\ z+x & z'-x' \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

$$\begin{bmatrix} e & -b \\ -c & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1)+M_{ik} & M_{ki}+(M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k)-N_{ik} & N_{ki}-(N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} w+u & w'-u' \\ y-x & -y'-x' \end{bmatrix} \quad (4.211)$$

które po pomnożeniu lewostronnie przez odwrotność odpowiednich macierzy i zsumowaniu stronami dają równanie:

$$2\mathbf{M} = -\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} v-u & -v'-u' \\ z+x & z'-x' \end{bmatrix} - \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} w+u & w'-u' \\ y-x & -y'-x' \end{bmatrix} \quad (4.212)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (M_{kk}-1) & M_{ki} \\ (N_{kk}-\gamma_k) & N_{ki} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} e & -b \\ -c & f \end{bmatrix} \quad (4.213)$$

Wykorzystując (4.183), (4.184), uproszczenia (4.191), (4.192) oraz (4.213) można składowe $\delta_{dk}|B_k|$, $\delta'_{di}|B_k|$, $\Delta_{dk}\lambda_k$, $\Delta'_{di}\lambda_k$ błędów estymacji dla przypadku sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych, zapisać w postaci jednego równania macierzewego:

$$\mathbf{D} = \max_{\gamma_k, \gamma_i} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma_k/R & 1/R \end{bmatrix} \mathbf{M} \right] \quad (4.214)$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{dk}|B_k| & \delta'_{di}|B_k| \\ \Delta_{dk}\lambda_k & \Delta'_{di}\lambda_k \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

jest macierzą wyznaczanych składowych błędów estymacji, $|\mathbf{X}|$ jest modułem macierzy (tj. macierzą modułów każdego z elementów macierzy \mathbf{X}), a błędy całkowite (4.182) i (4.186) dla takiego sygnału (złożonego z dwóch oscylacji) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \delta_d |B_k| \\ \Delta_d \lambda_k \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} 1 \\ |B_i| / |B_k| \end{bmatrix} \quad (4.216)$$

która wyznacza błędy estymacji modułu amplitudy i częstotliwości unormowanej składowej oznaczonej indeksem k w zależności od stosunku amplitudy składowej oznaczonej indeksem i do amplitudy wyznaczonej ($|B_i| / |B_k|$).

Z równania (4.212) po odpowiednich przekształceniach otrzymuje się zależności niemacierzowe:

$$M_{kk} - 1 = \frac{1}{2} \left[\frac{b(x-y) - f(u+w)}{ef - bc} + \frac{d(u-v) + b(x+z)}{ad - bc} \right] \quad (4.217)$$

$$M_{ki} = \frac{1}{2} \left[\frac{b(x' + y') + f(u' - w')}{ef - bc} + \frac{d(u' + v') + b(z' - x')}{ad - bc} \right] \quad (4.218)$$

$$N_{kk} - \gamma_k = \frac{1}{2} \left[\frac{e(x-y) - c(u+w)}{ef - bc} + \frac{c(v-u) - a(x+z)}{ad - bc} \right] \quad (4.219)$$

$$N_{ki} = \frac{1}{2} \left[\frac{e(x' + y') + c(u' - w')}{ef - bc} + \frac{a(x' - z') - c(u' + v')}{ad - bc} \right] \quad (4.220)$$

Na podstawie (4.172)–(4.174), (4.194)–(4.196), (4.203)–(4.207), parzystości h_n , α_n i nieparzystości g_n , β_n uzyskuje się dla zakresu $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$:

$$a = 2 \sum_n h_n \alpha_n \sin^2 \tau x_n, \quad b = 2 \sum_n h_n \beta_n \sin \tau x_n \cos \tau x_n \quad (4.221)$$

$$c = 2 \sum_n g_n \alpha_n \sin \tau x_n \cos \tau x_n, \quad d = 2 \sum_n g_n \beta_n \cos^2 \tau x_n \quad (4.222)$$

$$e = 2 \sum_n h_n \alpha_n \cos^2 \tau x_n, \quad f = 2 \sum_n g_n \beta_n \sin^2 \tau x_n \quad (4.223)$$

$$u = -2 \sum_n h_n (\gamma_k \beta_n + \sin 2\gamma_k x_n) \sin \tau x_n \cos \tau x_n \quad (4.224)$$

$$v = 2 \sum_n h_n (\alpha_n - \cos 2\gamma_k x_n) \sin^2 \tau x_n \quad (4.225)$$

$$w = 2 \sum_n h_n (\alpha_n - \cos 2\gamma_k x_n) \cos^2 \tau x_n \quad (4.226)$$

$$x = 2 \sum_n g_n (\alpha_n - \cos 2\gamma_k x_n) \sin \tau x_n \cos \tau x_n \quad (4.227)$$

$$y = 2 \sum_n g_n (\gamma_k \beta_n + \sin 2\gamma_k x_n) \sin^2 \tau x_n \quad (4.228)$$

$$z = 2 \sum_n g_n (\gamma_k \beta_n + \sin 2\gamma_k x_n) \cos^2 \tau x_n \quad (4.229)$$

Zależności dla u' , v' , w' , x' , y' , z' są wyznaczone przez (4.224)–(4.229) po podstawieniu γ_i w miejsce γ_k . Podane zależności można przedstawić w postaci macierzowej:

$$u = -2\mathbf{h}\Lambda_s\Lambda_c\mathbf{d}_i, \quad u' = -2\mathbf{h}\Lambda_s\Lambda_c\mathbf{d}'_i, \quad v = 2\mathbf{h}\Lambda_s^2\mathbf{d}'_r, \quad v' = 2\mathbf{h}\Lambda_s^2\mathbf{d}'_r \quad (4.230)$$

$$w = 2\mathbf{h}\Lambda_c^2\mathbf{d}'_r, \quad w' = 2\mathbf{h}\Lambda_c^2\mathbf{d}'_r, \quad x = 2\mathbf{g}\Lambda_s\Lambda_c\mathbf{d}'_r, \quad x' = 2\mathbf{g}\Lambda_s\Lambda_c\mathbf{d}'_r \quad (4.231)$$

$$y = 2\mathbf{g}\Lambda_s^2\mathbf{d}'_i, \quad y' = 2\mathbf{g}\Lambda_s^2\mathbf{d}'_i, \quad z = 2\mathbf{g}\Lambda_c^2\mathbf{d}'_i, \quad z' = 2\mathbf{g}\Lambda_c^2\mathbf{d}'_i \quad (4.232)$$

gdzie:

$$\Lambda_s = [\sin \tau x_n], \quad \Lambda_c = [\cos \tau x_n], \quad (n = -N/2, \dots, N/2 - 1) \quad (4.233)$$

są macierzami diagonalnymi, wektory \mathbf{h} , \mathbf{g} są utworzone na bazie wartości h_n , g_n , a wektory \mathbf{d}_r , \mathbf{d}_i , \mathbf{d}'_r , \mathbf{d}'_i są utworzone na bazie błędów Δ_r i Δ_i zdefiniowanych przez (4.106), (4.111):

$$\mathbf{h} = [h_{-N/2}, \dots, h_{N/2-1}]^T, \quad \mathbf{g} = [g_{-N/2}, \dots, g_{N/2-1}]^T \quad (4.234)$$

$$\mathbf{d}_r = [\Delta_{r(-N/2)}(\gamma_k), \dots, \Delta_{r(N/2-1)}(\gamma_k)]^T, \quad \Delta_{rn}(\gamma) = \alpha_n - \cos(2\gamma x_n) \quad (4.235)$$

$$\mathbf{d}_i = [\Delta_{i(-N/2)}(\gamma_k), \dots, \Delta_{i(N/2-1)}(\gamma_k)]^T, \quad \Delta_{in}(\gamma) = \gamma\beta_n + \sin(2\gamma x_n) \quad (4.236)$$

$$\mathbf{d}'_r = [\Delta_{r(-N/2)}(\gamma_i), \dots, \Delta_{r(N/2-1)}(\gamma_i)]^T, \quad \mathbf{d}'_i = [\Delta_{i(-N/2)}(\gamma_i), \dots, \Delta_{i(N/2-1)}(\gamma_i)]^T \quad (4.237)$$

Po uwzględnieniu wprowadzonych oznaczeń, równanie (4.212) można zapisać jako:

$$2\mathbf{M} = -\mathbf{K}_1\mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_2\mathbf{d}_2 \quad (4.238)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{g} \\ \mathbf{h} & \mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_s^2 & \Lambda_s\Lambda_c \\ \Lambda_s\Lambda_c & \Lambda_c^2 \end{bmatrix} + \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{g} \\ \mathbf{h} & \mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_c^2 & -\Lambda_s\Lambda_c \\ -\Lambda_s\Lambda_c & -\Lambda_s^2 \end{bmatrix} \quad (4.239)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{g} \\ \mathbf{h} & \mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Lambda_s^2 & \Lambda_s \Lambda_c \\ \Lambda_s \Lambda_c & \Lambda_c^2 \end{bmatrix} + \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & \mathbf{g} \\ \mathbf{h} & \mathbf{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_c^2 & \Lambda_s \Lambda_c \\ -\Lambda_s \Lambda_c & -\Lambda_s^2 \end{bmatrix} \quad (4.240)$$

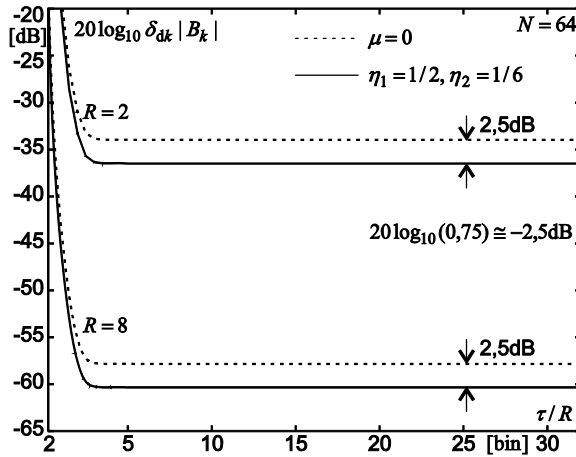
$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d}'_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{d}'_i \end{bmatrix} \quad (4.241)$$

Błędy całkowite estymacji (4.215), (4.216) są, po uwzględnieniu (4.214) i (4.238), sumą ważoną elementów macierzy \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 z (4.241), czyli, na podstawie (4.235)–(4.237), błędów $\Delta_{rn}(\gamma)$, $\Delta_{in}(\gamma)$ dla $\gamma = \gamma_k, \gamma_i$. Błędy $\Delta_{rn}(\gamma)$, $\Delta_{in}(\gamma)$, zgodnie z (4.235), (4.236) oraz (4.106), (4.111), to błędy aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem, a analiza najmniej korzystnego przypadku lokalizacji składowych w widmie względem wartości γ_k , γ_i odpowiada analizie przypadków błędów $\max_\gamma |\Delta_{rn}(\gamma)|$, $\max_\gamma |\Delta_{in}(\gamma)|$. Można więc wykorzystać wyniki rozdz. 4.7 dotyczącego doboru parametrów η_1 , η_2 aproksymacji (4.90), (4.98), (4.99), dla których błędy $\max_\gamma |\Delta_{rn}(\gamma)|$, $\max_\gamma |\Delta_{in}(\gamma)|$ są możliwie najmniejsze. Ponieważ jednak wagi sumy ważonej elementów \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 z (4.241), a więc elementy macierzy \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 z (4.239), (4.240) również zależą od η_1 , η_2 (bo macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} występujące w definicjach \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 i określone przez (4.213), (4.221)–(4.223) zależą od α_n , β_n , a więc według (4.98), (4.99) również od η_1 , η_2), to dokładne wyznaczenie parametrów η_1 , η_2 minimalizujących błędy całkowite (4.215), (4.216) estymacji częstotliwości i amplitudy składowej oscylacji wymaga dodatkowych analiz. Analizy z rozdz. 4.7 wskazują, że optymalnych wartości η_1 , η_2 należy szukać w zakresie trójkąta najkorzystniejszych wartości z rysunków 4.29, 4.31.

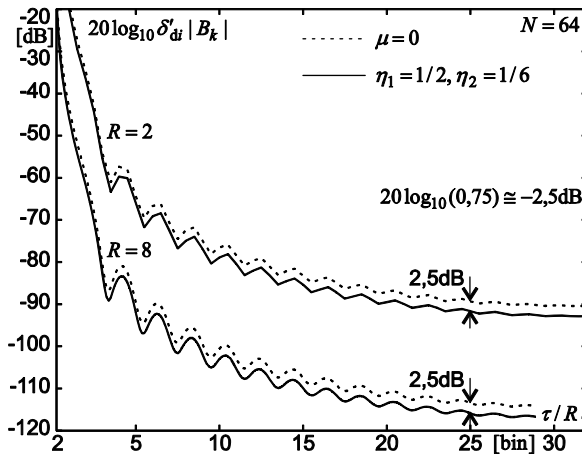
Obliczenia numeryczne, przeprowadzone dla przypadku dwóch oscylacji zespolonych i z użyciem (4.158), (4.159) z oknem trójkątnym jako w_n oraz zastosowaniem zależności wyprowadzonych w rozdz. 4.13, wykazały, że rozwiązaniem bliskim optymalnemu jest przyjęcie $\eta_1 = 1/2$ oraz $\eta_2 = 1/6$, co odpowiada punktowi trójkąta z rysunku 4.31, dla którego $k_r = 1$ (wartość minimalna) oraz $k_i = k_a \cong 2$.

Zgodnie z (4.182)–(4.184) błąd całkowity $\delta_d |B_k|$ estymacji amplitudy $|B_k|$, dla przypadku występowania w widmie składowej zakłócającej o amplitudzie $|B_i|$, jest sumą dwóch składników. Pierwszy z nich to błąd $\delta_{dk} |B_k|$ z (4.183), którego wartość uzyskana ze wspomnianych symulacji w funkcji odległości τ/R bin między składowymi w widmie (τ jest zaokrągloną do wartości całkowitej liczbą $R|\lambda_k - \lambda_i|$) jest przedstawiona na rysunku 4.33 dla dwóch przypadków: aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem z pierwszej wersji metody LIDFT dla $\mu = 0$ oraz aproksymacji

z rozdz. 4.6, 4.7 z $\eta_1 = 1/2$, $\eta_2 = 1/6$, która zmniejsza składową $\delta_{dk} |B_k|$ o ok. 25% (2,5 dB) – rysunek 4.33. Składnik $\delta_{dk} |B_k|$ jest najważniejszym składnikiem całkowitego błędu estymacji amplitudy, bo występuje on nawet, gdy $|B_i| = 0$. Drugą składową całkowitego błędu estymacji amplitudy otrzymujemy z (4.184), mnożąc przez

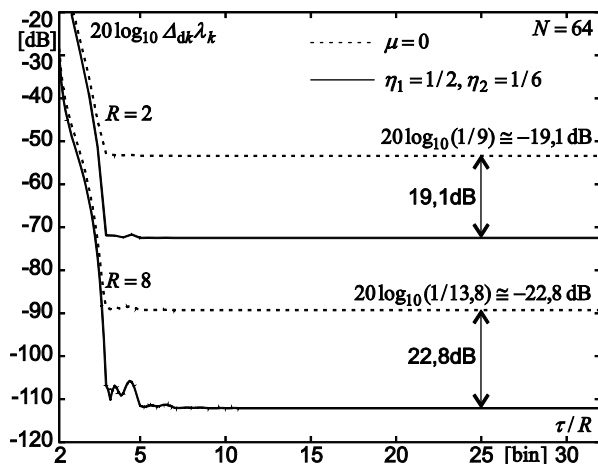


Rys. 4.33. Błąd $\delta_{dk} |B_k|$ z (4.182), (4.183) w funkcji τ / R przy estymacji amplitudy $|B_k|$ w metodzie LIDFT dla sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych

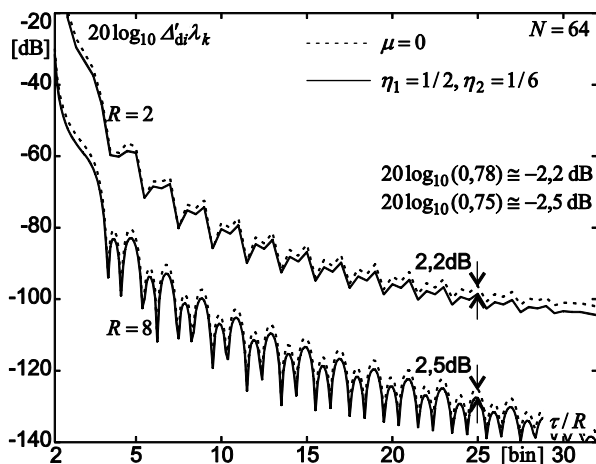


Rys. 4.34. Błąd $\delta'_{di} |B_k|$ z (4.182), (4.184) w funkcji τ / R przy estymacji amplitudy $|B_k|$ w metodzie LIDFT dla sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych

$|B_i|/|B_k|$ (zwykle znacznie mniejszego od 1) wartość $\delta'_{di}|B_k|$ przedstawioną w funkcji τ/R na rysunku 4.34. Tu również uzyskuje się zmniejszenie o 25% wartości błędu estymacji w stosunku do aproksymacji z $\mu=0$. Dla obu składowych



Rys. 4.35. Błąd $\Delta_{dk}\lambda_k$ z (4.186), (4.187) w funkcji τ/R przy estymacji częstotliwości λ_k w metodzie LIDFT dla sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych



Rys. 4.36. Błąd $\Delta'_{di}\lambda_k$ z (4.186), (4.188) w funkcji τ/R przy estymacji częstotliwości λ_k w metodzie LIDFT dla sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych

($\delta_{dk} | B_k |$ oraz $\delta'_{di} | B_k |$) współczynnik zmniejszenia błędu (o 25%) jest podobny dla różnych wartości R , z dokładnością wynikającą z rozdzielczości przedstawionych wykresów.

Analogiczna analiza dla błędu estymacji częstotliwości z (4.186)–(4.188) również daje podobne wnioski (rys. 4.35 i 4.36) z tą jednak różnicą, że zmniejszenie składowej $\Delta_{dk}\lambda_k$ z (4.187) błędu całkowitego (4.186) jest aż ok. 9-krotne (o ponad 19 dB) dla $R = 2$ i aż niespełna 14-krotne (o ponad 22 dB) dla $R = 8$ (rys. 4.35). Podkreślimy, że jest to najważniejsza składowa błędu całkowitego (4.186), występująca nawet gdy $B_i = 0$. Dla drugiego składnika $\Delta'_{di}\lambda_k$ (który należy jeszcze pomnożyć przez $|B_i|/|B_k|$ uzyskując w ten sposób $\Delta_{di}\lambda_k$ z (4.188)) zmniejszenie błędu jest o ok. 22–25% (2,2–2,5 dB) – rysunek 4.36.

Podsumowując wyniki niniejszego rozdziału, należy stwierdzić, że przedstawione wykresy z rysunków 4.33–4.36 pokazują znaczące zmniejszenie błędów systematycznych metody LIDFT zarówno przy estymacji amplitudy jak i częstotliwości unormowanej w stosunku do pierwszej wersji metody LIDFT oraz szczegółowe potwierdzenie wniosków z rozdz. 3.4, że zwiększenie liczby uzupełnianych zer w metodzie LIDFT zmniejsza wszystkie składowe całkowitych błędów estymacji amplitudy i częstotliwości.

Do pełnej oceny dokładności estymacji metody LIDFT istotne jest wyznaczenie jej właściwości statystycznych, tzn. składowych błędów estymacji spowodowanych szumem w sygnale (rozd. 4.14).

4.14. Błędy metody LIDFT dla sygnału zakłóconego szumem

Podstawowe właściwości metody LIDFT w estymacji sygnału wieloczęstotliwościowego w obecności szumu można wyznaczyć, wykorzystując wyniki z rozdz. 1.6 (model szumu) i rozdz. 2.2 (ograniczenie Craméra–Rao).

Zakładamy więc, że próbki sygnału \hat{y}_n zawierają sygnał niezakłócony y_n i szum addytywny Δy_n zgodnie z (1.99), a model szumu jest opisany przez (1.100)–(1.102).

Po uwzględnieniu (1.3), (1.99), (4.177), (4.178) równanie (4.171) można zapisać w postaci będącej uogólnieniem wzoru (4.176) na przypadek sygnału zakłóconego szumem:

$$\begin{bmatrix} r_{i-k} & s_{i-k} \\ p_{i-k} & q_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} \hat{B}_k \\ \hat{C}_k \end{bmatrix}_{2P \times 1} = \begin{bmatrix} H_{i-k}(-\gamma_k) \\ G_{i-k}(-\gamma_k) \end{bmatrix}_{2P \times P} [B_k]_{P \times 1} + \begin{bmatrix} B_k^{-1} \Delta H_{i-k} \\ B_k^{-1} \Delta G_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times P} [B_k]_{P \times 1}$$

$i, k \in S_1$ (4.242)

gdzie ΔH_{i-k} , ΔG_{i-k} są próbkami widma realizacji szumu pomnożonego przez okna czasowe h_n , g_n i R -krotnie uzupełnionego zerami:

$$\Delta H_m = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \Delta y_n h_n e^{-j2\pi nm/NR}, \quad \Delta G_m = j \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \Delta y_n g_n e^{-j2\pi nm/NR} \quad (4.243)$$

Po wprowadzeniu wartości M_{mk} , N_{mk} zgodnie z równaniem (uogólniając w ten sposób (4.179)):

$$\begin{bmatrix} r_{i-m} & s_{i-m} \\ p_{i-m} & q_{i-m} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} M_{mk} \\ N_{mk} \end{bmatrix}_{2P \times P} = \begin{bmatrix} H_{i-k}(-\gamma_k) \\ G_{i-k}(-\gamma_k) \end{bmatrix}_{2P \times P} + \begin{bmatrix} B_k^{-1} \Delta H_{i-k} \\ B_k^{-1} \Delta G_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times P}, \quad i, m, k \in S_1 \quad (4.244)$$

otrzymujemy na podstawie (4.242) i (4.244) równanie (4.180), które, przez (4.244), uwzględnia wpływ szumu na błędy estymacji. Błędy te można wyznaczyć, po obliczeniu M_{mk} , N_{mk} z (4.244), na podstawie (4.181)–(4.188). Zależności te oraz (4.244) wskazują, że błąd estymacji jest sumą błędu systematycznego (omówionego w rozdz. 4.12, 4.13) i błędu losowego, spowodowanego szumem w sygnale mierzonym. Dlatego można wyznaczyć parametry samego błędu losowego zakładając, że błąd systematyczny jest zerowy. To oznacza, że można uwzględnić przekształcenia pierwszego składnika prawej strony równania (4.244) zawarte w (4.193)–(4.197), zakładając $\Delta \alpha_n = 0$, $\Delta \beta_n = 0$ w (4.194), (4.195). W ten sposób z (4.244) uzyskuje się zależność:

$$\begin{bmatrix} r_{i-m} & s_{i-m} \\ p_{i-m} & q_{i-m} \end{bmatrix}_{2P \times 2P} \begin{bmatrix} [M_{mk}] - \mathbf{I} \\ [N_{mk}] - \Lambda_\gamma \end{bmatrix}_{2P \times P} = \begin{bmatrix} B_k^{-1} \Delta H_{i-k} \\ B_k^{-1} \Delta G_{i-k} \end{bmatrix}_{2P \times P}, \quad i, m, k \in S_1 \quad (4.245)$$

Podobnie jak w rozdz. 4.13 zakładamy w dalszej analizie przypadek sygnału złożonego z dwóch oscylacji zespolonych z szumem addytywnym. Dokonując przekształceń zawartych w (4.198)–(4.208) w odniesieniu do (4.245), uzyskuje się zależność:

$$\begin{bmatrix} e & a & b & -b \\ e & -a & -b & -b \\ -c & c & d & f \\ c & c & d & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1) + M_{ik} & M_{ki} + (M_{ii}-1) \\ (M_{kk}-1) - M_{ik} & M_{ki} - (M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k) + N_{ik} & N_{ki} + (N_{ii}-\gamma_i) \\ (N_{kk}-\gamma_k) - N_{ik} & N_{ki} - (N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a + \Delta b & \Delta c + \Delta d \\ \Delta a - \Delta b & \Delta c - \Delta d \\ \Delta e + \Delta f & \Delta u + \Delta v \\ \Delta e - \Delta f & \Delta u - \Delta v \end{bmatrix} \quad (4.246)$$

gdzie:

$$\Delta a = B_k^{-1}(\Delta H_0 + \Delta H_\tau), \quad \Delta b = B_k^{-1}(\Delta H_0 - \Delta H_\tau), \quad \Delta c = B_i^{-1}(\Delta H_0 + \Delta H_{-\tau}) \quad (4.247)$$

$$\Delta d = B_i^{-1}(\Delta H_0 - \Delta H_{-\tau}), \quad \Delta e = B_k^{-1}(\Delta G_0 + \Delta G_\tau), \quad \Delta f = B_k^{-1}(\Delta G_0 - \Delta G_\tau) \quad (4.248)$$

$$\Delta u = B_i^{-1}(\Delta G_0 + \Delta G_{-\tau}), \quad \Delta v = B_i^{-1}(\Delta G_0 - \Delta G_{-\tau}) \quad (4.249)$$

Po przekształceniach (4.246) odpowiadających sumowaniu odpowiednich wierszy:

$$\begin{bmatrix} e & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ -c & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1) + M_{ik} & M_{ki} + (M_{ii}-1) \\ (M_{kk}-1) - M_{ik} & M_{ki} - (M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k) + N_{ik} & N_{ki} + (N_{ii}-\gamma_i) \\ (N_{kk}-\gamma_k) - N_{ik} & N_{ki} - (N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a & \Delta c \\ \Delta b & \Delta d \\ \Delta e & \Delta u \\ \Delta f & \Delta v \end{bmatrix} \quad (4.250)$$

otrzymuje się, pomijając elementy zerowe w (4.250), w miejsce (4.245) układ dwóch równań:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1) - M_{ik} & M_{ki} - (M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k) + N_{ik} & N_{ki} + (N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta b & \Delta d \\ \Delta e & \Delta u \end{bmatrix} \quad (4.251)$$

$$\begin{bmatrix} e & -b \\ -c & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (M_{kk}-1) + M_{ik} & M_{ki} + (M_{ii}-1) \\ (N_{kk}-\gamma_k) - N_{ik} & N_{ki} - (N_{ii}-\gamma_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta a & \Delta c \\ \Delta f & \Delta v \end{bmatrix} \quad (4.252)$$

które mnożąc lewostronnie przez odwrotność odpowiednich macierzy i sumując stronami dają równanie:

$$2\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta b & \Delta d \\ \Delta e & \Delta u \end{bmatrix} + \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta a & \Delta c \\ \Delta f & \Delta v \end{bmatrix} \quad (4.253)$$

gdzie \mathbf{M} , \mathbf{A} , \mathbf{B} są zdefiniowane przez (4.213), a elementy macierzy \mathbf{M} pozwalają wyznaczyć składowe błędów losowych w taki sam sposób jak w (4.181)–(4.192) dla błędów deterministycznych. Dla ich wzajemnego odróżnienia błąd losowy oznaczamy indeksem „s” (w miejsce „d”), a odpowiednikiem (4.182) i (4.186), dla przypadku dwóch składowych oscylacji zespolonych, są zależności:

$$\delta_s |B_k| = \delta_{sk} |B_k| + \delta_{si} |B_k|, \quad \delta_{si} |B_k| = (|B_i| / |B_k|) \delta'_{si} |B_k| \quad (4.254)$$

$$\Delta_s \lambda_k = \Delta_{sk} \lambda_k + \Delta_{si} \lambda_k, \quad \Delta_{si} \lambda_k = (|B_i| / |B_k|) \Delta'_{si} \lambda_k \quad (4.255)$$

Na podstawie (4.183), (4.184), (4.191), (4.192), (4.213), (4.253) oraz zmiany oznaczeń ($\delta_{sk} |B_k|$ w miejsce $\delta_{dk} |B_k|$ itd.) uzyskuje się składowe błędów losowych $\delta_{sk} |B_k|$, $\delta'_{si} |B_k|$, $\Delta_{sk} \lambda_k$, $\Delta'_{si} \lambda_k$ definiujące całkowite błędy losowe (4.254), (4.255):

$$\delta_{sk} |B_k| = |M_{kk} - 1| = \frac{1}{2} \left| \frac{d\Delta b - b\Delta e}{ad - bc} + \frac{b\Delta f + f\Delta a}{ef - bc} \right| \quad (4.256)$$

$$\delta'_{si} |B_k| = |M_{ki}| = \frac{1}{2} \left| \frac{d\Delta d - b\Delta u}{ad - bc} + \frac{b\Delta v + f\Delta c}{ef - bc} \right| \quad (4.257)$$

$$\Delta_{sk} \lambda_k \cong \max_{\gamma_k} \frac{1}{2R} \left| \operatorname{Re} \left[\frac{a\Delta e - c\Delta b}{ad - bc} + \frac{e\Delta f + c\Delta a}{ef - bc} - \gamma_k \left(\frac{d\Delta b - b\Delta e}{ad - bc} + \frac{b\Delta f + f\Delta a}{ef - bc} \right) \right] \right| \quad (4.258)$$

$$\Delta'_{si} \lambda_k \cong \max_{\gamma_k} \frac{1}{2R} \left| \frac{a\Delta u - c\Delta d}{ad - bc} + \frac{c\Delta c + e\Delta v}{ef - bc} - \gamma_k \left(\frac{d\Delta d - b\Delta u}{ad - bc} + \frac{b\Delta v + f\Delta c}{ef - bc} \right) \right| \quad (4.259)$$

W celu określenia wariancji zmiennych losowych (4.256)–(4.259) konieczne jest wyznaczenie wyrażeń typu $E[\Delta a(\Delta b)^*]$, $E[\Delta a(\Delta a)^*]$ itd. Szczegółowy sposób ich uzyskania przedstawiamy na dwóch przykładach, w których wykorzystuje się (1.102), (1.104), (4.243), (4.247) oraz parzystość funkcji h_n i nieparzystość funkcji g_n :

$$\begin{aligned} E[\Delta a(\Delta a)^*] &= |B_k|^{-2} E \left[\sum_n \Delta y_n h_n (1 + e^{-j2\tau x_n}) \sum_m \Delta y_m h_m (1 + e^{j2\tau x_m}) \right] \\ &= |B_k|^{-2} \sum_n \sum_m h_n h_m (1 + e^{-j2\tau x_n})(1 + e^{j2\tau x_m}) E[\Delta y_n \Delta y_m] \quad (4.260) \\ &= \sigma^2 |B_k|^{-2} 4 \sum_n h_n^2 \cos^2 \tau x_n = \operatorname{SNR}_k^{-1} 4 \sum_n h_n^2 \cos^2 \tau x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\Delta a(\Delta b)^*] &= |B_k|^{-2} E \left[\sum_n \Delta y_n h_n (1 + e^{-j2\tau x_n}) \sum_m \Delta y_m h_m (1 - e^{j2\tau x_m}) \right] \\ &= |B_k|^{-2} \sum_n \sum_m h_n h_m (1 + e^{-j2\tau x_n})(1 - e^{j2\tau x_m}) E[\Delta y_n \Delta y_m] \quad (4.261) \\ &= -\operatorname{SNR}_k^{-1} 4j \sum_n h_n^2 \sin \tau x_n \cos \tau x_n = 0 \end{aligned}$$

i w analogiczny sposób uzyskuje się pozostałe potrzebne wartości:

$$E[\Delta a(\Delta a)^*] = a' \operatorname{SNR}_k^{-1}, \quad E[\Delta c(\Delta c)^*] = a' \operatorname{SNR}_i^{-1} \quad (4.262)$$

$$E[\Delta b(\Delta b)^*] = b' \operatorname{SNR}_k^{-1}, \quad E[\Delta d(\Delta d)^*] = b' \operatorname{SNR}_i^{-1} \quad (4.263)$$

$$E[\Delta b(\Delta e)^*] = c' \operatorname{SNR}_k^{-1}, \quad E[\Delta c(\Delta v)^*] = c' \operatorname{SNR}_i^{-1} \quad (4.264)$$

$$E[\Delta a(\Delta f)^*] = -c' \operatorname{SNR}_k^{-1}, \quad E[\Delta d(\Delta u)^*] = -c' \operatorname{SNR}_i^{-1} \quad (4.265)$$

$$E[\Delta e(\Delta e)^*] = d' \operatorname{SNR}_k^{-1}, \quad E[\Delta u(\Delta u)^*] = d' \operatorname{SNR}_i^{-1} \quad (4.266)$$

$$E[\Delta f(\Delta f)^*] = e' \operatorname{SNR}_k^{-1}, \quad E[\Delta v(\Delta v)^*] = e' \operatorname{SNR}_i^{-1} \quad (4.267)$$

$$E[\Delta a(\Delta b)^*] = E[\Delta c(\Delta d)^*] = E[\Delta a(\Delta e)^*] = E[\Delta b(\Delta f)^*] = 0 \quad (4.268)$$

$$E[\Delta e(\Delta f)^*] = E[\Delta c(\Delta u)^*] = E[\Delta d(\Delta v)^*] = E[\Delta u(\Delta v)^*] = 0 \quad (4.269)$$

gdzie:

$$a' = 4 \sum_n (h_n \cos \tau x_n)^2, \quad b' = 4 \sum_n (h_n \sin \tau x_n)^2 \quad (4.270)$$

$$c' = 4 \sum_n h_n g_n \sin \tau x_n \cos \tau x_n, \quad d' = 4 \sum_n (g_n \cos \tau x_n)^2, \quad e' = 4 \sum_n (g_n \sin \tau x_n)^2 \quad (4.271)$$

Wykorzystując (4.262)–(4.269), można wyznaczyć na podstawie (4.256)–(4.259), wariancje składowych estymatorów amplitudy i częstotliwości:

$$E[\delta_{sk}^2 | B_k] = \frac{l_1}{4} \text{SNR}_k^{-1} \quad (4.272)$$

$$E[\Delta_{sk}^2 \lambda_k] \cong \max_{\gamma_k} \frac{1}{4R^2} [l_3 + \gamma_k^2 l_1 + 2\gamma_k l_5] \text{SNR}_k^{-1} \quad (4.273)$$

$$E[\delta_{si}^2 | B_k] = \frac{l_2}{4} \text{SNR}_i^{-1} \quad (4.274)$$

$$E[\Delta_{si}^2 \lambda_k] \cong \max_{\gamma_k} \frac{1}{4R^2} [l_4 + \gamma_k^2 l_2 + 2\gamma_k l_6] \text{SNR}_i^{-1} \quad (4.275)$$

gdzie:

$$l_1 = \frac{d^2 b' - 2bdc' + b^2 d'}{(ad - bc)^2} + \frac{b^2 e' - 2bfc' + f^2 a'}{(ef - bc)^2} \quad (4.276)$$

$$l_2 = \frac{d^2 b' + 2bdc' + b^2 d'}{(ad - bc)^2} + \frac{b^2 e' + 2bfc' + f^2 a'}{(ef - bc)^2} \quad (4.277)$$

$$l_3 = \frac{a^2 d' - 2acc' + c^2 b'}{(ad - bc)^2} + \frac{e^2 e' - 2acc' + c^2 a'}{(ef - bc)^2} \quad (4.278)$$

$$l_4 = \frac{a^2 d' + 2acc' + c^2 b'}{(ad - bc)^2} + \frac{e^2 e' + 2acc' + c^2 a'}{(ef - bc)^2} \quad (4.279)$$

$$l_5 = \frac{add' - (ad + bc)c' + cdb'}{(ad - bc)^2} - \frac{bee' - (bc + ef)c' + cfa'}{(ef - bc)^2} \quad (4.280)$$

$$l_6 = \frac{add' + (ad + bc)c' + cdb'}{(ad - bc)^2} - \frac{bee' + (bc + ef)c' + cfa'}{(ef - bc)^2} \quad (4.281)$$

Po uwzględnieniu zależności $(|B_i|/|B_k|)\text{SNR}_i^{-1} = \text{SNR}_k^{-1}$ z równań (4.254), (4.255), (4.274), (4.275) uzyskuje się:

$$E[\delta_{si}|B_k|]^2 = \frac{l_2}{4} \text{SNR}_k^{-1} \quad (4.282)$$

$$E[\Delta_s \lambda_k]^2 \cong \max_{\gamma_k} \frac{1}{4R^2} [l_4 + \gamma_k^2 l_2 + 2\gamma_k l_6] \text{SNR}_k^{-1} \quad (4.283)$$

Wariancje (4.272), (4.273), (4.282), (4.283) to kwadraty odchyłeń standardowych (dyspersji) składowych całkowitych błędów losowych $\delta_s |B_k|$, $\Delta_s \lambda_k$ zdefiniowanych przez (4.254), (4.255), a wartości tych dyspersji odniesione do dyspersji ograniczeń Craméra–Rao (2.24), (2.25) dla przypadku jednej składowej oscylacji (rys. 4.37–4.40) pozwalają już na pierwsze wnioski dotyczące odporności metody LIDFT na szum obecny w sygnale. Błąd losowy $\delta_s |B_k|$ jest sumą dwóch składników (zgodnie z (4.254)), a każdy z tych składników jest dla $\tau/R \gg 1$ niespełna 2-krotnie większy (rys. 4.37, 4.38) niż potencjalnie najmniejszy możliwy (wynikający z ograniczenia CR). Błąd losowy $\Delta_s \lambda_k$ również jest sumą dwóch składników (zgodnie z (4.255)), a każdy z nich jest dla $\tau/R \gg 1$ ok. 2,4–2,6 razy większy od granicy CR (rys. 4.39, 4.40).

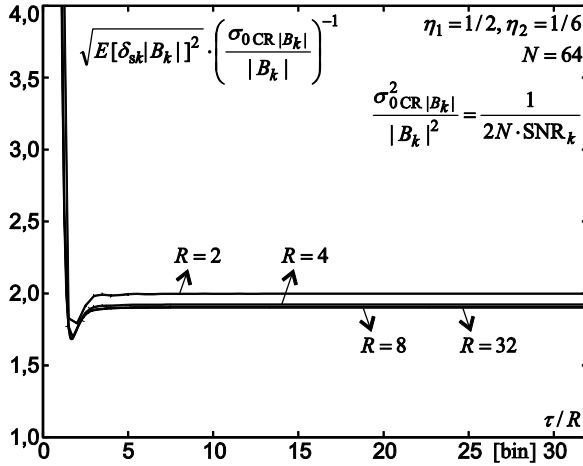
Do obliczenia dyspersji błędów całkowitych $\delta_s |B_k|$, $\Delta_s \lambda_k$ konieczne są, oprócz wyznaczonych już wariancji (4.272), (4.273), (4.282), (4.283), również kowariancje (lub współczynniki korelacji) odpowiednich składników z sumy (4.254), (4.255). Zamiast ich wyznaczania można posłużyć się wyznaczeniem przedziału, w którym mieszczą się poszukiwane wartości, korzystając z następującej nierówności, dotyczącej dodatnich zmiennych losowych X , Y :

$$EX^2 + EY^2 \leq E(X+Y)^2 \leq \left(\sqrt{EX^2} + \sqrt{EY^2} \right)^2, \quad \text{dla } X, Y \geq 0 \quad (4.284)$$

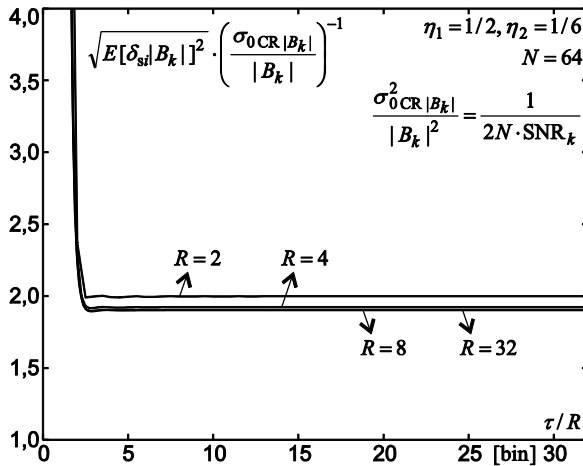
co oznacza, że całkowity błąd losowy $\delta_s |B_k|$ wyznaczenia amplitudy w metodzie LIDFT (w odniesieniu do ograniczenia CR) mieści się w przedziale od pierwiastka sumy kwadratów wartości z rysunków 4.37 i 4.38 do ich sumy i analogicznie do całkowitego błędu losowego $\Delta_s \lambda_k$ wyznaczenia częstotliwości i wartości z rysunków 4.39 i 4.40. Obliczenia według (4.284) dla obu błędów całkowitych przedstawiono na rysunku 4.41.

Analiza właściwości statystycznych metody LIDFT dla małych wartości τ/R wymaga odniesienia uzyskanych wyników do wartości ograniczenia CR, dla dwóch

oscylacji, opisanego przez (2.27)–(2.40) i rysunek 2.2. Trzeba jednak w tym porównaniu uwzględnić fakt, że składowe z (4.273), (4.283) są funkcją odległości między składowymi zdefiniowanej jako τ/R , a ograniczenie CR z (2.27) jest funkcją odległości między składowymi zdefiniowanej jako różnica ich częstotliwości – w rozdz. 4.14 zdefiniowanej jako $|\lambda_k - \lambda_l|$.



Rys. 4.37. Odchylenie standardowe składowej $\delta_{sk} |B_k|$ względem granicy CR

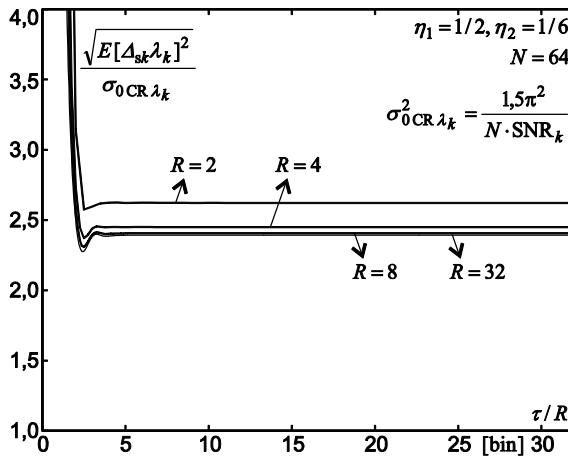


Rys. 4.38. Odchylenie standardowe składowej $\delta_{si} |B_k|$ względem granicy CR

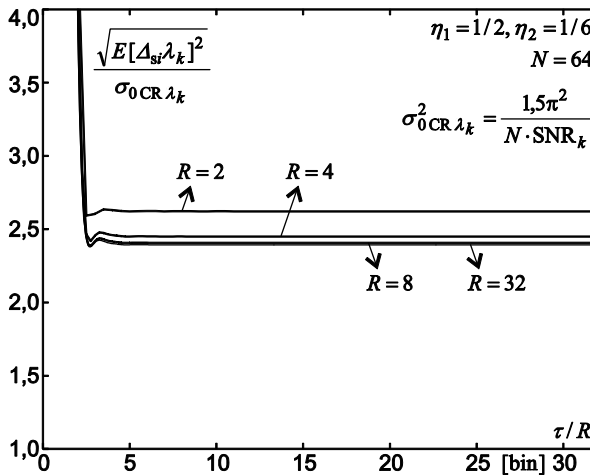
Po uwzględnieniu (4.160) zachodzi $\tau = |i - k|$ oraz

$$|\lambda_k - \lambda_i| \in [\tau / R - 1 / R, \tau / R + 1 / R],$$

przy czym dokładne wyznaczenie $|\lambda_k - \lambda_i|$ w podanym przedziale zależy od wartości γ_k , γ_i , a więc lokalizacji składowych w widmie. Składowe (4.273), (4.283) są wy-

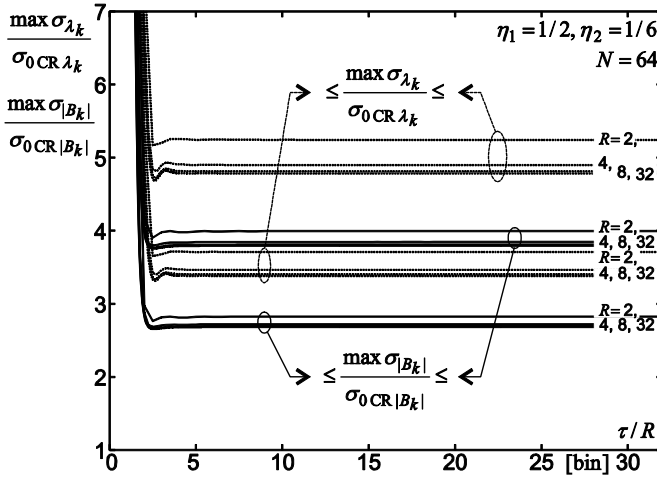


Rys. 4.39. Odchylenie standardowe składowej $\Delta_{sk}\lambda_k$ względem granicy CR

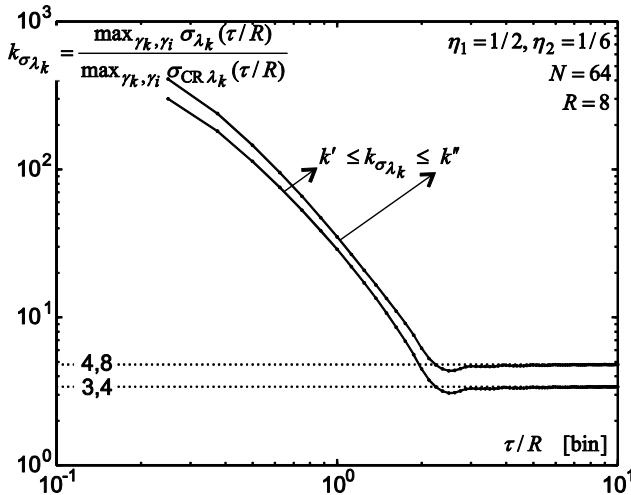


Rys. 4.40. Odchylenie standardowe składowej $\Delta_{si}\lambda_k$ względem granicy CR

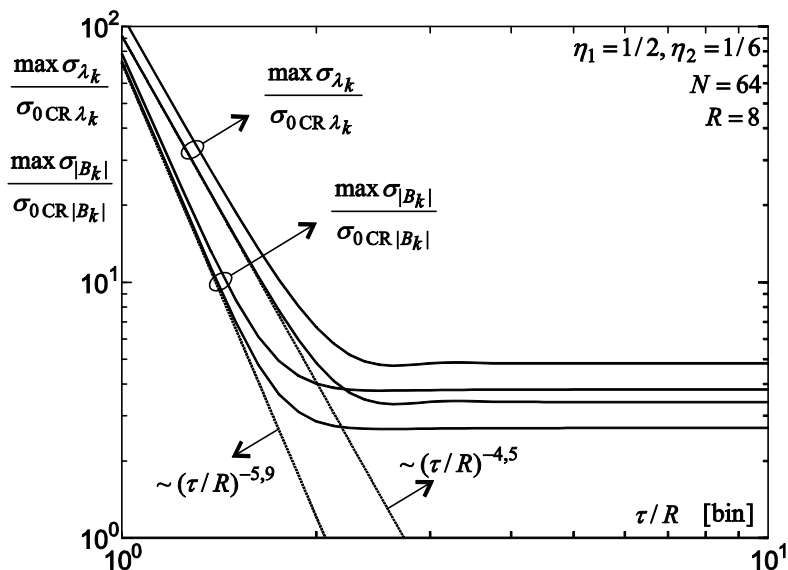
znaczone (zgodnie z analizą z rozdz. 4.12–4.14) dla najmniej korzystnych wartości γ_k , γ_i (oraz $\arg B_k$, $\arg B_i$), a więc w analogiczny sposób uwzględniono (2.27), wyznaczając na rysunku 4.42 stosunek całkowitego błędu losowego do ograniczenia CR (a dokładniej odpowiedni przedział jego wartości według (4.284)).



Rys. 4.41. Przedział wartości dla σ_{λ_k} , $\sigma_{|B_k|}$ względem granicy CR według (2.24), (2.25)



Rys. 4.42. Przedział wartości dla σ_{λ_k} , $\sigma_{|B_k|}$ względem granicy CR według (2.27)



Rys. 4.43. Przedział wartości dla σ_{λ_k} , $\sigma_{|B_k|}$ względem granicy CR według (2.24), (2.25)

Stosunek ten wskazuje znaczący wzrost błędu losowego metody LIDFT względem ograniczenia Craméra–Rao dla τ/R mniejszych niż ok. 2 bin. Wartość ta odpowiada szerokości listka głównego użytego okna trójkątnego. Szczegółowe wyjaśnienie tego faktu przedstawia porównanie rysunku 4.43 (wyznaczającego przedziały dla odchylenia standardowego całkowitych błędów losowych ze wzoru (4.284) względem (2.25)) oraz rysunku 2.2b – dla ograniczenia CR wzrost błędu losowego estymacji częstotliwości dla małych odległości $|\lambda_k - \lambda_i|$ między składowymi jest proporcjonalny do $|\lambda_k - \lambda_i|^{-2}$ (w najmniej korzystnym przypadku), a dla metody LIDFT wzrost ten jest proporcjonalny do $(\tau/R)^{-4.5}$. Oznacza to, że im mniejsza odległość między składowymi, tym większy jest składnik losowy błędu estymacji w metodzie LIDFT w stosunku do ograniczenia CR.

Przedstawione wyniki oznaczają, że w przypadku okna trójkątnego metoda LIDFT powinna być stosowana przede wszystkim, gdy odległości między składowymi są równe w przybliżeniu szerokości jego listka głównego lub większej, a wówczas podstawowe właściwości statystyczne metody LIDFT opisują wykresy z rysunków 4.37–4.41, 4.43 i w niewielkim stopniu zależą od odległości między składowymi w widmie.

4.15. Dodatek: wybrane zależności matematyczne do rozdziału 4

$$\int_{k/R}^{(k+1)/R} d\lambda = \frac{1}{R}, \quad \int_{k/R}^{(k+1)/R} \lambda d\lambda = \frac{k+1/2}{R^2}, \quad \int_{k/R}^{(k+1)/R} \lambda^2 d\lambda = \frac{(k+1/2)^2}{R^3} + \frac{1}{12R^3} \quad (4.285)$$

$$\int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} d\lambda = \frac{1}{R}, \quad \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} \lambda d\lambda = \frac{k}{R^2}, \quad \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} \lambda^2 d\lambda = \frac{k^2}{R^3} + \frac{1}{12R^3} \quad (4.286)$$

$$\begin{aligned} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 &= [W(\lambda) - a_k \lambda - b_k][W^*(\lambda) - a_k^* \lambda - b_k^*] \\ &= |W(\lambda)|^2 + [(a_k^* \lambda + b_k^*)(a_k \lambda + b_k)] - [a_k^* \lambda W(\lambda) + b_k^* W(\lambda)] - [a_k \lambda W^*(\lambda) + b_k W^*(\lambda)] \end{aligned} \quad (4.287)$$

Na podstawie (4.285), (4.3)–(4.6) otrzymuje się:

$$\sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} (a_k^* \lambda + b_k^*)(a_k \lambda + b_k) d\lambda = \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.288)$$

Na podstawie (4.3)–(4.9) otrzymuje się:

$$\sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \left[\int_{k/R}^{(k+1)/R} (a_k^* \lambda + b_k^*) W(\lambda) d\lambda + \int_{k/R}^{(k+1)/R} (a_k \lambda + b_k) W^*(\lambda) d\lambda \right] = \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.289)$$

Na podstawie (4.287)–(4.289) otrzymuje się:

$$\sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{k/R}^{(k+1)/R} |W(\lambda)|^2 d\lambda + \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{z} - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.290)$$

Na podstawie (4.286), (4.3), (4.4), (4.6), (4.38) otrzymuje się:

$$\sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} (a_k^* \lambda + b_k^*)(a_k \lambda + b_k) d\lambda = \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.291)$$

Na podstawie (4.3), (4.4), (4.6), (4.7), (4.38)–(4.40) otrzymuje się:

$$\sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \left[\int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} (a_k^* \lambda + b_k^*) W(\lambda) d\lambda + \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} (a_k \lambda + b_k) W^*(\lambda) d\lambda \right] = \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.292)$$

Na podstawie (4.287), (4.291), (4.292) otrzymuje się:

$$\sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} |W(\lambda) - \hat{W}_k(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{k=-NR/2}^{NR/2-1} \int_{(k-1/2)/R}^{(k+1/2)/R} |W(\lambda)|^2 d\lambda + \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{A} \mathbf{z} - \mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (4.293)$$

Dla dowolnych $\mathbf{x} = [x_{-M/2}, \dots, x_{M/2-1}]^T$, $\mathbf{y} = [y_{-M/2}, \dots, y_{M/2-1}]^T$ spełniających warunek $x_{k+M} = x_k$, $y_{k+M} = y_k$, $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{y}^T]^T$, macierzy \mathbf{E} z (4.54) oraz macierzy jednostkowej \mathbf{I} zachodzi:

$$\sum_{k=-M/2}^{M/2-1} |(x_{k+1} - x_k) - (y_{k+1} + y_k)|^2 = \mathbf{z}^H [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]^T [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}] \mathbf{z} \quad (4.294)$$

Dla macierzy diagonalnych Λ_i ($i=1, 2, 3$) i macierzy ortogonalnej \mathbf{W} spełniającej warunek $\mathbf{W} \mathbf{W}^H = \mathbf{W}^H \mathbf{W} = M \cdot \mathbf{I}$ zachodzi dla następujących macierzy blokowych:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} \Lambda_1 \mathbf{W}^H & \mathbf{W} \Lambda_3 \mathbf{W}^H \\ -\mathbf{W} \Lambda_3 \mathbf{W}^H & \mathbf{W} \Lambda_2 \mathbf{W}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \Lambda_2 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_3^2)^{-1} \mathbf{W}^H & -\mathbf{W} \Lambda_3 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_3^2)^{-1} \mathbf{W}^H \\ \mathbf{W} \Lambda_3 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_3^2)^{-1} \mathbf{W}^H & \mathbf{W} \Lambda_1 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_3^2)^{-1} \mathbf{W}^H \end{bmatrix} = M^2 \mathbf{I} \quad (4.295)$$

Dla macierzy diagonalnej $\Lambda_e = [e^{-j2\pi n/M}]$ i macierzy współczynników obrotu $\mathbf{W} = [e^{-j2\pi nk/M}]$ ($n, k = -M/2, \dots, M/2-1$) oraz macierzy \mathbf{E} z (4.54) zachodzi:

$$M \cdot \mathbf{E} = \mathbf{W} \Lambda_e \mathbf{W}^H, \quad M \cdot \mathbf{E}^T = \mathbf{W} \Lambda_e^* \mathbf{W}^H, \quad \Lambda_e = [e^{-j2\pi n/M}] \quad (4.296)$$

Dla macierzy \mathbf{E} z (4.296), macierzy \mathbf{A} z (4.3) oraz macierzy jednostkowej \mathbf{I} zachodzi:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu^{-1} \mathbf{A}^{-1} + [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}]^T [\mathbf{I} - \mathbf{E} \quad \mathbf{I} + \mathbf{E}] \\ &= \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \mathbf{W} [(2 + (\mu R)^{-1}) \mathbf{I} - (\Lambda_e + \Lambda_e^*)] \mathbf{W}^H & \mathbf{W} (\Lambda_e - \Lambda_e^*) \mathbf{W}^H \\ -\mathbf{W} (\Lambda_e - \Lambda_e^*) \mathbf{W}^H & \mathbf{W} [(2 + (3\mu R)^{-1}) \mathbf{I} + (\Lambda_e + \Lambda_e^*)] \mathbf{W}^H \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.297)$$

Dla $\Lambda_1 = (2 + (\mu R)^{-1})\mathbf{I} - (\Lambda_e + \Lambda_e^*)$, $\Lambda_2 = (2 + (3\mu R)^{-1})\mathbf{I} + (\Lambda_e + \Lambda_e^*)$, $\Lambda_3 = \Lambda_e - \Lambda_e^*$ w zależności (4.297) otrzymuje się z (4.295):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= \frac{\mu}{M} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \left(\mathbf{I} - 4\mu \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Lambda_A^2 & -j\Lambda_A \Lambda_B \\ j\Lambda_A \Lambda_B & \Lambda_B^2 \end{bmatrix} \right) \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^H \end{bmatrix} \\ &= \mu \mathbf{A} - \frac{4\mu^2}{M} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_A^2 & -j\Lambda_A \Lambda_B \\ j\Lambda_A \Lambda_B & \Lambda_B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^H \end{bmatrix} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.298)$$

gdzie Λ_A , Λ_B są zdefiniowane przez (4.61) i (4.62).

Podsumowanie

Za początek metod interpolacji widma można uznać pracę Rife'a i Vincenta [151], jednak większość prac o znaczących wynikach naukowych w tej dziedzinie opublikowano w ostatniej dekadzie, a nawet w okresie kilku ostatnich lat. Można więc uznać, że jest to tematyka stosunkowo nowa, a jej dynamiczny rozwój (ze stale rosnącą liczbą prac i propozycjami nowych metod bądź doskonalenia metod dotychczasowych) i obecność w najbardziej uznanych czasopismach o najszerszym międzynarodowym zakresie i na konferencjach międzynarodowych o tematyce metrologicznej oraz związanej z przetwarzaniem sygnałów, świadczy o uznaniu przez społeczność nauki tej tematyki jako ważnej, aktualnej i potrzebnej. Dostrzegając tę potrzebę autor niniejszej pracy przybliży Czytelnikowi najważniejsze aspekty tej grupy metod w rozdz. 2, poprzedzając ten rozdział skrótownym przeglądem samej dziedziny analizy widma sygnału we *Wprowadzeniu* oraz w sposób bardziej formalny w rozdz. 1.

Autor uważa, że kierunkami rozwoju tej dziedziny w najbliższych latach będą zwłaszcza zagadnienia coraz szerszego uwzględnienia zjawiska przecieku widma w równaniach metod interpolacji widma oraz metod interpolacji widma dla nowych okien czasowych, tym bardziej iż w ostatnich latach opublikowano nowatorskie prace dotyczące okien czasowych w analizie widma [74, 112, 133, 149, 162, 186]. Obecnie metody te są najbardziej zaawansowane dla okien czasowych I klasy Rife'a–Vincenta będącej podklasą okien z bazą kosinusową. Należy się też spodziewać pojawienia się metod interpolacji widma uniwersalnych w swoim charakterze, tj. takich, które mogą być stosowane dla szerokiej grupy okien czasowych. Pojawiać się też będą z pewnością, jako kontynuacja prac [2, 6, 10, 14, 17, 22, 64, 99, 134, 155], kolejne analizy zastosowania metod interpolacji widma dla sygnałów niestacjonarnych.

Wkładem autora w prezentowany zakres zagadnień jest opracowana przez niego autorska metoda liniowej interpolacji DFT, opublikowana po raz pierwszy na międzynarodowym forum w [55] i nazwana w skrócie jako LIDFT, której krótką charakterystykę, wykonaną na podstawie dotychczasowych publikacji, zaprezentowano w rozdziale 3. Innowacyjny charakter metody LIDFT polega na uwzględnieniu przecieku widma w swoich równaniach i na liniowości równań, na podstawie których wyznacza się parametry sygnału. Wykorzystuje ona w swoim algorytmie, z rozszerzonych operacji matematycznych, jedynie szybki algorytm FFT (w połączeniu z techniką uzupeł-

niania zerami) i procedurę rozwiązywania liniowego równania macierzowego. Szerszy przegląd metody LIDFT w jej dotychczasowym kształcie został zaprezentowany w rozdz. 3.

Rozwinięcie metody LIDFT przedstawiono w rozdz. 4, a kolejne jego podrozdziały opisują nowe wyniki badań autora, które rozwijają metodę LIDFT, ukazując znaczące zwiększenie jej dokładności. Ponadto opisana autorska aproksymacja okręgu jednostkowego wielokątem, wraz ze szczegółową analizą dokładności tej aproksymacji, może być wykorzystana w innych niż LIDFT metodach przetwarzania sygnałów.

Do najważniejszych uzyskanych rezultatów niniejszej pracy należą:

- przedstawienie różnych wariantów aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego funkcjami liniowymi z uwzględnieniem ich ciągłości lub nieciągłości zależnych od wartości odpowiednich parametrów (rozdz. 4.2–4.4),
- wykazanie, że przedstawiona aproksymacja charakterystyki widmowej okna czasowego jest równoważna odpowiednio zdefiniowanej aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem (rozdz. 4.5 i twierdzenie 4.1), a przekształcenia matematyczne dotyczące takiej aproksymacji wielokątem są znacząco prostsze niż te z rozdz. 4.2–4.4,
- zdefiniowanie w rozdz. 4.6 uniwersalnej aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem (będącej uogólnieniem aproksymacji z rozdz. 4.5) oraz wyznaczenie optymalnego zakresu wartości parametrów takiej aproksymacji, dla której błędy estymacji parametrów sygnału są najmniejsze (rozdz. 4.7),
- zdefiniowanie równań metody LIDFT w formie bardziej uniwersalnej niż w rozdz. 3 oraz uogólnienie tej metody do postaci wykorzystującej uniwersalną aproksymację okręgu jednostkowego wielokątem z rozdz. 4.6, 4.7 oraz parę okien czasowych (rozdz. 4.8–4.10), a także przedstawienie szczegółowej implementacji programowej uogólnionej wersji metody w środowisku programowym Matlab (rozdz. 4.11),
- przeprowadzenie analizy błędów systematycznych metody LIDFT (jej uogólnionej w rozdz. 4.10 wersji) dla ogólnego przypadku dowolnej liczby składowych oscylacji w sygnale (rozdz. 4.12) oraz szczegółowej analizy dla przypadku dwóch składowych oscylacji w sygnale (rozdz. 4.13); analizy te umożliwiły wyznaczenie wartości parametrów aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem, bliskie wartościom optymalnym, co z kolei zmniejszyło znacząco błędy estymacji w stosunku do dotychczasowej wersji metody z rozdz. 3; w przypadku użycia okna trójkątnego błąd estymacji amplitudy zmniejszono o ok. 25%, a błąd estymacji częstotliwości ok. 9–14-krotnie!,
- przeprowadzenie (rozdz. 4.14) analizy podstawowych właściwości statystycznych uogólnionej wersji metody LIDFT względem ograniczenia Craméra–Rao (CR), tj. metody o potencjalnie najmniejszej wariancji spośród metod o małych błędach systematycznych: przy odległości między składowymi powyżej 2–2,2 bin i oknie trójkątnym maksymalny błąd losowy estymacji częstotliwości mie-

ści się w przedziale od ok. 3,4 do ok. 5-krotności granicy CR, a maksymalny błąd losowy estymacji amplitudy mieści się w przedziale od ok. 2,7 do ok. 4-krotności granicy CR (rys. 4.41); analizy umożliwiają zakwalifikowanie metody LIDFT do metod o umiarkowanej wartości błędów estymacji spowodowanych szumem w sygnale; dla typowych metod interpolacji widma (rozdz. 2) wartości błędów losowych, np. dla estymacji częstotliwości, wynoszą od 1–2 do 11–12-krotności względem granicy CR [36, 71],

- wyznaczenie minimalnej odległości między składowymi, powyżej której wariancja estymatora częstotliwości nie rośnie w sposób znaczący; dla okna trójkątnego wynosi ona ok. 2 bin, a więc odpowiada szerokości listka głównego tego okna; oznacza to, że metoda LIDFT nie należy do metod estymacji dużej rozdzielczości (dla tych metod minimalna odległość między składowymi jest znacznie mniejsza niż 1 bin), ale oznacza znaczącą poprawę w stosunku do metod interpolacji widma (rozdz. 2), gdyż przy odległości między składowymi równej szerokości listka głównego okna czasowego błędy systematyczne metody LIDFT (wyznaczone w rozdz. 4.13) są znacząco mniejsze.

Podsumowując powyższe właściwości metrologiczne metody LIDFT w jej uogólnionej postaci, można ją uznać za metodę o bardzo małych błędach systematycznych estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego, umiarkowanych wartościach błędów losowych oraz o stosunkowo dobrej, jak dla metod bazujących na widmie DFT (DtFT), rozdzielczości. Dobrą ilustracją tych właściwości jest analiza przykładowego sygnału złożonego z trzech składowych sinusoidalnych przeprowadzona w rozdz. 4.11. Na rysunku 3.17 dla tego przykładu pokazano, że żadna z metod interpolacji widma (rozdz. 2) nie umożliwia analizy składowych tego sygnału „ukrytych” w przecieku widma pochodzącego od pierwszej składowej. Uzyskiwane dokładności estymacji to ok. 0,036–0,091% przy estymacji amplitudy i ok. $2,6 \cdot 10^{-5}$ – $1,2 \cdot 10^{-2}$ bin przy estymacji częstotliwości (rys. 4.32). Wartości składowych błędów systematycznych dla najmniej korzystnych warunków pomiaru przedstawiono na rysunkach 4.33–4.36 w funkcji odległości między składowymi.

Dalsze prace autora dotyczące metody LIDFT będą dotyczyły zwiększenia jej dokładności z wykorzystaniem różnych rodzajów okien czasowych, jak również zmniejszenia wartości błędów losowych oraz dalszej poprawy rozdzielczości metody. Autor planuje podjęcie prac nad zastosowaniem metody LIDFT dla sygnałów niestacjonarnych i innych zagadnień związanych z analizą metrologiczną i uwarunkowaniami obliczeniowymi tej metody.

Z przedstawionych wyników (rozdz. 4), dotyczących różnych sposobów aproksymacji charakterystyki widmowej okna czasowego (rozdz. 4.2–4.5), a zwłaszcza aproksymacji okręgu jednostkowego wielokątem (rozdz. 4.6) wraz z doбором wartości parametrów tej aproksymacji (rozdz. 4.7), widać, że autorskie opracowania mają charakter uniwersalny i mogą być wykorzystane w innych, niż LIDFT, algorytmach cyfrowego przetwarzania sygnałów.

Literatura

- [1] ABE M., SMITH J.O., *CQIFFT: Correcting Bias in a Sinusoidal Parameter Estimator based on Quadratic Interpolation of FFT Magnitude Peaks*, Technical Report STAN-M-117, Dept. of Music, Stanford University, 2004, 1–14.
- [2] ABE M., SMITH J.O., *AM/FM Estimating and Bias Correction for Time-Varying Sinusoidal Modeling*, Technical Report STAN-M-118, Dept. of Music, Stanford University, 2004, 1–12.
- [3] ABOUTANIOS E., MULGREW B., *Iterative Frequency Estimation by Interpolation on Fourier Coefficients*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 53, No. 4, 2005, 1237–1242.
- [4] AGREŽ D., *Frequency Estimation by IDFT and Quantization Noise*, Proceedings of the XVI IMEKO World Congress (IMEKO'2000), Vienna, Austria, 2000, Vol. IX 9–14.
- [5] AGREŽ D., *Weighted Multipoint Interpolated DFT to Improve Amplitude Estimation of Multifrequency Signal*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 51, No. 2, 2002, 287–292.
- [6] AGREŽ D., *Frequency Estimation of the Non-Stationary Signals Using Interpolated DFT*, Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2002), Anchorage AK, USA, 2002, 925–930.
- [7] AGREŽ D., *Interpolation in the Frequency Domain to Improve Phase Measurement*, Proceedings of the XVII IMEKO World Congress (IMEKO'2003), Dubrovnik, Croatia, 2003, 446–450.
- [8] AGREŽ D., *Improving Phase Estimation With Leakage Minimization*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 54, No. 4, 2005, 1347–1353.
- [9] AGREŽ D., *Active Power Estimation in the Non-coherent Sampling: A Comparative Study*, Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2005), Ottawa, Canada, 2005, 720–725.
- [10] AGREŽ D., *Estimation of the Instantaneous Periodic Parameters in the Frequency Domain*, Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2006), Sorrento, Italy, 2006, 1731–1735.
- [11] AGREŽ D., *Dynamics of Frequency Estimation in the Frequency Domain*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 56, No. 6, 2007, 2111–2118.
- [12] AGREŽ D., *Interpolation in the frequency domain to improve phase measurement*, Measurement, Vol. 41, 2008, 151–159.
- [13] AGREŽ D., *Power Measurement in the non-coherent Sampling*, Measurement, Vol. 41, 2008, 230–235.
- [14] AGREŽ D., *Estimation of Parameters of the Exponentially Damped Sinusoidal Signals in the Frequency Domain*, Proceedings of the 16th Symposium on Electrical Measurements and Instrumentation & 13th Workshop on ADC Modelling and Testing (TC4), Florence, Italy, 2008 (www.imeko.org).
- [15] AGREŽ D., *Period Estimation of the Modulated Signal*, Proceedings of the XIX IMEKO World Congress (IMEKO'2009), Lisbon, Portugal, 2009, 590–595.

- [16] AGREŽ D., *Estimation of parameters of two sine signals with common frequency*, Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2010), Austin TX, USA, 2010, 67–72.
- [17] AGREŽ D., *Estimation of parameters of the weakly damped sinusoidal signals in the frequency domain*, Computer Standards & Interfaces, Vol. 33, 2011, 117–121.
- [18] AIELLO M., CATALIOTTI A., NUCCIO S., *A Chirp-Z Transform-Based Synchronizer for Power System Measurements*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 54, No. 3, 2005, 1025–1032.
- [19] ALBRECHT H.H., *A Family of cosine-sum windows for high-resolution measurements* Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'2001), Salt Lake City UT, USA, 2001, 3081–3084.
- [20] AMAR A., WEISS A.J., *Fundamental Limitations on the Resolution of Deterministic Signals*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 56, No. 11, 2008, 5309–5318.
- [21] ANDRIA G., SAVINO M., TROTTA A., *Windows and Interpolation Algorithms to Improve Electrical Measurement Accuracy*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 38, No. 4, 1989, 856–863.
- [22] ANDRIA G., ATTIVISSIMO F., LANZOLLA A., *Interpolations techniques for nonstationry signal analysis*, Measurement, Vol. 21, 1997, 1–16.
- [23] ATTIVISSIMO F., GIAQUINTO N., KALE I., *INL Reconstruction of A/D Converters via Parametric Spectral Estimation*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 53, No. 4, 2004, 940–946.
- [24] BATEMAN A., PATERSON-STEPHENS I., *The DSP Handbook. Algorithms, Applications and Design Techniques*, Prentice Hall, 2002.
- [25] BELEGA D., *Optimal choice of the windows for analog-to-digital converter characterization by spectral analysis*, Revue Roumaine des Sciences Techniques Serie Electrotechnique et Energetique, Vol. 49, No.1, 2004, 75–84.
- [26] BELEGA D., *The maximum sidelobe decay windows*, Revue Roumaine des Sciences Techniques Serie Electrotechnique et Energetique, Vol. 50, No. 3, 2005, 349–356.
- [27] BELEGA D., CIUGUDEAN M., STOICIU D., *Choice of the cosine-class windows for ADC dynamic testing by spectral analysis*, Measurement, Vol. 40, 2007, 361–371.
- [28] BELEGA D., DALLET D., *Frequency estimation via weighted multipoint interpolated DFT*, IET Science, Measurement and Technology, Vol. 2, No. 1, 2008, 1–8.
- [29] BELEGA D., DALLET D., *Normalized frequency estimation for accurate dynamic characterization of A/D converters by means of the three-parameters sine-fit algorithm*, Measurement, Vol. 41, 2008, 986–993.
- [30] BELEGA D., DALLET D., *Influence of Systematic Errors on a Sine Wave Frequency Estimation by Means of Interpolated DFT Method*, Proceedings of the 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP'2008), St Julians, Malta, 2008, 1436–1439.
- [31] BELEGA D., DALLET D., *Multifrequency signal analysis by Interpolated DFT method with maximum sidelobe decay windows*, Measurement, Vol. 42, 2009, 420–426.
- [32] BELEGA D., DALLET D., *Amplitude Estimation by a Multipoint Interpolated DFT Approach*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 58, No. 5, 2009, 1316–1323.
- [33] BELEGA D., DALLET D., *Choice of the acquisition parameters for frequency estimation of a sine wave by interpolated DFT method*, Computer Standards and Interfaces, Vol. 31, 2009, 962–968.
- [34] BELEGA D., DALLET D., STOICIU D., *Choice of the window used in the interpolated Discrete Fourier Transform method*, Revue Roumaine des Sciences Techniques Serie Electrotechnique et Energetique, Vol. 54 , No. 4, 2009, 365–374.

- [35] BELEGA D., DALLET D., *Multipoint Interpolated DFT Method for Frequency Estimation*, Proceedings of the 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD'2009), Djerba, Tunisia, 2009, 1–6.
- [36] BELEGA D., DALLET D., PETRI D., *Uncertainty Analysis of the Normalized Frequency Estimation by Multipoint Interpolated DFT Approach*, Proceedings of the International Workshop on Advanced Methods for Uncertainty Estimation in Measurement (AMUEM'2009), Bucharest, Romania, 2009, 34–38.
- [37] BELEGA D., DALLET D., *Accurate Normalized Frequency Estimation by the Three-point Interpolated DFT Method with Rectangular Window*, Proceedings of the 17th European Signal Processing Conference (EUSIPCO'2009), Glasgow, Scotland, 2009, 1329–1333.
- [38] BELEGA D., DALLET D., EYNARD G., *Influence of the Noise on the Amplitude Estimation of a Sine-Wave by the Three-Point Interpolated DFT Method*, Proceedings of the 4rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP'2010), Limassol, Cyprus, 2010, 1–5.
- [39] BELEGA D., DALLET D., PETRI D., *Estimation of the Effective Number of Bits of ADCs Using the Interpolated DFT Method*, Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2010), Austin TX, USA, 2010, 30–35.
- [40] BERNSTEIN D., *Matrix mathematics*. Princeton University Press. Princeton, 2005.
- [41] BETTA G., LIGUORI C., PIETROSANTO A., *Propagation of uncertainty in a discrete Fourier transform algorithm*, Measurement, Vol. 27, 2000, 231–239.
- [42] BOASHASH B., *Estimating and Interpreting The Instantaneous Frequency of a Signal – Part 1: Fundamentals*, Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 4, 1992, 520–538.
- [43] BOASHASH B., *Estimating and Interpreting The Instantaneous Frequency of a Signal – Part 2: Algorithms and Applications*, Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 4, 1992, 540–568.
- [44] BOASHASH B. (ed.), *Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive Reference*, Elsevier, 2003.
- [45] BORKOWSKI D., *Estymacja częstotliwościowych parametrów systemu elektroenergetycznego z zastosowaniem koherentnego repróbrowania*, rozprawa doktorska, AGH, Kraków, 2007.
- [46] BORKOWSKI D., BIEN A., *Improvement of Accuracy of Power System Spectral Analysis by Coherent Resampling*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 24, No. 3, 2009, 1004–1013.
- [47] BORKOWSKI J., MATUSZEWSKI B., *Investigation of Signal Application in the Real-time Combined Measurements Regarding Spectral Analysis and Signal Reconstruction*, Proceedings of the IMEKO Technical Committees TC-1 and TC-7 Colloquium, London, 1993, 354–359.
- [48] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Metoda liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera i możliwości jej aplikacji*, Materiały III konferencji Metrologia Wspomagana Komputerowo (MWK'1997), Zegrze k. Warszawy, 1997, t. 2, 49–54.
- [49] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Linearyzujące okno danych w metodzie liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera*, Materiały VII sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych (MiSSP'1997), Krynica, 1997, 59–66.
- [50] BORKOWSKI J., *Metoda liniowej interpolacji dyskretnego przekształcenia Fouriera w analizie sygnału z czujnika pomiarowego*, rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska, Wrocław, 1997.
- [51] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Metoda liniowej interpolacji DFT w pomiarze objętościowej funkcji rozproszenia pod małym kątem*, Materiały V konferencji Czujniki Optoelektroniczne i Elektroniczne (COE'1998), Jurata, 1998, 139–142.
- [52] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Obliczeniowe aspekty metody LIDFT w analizie sygnału z czujnika pomiarowego*, Materiały Krajowego Kongresu Metrologii (KKM'1998), Gdańsk, 1998, 78–84.

- [53] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Dobór parametru okna danych w metodzie LIDFT*, Materiały VIII sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych (MiSSP'1998), Krynica, 1998, 280–287.
- [54] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Wpływ szumu na wyniki pomiaru w metodzie liniowej interpolacji DFT*, Materiały IV konferencji Metrologia Wspomagana Komputerowo (MWK'1999), Rynia k. Warszawy, 1999, 61–64.
- [55] BORKOWSKI J., *LIDFT - the DFT linear interpolation method*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 49, No. 4, 2000, 741–745.
- [56] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Application of the discrete Fourier transform linear interpolation method in the measurement of volume scattering function at small angle*, Optical Engineering, Vol. 39, No. 6, 2000, 1576–1586.
- [57] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Metrological analysis of the LIDFT method*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 51, No. 1, 2002, 67–71.
- [58] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Multifrequency signal analysis of the optic sensor in the LIDFT method*, Metrology and Measurement Systems, Vol. 11, No. 4, 2004, 377–384.
- [59] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Błędy metody LIDFT dla klasycznych okien danych*, Pomiar, Automatyka, Kontrola, Vol. 53, Nr 9bis, t.1, 2007, 108–111.
- [60] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Analiza metrologiczna interpolacji DFT metodą uzupełniania zerami*, Pomiar, Automatyka, Kontrola, Vol. 53, Nr 9bis t.1, 2007, 127–129.
- [61] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *Estymacja parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego metodą LIDFT jako rozwinięcie cyfrowego przetwarzania sygnałów w analizie fourierowskiej*, Problemy metrologii elektronicznej i fonicznej, praca zbiorowa pod red. J. Mroczi, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2008, 79–132.
- [62] BORKOWSKI J., MROCZKA J., *LIDFT method with classic data windows and zero padding in multi-frequency signal analysis*, Measurement, Vol. 43, 2010, 1595–1602.
- [63] BRIGHAM E.O., *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, 1988.
- [64] BURGESS J.C., *Accurate analysis of multitone signals using a DFT*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 116, No. 1, 2004, 389–395.
- [65] CACIOTTA M., GIARNETTI S., LECCESE F., LEONOWICZ Z., *Comparison between DFT, Adaptive Window DFT and EDFT for Power Quality Frequency Spectrum Analysis*, Proceedings of the 4th International Symposium on Modern Electric Power Systems (MEPS'2010), Wrocław, Poland, 2010 (www.meps10.pwr.wroc.pl).
- [66] CARBONE P., NUNZI E., PETRI D., *Frequency-Domain-Based Least-Squares Estimation of Multifrequency Signal Parameters*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 49, No. 3, 2000, 555–558.
- [67] CHANG G.W., CHEN C.I., LIU Y.J., WU M.C., *Measuring power system harmonics and interharmonics by an improved fast Fourier transform-based algorithm*, IET Generation, Transmission and Distribution, Vol. 2, No. 2, 2008, 192–201.
- [68] CHEN K.F., LI Y.F., *Combining the Hanning windowed interpolated FFT in both directions*, Computer Physics Communications, Vol. 178, 2008, 924–928.
- [69] CHEN K.F., CAO X., LI Y.F., *Sine wave fitting to short records initialized with the frequency retrieved from Hanning windowed FFT spectrum*, Measurement, Vol. 42, 2009, 127–135.
- [70] CHEN K.F., JIANG J.T., CROUSEN S., *Against the long-range spectral leakage of the cosine window family*, Computer Physics Communications, Vol. 180, 2009, 904–911.
- [71] CHEN K.F., MEI S.L., *Composite Interpolated Fast Fourier Transform With the Hanning Window*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 59, No. 6, 2010, 1571–1579.
- [72] CODNER G.W., PALMER M.A., TANKE E.P., TEMNYKH A.B., *Diagnostics of Interaction Point Properties and Bunch-by-Bunch Tune Measurements at CESR*, Proceedings of the 12th Beam Instrumenta-

- tion Workshop (BIW'2006), Batavia IL, USA, 2006, Vol. 868, 252–261 (scitation.aip.org/proceedings/volume.jsp).
- [73] COHEN L., *Time-Frequency Analysis*, Prentice Hall, 1995.
- [74] CORTÉS C.A., MOMBELLO E., DIB R., RATTÁ G., *A new class of flat-top windows for exposure assessment in magnetic field measurements*, *Signal Processing*, Vol. 87, 2007, 2151–2164.
- [75] DĄBROWSKI A. (red.), *Przetwarzanie sygnałów przy użyciu procesorów sygnałowych*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1997, 1999, 2000.
- [76] D'ANTONA G., FERRERO A., *Digital Signal Processing for Measurement Systems. Theory and Applications*, Springer, 2005.
- [77] DAPONTE P., MENNITI D., TESTA A., *Segmented Chirp Z-transform and multiple deep dip windows for electrical power system harmonic analysis*, *Measurement*, Vol. 18, No. 4, 1996, 215–224.
- [78] D'ELIA M.G., LIGUORI C., PACIELLO V., PAOLILLO A., *A New Instrument for the Measurement of Very Close Tones*, *Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2006)*, Sorrento, Italy, 2006, 1518–1523.
- [79] DILAVEROĞLU E., *Nonmatrix Cramér-Rao Bound Expressions for High-Resolution Frequency Estimators*, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 46, No. 2, 1998, 463–474.
- [80] DISHAN H., *Phase Error in Fast Fourier Transform Analysis*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 9, No. 2, 1995, 113–118.
- [81] DUDA K., BORKOWSKI D., BIEŃ A., *Computation of the network harmonic impedance with Chirp-Z transform*, *Metrology and Measurement Systems*, Vol. 16, No. 2, 2009, 299–312.
- [82] DUHAMEL P., VETTERLI M., *Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art*, *Signal Processing*, Vol. 19, 1990, 259–299.
- [83] EL KORSO M.N., BOYER R., RENAUX A., MARCOS S., *Statistical Resolution Limit for Multiple Parameters of Interest and for Multiple Signals*, *Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'2010)*, Dallas TX, USA, 2010, 3602–3605.
- [84] FAN C.P., SU G.A., *Pruning fast Fourier transform algorithm design using group-based method*, *Signal Processing*, Vol. 87, 2007, 2781–2798.
- [85] FERRERO A., SALICONE S., *A fast frequency-domain interpolation method for the evaluation of the frequency and amplitude of spectral components*, *Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2010)*, Austin TX, USA, 2010, 6–11.
- [86] FRANCHETTI F., PÜSCHEL M., *Generating High Performance Pruned FFT Implementations*, *Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'2009)*, Taipei, Taiwan, 2009, 549–552.
- [87] FRANZ S.F., MITRA S.K., DOBLINGER G., *Frequency estimation using warped discrete Fourier transform*, *Signal Processing*, Vol. 83, 2003, 1661–1671.
- [88] GALLO D., LANGELLA R., TESTA A., *Desynchronized Processing Technique for Harmonic and Interharmonic Analysis*, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 19, No. 3, 2004, 993–1001.
- [89] GAŚSIOR M., GONZALEZ J.L., *Improving FFT Frequency Measurement Resolution by Parabolic and Gaussian Spectrum Interpolation*, AB-Note-2004-021/023 BDI, CERN, Feb./May 2004; *Proceedings of the 11th Beam Instrumentation Workshop (BIW'2004)*, Knoxville TN, USA, 2004, Vol. 732, 276–285 (scitation.aip.org/proceedings/volume.jsp).
- [90] GAŚSIOR M., *Improving Frequency Resolution of Discrete Spectra*, A doctoral dissertation, AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland, 2006.
- [91] GEÇKINLI N.C., YAVUZ D., *Some Novel Windows and a Concise Tutorial Comparison of Window Families*, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 26, No. 6, 1978, 501–507.
- [92] GRANDKE T., *Interpolation Algorithms for Discrete Fourier Transforms of Weighted Signals*, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 32, 1983, 350–355.

- [93] GRAY R.M., *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*, Foundations and Trends in Communications and Information Theory, Vol. 2, No. 3, 2006, 155–239.
- [94] HARRIS F.J., *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proceedings of the IEEE, Vol. 66, No. 1, 1978, 51–83.
- [95] HE B., CABESTAING F., POSTAIRE J.G., ZHANG R., *Narrow-Band Frequency Analysis for Laser-Based Glass Thickness Measurement*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 54, No. 1, 2005, 222–227.
- [96] HIDALGO R.M., FERNANDEZ J.G., RIVERA R.R., LARRONDO H.A., *A Simple Adjustable Window Algorithm to Improve FFT Measurements*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 51, No. 1, 2002, 31–36.
- [97] HIGGINS J.R., *Five short stories about the cardinal series*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 12, No. 1, 1985, 45–89.
- [98] HIKAWA H., JAIN V.K., *Jamming canceller using interpolated FFT*, Proceedings of the IEEE International Conference on Communications (ICC'1990), Atlanta GA, USA, 1990, Vol. 4, 1275–1279.
- [99] HONG D.K., KIM D.J., LEE Y.J., YOON S.H., HONG D., KANG C.E., *A Simple Interpolation Technique for the DFT for Joint System Parameters Estimation in Burst MPSK Transmissions*, IEEE Transactions on Communications, Vol. 51, No. 7, 2003, 1051–1056.
- [100] HU Z., WAN H., *A Novel Generic Fast Fourier Transform Pruning Technique and Complexity Analysis*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 53, No. 1, 2005, 274–282.
- [101] IZYDORCZYK J., PLONKA G., TYMMA G., *Teoria sygnałów. Wstęp*, Helion, Gliwice, 1999, 2006.
- [102] JACOBSEN E., KOOTSOOKOS P., *Fast, Accurate Frequency Estimators*, IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 24, No. 3, 2007, 123–125.
- [103] JAIN V.K., COLLINS W.L., DAVIS D.C., *High-Accuracy Analog Measurements via Interpolated FFT*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 28, No. 2, 1979, 113–121.
- [104] JERRI A.J., *The Shannon Sampling Theorem – Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review*, Proceedings of the IEEE, Vol. 65, No. 11, 1977, 1565–1596.
- [105] JEŚMIANOWICZ L., ŁOŚ J., *Zbiór zadań z algebry*, wyd. 5, PWN, Warszawa, 1972.
- [106] KACZOREK T., *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa 1984, 1998.
- [107] KAMM G.N., *Computer Fourier-transform techniques for precise spectrum measurements of oscillatory data with application to the de Haas-van Alphen effect*, Journal of Applied Physics, Vol. 49, No. 12, 1978, 5951–5970.
- [108] KAY S.M., *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, NJ, 1988.
- [109] KIM K., *Analog-to-Digital Conversion and Harmonic Noises Due to the Integral Nonlinearity*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 43, No. 2, 1994, 151–156.
- [110] KULESZA M., CZYZEWSKI A., *Frequency based criterion for distinguishing tonal and noisy spectral components*, Signal Processing: An International Journal (SPIJ), Vol. 4, No. 1, 2010, 1–67.
- [111] KULKA Z., LIBURA A., NADACHOWSKI M., *Przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe*, WKiŁ, Warszawa, 1987.
- [112] KULKARNI R.G., *Polynomial windows with fast decaying sidelobes for narrow-band signals*, Signal Processing, Vol. 83, 2003, 1145–1149.
- [113] LEE H., *The Cramér-Rao Bound on Frequency Estimates of Signals Closely Spaced in Frequency*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, No. 6, 1992, 1508–1517.
- [114] LEE H., LI F., *Quantification of the Difference Between Detection and Resolution Thresholds for Multiple Closely Spaced Emitters*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 6, 1993, 2274–2277.
- [115] LI Y.F., CHEN K.F., *Eliminating the picket fence effect of the fast Fourier transform*, Computer Physics Communications, Vol. 178, 2008, 486–491.

- [116] LIGUORI C., PAOLILLO A., PIGNOTTI A., *An Intelligent FFT Analyzer With Harmonic Interference Effect Correction and Uncertainty Evaluation*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 53, No. 4, 2004, 1125–1131.
- [117] LIGUORI C., PAOLILLO A., PIGNOTTI A., *Estimation of Signal Parameters in the Frequency Domain in the Presence of Harmonic Interference: A Comparative Analysis*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 55, No. 2, 2006, 562–569.
- [118] LIGUORI C., PAOLILLO C., *IFFTC-Based Procedure for Hidden Tone Detection*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 56, No. 1, 2007, 133–139.
- [119] LYONS R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, WKiŁ, Warszawa, 1999, 2006.
- [120] MACLEOD M.D., *Fast Nearly ML Estimation of the Parameters of Real or Complex Single Tones or Resolved Multiple Tones*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 46, No. 1, 1998, 141–148.
- [121] MAĆKIEWICZ A., *Algorytmy algebry liniowej. Metody bezpośrednie*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2002.
- [122] MAKUR A., MITRA S.K., *Warped Discrete-Fourier Transform: Theory and Applications*, IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 48, No. 9, 2001, 1086–1093.
- [123] MARPLE S.L., *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, 1987.
- [124] MISHRA D.K., *ADC testing using interpolated fast Fourier transform (IFFT) technique*, International Journal of Electronics, Vol. 90, No. 7, 2003, 459–469.
- [125] MITRA S.K., KAISER J.F. (ed.): *Handbook for Digital Signal Processing*, Wiley, 1993.
- [126] MITRA S.K., *Digital Signal Processing. A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, 1998, 2001, 2005.
- [127] NOVOTNY M., SEDLÁČEK M., *To the uncertainty of DFT-based DSP algorithms used for processing multifrequency signals*, Proceedings of the 15th Symposium on Electrical Measurements and Instrumentation & 12th Workshop on ADC Modelling and Testing (TC4), Iasi, Romania, 2007 (www.imeko.org).
- [128] NOVOTNY M., SEDLÁČEK M., *RMS value measurement based on classical and modified digital signal processing algorithms*, Measurement, Vol. 41, 2008, 236–250.
- [129] NUTTALL A.H., *Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 29, No. 1, 1981, 84–91.
- [130] OFFELLI C., PETRI D., *Interpolation Techniques for Real-Time Multifrequency waveform analysis*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 39, No. 1, 1990, 106–111.
- [131] OFFELLI C., PETRI D., *Weighting Effect on the Discrete Time Fourier Transform of Noisy Signals*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 40, No. 6, 1991, 972–981.
- [132] OFFELLI C., PETRI D., *The Influence of Windowing on the Accuracy of Multifrequency Signal Parameter Estimation*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 41, No. 2, 1992, 256–261.
- [133] OKARMA K., *Polynomial windows with low sidelobes' level*, Signal Processing, Vol. 87, 2007, 782–788.
- [134] OLIWA W., *An Influence of Signal Amplitude Variation on Interpolated DFT Method*, Proceedings of the International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES'2010), Gliwice, Poland, 2010, 77–80.
- [135] OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, WKiŁ, Warszawa, 1979.
- [136] OPPENHEIM A.V., WILLSKY A.S., NAWAB S.H.: *Signals & Systems*, Prentice Hall, 1997.
- [137] POULARIKAS A.D. (ed.): *The Transforms and Applications Handbook*, CRC Press, 1996, 2000, 2010.

- [138] PROAKIS J.G., MANOLAKIS D.G., *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, 1992, 1995, 2006.
- [139] QIAN H., ZHAO R., CHEN T., *Interharmonics Analysis Based on Interpolating Windowed FFT Algorithm*, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 22, No. 2, 2007, 1064–1069.
- [140] QING H., ZHENHUI T., *The Cramér Rao Bound of Estimating a Sinusoid*, Proceedings of 9th International Conference on Signal Processing (ICSP'2008), Beijing, China, 2008, 145–148.
- [141] QUINN B.G., *Estimating Frequency by Interpolation Using Fourier Coefficients*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 42, No. 5, 1994, 1264–1268.
- [142] QUINN B.G., *Estimating of Frequency, Amplitude, and Phase from the DFT of a Time Series*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 45, No. 3, 1997, 814–817.
- [143] RABINER L.R., SCHAFFER R.W., RADER C.M., *The chirp-z transform algorithm*, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. 17, No. 2, 1969, 86–92.
- [144] RADIL T., RAMOS P.M., SERRA A.C., *New Spectrum Leakage Correction Algorithm for Frequency Estimation of Power System Signals*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 58, No. 5, 2009, 1670–1679.
- [145] RADIL T., RAMOS P.M., *Frequency domain parameter estimation of two common frequency single-tone signals*, Measurement, Vol. 43, 2010, 1228–1239.
- [146] RAMOS P.M., SERRA A.C., *Comparison of frequency estimation algorithms for power quality assessment*, Measurement, Vol. 42, 2009, 1312–1317.
- [147] RANGARAJAN S.R., SRINIVASAN S., *Generalized method for pruning an FFT type of transform*, IEE Proceedings – Vision, Image and Signal Processing, Vol. 144, No. 4, 1977, 189–192.
- [148] REISENFELD S., ABOUTANIOS E., *A New Algorithm for the Estimation of the Frequency of a Complex Exponential in Additive Gaussian Noise*, IEEE Communications Letters, Vol. 7, No. 11, 2003, 549–551.
- [149] RELJIN I.S., RELJIN B.D., PAPIĆ V.D., *Extremely Flat-Top Windows for Harmonic Analysis*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 56, No. 3, 2007, 1025–1041.
- [150] RENDERS H., SCHOUKENS J., VILAIN G., *High-Accuracy Spectrum Analysis of Sampled Discrete Frequency Signals by Analytical Leakage Compensation*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 33, No. 4, 1984, 287–292.
- [151] RIFE D.C., VINCENT G.A., *Use of the Discrete Fourier Transform in the Measurement of Frequencies and Levels of Tones*, Bell System Technical Journal, Vol. 49, 1970, 197–228.
- [152] RIFE D.C., BOORSTYN R.R., *Single-Tone Parameter Estimation from Discrete-Time Observations*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 20, No. 5, 1974, 591–598.
- [153] RIFE D.C., BOORSTYN R.R., *Multiple Tone Parameter Estimation From Discrete-Time Observations*, Bell System Technical Journal, Vol. 55, No. 9, 1976, 1389–1410.
- [154] SALVATORE L., TROTTA A., *Flat-top windows for PWM waveform processing via DFT*, IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. B, No. 6, 1988, 346–361.
- [155] SANTAMARIA-CABALLERO I., PANTALEÓN-PRieto C.J., IBÁÑEZ-DIAZ J., GÓMEZ-COSIO E., *Improved Procedures for Estimating Amplitudes and Phases of Harmonics with Application to Vibration Analysis*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 47, No. 1, 1998, 209–214.
- [156] SANTAMARIA I., PANTALEÓN C., IBÁÑEZ J., *A Comparative Study of High-Accuracy Frequency Estimation Methods*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 14, No. 5, 2000, 819–834.
- [157] SARKAR I., FAM A.T., *The interlaced chirp Z transform*, Signal Processing, Vol. 86, 2006, 2221–2232.
- [158] SCHARF L.L., *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation and Time Series Analysis*, Addison–Wesley, 1991.

- [159] SCHOUKENS J., RENNEBOOG J., *Modeling the Noise Influence on the Fourier Coefficients after a Discrete Fourier Transform*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 35, No. 3, 1986, 278–286.
- [160] SCHOUKENS J., PINTELOON R., VAN HAMME H., *The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 41, No. 2, 1992, 226–232.
- [161] SEDLÁČEK M., TITĚRA M., *Interpolations in frequency and time domains used in FFT spectrum analysis*, Measurement, Vol. 23, 1998, 185–193.
- [162] SEDLÁČEK M., STOUDEK Z., *Iterative design of DSP cosine windows by placing spectrum zeros, and some new classes of DSP cosine windows*, Measurement, Vol. 43, 2010, 994–1011.
- [163] SEO Y.S., JEONG H.K., JEONG W.B., YOO W.S., AHN S.J., *A Study on the Leakage Error in the Spectrum of Acoustic Intensity*, JSME International Journal Series A, Vol. 47, No. 1, 2004, 42–46.
- [164] SINGH S., SRINIVASAN S., *Architecturally efficient FFT pruning algorithm*, Electronics Letters, Vol. 41, No. 23, 2005, 1305–1306.
- [165] SLEPIČKA D., AGREŽ D., LAPUH R., NUNZI E., PETRI D., RADIL T., SCHOUKENS J., SEDLÁČEK M., *Comparison of Nonparametric Frequency Estimators*, Proceedings of the Instrumentation and Measurement Technology Conference (IMTC'2010), Austin TX, USA, 2010, 73–77.
- [166] SMITH S.T., *Statistical Resolution Limits and the Complexified Cramér-Rao Bound*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 53, No. 5, 2005, 1597–1609.
- [167] SOLOMON O.M., *The Effects of Windowing and Quantization Error on the Amplitude of Frequency-Domain Functions*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 41, No. 6, 1992, 932–937.
- [168] SOLOMON O.M., *The Use of DFT Windows in Signal-to-Noise Ratio and Harmonic Distortion Computations*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 43, No. 2, 1994, 194–199.
- [169] SORENSEN H.V., *Efficient Computation of the DFT with Only a Subset of Input or Output Points*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 3, 1993, 1184–1200.
- [170] SOUDERS T.M., FLACH D.R., HAGWOOD C., YANG G.L., *The Effects of Timing Jitter in Sampling Systems*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 39, No. 1, 1990, 80–85.
- [171] SREENIVAS T.V., RAO P.V.S., *High-Resolution Narrow-Band Spectra by FFT Pruning*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 28, No. 2, 1980, 254–257.
- [172] SRIPAD A.B., SNYDER D.L., *A Necessary and Sufficient Condition for Quantization Errors to be Uniform and White*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 25, No. 5, 1977, 442–448.
- [173] STEINHAGEN R.J., *Tune and chromaticity diagnostics*, Proceedings of the CERN Accelerator School: Course on Beam Diagnostics (CAS'2008), Dourdan, France, 2008, Report CERN-2009-005, 317–359 (cdsweb.cern.ch/record/1213281).
- [174] STOICA P., NEHORAI A., *MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramér-Rao Bound*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, No. 5, 1989, 720–741.
- [175] STOICA P., NEHORAI A., *MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramér-Rao Bound: Further Results and Comparisons*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 38, No. 12, 1990, 2140–2150.
- [176] STOICA P., ŠIMONYTĚ V., SÖDERSTRÖM T., *On the resolution performance of spectral analysis*, Signal Processing, Vol. 44, 1995, 153–161.
- [177] SUN H., CHI L., QU W., ZHANG T., *Rife Spectrum Estimation Algorithm Based on Phase Criterion*, Proceedings of the 2nd International Congress on Image and Signal Processing (CISP'2009), Tianjin, China, 2009, 1–5.

- [178] SWINGLER D.N., *Frequency Estimation for Closely Spaced Sinusoids: Simple Approximations to the Cramér–Rao Lower Bound*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 1, 1993, 489–495.
- [179] SZABATIN J., *Podstawy teorii sygnałów*, WKiŁ, Warszawa, 1982, 1990, 2003, 2007, 2008.
- [180] SZMAJDA M., GÓRECKI K., MROCZKA J., BORKOWSKI J., *Antialiasing filters in power quality digital measurement systems*, Metrology and Measurement Systems, 2005, Vol. 12, No. 4, 355–370.
- [181] SZMAJDA M., GÓRECKI K., MROCZKA J., BORKOWSKI J., *The antialiasing filter parameters proposition for laboratory and domestic equipment application of power quality measurements systems*, Metrology and Measurement Systems, 2007, Vol. 14, No. 3, 361–374.
- [182] TADEUSIEWICZ R., *Sygnal mowy*, WKiŁ, Warszawa, 1988.
- [183] UMESH S., NELSON D., *Computationally efficient estimation of sinusoidal frequency at low SNR*, Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'1996), Atlanta GA, USA, 1996, Vol. 5, 2797–2800.
- [184] VENKATARAMANAN R., PRABHU K.M.M., *Estimation of frequency offset using warped discrete-Fourier transform*, Signal Processing, Vol. 86, 2006, 250–256.
- [185] WAGDY M.F., AWAD S.S., *Effect of Sampling Jitter on Some Sine Wave Measurements*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 39, No. 1, 1990, 86–89.
- [186] WEN H., TENG Z., GUO S., *Triangular Self-Convolution Window With Desirable Sidelobe Behaviors for Harmonic Analysis of Power System*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 59, No. 3, 2010, 543–552.
- [187] YANG X.Z., LI H.Y., CHEN K.F., *Optimally averaging the interpolated fast Fourier transform in both directions*, IET Science, Measurement and Technology, Vol. 3, No. 2, 2009, 137–147.
- [188] ZAKHAROV Y.V., TOZER T.C., *Frequency estimator with dichotomous search of periodogram peak*, Electronics Letters, Vol. 35, No. 19, 1999, 1608–1609.
- [189] ZHU L., DING H., DING K., *Phase regression approach for estimating the parameters of a noisy multifrequency signal*, Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings, Vol. 151, No. 5, 2004, 411–420.
- [190] ZIELIŃSKI T.P., *Reprezentacje sygnałów niestacjonarnych typu czas–częstotliwość i czas–skala*, wyd. AGH, nr 10 seria „Rozprawy, monografie”, Kraków, 1994.
- [191] ZIELIŃSKI T.P., *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Wyd. AGH, Kraków, 2002.
- [192] ZIELIŃSKI T.P., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*, WKiŁ, Warszawa, 2005, 2007, 2009.
- [193] ZIVANOVIC M., CARLOSENA A., *Nonparametric Spectrum Interpolation Methods: A Comparative Study*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 50, No. 5, 2001, 1127–1132.
- [194] ZIVANOVIC M., CARLOSENA A., *Extending the limits of resolution for narrow-band harmonic and modal analysis: a non-parametric approach*, Measurement Science and Technology, Vol. 13, No. 12, 2002, 2082–2089.

Methods of spectrum interpolation and the LIDFT method for estimation of multifrequency signal parameters

The study describes the interpolation methods of DFT spectrum and a method of linear interpolation of DFT (LIDFT) developed by the author, which are applied in estimation of the parameters of multifrequency signal. These parameters are: amplitudes, frequencies and phases of sinusoidal components of the signal consisting of many such components. The study includes a review of the interpolation methods of DFT spectrum obtained with the use of various time windows. The multipoint interpolated DFT (MWIDFT) method is presented in detail, which is defined for the class I of Rife-Vincent time windows, belonging to the windows with the cosine base. The most important characteristics of these methods, presented in the study, are systematic errors and variance (in reference to Cramér-Rao bound) of the frequency estimator.

The study presents various versions of the approximations of the time window spectrum by linear functions. Approximation of the unit circle by a polygon and minimization of the errors of this approximation are also presented. The identity of approximation of the window spectrum by linear functions and approximation of the unit circle by a polygon is proved. Based on these results, an improved version of the LIDFT method is presented, which significantly improved efficiency and accuracy of the estimation. The characteristics of the maximum systematic errors and variance of the amplitude and frequency estimation, as a function of the distance between components in the spectrum, are obtained. An example of implementation of the LIDFT method in the Matlab environment and the results of the estimation for the signal consisting of three sinusoids confirm its high accuracy. This example also shows the application range for LIDFT method, for which the previous interpolation methods fail.

