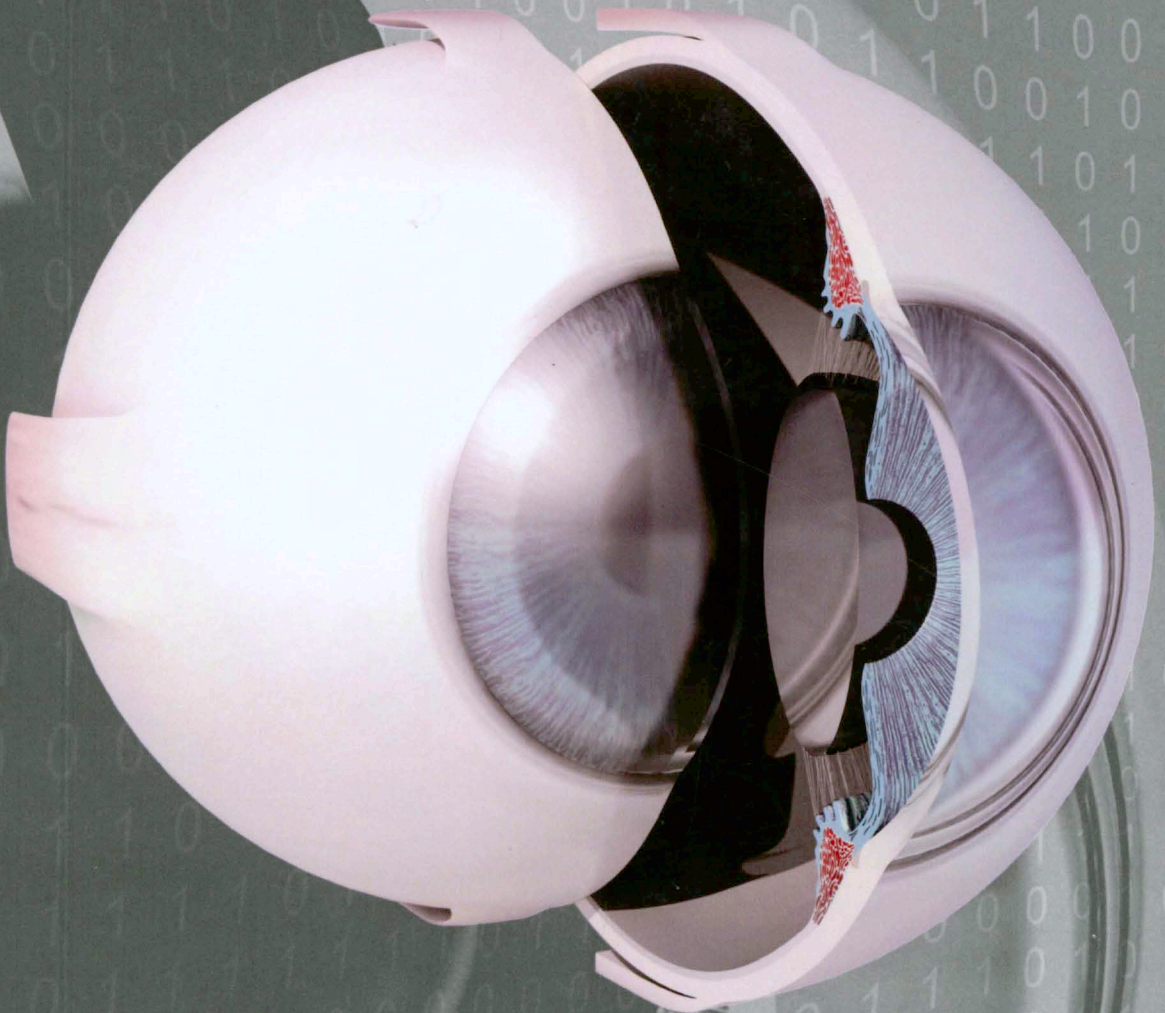


Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100237363

WIESŁAW ŚRÓDKA



**MODEL BIOMECHANICZNY
LUDZKIEJ GAŁKI OCZNEJ**

Wiesław ŚRÓDKA

Biomechanical model of human eyeball

Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn
Politechniki Wrocławskiej

91

Seria:
Monografie

34

Wiesław Śródka

**Model biomechaniczny
ludzkiej gałki ocznej**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 2010

Recenzenci

Barbara PIERSCIONEK
Henryk KASPRZAK

Opracowanie redakcyjne

Alina KACZAK

Korekta

Hanna JUREK

Projekt okładki

Kazimierz ŚRÓDKA

Wszelkie prawa zastrzeżone. Żadna część niniejszej książki, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2010

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.wroc.pl>

e-mail: oficwyd@pwr.wroc.pl

ISSN 0324-962X

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 705/2010.

Spis treści

Przedmowa	9
Wykaz oznaczeń	14
Część I	17
1. Wprowadzenie	17
1.1. Temat i zakres badań.....	17
1.2. Cel pracy i przeznaczenie modelu gałki ocznej.....	20
1.3. Co jest w tej książce.....	21
1.4. Czego nie ma.....	22
1.5. Co szczególnego jest w budowie oka ludzkiego	23
1.6. Założenia podstawowe.....	25
1.7. Ograniczenia modelu	26
2. Budowa zewnętrznych powłok oka.....	29
2.1. Rogówka	29
2.2. Twardówka	33
3. Model materiału – przegląd badań doświadczalnych.....	35
3.1. Jakie parametry	35
3.2. Materiał rogówki.....	36
3.2.1. Stroma	36
3.2.2. Błona Bowmana i błona Descemeta	38
3.3. Materiał rąbka i twardówki	39
3.4. Ułamek Poissona tkanek oka – głos polemiczny w sprawie jego pomiaru.....	41
3.5. Kwestia anizotropii materiału	45
4. Model mechaniczny gałki ocznej	47
4.1. Czym jest <i>model</i> , jakie są jego możliwości.....	47
4.2. Geometria powłoki rogówkowo-twardówkowej.....	48
4.3. Układ optyczny	49
4.4. Parametry materiału	52
4.4.1. Rogówka.....	52
4.4.2. Twardówka	54
4.4.3. Rąbek.....	56
4.4.4. Błona Descemeta	57
4.5. Model numeryczny	57
4.5.1. Struktura	57
4.5.2. Zamocowanie	60
4.5.3. Aplanacja.....	60
4.6. Hipoteza samonastawności optycznej oka	61

5. Problemy identyfikacji parametrów strukturalnych modelu biomechanicznego	65
5.1. Materiał	65
5.1.1. Badania laboratoryjne	65
5.1.2. Metoda odwrotna identyfikacji	66
5.2. Geometria gałki ocznej	67
5.2.1. Metody kliniczne jej określania	67
5.2.2. Metoda odwrotna identyfikacji profilu rogówki	68
6. Testowalne stany obciążenia modelu	70
6.1. Tonometria aplacyjana Goldmanna	70
6.1.1. Znaczenie metody w badaniach numerycznych	70
6.1.2. Podstawy formalne metody	71
6.1.3. Problem wartości kalibracyjnych	73
6.2. Sztywność gałki ocznej	78
6.3. Przemieszczenia wierzchołka rogówki wymuszane zmianami IOP	79
Część II	81
7. Identyfikacja materiałów powłok oka	81
7.1. Parametry materiału rogówki	81
7.1.1. Symulacja numeryczna GAT	82
7.1.2. Test sztywności gałki ocznej	87
7.1.3. Test przemieszczenia wierzchołka rogówki	88
7.1.4. Podsumowanie wyników	90
7.1.4.1. Test GAT	90
7.1.4.2. Test sztywności gałki ocznej	97
7.1.4.3. Test uniesienia wierzchołka rogówki	97
7.1.4.4. Uwaga końcowa	98
7.2. Identyfikacja materiału twardówki i rąbka w modelu samonastawnym optycznie	98
7.2.1. Samonastawność wymuszana przez twardówkę	99
7.2.2. Samonastawność wymuszana przez rąbek	101
7.2.3. Identyfikacja materiału twardówki – podsumowanie wyników	102
7.2.3.1. Rola twardówki	102
7.2.3.2. Rola rąbka	103
7.2.3.3. Parametry materiałów powłok oka	104
7.2.3.4. Sprężenie optyczno-mechaniczne	106
7.2.4. Alternatywny model samonastawności optycznej	107
7.3. Rogówka po keratotomii radialnej – materiał błony Descemeta	109
7.3.1. Parametry kliniczne keratotomii radialnej	109
7.3.2. Anizotropia rogówki	111
7.3.3. Symulacja numeryczna keratotomii radialnej	116
7.3.4. Dyskusja wyników	121
7.3.5. Podsumowanie	123
Część III	127
8. Model biomechaniczny gałki ocznej w zastosowaniach	127
8.1. Tonometria aplacyjna w ujęciu nieliniowym	127
8.1.1. Analiza rozwiązań numerycznych	127
8.1.1.1. Zależność p_G od promienia strefy aplacji r i od IOP	127
8.1.1.2. Przykład rozwiązania	129
8.1.1.3. Dyskusja wyników	131
8.1.2. Model niekalibracyjny	135

8.1.2.1. Zależność p_G od CCT	136
8.1.2.2. Zależność p_G od promienia krzywizny rogówki	137
8.1.2.3. Co wynika z tych rozwiązań	138
8.1.3. Analityczny opis funkcji $p(p_G)$ w modelu niekalibracyjnym	140
8.1.3.1. Aproksymacja kwadratowa	140
8.1.3.2. Propozycja opisu analitycznego	144
8.1.3.3. Porównanie z tonometrią Goldmanna	153
8.2. Tonometria sferyczna	160
8.2.1. Podstawy teoretyczne DCT wyłożone przez twórców metody	160
8.2.2. Symulacja numeryczna DCT	164
8.2.2.1. Rozkład ciśnienia pod nasadką tonometru	164
8.2.2.2. Obciążenia rogówki przez nasadkę o promieniu $R_D = 9,5$ mm	167
8.2.2.3. Obciążenia rogówki przez nasadkę o promieniu $R_D = 10,5$ mm	169
8.2.2.4. Wskazania tonometru w DCT	170
8.2.2.5. Jak p_D zależy od CCT	172
8.2.2.6. Rozkład naprężenia na grubości rogówki	174
8.2.2.7. Jakie ciśnienie mierzy czujnik	176
8.2.2.8. Porównanie DCT i GAT	177
8.2.3. Tonometria rezonansowa (ART)	181
8.2.3.1. Symulacja numeryczna ART	182
8.2.3.2. Wnioski	185
8.2.4. Równanie równowagi wierzchołka rogówki	186
8.2.4.1. Siła napięcia błonowego	186
8.2.4.2. Siły adhezji i napięcia powierzchniowego	188
8.2.4.3. Ciśnienie p_D rejestrowane przez czujnik	193
8.2.5. Tonometria – podsumowanie	194
8.3. Warunki brzegowe rozwiązań MES a funkcje optyczne modelu biomechanicznego gałki ocznej	195
8.3.1. Model pełny	196
8.3.2. Model rogówki utwierdzonej na brzegu	197
8.3.3. Model rogówki na podporze przesuwnej	198
8.3.4. Warunki brzegowe – podsumowanie	200
8.4. Symulacja numeryczna PRK	201
8.4.1. Rola warunków brzegowych w refrakcji modelu rogówki	201
8.4.1.1. Model pełny	203
8.4.1.2. Model rogówki utwierdzonej	205
8.4.1.3. Dyskusja wyników	206
8.4.2. Parametry PRK w planowaniu zmiany refrakcji gałki ocznej	207
8.4.3. Tonometria aplanacyjna rogówki po PRK	210
Dodatek	213
Spłaszczenie błony kulistej	213
Literatura	233
Streszczenie w języku angielskim	241

Contents

Preface.....	9
List of symbols.....	14
Part I.....	17
1. Introduction.....	17
1.1. Subject and scope of research.....	17
1.2. Purpose of research and use of eyeball model.....	20
1.3. What the book includes.....	21
1.4. What the book does not include.....	22
1.5. What is special in structure of human eyeball.....	23
1.6. Basic assumptions.....	25
1.7. Model limitations.....	26
2. Structure of eyeball outer shells.....	29
2.1. Cornea.....	29
2.2. Sclera.....	33
3. Material model – overview of experimental research.....	35
3.1. Parameters applied.....	35
3.2. Corneal material.....	36
3.2.1. Stroma.....	36
3.2.2. Bowman’s membrane and Descemet’s membrane.....	38
3.3. Material of limbus and sclera.....	39
3.4. Poisson ratio of eyeball tissues – dispute over its measurement.....	41
3.5. Problem of material anisotropy.....	45
4. Mechanical model of eyeball.....	47
4.1. What the <i>model</i> is and what its possibilities are.....	47
4.2. Geometry of corneoscleral shell.....	48
4.3. Optical system.....	49
4.4. Material parameters.....	52
4.4.1. Cornea.....	52
4.4.2. Sclera.....	54
4.4.3. Limbus.....	56
4.4.4. Descemet’s membrane.....	57
4.5. Numerical model.....	57
4.5.1. Structure.....	57
4.5.2. Mounting.....	60
4.5.3. Applanation.....	60
4.6. Optical self-adjustment of eyeball hypothesis.....	61

5. Identification problems concerning structural parameters of model	65
5.1. Material	65
5.1.1. Laboratory tests	65
5.1.2. Inverse process	66
5.2. Geometry of eyeball	67
5.2.1. Clinical methods of its determination	67
5.2.2. Inverse process of corneal profile identification	68
6. Testable states of model loading	70
6.1. Goldmann applanation tonometry	70
6.1.1. Significance of the method in numerical research	70
6.1.2. Formal basis of the method)	71
6.1.3. Problem of calibration values	73
6.2. Ocular rigidity	78
6.3. Corneal apex elevation forced by IOP	79
Part II	81
7. Identification of materials of eyeball shells	81
7.1. Parameters of corneal material	81
7.1.1. Numerical GAT simulation	82
7.1.2. Ocular rigidity test	87
7.1.3. Corneal apex elevation test	88
7.1.4. Summary of results	90
7.1.4.1. GAT test	90
7.1.4.2. Eyeball rigidity test	97
7.1.4.3. Corneal apex elevation test	97
7.1.4.4. Closing remark	98
7.2. Identification of scleral material and limbal material in optical self-adjustment model	98
7.2.1. Self-adjustment forced by sclera	99
7.2.2. Self-adjustment forced by limbus	101
7.2.3. Identification of scleral material – summary of results	102
7.2.3.1. Role of sclera	102
7.2.3.2. Role of limbus	103
7.2.3.3. Parameters of materials of eyeball shells	104
7.2.3.4. Optical-and-mechanical coupling	106
7.2.4. Alternative model of optical self-adjustment	107
7.3. Cornea after radial keratotomy – Descemet’s membrane material	109
7.3.1. Clinical parameters of radial keratotomy	109
7.3.2. Corneal anisotropy	111
7.3.3. Numerical simulation of radial keratotomy	116
7.3.4. Discussion of results	121
7.3.5. Summary	123
Part III	127
8. Biomechanical model of eyeball and its applications	127
8.1. Applanation tonometry in nonlinear aspect	127
8.1.1. Analysis of numerical solutions	127
8.1.1.1. Dependence of p_G on radius of applanation zone and on IOP	127
8.1.1.2. Example of solution	129
8.1.1.3. Discussion of results	131
8.1.2. Non-calibration model	135

8.1.2.1. Dependence of p_G on CCT	136
8.1.2.2. Dependence of p_G on axial radius of corneal curvature	137
8.1.2.3. What results from those solutions	138
8.1.3. Analytical description of $p(p_G)$ function in non-calibration model	140
8.1.3.1. Square approximation	140
8.1.3.2. Proposal of analytical description	144
8.1.3.3. Comparison with Goldmann tonometry	153
8.2. Spherical tonometry	160
8.2.1. Theoretical DCT basis put forward by authors of the method	160
8.2.2. Numerical DCT simulation	164
8.2.2.1. Pressure distribution under tonometer tip	164
8.2.2.2. Cornea loading by contoured surfaces with radius $R_D = 9,5$ mm	167
8.2.2.3. Cornea loading by contoured surfaces with radius $R_D = 10,5$ mm	169
8.2.2.4. Tonometer readings in DCT	170
8.2.2.5. Dependence of p_D on CCT	172
8.2.2.6. Stress distribution on cornea thickness	174
8.2.2.7. What pressure does sensor measure	176
8.2.2.8. Comparison between DCT and GAT	177
8.2.3. Applanation resonance tonometry (ART)	181
8.2.3.1. Numerical ART simulation	182
8.2.3.2. Conclusions	185
8.2.4. Apex equilibrium equation	186
8.2.4.1. Membrane tension force	186
8.2.4.2. Adhesion and surface tension	188
8.2.4.3. Pressure recorded by sensor	193
8.2.5. Tonometry – summary	194
8.3. Optical functions of eyeball model dependence on boundary conditions of FEM solution	195
8.3.1. Whole ocular model	196
8.3.2. Fixed corneal model	197
8.3.3. Corneal model with edge roller supports	198
8.3.4. Boundary conditions – summary	200
8.4. Numerical PRK simulation	201
8.4.1. Role of boundary conditions in corneal model refraction	201
8.4.1.1. Whole ocular model	203
8.4.1.2. Fixed corneal model	205
8.4.1.3. Discussion of results	206
8.4.2. PRK parameters in planning the change in eyeball refraction	207
8.4.3. Applanation tonometry after PRK	210
Appendix	213
Applanation of aspherical membrane	213
Bibliography	233
Summary	241

Przedmowa

Tematem monografii jest oczywiście model biomechaniczny gałki ocznej – zgodnie z tytułem – jednak oprócz problemów obliczeniowych obejmuje on także przeszkody niezwiązane z mechaniką. Jedną z największych przeszkód stwarzają sami badacze skupieni na pomiarze ciśnienia wewnątrzgałkowego, a niektóre efekty ich działań są dobrą ilustracją tego, co określamy jako „manowce nauki”. Ten dziwny jak na standardy fizyki dział biomechaniki nazywany jest tonometrią – piszę więc o tym, że do rozwiązania spłaszczonej powłoki rogówkowej zamiast praw i metod mechaniki wykorzystywany bywa autorytet i słowo jednego z twórców tonometrii, o tym też jak wiara w jego nieomyślność zamienia mechanikę w paranaukę, a osiągnięte przez badaczy rezultaty grzęzną w czczej empirii, piszę wreszcie o tym, że niektóre tezy tonometrii są dzisiaj bardziej interesujące dla socjologa nauki niż dla fizyka.

Historia badań, które doprowadziły mnie do tak pesymistycznej oceny biomechaniki oka, jest krótka – jak na *historię*. Zaczyna się w 1995 roku. W tamtym czasie prof. Henryk Kasprzak z Instytutu Fizyki Politechniki Wrocławskiej zaproponował mi współpracę w interdyscyplinarnym zespole zgłębiającym tajemnice optyki oka ludzkiego. Moja rola w tym przedsięwzięciu jest nieskomplikowana, polega na opracowaniu modelu konstrukcyjnego powłoki, jaką jest gałka oczna, rozwiązywanego metodą elementów skończonych. Pierwsze zadanie polegało na sprawdzeniu pomysłu prof. Kasprzaka, który określamy jako hipotezę samonastawności optycznej oka. Hipoteza ta integruje składniki strukturalne gałki ocznej – rogówkę, twardówkę i rąbek – w spójny układ optyczny. Zbudowanie takiego, samonastawnego, modelu okazało się możliwe, a kolejne rezultaty były już konsekwencją tego pierwszego.

Problem, przed jakim następnie stanąłem, polegał jednak na tym, że te wyniki poszły za daleko – znacznie dalej niż się spodziewałem. Ujawniły mianowicie pewne funkcje modelu gałki ocznej niezgodne z tym wszystkim, co jest propagowane w literaturze przedmiotu. Okazało się bowiem, że najważniejsza do dzisiaj technika pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego w warunkach ambulatoryjnych, nazywana tonometrią aplanacyjną Goldmanna (w skrócie GAT – *Goldmann applanation tonometry*), zasadniczo się różni w swoich postulatach i przewidywaniach od tego, co wynika z moich obliczeń. Byłem przekonany wtedy, że to wina modelu. Sprawdzanie rezultatów –

studia literaturowe, badanie opublikowanych przypadków, konsultacje ze specjalistami na konferencjach i seminariach (które i tak niczego nie wniosły, bo mechanika zjawisk towarzyszących GAT, opisana w podrozdziale 8.1, wydaje się zupełnie nieznaną) trwały kilka lat. Ostatecznie nabrałem przekonania, że to nie wady modelu są przyczyną wspomnianych niezgodności, lecz potęga tradycji zaklęta w podstawach tonometrii Goldmanna. Oto powody takiego przekonania:

W 1972 roku Woo z zespołem [1972a] (to jest jedna z częściej cytowanych publikacji poświęconych symulacji numerycznej GAT) próbował zbudować model numeryczny gałki ocznej. Mimo użycia nieliniowej charakterystyki materiału rogówki, $\sigma = A[\exp(\alpha\varepsilon) - 1]$ (σ i ε – naprężenie i odkształcenie, A i α – stałe materiałowe), natrafili na trudną do pokonania barierę – nie mogli osiągnąć rozwiązania, w którym ciśnienie średnie, wywierane na rogówkę przez tonometr aplanacyjny Goldmanna p_G , jest równe ciśnieniu wewnątrzgałkowemu p . Trzeba bowiem wiedzieć, że równość tych ciśnień, nazywana prawem Imberta–Ficka, jest podstawą tonometrii aplanacyjnej. Przeszkodę próbowali sforsować na gruncie założeń przyjętych przez Goldmanna, zmniejszali zatem siłę zginania powłoki o pewną stałą wartość mającą pochodzić od siły napięcia powierzchniowego w filmie łożowym oraz zmniejszali wartości parametrów materiałowych strefy spłaszczenia, zakładając, że ten obszar rogówki jest odciążony. Próby dopasowania modelu do wizji Goldmanna musiały być dla Woo i jego kolegów traumatyczne, bo uzyskanie rozwiązania, w którym p_G jest choćby tylko zbliżone do p , było bardzo trudne (p jest zmienne i obejmuje zakres od zera do kilkudziesięciu mmHg). Patrząc na ich wysiłki z mojej dzisiejszej perspektywy, mogę powiedzieć, że przyczyn tych trudności było kilka: autorzy przyjęli symetryczną charakterystykę materiałową (jako funkcję nieparzystą), a jednocześnie była ona niewystarczająco zakrzywiona (określony doświadczalnie współczynnik A był za duży, a wykładnik α – za mały). Największy jednak problem jest w tym, że rogówka nie stosuje się do prawa Imberta–Ficka (jak usiłuję to wykazać w tej monografii), nawet gdy dopuścimy jakieś niewielkie, rozsądne, odstępstwo ciśnienia p_G od p . Czytając opis obliczeń w cytowanej pracy Woo, możemy się czuć zaskoczeni, że aby otrzymać zgodność z prawem Imberta–Ficka, autorzy dopasowują „ręcznie” moduł sprężystości rogówki do bieżącej wartości p , oddzielnie dla ciśnienia 0 i dla ciśnienia 17 mmHg. Taki zabieg, zapewniający spełnienie przez model założeń przyjętych a priori, nie weryfikuje ich – opisana procedura daje jedynie posłuszne tym założeniom narzędzie. Publikując ten wynik, przekazali jednak niezwykle ważną informację wszystkim, którzy próbują zbudować model biomechaniczny gałki ocznej. Nie napisali tego wprost, jasno jednak z tego wynika: ciśnienie p_G w ich modelu nie równa się ciśnieniu p , gdy to ciśnienie p rośnie. Równość tych ciśnień daje się w modelu zachować tylko przez wymianę materiału rogówki.

Od czasu publikacji Woo – a była to jedna z pierwszych prób (jeśli nie pierwsza) – niewiele się zmieniło w symulacjach numerycznych GAT. Chyba tylko to, że dzisiaj kwestia *funkcyjnej zależności* ciśnienia p_G od ciśnienia p jest w oryginalnych publika-

cyjach omijana. (W pozostałych także.) Identyfikacja materiału rogówki za pomocą modelu, przez doprowadzenie w rozwiązaniu do równości ciśnienia zewnętrznego i wewnętrznego, jest dokonywana tylko w jednym punkcie – dla wartości nominalnej (bo dla innego ciśnienia należałoby *zmienić* materiał, aby znowu ciśnienia stały się równe – jak to uczynił Woo). Nie udało mi się znaleźć ani jednej publikacji, w której autor podaje przekonujące rozwiązania ciśnienia p_G , uzależnionego funkcyjnie od ciśnienia p , *dla tego samego modelu*. Można odnieść wrażenie, że wszelka próba sprawdzenia prawa Imberta–Ficka na gruncie teorii jest w tonometrii tematem tabu.

Ten i podobne przypadki, obejmujące także wyniki badań doświadczalnych, uzasadniają potrzebę nowego spojrzenia na mechaniczne podstawy tonometrii. Uważam, że część trudności, jakie napotykają autorzy modeli biomechanicznych gałki ocznej są do pokonania po zakwestionowaniu postulatów Goldmanna zawartych w GAT. Kilka też głoszonych w literaturze na ten temat, opartych na przesłankach, które wcale nie są oczywiste i jak najbardziej wymagają dowodu, sprowokowało mnie do podjęcia próby zweryfikowania podstaw teoretycznych tonometrii. Wyniki obliczeń przedstawionych w tej monografii usprawiedliwiają mój sceptycyzm i pokazują, że intuicja (najwyższa instancja obok autorytetu Goldmanna, do której odwołują się autorzy prac z zakresu tonometrii) bywa skuteczna, ale tylko wtedy, gdy wspierana jest przez teorię. Postulaty GAT trudno było sprawdzić w połowie XX wieku, dzisiaj możliwości takie dają metody numeryczne analizy konstrukcji. Okazuje się jednak, że przegrywają one z potęgą fałszywych *przekonań*, pielęgnowanych od tamtego czasu.

Tonometria nie jest jedynym aspektem modelu gałki ocznej, który wymaga weryfikacji. Przekonanie o braku znaczenia kinematycznych warunków brzegowych dla funkcji optycznych rogówki lub o braku wpływu odkształceń układu optycznego rogówka–soczewka na prognozy pooperacyjne w modelowaniu efektów chirurgii refrakcyjnej, propagowane w literaturze, należą do tej samej kategorii. Także te zagadnienia stanowią przedmiot badań składających się na treść niniejszego opracowania. Choć nie budzą takiego oporu środowiska naukowego jak moja wersja tonometrii, to jednak referowane w tej monografii wyniki rozwiązań numerycznych także się różnią od ich odpowiedników w literaturze. Sądzę, że przyczyna braku konfliktu jest całkiem prozaiczna – w porównaniu z tonometrią wiedza o układzie optycznym gałki ocznej znajduje się na jeszcze wcześniejszym etapie rozwoju. Może to dla niej lepiej.

Jednostki układu SI nie zostały zaakceptowane przez środowisko okulistyczne, zarówno medyczne, jak i biomechaniczne. Konserwatyzm ten przejawia się nie tylko w utrzymywaniu do dzisiaj milimetra słupa rtęci jako jednostki ciśnienia, ale nawet „grama” jako jednostki siły. Można odnieść wrażenie, że w kwestii jednostek oraz swoistego stosunku do warsztatu badawczego w tym dziale biomechaniki czas stanął na przelomie XIX i XX stulecia. (Może jest w tym jakiś urok.) Z tego względu pozostawiam milimetr słupa rtęci jako jednostkę ciśnienia. *Gram siły* zachował się do dzisiaj w tonometrii aplanacyjnej dlatego, że średnica powierzchni spłaszczenia rogówki

podczas pomiaru IOP dobrana została tak, aby iloraz tej siły i powierzchni był równy ciśnieniu 10 mmHg.

Moje próby utworzenia modelu biomechanicznego gałki ocznej były wspierane przez wiele osób, którym jestem za to głęboko wdzięczny. Dziękuję przede wszystkim profesorowi Henrykowi Kasprzakowi, który zmotywował mnie do napisania tej monografii, bez Jego zachęty sam nie domyśliłbym się, że to jest możliwe. Jego nieokiełznana fantazja przez cały okres naszej współpracy dostarczała tematów badawczych w liczbie znacznie przekraczającej moje (czyjekolwiek!) możliwości czasowe. Jeśli udało mi się zrealizować ich niewielką część, to – z kolei – dzięki nieustającej stymulacji ze strony dr Magdaleny Asejczyk-Widlickiej. Te dwie osoby odkryły niedostępną dotąd dla mnie prawdę, że zdolny jestem do aż tak dużego wysiłku.

Wiele zawdzięczam współpracy ze specjalistami z innych dziedzin, integrowanych naszym wspólnym przedsięwzięciem, jakim jest model biomechaniczny gałki ocznej. Do szczególnych entuzjastów tego projektu należą prof. Barbara Pierscionek i dr Robert Iskander. Z ich pomocą zgłębiałem tajniki układu optycznego oka ludzkiego i niniejszym składam im za to podziękowanie. W zagadnienia tonometrii wprowadził mnie dr Andrzej Hachoł. Nie tylko ułatwił mi zapoznanie się z jej powszechnie kultywowaną dzisiaj wizją, ale także nie przeszkadzał mi w rozstaniu się z nią, co uzasadnia moją wdzięczność.

Dziękuję też profesorowi Eugeniuszowi Rusińskiemu, który pełnił funkcję dziekana w czasie, gdy pracowałem nad modelem. Jego osobiste zaangażowanie bardzo ułatwiło mi tę pracę i przyczyniło się do powstania kilku moich publikacji.

Wiesław Śródka

*układ optyczny oka, tonometria, chirurgia refrakcyjna,
eksperyment numeryczny, stateczność konstrukcji, powłoka nieliniowa*

Wiesław ŚRÓDKA*

MODEL BIOMECHANICZNY LUDZKIEJ GAŁKI OCZNEJ

Przedmiotem badań jest model strukturalny gałki ocznej oraz możliwość symulowania za jego pomocą funkcji optycznych oka. Analizie poddano także aspekty mechaniczne pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego (IOP) techniką określaną jako tonometria. Opracowanie jest próbą stworzenia podstaw teoretycznych mechaniki powłok oka w obu wymienionych zakresach.

Obliczenia oparte są na trzech podstawowych założeniach: samonastawności optycznej modelu gałki ocznej, równości ciśnień po obu stronach strefy aplanacji rogówki kalibracyjnej dla ciśnienia nominalnego i dla nienormalnej izotropii materiału. Rozwiązania, osiągane metodą elementów skończonych, uwzględniają fizyczną i geometryczną nieliniowość konstrukcji. Przyjęta strategia obliczeń umożliwia badanie stateczności powłoki rogówkowej w tonometrii aplanacyjnej Goldmanna.

Wyznaczone w drodze obliczeń numerycznych ciśnienie aplanacji okazuje się nieliniową funkcją IOP, znacznie odbiegającą od przewidywań Goldmanna. Przeprowadzono szczegółową krytykę tej metody oraz zaproponowano nowy opis teoretyczny pomiaru, a także wynikający z niego formalizm umożliwiający korygowanie odczytu ze względu na grubość rogówki i promień jej krzywizny. Zbadane zostały także pokrewne techniki pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego nazywane tonometrią dynamiczną (DCT) i tonometrią rezonansową (ART). Wykorzystanie hipotezy samonastawności oka pozwoliło zintegrować elementy składowe gałki ocznej w jeden spójny układ optyczny. Badanie funkcji optycznych modelu wykazało ścisłą relację zachodzącą pomiędzy materiałem rogówki, rąbka i twardówki. Dla zachowania samonastawności modelu, sieczny moduł sprężystości twardówki musi być około pięciu razy większy od modułu rogówki. Określony metodą odwrotną moduł sieczny rogówki zbliżony jest do 0,27 MPa dla ciśnienia nominalnego.

Parametry mechaniczne powłok gałki ocznej nie są wzajemnie niezależne, powiązania między nimi są narzucane przez funkcje optyczne. Zależności te ułatwiają identyfikację strukturalną oka. Odkryte za pomocą modelu efekty nieliniowe w tonometrii aplanacyjnej fałszyfikują teorię Goldmanna, a także wynikającą z niej procedurę korekcji wyniku pomiaru IOP. Skutki te obejmują również DCT i ART, oparte na postulatach Goldmanna.

* Wydziałowy Zakład Wytrzymałości Materiałów, Politechnika Wroclawska, ul. Smoluchowskiego 25, 50-370 Wrocław.

Wykaz oznaczeń

- A_{aplan} – kołowa powierzchnia spłaszczenia o średnicy D_{aplan} , równa $7,35 \text{ mm}^2$,
ART – tonometria rezonansowa (*applanation resonance tonometry*),
 A_x – współczynnik w charakterystyce wykładniczej materiału x , Pa,
CCT, t – centralna grubość rogówki (*central corneal thickness*), m,
 C_R – współczynnik korekcji wyniku pomiaru IOP w GAT ze względu na promień krzywizny rogówki R , mmHg/mm,
 C_t – współczynnik korekcji wyniku pomiaru IOP w GAT ze względu na grubość rogówki CCT, mmHg/mm,
 d – średnica strefy dopasowania rogówki do konturu końcówki pomiarowej tonometru, m,
 d_{abl} – średnica strefy ablacji w PRK, m,
D – dioptria, m^{-1} ,
 D_{aplan} – średnica kalibracyjna strefy spłaszczenia rogówki końcówką pomiarową tonometru, równa $3,06 \text{ mm}$,
DCT – tonometria dynamiczna (*dynamic contour tonometry*),
 E – moduł sprężystości podłużnej (Younga), Pa,
 F_D – siła nacisku końcówki pomiarowej w DCT, N,
 F_G – siła nacisku końcówki pomiarowej w GAT, N,
 F_n – siła wypadkowa napięcia n na brzegu strefy o średnicy d , N,
 F_p – siła wypadkowa IOP na powierzchni strefy o średnicy d , N,
 F_R – siła nacisku końcówki pomiarowej w ART, N,
 F_S – siła wypadkowa napięcia powierzchniowego w filmie łzowym, N,
 F_t – wypadkowa siły tnącej w powłoce rogówkowej, na brzegu strefy dopasowania konturu („opór zginania” rogówki), N,
GAT – tonometria aplanacyjna Goldmanna (*Goldmann applanation tonometry*),
IOP, p – ciśnienie wewnątrzgałkowe (*intra-ocular pressure*), mmHg, Pa,
LASIK – metoda chirurgicznego korygowania refrakcji rogówki (*Laser-Assisted in Situ Keratomileusis*),
MES – metoda elementów skończonych,
 n – napięcie – siła wewnętrzna w błonie, N/m,

- n – współczynnik załamania światła,
 N_{φ} – napięcie błony na przekroju równoleżnikowym, N/m,
 N_g – napięcie błony na przekroju południkowym, N/m,
 p, IOP – ciśnienie wewnątrzgałkowe, mmHg, Pa,
 p_a – odchylenie ciśnienia lokalnego od wartości średniej, między rogówką a końcówką pomiarową tonometru, mmHg, Pa,
 p_{Dm} – średnie ciśnienie w DCT wywierane przez końcówkę pomiarową tonometru na strefę dopasowania konturu rogówki, mmHg, Pa,
 p_D – średnie ciśnienie w DCT między końcówką pomiarową a rogówką na obszarze do 0,75 mm od osi symetrii (promień czujnika), mmHg, Pa,
 p_G – średnie ciśnienie w GAT wywierane na rogówkę przez końcówkę pomiarową tonometru, mmHg, Pa,
 p_R – średnie ciśnienie w ART wywierane na rogówkę przez końcówkę pomiarową tonometru, mmHg, Pa,
 p_t – średnie ciśnienie na powierzchni strefy dopasowania konturu powodowane siłą F_t , mmHg, Pa,
 P – moc optyczna, m^{-1} (dioptria),
 P_{oko} – moc optyczna układu rogówka–soczewka, m^{-1} ,
 $P_{\text{rogówka}}$ – moc optyczna rogówki, m^{-1} ,
 P_{soczewka} – moc optyczna soczewki (wewnętrznej) oka, m^{-1} ,
 PCT – grubość rogówki w pobliżu rąbka (*peripheral corneal thickness*), mm,
 PRK – fotokeratektomia refrakcyjna (*photorefractive keratectomy*),
 Q – siła aplanacji błony sferycznej, N,
 Q_{limbus} – iloraz modułów siecznych rąbka i rogówki przy stałym naprężeniu,
 Q_{sklera} – iloraz modułów siecznych twardówki i rogówki przy stałym naprężeniu,
 r – promień strefy dopasowania rogówki do końcówki pomiarowej tonometru, równy $d/2$, m,
 R – centralny promień krzywizny zewnętrznego profilu rogówki, m,
 R_D – promień krzywizny nasadki pomiarowej DCT, $-9,5$ lub $-10,5$ mm,
 R_R – promień krzywizny nasadki pomiarowej ART, $+7$ mm,
 r_{φ} i r_g – promienie krzywizny w przekrojach prostopadłych do powłoki, zgodnych z kierunkami odpowiadających im sił N_{φ} i N_g , m,
 S – napięcie powierzchniowe w filmie łzowym, N/m,
 t, CCT – centralna grubość rogówki, m,
 U_{limbus} – przemieszczenie rąbka w kierunku prostopadłym do osi optycznej, m,
 V_{limbus} – przemieszczenie rąbka w kierunku równoległym do osi optycznej, m,
 $V_{\text{rogówka}}$ – przemieszczenie wierzchołka rogówki (wzdłuż osi), m,
 Z – obciążenie prostopadłe do powierzchni powłoki, N/m^2 ,
 α_x – wykładnik w równaniu konstytutywnym materiału x (parametr materiałowy).

Część I

1. Wprowadzenie

1.1. Temat i zakres badań

Pierwsze próby identyfikacji strukturalnej ludzkiej rogówki podejmowano jeszcze pod koniec XIX wieku, dotyczyły one geometrii i materiału. Modele biomechaniczne przez długi czas budowane były jedynie dla tej najważniejszej powłoki oka, uproszczonej do jednorodnej błony sferycznej, liniowo-sprężystej. Nic dziwnego, że ich użyteczność, przy tych ograniczeniach, była niewielka.

Możliwości obliczeniowe znacznie wzrosły, gdy pojawiły się komputery. Dostęp do nich stał się dość powszechny w ostatnim ćwierćwieczu XX stulecia. Ta okoliczność zasadniczo zmieniła strategię rozwiązań konstrukcji mechanicznych, realna stała się możliwość utworzenia biomechanicznego modelu całej powłoki rogówkowo-twardówkowej. W latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku pojawiły się pierwsze próby rozwiązań numerycznych tej konstrukcji, oparte na metodzie elementów skończonych (MES). Wydawałoby się, że utworzenie realistycznego modelu gałki ocznej jest kwestią krótkiego już czasu.

Model numeryczny gałki ocznej nie był ostatnim ogniwem „łańcucha badawczego”, okazało się bowiem, że stanowi on świetne narzędzie identyfikacji jego własnych struktur. Poprawnie symulujący działanie swojego pierwowzoru model oka powinien przecież być wytworem układu parametrów, których wartości są zgodne z rzeczywistością – także wtedy, gdy wartości te zostaną odgadnięte. Zamiast więc mierzyć je w laboratorium, można parametry modelu dobrać tak, aby rozwiązania numeryczne odpowiadały rzeczywistości. Takie wykorzystanie wyników doświadczeń, prowadzonych na pełnych gałkach ocznych, często zastępowało badania wytrzymałościowe. Eksperymenty wykonywane na preparatach przygotowywanych na wszystkie możliwe sposoby – pasków wycinanych z rogówki, fragmentów gałki ocznej i całych gałek ocznych – dostarczały danych, pozwalających mnożyć modele oka, rozwiązywane partiami i w całości. W identyfikację gałki ocznej zaangażowano teorię sprężystości z jej różnymi modelami dźwigarów powierzchniowych i ośrodka ciągłego. Usiłowania te trwają do dzisiaj, a liczba kolejnych propozycji ciągle rośnie (choć nie jest duża). Niewiele jednak wskazuje

na zbliżanie się do choćby z grubsza określonego celu, jakim miałyby być model biomechaniczny oka.

Dlaczego tak się dzieje? Z jakiego powodu poszukiwania te nie doprowadziły do stworzenia, choćby w zarysie, zrębów optyczno-mechanicznej (z akcentem na „optyczno”) struktury powłokowej, zwanej modelem biomechanicznym gałki ocznej? Przyczyniły się do tego nie tylko trudności obiektywne, bo przecież próba stworzenia takiego modelu natrafia ogromne bariery teoretyczne i obliczeniowe. Jednym z największych problemów w dziedzinie biomechaniki jest interpretowanie wyników badań doświadczalnych, z natury mało dokładnych, za pomocą teorii pozostających w konflikcie z regułami rozwiązań przyjętymi w analizie konstrukcji (patrz np. podrozdz. 7.1.4.1).

Zasadniczym celem referowanych tu badań jest próba stworzenia zarysu modelu numerycznego gałki ocznej, wstępnej jego wersji, ograniczonej do rogówki, rąbka i twardówki. Równocześnie wskazywane są te wszystkie, motywowane subiektywizmem, przeszkody, które utrudniają prace nad modelem. Prawda o tych badaniach jest bowiem taka, że w licznych przypadkach badacze zajmujący się biomechaniką oka mogliby zrobić więcej dla tej dziedziny nauki, gdyby ograniczyli się jedynie do pomiaru – bez prób teoretycznego interpretowania wyników. Niestety zdarza się, że takie interpretacje, oparte na błędnych przesłankach, podawane są przez ludzi obdarzonych dużym autorytetem, mają więc negatywny wpływ na rozwój tej dziedziny wiedzy. Właśnie to wydaje się fundamentalną przyczyną większości problemów z modelem biomechanicznym gałki ocznej, który nadawałby się do symulowania zachodzących w niej zjawisk optycznych, a także weryfikowania podstaw teoretycznych tonometrii.

Nie przedstawiam tutaj własnych badań doświadczalnych – wykonano ich dotychczas i opublikowano wystarczająco wiele. Zadanie polega zasadniczo na eliminowaniu błędnych przekonań propagowanych w literaturze. To ważny składnik tego opracowania, zawsze wspierany szczegółowym uzasadnieniem. Już tylko to działanie istotnie zawęży przedziały wartości parametrów strukturalnych modelu, dopuszczalnych teoretycznie. Prześfiltrowane tak wyniki badań doświadczalnych zostały tu ujęte w zupełnie nową postać modelu, jako układu optycznego, kompleksowo „zestrojonego” mechanicznie, nazwanego modelem *samonastawnym optycznie*. Pod tym względem – jako układ optyczny – konstrukcja ta jest *jakościowo* różna od wszystkich innych modeli prezentowanych w publikacjach.

Jednocześnie model numeryczny gałki ocznej został przystosowany do realizowania zadań, które nie mają bezpośredniego związku z optyką. Obejmują one zjawiska towarzyszące pomiarowi ciśnienia wewnątrzgałkowego w warunkach klinicznych, określane jako tonometria. Przedstawione tu badania tym się różnią od prezentowanych w cytowanej literaturze, że kwestionuję w nich prawo Imberta–Ficka, podstawowe prawo tonometrii aplanacyjnej, a w konsekwencji także podstawy formalne tonometrii dynamicznej (DCT) oraz tonometrii rezonansowej (ART) – praktycznie wszystkich pokrewnych odmian tonometrii. Samo podważanie prawa Imberta–Ficka nie jest może zbyt ryzykowne, ponie-

waż twórcy tonometrii tylko postulują jego prawdziwość. Realny konflikt dotyczy wyników badań doświadczalnych. Jeżeli bowiem prawo Imberta–Ficka należałoby przyjąć z większą rezerwą, to okazałoby się, że wiele tez głoszonych w literaturze jest znacznie bardziej oddalonych od rzeczywistości niż dotychczas sądzono. Tworzona tu wizja tonometrii może być trudna do zaakceptowania, a nawet budzić zdziwienie, bo liczne prace eksperymentalne albo wprost potwierdzają postulaty Goldmanna, albo te postulaty legły u podstaw pomiarów, które bez nich tracą sens. Kontrowersja sięga więc bardzo głęboko, kwestionuję bowiem same fundamenty tonometrii, a zatem wiele z tego, co na nich zbudowano. Dyskusję tego zagadnienia, uzasadniającą potrzebę zweryfikowania podstaw tonometrii aplanacyjnej, przeprowadzono w podrozdz. 6.1, a wyniki obliczeń wspierające tę krytykę – w podrozdz. 7.1.1 i 8.1.

Na szczęście takie porzucenie błędnych, w moim przekonaniu, założeń ma też optymistyczne konsekwencje. Kontrowersje związane z opracowaniem tablic korygujących odczyty tonometru aplanacyjnego, z powodu odchylenia wymiarów oka od wartości kalibracyjnych, nie ustają do dzisiaj. Rozbieżności między współczynnikami korekcyjnymi obliczanymi przez różnych autorów okazują się tak duże, że projektanci niektórych odmian tonometru, przykładem może być *tono-pen*, dają użytkownikowi w oprogramowaniu przyrządu możliwość nie tylko wyboru między kilkoma różnymi zestawami współczynników korygujących opracowanych przez niezależnych autorów, ale nawet możliwość wprowadzania swoich własnych współczynników. Nie ma jednego, uznanego przez choćby większość badaczy, układu współczynników, pozwalających korygować odczyt tonometru ze względu na CCT lub R (grubość rogówki w centrum lub jej promień krzywizny). Wymienione trudności mają bezpośredni związek z teoretycznymi podstawami tonometrii aplanacyjnej. Wspomniane optymistyczne konsekwencje zakwestionowania założeń GAT prześledzić można w punkcie 8.1.3. Dzięki temu podejściu możliwe jest stworzenie jakościowo nowych fundamentów teoretycznych tonometrii. Przy okazji wyszła też na jaw cała seria błędów do dzisiaj pielęgnowanych w tonometrii.

Efekt, określany tu jako „odstępstwo” od prawa Imberta–Ficka, jest zjawiskiem mechanicznym, które można zakwalifikować do kategorii opisywanej jako *stateczność powłoki*, lokuje się zatem w zakresie problematyki zwykle kojarzonej z teorią sprężystości. Biomechanika, szczególnie ta jej odmiana zgłębiana eksperymentalnie w zespołach „interdyscyplinarnych”, nie jest gałęzią mechaniki właściwą do analizy teoretycznej tego typu zagadnień. Fick, Maklakoff, Nesterov, Goldmann, Adler i inne autorytety kształtujące obraz współczesnej tonometrii, to okuliści lub lekarze innych specjalności. Współcześnie autorami modeli numerycznych gałki ocznej bywają biochemicy, fizycy, informatycy, czasem utalentowani mechanicznie medycy, niestety brakuje wśród nich mechaników-matematyków. Problem ten czeka więc na rozwiązanie, ale najpierw musi być w ogóle *dostrzeżony* przez środowisko biomechaników „interdyscyplinarnych”. Przedstawione w tej monografii rezultaty badań są – o ile wiem – pierwszym sygnałem tego problemu, ograniczonym do rozwiązań *numerycz-*

nych powłoki. *Dodatek* zawiera też rozwiązanie *analityczne*, ale obejmuje ono jedynie stan błonowy.

Wspomniane problemy z tonometrią są natury *sensu stricte* mechanicznej – zaczynają się na mechanice i na niej się też kończą. Jednak najważniejszy w modelu jest układ optyczny gałki ocznej. Modele prezentowane w literaturze nie są *układami optycznymi* – są to konstrukcje mechaniczne, których funkcje optyczne wynikają z jednego tylko parametru – promienia krzywizny wierzchołka rogówki. Chociaż autorzy dopuszczają odkształcalność elementów składowych modelu, to wynikające z tego konsekwencje dla mocy optycznej układu rogówka–soczewka nie są uwzględniane. Modelem oka jest faktycznie powłoka, której parametry geometryczne i materiałowe traktowane są jak zestaw niezależnych stałych, przyjmowanych arbitralnie na podstawie danych klinicznych i badań laboratoryjnych. Ten eklektyzm morfologiczny stoi w sprzeczności z wiedzą biologiczną o adaptacji organizmów do warunków stwarzanych przez środowisko, dlatego należałoby zmienić podejście do problemu identyfikacji parametrów modelu gałki ocznej na bardziej „holistyczne” (ale przesiąknięte co najwyżej „duchem” fizyki). Przedstawione w tym opracowaniu badania są odpowiedzią na tę potrzebę. Identyfikacja poszczególnych parametrów strukturalnych modelu jest oczywiście celowa i ważna, ale równie ważne jest także badanie *zależności funkcyjnych* między nimi, bo te zależności, odkrywane częściowo, prowadzą ostatecznie do *jednego* tylko, pozbawionego wad optycznych, obrazu na dnie oka. Parametry modelu biomechanicznego gałki ocznej nie mogą być wzajemnie niezależne. Pierwszym znanym, i jak na razie jedynym, kryterium spajającym elementy strukturalne oka w jedną funkcjonalną całość optyczną, jest *hipoteza samonastawności optycznej* gałki ocznej. Będzie ona omówiona w podrozdziale 4.6.

1.2. Cel pracy i przeznaczenie modelu gałki ocznej

Opracowanie jest próbą utworzenia biomechanicznego modelu numerycznego zewnętrznych powłok ludzkiej gałki ocznej, obejmującego geometrię, materiały poszczególnych tkanek oraz układ optyczny modelu zdolnego do realistycznego symulowania prostych funkcji oka, obserwowanych zwykle w diagnostyce i leczeniu. Jego podstawowe zastosowania miałyby obejmować przede wszystkim przypadki kliniczne, takie jak chirurgia refrakcyjna i różnego rodzaju techniki pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego.

Można sądzić, że szybko rozwijające się obecnie aplikacje nowych metod chirurgicznego korygowania refrakcji rogówki w większym stopniu niż dotychczas będą polegały na rozwiązaniach numerycznych. Model zapewniający realistyczne symulowanie tego typu wymuszeń, a więc rozmaitych obciążeń gałki ocznej, korekty jej geometrii, skutków optycznych wprowadzania wszczepów itp., stanie się jednym z podstawowych narzędzi okulistów.

Zasadnicza treść tej książki – model numeryczny ludzkiej gałki ocznej i jego zastosowania okulistyczne – adresowana jest do każdego, kto na gruncie biomechaniki zajmuje się badaniem optycznych i mechanicznych aspektów gałki ocznej, zwłaszcza do optometrysty, czyli specjalisty łączącego po trosze wiedzę fizyka-optyka, mechanika, okulisty, biologa, informatyka. W tle referowanych badań pojawia się natomiast historia dochodzenia do rezultatów, typowa dla wielu innych dziedzin poznania ludzkiego. Można sądzić, że początkowo każda z nich obciążana bywa podobnymi „dolegliwościami”, mam tu na myśli przesady korygowane z czasem przez nowe odkrycia. Historia ta może być więc interesująca dla każdego, kto para się nauką i śledzi jej koleje.

1.3. Co jest w tej książce

Pierwsze trzy rozdziały zawierają opis aktualnego stanu wiedzy na temat modelu gałki ocznej, a także najważniejszych problemów oczekujących na rozwiązanie. W kolejnych trzech rozdziałach części I znajduje się opis tworzono tu modelu gałki ocznej, który w pozostałych częściach zostanie użyty do symulowania podstawowych funkcji oka. Zasadnicza treść tych symulacji obejmuje dwa typy rozwiązań numerycznych, dotyczą one:

- samego *modelu*, identyfikowanego w rozdziale 7,
- *zastosowań modelu*, opisanych w rozdziale 8.

Już pierwszy etap oznacza rozległą dziedzinę kontrowersji, z jaką dzisiaj mamy do czynienia w literaturze. Dotyczą one przede wszystkim parametrów materiałowych, ponieważ ich wartości są tak różne, jak to tylko możliwe. O trudnościach oraz ostatecznej identyfikacji tych parametrów, na podstawie przyjętych postulatów, traktuje cały rozdział 7. Chociaż podstawową funkcją oka jest tworzenie obrazu optycznego, w przeważającej większości modeli prezentowanych w literaturze optyka zredukowana jest zaledwie do opisu krzywizny rogówki. To znacznie mniej, niż można dzisiaj osiągnąć. Pod tym względem proponowany tu model znacząco od nich odbiega. Nowa jakość to integralne potraktowanie układu optycznego oka, w którym uwzględniono odkształcalność rogówki, twardówki oraz przemieszczenia rąbka wraz z soczewką (podrozdz. 7.2).

Tak przygotowany model oka został użyty w eksperymentach numerycznych składających się na drugi etap obliczeń (rozd. 8). Zawiera on rozwiązania kilku zadań, które są interesujące w kontekście przedstawionych wcześniej zagadnień, a uzyskane rezultaty wykraczają zwykle poza dotychczasową wiedzę. Uzupełniają one wyobrażenie gałki ocznej jako konstrukcji biomechanicznej, optymalnie dostosowanej do tworzenia obrazu optycznego przy zakłóceniach stwarzanych przez fizjologię. W niektórych przypadkach rysują też wizję przyszłych możliwości obliczeniowych.

Model, to nie tylko jego optyka. Wersja tonometrii, jaka wyłania się z obliczeń przedstawionych w podrozdziałach 7.1, 8.1 i 8.2, jest nie tylko zupełnie nowa, ale sprzeczna z uznawaną dotychczas wersją, na którą składają się postulaty ojców tonometrii, pozycje literaturowe tworzące kanon, a także wyniki badań eksperymentalnych dopełniające ten obraz.

1.4. Czego nie ma

W aspekcie optycznym i mechanicznym na gałkę oczną składają się dwa podstawowe podukłady:

- powłoka rogówkowo-twardówkowa,
- układ akomodacyjny (soczewka, ciało rzęskowe).

Obecnie, w każdym z tych dwu obszarów badań, prace nad modelem numerycznym są prowadzone niezależnie. Pomijając ogromną złożoność problemów zmuszających do takiego rozdziału, przyczyną jest też fakt, że uzyskiwane rezultaty znajdują zwykle różne zastosowania, są więc eksploatowane niezależnie. Po otrzymaniu wstępnej wersji modelu każdego z tych podukładów nastąpi ich zespolenie. Na razie konieczne jest uzgodnienie między badaczami parametrów materiału rogówki, rąbka, twardej, soczewki (niejednorodnej, osadzonej dodatkowo w torebce), ciała rzęskowego, a także ich geometrii, które z kolei składają się na parametry całego, odkształcalnego, układu optycznego. Do czasu ukończenia tego etapu badań próba łączenia obu podukładów nie ułatwia, jak się zdaje, identyfikacji takiego pełnego układu optycznego oka. Można się zatem spodziewać, że jeszcze przez jakiś czas prace badawcze w tych dwu zakresach prowadzone będą niezależnie.

Przedmiotem badań referowanych w tej monografii jest pierwszy z wymienionych zakresów. Model konstrukcyjny obejmuje jedynie powłokę rogówkowo-twardówkową. Układ akomodacyjny, po ustawieniu soczewki na nieskończoność, został „wyłączony” – jego obecność przejawia się jedynie w zastępczej sztywności rąbka, uwzględnianej w badaniach samonastawności optycznej. Można przez to rozumieć, że układ akomodacyjny jest zamontowany w modelu gałki ocznej, ale nie działa. To taki stan jak po wszczęciu sztucznej soczewki. Oprócz soczewki wszystkie pozostałe elementy strukturalne są odkształcalne. Deformują się więc pod wpływem obciążenia pochodzącego zarówno od przykładanych sił (przede wszystkim ciśnienia wewnątrzgałkowego), jak również wstępnych przemieszczeń nakładanych na konstrukcję lub zmian geometrii rogówki symulujących zabiegi chirurgii refrakcyjnej. W obciążonym modelu obliczana moc optyczna układu rogówka–soczewka uzależniona została od wydłużenia twardej w kierunku osiowym, przyrostu średnicy pierścienia rąbkowego i zmiany promienia krzywizny rogówki, a więc od wzajemnego przemieszczania się głównych płaszczyzn obrazowych soczewki i rogówki, sprowadzonych na koniec do położenia (zmiennego) głównej płaszczyzny obrazowej układu obu tych soczewek względem dna oka.

Wszystko, co wynika z akomodacji soczewkowej, wykracza poza ograniczenia przyjęte dla badanego tu modelu optycznego gałki ocznej.

1.5. Co szczególnego jest w budowie oka ludzkiego

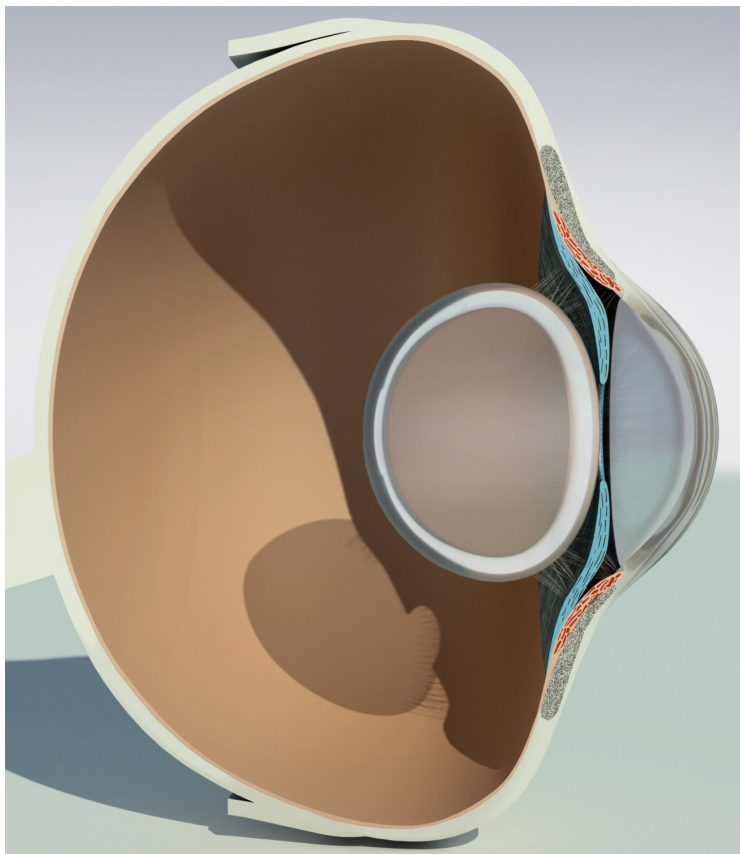
Gałka oczna, traktowana jako powłoka, wydaje się nieskomplikowaną konstrukcją, na czym więc polegają trudności w utworzeniu i rozwiązaniu jej modelu mechanicznego? Odpowiedź ułatwi porównanie z okiem przedstawiciela innego gatunku, orientującego się w otoczeniu przede wszystkim zmysłem wzroku (jak ludzie). Wynikająca stąd refleksja jest pomocna w ustaleniu tego, co jest istotne w konstrukcji gałki ocznej człowieka.

Nie ma żadnego powodu wątpić, że oko sokoła mogłoby się tak różnić od oka ludzkiego, jak skrzydło sokoła od ręki człowieka, czyli bardzo. Jeśli aż tak się nie różni, to tylko dlatego, że nie musi. Ale wynika stąd ważny wniosek, że ewolucyjne dostosowanie oka w obu tych przypadkach jest optymalne. Nie ma tu miejsca na wady wymagające zasadniczej racjonalizacji – podobnie jak w przypadku kończyn. Porównanie więc dwóch tak różnych rozwiązań konstrukcyjnych narządu wzroku pozwala odkrywać te elementy budowy oka, które mają istotny wpływ na jego podstawowe funkcje optyczne. Dzięki temu możemy ustalić krytyczne szczegóły budowy, istotne dla tworzonego modelu, które mają zasadnicze znaczenie w optyce.

Tak samo jak u człowieka można w oku sokoła wydzielić rogówkę, twardówkę i rąbek (niewielką strefę przejściową między rogówką, a twardówką, do której podwieszona jest soczewka). Jednak ze względu na inne priorytety jego posiadacza, przede wszystkim dużą zdolność rozdzielczą i duży kąt widzenia, oko sokoła ma bardziej rozbudowaną twardówkę. Jednocześnie osadzenie w stosunkowo małej czaszce sprawia, że twardówka jest wyraźnie spłaszczona w kierunku osiowym. Problem konstrukcyjny, jaki rozwiązała tu natura, jest tym większy, że soczewka usytuowana za rogówką ma znacznie większą moc optyczną niż soczewka oka ludzkiego. Dotyczy to zarówno jej mocy średniej, jak i zakresu zmian akomodacyjnych. Jest więc stosunkowo gruba w kierunku osiowym i trudno znaleźć dla niej miejsce w obszarze – i tak spłaszczonej – twardówki. Z tego powodu rogówka znacznie wyraźniej wystaje z twardówki niż w oku ludzkim, a powłoki rogówki i twardówki przecinają się w rąbku pod większym kątem. Niesie to za sobą niezwykle istotne konsekwencje morfologiczne i fizjologiczne, a mówiąc językiem mechaniki – konstrukcyjne i eksploatacyjne.

W miejscu przenikania się dwu powłok kulistych (przyjmijmy to uproszczenie dla rogówki i twardówki, ono w niczym nie zmienia ogólności wyprowadzonych wniosków) o znacznej różnicy promieni, następuje wyraźne naruszenie gładkości (w sensie matematycznym), które manifestuje się jako bruzda twardówki (*sulcus sclerae*). Obciążenie takiej powłoki ciśnieniem wewnętrznym sprawia, że przemieszczenia linii przenikania obu sfer są znacznie większe niż poza nią, w dodatku pojawiają się mo-

menty gnące. Prowadzi to do dużych deformacji miejsca załamania powłoki. Inżynier w takim przypadku zmuszony byłby wprowadzić wzdłuż linii przenikania obu sfer pierścieni o znacznej sztywności, zapobiegający drastycznym zmianom konfiguracji obu powłok po obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym.



Rys. 1.1. Przekrój oka sokoła. Pomiędzy rogówką a twardówką widoczny jest pierścień kostny

Tu wkraczamy w obszar zarezerwowany dla optyki. Kontrolowanie przemieszczeń takiej złożonej powłoki nie jest kwestią „estetyki architektonicznej”, wszelkie zmiany jej geometrii – promienie krzywizn rogówki i twardówki, grubości tych powłok i ich rozkład wzdłuż południka – mają duży wpływ na moc optyczną oka, przede wszystkim rogówki. Nie miałyby to może tak dużego znaczenia, gdyby *zmiany* ciśnienia wewnątrzgałkowego były zbliżone do zera lub zachodziły w dłuższej skali czasu, bo wówczas mógłby sobie z tym poradzić układ akomodacyjny oka. Jednak zmiany

ciśnienia wewnątrzgałkowego bywają duże i zachodzą szybko – w tych warunkach fizjologia układu akomodacyjnego nie zapewnia skuteczności jego działania.

W oku człowieka bruzda twardówki jest stosunkowo słabo zaznaczona w porównaniu z okiem sokoła, a moduł sprężystości rąbka w kierunku równoleżnikowym jest tylko dwa razy większy od modułu rogówki. Z tego powodu rolę, jaką odgrywa pierścień rąbkowy w oku ludzkim łatwo jest przeoczyć – jego wpływ na działanie układu optycznego jest przez wielu badaczy pomijany. Jak dalece to uproszczenie jest nieuprawnione, świadczą wyniki obliczeń podane w podrozdziale 8.3. Bardzo znaczącym sygnałem tak istotnej dla optyki roli odgrywanej przez pierścień rąbkowy jest to, co możemy zaobserwować u najbardziej znanego specjalisty w tej dziedzinie – właśnie sokoła. Jest on dlatego dobrym przykładem, że mimo opisanych trudności konstrukcyjnych, rzutujących na głębokość bruzdy twardówki, jakość obrazu na dnie oka jest bardzo wysoka. Zatem co takiego jest w rąbku oka sokoła, że podaję go za przykład? Gdybyśmy mieli to zgadnąć, analogia z okiem ludzkim na niewiele by się zdała, ponieważ żaden element struktury gałki ocznej człowieka nie sugeruje ogromnej roli, jaką w rzeczywistości odgrywa pierścień rąbkowy w układzie optycznym oka. Rąbek oka sokoła zawiera bowiem... pierścień kostny. Nie jakąś zbitkę włókien kolagenowych, ułożonych obwodowo jak u człowieka, ale prawdziwą kość! Dlaczego tak jest? Jaką rolę odgrywa ten niezwykle sztywny pierścień, pokazany na rys. 1.1?

Odpowiedź na to pytanie nie jest łatwa, dlatego uznajmy, że wykracza ono poza zakres tej książki. Z pewnością jednak istnienie sztywnego pierścienia ma na względzie jakość obrazu na dnie oka. Wydaje się, że hipoteza samonastawności optycznej (omówiona w podrozdziale 4.6) może odegrać istotną rolę przy próbie udzielenia odpowiedzi. Nie ma też wątpliwości, że wiedza o roli, jaką odgrywa pierścień kostny w oku sokoła, ułatwiłaby badanie układu optycznego oka ludzkiego i jego modelu numerycznego.

1.6. Założenia podstawowe

Parametry prezentowanego tu modelu gałki ocznej są w większości zbieżne z tymi, które można znaleźć w literaturze przedmiotu. Do takich należy geometria powłok oka oraz użyty model materiału. Przyjęte tu wymiary rogówki i twardówki, a także uznawana powszechnie wykładnicza charakterystyka materiałowa, nie wykraczają poza standardy spotykane w literaturze (wyjątkiem jest *nienormalna izotropia* materiału, ale jej znaczenie jest istotne tylko dla niskiego ciśnienia wewnątrzgałkowego). To, co czyni model unikatowym, zawarte jest w dwóch fundamentalnych założeniach.

Pierwsze założenie czyni model samonastawnym optycznie. Hipoteza samonastawności optycznej w biomechanice oka prowadzi do ściśle określonych zależności między parametrami strukturalnymi rogówki, rąbka i twardówki. Wiedza o tych zależnościach ułatwia identyfikację materiałową. Najważniejszym rezultatem obliczeń

po przyjęciu tego założenia, opisanych w podrozdziale 7.2, jest stosunek siecznych modułów sprężystości twardówki i rogówki zbliżony do pięciu.

Drugim założeniem jest równość ciśnienia zewnętrznego i wewnątrzgałkowego w symulacji GAT, gdy rogówka ma wymiary kalibracyjne, a ciśnienie równe jest wartości nominalnej – równanie (7.1). Przyjęcie tego założenia, bez żądania jego spełnienia dla dowolnej innej wartości ciśnienia wewnątrzgałkowego, prowadzi ostatecznie do modelu, który *nie podlega* prawu Imberta–Ficka.

1.7. Ograniczenia modelu

Omawiany tu model biomechaniczny ludzkiej gałki ocznej należy rozumieć jako pierwsze przybliżenie struktury swego oryginału – oka. Przeznaczony jest do badania funkcji układu optycznego, stymulowanych ciśnieniem wewnątrzgałkowym lub modyfikacjami jego geometrii. Możliwe jest symulowanie za jego pomocą dowolnej odmiany tonometrii, także dla rogówki po chirurgicznej zmianie refrakcji. W większości tych zastosowań model nie wykracza poza narzucone mu ograniczenia. Nie siląc się na ustanowienie hierarchii między nimi, ograniczenia te są następujące:

Symetria. Oko nie jest osiowosymetryczne, jego właściwości mechaniczne i fizyczne – także. W badaniach biomechanicznych pod uwagę brane są zwykle płaszczyzny symetrii, które dzielą oko na część lewą i prawą lub na górną i dolną. Łatwo zauważyć, że i te klasy symetrii narzucone są arbitralnie, bo już sama geometria oczu nie wykazuje symetrii względem tych płaszczyzn. Zwykle jednak, obliczając moc optyczną interesuje nas wyłącznie średnia refrakcja – oczywiście jeśli nie chcemy wdawać się w badania aberracji, jak choćby astygmatyzmu. Założenie osiowej symetrii oka jest wówczas normą.

Opracowany tutaj model osiowosymetryczny można rozbudować i wyposażyć w nowe funkcje, wykraczające poza symetrię osiową. Modyfikacje modelu osiowosymetrycznego są łatwiejsze niż tworzenie modelu od razu w wersji asymetrycznej. Przy tym wyniki uzyskiwane dla modelu sprawdzonego wcześniej w stanach o symetrii osiowej są bardziej wiarygodne, Serrao i in. [2005] piszą na przykład o PRK:

Wykonanie osiowosymetrycznej ablacji na normalnej rogówce nieodmiennie wywołuje asymetrię porównywalną lub większą od przedoperacyjnej. Nasze wyniki wskazują, że ablacja w strefie skroniowej i w strefie nosowej tej samej rogówki powoduje różne skutki, bo różna jest w tych obszarach mikrostruktura i właściwości biomechaniczne.

Jeżeli w opisywanym przez autorów doświadczeniu możliwe jest zmierzenie wielkości asymetrii *geometrycznej* po ablacji, to – przez prostą modyfikację rozkładu modułów sprężystości w modelu dotąd osiowosymetrycznym – możliwe jest zidentyfikowanie asymetrii *parametrów materiałowych* rogówki. Natomiast niezwykle trudno

byłoby zbudować od podstaw model biomechaniczny eksperymentu opisanego przez autorów. Może nawet niemożliwe, bo zbyt wiele kwestii dotyczących modelu osiowo-symetrycznego należałoby rozstrzygnąć jeszcze przed uwzględnieniem asymetrii.

Sprężystość. Reologia materiału rogówki w ogóle nie była brana pod uwagę w tym opracowaniu. Przede wszystkim dlatego, że wyniki badań doświadczalnych są w tym zakresie jeszcze mniej wiarygodne niż wyniki pomiaru parametrów sprężystości. Większość symulowanych tutaj wymuszeń nie powodowała dużych przyrostów odkształcenia. Na przykład badanie warunków samonastawności optycznej gałki ocznej w naturalnym stanie obciążenia w ogóle nie wymaga uwzględniania lepkości materiału. Także symulacje pomiaru ciśnienia metodami tonometrii nie wydają się prowadzić do odkształceń tak dużych, by należało uwzględniać efekty reologiczne. Jedynym wymuszeniem, które niewątpliwie angażuje ten dział mechaniki ciała stałego w proces obliczeń jest keratotomia radialna. Wydaje się jednak, że użyty tutaj model keratotomii był na tyle mało precyzyjny, że dodatkowe rozstrajanie rozwiązań niewiarygodnymi parametrami reologicznymi mogłoby tylko zaszkodzić ich jakości. Ponadto materiał rogówki wykazuje wówczas silną anizotropię, co na obecnym etapie rozwoju biomechaniki oka oznacza brak możliwości dokładnego symulowania tego typu wymuszenia. Powiedzmy to wprost: reologię tkanek oka rozsądnie będzie włączyć do obliczeń dopiero wtedy, gdy ich *parametry sprężyste* przestaną budzić wątpliwości, czyli gdy zostaną określone z błędem mniejszym niż 100%.

Niewykluczone, że także PRK generuje odkształcenia zależne od czasu, szczególnie przy większych głębokościach ablacji, ale na razie – z tych samych powodów – obliczenia ograniczone zostały tutaj do zjawisk sprężystych. Już tylko ten składnik odkształcenia – sprężysty – okazuje się wystarczająco kontrowersyjny, by na nim koncentrować uwagę i na razie nie powiększać chaosu w biomechanice oka.

Procesy biologiczne. Model nie uwzględnia zmian zachodzących w tkankach na skutek procesów gojenia ran pooperacyjnych, histopatologii i temu podobnych procesów zmieniających parametry materiałowe powłok oka. Z danych przytaczanych w literaturze przez chirurgów refrakcyjnych nie wynika, że procesy te mają zauważalny wpływ na zmianę mocy optycznej rogówki, zachodzącą w okresie między przeprowadzonym zabiegiem a po upływie roku. Dotyczy to zarówno technik laserowych, jak i keratotomii. Nie zawsze jednak tak musi być. Zmiany parametrów materiału powłok oka mogą pojawiać się niezależnie od przeprowadzonych zabiegów chirurgicznych. Wtedy także powinny być uwzględniane, na przykład w przypadku stożka rogówki. Zagadnienie parametrów materiałowych tkanki patologicznej nie jest tutaj omawiane.

Zamocowanie. Rola, jaką w optyce oka odgrywa sposób jego zamocowania jest porównywalna z rolą, jaką w niej pełni twardówka. Do dzisiaj rozumiana jest ona jako rodzaj „obudowy” układu optycznego. Ponieważ – na przekór temu przekonaniu – twardówka okazuje się w pełni optycznym składnikiem oka (co teraz może się nawet wydawać oczywiste, biorąc pod uwagę rezultaty opisane w podrozdz. 7.2), równie istot-

ne znaczenie mogą mieć też otaczające ją tkanki. Potrzeba określenia kinematycznych warunków brzegowych modelu gałki ocznej staje się coraz bardziej wyraźna, czego przykładem jest praca [Schutte i in. 2006], można się zatem spodziewać intensyfikacji działań w tym kierunku. Rezultaty takich badań będą miały pozytywny wpływ na wiedzę o układzie optycznym modelu, a także o parametrach materiałowych twardówki. Swój stosunek do zagadnienia warunków brzegowych wyraziłem w podrozdziale 4.5.2. Można go streścić tak: gałka oczna jest podparta w oczodole przez tkankę tłuszczową, jednak *zupełnie nie wiadomo jak*.

Akomodacja. Układ akomodacyjny wydaje się jeszcze bardziej złożony i trudny do zidentyfikowania niż model powłok oka, a umieszczenie jednego w drugim z pewnością stworzy następne problemy. Ale dopiero wtedy można będzie taki układ nazwać „modelem biomechanicznym gałki ocznej”. Stworzenie go wydaje się pewne. Równie pewne wydaje się też to, że niełatwo będzie tego dokonać. Prace nad modelem układu akomodacyjnego są mniej liczne, jednak stopień ich zaawansowania nie wydaje się mniejszy [Belaidi i Pierscionek 2007, Schachar i Pierscionek 2009].

Problemy akomodacji wykraczają poza obszar naszego zainteresowania, jedynym śladem ich istnienia jest sztywność rozciągania pierścienia rąbkowego, traktowana w obliczeniach jako wielkość „zastępcza”. Oznacza to jedynie *bierny* wpływ układu akomodacyjnego na moc optyczną gałki ocznej. Może się on przejawiać w zmianie mocy optycznej rogówki na skutek zmian ciśnienia wewnątrzgałkowego, ale ten efekt optyczny jest niewielki, stanowi zaledwie ułamek dioptrii.

2. Budowa zewnętrznych powłok oka

Przekrój osiowy gałki ocznej człowieka pokazany jest na rysunku 2.1. Wyróżniono na nim składniki budowy istotne dla modelu biomechanicznego: rogówkę, twardówkę i rąbek z podwieszonym do niego układem akomodacyjnym. Wymiary podane są w tabeli 4.1.

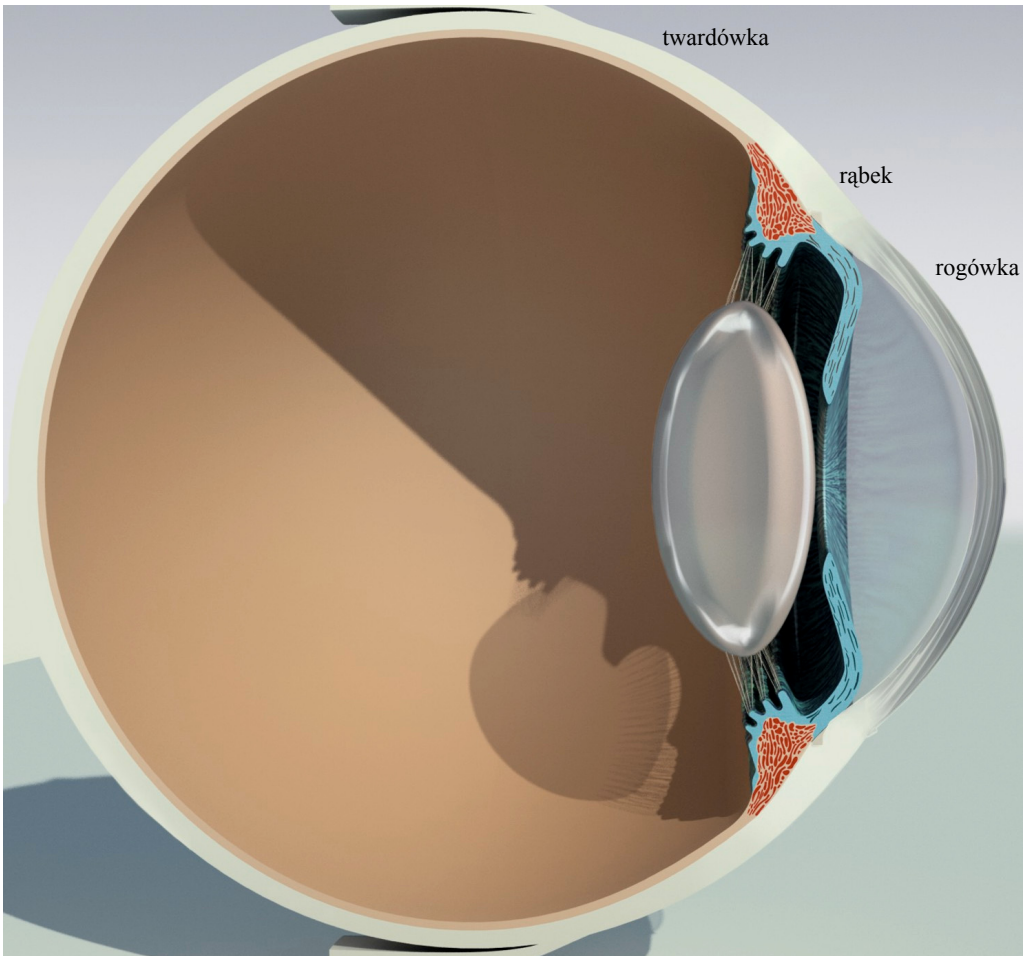
2.1. Rogówka

Powłoka rogówki w przekroju osiowym składa się z pięciu warstw rozróżnialnych pod mikroskopem optycznym. Największy obszar zajmuje *stroma*, obejmuje ona ponad 90% całej grubości rogówki. Przylegają do niej po obu stronach dwie błony – Bowmana na zewnętrznej powierzchni i Descemeta na wewnętrznej. Pozostałe warstwy wyróżniane w okulistyce – nabłonek po zewnętrznej i śródbłonek po wewnętrznej stronie rogówki – choć istotne ze względów biologicznych i medycznych, nie mają znaczenia w analizie wytrzymałościowej, jak się powszechnie sądzi. Świadczyć ma o tym charakterystyczna struktura komórkowa, nieprzystosowana do przenoszenia obciążenia. Strukturę rogówki ilustruje rys. 3.1.

Stroma (istota właściwa) jest strukturalnie i optycznie najważniejszą warstwą rogówki, często utożsamiana jest z samą rogówką. Właściwości mechaniczne, a także parametry optyczne, wynikają ze szczególnej budowy tej tkanki. Składa się na nią kilkaset warstw (od 200 do 600 – w zależności od tego, kto liczy, i w którym obszarze rogówki) ułożonych jedna na drugiej, o grubości – jak z tego wynika – około jednego mikrometra każda. Na przykład Komai i Ushiki [1991] podają liczbę około 300 warstw w wierzchołku rogówki i około 500 na jej peryferiach. W kategoriach mechaniki tego typu struktura określana jest jako *powłoka warstwowa*.

Pojedynczą warstwę, nazywaną lamellą, tworzy układ wzajemnie równoległych włókien kolagenowych o jednakowej średnicy, a każde włókno zdaje się przebiegać nieprzerwanie od jednego brzegu rogówki do drugiego bez przeplatania się z najbliższymi sąsiadami w warstwie [Maurice 1984]. Przestrzeń pomiędzy warstwami wypełnia *substancja podstawowa*, która stanowi matrycę także dla włókien w samej warstwie [Hogan i in. 1971]. Duże przypadkowe kąty, jakie tworzą kierunki ułożenia

sąsiadujących z sobą warstw oraz duża ich liczba, sprawiają, że globalnie materiał rogówki jest *poprzecznie izotropowy* – jego średnie właściwości fizyczne nie zależą od obrotu układu współrzędnych wokół prostej prostopadłej do powierzchni środkowej rogówki. W warstwach zewnętrznych niektóre lamelle rozgałęziają się i przenikają z warstwami sąsiednimi, ułożonymi powyżej lub poniżej [Radner i in. 1998]. Głębiej ułożone warstwy wykazują większy stopień uporządkowania.



Rys. 2.1. Trzy elementy składowe modelu biomechanicznego oka ludzkiego: rogówka, twardówka i rąbek

Wynikające z takiej struktury właściwości mechaniczne rogówki są na tyle szczególne, że warto je poznać bardziej „namacalnie”. Maurice tak opisuje badanie organoleptyczne rogówki królika [Maurice 1988]: *Powierzchnie zewnętrzne wyprepara-*

wanej rogówki łatwo jest przesuwając względem siebie trzymając ją między palcami. Przy normalnym uwodnieniu stromy to przesunięcie może wynieść 1 mm w każdym kierunku. Takie zachowanie jest konsekwencją ułożenia warstw i pokazuje, że nie są one między sobą połączone. Bardziej spleciona struktura twardej czyni ją sztywniejszą przy podobnej próbie ścinania. (...) W oczach niektórych ryb ta właściwość doprowadzona jest do skrajności, pozwalając na obrót gałki ocznej, chociaż zewnętrzna powierzchnia rogówki jest kontynuacją skóry i pozostaje nieruchoma.

Spoistość rogówki ludzkiej jest większa od opisywanej, ponieważ włókna jednej warstwy łączą się częściowo z włóknami sąsiedniej warstwy. Nadal jednak możliwe jest oddzielanie kolejnych warstw jak płatki, jedna po drugiej. Problem z takim „wertowaniem” stromy pojawia się dopiero w pobliżu błony Descemeta, gdy odrywane są ostatnie jej warstwy. Ten sam Maurice [Jue i Maurice 1986] tak opisuje proces preparowania błony Descemeta, widziany pod mikroskopem operacyjnym: *W rogówce ludzkiej trudniej zdejmować ostatnie kilka warstw stromy i wiele takich sekcji kończy się uszkodzeniem błony Descemeta. Lepszy skutek można osiągnąć ścierając pozostałe włókna skrobakiem. (...) Gdy mały obszar błony Descemeta zostanie odsłonięty, łatwo to zauważyć ponieważ ukazuje się on jako gładka, ciemna powierzchnia, ostro kontrastująca z pokrywającą go białą, skłębioną stromą.*

Przedstawiona struktura stromy jest idealizacją, która ułatwia opis mechaniczny. Zgodność tego modelu z rzeczywistością jest największa w części centralnej rogówki. W miarę oddalania się od wierzchołka włókna kolagenowe zmieniają orientację, wykazując tendencję do układania się wzdłuż jej obwodu [Meek i Newton 1999, Newton i Meek 1998a]. W pobliżu rąbka taki obwodowy kierunek przyczynia się do zwiększenia grubości rogówki. Przeglądu badań struktury stromy, podejmowanych jeszcze w latach trzydziestych dwudziestego wieku, dokonał Maurice w cytowanej pracy [Maurice 1988]. Współcześnie podobne badania, ale z wykorzystaniem nowych narzędzi, między innymi rentgenografii, prowadzili Meek i in. [1987], Daxer i Fratzl [1997], Newton i Meek [1998a, 1998b, 1999], Boote i in. [2003]. Wszystkie one przyczyniły się do ugruntowania opisanej mikrostruktury stromy. Większość wyników badań wskazuje na ułożenie włókien kolagenowych zapewniające izotropię stromy jako dźwigara powierzchniowego.

Większość – zatem nie wszystkie. Część badaczy sugeruje istnienie wyraźnej anizotropii wynikającej z uprzywilejowania niektórych kierunków. Wymienione badania Meeka i Newtona wskazują, że w centralnej części rogówki około 50% warstw (lamelli) ułożonych jest ortogonalnie, preferując kierunki nosowo-skroniowy i góra-dół. Pozostałe warstwy ułożone są przypadkowo. Te uprzywilejowane kierunki są wyraźniej widoczne w głębszych warstwach stromy niż na jej powierzchni [Freund i in. 1995]. W badaniach wytrzymałościowych Jayasuriya i in. [2003] uzyskali nawet stosunek sztywności materiału rogówki w kierunkach horyzontalnym i wertykalnym zbliżony do 3:1, jednak opisywana wcześniej anizotropia strukturalna nie uzasadnia aż tak silnej anizotropii modułów (rzec można – w ogóle jej nie uzasadnia).

Struktura stromy jest bardziej złożona niż wynikałoby z podanego opisu, ale detale tej struktury nie mają większego znaczenia dla prowadzonej tu analizy mechanicznej. Więcej szczegółów, wraz z fotografiami uzyskanymi za pomocą mikroskopu elektronowego, można znaleźć w podręczniku Funga [1993], a także w oryginalnych publikacjach poświęconych tym badaniom [Hogan i in. 1971, Vaezy i Clark 1994, Clark 2001, Meek i Fullwood 2001, Pinsky i in. 2005]. Opis medyczny, uwzględniający strukturę komórkową stromy, zawierają podręczniki okulistyki, np. [Orłowski 1986].

Blona Descemeta (blaszka graniczna tylna) jest drugą, po stromie, warstwą nośną rogówki, jej grubość jest nieco mniejsza niż 10 mikrometrów. Struktura błony i wynikające z niej właściwości mechaniczne są różne od ustalonych dla stromy i zapewne z tego powodu warstwa ta bardzo wcześnie zwróciła na siebie uwagę (właśnie Jeana Descemeta), bo już w połowie osiemnastego wieku. Dobrą ilustracją jej funkcji wytrzymałościowej jest wrażenie chirurga doznawane podczas zabiegu keratotomii, a więc z użyciem skalpela. Zwykle w takim przypadku wykonywane nacięcie jest bardzo głębokie, sięga niemal 100% grubości rogówki w osi (czyli praktycznie przecięta zostaje cała stroma). Mogłoby się wydawać, że łatwo jest wówczas o perforację, jednak zdarza się to rzadko, gdyż ujawniają się tu szczególne właściwości mechaniczne błony Descemeta. Stroma pod skalpelem ustępuje bez oporu, ale znajdująca się pod nią błona Descemeta ugina się, nie ulegając tak łatwo przecięciu. Trochę przypomina to rolę, jaką spełnia folia antywłamaniowa na szybie wystawowej.

Nieco inna zdaje się być ta właściwość błony w opisie Danielsena [2004]. Pisze on, że po jej wypreparowaniu błona Descemeta *wydaje się krucha, dlatego należy unikać wszelkich efektów prowadzących do koncentracji naprężenia lub obciążeń ściskających, np. z użyciem pincety*. Być może cytowany opis zawiera informację o tym, jak wielki wpływ na właściwości mechaniczne tkanek oka ma środowisko, w którym prowadzone jest badanie, a także warunki, w jakich wcześniej przechowywane były preparaty. (To problem, który z pewnością przyczynia się do silnego zróżnicowania wyników uzyskiwanych przez różnych badaczy.)

Składające się na tę warstwę bardzo cienkie włókna, utworzone z tropokolagenu, układają się w sześciokątne figury. Tropokolagen jest inną odmianą kolagenu niż w stromie. Systematykę odmian kolagenu, spotykanego w tkankach, podał Shuttleworth [1997]). Węzły w narożnikach tych figur oddalone są w płaszczyźnie błony o około 110 nanometrów. W kierunku prostopadłym do powierzchni węzły nakładają się wzajemnie, pozostając na wspólnej prostej. Szczegóły budowy błony Descemeta są stosunkowo dobrze poznane, opisane zostały w pracach [Jakus 1956, Sawada i in. 1990, Danielsen 2004], jednak jej funkcje pozostają w sferze spekulacji – czy pełni ona rolę wytrzymałościową, jest filtrem, czy stanowi po prostu barierę dla płynów.

Blona Bowmana (blaszka graniczna przednia) to warstwa o grubości około 12 mikrometrów. Tworzy ją zagęszczona substancja podstawowa tkanki łącznej, zbrojona układem cienkich, niejednorodnych, ułożonych nieregularnie, włókien kolagenowych [Orłowski 1986]. Znaczenie tej błony dla rogówki jest przedmiotem kontrowersji,

podobnie jak w przypadku błony Descemeta. Gdyby miała dużą wytrzymałość, jak sądzono w drugiej połowie XX wieku, uzasadniona byłaby teza o ochronnej roli błony Bowmana (utworzonej z „bardzo mocnych włókien kolagenowych”), a nawet o decydującym wpływie na kształt rogówki. Dzisiaj to przekonanie nie ma podstaw empirycznych, o czym świadczy choćby ignorowanie obecności tej błony w zabiegu PRK – jej usunięcie nie powoduje zauważalnych skutków. Doświadczenia przeprowadzone przez Hjortdala i Ehlersa [1995] prowadzą do tego właśnie wniosku.

2.2. Twardówka

Chociaż wygląda zupełnie inaczej niż rogówka, można powiedzieć, że zbudowana jest bardzo podobnie. Podstawowym elementem jej struktury także są lamelle tworzone przez włókna kolagenowe. Skład chemiczny kolagenu jest w obu przypadkach bardzo podobny. Różnice między tymi dwiema strukturami – stromą i sklerą – stają się dobrze widoczne dopiero pod mikroskopem elektronowym. Ułożenie lamelli jest bardziej skomplikowane i są one różne w zewnętrznych i wewnętrznych warstwach twardówki. Także gęstość upakowania włókien nie jest jednorodna. Badania struktury powłoki rogówkowo-twardówkowej motywowane są chęcią fizykalnego uzasadnienia przyczyn, dla których rogówka jest przezroczysta dla światła, a twardówka nie. Dzięki wynikom uzyskanym w tych badaniach realne stały się też próby zbudowania mechanicznego modelu materiału powłoki oka [Pinsky i in. 2005], rzecz nie dotyczy więc tylko optyki. Dlaczego zatem rogówka jest przezroczysta, a twardówka nie?

Nad podstawami teoretycznymi przechodzenia światła przez tkanki oka pracowali między innymi Goldman i in. [1968], Hart i Farrell [1969], Benedek [1971], Maurice [1984], Bettelheim [1985], Vaezy i Clark [1991]. Zgodnie z tym, co wiemy z fizyki i z podanych prac, rozpraszanie światła zachodzi wówczas, gdy pojawiają się te składniki rozkładu Fouriera przestrzennych fluktuacji gęstości ośrodka, których długość fali jest większa niż połowa długości fali światła, czyli >200 nm. Vaezy i Clark [1994] obliczyli składniki rozkładu fluktuacji gęstości ośrodka na obrazach mikroskopowych rogówki i twardówki. Wyznaczyli w ten sposób odległości między włóknami kolagenowymi w obu tkankach, ich organizację przestrzenną oraz podstawowe składniki rozkładu Fouriera. Uzyskane rezultaty pozostają w doskonałej zgodności z fizyką rozpraszania światła, a także z wynikami prac badawczych. Jakie są te rezultaty?

Rogówka okazuje się przezroczysta dla promieniowania widzialnego, przepuszcza większość padającego na nią światła [Hart i Farrell 1969, Feuk 1970]. Jest tak, dlatego że średnica włókien zawiera się w granicach 20–30 nm, a odległość między nimi wynosi około 60 nm [Borcherding i in. 1975, Maurice 1984], czyli zdecydowanie mniej niż 200 nm (ale nie przesadnie mniej – rzecz można, dopasowanie rogówki pod tym względem do możliwości siatkówki, reagującej na fale o długości 400–700 nm, jest

idealne). Te wymiary włókien zachowane są w całej objętości stromy, zapewniając dużą jednorodność jej struktury. Właśnie tym zasadniczo różni się rogówka od twardówki.

Średnica włókien kolagenowych twardówki wynosi od 30 do 300 nm, a odległość między nimi też jest mocno zróżnicowana – średnio około 260 nm [Hogan i in. 1971, Maurice 1984]. To właśnie dzięki temu powłoka twardówki jest nieprzeźroczysta. O skuteczności, z jaką rozprasza ona światło, które nie powinno się mieszać wewnątrz oka ze światłem przepuszczonym przez przeźroczystą rogówkę, świadczy kolor twardówki – wszystkie długości fal są przez nią jednakowo rozpraszane.

Rezultaty omawianych badań optycznych pozwalają z kolei formułować postulaty wobec parametrów materiału twardówki. To, że krzywa rozciągania tego materiału, relacjonowana w literaturze, jest jakościowo podobna do ustalonej dla stromy wydaje się więc oczywiste, natomiast z tego, że układ lamelli w twardówce jest bardziej skomplikowany wynika większa sztywność rozciągania tej powłoki. Spostrzeżenia te pozostają w jakościowej zgodzie z modelem materiału przyjętym do obliczeń i opisanym w podrozdziale 4.4.2.

3. Model materiału – przegląd badań doświadczalnych

3.1. Jakie parametry

W najprostszym modelu materiału, liniowym i izotropowym, pojawiają się tylko dwa parametry, z których lepiej rozpoznawanym jest moduł Younga E . Drugi parametr, ułamek Poissona, przyjmuje typową dla tkanek miękkich wartość $\nu = 0,5$, co oznacza ich nieściśliwość. O *module Younga* rogówki pisali autorzy publikacji jeszcze w latach osiemdziesiątych XX w. Ale już wtedy od dawna było wiadomo, że ten model materiału (liniowo sprężysty) jest niewystarczający. Pierwsze próby użycia nieliniowej charakterystyki materiałowej do opisu powłoki rogówkowo-twardówkowej pojawiły się wcześniej, co było związane z nowymi możliwościami obliczeniowymi, po upowszechnieniu się komputerów i metod numerycznych. Najbardziej znaną jest praca Woo i in. [1972a]. Zależność między naprężeniem σ a odkształceniem ε , w stanie jednoosiowego naprężenia, autorzy aproksymowali funkcją wykładniczą $\sigma = A[\exp(\alpha\varepsilon) - 1]$ o dwóch stałych materiałowych A i α . Ten typ krzywej rozciągania stał się popularny w latach późniejszych, zastosowali go Nash ze współpracownikami [1982], a pod ich wpływem wielu innych badaczy. Obszernej weryfikacji przydatności tego równania konstytutywnego dokonał Fung [1993] i dzisiaj jest to funkcja najczęściej wykorzystywana jako charakterystyka materiałowa tkanek miękkich.

Mimo powszechnej akceptacji fizycznie nieliniowej stromy, w dalszym ciągu pokutowało w literaturze pojęcie „modułu Younga” – także w zastosowaniu do materiału nieliniowego. Był on wówczas rozumiany jako parametr *zmienny*. (Zauważmy, że jest to nadużycie tego terminu, zarezerwowanego przecież dla *liniowej* charakterystyki materiałowej.) Pozostając jednak przy tej powszechnie dziś akceptowanej definicji, moduł sprężystości E , w zastosowaniu do materiału nieliniowego, będziemy rozumieć jako moduł sieczny: $E_{\text{sieczny}} = \sigma / \varepsilon$.

Opis charakterystyki nieliniowej (zależności między naprężeniem a odkształceniem w jednoosiowym stanie naprężenia) jednym tylko parametrem E_{sieczny} jest niejednoznaczny. Próba uściślenia tego opisu powinna zawierać przynajmniej poziom na-

prężenia, przy którym moduł został określony. Spróbujmy zatem zinterpretować informację ograniczoną do modułu E_{sieczny} rogówki. Co mianowicie miałyby znaczyć, że parametr ten wynosi 8 MPa, gdy ciśnienie $p = 16$ mmHg (2,1 kPa)? Najpełniej określonym geometrycznie punktem rogówki jest jej wierzchołek: grubość w osi CCT = 0,520 mm oraz przyosiowe promienie krzywizny: $R = 7,8$ mm i $R_{\text{wewn}} = 6,5$ mm – średnio $R_{\text{średnie}} = 7,15$ mm, zatem naprężenie (dwuosiowe) w wierzchołku rogówki potraktowanej jak błona Laplace’a,

$$\sigma = \frac{pR_{\text{średnie}}}{2\text{CCT}} = \frac{2,14 \cdot 7,15}{2 \cdot 0,520} = 15 \text{ kPa.}$$

Nadal nie wiemy, jaki kształt ma krzywa rozciągania, ale mamy chociaż jeden punkt na tej krzywej, bo w płaskim stanie naprężenia i dla ośrodka nieściśliwego:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{2E} = \frac{15}{2 \cdot 8000} = 0,0009.$$

(Użyta tu została wartość 0,5 dla ułamka Poissona.) Teraz pozostaje nam szukać modułu E_{sieczny} zmierzonego dla innych jeszcze ciśnień p , aby otrzymać krzywą materiałową $\sigma(\varepsilon)$.

Przez moduł sprężystości podłużnej E materiału *nieliniowego* rozumie się całą procedurę, w której domyślnie przyjęta została geometria nominalna rogówki oraz założenie o stanie obciążenia jej wierzchołka.

3.2. Materiał rogówki

3.2.1. Stroma

Moduł sprężystości podłużnej E jest najczęściej podawanym parametrem materiału stromy. Próby jego identyfikacji trwają od dziesiątków lat. Wartości tego modułu, uzyskiwane eksperymentalnie, zawierają się w ogromnym przedziale, bo od 0,026 MPa [Sjontoft i Edmund 1987] aż do 57 MPa [Andreassen i in. 1980], a wykresy rozciągania przedstawione przez Uchio i in. [1999] sugerują nawet 115 MPa. Tak duży rozrzut wynika częściowo z tego, że wartość modułu określana bywa dla różnych naprężeń. Wzrastające z upływem czasu wymagania okulistryki sprawiły, że w próbach teoretycznego opisu materiału uwzględniono nowe rodzaje funkcji. Wśród rozmaitych propozycji równań konstytutywnych ośrodka nieliniowego, spotykanych w literaturze, preferowana jest obecnie postać wykładnicza zaproponowana przez Woo i in. [1972b]. Właściwości tego równania konstytutywnego omówiono w podrozdziale 4.4.

Publikowane wyniki pomiaru parametrów rogówki A i α są mocno zróżnicowane, podobnie jak mierzony moduł E . Współczynnik A najczęściej nie wykracza poza przedział 10^2 – 10^4 Pa, wykładnik α przyjmuje wartości od kilkunastu do kilkuset. Nash i in. [1982] otrzymali z pomiarów na próbkach wyciętych z rogówek ludzkich wartości zawarte w przedziale od 34 do 82. Woo uzyskał dla rogówki badanej *in vitro* w pełnej gałce ocznej $A = 5,4$ kPa i $\alpha = 28$ [Woo i in. 1972b], co oznacza, że przy naprężeniu 20 kPa moduł ścieczny wynosi 0,36 MPa. Później Woo powtórzył ten eksperyment i uzyskał $A = 1,75$ kPa i $\alpha = 48,3$ – [Ethier i in. 2004]. Szczegółowy przegląd wartości parametrów materiałowych uzyskanych doświadczalnie, znajdziemy w podręczniku [Fung 1993].

Widać, że zakresy wartości obu współczynników są duże. Co więcej, wzrost liczby badań nie zawęży ich zauważalnie. Zainteresowanie mechaniką rogówki inspirowane jest głównie przez chirurgię refrakcyjną i tonometrię. Znajomość parametrów materiałowych w połączeniu z możliwościami, jakie daje analiza numeryczna, pozwoliłyby na symulowanie skutków optycznych planowanej ingerencji chirurgicznej w geometrię rogówki. Także tonometria aplanacyjna zyskałaby narzędzie zwiększające dokładność pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego. Niestety na przeszkodzie do osiągnięcia tych celów stoi nikła wiedza o mechanice gałki ocznej, a publikowane wyniki badań doświadczalnych zbliżają nas do nich bardzo powoli.

Nieco inne podejście do stałych materiałowych rogówki reprezentuje Hjortdal [1996, 1998]. Moduł ścieczny sprężystości podłużnej rogówki (podrozdział 3.1 można potraktować jak komentarz do badań Hjortdala) mierzył on *in vitro* na preparacie całej gałki ocznej, oddzielnie w każdej z trzech wydzielonych stref rogówki – centralnej, paracentralnej, peryferyjnej oraz w rąbku, rozróżniając przy tym kierunki: południkowy i obwodowy. Moduły ścieczne tych stref określone zostały jako średnie w przedziałach ciśnienia: 2–10, 10–25 i 25–100 mmHg.

Wyniki otrzymane w przedziale ciśnienia 10–25 mmHg, zawierającym wartość przeciętną 16 mmHg, można streścić następująco: średni moduł E rogówki (w poszczególnych strefach różnice są niewielkie) jest zbliżony do 8 MPa, zarówno w kierunku południkowym, jak i obwodowym, natomiast dla rąbka wyniki różnią się istotnie – w kierunku południkowym $E = 6$ MPa, a w kierunku obwodowym $E = 13$ MPa.

Hjortdal podał równanie konstytutywne za pomocą funkcji potęgowej, takiej samej jakiej użyli Hoeltzel i in. [1992]. Obliczony według niej moduł ścieczny

$$E = \frac{\sigma^{1-\beta}}{\alpha\beta},$$

α i β to stałe materiałowe (mniejsze od jedności). Stała α jest tutaj inna niż w równaniu wykładniczym. Funkcja ta obowiązuje powyżej pewnego, skończonego poziomu naprężenia (wstępnego), nie jest zatem określona dla odkształcenia równego zeru.

Funkcja potęgowa nie przyjęła się w opisie materiału rogówki. Zasadniczy jej mankament staje się widoczny na samym początku procesu obciążania modelu gałki ocznej, poniżej ciśnienia 2 mmHg. Gdy odkształcenie zdąży do zera, także pochodna tej funkcji $d\sigma/d\varepsilon$ zdąży do zera, czyli moduł E . Dla eksperymentatora nie ma to zwykle większego znaczenia, ale w obliczeniach numerycznych jest akurat odwrotnie. Moduł $E = 0$ oznacza bowiem zerowy przyrost naprężenia po niewielkim zwiększeniu odkształcenia, gdy $\varepsilon = 0$, i oczywiście brak jednoznacznej zależności między naprężeniem a odkształceniem. Rozwiązanie takiego zadania jest wówczas niemożliwe. Funkcja wykładnicza (4.7) jest pozbawiona tej wady.

3.2.2. Błona Bowmana i błona Descemeta

Anderson i in. [2004] piszą, że błony Bowmana i Descemeta, razem z pokrywającymi je warstwami nabłonka, mają większą sztywność niż stroma, nie podają jednak źródła tej wiedzy. Prawdopodobnie jest to przekaz wcześniej ukształtowanych przekonań, wyrażonych także w pracy Woo i in. [1972a], którzy błonę Descemeta w swoim modelu utworzyli z materiału przyjętego dla skłery (twardówki), a więc o module sprężystości pięć razy większym od modułu stromy.

Globalnie błona Descemeta, podobnie jak stroma, jest izotropowa w kierunkach do niej stycznych, ale o jej parametrach mechanicznych wiemy jeszcze mniej niż o parametrach stromy. Badania wytrzymałościowe tej warstwy rogówki, bardzo nieliczne, są trudne do interpretacji. Najczęściej cytowany jest Maurice [Jue i Maurice 1986, Maurice 1988]. Niestety nie można na podstawie podanych przez niego wyników określić wartości liczbowych parametrów materiałowych.

Parametry błony Descemeta mierzył Danielsen [2004]. Otrzymał moduł sprężystości E zbliżony do 2 MPa przy odkształceniu zdążającym do zera – taki sam jak dla stromy. Wynik ten uzyskał na wyizolowanej z rogówki błonie, utwierdzonej na obwodzie i obciążonej ciśnieniem po wewnętrznej stronie. Przy obliczaniu odkształceń autor analizował geometrię obciążonej błony, a naprężenia wyznaczał z równania Laplace'a.

Kontrowersje wokół roli biomechanicznej, jaką pełni w rogówce błona Bowmana, zdają się być coraz słabsze. Obecnie w opinii większości badaczy warstwa ta nie odróżnia się wytrzymałościowo od stromy. Jeszcze w 1966 Schwartz i in. [1966] uznawali ją za najsztyniejszą w rogówce, jednak późniejsze pomiary zmieniły tę opinię [Hoeltzel i in. 1992, Seiler i in. 1992, Bryant i McDonnel 1996]. Ostatnio badania wytrzymałościowe błony Bowmana prowadzili Elsheikh i in. [2008a]. Porównywali przemieszczenie wierzchołka wypreparowanej rogówki, poddanej działaniu ciśnienia na wewnętrznej powierzchni, z przemieszczeniami rogówki pozbawionej tej warstwy. Opracowane na tej podstawie krzywe materiałowe dla 24 rogówek, podzielonych po połowie na dwie wymienione grupy – z błoną Bowmana i bez niej, nie różniły się istotnie (sztywność rogówki z tą błoną okazała się nieco mniejsza od sztywności

rogówki pozbawionej błony Bowmana). Mając na względzie ten rezultat, błona Bowmana nie będzie dalej, w modelu numerycznym rogówki, wyróżniana jako oddzielna warstwa.

3.3. Materiał rąbka i twardówki

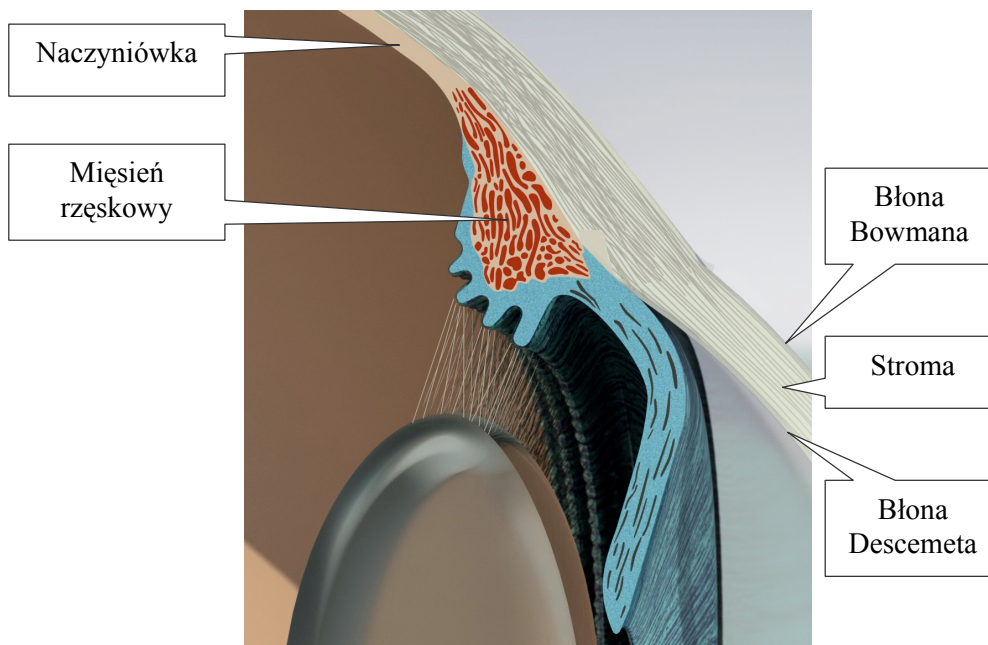
Powłoka twardówki łączy wszystkie elementy składowe oka w jedną funkcjonalną całość. Uważana jest za rodzaj obudowy dla układu optycznego gałki ocznej, jednak opisane w podrozdziale 7.2 wyniki badań sugerują, że twardówka odgrywa w tym układzie bardziej znaczącą rolę niż się jej tradycyjnie przypisuje. Optyczną funkcję twardówki wykorzystałem tam nawet do zidentyfikowania jej materiału – parametry materiałowe twardówki okazują się z tego względu parametrami optycznymi oka.

Także materiał twardówki stanowi przedmiot badań doświadczalnych, jednak mniej licznych niż w przypadku rogówki. Woo otrzymał moduł sieczny E_{sklera} zbliżony do 1,1 MPa, gdy naprężenie wynosi 20 kPa, co dla $E_{\text{stroma}} = 0,36$ MPa oznacza, że $E_{\text{sklera}}/E_{\text{stroma}} = 3,1$, a początkowa wartość tego ilorazu, mierzona dla naprężenia o rząd mniejszego, nie przekracza 5 [Woo i in. 1972b]. Iloraz modułów podany przez Uchio wynosi 2,5 [Uchio i in. 1999].

W badaniach biomechanicznych gałki ocznej moduł E_{sklera} uznawany jest za mało istotny dla optyki oka. Alastrue i in. [2006], porównując działanie modelu w serii symulowanych zabiegów chirurgicznych zmniejszających refrakcję, stwierdzają, że wyniki dla rogówki połączonej ze sporym fragmentem twardówki różnią się nieistotnie od wyników otrzymanych dla samej rogówki, utwierdzonej na obwodzie. Ponieważ nie wspominają o wartości przyjętego do obliczeń modułu E materiału twardówki, można sądzić, że był on taki sam jak dla rogówki. Wynikałoby stąd, że twardówka nie ma żadnego wpływu na układ optyczny oka, a zatem może być zarówno wiotka (jak rogówka), jak i nieskończenie sztywna. Yeh i in. [2000] badają z kolei efekty keratotomii radialnej na modelu gałki ocznej, zakładając, że stosunek modułów siecznych $E_{\text{sklera}}/E_{\text{stroma}} = 1,14$. Deenadayalu i in. [2006] przyjmują $E_{\text{sklera}}/E_{\text{stroma}} = 2,5$. Stosunek tych modułów w modelu studiowanym przez Ghista i in. [1972] wynosi 2,25.

Zauważmy, że moduł sprężystości twardówki (i powiązany z nim moduł rogówki) nie jest parametrem, który może przyjmować dowolnie pomyślane wartości. Choćby dlatego, że ma on decydujący wpływ na tak zwaną sztywność gałki ocznej – wyrażenie (6.11) – czyli stosunek przyrostu ciśnienia wewnątrzgałkowego do (niewielkiego) przyrostu objętości płynu wprowadzonego dodatkowo do wnętrza oka. Od dawna znana wartość tego parametru ogranicza dopuszczalny zakres wartości modułu sprężystości twardówki E_{sklera} , stąd wiele podawanych w literaturze wyników pomiaru E_{sklera} z góry można uznać za niewiarygodne. Zagadnienie sztywności gałki ocznej omawiane jest w podrozdziale 6.2.

Także stosunek E_{sklera}/E_{stroma} nie wydaje się być parametrem przypadkowym. Postulowana tu hipoteza samonastawności optycznej niemal całkowicie determinuje wartość tego ułamka, jednocześnie też modyfikuje dotychczasowe rozumienie terminu „twardówka”. Ponieważ parametry mechaniczne tkanek układu akomodacyjnego – ciała rzęskowego z podwieszoną do niego soczewką i mięśnia rzęskowego wraz z zaopatrującą go siecią naczyń krwionośnych – nie są znane i praktycznie nie można liczyć na wiarygodną ich identyfikację w bliskim czasie, uzasadnione wydaje się wykorzystanie idei *sztynności zastępczej* powłoki twardówkowej. W przeciwieństwie zatem do *parametrów materiałowych rogówki*, które w modelu przyjmują wartości zbliżone do rzeczywistych, parametry materiałowe rąbka i twardówki powinny zapewnić *działanie* modelu zbliżone do rzeczywistego. W związku z tym pojęcia „twardówka” i „rąbek” stosowane w proponowanym tu modelu należy rozumieć inaczej niż w ich opisie anatomicznym, struktury te bowiem uwzględniają dodatkowo opór sprężysty stawiany przez naczyniówkę i ciało rzęskowe.



Rys. 3.1. Układ akomodacyjny: mięsień rzęskowy kurcząc się rozciąga naczyniówkę, która przesuwaną się względem twardówki działa jak sprężyna – odkształcenie twardówki jest przez to nieduże

Przyjmując założenie, że model oka jest samonastawny optycznie (podrozdz. 4.6), *sztynności zastępcze* rąbka (jako pierścienia) i twardówki (jako powłoki) stają się – co wynika z rozwiązań opisanych w podrozdziale 7.2.1 – zależne od *sztynności rogówki*.

Wówczas, po ustaleniu geometrii zewnętrznych powłok oka, moduł sieczny E twardówki okazuje się ściśle określoną wielokrotnością modułu E rogówki. Moduł rąbka przyjmuje wartość pośrednią. Wynika z tego, że jedynie model rogówki stanowić ma wierną kopię rzeczywistości, natomiast wartości parametrów materiału realnego rąbka i realnej twardówki pozostają zaszyfrowane w zidentyfikowanych parametrach.

Zastępcze parametry materiałowe twardówki, zapewniające modelowi samonastawność optyczną, są tym bardziej odległe od rzeczywistych, im większa jest sztywność rozciągania tkanek przyległych do jej wewnętrznej powierzchni. Należy do nich naczyńiówka, która poza swoją podstawową funkcją, jaką jest ukrwienie tkanek oka, zdaje się też pełnić aktywną rolę w układzie akomodacyjnym. Na rysunku 3.1 pokazane są elementy składowe układu akomodacyjnego. Badania, obejmujące próby identyfikacji jego parametrów mechanicznych, podejmowano już na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Postulowany w nich mechanizm akomodacji był zasadniczo zgodny z hipotezą Helmholtza, modyfikacja dotyczyła jedynie nowej roli, jaką odgrywa w nim naczyńiówka. To właśnie ta warstwa, a nie twardówka, miałyby przeciwstawiać się sile pochodzącej od mięśnia rzęskowego. Tak więc, zgodnie z tym schematem działania, akomodacja dal-bliż zachodzi po skurczeniu się mięśnia rzęskowego i zrelaksowaniu w ten sposób soczewki, która przyjmuje bardziej kulisty kształt, natomiast akomodację bliż-dal, po rozluźnieniu mięśnia rzęskowego, zapewnia naczyńiówka, rozciągnięta wcześniej siłą skurczu. Specyfika tak pomyślanego przez Fishera [1969a, 1969b, 1986] mechanizmu akomodacji wymaga, aby naczyńiówka była powłoką *sprężystą*, a więc aby jej odkształcenie pozbawione było składnika lepkiego. Właściwości lepkosprężyste miałyby zachować jedynie soczewka. Także Alphen i Graebel [1977, 1991] usiłowali zidentyfikować parametry mechaniczne tego układu. Próby te nie dały jednoznacznych wyników, stanowią jednak interesujący przyczynek do budowy i funkcjonowania układu akomodacyjnego. Chociaż ostatnie lata przyniosły zasadniczą zmianę poglądów na temat działania układu akomodacyjnego, do czego głównie przyczynił się Schachar [1994, 1999], znaczenie naczyńiówki i ciała rzęskowego w modelu biomechanicznym oka nie zmieniło się. Ich obecność niewątpliwie modyfikuje sztywność rąbka i twardówki. Ale jak?

3.4. Ułamek Poissona tkanek oka – głos polemiczny w sprawie jego pomiaru

Ułamek Poissona nie pełni istotnej roli w mechanice gałki ocznej, mimo to mierzony jest z dziwnie wielkim zaangażowaniem. W wielu publikacjach dyskutowane są wartości tego parametru dla stromy, liczne są też cytowania takich oszacowań. Ponieważ granice wartości tego parametru są ściśle określone teoretycznie, a przedział jest wąski (od zera do 0,5), wyniki pomiarów uzyskiwane w laboratoriach zdają się już nie wykazywać tak dużego rozrzutu, jak w przypadku modułu sprężystości E . Wiadomo

nawet jaką wartość teoretyczną powinien osiągać ułamek Poissona, gdy materiał jest nieściśliwy – jak sklera i stroma. W pobliżu tej granicy, $\nu = 0,5$, lokują się zatem wyniki pomiarów laboratoryjnych. Tu jednak pojawia się problem dokładności pomiaru, któremu warto się przyjrzeć bliżej, gdyż płynące stąd wnioski rzucają światło na problem dokładności pomiaru pozostałych parametrów materiałowych tkanek oka, w tym przede wszystkim modułu sprężystości podłużnej.

W ośrodku liniowo-sprężystym sześć równań konstytutywnych wiąże sześć współrzędnych tensora odkształcenia z sześcioma naprężeniami. Tworzą one układ liniowy, nazywany prawem Hooke'a. Analiza konstrukcji metodą elementów skończonych, oparta jest zwykle na tego typu równaniach konstytutywnych – także wtedy, gdy ośrodek jest nieliniowy, a odkształcenia są skończone. Rozwiązanie końcowe osiągnięte jest wówczas przez stopniowe powiększanie obciążenia i kolejne rozwiązania przy narastających modułach sprężystości, aż do osiągnięcia ostatecznej wartości obciążenia. Zależność między tensorami naprężenia i odkształcenia tylko wtedy jest jednoznaczna (wyznacznik główny układu równań różny od zera), gdy na odkształcenia nie są nakładane dodatkowe warunki, a takim jest właśnie warunek nieściśliwości, czyli pierwszy niezmiennik tensora odkształcenia równy zeru. Wtedy rozwiązanie zadania staje się niemożliwe. Po wybraniu wspomnianego algorytmu obliczeniowego musimy zezwolić materiałowi na niewielkie zmiany objętości przez przyjęcie ułamka ν nieco mniejszego od 0,5. Tak też zwykle czynią użytkownicy oprogramowania przeznaczonego do wymiarowania konstrukcji.

Niestety ten nieszkodliwy dla jakości rozwiązania numerycznego wybieg, pozwalający korzystać z opcji użycia małych odkształceń w zadaniach nieliniowych, staje się przyczyną nieporozumienia, które powtarza się w wielu publikacjach. Naturalne przecież wydaje się ograniczenie liczby ν – nie mającej większego wpływu na wynik, gdy zawiera się ona między 0,4 a 0,5 – do dwóch cyfr znaczących. Najbliższą 0,50 jest liczba 0,49 i ta wartość jest przyjmowana najczęściej [Vito i Carnell 1992, Pandolfi i Manganiello 2006], ale zaokrąglana bywa też do 0,45 [Alastrue i in. 2006, Yeh i in. 2000, Asejczyk-Widlicka i in. 2004] – zależnie od dbałości autora o jakość rozwiązania, błędy bowiem zaokrągleń arytmetycznych w metodzie elementów skończonych są tym większe, im parametr ten jest bliższy 0,5, zwłaszcza gdy liczba elementów jest duża.

Otóż ta deklarowana najczęściej przez autorów rozwiązań numerycznych wartość $\nu = 0,49$ odbierana jest błędnie jako *podbudowana treścią empiryczną* i dlatego eksperymentatorom wydaje się dopuszczalną wartością w badaniach doświadczalnych. Prawdopodobnie z tego właśnie względu wyniki pomiarów laboratoryjnych, jakie znajdujemy w publikowanych opisach badań, oscylują między wartościami 0,395 a 0,490 i (nieco) więcej. Proste rachunki, pokazują, że te liczby nie mają sensu na gruncie badań doświadczalnych.

Pomiar ułamka Poissona materiału zbliżonego do nieściśliwego wymaga niezwyklej precyzji, a więc i użycia niezwyklej metod. Moduł ściśliwości K , moduł Younga E i ułamek Poissona ν związane są znaną w teorii sprężystości zależnością

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \text{ stąd } \nu = \frac{3K-E}{6K}. \quad (3.1)$$

Widać, że dla ustalonego modułu E , np. $E = 0,3$ MPa [Woo i in. 1972b, Orsengo i Pye 1999], moduł K zdąży do nieskończoności, gdy ν zdąży do 0,5. Doświadczalnie określona wartość $\nu = 0,395$ implikuje teraz $K = 0,476$ MPa, a $\nu = 0,480$ prowadzi do $K = 2,5$ MPa. Uchio i in. [1999] podają te dwie wartości ν , uzyskane doświadczalnie, jako skrajne dla oka ludzkiego. Tymczasem moduł ścisłości wody, która stanowi 81% składu rogówki, wynosi $K = 2200$ MPa – czyli *kilka rzędów* więcej. Moduł ścisłości kolagenu, dopełniającego skład, jest jeszcze większy. Taka wartość modułu K (2200 MPa) oznacza z kolei $\nu = 0,49998$. Liczby te jaskrawo pokazują jak jałowe są próby „mierzenia” ułamka Poissona powłok oka: wartości $\nu = 0,480$ i $\nu = 0,49998$ oznaczają dwa materiały o modułach ścisłości 2,5 i 2200 MPa, czyli zupełnie *różne* materiały, choć ułamki Poissona różnią się tylko o cztery procenty. Przyjmijmy dla tej tkanki bardziej prawdopodobny moduł $K = 2200$ MPa, okazuje się wtedy, że te dwie wartości ułamka Poissona – pozornie bliskie – oznaczają wg (3.1) moduły Younga E wynoszące odpowiednio 260 MPa i 0,26 MPa. Wartości $\nu = 0,480$ i $\nu = 0,49998$ są zatem równie odległe, jak te dwie wartości modułu Younga. Ułamek Poissona $\nu = 0,395$ oznacza wówczas $E = 1400$ MPa – sieczny moduł Younga uzyskany przez Uchio zawiera się zatem w przedziale 260–1400 MPa (!). Wbrew złudzeniu, wywołwanemu przez wąski przedział dopuszczalnych wartości, rozrzut wyników pomiaru ułamka Poissona wcale nie jest mniejszy niż rozrzut uzyskany wcześniej dla modułu Younga (podrozdz. 3.2). Przeciwnie, jest on *znacznie* większy, można nawet powiedzieć, że rezultaty wymknęły się spod kontroli i stały się irracjonalne. Przyczyną jest oczywiście bliskość granicy $\nu = 0,5$, dla której „popularne” metody mierzenia tego parametru zawodzą. Dokładność pomiaru musi być wtedy znacznie zwiększona – aparat fotograficzny i linijka, to o wiele za mało dokładne przyrządy pomiarowe!

O jaką więc wymaganą dokładność pomiaru tutaj chodzi? Jeśli ułamek $\nu = \left| \varepsilon_{\text{poprz}} / \varepsilon_{\text{wzdł}} \right|$ wyznaczany jest przy $\varepsilon_{\text{wzdł}} \approx 0,06$ i $\varepsilon_{\text{poprz}} \approx -0,03$ – są to odkształcenia przy naprężeniu jednoosiowym 20 kPa – to szacowany błąd

$$\Delta \nu = \left| \frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon_{\text{poprz}}} \right| \Delta \varepsilon_{\text{poprz}} + \left| \frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon_{\text{wzdł}}} \right| \Delta \varepsilon_{\text{wzdł}} = \left| \frac{1}{0,06} \right| \Delta \varepsilon_{\text{poprz}} + \left| -\frac{0,03}{0,06^2} \right| \Delta \varepsilon_{\text{wzdł}},$$

zatem

$$\Delta \nu = 16,7 \Delta \varepsilon_{\text{poprz}} + 8,33 \Delta \varepsilon_{\text{wzdł}},$$

gdzie $\Delta \varepsilon_{\text{wzdł}}$ i $\Delta \varepsilon_{\text{poprz}}$ są błędami pomiaru odkształcenia wzdłużnego i poprzecznego w rozciąganej próbce.

Jak widać, błąd pomiaru tylko jednego z odkształceń, $\Delta\varepsilon_{\text{poprz}} = 0,003$, ogranicza dokładność wyznaczanego ν do 0,05. Na długości bazowej jednego milimetra (tego rzędu jest grubość próbki wyciętej z twardówki lub rogówki) wymusza to dokładność pomiaru zmiany grubości sięgającą 3 mikrometrów – czyli wówczas zmierzone $\nu = 0,45$ może oznaczać zarówno 0,40, jak i 0,50. Ułamek Poissona zmierzony i podawany z dokładnością do 0,005 sugeruje zatem, że błąd pomiaru zmiany grubości próbki ograniczony został do 0,3 mikrometra. Osiągnięcie tej dokładności wymaga zastosowania specjalnych technik pomiarowych. Mimo to można znaleźć publikacje, w których ułamek Poissona, podawany z tą dokładnością, zmierzono... na fotografiach obciążonej próbki.

Podane oszacowanie $\nu = 0,49998$, uzyskane na podstawie równania (3.1) i znajomości modułów E i K , znacznie się jednak różni od *wszystkich publikowanych rezultatów doświadczalnych*. Liczba ta dobitnie wskazuje, że podczas mierzenia ułamka Poissona tkanek oka wcale nie chodzi o drugą cyfrę po przecinku – doświadczalne poszukiwanie jego wartości ma dopiero wtedy sens, gdy zaczynamy od *piątego* miejsca po przecinku.

Co oznacza wynik $\nu = 0,395$ uświadamia przykład. Obliczymy zmianę objętości 1 m³ ośrodka liniowo-sprężystego, gdy naprężenie średnie („ciśnienie”) wynosi $\sigma_m = 14$ kPa (takie naprężenie zdarza się czasami w żywej rogówce, a w próbie jednoosiowego rozciągania pojawia się ono przy naprężeniu 42 kPa). Metr sześcienny ośrodka o module $K = 2200$ MPa (jak woda) zwiększy wówczas swoją objętość o 6,4 cm³. Metr sześcienny „stromy”, dla której $\nu = 0,395$ i $E = 0,3$ MPa, czyli $K = 0,476$ MPa wg (3.1), powinien wówczas powiększyć swoją objętość o

$$\Delta V = V \frac{\sigma_m}{K} = 1 \text{ m}^3 \cdot 0,014/0,476 = 0,0294 \text{ m}^3,$$

czyli o blisko 30 litrów. Odkształcenie objętościowe w tym drugim przypadku jest 4600 razy większe. Z czego miałyby się brać tak ogromna różnica ściśliwości wody i stromy, jeśli stroma, to, praktycznie rzecz biorąc, woda? Dla stromy wynik $\nu = 0,395$ jest w świetle przytoczonych liczb na tyle dziwny, że autor donoszący o takim fenomenie powinien opatrzyć go jakimś uzasadnieniem, bo w przeciwnym razie podany rezultat zakrawa na ewidentny błąd. Mimo to nikt tego nie czyni, a autorzy takich prac zdają się nawet nie zauważać problemu¹.

¹ Żeliwo szare jest materiałem, który w próbie ściskania wykazuje $\nu > 0,5$ (przy dużym naprężeniu). Oznacza to, że objętość ośrodka wzrasta pomimo ściskania. Wynik ten byłby niezrozumiały, gdyby nie uzupełnić go objaśnieniem o fizykalnych przyczynach tego zjawiska, takich mianowicie, że przyrost objętości powodowany jest pojawieniem się pęknięć (pustek) w obszarach zajmowanych przez płatki grafitu – po prostu nie jest to ośrodek ciągły. Opisywany rezultat dotyczący stromy jest również niezgodny z naszą wiedzą o ośrodku *nieściśliwym*, dlatego wymaga fizykalnego objaśnienia. Czy może podczas rozciągania wydziela się w stromie jakaś nowa faza (para?), silnie powiększająca objętość?

Podsumowując, tkanka zewnętrznych powłok oka, złożona z wody i kolagenu, jest w badaniach doświadczalnych *praktycznie nieściśliwa* przy naturalnych naprężeniach. Próba mierzenia tej nieściśliwości jest *a priori* skazana na niepowodzenie. Jedyna informacja, jaką zawiera wynik pomiaru $\nu = 0,395$, to popełniony błąd, równy 0,1050. Skąd więc ta fascynacja mierzeniem ułamka Poissona?

3.5. Kwestia anizotropii materiału

Próby stworzenia modelu biomechanicznego rogówki podległego prawu Imberta–Ficka $p_G = p$ – będzie ono przedmiotem rozważań zawartych w podrozdziale 6.1.2 – koncentrują się zwykle na materiale i na poszukiwaniu takiej postaci jego anizotropii, która umożliwiłaby zbudowanie powłoki wiernie naśladującej błonę podczas spłaszczenia. A stan błonowy, jak się powszechnie uważa, jest wystarczającym warunkiem spełnienia przez rogówkę prawa Imberta–Ficka. Czy taka bezmomentowo spłaszczana rogówka musi już nieuchronnie podlegać temu prawu?

Odpowiedź na to pytanie, uzasadniona w podrozdziale 7.1.4.1, okazuje się negatywna. Można z tego wnioskować, że prawo Imberta–Ficka, w zastosowaniu do rogówki, jest tylko iluzją, której ulegają od schyłku XIX w. autorzy przytłaczającej większości publikacji na temat tonometrii. Krytyczny do niego stosunek, wyrażony na przykład w pracy [Gonzales G. i Fitt A. 2003], zdarza się niezwykle rzadko. Moje próby znalezienia w literaturze modelu podlegającego temu prawu kończą się zwykle tak samo, czyli jedynie na deklaracji autora/autorów, że jego/ich model symuluje GAT zgodnie z prawem Imberta–Ficka, odtworzenie bowiem opisywanych obliczeń nie potwierdzały tych zapewnień. Jedyny powszechnie znany wyjątek od tego schematu szczegółowo omówiony jest w podrozdziale 7.1.4.1.

Wiara, że spełnienie prawa Imberta–Ficka jest tylko kwestią modelu materiału rogówki bierze się z mylnego przekonania, pokutującego w tonometrii, że warunkiem równości $p_G = p$ dla dowolnego (oczywiście rozsądnie ograniczonego) ciśnienia p jest sztywność zginania tej powłoki zbliżona do zera. Prawdziwość tej tezy wcale nie jest oczywista i nie wolno jej postulować. Takie twierdzenie wymaga rzetelnego *dowodu*. Na pewno nie dostarcza go równanie Laplace’a, bo jest ono mało przydatne do opisu spłaszczenia realnej rogówki w GAT. Z rozwiązań dla tonometrii aplanacyjnej, które przedstawiono w podrozdziałach 7.1 i 8.1, wynika, że problem zależności między ciśnieniami p_G i p ma niewiele wspólnego z prawem Imberta–Ficka, a także z anizotropią materiału. Przedstawiony tam mechanizm aplanacji prowadzi bowiem – dla dużego ciśnienia wewnątrzgałkowego p – do ciśnienia zewnętrznego p_G *mniejszego* od p , *pomimo oporu zginania* powłoki rogówkowej. Ten efekt jest zaskakujący, a nawet niezrozumiały, na gruncie teorii błonowej. Ewentualne zmniejszenie obliczanego oporu spłaszczania dzięki anizotropii materiału może tylko *powiększyć* różnicę między tymi ciśnieniami – a to, zamiast ułatwić, tym bardziej utrudni zrozumienie przyczyn

tego zjawiska. Poprawnie zbudowany model biomechaniczny rogówki nie stosuje się do prawa Imberta–Ficka z powodu zupełnie innego niż *materiał*. Aplanacja to stan obciążenia powłoki, przy którym traci ona stateczność, a zatem i *szttywność*. Dlatego ciśnienie wskazywane przez tonometr jest w trakcie spłaszczenia mniejsze od IOP. Problem jest więc znacznie poważniejszy niż się dotychczas wydawało, ponieważ dotyka *konstrukcji*, a nie *materiału*. Tu nie chodzi o tych kilka parametrów więcej, które należałoby wyznaczyć dla materiału anizotropowego. Zmianie musi ulec samo *rozwiązanie* MES. Nawet model biomechaniczny rogówki z materiału zidentyfikowanego z *absolutną dokładnością* nie zapewni równości ciśnień wewnętrznego i zewnętrznego, bo rzeczywista rogówka nie stosuje się do prawa Imberta–Ficka.

To co proponuję zamiast klasycznego materiału anizotropowego, jest już od dawna znane mechanikom: model materiału o tzw. nienormalnej izotropii, czyli *innej* charakterystyce materiałowej podczas rozciągania niż podczas ściskania. W skrajnej postaci ten typ materiału określany jest w literaturze angielskojęzycznej jako *cabletype material*, co oznacza, że dla naprężeń ujemnych moduł Younga jest równy zeru. W obliczeniach nie oczekuję od rogówki aż takiej uległości, zakładam tylko, że moduł sprężystości podłużnej jest podczas ściskania stały i zupełnie wystarczy, gdy będzie równy modułowi obliczonemu w granicy dla (dodatnich) naprężeń zdążających do zera. Model takiego materiału w zastosowaniu do tonometrii okazuje się zupełnie wystarczający. Zapewnia niewielką sztywność zginania rogówki, gdy ciśnienie wewnątrzgałkowe jest bliskie zera. W przypadku ciśnienia porównywalnego z nominalnym lub większym, sztywność ta i tak praktycznie nie ma znaczenia, ponieważ wtedy powłoka traci stateczność podczas spłaszczenia – niezależnie od modułu sprężystości. Zjawisko to ma wiele większy wpływ na różnicę $p - p_G$ niż rodzaj anizotropii materiału. Dlatego w rozwiązaniach MES, zanim zaczniemy identyfikować klasę anizotropii materiału, najpierw powinniśmy uwzględnić *stateczność* powłoki.

4. Model mechaniczny gałki ocznej

4.1. Czym jest *model*, jakie są jego możliwości

Przez model należy rozumieć zestaw parametrów geometrycznych i materiałowych wystarczający do utworzenia projektu konstrukcji mechanicznej. Dane muszą być na tyle szczegółowe, aby możliwe było rozwiązanie tak postawionego zadania.

Modele obliczeniowe można podzielić na dwie grupy: analityczne i numeryczne. Model analityczny miałby tę przewagę nad numerycznym, że dostarczając rozwiązania zamkniętego, pozwalałby badać wpływ poszczególnych parametrów na jego funkcje, przede wszystkim optyczne. Wszelkie skutki zmian tych parametrów, np. przyrostu IOP modyfikującego moc optyczną, mają wówczas uzasadnienie fizyczne. Niestety możliwości analityczne są w tym względzie daleko niewystarczające. Model dający się rozwiązać tym sposobem to, jak dotąd, sama rogówka, w dodatku o stałej grubości i z materiału liniowo-sprężystego, a to są zbyt duże uproszczenia. Tego rodzaju ograniczeń nie wykazuje model numeryczny. Może on obejmować całą gałkę oczną – rogówkę wraz z twardówką, o dowolnej geometrii, i można go wyposażyć w niemal dowolny materiał: anizotropowy, nieliniowy i niesprężysty. Także warunki brzegowe, w tym sposób jego zamocowania, nie natrafiają na żadne bariery obliczeniowe. Jego możliwości wydają się nieograniczone.

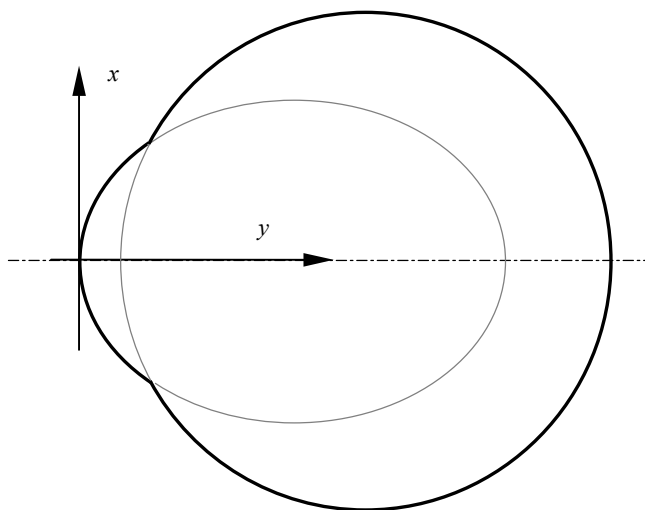
Model numeryczny ma jednak fundamentalną wadę – dostarcza rozwiązania w postaci tabel numerycznych. Każda zależność badana w takim modelu wymaga serii odrębnych rozwiązań, a otrzymane funkcje pochodzą z aproksymacji. Te jednak wybierane są arbitralnie, nie mają więc fizycznego uzasadnienia.

Nie wprowadzono dotąd żadnych standardów badań mechanicznych ludzkiej gałki ocznej. Wszelkie uśłowienia w tym zakresie znajdują się w fazie wstępnej i każdy badacz określa je samodzielnie. Dotyczy to przede wszystkim warunków brzegowych, ale także wartości parametrów wpływających na obliczaną moc optyczną. Oznacza to, że rozwiązania otrzymane przez dwóch niezależnych projektantów, bazujących na tej samej geometrii oka i korzystających z tego samego zestawu wyników badań eksperymentalnych, będą się różnić. Częściowo jest to spowodowane przypadkowym doбором parametrów strukturalnych tej konstrukcji, np. typem funkcji profilu

rogówki lub rozkładem grubości twardówki. W pozostałej części mankamenty modelu wynikają z braku jakichkolwiek wymagań wobec jego optyki. O ile pierwszy powód bywa przedmiotem troski autorów takich projektów, o tyle drugi w ogóle nie jest przez nich brany pod uwagę.

4.2. Geometria powłoki rogówkowo-twardówkowej

Ściśle biorąc oko nie jest osiowosymetryczne, ani rogówka, ani twardówka, jednak założenie takiej symetrii wobec modelu numerycznego, przeznaczonego do badania jego optyki, nie zaburza znacząco wyników i jest akceptowalne w pierwszym przybliżeniu, a na takim etapie znajduje się opisywany model. Przyjęte tu uproszczenie, dotyczące osiowej symetrii, obejmuje zarówno geometrię modelu, jak również obciążenie i zamocowanie, a w konsekwencji także jego właściwości optyczne.



Rys. 4.1. Dwa podstawowe składniki powłoki oka
– eliptyczna rogówka i kulista twardówka

Zewnętrzna powierzchnia *twardówki* aproksymowana jest kulą o promieniu 12,5 mm, jej grubość wynosi 1 mm w osi, około 0,6 mm w strefie równikowej i około 0,8 mm w rąbku. Profil *rogówki*, zarówno zewnętrzny, jak i wewnętrzny, opisany został elipsą

$$y(x) = \frac{1}{e^2 - 1} \left[\sqrt{R^2 + x^2(e^2 - 1)} - R \right]$$

[Kasprzak i Jankowska-Kuchta 1996] o mimośrodzie $e = 0,5$ [Asejczyk-Widlicka i in. 2004, Franklin i in. 2006]. Przekrój podzielony na elementy skończone pokazany jest na rysunku 4.2. W tabeli 4.1 podano podstawowe parametry geometryczne i optyczne modelu nieobciążonego. Zestaw tych parametrów w większości jest zgodny z modelem ludzkiej gałki ocznej Gullstranda–Le Granda [Le Grand i El Hage 1980].

Tabela 4.1. Parametry geometryczne i optyczne ludzkiej gałki ocznej

Parametr	Wartość
Promień krzywizny powierzchni zewnętrznej rogówki w osi	$R = 7,80$ mm
Promień krzywizny powierzchni wewnętrznej rogówki w osi	$R_{\text{wewn}} = 6,49$ mm
Grubość rogówki w osi (<i>central corneal thickness</i>)	$\text{CCT} = 0,520$ mm
Grubość rogówki w pobliżu rąbka (<i>peripheral corneal thickness</i>)	$\text{PCT} = 0,72$ mm
Średnica rogówki	11,5 mm
Średni współczynnik refrakcji cieczy wodnistej i ciała szklistego	$n \approx 1,336$
Moc optyczna soczewki	$P_{\text{soczewka}} = 22,07$ D
Ciśnienie wewnątrzgałkowe nominalne	$p = 16$ mmHg (2,1 kPa)

Jednym z najważniejszych parametrów geometrycznych gałki ocznej jest grubość rogówki CCT (na osi). Ma ona zasadniczy wpływ na wynik pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego dokonywanego wszelkimi klinicznymi technikami, a także na korektę refrakcji po zabiegu chirurgicznym. Z tego względu CCT najmocniej przyciąga uwagę badaczy i zainteresowanie okulistów. Należy podkreślić, że w publikacjach poświęconych modelowi biomechanicznemu i diagnostyce gałki ocznej, równie często jak 0,520 mm, pojawia się średnia grubość CCT = 0,550 mm [Kohlhaas i in. 2006, Hallberg i in. 2006, Wollensak 2003, Kanngiesser i in. 2003]. Ponieważ jednak średnia ta wyznaczana jest z odchyleniem standardowym sięgającym kilkudziesięciu mikrometrów, np. Wollensak [2003] podaje ± 40 μm , wybór między tymi dwiema wartościami średnimi wydaje się kwestią osobistych przekonań.

4.3. Układ optyczny

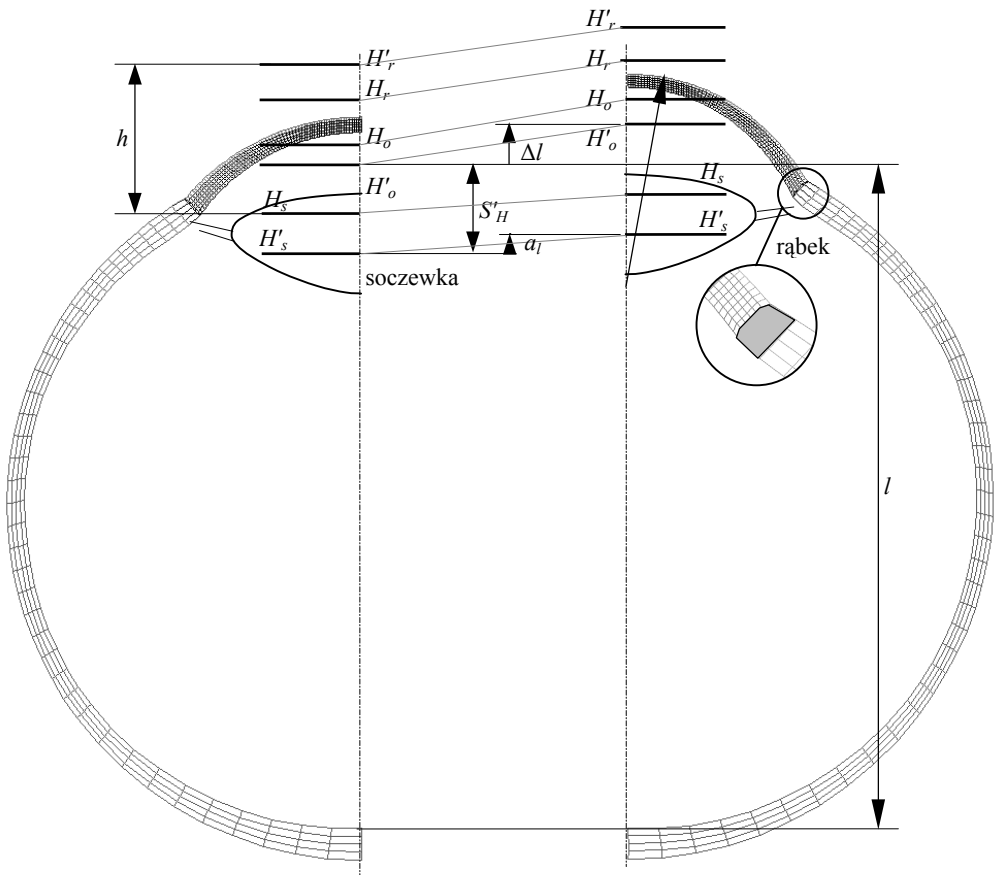
Układ optyczny rozważanego tu modelu gałki ocznej składa się z odkształcalnej rogówki (zewnętrznej soczewki) i z soczewki o stałej mocy optycznej, zawieszonej w płaszczyźnie rąbka. Po deformacji konstrukcji spowodowanej ciśnieniem wewnątrzgałkowym, przemieszczenie soczewki w kierunku osiowym jest z założenia równe przemieszczeniu rąbka. Schemat układu optycznego w stanie początkowym oraz po obciążeniu powłoki ciśnieniem wewnątrzgałkowym $p = 16$ mmHg pokazany jest na rys. 4.2. Siatka elementów skończonych modelu numerycznego, osiowosymetrycznego, jest w obszarze rogówki znacznie gęściejsza niż w obszarze twardówki. Wymiary najmniejszych elementów nie przekraczają 0,02 mm.

Moc optyczna układu rogówki i soczewki

$$P_{\text{oko}} = P_{\text{rogówka}} + P_{\text{soczewka}} - \frac{hP_{\text{rogówka}}P_{\text{soczewka}}}{n}, \quad (4.1)$$

gdzie: $P_{\text{rogówka}}$ i P_{soczewka} – moc optyczna rogówki i soczewki, n – współczynnik załamania cieczy wodnistej i ciała szklistego, h – odległość między płaszczyzną obrazową rogówki a płaszczyzną przedmiotową soczewki.

Opis szczegółów układu optycznego modelu gałki ocznej, obwarowany założeniami, zawarty jest w naszej pierwszej publikacji poświęconej problemom samonastawności optycznej [Asejczyk-Widlicka i in. 2004]; tutaj został on przytoczony bez większych zmian.



Rys. 4.2. Siatka elementów skończonych modelu gałki ocznej przed (po lewej stronie) i po obciążeniu IOP (po prawej). Indeksy r , s i o przy oznaczeniach głównych płaszczyzn optycznych H dotyczą odpowiednio rogówki, soczewki i oka. Prim oznacza płaszczyznę obrazową

Współczynniki załamania światła rogówki, cieczy wodnistej i ciała szklстого niewiele się różnią, dlatego przyjmujemy dla wymienionych ośrodków taką samą wartość $n = 1,336$. (Obliczenia, w których uwzględniono współczynnik $n_{\text{rogówka}} = 1,377$, dają w rezultacie moc optyczną P_{oko} różniącą się o około 1%, jednak *zmiany* mocy optycznej podczas zwiększania ciśnienia p są dla porównywanych współczynników niemal takie same.) Odległość h między główną płaszczyzną obrazową rogówki H'_r a główną płaszczyzną przedmiotową soczewki H_s , rys. 4.2, zmienia się podczas obciążania i znacząco wpływa na moc optyczną P_{oko} .

Moc optyczna samej rogówki (a dokładnie: jej zewnętrznej powierzchni, gdyż przyjęto, że współczynniki załamania światła rogówki i cieczy wodnistej są sobie równe) zależy od przyosiowego promienia krzywizny R jej zewnętrznego profilu

$$P_{\text{rogówka}} = \frac{n-1}{R}. \quad (4.2)$$

Początkowo, dla ciśnienia $p = 0$, optyczna długość oka l , rozumiana jako odległość mierzona wzdłuż osi od dna oka do głównej płaszczyzny obrazowej H'_o , może zostać utożsamiona z długością ogniskowej oka

$$f = \frac{n}{P_{\text{oko}}}. \quad (4.3)$$

Pod obciążeniem, gdy $p > 0$, gałka ulega ekspansji. Rąbek (z soczewką) przesuwa się do przodu o a_l , a optyczna długość oka wzrasta o

$$\Delta l = a_l + \Delta S'_H \quad (4.4)$$

$\Delta S'_H$ jest przyrostem odległości między główną płaszczyzną obrazową soczewki H'_s a główną płaszczyzną obrazową układu optycznego oka H'_o

$$S'_H = h \frac{P_{\text{rogówka}}}{P_{\text{oko}}}.$$

W rezultacie ognisko układu optycznego oka przesuwa się względem dna oka o

$$B = \Delta l - \Delta f. \quad (4.5)$$

Funkcja $B(p)$ opisuje zmianę położenia ogniska obrazowego względem dna oka. Staje się ona równa zeru, gdy przyrost długości optycznej oka po zwiększeniu ciśnienia p jest taki sam jak przyrost ogniskowej. (Oczywiście zmiany funkcji B nie pochodzą wyłącznie od zmian ciśnienia, może je wywoływać na przykład zmiana geometrii

rogówki w rozwiązaniu symulującym skutki zabiegu chirurgicznego.) Analityczny warunek samonastawności optycznej daje się zapisać następująco:

$$\frac{dB}{dp} = 0. \quad (4.6)$$

Oko samonastawne optycznie, w przypadku narastającego ciśnienia p , utrzymuje ognisko obrazowe w stałym położeniu względem dna oka, bez użycia akomodacji. Z tego względu funkcja $B(p)$ lepiej opisuje ostrość obrazu na siatkówce niż ogniskowa $f(p)$, określająca położenie ogniska względem głównej płaszczyzny obrazowej układu optycznego rogówka-soczewka. Ta zmiana układu współrzędnych, w którym opisywane jest położenie ogniska optycznego, wynika z uwzględnienia odkształcalności twardówki. Powszechne w literaturze ograniczenie obliczeń do śledzenia jedynie zmian ogniskowej jest równoznaczne z założeniem sztywnej twardówki.

Analiza konstrukcji metodą elementów skończonych dostarcza przemieszczenia rąbka (a więc soczewki) a_i , przemieszczenia wierzchołka rogówki oraz zmiany konfiguracji jej zewnętrznego profilu po obciążeniu ciśnieniem p . Ta część obliczeń wykonywana była za pomocą komercyjnego oprogramowania COSMOS/M (*Structural Research & Analysis Corporation*), przeznaczonego do wymiarowania konstrukcji metodą elementów skończonych.

Otrzymane w ten sposób współrzędne węzłów, leżących na linii zewnętrznego profilu rogówki po deformacji, w odległości do 0,7 mm od osi symetrii (15 węzłów), były następnie aproksymowane okręgiem (metodą najmniejszych kwadratów) w celu wyznaczenia promienia krzywizny R jej wierzchołka. Te i kolejne obliczenia, obejmujące analizę optyki modelu obciążonego ciśnieniem p , w tym zmian odległości S'_H i h , aż do uzyskania funkcji $B(p)$, prowadzone były z użyciem oprogramowania własnego autora.

4.4. Parametry materiału

4.4.1. Rogówka

Materiał rogówki w skali globalnej wykazuje tak zwaną poprzeczną izotropię – jej właściwości mechaniczne nie zależą od obrotu układu współrzędnych wokół prostej prostopadłej do powierzchni środkowej rogówki. W rozwiązaniach prezentowanych w literaturze traktowana jest zwykle jak powłoka w stanie błonowym, czyli dźwigar powierzchniowy. Rogówka z takiego materiału, zredukowana do powierzchni, jest izotropowa. Błędy wynikające z założenia izotropii okazują się pomijalnie małe także w modelu przestrzennym [Yeh i in. 2000].

W literaturze znajdujemy kilka propozycji nieliniowej charakterystyki materiału tkanek oka. Najlepiej uzasadnioną empirycznie, a jednocześnie prostą i wygodną w użyciu, jest funkcja wykładnicza zalecana przez Funga [1993]:

$$\sigma = A(e^{\alpha\varepsilon} - 1), \quad \varepsilon \geq 0, \quad (4.7)$$

gdzie A i α są stałymi materiałowymi.

Styczny moduł sprężystości $E_{\text{styczny}} = d\sigma/d\varepsilon$ wyraża się tu liniową funkcją naprężenia:

$$E_{\text{styczny}} = A\alpha e^{\alpha\varepsilon} = \alpha(\sigma + A)$$

i dla $\sigma \rightarrow 0$ jest różny od zera:

$$E_o = A\alpha. \quad (4.8)$$

Funkcja wykładnicza (4.7) opisuje materiał jedynie podczas rozciągania, czyli gdy $\varepsilon \geq 0$. Dla odkształcenia ujemnego przyjmujemy liniowe równanie konstytutywne:

$$\sigma = E_o\varepsilon, \quad \varepsilon < 0. \quad (4.9)$$

W zadaniu przestrzennym, gdy obciążenie narasta monotonicznie, a współrzędne naprężenia rosną proporcjonalnie, równanie konstytutywne przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Współrzędne siecznej macierzy sprężystości

$$\mathbf{D}^s = \mathbf{D}^s(E^s, \nu),$$

wyrażają się przez moduł sieczny E^s i ułamek Poissona ν . Efektywne odkształcenie ε , określone równaniem

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) \\ &+ \frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{yy}) \\ &+ \frac{1}{2(1+\nu)} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \end{aligned}$$

wykorzystywane jest do obliczenia siecznego modułu sprężystości

$$E^s = \frac{E^s(r) + E^s(c)}{2} + V \frac{E^s(r) - E^s(c)}{2},$$

w którym $E^s(c)$ jest modułem wyznaczanym w trzeciej ćwiartce charakterystyki naprężenie–odkształcenie (ściskanie), czyli tutaj według formuły (4.9), a moduł $E^s(r)$ – w pierwszej ćwiartce (rozciąganie), a więc na podstawie (4.7).

$$V = \frac{\phi}{\varepsilon(1 - 2\nu)},$$

gdzie ϕ jest odkształceniem objętościowym.

Powyższa procedura, opisana w *Manuals* oprogramowania Cosmos/M, zaadaptowana jest w jego standardowych algorytmach obliczeniowych i nie wymaga interwencji użytkownika przy obliczaniu macierzy sprężystości D^s .

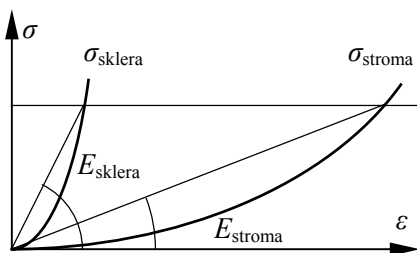
4.4.2. Twardówka

Parametry materiałowe twardówki, rogówki i rąbka postrzegane są przez badaczy jako niezależne w każdym z tych trzech obszarów. Najbardziej znanym eksperymentem nastawionym na ich identyfikację jest praca Woo i in. [1972b]. Przedstawione tam wyniki są niezwykle istotne, ponieważ Woo wziął pod uwagę także twardówkę. Dzięki temu możliwe jest porównanie parametrów materiałowych twardówki i rogówki, otrzymanych w jednym eksperymencie, przez tego samego badacza, za pomocą tej samej techniki pomiarowej. Z danych przedstawionych przez Woo i in., wynika, że moduł sieczny twardówki, dla małych naprężeń (odpowiadających IOP wyraźnie mniejszemu od wartości 16 mmHg), jest około 5 razy większy od modułu rogówki. Dla naprężenia 0,015 MPa, występującego w wierzchołku rogówki pod ciśnieniem nominalnym, stosunek modułów jest zbliżony do 4. Właściwości mechanicznych rąbka autorzy nie badali.

Dla dowolnego materiału nieliniowego (charakterystyki materiałowej) nie ma możliwości zdefiniowania odpowiadającego mu materiału o Q -krotnie większym module sprężystości E (siecznym), ponieważ porównania można dokonać w różnych, arbitralnie określonych warunkach (w tym samym punkcie konstrukcji albo dla tego samego obciążenia, albo dla jednakowych odkształceń, albo ...). Jeśli jednak ograniczyć porównanie dwóch charakterystyk materiałowych do stanów osiągniętych przy stałym odkształceniu lub przy stałym naprężeniu (jednoosiowym), to materiał opisywany równaniem wykładniczym, takim jak (4.7), stanowi wyjątek (pomijając materiał liniowy). Wówczas możliwe jest znalezienie modułu materiału twardówki (oznaczonego *sklera*) spełniającego warunek:

$$\frac{E_{\text{sklera}}}{E_{\text{stroma}}} = Q_{\text{sklera}}, \quad (4.10)$$

niezależnie od obciążenia p . Ponieważ warunek ten ma być spełniony dla dowolnego obciążenia, nadal jeszcze pozostaje kwestia czy porównuje się moduły, gdy $\sigma = \text{const}_1$, lub gdy $\varepsilon = \text{const}_2$. Przyjmujemy zatem, że warunek (4.10) spełniony jest dla ustalonego naprężenia. Ten wybór można uzasadnić zakładaną stabilnością geometryczną modelu tworzego z różnych, weryfikowanych tu materiałów.



Rys. 4.3. Moduł sieczny definiowany jest jako iloraz naprężenia i odpowiadającego mu odkształcenia. Porównanie modułów twardówki i stromy dokonywane jest dla ustalonego naprężenia

Moduł sieczny E dla wybranego punktu na krzywej $\sigma(\varepsilon)$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej, przechodzącej przez ten punkt i początek układu współrzędnych:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Ponieważ

$$E_{\text{sklera}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{sklera}}}, \text{ a } E_{\text{stroma}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{stroma}}},$$

zatem

$$\frac{E_{\text{sklera}}}{E_{\text{stroma}}} = \frac{\sigma / \varepsilon_{\text{sklera}}}{\sigma / \varepsilon_{\text{stroma}}} = \frac{\varepsilon_{\text{stroma}}}{\varepsilon_{\text{sklera}}} = Q_{\text{sklera}}, \quad (4.11)$$

co oznacza Q_{sklera} razy większe odkształcenie w materiale rogówki dla tego samego naprężenia w obu materiałach.

Gdy $\varepsilon \rightarrow 0$, $E \rightarrow E_{\text{styczny}}$. Po uwzględnieniu (4.8) otrzymujemy

$$\frac{E_{\text{sklera } o}}{E_{\text{stroma } o}} = \frac{A_{\text{sklera}} \alpha_{\text{sklera}}}{A_{\text{stroma}} \alpha_{\text{stroma}}} = Q_{\text{sklera}}. \quad (4.12)$$

Z porównania naprężenia w obu materiałach

$$\sigma = A_{\text{sklera}} (e^{\alpha_{\text{sklera}} \varepsilon} - 1) = A_{\text{stroma}} (e^{\alpha_{\text{stroma}} \varepsilon} - 1)$$

i z proporcji (4.12) wynika, że warunek (4.11) będzie spełniony, gdy

$$\frac{\alpha_{\text{sklera}}}{\alpha_{\text{stroma}}} = Q_{\text{sklera}}, \quad (4.13a)$$

$$A_{\text{sklera}} = A_{\text{stroma}}, \quad (4.13b)$$

zatem po założeniu równości naprężeń (zilustrowanej na rys. 4.3) wykładnik α_{sklera} w charakterystyce materiałowej (4.7) twardówki jest Q_{sklera} razy większy od wykładnika rogówki α_{stroma} , a parametr A jest w obu materiałach taki sam.

Iloraz Q_{sklera} jest jednym z parametrów sterujących optyką modelu, jego wartość ma wpływ na kształt funkcji $B(p)$, zdefiniowanej wzorem (4.5).

4.4.3. Rąbek

Kolejny eksperyment, mający znaczenie dla badań samonastawności optycznej oka, przeprowadził Hjortdal [1996]. Odkrył on istotną strukturę dla układu optycznego gałki ocznej, a mianowicie pierścienia rąbkowy, a także wydzielił kilka stref w obszarze rogówki, dla których zmierzył moduł sprężystości podłużnej, zarówno w kierunku obwodowym, jak i południkowym. Z badań tych wynika, że w obszarze rogówki materiał jest izotropowy w kierunkach stycznych do warstwy środkowej, jednak najciekawsze okazały się rezultaty dotyczące rąbka. Z pomiaru w kierunku południkowym, na długości około 1 mm (czyli porównywalnej z grubością powłoki oka w rąbku), otrzymał Hjortdal moduł sprężystości zbliżony do modułu rogówki (nieco mniejszy), ale w kierunku obwodowym parametr ten osiąga wartość 2 razy większą. Właściwości mechanicznych twardówki autor nie badał.

Bezwzględne wartości modułów zmierzonych przez Hjortdala mocno się różnią od uzyskanych przez Woo, stąd do porównania pozostają jedynie stosunki tych wartości, otrzymane przez każdego z badaczy. Są one jednak znaczące: na strukturę gałki ocznej składają się trzy różne obszary materialne: rogówka, rąbek i twardówka. Materiały rogówki i twardówki są zdecydowanie nieliniowe, za to możliwym do przyjęcia uproszczeniem zdaje się być założenie o ich izotropii. Także w rąbku, ponieważ strefa ta, chociaż anizotropowa, jest stosunkowo mała (ale prawdziwym powodem tego uproszczenia jest brak wiarygodnych danych empirycznych).

Podobnie jak w przypadku twardówki, parametry materiału rąbka można uzależnić od parametrów rogówki, analogicznie do wyrażen (4.13):

$$\frac{\alpha_{\text{limbus}}}{\alpha_{\text{stroma}}} = Q_{\text{limbus}}, \quad (4.14a)$$

$$A_{\text{limbus}} = A_{\text{stroma}} = A. \quad (4.14b)$$

Po wprowadzeniu do obliczeń materiału rogówki materiał rąbka opisywany jest jednym tylko parametrem (podobnie jak materiał twardówki), ilorazem Q_{limbus} (4.14a). Współczynnik A jest wspólny dla wszystkich trzech stref materialnych.

4.4.4. Błona Descemet

Ze względu na małą grubość, mniejszą od 0,01 mm, ten składnik struktury jest często pomijany. Obliczenia (podrozdz. 7.3) wskazują jednak, że wpływ błony Descemet na optykę modelu niekiedy może być znaczący i z tego względu jego rola powinna zostać zbadana. Opis materiału błony włączony zostanie do analizy numerycznej zgodnie z przyjętym schematem, a więc stała A równa stałej rogówki, wykładnik α stanowić będzie krotność wykładnika rogówki – podobnie jak w równaniach (4.13) i (4.14):

$$\frac{\alpha_{\text{Descemet}}}{\alpha_{\text{stroma}}} = Q_{\text{Descemet}}, \quad (4.15a)$$

$$A_{\text{Descemet}} = A_{\text{stroma}} = A. \quad (4.15b)$$

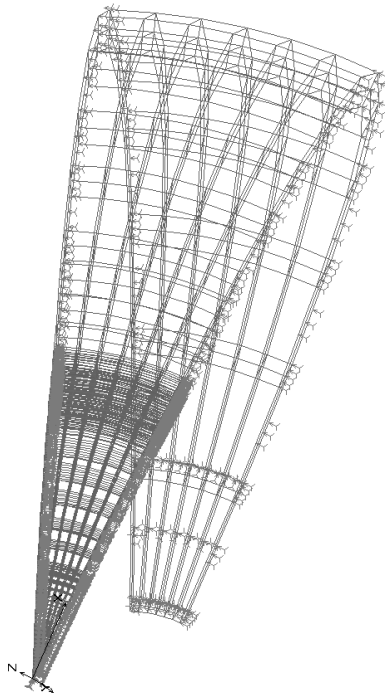
4.5. Model numeryczny

4.5.1. Struktura

Pola naprężeń i przemieszczeń konstrukcji wyznaczone były metodą elementów skończonych. Bazę danych numerycznych generowano i przetwarzano w systemie Cosmos/M. Na pojęcie modelu składa się również dyskretyzacja konstrukcji. Typ użytego elementu skończonego, gęstość i sposób podziału lub opcje rozwiązania MES mają zwykle zauważalny wpływ na wyniki obliczeń. W zależności od przeznaczenia model może przyjąć postać przestrzenną, oznaczaną tutaj 3D, albo „płaską” – 2D, jak zwykle określa się konstrukcję osiowosymetryczną. Oczywiście *płaskie* są tylko elementy skończone, bo przemieszczenia i naprężenia obliczane są dla konstrukcji trójwymiarowej.

Model 2D gałki ocznej, użyty do analizy zadań wykazujących osiową symetrię (czyli do większości opisywanych tu zagadnień) zbudowany został z izoparametrycznych elementów osiowosymetrycznych, czworokątnych, 8-węzłowych. Zagęszczenie elementów w obszarach rogówki i twardówki pokazano na rys. 4.2. Rąbek, wyekspozowany w kółku na tym rysunku, jest pierścieniem o powierzchni przekroju 0,40 mm².

Wersją 3D tego samego modelu, przeznaczoną do badania skutków optycznych keratotomii radialnej, jest konstrukcja dyskretyzowana elementami przestrzennymi typu *solid*: dwudziestowęzłowymi, izoparametrycznymi. Ten typ elementu umożliwia badanie pola naprężenia o stosunkowo dużych gradientach, zapewniając jednocześnie stosunkowo małą liczbę równań konstytutywnych MES oraz krótki czas obliczeń. Liczba elementów skończonych została też mocno zmniejszona dzięki wykorzystaniu symetrii zadania. Model rogówki z ośmioma nacięciami został ograniczony do klina o kącie wierzchołkowym 22,5 stopnia, złożonego z 2160 elementów zdefiniowanych z użyciem 10 614 węzłów. Odpowiada temu układ 31 842 równań o szerokości półpasma 219. Na rysunku 4.4 pokazany jest ten fragment konstrukcji wraz z zaznaczonymi na powierzchniach przekroju (powierzchniach symetrii) więzami uniemożliwiającymi przemieszczenia węzłów w kierunku prostopadłym do tych powierzchni. Dzięki temu deformacja konstrukcji po obciążeniu jej ciśnieniem wewnętrznym jest taka sama jak pełnego modelu, 16 razy większego. Mimo tych działań oszczędnościowych, ograniczających pamięć komputera i przede wszystkim błędy obliczeń, czas jednego rozwiązania wynosił około dwóch godzin.



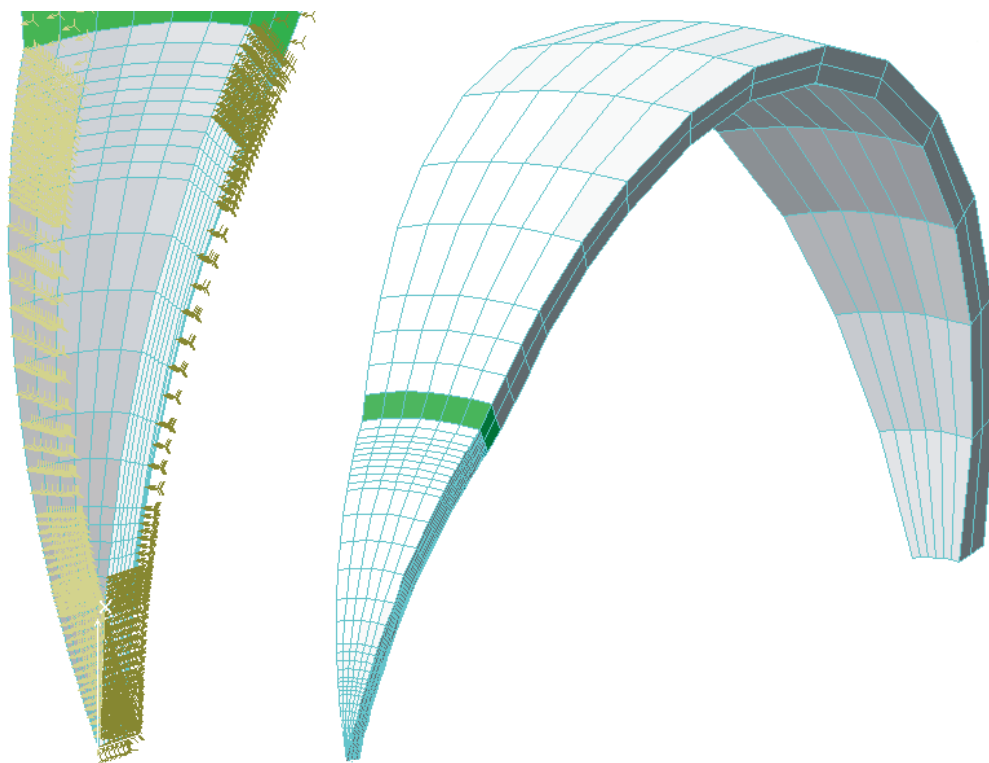
Rys. 4.4. Węzłom na powierzchniach bocznych klina odebrano swobodę przemieszczeń w kierunku do nich prostopadłym, dzięki temu deformacja zachowuje osiową symetrię pod działaniem IOP

Po spełnieniu warunku zachowania symetrii osiowej, zilustrowanego na rysunku 4.4, wykonanie nacięcia rogówki, symulującego zabieg keratotomii radialnej, sprowadza się do usunięcia części więzów na powierzchni bocznej klina, jak to jest widoczne na rysunku 4.5. Takie nacięcie wykonywane jest tylko po jednej stronie klina. W jego narożnikach elementy skończone rozmieszczone są gęściej.

Model 3D zawiera cztery obszary materialne: rogówka, twardówka, rąbek (zielony) i błona Descemeta. Ten ostatni obszar to pojedyncza warstwa elementów skończonych na wewnętrznej powierzchni rogówki, o grubości 0,01 mm – rys. 7.18.

Ustawienie parametrów rozwiązania systemu Cosmos/M pozwalało uwzględnić efekty nieliniowe pochodzące zarówno od materiału o charakterystyce (4.7) i (4.9), jak też od zmieniającej się konfiguracji konstrukcji w miarę wzrostu obciążenia (korygowany był kierunek ciśnienia stosownie do przemieszczeń powłoki). Pierwszą nieliniowość określamy jako fizyczną, drugą jako geometryczną.

Względna różnica rozwiązań w przemieszczeniach, modelu 3D i modelu 2D obciążonego nominalnym ciśnieniem wewnętrznym, nie przekracza 2%.



Rys. 4.5. Po prawej: siatka elementów skończonych szesnastej części gałki ocznej.
Po lewej: model rogówki poddanej keratotomii radialnej z zaznaczonymi warunkami brzegowymi.
Obszar powierzchni bocznej wolny od więzów stanowi strefę nacięcia

4.5.2. Zamocowanie

Preferencje badaczy w kwestii sposobu zamocowania gałki ocznej dalekie są od jednomyślności – nie dlatego, by problem ten budził kontrowersje, raczej z braku przekonania, że jest on ważny. Brakuje też w literaturze doniesień o badaniach doświadczalnych w tym zakresie. Modele analityczne, z oczywistych powodów ograniczone do samej rogówki, mocowane są suwliwie na obwodzie lub po prostu utwierdzone. Jednak uproszczenie takie stosowane jest też wobec modeli numerycznych. W podrozdziale 8.3 wykazano, że nie ma ono uzasadnienia – wręcz prowadzi do mylących wniosków, szczególnie w badaniach funkcji optycznych gałki ocznej. Powody, dla których przyjmowano te warunki brzegowe w rozwiązaniach analitycznych zniknęły po przejściu na metody numeryczne, zatem trwanie przy nich dzisiaj można uzasadniać jedynie przyzwyczajeniem.

Obecnie większość opracowań na ten temat uwzględnia już całą gałkę – rogowkę i twardówkę, lecz teraz zagadnienie warunków brzegowych sprowadza się do pytania, czy jest ona swobodnie zawieszona w oczodole, czy osadzona sztywno. Od tego bowiem zależy optyczne działanie modelu oka przy zmianach jego obciążenia. Można odnieść wrażenie, że preferowana jest opcja gałki swobodnej [Schutte i in. 2006]. Potwierdzają tę możliwość wyniki pomiaru sztywności gałki ocznej, czyli stosunku przyrostu p do przyrostu objętości płynu w jej wnętrzu – są one nieznacznie tylko różne, gdy pomiar dokonywany jest na oku znajdującym się w oczodole i na oku wy-preparowanym (punkt 6.2). Inne badania sugerują coś znacznie gorszego: zamocowanie gałki zdaje się być cechą osobniczą i możliwe jest znalezienie pośród osób badanych przypadków zupełnie skrajnych – zarówno jej utwierdzenia, jak i swobodnego zawieszenia [Kempf i in. 2005, Kaneko i in. 2005].

Chociaż zagadnienie to nie jest błaha i wymaga zajęcia stanowiska, obecnie brak jest podstaw do wyboru między utwierdzeniem, swobodnym zawieszeniem lub przypadkiem pośrednim. Dla niektórych badanych tu stanów obciążenia modelu gałki ocznej, zwłaszcza dla tonometrii, sposób zamocowania twardówki nie odgrywa istotnej roli, jednak w rozwiązaniach dotyczących kwestii samonastawności optycznej lub sztywności modelu, warunki brzegowe mają duże znaczenie. Samonastawność badana była przy swobodnym zawieszeniu modelu, pozwalającym twardówce na nieskrępowaną ekspansję. Sztywność modelu, referowaną w podrozdziale 6.2, zbadano przy obu skrajnych wersjach zamocowania twardówki – utwierdzenia i swobodnego zawieszenia.

4.5.3. Aplanacja

Splaszczanie wierzchołka modelu rogówki w symulowaniu GAT należy do kategorii warunków brzegowych określanych jako kinematyczne. Związane z tym pole przemieszczeń ilustruje rysunek 7.5, a także rysunki 8.3 i 8.4. W takich przypadkach gdy obciążenie jest rezultatem zachodzenia na siebie części konstrukcji, wykorzysty-

wane są zwykle węzły typu *gap*. Wydaje się jednak, że algorytm samoczynnego kontrolowania przez system (w tym przypadku Cosmos/M) tego typu warunku brzegowego podczas przenikania się wybranych powierzchni konstrukcji (rogówki i końcówki pomiarowej tonometru) wprowadza większe błędy niż po bezpośrednim podaniu kinematycznych warunków brzegowych w spłaszczonym obszarze rogówki. Wskazują na to testy dokładności takich rozwiązań, z tego względu zrezygnowałem ze standardowych algorytmów systemowych i wprowadziłem procedury oparte na „ręcznie sterowanych” warunkach kinematycznych. Nastręcza to pewne trudności obsługującemu program, ale za to podnosi dokładność rozwiązań.

Obciążenie spłaszczające rogówkę z zewnątrz wprowadzane było dwuetapowo. Po rozwiązaniu modelu 2D, obciążonego wybranym ciśnieniem wewnętrznym p , obliczane były przemieszczenia węzłów na zewnętrznej powierzchni rogówki, wymagane do ułożenia ich na linii prostej, prostopadłej do osi rogówki. Do tego celu wykorzystywany był specjalnie napisany program, który odczytywał przemieszczenia tych węzłów zapisane w bazie systemu Cosmos/M po pierwszym etapie obliczeń, a rezultatem działania tego programu był plik tekstowy z serią komend dla Cosmos/M zawierających przemieszczenia indywidualnie dobrane dla każdego węzła. Trudności, jakie się pojawiają podczas takiego spłaszczania wierzchołka rogówki, dotyczą *znaku* siły nacisku wywieranej przez powierzchnię końcówki pomiarowej tonometru. Rzecz w tym, aby nacisk na *każdy* węzeł, który wszedł w kontakt z końcówką pomiarową tonometru, był dodatni (aby jego powierzchnia nie przyciągała rogówki), a jednocześnie żaden węzeł, aż do brzegu strefy spłaszczenia, nie został pominięty. Przy tym średnica końcówki pomiarowej jest z założenia większa od średnicy strefy spłaszczenia.

Po wprowadzeniu do systemu Cosmos/M tak przygotowanych danych, konstrukcja z tym warunkiem brzegowym (i pod ciśnieniem p) rozwiązywana była ponownie. Na koniec, także z użyciem dodatkowo utworzonego programu, odczytywany był średni nacisk na powierzchni spłaszczenia. Analogicznie wyznaczane było ciśnienie zewnętrzne w symulacjach DCT i ART, gdy wierzchołek rogówki, wchodzącej w kontakt z końcówką tonometru, deformowany był w kształcie powierzchni kulistej – wklęsłej lub wypukłej. Ten typ warunku brzegowego ilustrują rysunki 8.25 i 8.28.

4.6. Hipoteza samonastawności optycznej oka

Pomysł. Podstawową rolę w preferowanym tu podejściu do identyfikacji strukturalnej oka odgrywa hipoteza samonastawności optycznej, sformułowana przez Kapszaka [1997]. Sprowadza się ona do następującej tezy: ostrość obrazu na siatkówce oka ludzkiego jest niezależna od (ograniczonych) oscylacji ciśnienia wewnątrzgałkowego p wokół wartości nominalnej. Oscylacje te, powodowane zmianami ciśnienia krwi i oddychaniem (a więc zachodzące w skali pojedynczych sekund, a nawet jednej sekundy) zawierają się zwykle w przedziale do 5 mmHg [Adler 2002]. W warunkach

klinicznych możliwe jest obserwowanie jeszcze większych zmian p , np. po podaniu leku obniżającego to ciśnienie. Największe jednak zmiany ciśnienia zaobserwowano podczas dużego wysiłku fizycznego, połączonego z przekrwieniem twarzy. Pomiar wykonany w tych warunkach na oku trębacza (może nieco przesadnie zaangażowanego w grę) wykazał zmianę p z 15 mmHg na 46 mmHg [Schuman i in. 2000], a maksymalne ciśnienie zmierzone u badanego po silnym zaciśnięciu powiek osiągnęło nawet wartość 110 mmHg [Coleman i Trokel 1969]. Tego rzędu zmiany ciśnienia uzyskał też Miller [1967].

Przemieszczenia wierzchołka rogówki okazują się wówczas tak znaczne [Bryant i McDonnell 1996], że powinny wpływać zauważalnie na ostrość obrazu na siatkówce. Ze wzrostem ciśnienia p rogówka oddala się bowiem od siatkówki, a jednocześnie wzrasta promień krzywizny R jej wierzchołka. Każda z tych dwu składowych deformacji wpływa na położenie ogniska układu optycznego względem dna oka, ale wynikające z nich przesunięcia ogniska są przeciwnych znaków. Obserwacje kliniczne [McMonnies i Boneham 2007], a także przesłanki biologiczne, uzasadniają tezę o kompensowaniu się tych dwu tendencji w ruchu ogniska względem dna oka. Ostatecznie w zdrowym oku ognisko powinno pozostać nieruchome.

Hipoteza samonastawności optycznej znajduje potwierdzenie w obserwacji przytoczonej przez McMonniesa [1970]. Pacjent ze stożkiem rogówki (*keratoconus*) dostrzegał okresowe zaburzenie obrazu, synchroniczne z pulsem tętniczym. Widać, że te niewielkie zmiany ciśnienia wewnątrzgałkowego w zupełności wystarczają do indukowania powtarzalnego wybrzuszania się stożkowego wierzchołka rogówki. McMonnies uzasadnia tę przypadłość zmianami geometrii wierzchołka rogówki pod wpływem ciśnienia, ponieważ po założeniu sztywnej soczewki kontaktowej, obserwowane zjawisko zanikło. Oko z tą wadą strukturalną nie jest więc samonastawne optycznie.

Do sprawdzenia jest następująca wątpliwość: może w zdrowym oku zmiany mocy optycznej, wprowadzane pulsowaniem IOP, korygowane są przez układ akomodacyjny i z tego właśnie powodu większość ludzi ich nie zauważa. Przeciętne tętno zaburza obraz nieco częściej niż co jedną sekundę. Aby układ akomodacyjny był w stanie kompensować to zaburzenie, musiałby mieć czas reakcji chociaż o rząd krótszy. A jaki jest ten czas? Wyniki badań zamieszczone w pracy [Beers i van der Heijde 1994] są jednoznaczne: po zadziałaniu bodźca upływa 0,5 s do rozpoczęcia procesu akomodacji. Zmiana ustawienia soczewki z blizy na dal zajmuje następne 0,5 s, a zmiana w drugą stronę, czyli z dali na bliż, jest jeszcze dłuższa, trwa już całą sekundę. Tak długi czas reakcji wyklucza możliwość korygowania przez układ akomodacyjny zaburzeń refrakcji powodowanych pulsem tętniczym.

Utworzenie modelu numerycznego gałki ocznej, samoczynnie kompensującego ostrość obrazu po ekspansji wymuszonej przyrostem ciśnienia wewnątrzgałkowego, okazuje się możliwe, a okoliczność ta dodatkowo przyczynia się do uwiarygodnienia pomysłu Kasprzaka. Warunkiem takiego działania modelu, o ustalonej geometrii, są – jak wynika z badań przedstawionych w podrozdziale 7.2 – ściśle określone zależ-

ności między parametrami materiałowymi rogówki, rąbka i twardówki. Hipoteza samonastawności optycznej oka integruje parametry strukturalne modelu, czyniąc zeń *układ* optyczny. Uwarunkowania mechaniczne w funkcjonowaniu tego układu mają z pewnością ogromną rolę do odegrania, ale nie ulega wątpliwości, że jest to rola usługowa – to wymogi optyki wymuszają postulowaną funkcję oka. Dzięki temu identyfikacja mechaniczna gałki ocznej staje się łatwiejsza. Także badania samego układu optycznego oka zyskują w tym zjawisku sprzymierzeńca [Śródka i in. 2002, Hachoł i Śródka 2006].

Historia badań modelu samonastawnego optycznie. Postulowana funkcja optyczna oka nie jest łatwa do wykazania w sposób bezsporny, nazywanie jej hipotezą dobitnie to podkreśla. Opisane obserwacje czynią ją jednak wielce prawdopodobną. Naturalne jest przypuszczenie, że powłoka zgodna geometrycznie z gałką oczną i utworzona z odpowiednich materiałów, będzie samonastawna optycznie. Pierwszą próbę rozwiązania takiej konstrukcji przedstawiliśmy w pracy, która ukazała się jeszcze w tym samym, 1997 roku [Śródka i Kasprzak 1997]. Jak to zwykle bywa w pierwszych próbach, model numeryczny tej konstrukcji był elementarny, bo złożony z dwu różnych, liniowo-sprężystych obszarów materialnych – rogówki i twardówki. Do regulowania jego układu optycznego użyliśmy profilu rogówki: elipsa o mimośrodku 0; 0,65; 1 oraz kosinus hiperboliczny. Konstrukcja była geometrycznie liniowa, co także nie zbliżało jej do rzeczywistości. Oczywiście żaden badany wariant modelu nie okazał się samonastawny „sam z siebie”. Jednak ta pierwsza próba pokazała możliwość sterowania układem optycznym modelu i wpływania na położenie ogniska podczas zwiększania IOP.

Znacznie wyższy stopień złożoności wykazuje nasz następny model gałki ocznej przeznaczony do badania samoczynnego utrzymywania ogniska na dnie oka, pomimo zmian IOP [Asejczyk-Widlicka i in. 2004]. Nadal był on liniowy, fizycznie i geometrycznie, zawierał jednak znamienny szczegół konstrukcyjny – wydzielony w postaci odrębnego elementu konstrukcyjnego pierścień rąbkowy, przeznaczony do „strojenia” optyki. Ten etap badań miał odpowiedzieć na pytanie, czy są jakieś ograniczenia nakładane na funkcję profilu rogówki w modelu samonastawnym i jaką rolę odgrywa w nim rąbek. Wyniki okazały się nie tylko zgodne z tym, co otrzymują eksperymenciatorzy w badaniach doświadczalnych prowadzonych na pełnej gałce ocznej (patrz podrozdz. 5.2.1), ale przede wszystkim potwierdziły przewidywania samej optyki, ponieważ optymalna okazała się funkcja profilu rogówki, która zapewnia najmniejsze aberracje – kosinus hiperboliczny lub elipsa o mimośrodku zbliżonym do 0,5. Obliczenia wykazały także istnienie „zakazanych” funkcji profilu rogówki, czyli takich, które odbierają modelowi możliwość osiągnięcia samonastawności.

Chociaż niedoskonały, model zaprezentowany w *Optik* okazał się ważnym (dla nas) etapem badań biomechanicznych ludzkiej gałki ocznej. Wskazał on na konieczność kojarzenia mechanicznych parametrów modelu z optycznymi i zapoczątkował prace nad modelem nieliniowym. Strategia obliczeń oparta na założeniu o jedno-

znacznej zależności występującej pomiędzy mechanicznym i optycznym aspektem struktury modelu nieliniowego, użyta w podrozdziale 7.2, doprowadziła do zidentyfikowania materiału twardówki i odkrycia mechanizmu samonastawności w niemal całym, fizjologicznie dopuszczalnym, zakresie zmian IOP. Wynik ten – samonastawność w aż tak szerokim przedziale ciśnienia – wspiera nie tylko hipotezę Kasprzaka, weryfikuje też samą strukturę. Wszystkie etapy badań mechaniki ludzkiego oka – model Gullstranda-Le Granda (tab. 4.1), powszechnie potwierdzana eksperymentalnie charakterystyka materiału (4.7), stosunek modułów zmierzony przez Woo (4.10), określona doświadczalnie sztywność gałki ocznej wg Friedenwalda (6.11), hipoteza samonastawności (4.6) – zdają się zdążać do celu, jakim jest model gałki ocznej zdolny samoczynnie utrzymywać ognisko optyczne nieruchomo na siatkówce w całym, obserwowanym u człowieka, zakresie ciśnienia wewnątrzgałkowego. Elementy tej układanki tworzone były niezależnie, jeśli więc tak dobrze do siebie pasują, to pozostaje tylko połączyć je w całość.

5. Problemy identyfikacji parametrów strukturalnych modelu biomechanicznego

5.1. Materiał

5.1.1. Badania laboratoryjne

Gromadzone przez dziesięciolecia wyniki pomiaru parametrów materiałowych rogówki lub twardówki zawierają się w ogromnych przedziałach wartości (podrozdz. 3.2). W ostatnich latach rozrzut wyników zdaje się maleć, nadal jednak są one mało wiarygodne. Najprościej sporządzić charakterystykę materiałową rogówki w próbie rozciągania wyciętego z niej paska [Andreassen i in. 1980, Nash i in. 1982, Seiler i in. 1992, Borja i in. 2004, Elsheikh i Anderson 2005]. Trudniejsze i kosztowniejsze są badania prowadzone na dużych fragmentach gałki ocznej [Hibbard i in. 1970, Buzard 1992, Hjortdal 1996, Shin i in. 1997, Elsheikh i Anderson 2005]. Argumenty za jednym lub drugim rodzajem testu są jednakowo liczne, może dlatego cytowani tu Elsheikh z kolegami zdecydowali się na badania porównawcze. Autorzy podają trzy zasadnicze mankamenty testu na próbkach-paskach. Dwa pierwsze wynikają z tego, że pasek pochodzi z powłoki sferycznej, zakrzywiony jest więc wzdłuż długości i wzdłuż szerokości. Spłaszczenie go podczas rozciągania powoduje wydłużenie włókien na wewnętrznej powierzchni i skrócenie na zewnętrznej, co jest równoznaczne ze wstępnym odkształceniem próbki. Trzeci mankament wynika ze zmiennej grubości rogówki. Ponieważ próbka wycinana jest od brzegu do brzegu przez jej wierzchołek, najcieńsza staje się przez to w środkowej części, a najgrubsza na końcach.

Test przeprowadzony na rogówce o geometrii naturalnej jest pozbawiony tych zaburzeń, ale na ich miejsce pojawiają się inne. Ciśnienie wywierane na wewnętrzną powierzchnię powoduje przemieszczenie wierzchołka rogówki i modyfikuje jego krzywiznę. Pomiar tych wielkości umożliwi wyznaczenie zależności między naprężeniem i odkształceniem, a w konsekwencji także parametrów materiałowych. Jednak proste użycie równania Laplace'a i analiza zmian geometrii powłoki okazują się mało

dokładne, przede wszystkim dlatego, że odkształcenie obliczane jest jak dla powłoki sferycznej, a oko sferą nie jest. Uwzględniane poprawki mocno komplikują opis przemieszczeń, co widać w wielu pracach Andersona i Elsheikh'a [Anderson i in. 2004, Elsheikh i in. 2005–2008a], trudno jednak ocenić jak duży mają wpływ na dokładność wyniku. We wspomnianej pracy [Elsheikh i Anderson 2005] moduł sieciowy wyznaczony tą techniką na rogówce świńskiej, przy naprężeniu 20 kPa, wynosi 0,38 MPa. Po wykonaniu pomiaru na pasku wyciętym z rogówki, moduł E jest równy 0,56 MPa, więc niemal o połowę więcej niż poprzednio, chociaż każdy z tych wyników otrzymano po uwzględnieniu wszystkich dających się przewidzieć zaburzeń. A jaki jest rzeczywiście ten moduł? Czy możliwe jest znalezienie takiej formuły, która pozwoli *ostatecznie skorygować* otrzymany rezultat?

5.1.2. Metoda odwrotna identyfikacji

Projektowanie konstrukcji mechanicznych – maszyn, pojazdów lub budowli – polega zwykle na obliczaniu *wymiarów* ich elementów składowych, ponieważ wiedza o użytych materiałach jest na tyle duża, że nie zajmuje uwagi projektanta. Ale nie zawsze tak jest.

Możliwości analizy numerycznej dają się też wykorzystać w odmienny sposób. Przy danej geometrii i danym obciążeniu konstrukcji, rozwiązania numeryczne mogą zostać wykorzystane do ustalenia zależności występującej pomiędzy polem przemieszczeń a parametrami użytego materiału. Ta strategia obliczeń ma sensowne zastosowanie w przypadku *istniejącej już konstrukcji*, którą możemy dość dowolnie obciążać i mierzyć wywoływane tym przemieszczenia, ale nie znamy materiału, z którego została wykonana. Aby go zidentyfikować, należałoby utworzyć wierny geometryczny model numeryczny tej konstrukcji, a następnie wprowadzić do obliczeń materiał, który zapewni, po rozwiązaniu, pole przemieszczeń zbliżone do uzyskanego eksperymentalnie. W zależności od liczby identyfikowanych parametrów wymagana jest odpowiednio liczna seria różnych stanów obciążenia rzeczywistej konstrukcji i modelu, aby rezultat obliczeń był jednoznaczny.

Właśnie z taką sytuacją mamy do czynienia w biomechanice gałki ocznej. Geometrię powłok oka poznaliśmy już z wystarczającą dokładnością, o parametrach mechanicznych wiemy znacznie mniej. Eksperymenty prowadzone na ludzkiej gałce ocznej, w laboratorium lub w warunkach klinicznych, dostarczają danych liczbowych, które wiążą obciążenia z przemieszczeniami. Pomiary koncentrują się zwykle na tonometrii albo na ekspansji gałki ocznej lub rogówki pod wpływem IOP. Dzięki tym danym symulacje numeryczne zbadanych stanów obciążenia stają się źródłem informacji o parametrach materiałowych. Wyznaczone w ten sposób wartości tych parametrów zawierają się w znacznie węższym przedziale niż wartości pochodzące z bezpośrednich pomiarów laboratoryjnych – sieciowy moduł sprężystości podłużnej rogówki obciążonej ciśnieniem nominalnym, zawsze jest wówczas mniejszy od 1 MPa [Orsengo

i Pye 1999, Elsheikh i in. 2006, Alastrue i in. 2006]. Obliczenia zreferowane w podrozdziale 7.1 potwierdzają ten rezultat.

Woo i in. [1972b] pierwsi, jak się zdaje, wykorzystali tę strategię do identyfikacji materiału rogówki. Nazwali ją „metodą odwrotną” (*inverse process*) i tak też jest określana do dzisiaj. Jej zastosowania nie ograniczają się tylko do identyfikacji materiału. W pracy [Asejczyk-Widlicka i in. 2004] technika ta została użyta do optymalizowania parametru geometrycznego, jakim jest mimośród elipsy, którą aproksymowano profil rogówki (kilka szczegółów tych badań zawiera podrozdział 5.2.2). Identyfikacja materiału twardówki, opisana w podrozdziale 7.2, także odpowiada podanemu schematowi. Jako kryterium porównania funkcji modelu z działaniem rzeczywistego oka zastosowano jego moc optyczną uzależnioną od IOP. Symulowane numeryczne zmiany mocy optycznej po keratomii radialnej do oszacowania modułu sprężystości rogówki wykorzystane zostały w pracy [Śródka i Kasprzak 1996].

5.2. Geometria gałki ocznej

5.2.1. Metody kliniczne jej określania

Obiektem największego zainteresowania jest oczywiście rogówka, a w obrębie rogówki kształt jej zewnętrznej powierzchni. O tym, że ten kształt nie jest kulisty, wiadomo od dawna, ale nowe techniki pomiarowe, dające możliwość rejestrowania topografii rogówki w pamięci komputera i cyfrowej obróbki danych, stworzyły nową jakość w tej dziedzinie badań. Pozwala to wizualizować na obszarze rogówki rozkład dowolnie wybranego parametru geometrycznego – mapy wysokościowe zewnętrznej lub wewnętrznej powierzchni, lokalne wartości krzywizny, mocy optycznej lub grubości, odległość do soczewki, odchylenie od średniej powierzchni kulistej itd.

Obecnie wykorzystywanych jest kilka różnych technik rejestrowania topografii rogówki, takich jak skaniny szczelinowy (Orbscan), stereografia rastrowa (PAR), laserowa interferometria holograficzna (CLAS 1000), jednak największą dokładność osiąga się za pomocą wideokeratoskopów Placido [Mejia-Barbosa i Malacara-Hernandez 2001, Klein i in. 2002]. Korzystając z tego ostatniego urządzenia oraz ze specjalnie w tym celu stworzonego oprogramowania, Franklin i in. [2006] utworzyli mapę całej rogówki, składając ją z mniejszych fragmentów. Wykazali w ten sposób, że elipsa lub kosinus hiperboliczny bardzo dobrze aproksymuje część centralną, na średnicy 7 mm – odchylenie nie przekracza tam jednego mikrometra, gdy mimośród elipsy $e = 0,51$. Ta sama elipsa na brzegu rogówki jest zbyt stroma i różni się od danych pomiarowych o 50 mikrometrów. Średni południkowy promień krzywizny w odległości 5,35 mm od osi osiąga wartość $8,7 \pm 0,3$ mm. Badania tego rodzaju mają duże znaczenie dla producentów soczewek kontaktowych, jednak po opracowaniu odpowiednio sprawnego algorytmu, umożliwiającego tworzenie takich map w krótkim czasie (czas pracy kom-

putera nad jedną mapą wynosił około 24 godzin), możliwe staną się kliniczne zastosowania w diagnostyce i terapii.

Znacznie trudniejsze jest precyzyjne odtworzenie kształtu twardówki żywego oka, ale i w tym zakresie pojawiły się skuteczne techniki obrazowania i analizy cyfrowej jego geometrii. Dzięki temu możliwe jest na przykład badanie fizycznych uwarunkowań krótkowzroczności. Do wyznaczania wymiarów gałki ocznej dobrze nadaje się obrazowanie metodą rezonansu magnetycznego MRI (*Magnetic Resonance Imaging*). Uzyskane w ten sposób obrazy pozwalają śledzić zmiany przekrojów oka rzędu 0,1 mm. Z badań Atchisona i in. [2004] wynika, że oko krótkowzroczne, względem oka miarowego, zwiększa swoje wymiary we wszystkich trzech kierunkach, najbardziej wzdłuż osi. O ile jeszcze wydłużenie oka nietrudno powiązać z wielkością wady, bo z przewidywań optycznych wynika, że musi to być 0,35 mm/D, o tyle wielkość zmian wysokości lub szerokości oka krótkowzrocznego pozostawała w sferze spekulacji. Atchison podaje, że średnia wysokość zwiększa się o 0,19 mm/D, a szerokość wzrasta o 0,10 mm/D, ale nie ma tu już tak ścisłych reguł, jak w zmianach długości oka, o czym świadczy duża różnorodność wyników uzyskanych przez Chenga i in. [1992].

Dokładność, z jaką mierzona jest obecnie gałka oczna, wydaje się więc wystarczająca, nawet realna staje się możliwość utworzenia spersonalizowanego modelu numerycznego, zdolnego symulować wybrane funkcje optyczne oka pacjenta.

5.2.2. Metoda odwrotna identyfikacji profilu rogówki

Przykładem wykorzystania modelu numerycznego do identyfikacji strukturalnej są badania geometrii profilu rogówki. W rozwiązaniach zamkniętych najczęściej przyjmowaną aproksymacją tego profilu bywał okrąg, zatem zewnętrzną powierzchnię rogówki traktowano wówczas jak odcinek sfery. Przeciwnie sferze przemawia jednak aberracja powodowana tym kształtem soczewki oraz wyniki badań topograficznych rogówki, wskazujące na zmniejszanie się promienia krzywizny ze wzrostem odległości od osi optycznej oka. Łatwą w użyciu i adekwatną dla profilu rogówki jest krzywa stożkowa, która zmienia kształt w zależności od mimośrodu e , poczynając od wartości $e = 0$ (okręgu), przez $e = 1$ (parabola), do $e > 1$ (hiperbola). Szczególnie pożądaną postać analityczną ma parabola, ponieważ wielomian drugiego stopnia łatwo się różniczkuje i całkuje. Czy w modelu rogówki dopuszczalne jest aproksymowanie jej profilu za pomocą parabol?

W pracy [Asejczyk-Widlicka i in. 2004] podjęliśmy próbę wyznaczenia optymalnego mimośrodu elipsy, użytej do opisanie zewnętrznej i wewnętrznej zarysu rogówki, w modelu liniowo-sprężystym. Optymalizacja prowadzona była ze względu na ten szczególny aspekt działania modelu, który nazwany został samonastawnością optyczną. Należy podkreślić, że rodzaj funkcji aproksymującej zewnętrzny profil rogówki ma duży wpływ na układ optyczny modelu oraz na jego zależności funkcyjne podczas manipulowania parametrami (np. ciśnieniem p lub promieniem krzywizny

wierzchołka rogówki). Ognisko optyczne nie tylko powinno znaleźć się w pobliżu dna oka gdy ciśnienie p ma wartość nominalną, ale także zmiany jego położenia, zależne od wahań p , podlegają ściśle określonym regułom. Nie każda funkcja aproksymująca profil rogówki zdolna jest spełnić ich wymagania. Badania i szczegóły przeprowadzonej optymalizacji, opisane w tej pracy, wskazują na elipsę o mimośrodku $e = 0,5$, jako funkcję optymalną dla liniowo-sprężystego modelu samonastawnego optycznie. Podobne wyniki uzyskaliśmy dla kosinusa hiperbolicznego. Obliczenia koncentrowały się na poszukiwaniu takiej sztywności pierścienia rąbkowego, aby model gałki ocznej stawał się samonastawny. Okazało się, że ta funkcja modelu możliwa była do osiągnięcia tylko wówczas, gdy mimośród elipsy profilu rogówki zawierał się w granicach od 0 do ok. 0,66. O ile jednak dla rogówki wystarczała niemal zerowa sztywność pierścienia rąbkowego, o tyle po przekroczeniu wartości $e = 0,66$, wymagana do zachowania samonastawności sztywność rąbka zdążyła do nieskończoności. Dla mimośrodu $e = 0,5$ moduł Younga materiału rąbka zbliżony był do materiału twardówki. Badania te wykazały zatem, że profil rogówki nie powinien być aproksymowany parabolą, a tym bardziej hiperbolą.

6. Testowalne stany obciążenia modelu

6.1. Tonometria aplanacyjna Goldmanna

6.1.1. Znaczenie metody w badaniach numerycznych

Najważniejszą dzisiaj metodą pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego w warunkach ambulatoryjnych jest tonometria aplanacyjna Goldmanna (*Goldmann Applanation Tonometry* – GAT). Uchodzi za najdokładniejszą metodę tego typu, określana jest jako „złoty standard”. Nowe wersje tonometrów testowane są zwykle przez porównywanie ich wskazań z wynikami pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego dokonanego za pomocą tonometru aplanacyjnego.

Podstawą metody jest prawo Imberta–Ficka (6.1), „odkryte” i nazwane tak przez twórcę GAT – Goldmanna. W powszechnym przekonaniu autorów publikacji dotyczących tonometrii jest ono dobrze uzasadnione teoretycznie (równanie Laplace’a, XVIII w.) i sprawdzone doświadczalnie (Maklakoff i Fick XIX w., Goldmann XX w.). Należy jednak zaznaczyć, że taką opinię podzielają jedynie biomechanicy zaangażowani w badania okulistyczne, czyli stosunkowo niewielki ich odsetek. Poza tonometrią prawo to nie jest znane, co sugeruje, że równości (6.1) sprzyjać muszą jakieś szczególne okoliczności.

Obecnie tonometria aplanacyjna chętnie symulowana jest numerycznie [Woo i in. 1972b, Anderson i in. 2004, Elsheikh i in. 2006], z jednej strony sprawdza bowiem jakość modelu biomechanicznego, z drugiej – dobry model pozwalałby przewidywać poprawki do pomiaru GAT na oku o wymiarach różnych od kalibracyjnych. Konieczność korygowania odczytu ciśnienia z powodu odstępstwa rogówki od wymiarów danych równaniem (6.2) jest najpoważniejszym problemem tej odmiany tonometrii. Model numeryczny może imitować zachowanie oka przy niemal każdym rodzaju wymuszenia mechanicznego, ale aplanacja – sądząc po nagromadzeniu problemów – wydaje się być jednym z najtrudniejszych.

Przedstawione w podrozdziale 7.1.1 rezultaty obliczeń pozwalają określić warunki, jakie GAT nakłada na parametry materiału rogówki, a także ujawnić niedostrzegane dotąd aspekty mechaniki deformacji, towarzyszące temu pomiarowi. Z obliczeń tych

wynika, że zdolność modelu rogówki do podlegania prawu Imberta–Ficka jest bardziej ograniczona niż się powszechnie wydaje, a naszą dzisiejszą wiedzę o przebiegu zjawiska spłaszczenia powłoki rogówkowej, obciążonej ciśnieniem wewnątrzgłokowym, najbardziej upośledza przekonanie, pochodzące jeszcze z czasów Goldmanna, że jest to model geometrycznie liniowy.

6.1.2. Podstawy formalne metody

Na tonometrię aplanacyjną składają się założenia określające warunki poprawnego pomiaru, przyrząd pomiarowy i tabele do korygowania odczytanego ciśnienia. Procedura pomiarowa jest prosta: na ściśle określonej powierzchni w pobliżu osi rogówka jest spłaszczana końcówką pomiarową tonometru, a średnie ciśnienie p_G , rozumiane jako stosunek użytej siły do powierzchni spłaszczenia, jest miarą ciśnienia wewnątrzgłokowego p . Schemat obciążenia strefy spłaszczenia pokazano na rys. 6.1.

Dla płaskiej błony warunek równowagi przyjmuje postać:

$$p_G = p. \quad (6.1)$$

Rogówka przy niewielkim spłaszczeniu przypomina błonę, jak się powszechnie myśli, a równanie (6.1) w takim zastosowaniu – do wyznaczania ciśnienia wewnątrzgłokowego – nazywane jest prawem Imberta–Ficka. Prawo to w tonometrii wykorzystywane jest od czasów Maklakoffa i Ficka [1888], czyli od końca XIX w.

Dokładniejsze pomiary przeprowadzone przez Goldmanna w połowie XX w. wskazywały jednak na niewielkie odstępstwo otrzymanych wyników od tego prawa [Goldmann i Schmidt 1961], dlatego wprowadził on tak zwane wartości kalibracyjne parametrów oka, dla których prawo Imberta–Ficka miało być spełnione ściśle – grubość CCT rogówki w osi, promień krzywizny R zewnętrznej powierzchni rogówki w strefie przyosiowej oraz średnicę strefy aplanacji D_{aplan} :

$$\text{CCT} = 0,520 \text{ mm}, R = 7,8 \text{ mm}, D_{\text{aplan}} = 3,06 \text{ mm}. \quad (6.2)$$

Oczywiście w praktyce klinicznej oczy pacjentów rzadko spełniały jednocześnie te warunki nakładane na CCT i R , dlatego następcy Goldmanna zmuszeni zostali do wprowadzenia korekt – gdy CCT jest różna od 0,520 mm [Ehlers i in. 1975] i gdy jej promień krzywizny w wierzchołku różni się od 7,80 mm [Bier i Lowther 1977].

Poprawki do ciśnienia p_G ze względu na odstępstwa wymiarowe rogówki od wartości kalibracyjnych, zestawiane bywają w tabelach. Przykładem jest rozpowszechniona obecnie w gabinetach okulistycznych tabela 6.1, zawierająca poprawki do odczytu ciśnienia mierzonego tonometrem Goldmanna, przygotowane dla różnych CCT (widać, że grubość kalibracyjna wynosi tu 0,550 mm, a wpływ R jest pominięty).

Analityczna postać korekcji, określona równaniem (6.3), nazywana jest zmodyfikowanym prawem Imberta–Ficka [Orsengo i Pye 1999]. Panuje obecnie przekonanie, że zależność między ciśnieniem mierzonym a rzeczywistym można zapisać w postaci:

$$p_G = K_g p, \quad (6.3)$$

gdzie K_g jest współczynnikiem zależnym od CCT i R , niezależnym natomiast od IOP [Goldmann i Schmidt 1957, Ehlers i in. 1975, Whitacre i in. 1993, Orsengo i Pye 1999, Kahlhaas i in. 2006], a także od parametrów materiału rogówki. Orsengo i Pye wyznaczyli wartości współczynnika K_g dla zmiennych CCT i R (tab. 8.1), wykorzystując przy tym swój model biomechaniczny powłoki rogówkowej.

Tabela 6.1. Tonometria aplacyjna – korekcja w mmHg

Grubość rogówki, w mm			Grubość rogówki, w mm		
od	do	korekcja	od	do	korekcja
0,428	0,441	8	0,543	0,557	0
0,442	0,456	7	0,558	0,573	-1
0,457	0,470	6	0,574	0,586	-2
0,471	0,483	5	0,587	0,607	-3
0,484	0,498	4	0,602	0,616	-4
0,499	0,514	3	0,617	0,631	-5
0,515	0,529	2	0,632	0,645	-6
0,530	0,542	1	0,646	0,660	-7
			0,661	0,675	-8

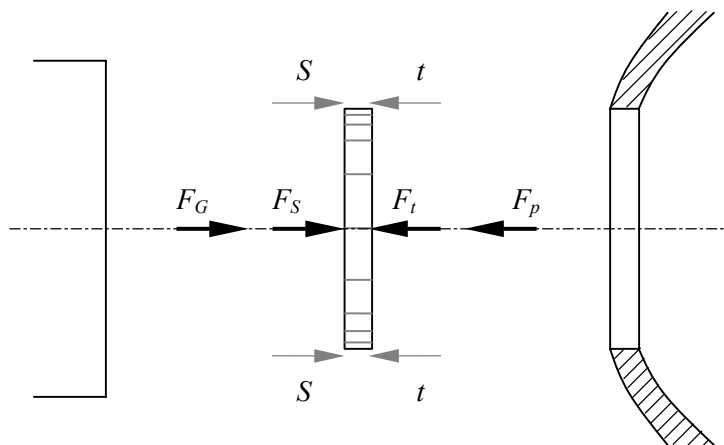
Taki jest w zarysie aktualny obraz tonometrii aplacyjnej. Autorzy publikowanych wyników badań koncentrują się dzisiaj wyłącznie na korygowaniu ciśnienia p_G ze względu na CCT i R , a wymaganą wartość korekcji określają najczęściej eksperymentalnie. W ocenie większości z nich rezultaty badań potwierdzają postulaty Goldmanna. Jednak problemy GAT związane z korekcją ciągną się do dzisiaj i nie wydają się zmniejszać, nie ma bowiem powszechnie akceptowanych tablic korekcyjnych i, co gorsza, brakuje podstaw teoretycznych mechaniki spłaszczenia powłoki rogówkowej.

Zagadnienie „korekcji” jest próbą znalezienia zależności między ciśnieniem wewnątrzgałkowym p a rezultatem pomiaru p_G oraz CCT i R . Średnica strefy aplacji także ma wpływ na p_G , ale jest parametrem ściśle kontrolowanym podczas pomiaru, zawsze takim samym. Przez dziesięciolecia zatem prowadzone są badania wpływu CCT i R na odczyt p_G , ale zakłada się *a priori* słuszność prawa (6.1) dla warunków (6.2). To prawo jest rzadko kwestionowane, a jeszcze rzadsze próby jego zweryfikowania niczego nie wnoszą. Czy jest ono tak oczywiste, że nie wymaga zbadania?

6.1.3. Problem wartości kalibracyjnych

W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele prób tłumaczenia (ale nie – *rozumienia*) dlaczego Goldmann wybrał akurat średnicę aplanaacji 3,06 mm. Warto przy tym wiedzieć, że cyfry po przecinku nie podnoszą dokładności pomiaru, ułatwiają tylko przeliczanie siły mierzonej w gramach na ciśnienie w mmHg – nam teraz chodzi jedynie o *pierwszą* cyfrę. Oczywiście wybór ten uzasadnił on wynikami doświadczeń, jednak to wcale nie tłumaczy przyczyny, dla której zachodzi wówczas równość (6.1). Jedynym argumentem spotykanym w literaturze, uzasadniającym wybór tej średnicy, jest rola odgrywana przez napięcie powierzchniowe S w filmie łzowym [Adler 2002, Vito i Carnell 1992, Orssengo i Pye 1999, Elsheikh i in. 2006].

Goldmann i Schmidt [1961] zakładają, że siła F_G spłaszczająca z zewnątrz wierzchołek rogówki na podanej średnicy kalibracyjnej, pokonuje siłę oporu ciśnienia działającego od wewnątrz F_p i dodatkowo „opór zginania” F_t (tak nazywana jest ta siła, ale oczywiście chodzi o wypadkową siły tnącej t na obwodzie). Siłę F_G wspomaga wypadkowa napięcia powierzchniowego w płynie łzowym F_S , zwilżającym końcówkę tonometru. Postulowany przez autorów schemat obciążenia pokazano na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Cztery siły zewnętrzne działające na spłaszczony obszar rogówki. Siła nacisku końcówki tonometru F_G i wypadkowa ciśnienia wewnątrzgałkowego F_p są rezultatem działania sił powierzchniowych. Na brzegu strefy spłaszczenia działa siła tnąca t i siła napięcia powierzchniowego S , ich wypadkowe oznaczone są F_t i F_S

Równanie równowagi czterech wymienionych sił przyjmuje postać

$$F_G + F_S - F_t - F_p = 0. \quad (6.4)$$

Po podzieleniu równania (6.4) przez powierzchnię strefy spłaszczenia o średnicy D_{aplan} otrzymujemy odpowiadające mu równanie ciśnień:

$$p_G + p_S - p_t - p = 0, \quad (6.5)$$

w którym każde jest wielkością dodatnią, ale opatrzone znakiem odpowiednim do zwrotu siły, od której pochodzi. Stąd

$$p = p_G + \Delta p, \quad (6.6)$$

gdzie

$$\Delta p = p_S - p_t. \quad (6.7)$$

Powszechnie sądzi się, że ciśnienie p_t jest stałe, niezależne od p , najłatwiej zatem wyznaczyć je przy braku ciśnienia wewnętrznego i napięcia powierzchniowego:

$$p_t = p_G \Big|_{p=0}. \quad (6.8)$$

Ciśnienie p_S jest ilorzem siły napięcia powierzchniowego $F_S = S \pi D_{\text{aplan}}$ i powierzchni spłaszczenia $\pi D_{\text{aplan}}^2/4$:

$$p_S = \frac{4S}{D_{\text{aplan}}}. \quad (6.9)$$

Zgodnie z założeniami GAT różnica ciśnień (6.7) jest równa zero, gdy spełnione są warunki (6.2), czyli rogówkę o wymiarach kalibracyjnych znamionuje to, że siła oporu zginania strefy spłaszczenia jest równa sile napięcia powierzchniowego. Postulat ten, prowadzący przez (6.6) do (6.1), uzasadnia to podstawowe prawo tonometrii aplanacyjnej. Dla rogówki o geometrii niekalibracyjnej ciśnienia w równaniu (6.7) nie redukują się w pełni i oznacza to niezerową poprawkę Δp , którą należy dodać do odczytywanego ciśnienia p_G , aby otrzymać ciśnienie wewnątrzgałkowe p , zgodnie z równaniem (6.6).

Wywód ten za Goldmannem powtórzył Adler [1965] i praktycznie każdy, kto wkraczał na teren GAT przyjmował te zależności jako oczywiste. Później na tych postulatach oparto współczesne odmiany tonometrii – DCT (*Dynamic Contour Tonometry*) i ART (*Applanation Resonance Tonometry*). Argumentacja o słuszności równania (6.3) i niezależności p_t od p (6.8), a także o zerowaniu się Δp (6.7) dla rogówki kalibracyjnej, nie została jednak poparta jakimś realistycznym modelem powłoki. Na przykład rozwiązanie Younga [1989], na które powołują się Orssengo i Pye [1999], budując wspomniany model rogówki przeznaczony do obliczania poprawek korekcyjnych, jest rozwiązaniem liniowym. Wymienione postulaty są więc faktycznie oparte

na intuicji kształtowanej rozwiązaniami konstrukcji geometrycznie liniowej. Także siła napięcia powierzchniowego F_S nie została określona empirycznie, jej istnienie ma jedynie nadać sens korekcie (6.7). O ile wartość tej siły jest możliwa do zmierzenia, do dzisiaj nie wiadomo, co sądzić o wielkości siły F_i . Jedna i druga wprowadzona została do równania (6.4) po to, by uzasadnić poprawkę (6.7), a ta jest weryfikowana doświadczalnie w całości, jako suma tych sił. Przeglądając literaturę, odnosi się wrażenie, że po zdefiniowaniu poprawki (6.7) kwestia jej podziału na siły składowe to zbędna formalność.

Tablica korekcyjna opracowana przez Orssengo i Pye [1999: tab.3], przytoczona częściowo w podrozdziale 8.1.2.3 (tab. 8.1), zdaje się wieńczyć dzieło GAT, nikt bowiem, o ile mi wiadomo, nie zgłasza do niej zastrzeżeń. (Należy oczywiście odróżniać tę sytuację od powszechnego jej poparcia.) Nawet w studium Kohlhaasa i in. [2006] nie znalazło się słowo krytyki wobec tej tablicy, pomimo że wyjątkowo solidne wyniki eksperymentalne uzyskane przez autorów nie w pełni ją potwierdzają. Gdzie zatem jest ten problem z wartościami kalibracyjnymi, anonsowany w tytule rozdziału?

W praktyce dość często zdarza się, że $p_G < p$. Z taką nierównością mamy zwykle do czynienia, gdy grubość rogówki jest mniejsza od kalibracyjnej. Na przykład dla $p = 48$ mmHg, CCT = 0,44 mm i $R = 8,6$ mm tablica Orssengo i Pye (tab. 8.1), opracowana dla równania (6.3), przewiduje wskazanie $p_G = 37$ mmHg, a więc o 11 mmHg mniejsze od p . Ciśnienie zewnętrzne p_G mniejsze od wewnątrzgałkowego nie jest łatwo uzasadnić na gruncie mechaniki. Przede wszystkim jest to sprzeczne z równaniem Laplace'a dla błony. Do objaśnienia tego kierunku nierówności ciśnień wykorzystuje się w GAT ideę siły napięcia powierzchniowego (zupełnie obcej siłom „mechanicznym” w powłoce), obniżającej ciśnienie zewnętrzne p_G według (6.6) i (6.7). Czy wskazanie tonometru mniejsze aż o 11 mmHg od ciśnienia wewnątrzgałkowego staje się przez to akceptowalne? Elsheikh i in. [2006] podają wartość napięcia powierzchniowego filmu łzowego $S = 0,0455$ N/m. Jego siła wypadkowa $F_S = S\pi D_{\text{aplan}}$, zatem na powierzchni koła o średnicy $D_{\text{aplan}} = 3,06$ mm pojawia się z tego powodu, niezmiennie w GAT, ciśnienie średnie

$$p_S = \frac{4F_S}{\pi D_{\text{aplan}}^2} = 0,45 \text{ mmHg.} \quad (6.10)$$

Wynik ten jest pierwszym symptomem wspomnianych problemów GAT, gdyż przeczy możliwości, opisaney w przykładzie, by p_G mogło być mniejsze od p o 11 mmHg. Gdy CCT *maleje*, wówczas maleje też siła oporu zginania F_i (i ciśnienie p_i), co prowadzi do *zwiększenia* poprawki ciśnienia (6.7). Ale, po uwzględnieniu (6.10), największa wartość, jaką może przyjąć poprawka (6.7), wynosi $\Delta p = 0,45$ mmHg (gdy $p_i = 0$). Teoria Goldmanna (rozwijana już bez jego udziału) przewiduje więc, że ciśnienie p_G , wskazywane przez tonometr, może być mniejsze od ciśnienia wewnątrzgałkowego *co najwyżej o pół mmHg* – jakiegokolwiek byłyby wymiary CCT i R !

Tymczasem rzeczywista różnica pomiędzy p i p_G , obserwowana w praktyce klinicznej, a także przewidywana w tablicach korekcyjnych (na przykład tab. 6.1), jest rzędu 10 mmHg. To *dwudziestokrotnie* przekracza możliwości siły napięcia powierzchniowego. Koncepcję wymiarów kalibracyjnych i równania równowagi (6.4) wprowadzono właśnie dla objaśnienia tego – niezrozumiałego na gruncie teorii błonowej – kierunku nierówności ciśnień $p_G < p$. Jeśli jednak hipoteza o roli pełnionej przez siłę napięcia powierzchniowego upada, to teoria Goldmanna *nie jest w stanie uzasadnić tak znacznego zaniżania ciśnienia przez tonometr aplanacyjny*. Co jest więc przyczyną tego zjawiska? Jak jest możliwe, aby ciśnienie spłaszczające powłokę rogówkową z zewnątrz mogło być mniejsze od wewnętrznego? Odpowiedź jest tym ważniejsza, że na postulatach Goldmanna oparte zostały inne odmiany tonometrii, a siła napięcia powierzchniowego w filmie łzowym ma odgrywać w nich tak ogromną rolę, że w porównaniu z nią nawet siła napięcia błonowego w równaniu równowagi powłoki rogówkowej tracić ma znaczenie. Zagadnienie to badane jest w podrozdziale 8.2.4.

Obliczenia opisane w podrozdziale 7.1.1 i wypływające z nich wnioski dają odpowiedź na to pytanie, ale przeczy ona goldmannowskiej teorii spłaszczenia rogówki. To ogromny problem dla GAT, DCT, ART, ORA, ... Niemal cały dorobek tonometrii, teoretyczny i doświadczalny, oparty został na idei siły napięcia powierzchniowego lub adhezji, niezbędnej do zrównoważenia sił powłokowych w równaniu (6.4).

Także idea niezależności współczynnika K_g od p w (6.3) nie została potwierdzona wiarygodnymi wynikami doświadczeń, mimo że problemowi korekcji GAT poświęcono wiele opracowań obliczeniowych i doświadczalnych [Vito i Carnell 1992, Whitacre i in. 1993, Orsengo i Pye 1999, Roberts 2002, Elsheikh i in. 2006, Kohlhaas i in. 2006]. Równanie (6.3) byłoby bardzo wygodne w użyciu, jednak najpierw należałoby wykazać jego zasadność. Wynika z niego, że przy parametrach kalibracyjnych, przybliżenie (6.3) jest liniowe, ze współczynnikiem kierunkowym K_g równym jedności. Gdyby natomiast któryś z parametrów geometrycznych nie miał wartości kalibracyjnej, wówczas wykres funkcji zmieniłby nachylenie, gdyż zmianie uległ współczynnik kierunkowy K_g . Funkcja pozostałaby jednak *liniowa*, a jej wykres nadal *przechodziłby przez początek układu współrzędnych*. Takie działanie modelu tonometrii aplanacyjnej jest łatwe do sprawdzenia i będzie przedmiotem badań w podrozdziałach 7.1.1 i 8.1.

Ponieważ napięcie powierzchniowe filmu łzowego nie może wpływać zauważalnie na wynik pomiaru IOP, co wynika z równania (6.10), traci też uzasadnienie argument Goldmanna na rzecz $D_{\text{aplan}} = 3,06$ mm. Co więc skłaniało twórców tonometrii aplanacyjnej – zarówno Maklakoffa, jak i Goldmanna – do preferowania tej średnicy? Jakie inne zjawisko fizyczne stoi za tym wyborem? Nie jest to ostatnia wątpliwość dotycząca wymiarów kalibracyjnych. Koncepcja wymiarów kalibracyjnych pojawiła się w związku z niewielkim, jak się wtedy wydawało, odstępstwem ciśnienia aplanacji od teorii błonowej. Goldmannowi chodziło o skorygowanie

wyniku pomiaru nieco tylko zawyżanego oporem zginania rogówki kalibracyjnej. Siła napięcia powierzchniowego wydawała się tego wiarygodną przyczyną. Po kilkunastu latach, gdy opanowano już technikę pomiaru CCT, okazało się, że rozrzut grubości rogówki jest duży i że CCT ma istotny wpływ na odczyt p_G . Wtedy też przyszło najgorsze, czyli konieczność uzasadnienia *mniejszego* ciśnienia p_G od ciśnienia p nawet o 10 mmHg – takiego zjawiska Goldmann nie brał pod uwagę. Kwestię *wymiarów kalibracyjnych* zrodziła rozważana przez niego gra subtelnych sił, wprowadzających drobną poprawkę do odczytywanego ciśnienia, natury raczej estetycznej niż praktycznej. Nasz dzisiejszy problem polega na tym, że bezrefleksyjnie rozszerzono koncepcję siły napięcia powierzchniowego, obciążającej rogówkę kalibracyjną, na zagadnienia korekcji ciśnienia p_G dla rogówki *niekalibracyjnej* – a to zagadnienie mocno różni się od rozważanego przez Goldmanna. Oczywiście pomysł wykorzystania siły napięcia powierzchniowego do obliczania poprawki odczytu ciśnienia jest logiczny, wydaje się wręcz nieodpartą koniecznością. Zapewne z tego powodu jest obecnie powszechnie uznawany. Jednak siła przekonań nie ma tutaj znaczenia, nie ulega bowiem wątpliwości, że idea siły napięcia powierzchniowego *jest fałszywa*, ponieważ prowadzi do sprzeczności. Przecież ciśnienie p_S jest stałe (bo stała jest średnica spłaszczenia D_{aplan}), według GAT nie mniejsze niż 10 mmHg, ponieważ tak duża bywa w praktyce największa korekcja dodatnia, zatem ciśnienie zginania p_t powłoki rogówkowej o wymiarach kalibracyjnych także musi przekraczać 10 mmHg, gdyż tylko wtedy wartość korekcji (6.7) może być równa zeru. Jak widzimy już z samej GAT wynika, że opór spłaszczania rogówki kalibracyjnej musi być ogromny (porównywalny z IOP) – równie duży jak siła wypadkowa napięcia powierzchniowego. W takim razie prawo Imberta–Ficka (6.1) spełnione jest nie dlatego, że rogówka jest wiotka jak błona, a tylko dzięki równości (dużych) ciśnień p_t i p_S ! Dochodzimy tu do dwóch sprzecznych tez głoszonych w tonometrii aplanacyjnej: albo możliwe jest użycie teorii błonowej do opisu spłaszczenia rogówki (a wtedy p_t i p_S są bliskie zera i niemożliwe jest objaśnianie korekcji przekraczającej 10 mmHg działaniem siły napięcia powierzchniowego), albo problem korekcji uzasadniamy obecnością siły napięcia powierzchniowego powodującej stosunkowo duże ciśnienie p_S (a wówczas prawo Imberta–Ficka nie ma żadnego związku z teorią błonową i z równaniem Laplace’a). Chociaż alternatywa ta jest oczywista, w tonometrii aplanacyjnej uznawane są jednocześnie obydwie jej strony. Pielęgnowanie tej sprzeczności przez następców Goldmanna ewidentnie dowodzi, że mechanika zjawisk towarzyszących spłaszczeniu rogówki jest nieznaną i nie ma żadnego teoretycznego uzasadnienia dla wartości kalibracyjnych (6.2) oraz praw (6.1) i (6.3).

Równie nieskuteczne wydają się próby budowania modeli numerycznych opartych na tezach GAT. Parametry modelu biomechanicznego gałki ocznej przyjmowane są przez ich twórców tak, aby sprostać założeniom tonometrii aplanacyjnej, ale wówczas jego funkcje optyczne nie są wystarczająco zgodne z obserwacjami. Modele tego typu znajdują obecnie bardzo ograniczone zastosowanie, o czym świadczy fakt, że do dzi-

siaj w chirurgii refrakcyjnej korekta geometrii rogówki dokonywana jest na podstawie porównań ze skutkami wcześniej wykonanych operacji [Ethier i in. 2004], a nie na podstawie obliczeń. Metoda prób i błędów okazuje się w tym przypadku skuteczniejsza od prognoz teoretycznych.

6.2. Sztywność gałki ocznej

Zwiększenie objętości płynu w oku o $\Delta V = V_2 - V_1$ powoduje zmianę ciśnienia wewnątrzgałkowego z p_1 na p_2 . Stosunek *przyrostu* ciśnienia $\Delta p = p_2 - p_1$ do przyrostu objętości ΔV można by uznać za miarę sztywności gałki ocznej. Niestety funkcja $p_2(\Delta V)$ jest nieliniowa i dlatego trudno jest porównywać tak określoną sztywność różnych gałek ocznych. Friedenwald [1937] zdefiniował ten parametr oka nieco inaczej:

$$R_F = \frac{\log(p_2) - \log(p_1)}{\Delta V}. \quad (6.11)$$

Jest on w użyciu do dzisiaj, a przywiązanie do tej definicji bierze się stąd, że zależność $\log(p_2) - \log(p_1)$ od ΔV niewiele się różni od funkcji liniowej i zwykle jest aproksymowana prostą. Oznacza to wówczas niezależność R_F od ciśnienia i dzięki temu sztywność opisywana jest już liczbą, a nie funkcją, daje się więc łatwo porównywać. Dokładniejsze badania ujawniły, że parametr R_F zależy nieznacznie od początkowej objętości gałki ocznej V_1 [Ytteborg 1960].

Mierzona przez Friedenwalda sztywność oka ludzkiego R_F zawiera się w przedziale od 0,006 do 0,037 mm⁻³, ze średnią 0,0215 mm⁻³. Później pomiary te powtórzyło wielu innych badaczy na tysiącach oczu, uzyskując zbliżone wyniki. Obszernego przeglądu tych badań dokonał Nesterov [Nesterov i Bunin 1974]. Użycie tablic kalibracyjnych [Nesterov i Vurgaft 1972] zmniejszyło średnią wartość sztywności R_F do około 0,018 mm⁻³, czyli o kilkanaście procent.

Bezpośredni pomiar *in vivo* ciśnienia wewnątrz gałki ocznej za pomocą manometru prowadzi do jeszcze mniejszych wartości tego parametru. Od czasu publikacji Ytteborga [1960] – który pierwszy zmierzył sztywność żywego oka – do dzisiaj [Pallikaris i in. 2005] wyniki pomiaru są zbliżone do 0,013 mm⁻³. Mniejsza wartość R_F w tym wypadku, objaśniana jest wyciskaniem krwi z naczyń krwionośnych żywego oka na skutek zwiększania w nim ciśnienia. Silver i Geyer [2000] zauważyli ponadto, że R_F , chociaż nieznacznie, jednak zależy od przyrostu ciśnienia – sztywność zmienia się (maleje) o $-0,001$ mm⁻³ na każde 10 mmHg.

Definicja (6.11) nie jest jedyną braną w przeszłości pod uwagę miarą sztywności gałki ocznej (poza wymienioną na początku tego punktu $\Delta p / \Delta V = \text{const}$). Łatwo zauważyć, że została ona oparta na założeniu

$$\frac{dp}{dV} = ap, \quad a - \text{stała},$$

czyli że w badaniach doświadczalnych powinno się obserwować stały stosunek $\Delta p/p$ po ustalonej zmianie objętości. Ciśnienie p staje się przez to wykładniczą funkcją ΔV , dziedziczy więc wszystkie właściwości tej funkcji, ułatwiające interpretację wyników. McBain uogólnił podane równanie, dopuszczając przy ciśnieniu wykładnik inny niż 1 [McBain 1958]:

$$\frac{dp}{dV} = ap^n.$$

To dało asumpt do dalszych modyfikacji definicji sztywności i w następnych latach pojawiały się kolejne propozycje, opisane szczegółowo w opracowaniu [Collins i Van Der Werff 1980].

Aproksymowane w ten sposób wyniki badań doświadczalnych nie mają jednak większego znaczenia dla stworzenia modelu gałki ocznej, głównie dlatego, że te nowe definicje sztywności niewiele się różnią od definicji Friedenwalda, ale przede wszystkim z tego względu, że wartość, tak czy inaczej, mierzonej sztywności jest mocno zróżnicowana pośród ludzi. Zajmowanie się nieznacznym zakrzywieniem, gdy współczynnik kierunkowy aproksymacji liniowej zawiera się w przedziale od 0,006 do 0,037 mm⁻³, nie ma zwykle praktycznego znaczenia. Mimo to warto zauważyć, że rozwiązania modelu pokazane na rysunkach 7.6b i 7.7b, faktycznie są lekko zakrzywione, i w dodatku tak, jak podają Silver i Geyer [2000].

Poza wyznaczoną doświadczalnie średnią sztywnością R_F oka ludzkiego, duże znaczenie dla projektowanego modelu biomechanicznego gałki ocznej ma także odkrycie silnej zależności tego wyniku od warunków wykonywania pomiaru – *in vivo* lub *in vitro*. Sztywność modelu biomechanicznego należy oczywiście porównywać z wynikiem uzyskanym *in vitro*, a więc na oku odizolowanym od układu krwionośnego, wtedy bowiem zmiany objętości gałki ocznej są w pełni kontrolowane, podobnie jak w obliczeniach numerycznych.

6.3. Przemieszczenia wierzchołka rogówki wymuszane zmianami IOP

Eksperyment pomyślany został przede wszystkim jako sposób na zidentyfikowanie materiału rogówki. Jest nawet pewniejszym źródłem informacji o parametrach materiału niż tonometria, wymaga jednak użycia modelu obliczeniowego – zgodnie ze strategią opisaną w podrozdziale 5.1.2. Eksperyment wykonywany jest na rogówce wyciętej z gałki ocznej i umieszczonej na stanowisku badawczym. Po przyklejeniu jej

brzegu do sztywnej podstawki, połączonej z układem dozującym sól fizjologiczną, na jej wewnętrznej powierzchni wywierane jest kontrolowane ciśnienie. Jeżeli znane są wymiary rogówki, to wyznaczona eksperymentalnie zależność funkcyjna między przemieszczeniem wierzchołka a ciśnieniem, daje jednoznaczną informację o jej parametrach materiałowych. Pod warunkiem oczywiście, że wiemy, jaką funkcją opisać charakterystykę materiałową. Jak widzimy, wiele założeń i wstępnie określonych danych składa się na osiągnięty tą drogą wynik pomiaru. Jednak rezultatem tych działań są parametry materiałowe rogówki zawarte w znacznie węższym przedziale, niż wartości uzyskane na wycinanych z niej, prostopadłościennych próbkach poddanych jednoosiowemu naprężeniu.

Najbardziej znany jest eksperyment przeprowadzony przez Bryanta i McDonnella [1996]. Podobne badania wykonali ostatnio Elsheikh i in. [2008a]. Uzyskane przez autorów obu publikacji wykresy zamieszczone są na rysunku 7.8. Wyniki te wyraźnie się różnią, należy jednak pamiętać o uwarunkowaniach tego rodzaju pomiarów. Pomijając bliżej nieokreślone różnice w sposobie wycięcia i zamocowania preparatów na stanowisku badawczym (brane pod uwagę w podrozdziale 7.1.3), duży wpływ na wynik ma arbitralnie przyjmowane przez badaczy obciążenie (ciśnienie) wstępne. Bywa ono różne i bardzo rzadko pomiar rozpoczyna się od ciśnienia równego zeru. Niestety właśnie na początku, gdy ciśnienie jest niskie, przyrosty odkształcenia są największe. Pomijanie tej fazy obciążania rogówki ma duży wpływ na uzyskaną tym sposobem charakterystykę materiałową, która dla stromy jest bardzo mocno nieliniowa. Na pewno jest to jedna z przyczyn ogromnego zróżnicowania publikowanych wyników. Z wykresów na rysunku 7.4 wynika, że „zgubienie” na początku jednego procenta odkształcenia (przesunięcie otrzymanego wykresu w lewo) sprawia, że dla ciśnienia nominalnego, gdy odkształcenie zbliżone jest do 7%, przyrost naprężenia jest niemal dwukrotny. Oznacza to taką właśnie zmianę zmierzonego modułu siecznego. Niektórzy autorzy deklarują przyjęcie ciśnienia wstępnego na poziomie sięgającym nawet 10 mmHg. Trudno jest więc porównywać wyniki pomiarów uzyskiwane przez różnych badaczy na preparatach biologicznych, zwykle opisywanych nieliniową krzywą materiałową. Prawdopodobnie z tego właśnie względu opracowane numerycznie – jak te na rys. 7.4 – są znacznie silniej zakrzywione niż charakterystyki uzyskane eksperymentalnie.

Część II

7. Identyfikacja materiałów powłok oka

Do wyznaczenia parametrów materiału rogówki, rąbka i twardówki wykorzystana tu zostanie technika identyfikacji opisana w podrozdziale 5.1.2. Wybrane eksperymenty udokumentowane w literaturze, symulowane będą za pomocą modelu opisanego w rozdziale 4. Przyjęte do obliczeń wymiary gałki ocznej zawiera tab. 4.1 (rogówka o wymiarach kalibracyjnych), charakterystykę każdego z materiałów określają równania (4.7) i (4.9), a zależności pomiędzy materiałami – równania od (4.13) do (4.15). Proces identyfikacji materiałów prowadzony jest dla wszystkich składników strukturalnych gałki ocznej równocześnie. Oznacza to, że podczas wyznaczania parametrów materiału rogówki (podrozdz. 7.1) korzysta się z rezultatów identyfikacji twardówki i rąbka (podrozdz. 7.2, zwłaszcza $Q_{\text{sklera}} = 5$), a z kolei wyznaczenie parametrów obu tych materiałów poprzedza znajomość materiału rogówki. Podstawy formalne obliczeń podano w podrozdziale 4.4.

7.1. Parametry materiału rogówki

Najlepiej zbadanym doświadczalnie polem przemieszczeń rogówki wydaje się być deformacja towarzysząca tonometrii aplanacyjnej. Bardzo dokładnie znane są wszystkie szczegóły geometrii spłaszczenia wierzchołka rogówki o wymiarach kalibracyjnych, a także obciążenia. GAT wprowadza pole przemieszczeń ograniczone niemal wyłącznie do rogówki, a jej materiał można wówczas uznać za izotropowy (podrozdz. 3.5). Dzięki temu możliwe jest skorzystanie z danych eksperymentalnych uzyskanych dla charakterystyki materiałowej powłoki rogówkowej ujmowanej globalnie, bez wnikania w jej strukturę. W podrozdziale 7.1.1 ograniczono identyfikację do tak rozumianych parametrów średnich. Keratotomia radialna także wymusza pole przemieszczeń obejmujące głównie rogówkę, ale uszkodzenie jej struktury skalpelem prowadzi do silnego wyekspozowania anizotropii materiału, a ta zawiera znacznie więcej parametrów niż (nawet nieliniowa) charakterystyka materiałowa i dlatego wiele trudniej jest symulować numerycznie taką ingerencję w geometrię rogówki. W podrozdziale 7.3 wykorzystano to wymuszenie do zidentyfikowania materiału błony Descemeta.

Innym doświadczeniem, które dostarcza danych o parametrach materiałowych jest ekspansja gałki ocznej pod wpływem IOP. Wyznaczany wówczas parametr strukturalny, określany jako *sztwność*, zawiera w sobie zbiorczą informację o wszystkich materiałach tworzących powłoki oka oraz o ich geometrii. Niemożliwe jest więc selektywne wydobywanie parametrów materiału rogówki lub twardówki, ale symulacja numeryczna tego obciążenia, opisana w podrozdziale 7.1.2, dobrze weryfikuje model w całości. Alternatywną wersję tego testu, ograniczoną do samej rogówki, opisano w podrozdziale 7.1.3.

7.1.1. Symulacja numeryczna GAT

Przedmiotem obliczeń jest funkcja średniego ciśnienia p_G na styku końcówki pomiarowej tonometru i strefy spłaszczenia rogówki, zależna od ciśnienia wewnątrzgałkowego p i od parametrów materiałowych. Wybrane wstępnie wartości A i α , występujące w równaniu (4.7), zestawione są w tabeli 7.1. Tabela 7.2 zawiera symbole szesnastu testowanych materiałów rogówki M_{ij} , powstałych przez kojarzenie parami wartości parametrów materiałowych A_i i α_j . Na przykład M_{34} oznacza charakterystykę $\sigma = 0,0005 [\exp(130 \varepsilon) - 1]$. Wyniki obliczeń zestawione są na rysunku 7.1. Wykresy zostały ułożone tak samo jak oznaczenia materiałów w tabeli 7.2.

Tabela 7.1. Wartości parametrów

i, j	A_i [MPa]	α_j
1	0,0001	30
2	0,0002	55
3	0,0005	90
4	0,0008	130

Tabela 7.2. Symbole materiałów

	α_1	α_2	α_3	α_4
A_1	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
A_2	M_{21}	M_{22}	M_{23}	M_{24}
A_3	M_{31}	M_{32}	M_{33}	M_{34}
A_4	M_{41}	M_{42}	M_{43}	M_{44}

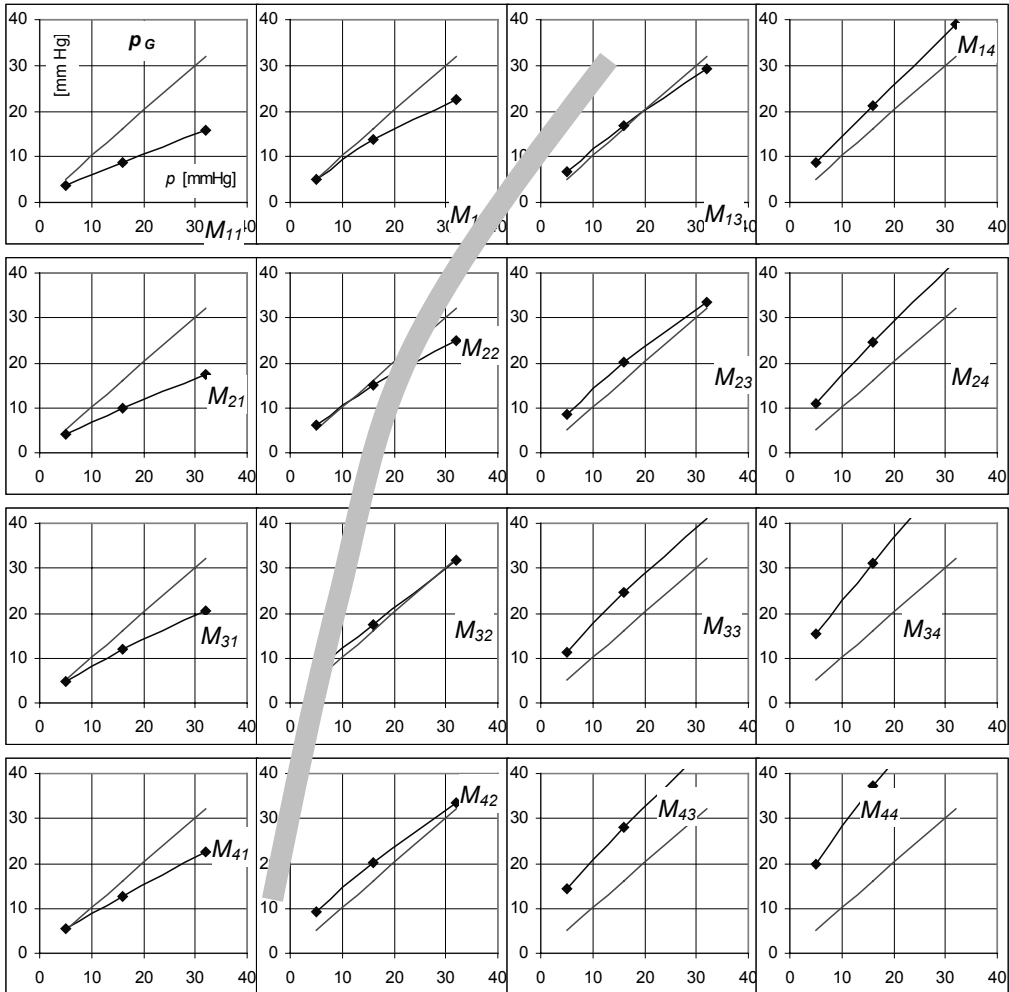
Z wykresów wynika, że dla każdej wartości parametru A możliwe jest znalezienie takiej wartości wykładnika α , dla której spełniony jest warunek:

$$p = p_G = 16 \text{ mmHg (2,1 kPa)}. \quad (7.1)$$

Obszar ten zaznaczono na rysunku 7.1 szarą, grubą linią. Na rysunku 7.2 zebrane są wszystkie wartości p_G obliczone dla ciśnienia $p = 16 \text{ mmHg}$ (środkowe punkty wykresów z rys. 7.1). Punkty oznaczone $M1$, $M2$, $M3$ i $M4$ pozwalają wstępnie oszacować α dla każdej z czterech przyjętych wartości A_i . Ostatecznie wykładnik α obliczony został iteracyjnie przez wprowadzanie do bazy systemu Cosmos/M kolejnych jego wartości i rozwiązywanie tak długo, aż p_G spełni warunek (7.1) z dokładnością do 0,5 mmHg.

Wyznaczone tak parametry materiałów od $M1$ do $M4$, optymalne w symulacjach GAT, zawarto w tabeli 7.3. Oprócz współczynników A i α podano także moduł początkowy E_0 (4.8) oraz wartość modułu ścieżnego $E_{\text{ścieżny}}$ przy naprężeniu 0,02 MPa. Naprężenie

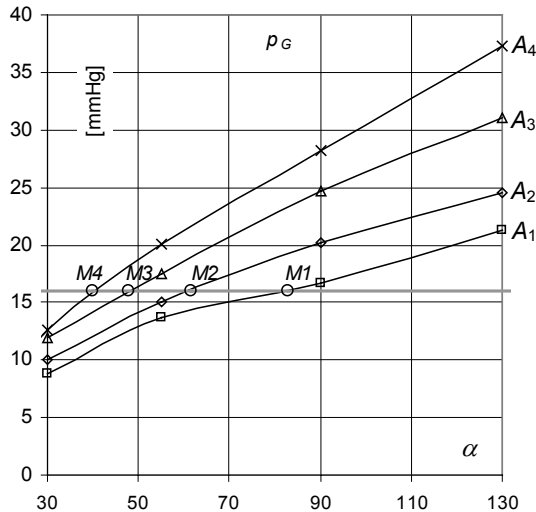
nie zbliżone do tej wartości (ale dwuosiowe) panuje w wierzchołku rogówki obciążonej nominalnym ciśnieniem p . W ostatnim wierszu tej tabeli umieszczony został materiał, którego parametry wykraczają poza granice ustanowione w tabeli 7.1 i na rysunku 7.1. Jest on stosunkowo odległy od tej grupy materiałów nieliniowych, jego charakterystyka bardziej przypomina materiał liniowo-sprężysty. Widać to na rysunku 7.4.



Rys. 7.1. Obliczone ciśnienie aplanacji p_G , w funkcji ciśnienia wewnątrzgałkowego p , dla materiałów M_{ij} zdefiniowanych w tabelach 7.1 i 7.2. Szara, gruba linia przechodzi przez ten obszar wartości A i α , dla których $p_G = p = 16$ mmHg

Test modelu na zgodność z GAT nie determinuje więc jednoznacznie parametrów materiału rogówki A i α , określa raczej jakąś *zależność* między nimi. Aby uzyskać konkretne wartości parametrów materiału, konieczne jest uzgodnienie działania

modelu z jeszcze innym eksperymentem, przeprowadzonym na rogówce lub całej gałce ocznej, w którym znanemu wymuszeniu towarzyszą zmierzone przemieszczenia. Taki test modelu opisany jest w podrozdziale 7.1.3. Okazuje się, że te *najmniejsze* wartości parametru A , podane w tab. 7.1 (skojarzone z największymi wartościami α), są najbardziej prawdopodobne dla realnej rogówki.



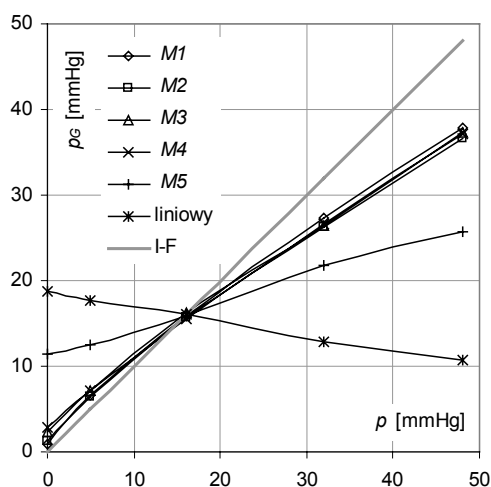
Rys. 7.2. Ciśnienia p_G obliczone dla $p = 16$ mmHg, w zależności od parametrów α i A (środkowe punkty na rys. 7.1). Przecięcie powstałych wykresów prostą $p_G = 16$ mmHg określa te wartości α , dla których spełniony jest warunek (7.1)

Tabela 7.3. Optymalne parametry materiałowe zapewniające rogówce spełnienie postulatu (7.1)

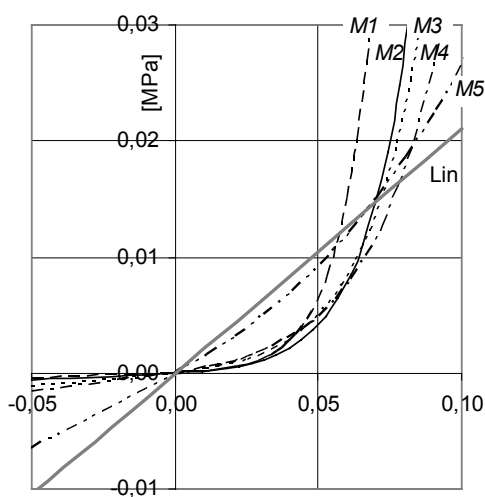
Symbol materiału	A [MPa]	α	E_0 [MPa]	E_{sieczny} [MPa]
$M1$	0,0001	83,0	0,0083	0,313
$M2$	0,0002	61,6	0,0123	0,267
$M3$	0,0005	47,7	0,0239	0,257
$M4$	0,0008	39,0	0,0312	0,239
$M5$	0,0100	13,0	0,1300	0,237

Rozwiązania $p_G(p)$ dla rogówki z materiałów zestawionych w tabeli 7.3 wykreślono na rysunku 7.3. Widać na nim, że dla każdego modelu, obciążonego ciśnieniem $p = 16$ mmHg, obliczone p_G jest bardzo bliskie ciśnieniu p . Oczywiście znaczy to tylko tyle, że w każdym z tych przypadków udało się poprawnie dopasować parametry A i α do warunku (7.1). Zupełnie nowa wiedza o modelu wyłania się z rozwiązań dla ciśnienia p różnego od nominalnego, czyli dla 0, 5, 32 i 48 mmHg (0; 0,667; 4,27 i 6,41 kPa). Wówczas:

1. Ciśnienie p_G okazuje się funkcją nieliniową p .
2. Ciśnienie aplanacji p_G jest *większe* od p , gdy p jest *mniejsze* od 16 mmHg, niezależnie od materiału.
3. Powyżej nominalnej wartości p ciśnienie p_G jest *mniejsze* od ciśnienia p , również bez względu na materiał.
4. Gdy $p = 0$, wówczas „mierzone” ciśnienie p_G wynosi 1,0 mmHg (0,13 kPa) dla $M1$, natomiast 2,9 mmHg (0,39 kPa) dla $M4$; powyżej $p = 5$ mmHg (0,67 kPa) krzywe $p_G(p)$ dla materiałów $M1$ – $M4$ nie różnią się znacząco.
5. Dla materiałów $M1$ – $M4$ i dla ciśnienia nieprzekraczającego połowy wartości nominalnej, przyrosty p i p_G są jednakowe.
6. Charakterystyka materiału $M5$, pośrednia między liniową a zbliżoną do grupy materiałów $M1$ – $M4$, sprawia, że wykres funkcji $p_G(p)$ także jest pośredni.



Rys. 7.3. Obliczone ciśnienie aplanacji $p_G(p)$ dla modeli z materiałów nieliniowych $M1$ – $M5$ oraz z materiału liniowego. I-F – prawo Imberta-Ficka



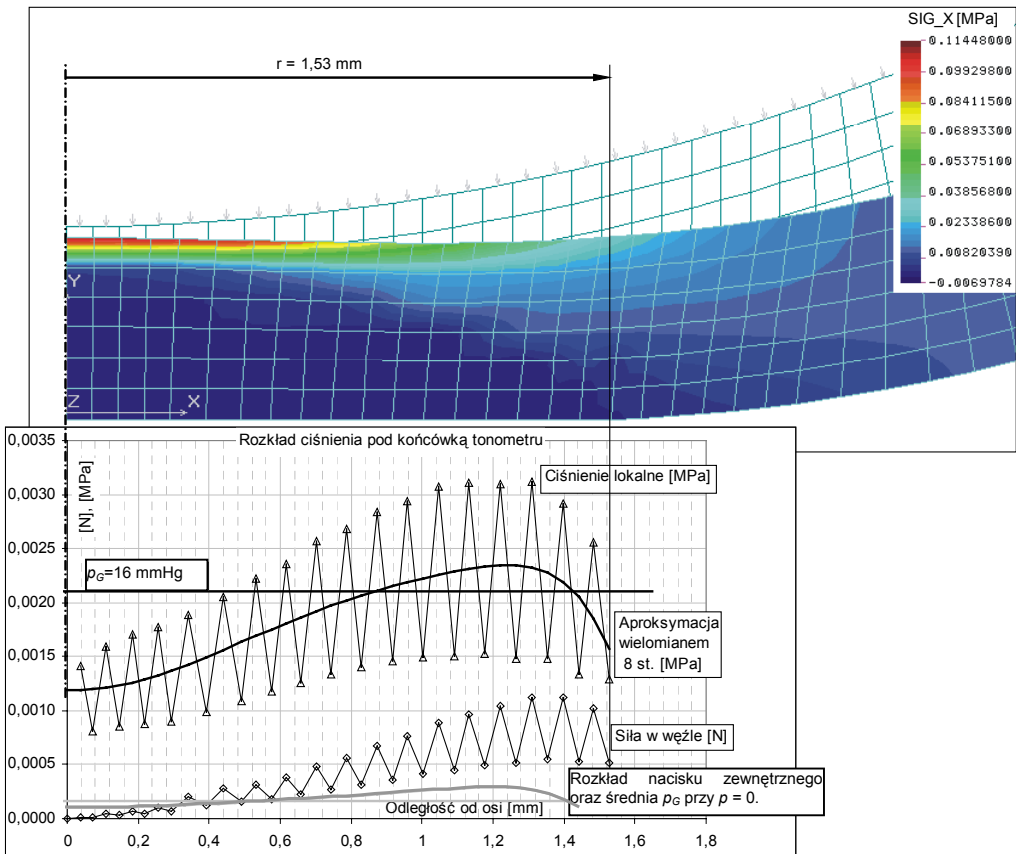
Rys. 7.4. Charakterystyki materiałów $M1$ – $M5$ oraz materiału liniowego. Przy odkształceniu ujemnym zależność $\sigma(\varepsilon)$ podlega prawu (4.9)

Dla porównania zbadany został także model rogówki z materiału liniowo-sprężystego: $E_{\text{stroma}} = 0,21$ MPa, $E_{\text{sklera}} = 1,05$ MPa (pięć razy więcej), jednakże rozwiązywany jako konstrukcja geometrycznie nieliniowa. Dla tej wartości modułu E_{stroma} model spełnia warunek (7.1) – mimo że wykres funkcji $p_G(p)$ bardzo się różni od innych wykresów umieszczonych na rys. 7.3.

Charakterystyki materiałów $M1$ – $M5$ oraz materiału liniowo-sprężystego wykreślono na rysunku 7.4. Nienormalna izotropia materiałów $M1$ – $M5$ przejawia się w tym, że w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych wykresy są liniowe.

Rozkład ciśnienia pod końcówką tonometru. Ciśnienie oznaczane p_G jest średnim ciśnieniem zewnętrznym, obliczonym dla strefy aplanacji o średnicy kalibracyjnej 3,06 mm, ale jego rozkład na powierzchni nie jest stały. Lokalna wartość tego ciśnienia liczona była jako iloraz siły w węźle i powierzchni pierścienia przyległego do węzła (brzeży pierścienia wypadają w połowie odległości od sąsiednich węzłów na zewnętrznej powierzchni rogówki). Na rysunku 7.5 zamieszczono cztery funkcje:

- siły w węzłach (dolne wartości dotyczą węzłów narożnych elementu skończonego, górne – węzłów pośrednich),
- odpowiadające im ciśnienie lokalne,
- aproksymację tego ciśnienia wielomianem,
- funkcję średnią w promieniu 1,53 mm, czyli ciśnienie goldmannowskie p_G .



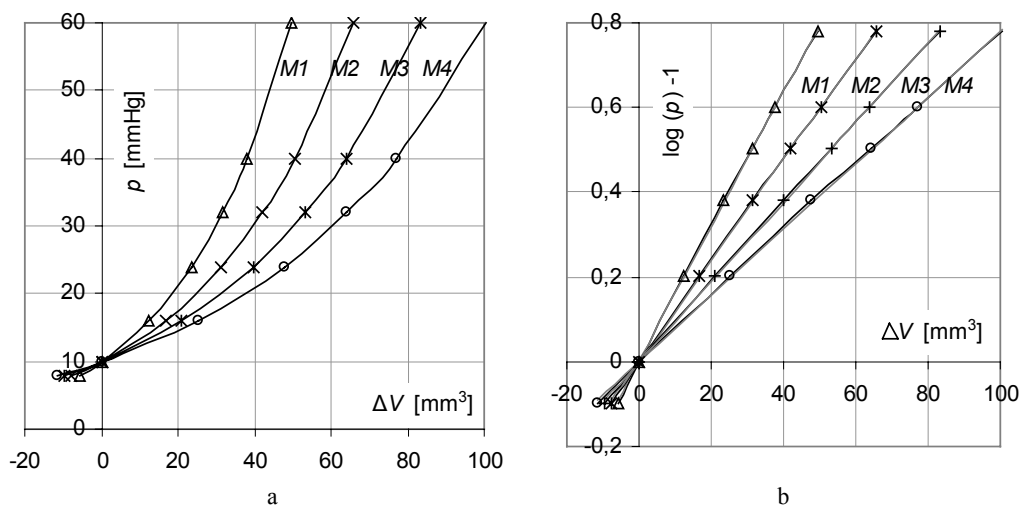
Rys. 7.5. Rozkład ciśnienia zewnętrznego na powierzchni rogówki o wymiarach kalibracyjnych, z materiału M2 i gdy $p = 16$ mmHg. Dodatkowo, szarymi liniami, wykreślony został rozkład ciśnienia i jego wartość średnia $p_G = 1,7$ mmHg (0,23 kPa), gdy $p = 0$.

Siatka elementów na górze wytycza kształt rogówki nieobciążonej

Obliczenia zilustrowane rysunkiem 7.5 przeprowadzono dla rogówki o wymiarach kalibracyjnych, obciążonej ciśnieniem nominalnym. Z wykresu wynika, że najmniejsze ciśnienie pod płaską końcówką tonometru występuje na osi i wynosi 9 mmHg (1,2 kPa), jest więc dość odległe od wartości średniej 16 mmHg. Maksymalne ciśnienie pojawia się na promieniu 1,3 mm od osi i osiąga 17,6 mmHg (2,35 kPa). Nie jest to, jak widać, rozkład jednorodny.

7.1.2. Test sztywności gałki ocznej

Sztywność R_F (6.11) modelu gałki ocznej wynika jednoznacznie z funkcji zmian jego objętości przy narastającym ciśnieniu p . W tym przypadku sposób zamocowania konstrukcji, czyli kinematyczne warunki brzegowe, mają duży wpływ na wyniki obliczeń. Ponieważ nie uzgodniono dotąd jakiegokolwiek stanowiska w tej kwestii, obliczenia wykonane zostały dla obu skrajnych sposobów unieruchomienia modelu, czyli swobodnie zawieszanej gałki ocznej oraz utwierdzonej na tylnej półsfery. Rzeczywiste zamocowanie musi stanowić przypadek pośredni, a obliczona sztywność modelu powinna lokować się pomiędzy wartościami uzyskanymi dla tych skrajnych typów podparcia.



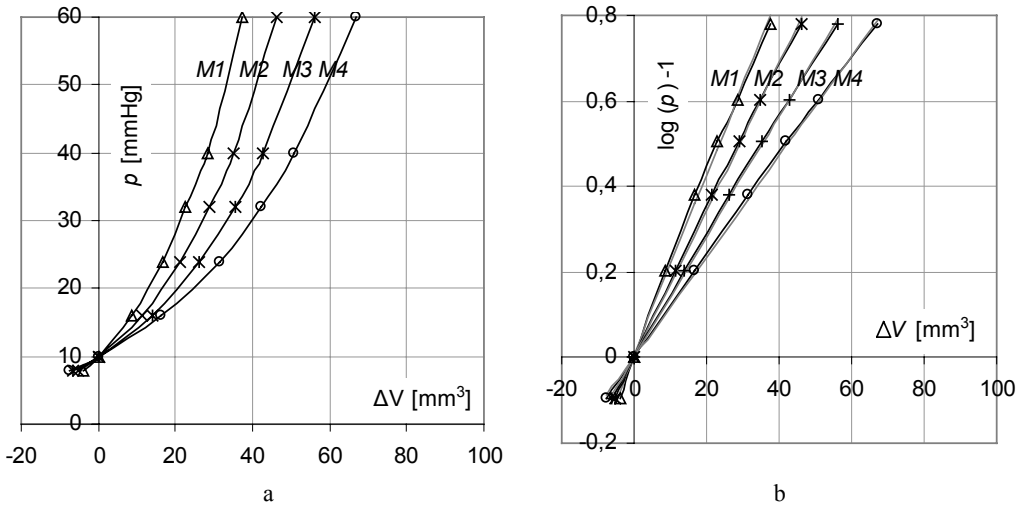
Rys. 7.6. Zależność ciśnienia p od zmiany objętości w modelu swobodnie podpartym (a), logarytm dziesiętny ciśnienia p , przesunięty do początku układu współrzędnych (b).

Na te wykresy widoczne są aproksymacje liniowe tych funkcji.

Zmiana objętości $\Delta V = V_2 - V_1$ obliczana jest względem punktu $V_1 = 6167$ mm³, $p_1 = 10$ mmHg (1,33 kPa). Ciśnienie w skali logarytmicznej rozpoczyna się zatem od wartości 1. Ponieważ przesunięcie wykresu wzdłuż osi rzędnych nie ma znaczenia dla sztywności (6.11) Friedenwalda, wykresy zostają dodatkowo przesunięte o tę

jedynkę w dół, tak aby przechodziły przez początek układu współrzędnych – ostatecznie liczy się tylko współczynnik kierunkowy R_F otrzymanej prostej. Aproksymacje liniowe podane na rys. 7.6b niewiele się różnią od funkcji $\log(p) - 1$.

Analogiczne wykresy, wyznaczone dla modelu utwierdzonego na tylnej półkuli twardówki, przedstawiono na rysunku 7.7. Obliczone sztywności R_F dla obu wariantów zamocowania modelu zestawiono w tabeli 7.4.



Rys. 7.7. Wykresy analogiczne do przedstawionych na rys. 7.6, sporządzone dla modelu utwierdzonego na tylnej półkuli

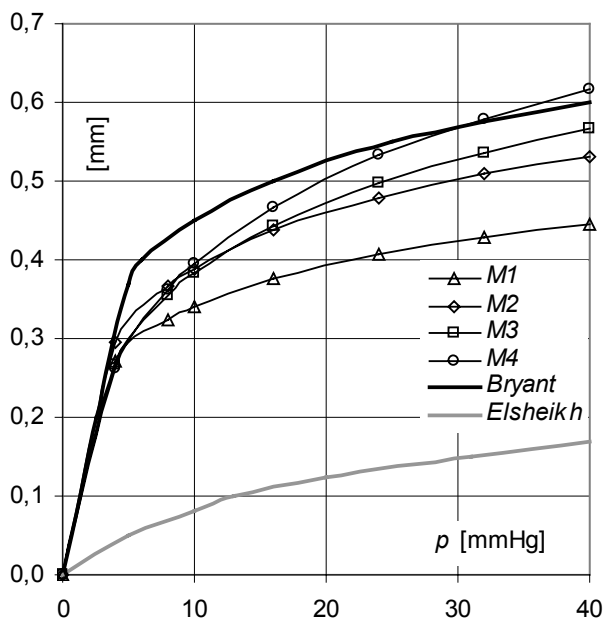
Tabela 7.4. Współczynnik sztywności modelu oka dla dwóch wariantów zamocowania: swobodnie zawieszono oraz utwierdzonego na tylnej półkuli

Materiał	Współczynnik sztywności R_F		
	Swobodny	Utwierdzony	Średnia
M1	0,0159	0,0211	0,0185
M2	0,0119	0,0171	0,0145
M3	0,0094	0,0140	0,0117
M4	0,0078	0,0118	0,0098

7.1.3. Test przemieszczenia wierzchołka rogówki

Obliczenia wykonano dla modelu rogówki utwierdzonej na brzegu. Rezultaty pokazano na rysunku 7.8. Na tle wykresów widoczne są dwie krzywe eksperymentalne, jedna podana przez Bryanta i McDonnella [1996], druga przez Elsheikha i in. [2008a]. W obu przypadkach pomiar wykonywany był na rogówce wyciętej z gałki ocznej

i utwierdzonej w rąbku. Należy zaznaczyć, że wynik obliczeń wyraźnie zależy od warunków brzegowych – od sposobu zamocowania modelu rogówki. Przeszyczenia wierzchołka względem płaszczyzny rąbka są mniejsze dla rogówki osadzonej w odkształcalnej twardówce.



Rys. 7.8. Przeszerzenia wierzchołka rogówki obliczone dla czterech modeli z materiałów M1–M4. Dla porównania dodano krzywą wyznaczoną przez Bryanta i McDonnella oraz Elsheikha i in.

W obliczeniach numerycznych nie ma problemu umiejscowienia punktu początkowego funkcji przeszerzenia wierzchołka rogówki. Interpretacja wyników otrzymanych doświadczalnie nastęrcza pewnych trudności. Rogówka zostaje zwykle w całości wypreparowana z gałki ocznej i zamocowana w sztywnym uchwycie. Wielkość strefy okołorąbkowej, pozostawionej przy preparacie, oraz sposób jego zamocowania, ma duży wpływ na wynik eksperymentu, szczególnie na położenie początku wykresu mierzonego przeszerzenia jako funkcji ciśnienia. Jednocześnie pojawia się też problem obciążenia wstępnego ciśnienia p , od którego rozpoczynany jest pomiar. Czasami to ciśnienie bywa całkiem duże, niewiele mniejsze od nominalnego, a specyfika materiału o charakterystyce wykładniczej sprawia, że wówczas odkształcenie wstępne może być niemal tak duże, jak odkształcenie rejestrowane podczas pomiaru i oczywiście pozostawać nieznanne. Wszystko to dotyczy także przeszerzenia wierzchołka rogówki. W przeciwieństwie do przeszerzeń ciśnienie obciążające badaną rogówkę mierzone jest bardzo dokładnie.

Oznacza to, że wykresy na rysunku 7.8, podane przez Bryanta i McDonnella oraz Elshekha i in., oddają rzeczywistość przede wszystkim w swoim kształcie i zmierzonym ciśnieniu, znacznie mniej pewne jest natomiast ich usytuowanie na osi rzędnych. Każdy z wykresów, otrzymanych dla modeli z czterech weryfikowanych materiałów, należy zatem przesunąć pionowo do pokrycia się z krzywą eksperymentalną – rys. 7.8. Wynik Bryanta i McDonnella okazuje się bliższy rozwiązaniom modelu z materiału $M2$, natomiast wynik Elshekha i in. wskazuje raczej na model z materiału $M1$.

7.1.4. Podsumowanie wyników

7.1.4.1. Test GAT

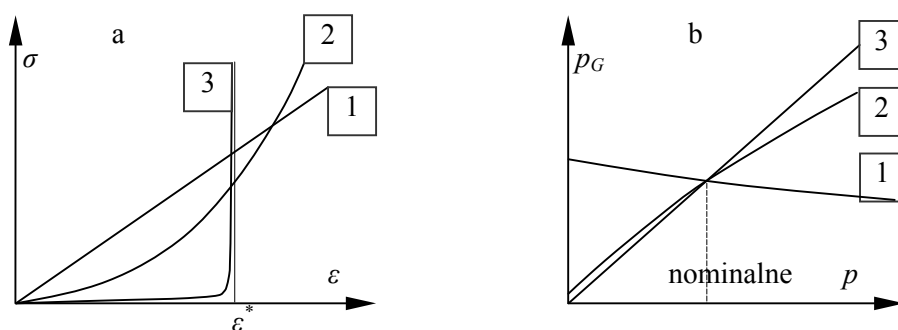
Cięnienie p_G nie jest liniową funkcją ciśnienia p . Wyniki obliczeń o największym znaczeniu wykreślone zostały na rys. 7.3. Widoczne na nim funkcje $p_G(p)$ dla czterech materiałów nieliniowych $M1$ – $M4$ wykazują charakterystyczny przebieg względem prostej (6.1). Wynik ten prowadzi do zaskakującego wniosku: nawet model kalibracyjny oka (użyty tutaj) nie podlega prawu Imberta–Ficka w badanym zakresie ciśnienia fizjologicznego. Model stosuje się do prawa (6.1) tylko w jednym punkcie (16 mmHg), w którym zgodność ciśnień p_G i p wymuszona została przez odpowiednio dobrany materiał rogowki. Poza tym jednym punktem „mierzone” ciśnienie p_G jest wyraźnie różne od ciśnienia p – większe o około 2 mmHg (0,27 kPa) dla $p = 5$ mmHg (0,67 kPa) i mniejsze o 11 mmHg (1,5 kPa) dla $p = 48$ mmHg (6,4 kPa). Jedynie w pobliżu ciśnienia rzeczywistego 12–20 mmHg (1,6–2,7 kPa) p_G różni się od niego mniej niż 10%, czyli do 1,5 mmHg (0,2 kPa). Wykres $p_G(p)$ wykazuje charakterystyczne zakrzywienie, które sprawia, że powyżej ciśnienia nominalnego (16 mmHg) odchylenie bezwzględne $|p_G - p|$ odczytu od wartości rzeczywistej szybko narasta i, niezależnie od materiału, p_G zawsze jest *mniejsze* od ciśnienia p .

Siły działające na strefę aplanacji (równanie (6.4)), dzielą się na dwie grupy: siły dominujące F_G , F_p i korygujące F_S , F_t . Podobnie jest z ciśnieniami w równaniu (6.5). W modelu kalibracyjnym siły korygujące znikają, co prowadzi do prawa Imberta–Ficka. Wyrażenie (6.10) pokazuje jednak, że w modelu niekalibracyjnym ciśnienie p_S nie ma istotnego znaczenia dla bilansu obciążeń (6.4). Jedyną zatem przyczyną, którą można tłumaczyć nierówność ciśnień p i p_G pozostaje siła oporu spłaszczenia rogowki. Ale siła ta, zawsze zwrócona na zewnątrz oka jak się sądzi (rys. 6.1), może odpowiadać tylko za to, że ciśnienie p_G bywa *większe* od ciśnienia p . Tak jest na przykład dla ciśnienia $p < 16$ mmHg. W tym zakresie ciśnienia model faktycznie zachowuje się zgodnie z intuicją – jak konstrukcja geometrycznie liniowa, czyli zgodnie też z postulatami GAT. Wtedy nie tylko ciśnienie p_G jest większe od p , także przyrosty obu ciśnień są jednakowe, jak w równaniu (6.1). Taki właśnie model rogowki – „niskociśnieniowy” – miał na myśli Goldmann i dla takiego modelu ustanowił prawo Imberta–Ficka.

Ze wzrostem ciśnienia opór zginania maleje, choć trzeba przyznać, że dla ciśnienia nominalnego zmiana ta jest jeszcze tak niewielka, iż pomysł Goldmanna – siły napięcia powierzchniowego w filmie łzowym – jest do przyjęcia. Ciśnienie $p_S = 0,45$ mmHg, obliczone w (6.10) i wstępne ciśnienie $p_t \approx 1$ mmHg odczytane z wykresu na rys. 7.3, są tego samego rzędu, mają ten sam zwrot i w dodatku różnica ($p_G - p$) aż do około $p = 10$ mmHg zachowuje się zgodnie z oczekiwaniami – w najdrobniejszych szczegółach.

Problemy GAT w świetle otrzymanych rozwiązań zaczynają się po przekroczeniu ciśnienia nominalnego, czyli gdy $p > 16$ mmHg. Uwidacznia się wtedy wpływ jakiegoś mechanizmu, który powoduje obniżanie p_G względem p . Kierunek zmian jest odwrotny do poprzedniego, wątpliwa zatem wydaje się możliwość użycia ciśnienia p_t do skorygowania wyniku, jak zostało to zapisane w równaniach (6.6) i (6.7). Gdy $p = 45$ mmHg, ciśnienie p_G wynosi tylko 35 mmHg, a różnicy 10 mmHg, nie można już uzasadnić siłą napięcia powierzchniowego. Zjawisko odpowiedzialne za tak silne zaniżanie odczytu ciśnienia na tonometrze Goldmanna jest zupełnie nieznanie i na gruncie GAT niewytłumaczalne. Nie ulega wątpliwości, że dla tonometrii ma fundamentalne znaczenie, dlatego poświęcono mu cały podrozdział 8.1.

Związek krzywej materiałowej $\sigma(\epsilon)$ z funkcją ciśnienia $p_G(p)$. Wyniki przedstawione na rysunku 7.3 na tyle zaburzają stereotyp oka podległego prawu Imberta–Ficka, że skłaniają do zbadania warunków, które powinien spełniać materiał modelu rogówki, aby obliczane ciśnienie p_G było równe ciśnieniu rzeczywistemu p , w całym badanym tu zakresie ciśnienia. Na rysunku 7.9 pokazano schemat zależności między ciśnieniem goldmannowskim a charakterystyką materiałową.



Rys. 7.9. Trzy typy wykresu rozciągania materiału rogówki (a), funkcje $p_G(p)$ (b) dla modeli z materiałów o charakterystykach wykreślonych na rys. a)

Krzywe oznaczone 1 i 2 na obu wykresach rysunku 7.9, odpowiadają zbadanym modelom: fizycznie liniowemu oraz wykonanemu z materiału o charakterystyce wykładniczej (4.7). Utworzenie modelu, który zapewniałby spełnienie prawa Imberta–Ficka (6.1), w badanym tu zakresie ciśnienia p (linia 3 na rys. 7.9b), okazuje się także

możliwe – warunkiem jest użycie materiału o charakterystyce oznaczonej 3 na rysunku 7.9a. Nieliniowość tej funkcji posunięta jest do skrajności – w pierwszej fazie, do granicy ε^* , naprężenie jest bliskie zera, natomiast w samej granicy zdąża do nieskończoności (gdyby spróbować aproksymacji wykładniczej, wówczas funkcja miałaby parametry A i α zbliżone do 10^{-10} i 600; odpowiadający jej wykres ciśnienia na rys. 7.1 należałoby ulokować w obszarze położonym gdzieś poza materiałem M_{14}). Jedynie wtedy model oka działa zgodnie z zależnością (6.3). Ten wniosek jest konsekwencją tezy Orssengo i Pye, sprowadzonej do równania (28) w ich publikacji [Orssengo i Pye 1999]:

$$E = 0,0229 p, [E] = \text{MPa}, [p] = \text{mmHg}, \quad (7.2)$$

a więc moduł sprężystości E jest *proporcjonalny* do obciążenia p . Ponieważ publikacja ta jest często cytowana i wielu badaczy powołuje się na zawarte w niej rezultaty, warto przyrzeć się bliżej wynikającym stąd wnioskom.

Orssengo i Pye wykorzystują *liniowe* rozwiązanie Younga [1989] spłaszczonej powłoki liniowo-sprężystej o promieniu R i stałej grubości t :

$$\delta = \frac{a \left(R - \frac{t}{2} \right) \sqrt{1 - \nu^2}}{Et^2} W, \quad (7.3)$$

w którym „uzmienniają” moduł E , według (7.2), zatem musi to być moduł *sieczny*, gdyż przemieszczenie wierzchołka rogówki δ jest obliczane dla tej jednej wartości E . Obciążenie W jest iloczynem powierzchni spłaszczenia A_{aplan} i ciśnienia p_G , a ułamek zawiera stałe materiałowe i wymiary rogówki. Gdy przemieszczenia są małe, jak zakładał Young wyprowadzając to równanie, *naprężenie* w konstrukcji jest proporcjonalne do jej *obciążenia*. Mamy też moduł E (7.2), także proporcjonalny do obciążenia. Jeżeli zarówno E , jak i σ są proporcjonalne do obciążenia, *to σ jest proporcjonalne do E* . Ponieważ $E = \sigma / \varepsilon$, więc wynika stąd $1 / \varepsilon = \text{const}$, czyli odkształcenie w jednoosiowym stanie naprężenia *musi być stałe*. Przyglądając się charakterystykom materiałowym, wykreślonym na rysunku 7.9a, widać, że jedyną funkcją spełniającą warunek stałego odkształcenia, zatem spełniającą także równanie (7.2), jest krzywa oznaczona numerem 3. Należy to bardzo wyraźnie powiedzieć: Orssengo i Pye, przyjmując założenie (7.2), twierdzą w ten sposób, że taka właśnie jest charakterystyka materiałowa rogówki. Nikt jednak w licznej literaturze, w której praca Orssengo i Pye jest cytowana, nie zauważa związku między postulatem (7.2) a tak osobliwą charakterystyką materiałową.

Czy rzeczywiście rogówka z takiego materiału podlega prawu Imberta–Ficka (6.3)? Odpowiedź nie jest jednoznaczna. Swoje rozwiązanie Orssengo i Pye opierają na założeniu o jednorodności naprężenia w całej konstrukcji, gdyż tylko wtedy moduł E , parametr zależny przecież od współrzędnych przestrzennych w ośrodku

nieliniowo-sprężystym, może być jednorodny, zgodnie z równaniem (7.2). Gdyby chodziło o cienką powłokę kulistą, nie byłoby wątpliwości, że takie rozwiązanie jest dopuszczalne. W realnej powłoce rogówkowo-twardówkowej, obciążonej ciśnieniami p i p_G , rozkład naprężenia nie jest już tak jednorodny, ale wciąż jeszcze konstrukcja ta przypomina powłokę cienkościenną, zbliżoną kształtem do kulistej. Może zatem to uproszczenie jest jednak do przyjęcia? Niech więc o jakości rozwiązania Orssengo i Pye świadczą osiągnięte wyniki. Oszacowany przez tych autorów moduł Younga materiału rogówki, obciążonej ciśnieniem nominalnym, wynosi około 0,3 MPa, a ta wartość jest całkiem bliska wyniku, jaki otrzymali inni badacze [Woo i in. 1972A, Nash i in. 1982, Liu i Roberts 2005, Hamilton i Pye 2008], a także bliska jest rezultatów obliczeń referowanych w bieżącym podrozdziale 7.1. Dlatego moduł sprężystości E o tej wartości, obliczony przez Orssengo i Pye dla powłoki „nieliniowej”, w dodatku jednorodnej i kulistej, ale po wykonaniu triku (7.2), świadczyłby na korzyść ich rozwiązania. Z drugiej jednak strony tabela ze współczynnikami korekcji K_g , opracowana dla tego właśnie modelu rogówki, już nie wydaje się tak wiarygodna. Nie chodzi tu tylko o niezgodność z wynikami rozwiązań omówionych w podrozdziale 8.1.2 (zamieszczony jest tam fragment tej tabeli), także badania doświadczalne nie potwierdzają zawartości tabeli korekcyjnej Orssengo i Pye [Kirstein i Husler 2005, Kohlhaas i in. 2006]. Próbuując znaleźć uzasadnienie dla równania (6.3), można przypuszczać, że rogówka z materiału 3, tylko na tyle będzie podlegać temu prawu, na ile gałka oczna przypomina jednorodną powłokę kulistą – czyli raczej w niewielkim stopniu. Reasumując te rozważania, wydaje się, że koncepcja Orssengo i Pye to jedyny i w dodatku słabo uzasadniony teoretycznie model podlegający prawu Imberta–Ficka. Trzeba jednak przyznać, że sam w sobie (w oderwaniu od rzeczywistości) spełnia to prawo z *absolutną* dokładnością.

Ten rezultat – krzywa rozciągania 3 (rys. 7.9a) – jest ewidentnie sprzeczny z wynikami badań doświadczalnych, prowadzonych na preparatach biologicznych, zwłaszcza na tkankach oka [Woo i in. 1972b, Nash i in. 1982, Fung 1993]. Niemal wszystkie dane literaturowe wskazują na charakterystykę 2 jako odpowiednią dla tkanek miękkich. Charakterystyka 3 wydaje się być w tym kontekście jedynie interesującym przypadkiem teoretycznym.

Z analizy tej wynika, że albo model kalibracyjny z realnego materiału (4.7) nie może spełnić ściśle prawa (6.1), albo prawo (6.1) jest spełnione, ale przez model z nierealnego materiału o charakterystyce (7.2), wykreślonej pod numerem 3 na rysunku 7.9a. Pierwsza teza jest całkiem wiarygodna, chociaż radykalnie zmienia dotychczasowe wyobrażenia o mechanice zjawisk towarzyszących GAT. Przebieg funkcji $p_G(p)$, uzyskany z rozwiązań numerycznych zilustrowanych na rys. 7.3, wydaje się bardziej uzasadniony teoretycznie niż postulowane dotychczas prawo (6.1) – z tego mianowicie powodu, że przedstawione rozwiązania uwzględniają nieliniową naturę konstrukcji, jaką jest gałka oczna. Zostanie ona bliżej zbadana w podrozdziałach 8.1.1 i 8.1.2.

Model zapewniający tylko $p_G = p = 16$ mmHg jest zwykle wadliwy. W tym kontekście znamienne jest wykres p_G dla modelu liniowego, rys. 7.3. Po obciążeniu modelu ciśnieniem $p = 16$ mmHg i rozwiązaniu, otrzymujemy p_G równe 16 mmHg (oczywiście jak poprzednio, tylko dlatego, że tak został dobrany moduł E materiału rogówki). Gdyby ograniczyć obliczenia do tej jednej wartości obciążenia, można by sądzić, że model jest optymalny. O tym, że jest wadliwy, dowiadujemy się dopiero po obliczeniu p_G dla innych jeszcze niż 16 mmHg obciążeń p . W naszym przypadku, dla $p = 0$, „mierzone” ciśnienie p_G wynosi 18,7 mmHg (2,50 kPa), zatem największe ciśnienie p_G , spłaszczające wierzchołek modelu rogówki z materiału liniowego, wymagane jest wtedy, kiedy ciśnienia p w ogóle nie ma. To, co się dzieje dalej jest równie zaskakujące: zwiększanie ciśnienia p obniża p_G zamiast je podwyższać – jak podpowiada intuicja, a także rozwiązanie liniowe (7.4). Obciążenie tej konstrukcji ciśnieniem $p = 48$ mmHg prowadzi do rozwiązania $p_G = 10,7$ mmHg – najmniejszego w badanym zakresie obciążenia.

Rezultat ten jest znamienne dlatego że – jak się okazuje – rozwiązania spełniające warunek (7.1) można osiągnąć dla dowolnej geometrii modelu, dowolnych warunków brzegowych i dowolnie przyjętego modułu Younga twardówki, sterując jedynie modułem Younga rogówki, a także dla materiałów nieliniowych dowolnego typu. Jest to istotne spostrzeżenie, gdyż w wielu publikacjach autorzy modeli numerycznych gałki ocznej, dobierając materiał rogówki, ograniczają obliczenia do tego jednego ciśnienia – nominalnego. Nieliniowość materiału jest warunkiem oczywistym dla rogówki, nie wystarcza jednak, aby tak, jakościowo tylko, opisana cecha materiału („nieliniowy”) zapewniła działanie modelu zgodne z funkcjonowaniem rzeczywistego oka. A już zupełnie nie wystarcza zapewnienie autora, że jego model gałki ocznej działa zgodnie z prawem Imberta–Ficka, bo spełnia warunek (7.1). O prawie Imberta–Ficka, któremu podlega model numeryczny oka, możemy mówić dopiero wtedy, gdy równość ciśnień p_G i p zachodzi dla *dowolnej* ich wartości (ograniczonej oczywiście fizjologią). Właśnie dlatego zadanie należy rozwiązać dla *kilku różnych* ciśnień p , ale za każdym razem musi to być *ten sam model*.

Problem stateczności powłoki rogówkowej z materiału liniowo-sprężystego. Rozwiązania powłoki liniowej, przedstawione na rys. 7.3, dają inną jeszcze, niezwykle istotną informację o tej konstrukcji. Przez całą stuletnią historię tonometrii aplanacyjnej takie pole przemieszczeń badane było jedynie na przykładzie gałki ocznej, a więc powłoki utworzonej z materiału mocno nieliniowego. Fakt, że w przypadku realnego oka wyznaczona empirycznie zależność $p_G(p)$ przypomina funkcję liniową okazał się zgubny dla tonometrii, bo wszelkie próby rozwiązania zawsze opierano na założeniu, że konstrukcja ta jest geometrycznie liniowa. Gdyby te badania rozpoczęto od powłoki liniowo-sprężystej, szybko by się okazało, że tak nie jest, a zatem, że nie wolno w tym przypadku superponować rozwiązań w przemieszczeniach. Przykładem takiej konstrukcji, dla której przemieszczeń nie można superponować, jest kratownica Misesa – dwa połączone przegubem pręty, podparte przegubowo na wolnych końcach,

tak że ustawione są wzajemnie pod kątem nieco tylko mniejszym od półpełnego. Zależność między siłą przyłożoną do przegubu, prostopadłą do linii łączącej punkty podparcia, a przemieszczeniem tego przegubu jest zdecydowanie nieliniowa. Nikt nie zakłada wówczas, że przemieszczenia tej konstrukcji, powodowane przez serię przyłożonych do niej sił, są addytywne – nawet gdy pręty wykonane są ze stali, a odkształcenia małe. Obciążona ciśnieniem wewnętrznym cienkościenna powłoka elipsoidalna, wykonana z materiału liniowo-sprężystego i spłaszczona ciśnieniem zewnętrznym, jest właśnie tego rodzaju konstrukcją – geometrycznie nieliniową. Świadczy o tym wykres na rysunku 7.3 dla modelu liniowo-sprężystego (zresztą dla pozostałych także). Zwiększanie ciśnienia wewnętrznego p sprawia, że do spłaszczenia wierzchołka rogówki na ustalonej średnicy potrzebne jest coraz mniejsze (średnie) ciśnienie p_G z zewnątrz. Nie możemy zatem w tym przypadku rozwiązać oddzielnie powłoki spłaszczonej ciśnieniem zewnętrznym, a otrzymane pole przemieszczeń dodać następnie do pola przemieszczeń uzyskanego z rozwiązania powłoki obciążonej jedynie ciśnieniem wewnętrznym. Gdybyśmy tak postąpili, funkcja $p_G(p)$ byłaby nie tylko liniowa, byłaby to także funkcja rosnąca, a to jest sprzeczne z rozwiązaniem modelu fizycznie liniowego, rys. 7.3.

Ale tak właśnie – opierając się na zasadzie superpozycji przemieszczeń – zbudowali swój model Orsengo i Pye [1999]. Dodając rozwiązanie Younga (7.3) do przemieszczenia powłoki sferycznej w jednorodnej ekspansji pod wpływem ciśnienia wewnętrznego i na koniec, przyrównując ten wynik do znanego dla rogówki przemieszczenia wierzchołka po spłaszczeniu, otrzymali oni równanie oznaczone w ich pracy numerem (7), z którego można wyznaczyć takie oto ciśnienie zewnętrzne:

$$p_G = \frac{\left(R - \frac{t}{2}\right)t}{0,9A_{\text{aplan}}} p + \frac{4Et^2}{0,3\sqrt{3}A_{\text{aplan}}\left(R - \frac{t}{2}\right)} \delta. \quad (7.4)$$

Po podstawieniu danych dla rogówki

$$p_G = 0,625 p + 14 \text{ [mmHg]}.$$

Rezultat ten znamionuje konstrukcję geometrycznie liniową – gdy rośnie p , rośnie też i p_G . Dopiero podstawienie (7.2) zmienia tę sytuację, ale nie jest to zmiana na lepsze. Teraz, gdy moduł E jest proporcjonalny do ciśnienia p , autorzy otrzymują zależność (7.4) zgodną z prawem Imberta–Ficka. Aż za zgodną, bo ten trik formalny zapewnia jedynie spełnienie równania (6.1). Zadanie „rozwiązywane” jest teraz tak, aby otrzymać z góry oczekiwany wynik (równość ciśnień p_G i p), bez dbałości o spełnienie podstawowych równań mechaniki – równań konstytutywnych, związków geometrycznych i warunków równowagi. Opierając się na wymienionych grupach równań, Young

rozwiązał swój model liniowo-sprężysty, w którym jedynym obciążeniem było ciśnienie zewnętrzne, powodujące spłaszczenie wierzchołka. Podane przez niego rozwiązanie, drugi składnik wyrażenia (7.4), dotyczy tylko tak postawionego zadania. Już samo dodanie od wewnątrz ciśnienia p wykracza poza założenia przyjęte przez Younga, zatem jest to *inne* zadanie. Ale Orssengo i Pye idą jeszcze dalej i wymieniają także (stały) moduł E na *zmienny*. Czy ich zadanie ma jeszcze cokolwiek wspólnego z zadaniem rozwiązaniem przez Younga? Autorzy tego nie sprawdzają. Jednak nawet gdyby miało, to i tak jest to rozwiązanie geometrycznie liniowe, nie nadaje się więc do badania stateczności powłoki. Zagadnienie stateczności wykracza daleko poza zakres możliwości rozwiązania (7.4). Stosując je w tonometrii można tylko mieć nadzieję, że mimo podstawienia (7.2), konstrukcja nadal jest geometrycznie liniowa w tym stanie obciążenia. Ale nadzieja ta oparta jest jedynie na optymizmie – nie ma tu mechaniki.

Wykreślona na rysunku 7.3 funkcja $p_G(p)$, ewidentnie malejąca dla modelu z materiału liniowo-sprężystego, oznacza zbliżanie się powłoki do stanu nazywanego krytycznym, w którym jej sztywność zdecydowanie maleje (wyznacznik główny macierzy sztywności konstrukcji zdąża do zera). Zauważmy bowiem, że przy narastającym ciśnieniu p to samo (w przybliżeniu) przemieszczenie spłaszczonego wierzchołka otrzymujemy dla coraz mniejszego obciążenia p_G . Nie ulega wątpliwości, że nie jest to konstrukcja geometrycznie liniowa i zasada superpozycji, wykorzystana w rozwiązaniu Orssengo i Pye, nie ma do niej zastosowania.

Nie można usprawiedliwiać twórców tonometrii aplanacyjnej brakiem dostępu do komputera, bo zagadnieniem stateczności konstrukcji zajmował się już Euler dwa wieki wcześniej i skutecznie rozwiązał ten problem w odniesieniu do pręta. Powłoka jest oczywiście konstrukcją znacznie trudniejszą do rozwiązania analitycznego, ale przecież myśl zawartą w liniowej GAT pielęgnuje się właśnie dzisiaj, w epoce superkomputerów. Tonometria stała się przez to skansenem mechaniki, w którym owa myśl zatrzymała się między Laplace'em a Kirchhoffem, gdzieś w czasach Naviera¹.

Wykresy na rysunku 7.3 pokazują, że aby otrzymać p_G choćby z grubsza proporcjonalne do p , materiał rogówki musi być *nieliniowy*, i to bardzo mocno. Zakrawa to na paradoks, ale warunkiem prostoty zawartej w liniowym prawie $p_G = p$ jest *silnie* nieliniowy materiał powłoki (wykres 3 na rys. 7.9a), w przeciwnym razie ciśnienie p_G wykazuje zależność odwrotną – maleje zamiast rosnąć ze wzrostem p . Doprawdy szczęśliwym trafem dla tonometrii jest ciśnienie p_G , które okazało się monotoniczną funkcją p , w dodatku rosnącą, i to niemal od samego zera. Taki zbieg okoliczności nie zachodzi nawet w przypadku modelu fizycznie liniowego – wręcz model liniowy pokazuje, jak to jest mało prawdopodobne. Dlatego trudno się nie zdziwić, gdy ktoś oczekuje, aby dla rogówki ciśnienie p_G było *dokładnie* równe p . Przecież taka rów-

¹ Kirchhoff jako jeden z pierwszych zajmował się statecznością dźwigarów powierzchniowych, a Navier uważany jest za autora pierwszego, poprawnie wyprowadzonego równania różniczkowego płyty, oczywiście liniowej.

ność, nawet gdyby zaszła, byłaby zupełnie przypadkowa, zależna od wielu szczególnych okoliczności, w najwyższym stopniu dziwna – po prostu podejrzana. Mimo to wiara w prawo Imberta–Ficka jest powszechna (choć zdarzają się niewierzący), kwestia jego weryfikacji niepokoi jedynie nielicznych, a rozwiązania powłoki przygotowuje się tak, aby były z nim zgodne. Nawet gdy oznacza to konflikt z prawami mechaniki.

7.1.4.2. Test sztywności gałki ocznej

Porównując rysunki 7.6 i 7.7, łatwo zauważyć, że wartość R_F zależy od warunków brzegowych, co jest zgodne z oczekiwaniem. Obliczenia wykonano dla dwu przeciwnych przypadków: modelu całkowicie swobodnego i modelu utwierdzonego na tylnej półkuli. Badania eksperymentalne sposobu zamocowania oka w oczodole są nieliczne i niejednoznaczne. Kempf i in. [2005] sugerują jakąś pośrednią postać zamocowania, jednak przytoczone przez nich przypadki skrajne wyników badań na ludziach wskazują na możliwość natrafienia zarówno na twardówkę sztywno osadzoną w otaczających tkankach, jak i swobodnie zawieszoną. Ponieważ publikowane wyniki badań doświadczalnych nie umożliwiają dokonania wyboru sposobu podparcia gałki ocznej, pozostaje jedyne chyba wyjście, jakim jest obliczenie średniej arytmetycznej wyników otrzymanych dla obu typów zamocowania. Porównanie tych liczb ze średnią uzyskaną eksperymentalnie, $R_F = 0,018 \text{ mm}^{-3}$ (omówioną w punkcie 6.2), faworyzuje materiały $M1$ i $M2$.

7.1.4.3. Test uniesienia wierzchołka rogówki

Bryant i McDonnell [1996] zmierzili przemieszczenie wierzchołka rogówki, utwierdzonej na obwodzie i obciążonej ciśnieniem na wewnętrznej powierzchni. Przemieszczenie okazało się całkiem duże, sugerując stosunkowo mały moduł sprężystości stromy. Dla $p = 16 \text{ mmHg}$, wyniosło ono aż 0,5 mm, było zatem równe grubości rogówki w pobliżu osi. Wynik ten jest niezwykle istotny, gdyż tak duże zmiany konfiguracji rogówki, powodowane ciśnieniem wewnątrzgałkowym, przekładają się na duże zmiany mocy optycznej oka, poddawanego zmiennemu ciśnieniu p .

W opisanych dwóch testach numerycznych – symulowanej GAT i przemieszczenia wierzchołka rogówki wymuszonego ciśnieniem – rola twardówki i rąbka jest stosunkowo nieduża [Śródka 2006]. Największe znaczenie ma w nich rogówka. Właśnie te dwa testy zdecydowały o wyborze materiałów $M1$ i $M2$. Moduł ścieczny materiału $M2$ przy naprężeniu 20 kPa, wynosi $E = 0,267 \text{ MPa}$ i jest zbliżony do wartości otrzymanych przez innych badaczy [Woo i in. 1972b, Orssengo i Pye 1999, Liu i Roberts 2005]. Istotna różnica polega na tym, że materiał $M2$ jest znacznie bardziej nieliniowy. Moduł sprężystości podczas ściskania, E_o , użyty w (4.9), wynosi zaledwie 0,0123 MPa – tabela 7.3. Tak silną nieliniowość stromy wymusza test zgodności z tonometrią aplanacyjną, opisany w podrozdziale 7.1.1.

7.1.4.4. Uwaga końcowa

Badacze zajmujący się parametrami materiałowymi rogówki różnią się w swych opiniach o wartości (sieczonego) modułu sprężystości – co przekłada się na wartości A i α w równaniu (4.7). Do zwolenników „niskomodulowej” rogówki ($E_{\text{sieczny}} \approx 0,3$ MPa) można zaliczyć większość autorów [Woo i in. 1972a, Nash i in. 1982, Orssengo i Pye 1999, Liu i Roberts 2005, Elsheikh i in. 2008b] (ten wynik uzyskiwany jest często z symulacji numerycznej badań doświadczalnych). Przedstawicielem eksperymentatorów (gdyż ich wyniki pochodzą wyłącznie z pomiarów) przekonanych do „wysokomodulowej” rogówki ($E_{\text{sieczny}} \approx 8$ MPa) jest Hjortdal [1996, 1998]. Taką samą wartość otrzymali Shin i in. [1997]. To jest liczba dwadzieścia razy większa od otrzymanej z rozwiązania modelu numerycznego, przedstawionego w podrozdziałach od 7.1.1 do 7.1.3. Tak duży moduł rogówki zdaje się być znacznie przeszacowany, gdyż oznacza on też dużą sztywność R_F (6.11) gałki ocznej. Parametr R_F obliczany dla modelu z takiego materiału, także jest dwadzieścia razy za duży, bo wynosi około $0,4 \text{ mm}^{-3}$. Również symulowane numerycznie przemieszczenie wierzchołka rogówki pod obciążeniem p okazuje się wówczas nierealistycznie małe.

Oprócz parametrów materiału, kontrowersje może wzbudzać geometria twardówki, a także warunki brzegowe. Dla każdego z tych przypadków można znaleźć w literaturze modele nie spełniające przyjętych tutaj założeń lub niezgodne z uzyskanymi rezultatami. Wszystkie te rozbieżności w podejściu do struktury modelu nie mają jednak istotnego wpływu na zasadnicze wnioski płynące z przedstawionych rozwiązań, przede wszystkim na charakter krzywej $p_G(p)$ pokazanej na rys. 7.3. Jej kształt odzwierciedla naturę konstrukcji *geometrycznie nieliniowej*, jaką faktycznie jest gałka oczna, informuje też o tym, że niemożliwe jest sprowadzenie funkcji $p_G(p)$ do proporcji $p_G = p$. Wbrew bowiem powszechnemu mniemaniu: nie ma takiego oka, które podlega prawu Imberta–Ficka.

7.2. Identyfikacja materiału twardówki i rąbka w modelu samonastawnym optycznie

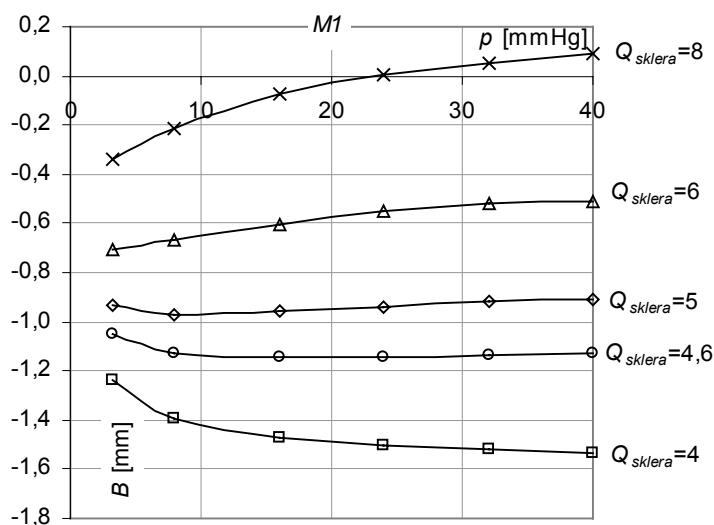
Mechaniczne warunki samonastawności optycznej. Relacje między parametrami materiałowymi rogówki, twardówki i rąbka, opisane w podrozdziałach 4.4.1, 4.4.2 i 4.4.3, sprowadzają się do spełnienia warunków (4.10), (4.13) i (4.14). Badaniom poddany zostanie teraz model, w którym rogówka wykonana jest z materiału M_2 , oraz z materiałów skrajnych w tabeli 7.3 – M_1 i M_4 . Materiał M_2 określany będzie jako optymalny. Przedmiotem obliczeń jest odległość B (4.5) ogniska optycznego od dna oka, jako funkcja ciśnienia wewnątrzgałkowego p oraz wartości parametrów materiałowych twardówki i rąbka, przy których model staje się samonastawny optycznie – warunek (4.6).

Program badań realizowany jest dwuetapowo. Najpierw poszukiwana jest optymalna wartość ilorazu Q_{sklera} (4.10) dla materiału twardówki, zapewniająca samonastawność optyczną. Takie działanie modelu jest więc wymuszane jedynie sztywnością twardówki. Materiał rąbka jest wówczas taki jak materiał rogówki, $Q_{limbus} = 1$. Po wyznaczeniu tej krytycznej wartości $Q_{sklera\ kryt}$, realizowany jest drugi etap obliczeń, w którym badana jest rola, jaką odgrywa sztywność rąbka w modelu zdolnym do samoczynnego utrzymywania ogniska w stałym położeniu, niezależnie od ciśnienia p . Jeśli samonastawność optyczną model osiąga dzięki odpowiedniej wartości ilorazu Q_{limbus} , zdefiniowanego w (4.14), to można powiedzieć, że została ona wymuszona sztywnością rąbka.

7.2.1. Samonastawność wymuszana przez twardówkę

Na rysunku 7.10 przedstawiono serię wykresów funkcji $B(p)$, otrzymanych dla kolejnych wartości Q_{sklera} , wzrastających od 4 do 8. Materiał rogówki $M1$.

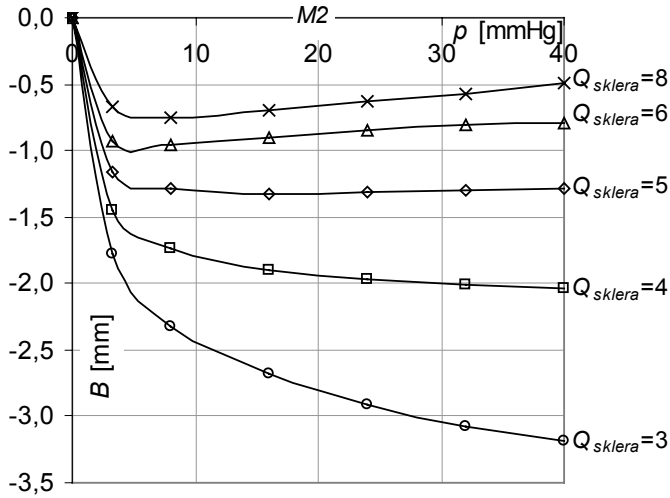
Obciążenie modelu ciśnieniem nominalnym 16 mmHg, dla którego $Q_{sklera} = 4$ (moduł twardówki czterokrotnie większy od modułu rogówki), powoduje przesunięcie ogniska optycznego o prawie 1,5 mm do tyłu. W miarę dalszego wzrostu ciśnienia ognisko monotonicznie oddala się od położenia początkowego – rys. 7.10.



Rys. 7.10. Przesunięcie ogniska względem dna oka $B(p)$. Materiał rogówki $M1$

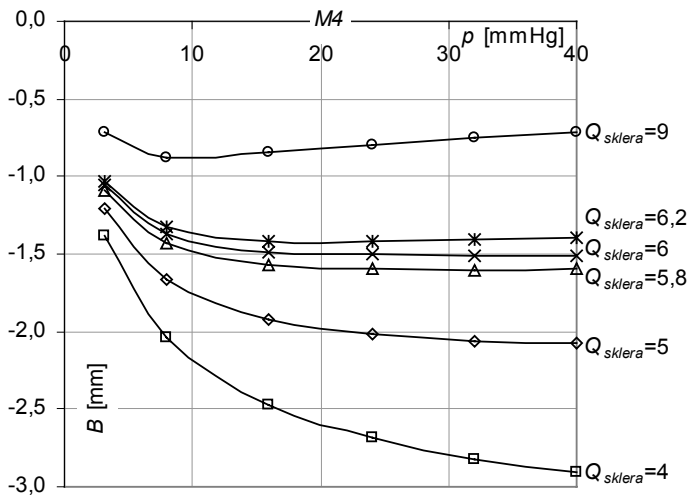
Iloraz $Q_{sklera} = 4,6$ zapewnia szczególny przebieg funkcji B – od ciśnienia 8 mmHg ognisko nieruchomieje i aż do końca badanego zakresu ciśnienia pozostaje w pobliżu tego położenia. Ta krytyczna wartość Q_{sklera} czyni model samonastawny optycznie.

Dalsze zwiększanie ilorazu Q_{sklera} sprawia, że ognisko, po początkowym przemieszczeniu wstecz, dalej nieustannie już zmierza do przodu przy wzrastającym ciśnieniu p .



Rys. 7.11. Funkcja $B(p)$ dla modelu z materiału $M2$

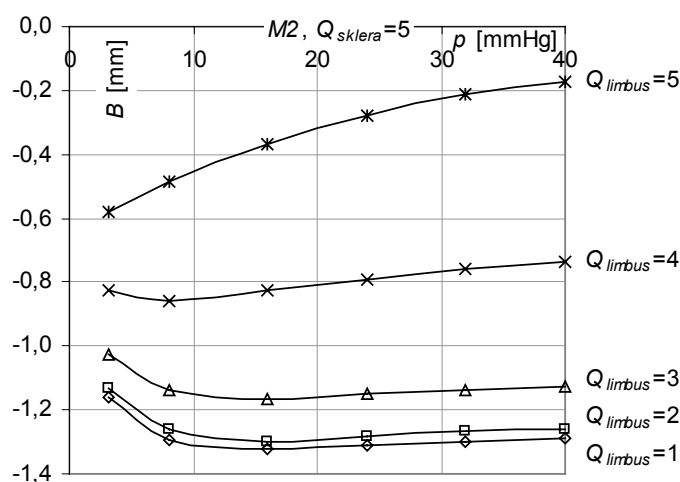
Na rysunku 7.11 podano analogiczne wyniki dla modelu z materiału $M2$. Samonastawność pojawia się dla $Q_{sklera\ kryt} = 5$. Jeszcze bardziej podatny materiał, $M4$, zmienia ten iloraz na $Q_{sklera\ kryt} = 6$, co widoczne jest na rys. 7.12.



Rys. 7.12. Materiał $M4$ o jeszcze mniejszym module sprężystości.
Krytyczna dla modelu wartość $Q_{sklera\ kryt} = 6$

7.2.2. Samonastawność wymuszana przez rąbek

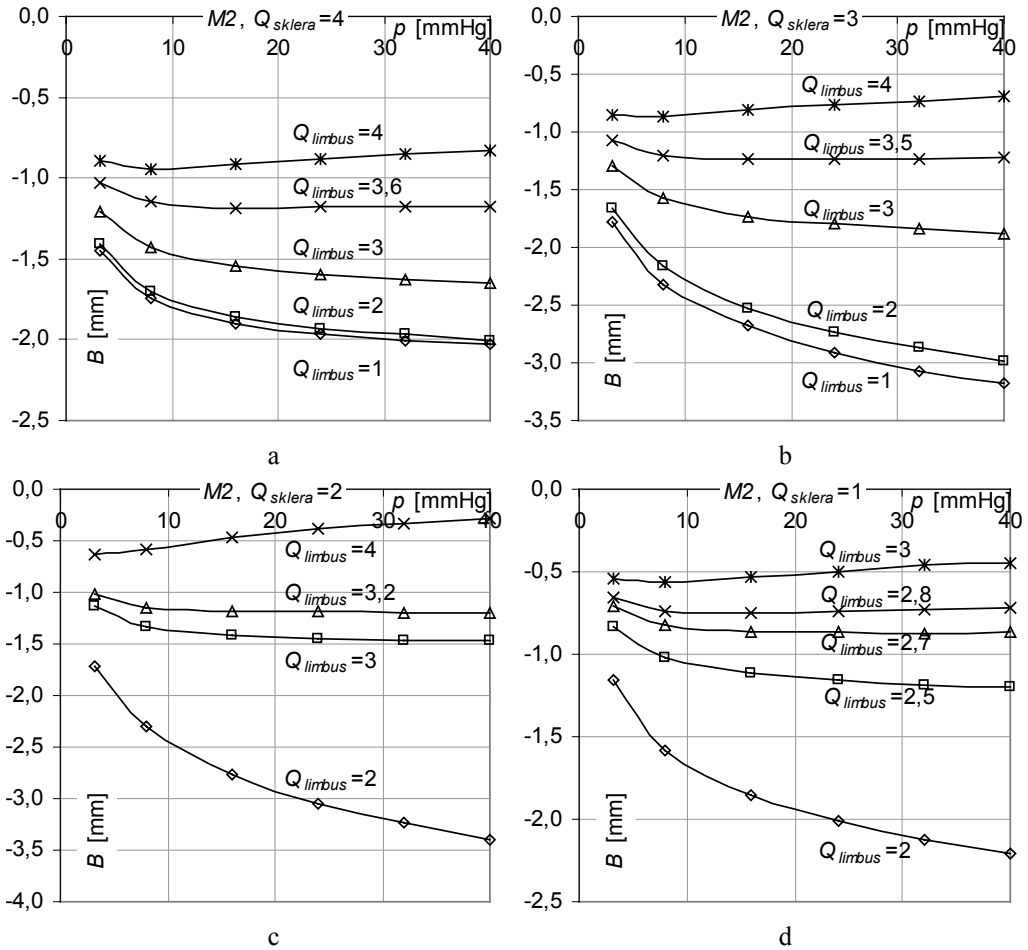
Rola rąbka w przypadku wszystkich trzech badanych materiałów jest podobna, wystarczy zilustrować ją obliczeniami jedynie dla modelu optymalnego, w którym rogówka wykonana jest z materiału $M2$. Gdy stosunek $Q_{sklera} = 5$ (wartość krytyczna), materiał rąbka jest identyczny z materiałem rogówki, czyli $Q_{limbus} = 1$. Zwiększanie wartości Q_{limbus} wpływa podobnie na zmiany wykresu funkcji $B(p)$ jak poprzednio wpływał iloraz Q_{sklera} , czyli narastająca sztywność pierścienia rąbkowego w modelu, który wcześniej był samonastawny optycznie, oddala jego układ optyczny od tego stanu. Ewolucję tych zmian można prześledzić na rys. 7.13.



Rys. 7.13. Materiał rogówki $M2$, $Q_{sklera} = 5$. Przesunięcie ogniska optycznego podczas zwiększania ciśnienia p w modelach o stopniowo narastającej sztywności rąbka

Następny eksperyment numeryczny ujawnia możliwości, jakie daje sztywność rąbka w zakresie osiągnięcia przez model samonastawności. Na czterech wykresach rysunku 7.14 moduł twardówki Q_{sklera} jest stopniowo zmniejszany, a dla utrzymania samonastawności wyznaczana jest krytyczna wartość Q_{limbus} .

Po zmniejszeniu w modelu samonastawnym ilorazu Q_{sklera} z 5 na 4, wymagany do odzyskania samonastawności optycznej iloraz rąbka Q_{limbus} został zwiększony z 1 do 3,6, (rys. 7.14a). Dalsze zmniejszanie Q_{sklera} powoduje początkowo nieznaczne zmiany modułu Q_{limbus} , a gdy moduł twardówki staje się równy modułowi rogówki, krytyczna wartość Q_{limbus} osiąga poziom 2,7. W ten sposób sprężyste podparcie rogówki, dotąd zapewniane przez twardówkę, zostało w pełni zastąpione przez sprężysty pierścień rąbkowy. Na każdym z czterech zbadanych etapów pośrednich układ optyczny modelu gałki ocznej pozostawał samonastawny.



Rys. 7.14. Funkcja $B(p)$ obliczana dla rogówki z materiału $M2$ i modułu twardówki Q_{sklera} o wartościach 4, 3, 2 i 1. Moduł Q_{limbus} kryty przyjmuje odpowiednio wartości 3,6, 3,5, 3,2 i 2,7

7.2.3. Identyfikacja materiału twardówki – podsumowanie wyników

7.2.3.1. Rola twardówki

Rozwiązania przedstawione na rysunkach 7.10, 7.11 i 7.12 pokazują, że w modelach samonastawnych wędrówka ogniska optycznego podczas zwiększania ciśnienia p ustaje przy stosunkowo małej jego wartości. Już od 8 mmHg dalsze przesuwanie się ogniska mierzone jest setnymi częściami milimetra (zmiana mocy o 1 dioptrię oznacza przesunięcie ogniska o 0,35 mm) i tak jest aż do granicy $p = 40$ mmHg. Ognisko modelu

optymalnego (dla $M2$, $Q_{sklera} = 5$ – rys. 7.11), w zakresie ciśnienia wewnątrzgałkowego 8–40 mmHg, pozostaje w przedziale $(-1,289, -1,324)$ mm. Takie przesunięcie ogniska względem dna oka, o 35 mikrometrów, jest równoważne korekcji 0,1 dioptrii – niezauważalnej dla człowieka. Model z materiału $M1$ jest jeszcze bardziej stabilny optycznie – gdy $Q_{sklera} = 4,6$. Kolejny materiał, $M4$, zmniejsza jeszcze bardziej niż $M2$ zakres ciśnienia, w którym ognisko nieruchomieje (dopiero powyżej 16 mmHg), a samonastawność modelu pojawia się przy $Q_{sklera} = 6$. Materiał rogówki wpływa więc na moduł sprężystości materiału twardówki, wymagany do osiągnięcia przez model samonastawności optycznej. Im większy wykładnik α charakterystyki (4.7) rogówki, tym mniejszy jest iloraz $Q_{sklera\ kryt}$ modelu, jednocześnie zwiększa się też przedział ciśnienia, w którym model staje się samonastawny optycznie.

7.2.3.2. Rola rąbka

Po osiągnięciu przez model samonastawności optycznej wymuszonej przez twardówkę, wpływ narastającej sztywności rąbka jest początkowo niezauważalny. Dla materiału $M2$ i $Q_{sklera} = 5$, rys. 7.13, dwukrotne zwiększenie wykładnika α_{limbus} (czyli dla $Q_{limbus} = 2$) skutkuje nieznacznym przesunięciem ogniska do przodu oka – krzywa $B(p)$ zostaje przesunięta tylko o ok. 0,02 mm. Nawet trzykrotne zwiększenie tego wykładnika nie zmienia zauważalnie nachylenia funkcji B – oko nadal pozostaje samonastawne optycznie. Jednak dalsze zwiększanie sztywności rąbka szybko rozstraja układ optyczny, a przy $Q_{limbus} = 5$ (materiał rąbka jest taki sam jak twardówki) funkcja $B(p)$ w niczym nie przypomina jej początkowej postaci, dla $Q_{limbus} = 1$.

Ten wynik dobitnie świadczy o dużym wpływie, jaki mają parametry materiału rąbka i twardówki na optykę gałki ocznej. Powierzchnia przekroju poprzecznego pierścienia rąbkowego, widocznego w kółku na rys. 4.2, wynosi zaledwie 0,40 mm². Ewolucja wykresu B na rys. 7.13 powodowana jest stopniowym przechodzeniem materiału rąbka od takiego jak w rogówce do takiego jak w twardówce. Tak drastyczna zmiana analizowanej funkcji $B(p)$ spowodowana została przesunięciem granicy pomiędzy rogówką a twardówką o 0,5 mm – tyle wynosi przyjęta w modelu grubość rąbka w kierunku południkowym. Wyniki obliczeń wykreślone na rys. 7.13 pokazują także, iż w modelu o krytycznej wartości Q_{sklera} , pierścień rąbkowy o małej sztywności, dla którego spełniony jest warunek $Q_{limbus} < (0,5 Q_{sklera})$, nie ma znaczącego wpływu na samonastawność. Dopiero powyżej tej sztywności jego rola staje się tutaj wyraźnie zauważalna.

Sztywność rąbka Q_{limbus} wpływa decydująco na możliwość osiągnięcia samonastawności optycznej dopiero w modelu podkrytycznym, dla $Q_{sklera} < Q_{sklera\ kryt} = 5$. Zwiększanie parametru Q_{limbus} , sprawia wówczas, że centralna część wykresu zmniejsza nachylenie i przy $Q_{limbus\ kryt} = 3,6$, funkcja $B(p)$, jak poprzednio dla $Q_{sklera} = 5$, wykazuje rozległe *plateau* – widoczne na rys. 7.14a. Jednak Q_{limbus} wciąż jeszcze jest mniejszy od Q_{sklera} . Interpolując ten trend, można przypuszczać, że tuż poniżej wartości $Q_{sklera} = 4$ parametry materiałów rąbka i twardówki zrównują się: $Q_{limbus} = Q_{sklera}$.

Teraz im mniejsze Q_{sklera} , czyli im bardziej wiotka jest twardówka, tym mniejsza jest sztywność pierścienia rąbkowego potrzebna do zapewnienia modelowi samonastawności optycznej. Gdy $Q_{sklera} = 3$, materiał rąbka dopiero dla $Q_{limbus} = 3,5$ czyni zadość warunkowi (4.6) (w rozumieniu empirycznym oczywiście – funkcja B nie jest znana w postaci analitycznej) – rys. 7.14b. Moduł sprężystości rąbka przekracza wówczas moduł twardówki. Na kolejnych wykresach zamieszczonych na rys. 7.14c i 7.14d, Q_{sklera} zmniejsza się aż do osiągnięcia jedności, a wtedy wymagany do zachowania samonastawności $Q_{limbus\ kryt} = 2,7$.

Widać, że sztywność rąbka nie ma większego znaczenia dopóki twardówka zapewnia samonastawność dla $Q_{sklera} = 5$. Kiedy jednak Q_{sklera} schodzi wyraźnie poniżej 4, rolę twardówki przejmuje rąbek, wówczas do zachowania samonastawności wystarcza Q_{limbus} zbliżony do 3. Tak więc w oku samonastawnym rogówka zawsze musi być skrupowana na obwodzie pierścieniem usztywniającym, ale powinien to być pierścień *odkształcalny*. Sztywne zamocowanie modelu rogówki w rąbku całkowicie eliminuje samonastawność układu optycznego.

7.2.3.3. Parametry materiałów powłok oka

Twardówka i rąbek. Wykresy na rysunkach 7.13 i 7.14 zawierają dane dla trzech szczególnych przypadków samonastawności optycznej. W pierwszym model staje się samonastawny dla $Q_{sklera} = 5$ i $Q_{limbus} = 1$ (jednakowy materiał rąbka i rogówki), w drugim przypadku dla $Q_{sklera} = 4$ i $Q_{limbus} = 3,6$ (materiały rąbka i twardówki są prawie takie same), w trzecim dla $Q_{sklera} = 3$ i $Q_{limbus} = 3,5$ (moduł rąbka większy od modułu twardówki). Jeżeli przyjąć, że moduł sprężystości rąbka zawiera się pomiędzy modułami rogówki i twardówki – na to wskazują wyniki badań doświadczalnych (patrz podrozdz. 4.4.2 i 4.4.3) – to z tych rozwiązań wynika, że stosunek modułów twardówki i rogówki *musi* zawierać się w przedziale od 4 do 5.

Według Hjortdala [1996] moduł sprężystości rąbka w gałce ocznej jest tylko dwukrotnie większy od modułu rogówki, zatem w rzeczywistym oku samonastawność wymuszana jest przez twardówkę. Oczywiście tak jest w oku człowieka. W oku sokoła, opisanym w podrozdziale 1.5, rąbek jest sztywny, bo utworzony został z kości, jeśli zatem istnieje jakaś analogia z układem optycznym oka ludzkiego, to wynikałoby z tego, że samonastawność oka sokoła jest w pełni kontrolowana przez rąbek.

Przyjmując materiał $M2$ jako optymalny dla rogówki i uwzględniając rozwiązania zamieszczone na rys. 7.11, otrzymujemy materiał twardówki o parametrach

$$A_{sklera} = 200 \text{ Pa i } \alpha_{sklera} = 5 \cdot 61,6 = 308,$$

czyli moduł sprężystości materiału twardówki 5 razy większy od modułu rogówki (przy stałym naprężeniu – podrozdz. 4.4.2).

Materiał rąbka, dla $Q_{\text{limbus}} = 2$, miałby

$$A_{\text{limbus}} = 200 \text{ Pa i } \alpha_{\text{limbus}} = 2 \cdot 61,6 = 123.$$

Ta dwukrotnie większa wartość modułu rąbka, przyjęta za Hjortdalem, nie ma, jak się teraz wydaje, znaczącego wpływu na osiąganie przez model samonastawności optycznej dla $Q_{\text{sklera}} = 5$. Z wykresów zamieszczonych na rysunku 7.13 wynika, że tym aspektem optyki oka zawiaduje twardówka.

Podane liczby nie są wartościami parametrów A i α rzeczywistych materiałów twardówki i rąbka, odnoszą się one do powłoki zastępczej, jaką jest twardówka łącznie z wszystkimi tkankami wewnętrznymi, przede wszystkim z naczyniówką i ciałem rzęskowym. Zagadnienie to omówiono w podrozdziale 3.3.

Rogówka. Badania samonastawności optycznej modelu, opisane w podrozdziale 7.2, retrospektywnie weryfikują materiał rogówki. Za materiałem $M2$, podobnie zresztą jak za $M1$, wyznaczonym i w trzech symulacjach numerycznych (opisanych w rozdziale 7.1), testujących właściwości mechaniczne powłoki rogówkowo-twardówkowej, przemawiają również wyniki bieżącego rozdziału. Wykresy funkcji $B(p)$ dla modelu liniowo-sprężystego, opisane w naszej pracy [Asejczyk-Widlicka 2004], przypominają wierzchołek stosunkowo wąskiej paraboli. Samonastawność optyczna towarzysząca takiemu ekstremum, pojawia się zatem w wąskim przedziale ciśnienia. Obliczenia omawiane w tym rozdziale (dla modelu nieliniowego) pokazały natomiast, że stabilizacja położenia ogniska możliwa jest w całym fizjologicznym zakresie zmian ciśnienia. Sugeruje to, że konstrukcja gałki ocznej została dostosowana ewolucyjnie do tworzenia obrazu doskonale odpornego na zaburzenia powodowane fluktuacjami IOP i w dodatku, że w tym celu użyty został zbadany tu mechanizm, oparty na hipotezie samonastawności i silnie nieliniowym materiale. Obydwa materiały, $M1$ i $M2$, uznane ex aequo za optymalne po przeprowadzeniu testów opisanych w podrozdziałach 7.1.2 i 7.1.3, zapewniają w bieżącym eksperymencie *najszerszy* przedział ciśnienia, w którym model jest samonastawny, bo już od 8 mmHg, gdy tymczasem model z materiału $M4$ staje się samonastawny dopiero dla ciśnienia 16 mmHg. Ponadto dla modelu z materiału $M4$ samonastawność pojawia się, gdy $Q_{\text{sklera}} = 6$, tymczasem dla $M2$ i $M1$ – gdy $Q_{\text{sklera}} \leq 5$. Teza, że te dwa materiały są optymalne wspierana jest więc rezultatem eksperymentu przeprowadzonego przez Woo i in. [1972b], opisanego w podrozdziale 3.3.

Chociaż symulacja GAT nie dostarczyła konkretnych wartości parametrów materiałowych rogówki A i α , bo w podrozdziale 7.1.1 otrzymaliśmy jedynie funkcyjną zależność między nimi (gdy rośnie A – maleje α), to jednak materiały $M1$ i $M2$ również i w tym teście – GAT – wydają się optymalne. Ze względu na swoją szczególnie mocno zakrzywioną charakterystykę, przyczyniały się mianowicie do tego, że w fi-

zjologicznym przedziale ciśnienia wewnątrzgałkowego różnica $|p_G - p|$ była mniejsza niż dla pozostałych materiałów – to zagadnienie, zatytułowane *związek krzywej materiałowej $\sigma(\varepsilon)$ z funkcją $p_G(p)$* , omawiane było w podrozdziale 7.1.4.1. Każdy zatem z czterech przeprowadzonych testów modelu wskazuje na materiały $M1$ i $M2$ jako optymalne dla rogówki, a nawet wynika z nich, że im materiał jest bardziej nieliniowy, tym lepiej. Rezultat ten jest dlatego interesujący, że tradycyjne badania materiałowe, wykonywane na próbkach wycinanych z powłok oka w postaci pasków, prowadzą zwykle do znacznie mniej zakrzywionych charakterystyk. Mimo że parametry $M1$: $A = 0,0001$ MPa i $\alpha = 83$ mieszczą się jeszcze (choć z trudem) w przedziale uzyskanym doświadczalnie przez Nasha i in. [1982], to jednak znajdują się na skraju tego przedziału (podrozdz. 3.2.1). W próbie rozciągania łatwo jest przeoczyć tę początkową fazę wykresu.

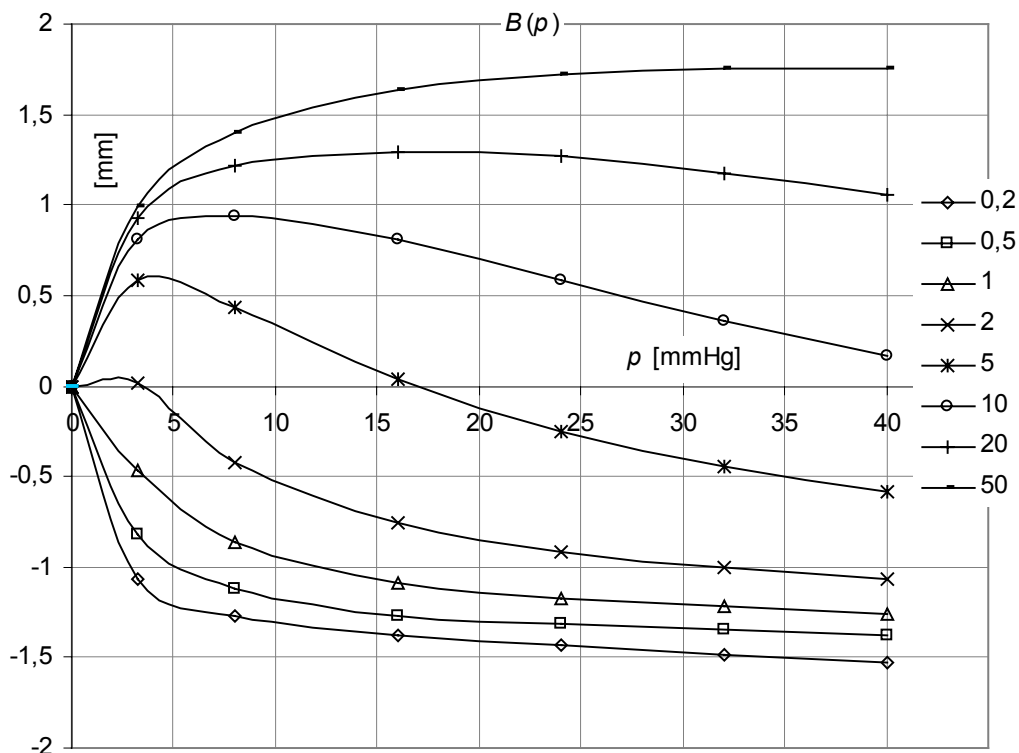
7.2.3.4. Sprężenie optyczno-mechaniczne

Analizując przedstawione rezultaty, trudno oprzeć się wrażeniu, że zarówno geometria gałki ocznej, jak typ charakterystyki materiałowej poszczególnych jej stref, a także wzajemne stosunki ich sztywności – czyli parametry stricte mechaniczne – są ze sobą tak zestrojone, by optymalnie wypełniać *funkcje optyczne* oka. Wyniki obliczeń pokazują, że parametry strukturalne gałki ocznej (czyli jej mechanika) podporządkowane są optyce. Konsekwencje tej tezy są niezmiernie istotne dla biomechaniki oka. Gałka oczna nie jest strukturą mechaniczną, której wymiary i materiały są przypadkowe (ich wartości nie mogą być przyjmowane dowolnie podczas projektowaniu modelu). Pozostają one w tak ścisłej zależności, że można mówić o sprężeniu optyczno-mechanicznym; badanie funkcji optycznych oka dostarcza informacji o jego mechanice, a wiedza o jego mechanice przekłada się na wynikające z niej funkcje optyczne. Dzięki temu zyskujemy nowe, interesujące narzędzie identyfikacji struktur oka. Dobrym tego przykładem jest stosunek modułów sprężystości materiałów twardówki i rogówki $E_{sklera}/E_{stroma} = 5$, otrzymany tutaj jako warunek stabilizacji ogniska optycznego w ekspandującej gałce ocznej. W pracy [Asejczyk-Widlicka 2006] wykazujemy, że Q_{sklera} zbliżone do 5 pojawia się nawet w modelu liniowym, choć w nieco innym aspekcie jego funkcjonowania. Innym przykładem wpływu optyki na strukturę modelu są warunki nakładane na funkcje opisujące profil rogówki [Asejczyk-Widlicka 2004].

W kontekście tych obliczeń stosunek wartości modułów twardówki i rogówki nieco mniejszy od pięciu, otrzymany z pomiaru *in vitro* przez Woo i in. [1972b], wydaje się wynikiem nieprzypadkowym. Ten rezultat mocno wspiera tezę o sprężeniu optyczno-mechanicznym w oku, można nawet powiedzieć, że teraz zyskuje on fizykalne uzasadnienie.

7.2.4. Alternatywny model samonastawności optycznej

Anatomia gałki ocznej kryje inne jeszcze rozwiązania dla mechanizmu samonastawności. W oku sokoła, na pograniczu rogówki i twardówki, występuje ewidentnie wydzielony pierścień rąbkowy – sztywna struktura kostna, całkowicie uniemożliwiająca zmianę średnicy. Analiza przekroju osiowego takiego oka, pokazana na rys. 1.1, sugeruje jego związek z układem optycznym, właśnie z samonastawnością. Duża sztywność pierścienia kostnego (względem pozostałych tkanek oka) kwalifikuje go do kategorii materiałów liniowo-sprężystych. Czy taki rąbek, liniowy, jest przypadkiem wyjątkowym między gatunkami?



Rys. 7.15. Funkcje odległości ogniska od dna oka $B(p)$ dla różnych wartości modułu Younga materiału rąbka, wyrażonego w MPa. Moduł $E = 20$ MPa czyni model samonastawnym dla $p = 16$ mmHg

W poprzednich rozdziałach badane były warunki występowania samonastawności optycznej modelu wykonanego całkowicie z materiałów nieliniowych. Podstawowy wariant samonastawności został osiągnięty dla materiału rąbka o parametrach, takich jak dla materiału rogówki. Zgodnie z przyjętymi założeniami tkanka rąbka zakwalifi-

kowana została do tej samej klasy materiałów co rogówka i twardówka. Choć bardzo prawdopodobna, taka ewentualność wcale nie jest oczywista i jedyna. Rąbek tworzy jedną, anatomiczną całość ze zwieraczem mięśnia rzęskowego – aktywną strukturę zdolną do zmiany swojej sztywności rozciągania. Z tego względu uśrednione parametry mechaniczne tej struktury mogą ją odróżniać *jakościowo* od pozostałych tkanek oka. W szczególności nie można wykluczyć, że zastępczy moduł sprężystości rąbka jest u człowieka stały, niezależny od poziomu naprężenia. Żadne, znane wyniki badań, nie przeczą tej hipotezie.

Inny powód, uzasadniający pomysł badania warunków występowania samonastawności optycznej w modelu z liniowo-sprężystym rąbkiem dostarcza nowa technika korygowania refrakcji rogówki. Polega ona na wszczepieniu w rogówkę wstępnie napiętego, sprężystego pierścienia, okalającego źrenicę, co sprawia, że zmienia się krzywizna wierzchołka. W przyszłości tego rodzaju zabiegi mogą zostać użyte w wielu innych modyfikacjach powłoki twardówkowo-rogówkowej, także wobec rąbka. Już dzisiaj podejmowane są próby korygowania w ten sposób refrakcji oka krótkowzrocznego.

Na rysunku 7.15 wykreślono obliczone położenie ogniska $B(p)$. Wyniki uzyskane zostały dla modelu optymalnego: rogówka z materiału $M2$, $Q_{\text{sklera}} = 5$ (podrozdz. 7.2.1) oraz rąbek z materiału o (stałym) module E . Przyjmuje on kolejno wartości od 0,2 MPa do 50 MPa. Pozostałe parametry – wymiary, zamocowanie i podział na elementy skończone, a także ustawienia systemu Cosmos/M podczas rozwiązania – są takie same, jak w poprzednich rozdziałach.

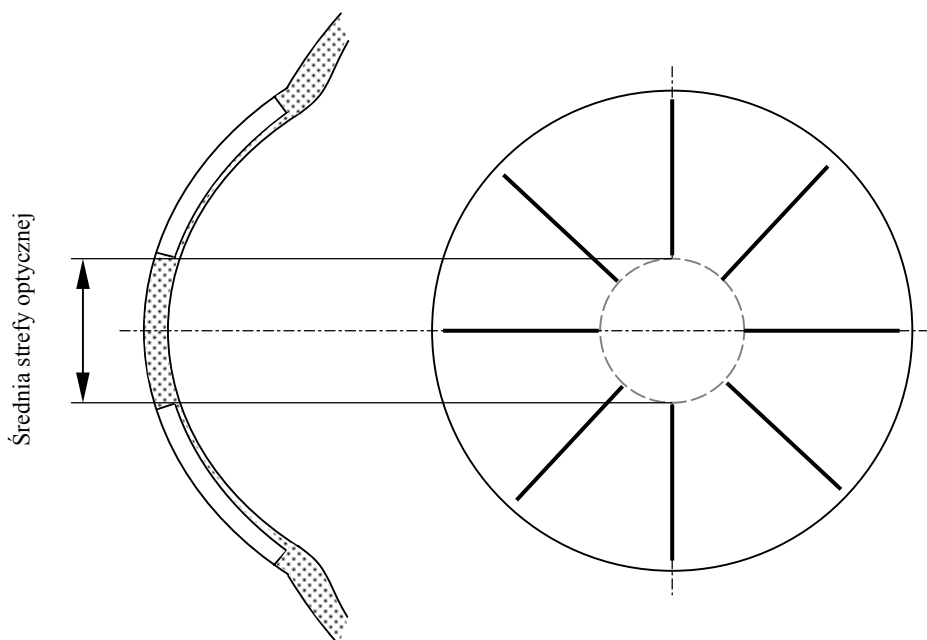
Dyskusja wyników. Funkcje modelu z rąbkiem o module Younga 0,2 lub 0,5 MPa są najbardziej podobne do funkcji modelu uznanego za optymalny (podrozdz. 7.2.3.3). Mimo to, dla małych wartości modułu E , funkcja $B(p)$ nie wykazuje minimum świadczącego o samonastawności optycznej modelu. Przesuwanie się ogniska jest jednak coraz mniejsze, w miarę wzrostu ciśnienia p . Dalsze powiększanie modułu E prowadzi do coraz bardziej nachylonych wykresów, oddalając możliwość osiągnięcia samonastawności dla minimum funkcji $B(p)$.

Od wartości $E = 2$ MPa na wykresie $B(p)$ pojawia się maksimum, początkowo w bardzo wąskim przedziale ciśnienia i dla małych jego wartości. Kiedy moduł E osiąga wartość 20 MPa, model staje się samonastawny dla ciśnienia nominalnego $p = 16$ mmHg. Właściwość tę wykazuje w dużym zakresie ciśnienia, choć nie tak dużym jak dla rąbka nieliniowego (podrozdz. 7.2.2). Także bezwzględna wartość przesunięcia ogniska jest porównywalna. Zasadnicza różnica tkwi w tym, że samonastawność zachodzi dla *maksimum* funkcji $B(p)$. Badany wcześniej model z rąbkiem nieliniowym „nie korzystał” z tej możliwości, ale – na tle przeprowadzonego właśnie eksperymentu – tym wyraźniej widoczna staje się niezwykła skuteczność realnego oka, ponieważ samonastawność, zachodząca dla minimum funkcji $B(p)$, zachowuje ono *w całym*, obserwowanym u człowieka, zakresie ciśnienia wewnątrzgałkowego.

7.3. Rogówka po keratonomii radialnej – materiał błony Descemeta

7.3.1. Parametry kliniczne keratonomii radialnej

Rozpowszechnione obecnie techniki korekcji laserowej, takie jak PRK lub LASIK, stosunkowo słabo modyfikują pola naprężeń i przemieszczeń w powłoce rogówkowej. Wynika to z łagodnego „rzeźbienia” profilu rogówki, bez pozostawiania ostrych, wewnętrznych naroży. Pod tym względem keratonomia radialna (keratonomia promieniasta) różni się od nich zdecydowanie. Standardowo podczas zabiegu, nastawionego na osiowosymetryczną zmianę refrakcji, wykonywanych jest osiem promieniowo ułożonych nacięć rogówki, od strefy optycznej do rąbka, rozłożonych równomiernie na obwodzie. Schemat rogówki po tym zabiegu pokazany jest na rys. 7.16.



Rys. 7.16. Zasadnicze szczegóły geometrii modelu keratonomii radialnej

Strefa optyczna obejmuje wierzchołek rogówki w odległości do 1,5 mm od osi. Promienie 1,75 lub 2 i więcej milimetrów przyjmowane są w chirurgii refrakcyjnej z malejącą częstością. Nacięcia są więc długie, przekraczają 4 mm, jednocześnie też są głębokie, osiągają 95–100% grubości rogówki w osi (CCT). Zwiększanie liczby nacięć nie polepsza znacząco skuteczności zabiegu – zmiana refrakcji jest zaledwie 10% większa po wykonaniu szesnastu nacięć. Największy wpływ na tę zmianę ma średnica

strefy optycznej – tym większy, im jest mniejsza. Z tego właśnie powodu preferowana jest tak mała jej wartość. Przy słabym oświetleniu średnica źrenicy bywa nawet większa od 3 mm, dlatego w keratotomii radialnej ta wartość przyjmowana jest jako minimalna średnica strefy optycznej. Planując zmianę refrakcji, chirurg bierze pod uwagę także promień krzywizny rogówki – większy promień, to mniejsza zmiana.

Rezultat operacji zależy także od parametrów materiałowych stromy, ale nie występują one jawnie w lekarskiej prognozie przedoperacyjnej. Zamiast nich brane są pod uwagę takie czynniki, jak stopień krótkowzroczności pacjenta, jego wiek, a nawet płeć, zatem parametry o drugorzędym znaczeniu w chirurgii laserowej. Konieczność ich uwzględniania jest dobitnym sygnałem zróżnicowania materiału stromy pośród pacjentów. Oznacza to, że oko o wymiarach kalibracyjnych, zdefiniowanych w tonometrii aplanacyjnej, nie jest jeszcze okiem przeciętnym, bo nawet przy wymiarach kalibracyjnych widoczny jest w praktyce klinicznej rozrzut wyników (na przykład pomiaru IOP lub pooperacyjnej zmiany refrakcji) powodowany zmiennością materiału rogówki.

Chirurg, planując skutek operacji, opiera się niemal wyłącznie na wymienionych czynnikach [Gierek-Łapińska 1993]. Przewidywana zmiana mocy optycznej obliczana jest następująco [Rowsey i in. 1983]:

$$\Delta P = 0,071 \times \text{wiek [w latach]} + 0,46 \times \text{krótkowzroczność [w dioptriach]}, \quad (7.5)$$

przy tym wiek musi być nie mniejszy niż 21 lat, a krótkowzroczność kwalifikująca do zabiegu powinna zawierać się w przedziale od -2 do -11 dioptrii [Gierek-Łapińska 1993]. Można wyznaczyć stąd średnią prognozowaną zmianę refrakcji, przyjmując przeciętny wiek pacjenta 40 lat i krótkowzroczność 6 dioptrii (czyli korygowaną soczewką -6 D), zatem

$$\Delta P = 0,071 \cdot 40 + 0,46 \cdot 6 = 2,84 + 2,76 = 5,6 \text{ dioptrii.}$$

Zmiana ta uzyskiwana jest przy standardowym nacięciu rogówki. Wynika stąd, że rezultat operacji w przypadku pacjenta 21-letniego, z krótkowzrocznością 2 dioptrie, będzie inny niż po zoperowaniu pacjenta 60-letniego, z krótkowzrocznością 11 dioptrii. Przedział pooperacyjnej zmiany mocy optycznej, wyznaczony dla tych skrajnych przypadków, okazuje się całkiem duży:

$$\text{od } -2,4 \text{ do } -9,3 \text{ dioptrii.} \quad (7.6)$$

Nasuwa się tu oczywiste spostrzeżenie, że wpływ wieku pacjenta i wpływ krótkowzroczności jest porównywalny, zarówno co do wartości, jak i trendu, gdyż obliczony skutek operacji, 5,6 dioptrii w przypadku przeciętnego pacjenta, składa się z dwu prawie jednakowych liczb.

Obliczona wartość, około 5 dioptrii, podana jest w pracy [Rowsey i in. 1983] jako maksymalna pooperacyjna zmiana mocy optycznej, pośród najczęściej obserwowanych w warunkach klinicznych. Eksperymenty wykonywane na gałkach ocznych po-

branych ze zwłok, wskazują na większy zakres, bo od 6 do 11 dioptrii [Salz i in. 1981]. Zamieszczone w tej pracy wyniki badań histopatologicznych ujawniły ponadto znaczące różnice w głębokości nacięć, co jest mankamentem charakterystycznym dla keratotomii radialnej, potwierdzanym przez innych badaczy [Jester i in. 1981].

Znaczenie poszczególnych parametrów branych pod uwagę przed zabiegiem jest przedmiotem licznych badań doświadczalnych, których przykładem mogą być dane przedstawione w opracowaniu [Lynn i in. 1987]. Wielorakie analizy regresyjne wyników pochodzących od 411 pacjentów wskazują, że średnica strefy optycznej, wiek i głębokość nacięć są najważniejszymi parametrami decydującymi o zmianie refrakcji. Jednocześnie z badań tych wynika, że nie mają istotnego znaczenia płeć, średnia keratometryczna moc optyczna centrum rogówki, CCT, średnica rogówki, IOP, oraz sztywność gałki ocznej R_F (podrozdz. 6.2).

Liczebność pozycji literaturowych dotyczących keratotomii radialnej osiągnęła maksimum w latach osiemdziesiątych dwudziestego stulecia. Obecnie ta odmiana chirurgii refrakcyjnej została zastąpiona przez techniki laserowe. Ze względu na duże zmiany geometrii rogówki, powodowane jej nacinaniem, nabyte doświadczenia mogą być pomocne w próbach identyfikacji parametrów modelu gałki ocznej. W dalszych podrozdziałach przyjrzymy się rozwiązaniom modelu keratotomii radialnej, dzięki którym możliwe jest oszacowanie parametrów materiałowych błony Descemeta. Jest ona stosunkowo słabo poznana w porównaniu ze stromą i twardówką. Dane eksperymentalne na jej temat są skąpe i bardzo niepewne. Przykładem mogą być prace Maurice [Maurice 1988, Jue i Maurice 1986]. Chociaż autor ten wykonał kilka interesujących doświadczeń i próbował określić parametry materiału błony Descemeta, wszystko co z nich wynika sprowadza się niestety do opisu jakościowego. Opis ten sugeruje, że rola błony Descemeta nie polega na zwiększaniu sztywności rogówki jako powłoki, zabezpiecza raczej stromę przed perforacją przy skaleczeniach. Można się więc spodziewać, że podczas próby rozciągania będzie ona ulegać zniszczeniu przy znacznie większych odkształceniach niż stroma. Wcale to jednak nie musi oznaczać dużej wartości modułu sprężystości podłużnej, jak sugeruje część badaczy. Wytrzymałość materiału i moduł sprężystości to parametry niezależne.

7.3.2. Anizotropia rogówki

Symulacja numeryczna keratotomii radialnej sięga peryferii możliwości modelu *izotropowego*, prezentowanego w tej monografii. Charakterystyczna dla rogówki struktura warstwowa oraz stosunkowo duże odkształcenia stromy, towarzyszące temu zabiegowi, czynią zadanie trudniejsze niż się z pozoru wydaje. Rodzaj anizotropii materiału stromy odbiega zasadniczo od typowych przypadków, do jakich mechanicy są przyzwyczajeni w projektowaniu konstrukcji technicznych. Początkowo, przed zabiegiem, jest to zwykła ortotropia, opisana w podrozdziale 2.1, i pozostaje taką do chwili wykonania nacięcia.

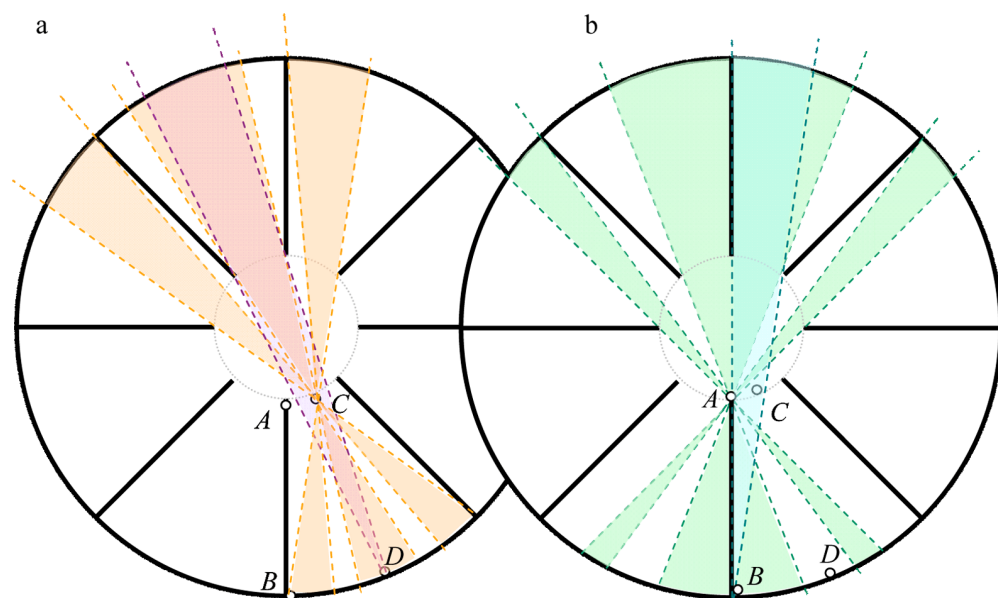
To, co się dzieje dalej z materiałem kojarzy się bardziej z opisem *pola przemieszczeń konstrukcji* niż z *odkształceniem ośrodka ciągłego*: anizotropia uszkodzonej warstwy stromy zmienia się bardzo mocno i obejmuje *całą* jej objętość, niezależnie od miejsca przerwania włókien kolagenowych. Parametry i kierunki główne anizotropii w takim materiale stają się zależne od geometrii nacięcia, a także od współrzędnych przestrzennych. Nie ma żadnej pewności, że próba wykorzystania opracowanych dla jednorodnego ośrodka ciągłego „klasycznych” typów anizotropii, a nawet modeli powłok warstwowych, doprowadzi tu do bardziej wiarygodnych rozwiązań niż z użyciem zastępczego materiału izotropowego, ponieważ w keratotomii materiał stromy staje się faktycznie *konstrukcją* i na użytek obliczeń numerycznych wymaga specjalnego zaprojektowania.

Zamiast więc *projektować* tak egzotyczny ośrodek anizotropowy, z pewnością niełatwy do identyfikacji doświadczalnej, można w obszarze stromy, zawierającym przecięte włókna kolagenowe, wprowadzić materiał *izotropowy* o parametrach uwzględniających osłabienie tego obszaru, wynikające z istnienia nacięć. Prostota tego modelu materiału, mimo braku wierności w odtworzeniu materiału rzeczywistego, może rekompensować straty, jakie poniesiemy na jakości rozwiązania numerycznego z powodu trudności w ustaleniu wszystkich parametrów materiału ośrodka anizotropowego (ten rodzaj anizotropii zależy nie tylko od obrotu układu współrzędnych w wybranym punkcie ośrodka, ale także od położenia tego punktu względem wykonanego nacięcia).

Stroma złożona jest z setek warstw (opis w podrozdz. 2.1), z których każda powstała z równolegle ułożonych, ciągłych włókien; kierunki ułożenia warstw są przypadkowe w centralnej strefie rogówki. Przyjmijmy uproszczenie, że tak właśnie jest zbudowana stroma w całej swojej objętości, do samego rąbka. Po zabiegu keratotomii dzieli się ona na dwie warstwy: zewnętrzną, o stałej grubości g równej głębokości nacięcia, oraz na wewnętrzną, nieuszkodzoną nacięciami, o zmiennej grubości – tym większej, im dalej od osi (rys. 7.18). Parametry materiału warstwy wewnętrznej pozostają niezmienione po zabiegu, natomiast zewnętrzna część stromy o grubości g nie może dłużej zachowywać dotychczasowych parametrów materiałowych, jej średnia sztywność rozciągania staje się teraz znacznie mniejsza, bo większość tworzących ją włókien kolagenowych została przecięta.

Osłabienie materiału naciętej warstwy stromy i związana z tym anizotropia mechaniczna jest teraz funkcją położenia na powłoce rogówki. Na rysunku 7.17 zilustrowano tę anizotropię w czterech wybranych punktach naciętej rogówki. Przez punkt A (rys. 7.17 b) przechodzą trzy wiązki ciągłych włókien, ich liczba jest proporcjonalna do sumy kątów, jakie tworzą brzegi każdej z trzech wiązek. Na drugim końcu tego samego nacięcia, po prawej jego stronie, znajduje się punkt B ; kąt utworzony przez wychodzącą z niego wiązkę włókien ciągłych jest mniejszy. Podobne rezultaty otrzymamy dla punktów C i D – rys. 7.17a. Ogólnie gęstość włókien ciągłych jest tym mniejsza, im punkt jest bardziej oddalony od osi optycznej. W środku rogówki

materiał w ogóle nie ulega osłabieniu, bo wszystkie włókna przechodzące przez osłógówkę pozostają nienaruszone.



Rys. 7.17. Rogówka po wykonaniu ośmiu promieniowych nacięć. Obszary barwne wyznaczają dla czterech wybranych punktów zakresy kątowe, w których włókna kolagenowe stromie nie zostały przecięte – po lewej stronie dla punktów C i D, po prawej dla punktów A i B

Przyjmijmy, że z powodu wykonanych nacięć o zmianie parametrów materiału w wybranym punkcie na powierzchni rogówki (średnio, na całej jej grubości) decyduje parametr gęstości włókien

$$w = \frac{L-n}{L}, \quad (7.7)$$

L – liczba wszystkich włókien przechodzących przez ten punkt,

n – liczba włókien przeciętych, przechodzących przez punkt.

Ponieważ trudno tu zdefiniować „punkt”, a także samo kryterium „przechodzenia włókna przez punkt”, wygodniej będzie posługiwać się liczbą lamelli, zamiast liczbą włókien. Pamiętajmy, że kierunki włókien są skwantowane orientacją lamelli, wystarczy zliczać same lamelle. Wówczas L oznaczałoby ich łączną liczbę (w całej stromie), a n byłoby liczbą lamelli, których włókna zostały przecięte. Liczba lamelli w stromie wynosi od 300 do 500, zatem ich orientacja zmienia się co około jeden stopień kątowy (jeżeli rozkład jest równomierny, a tak właśnie założono).

Założenie, że liczba włókien ciągłych w punkcie, $(L - n)$, jest proporcjonalna do kąta φ wiązki włókien (liczonego tylko raz, po jednej stronie punktu), oznacza, że

$$w = \frac{\varphi}{\pi}, \quad (7.8)$$

gdzie φ jest sumą kątów wszystkich ciągłych wiązek w punkcie.

Dla czterech punktów oznaczonych A, B, C i D na rys. 7.17, z których A i C znajdują się w odległości 1,75 mm od osi, a B i D w odległości 6 mm od osi, wynik obliczeń jest następujący:

$$w_A = 0,34, w_B = 0,04, w_C = 0,30, w_D = 0,04. \quad (7.9)$$

Zastępczy ośrodek izotropowy materiału stromy. W jednoosiowym stanie naprężenia równanie konstytutywne, omówione w podrozdziale 4.4.1, ma postać:

$$\sigma = A(e^{\alpha \epsilon} - 1). \quad (7.10)$$

Jeżeli na przekroju A_0 pręta pryzmatycznego, obciążonego jedynie siłą normalną N , jest L włókien prostopadle do tego przekroju ułożonych, to naprężenie średnie

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^L F_i}{\sum_{i=1}^L A_i} = \frac{N}{A_0}. \quad (7.11)$$

F_i jest siłą w i -tym włóknie. To, że przekroje włókien A_i całkowicie wypełniają przekrój kompozytu A_0 , jest uproszczeniem oznaczającym, że matryca nie przenosi żadnych obciążeń. Po przecięciu n włókien siła N , dotychczas przenoszona przez L włókien, rozłoży się na mniejszą ich liczbę $(L - n)$. We włóknie ciągłym jest teraz siła

$$F_i^* = \frac{N}{L - n} \quad (7.12)$$

i naprężenie

$$\sigma_{(i)} = \frac{F_i^*}{A_i} = \frac{N}{A_i(L - n)}. \quad (7.13)$$

Z porównania siły N w (7.11) i (7.13) mamy

$$\sigma A_0 = \sigma_{(i)} A_i (L - n),$$

stąd

$$\sigma_{(i)} = \frac{L}{L - n} \sigma. \quad (7.14)$$

Temu podwyższonemu naprężeniu odpowiada odkształcenie

$$\varepsilon = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{A} \frac{L}{L - n} \sigma + 1 \right). \quad (7.15)$$

Wyrażenie (7.15) jest funkcją odwrotną do (7.10), w którym dokonano podstawienia (7.14). Wynika stąd, że

$$\sigma = \frac{L - n}{L} A (e^{\alpha \varepsilon} - 1) = w A (e^{\alpha \varepsilon} - 1). \quad (7.16)$$

Równanie konstytutywne (7.16) opisuje ośrodek, w którym parametr sprężysty A zmienił się (zmałał) w stopniu w , opisanym wyrażeniem (7.7). Takie zmniejszenie liczby włókien ciągłych jest więc równoznaczne ze zmniejszeniem modułu sprężystości podłużnej ośrodka, zdefiniowanego w podrozdziale 4.4.2. Nie odbywa się to jednak przy stałym naprężeniu, jak w badanym tam przypadku, a przy *stałym odkształceniu*, gdyż zmianie ulega nie wykładnik α , lecz współczynnik A w równaniu (7.10).

Przedstawiona próba uproszczonego opisu ośrodka izotropowego, jako substytutu naciętej stromy, daleka jest od ścisłości formalnej. Najgrubsze przyjęte uproszczenie czyni materiał izotropowym, chociaż po przecięciu włókien większa część objętości stromy do głębokości g staje się faktycznie anizotropowa. Można to uproszczenie interpretować jak zamianę włókien kolagenowych stromy na izotropowe warstwy, „równoległe” do powierzchni środkowej rogówki, które znikają, gdy włókno zostaje przecięte. Pomiedzy nacięciami promieniowymi, w peryferyjnej strefie rogówki, nośność materiału i jego sztywność maleją niemal do zera w kierunkach zbliżonych do obwodowego i to w bardzo szerokim przedziale kątowym, zbliżonym do π . Przykładem jest punkt D na rysunku 7.17, dla którego, wg (7.9), 96% włókien, obejmujących przedział kątowy $0,96\pi$, zostało przecięte (i w tych kierunkach naprężenie jest już stałe, równe zero). Fakt ten (moduł sprężystości niezależny od kierunku) częściowo uzasadnia pomysł zastąpienia włókien warstwami izotropowymi. Natomiast w kierunku południkowym parametry materiału w punkcie D niemal nie ulegają zmianie. (Pamiętajmy jednak, że te wnioski wynikają z przyjętej idealizacji struktury stromy.

W rzeczywistości uporządkowanie włókien w okolicy rąbka jest nieco inne niż w centrum, większość peryferyjnych włókien układa się równolegle do obwodu, zatem po ich przecięciu ośrodek rzeczywisty nie będzie wykazywał aż tak dużej anizotropii.)

Zauważmy, że znacznie większa jest objętość stromy, w której dominują małe wartości współczynnika w , pomiędzy punktami A , B , C i D zbliżone do 0,1 (7.9). Im bliżej osi rogówki znajduje się punkt, tym większa jest w nim wartość tego współczynnika, ale nawet na brzegu strefy optycznej, 1,75 mm od osi, jego wartość osiąga zaledwie 0,3. Rąbek położony jest niemal cztery razy dalej, więc objętość pierścieniowej strefy z nacięciami jest 16 razy większa od objętości strefy optycznej. Z szacunkowych obliczeń wynika, że w całej objętości stromy średnia wartość

$$w \approx 0,13. \quad (7.17)$$

Rzeczywista wartość w jest zapewne większa niż obliczona według (7.8) i podana w (7.9), ponieważ pozostają jeszcze oddziaływania między włóknami oraz sztywność matrycy (substancji podstawowej) pominięte podczas wyprowadzania współczynnika w .

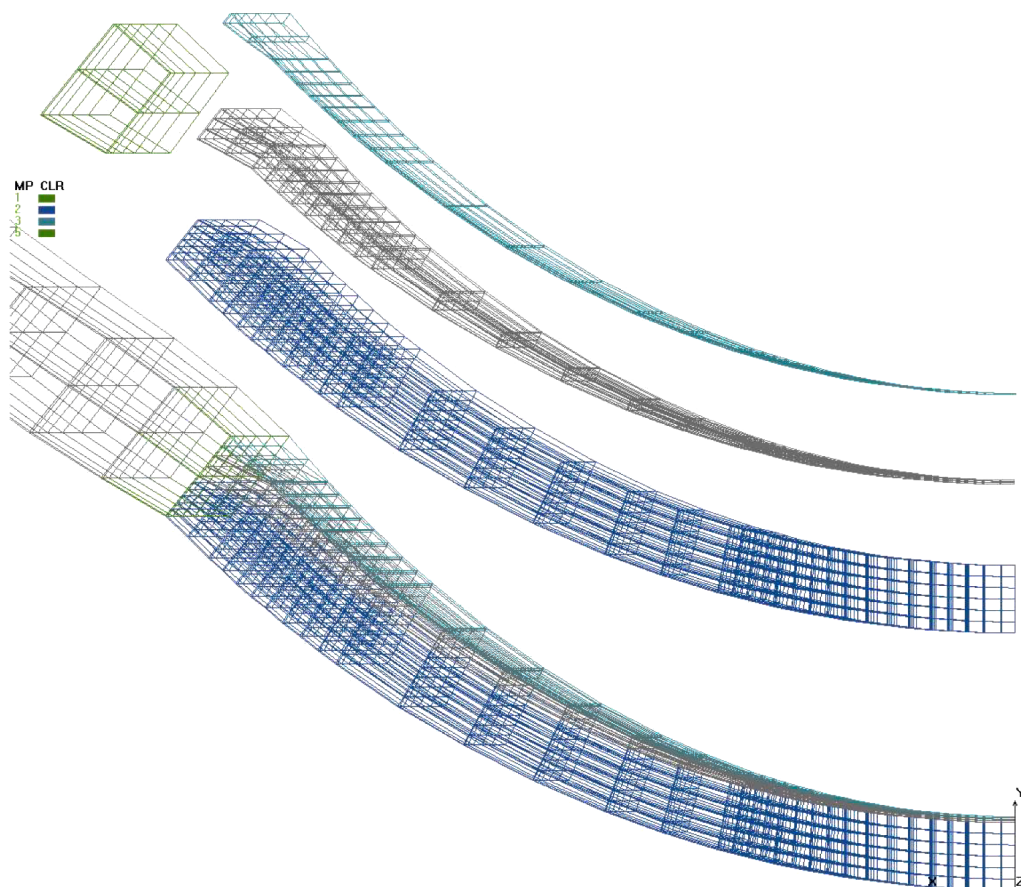
Trudno ocenić jakość proponowanego tu modelu materiału stromy. Jego użyteczność i skuteczność potwierdzić może jedynie porównanie rozwiązań modelu keratotomii radialnej z rezultatami obserwowanymi w praktyce klinicznej. Ogólnie biorąc (nie tylko w zastosowaniu do keratotomii radialnej), nie wydaje się słuszną skłonność do czynienia z modelu wiernej kopii rzeczywistości, szczególnie gdy chodzi o materiał. Na przykład model ośrodka ciągłego lub izotropowego jest zwykle idealizacją dość odległą od większości realnych materiałów, do których jest on stosowany. Dobrą ilustracją jest tu uproszczenie przyjęte przez Orssengo i Pye, opisane w podrozdziale 7.1.4.1, punkt *związek krzywej materiałowej* $\sigma(\varepsilon)$ z funkcją $p_G(p)$. Założenie, że moduł Younga E dla powłok oka jest proporcjonalny do p , wydaje się być dopuszczalne jedynie wtedy, gdy stan naprężenia jest jednorodny. Aplanacja wierzchołka rogówki w tonometrii z pewnością do takich nie należy. Mimo to rezultat, jakim jest moduł $E = 0,37$ MPa, uzyskany przez autorów dzięki temu uproszczeniu, jest jednym z najbardziej wiarogodnych w literaturze.

7.3.3. Symulacja numeryczna keratotomii radialnej

Do badań użyjemy modelu trójwymiarowego opisanego w podrozdziale 4.5. Geometrycznie spełnia on postulaty Gullstranda, tab. 4.1. Rogówka wykonana została z materiału M_2 , tabela 7.3. Materiały pozostałych obszarów modelu pozostają w ścisłym związku z materiałem rogówki, spełniając warunki przyjęte w podrozdziale 4.4. Tak więc materiał twardówki opisany jest parametrem $Q_{\text{sklera}} = 5$, materiał rąbka parametrem $Q_{\text{limbus}} = 2$ (co nie zmienia warunków samonastawności optycznej określonych w podrozdziale 7.2.2). Jediną niewiadomą, będącą obecnie przedmiotem obliczeń, jest materiał błony Descemeta, opisywany za pomocą ilorazu Q_{Descemet} , (4.15a).

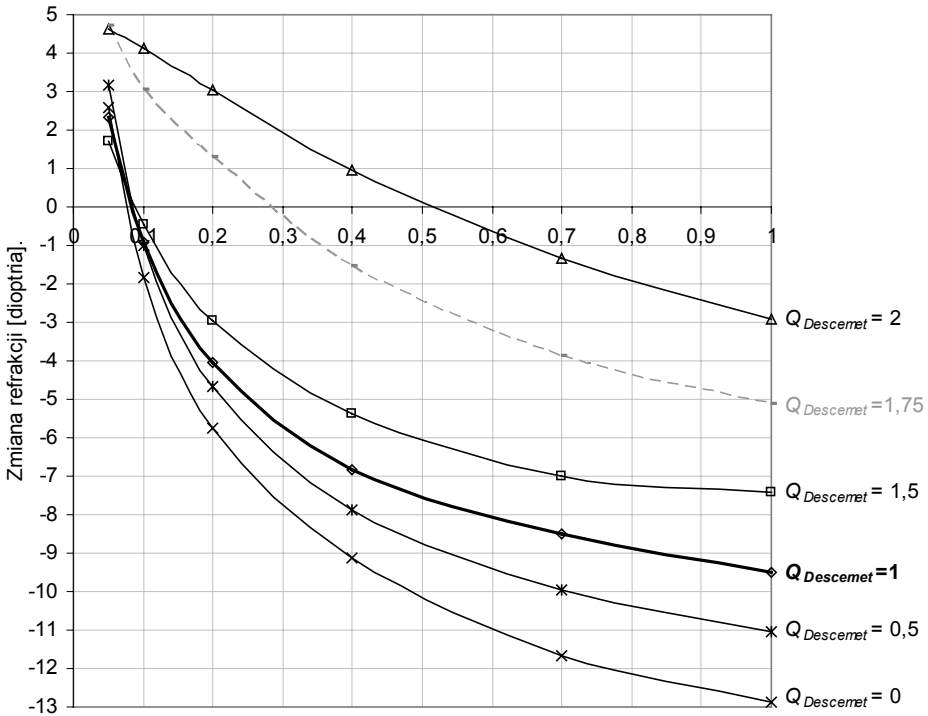
Warstwa elementów skończonych, symulująca obecność błony Descemeta, jest stałej grubości, równej 0,01 mm (rys. 7.18). Średnica strefy optycznej wynosi 3,5 mm, głębokość nacięcia $g = 0,50$ mm (96% CCT), kończy się ono 0,2 mm przed rąbkem.

Program obliczeń obejmuje pięć serii rozwiązań, każda seria z ustalonym parametrem Q_{Descemet} , przyjmującym kolejno wartości od 0 do 2, co 0,5. Na początku każdej serii rozwiązywany jest model odniesienia, z rogówką nienacinaną, obciążoną $p = 16$ mmHg (stan przed zabiegiem). Nazwijmy ten wynik rozwiązaniem bazowym. Całej objętości stromy przypisywany jest wówczas materiał M2 – w równaniu (7.16) parametr materiałowy A mnożony jest przez $w = 1$. Warunki brzegowe sprowadzają się do odebrania *wszystkim* węzłom umieszczonym na powierzchniach bocznych klina możliwości przemieszczenia prostopadłego do tej powierzchni. Zagadnienie to omawiane jest w podrozdziale 4.5.1.



Rys. 7.18. Obszary materialne rogówki: u góry błona Descemeta, niżej warstwa stromy nieuszkodzona nacięciami, na zewnątrz rogówki obszar stromy naciętej na stałej głębokości g . Po lewej stronie – obszar rąbka (zielony). Dolny wykres jest sumą tych obszarów

Następnie rozwiązywane są modele z rogówką po keratotomii radialnej. Wykonanie nacięcia polega na usunięciu części więzów na jednej z powierzchni bocznych klina (usunięcie ich po obu stronach klina oznaczałoby 16 nacięć). Ten warunek brzegowy zilustrowany jest na rys. 4.5. Jednocześnie materiał stromy do głębokości nacięcia g modyfikowany jest według równania (7.16), co ma imitować w -krotne zmniejszenie parametru A , spowodowane przecięciem części włókien.



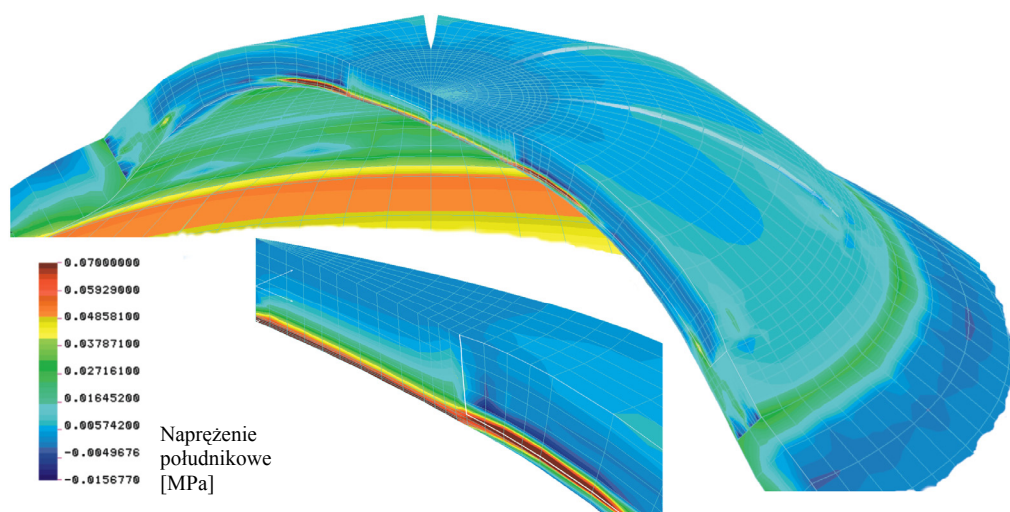
Rys. 7.19. Zmiana mocy optycznej po keratotomii radialnej, w zależności od parametru w obszaru stromy naciętego do głębokości 0,5 mm

Rogówka składa się zatem z trzech obszarów materialnych: od wewnątrz błona Descemeta, w środku warstwa stromy z materiału $M2$ (jej grubość zwiększa się z odległością od osi), na zewnątrz warstwa stromy stałej grubości g , z materiału osłabionego współczynnikiem w . Parametr ten przyjmuje w badanej serii, dla ustalonego materiału błony Descemeta, wartości rosnące od $w = 0,05$ do $w = 1$. Obliczone zmiany mocy optycznej zostały połączone w ciągły wykres zależności funkcyjnej od współczynnika gęstości włókien w . Wyniki zestawione są na rys. 7.19.

Kształt modelu po deformacji widać na kolejnym rysunku 7.20. Obraz jest montażem graficznym ośmiu widoków obliczanego klina rogówki o kącie 22,5 stopnia (fragment w dolnej części rysunku, także obraz modelu przedstawiony na rys. 4.5), po kolejnych

transformacjach obrotowych i odbiciach lustrzanych. Przemieszczenia wykreślone są w skali 1:1, $Q_{\text{Descemet}} = 1$, $w = 1$ (ostatni punkt pogrubionego wykresu na rys. 7.19).

Wyeksponowane na rysunku 7.20 nacięcia na przekroju osiowym rogówki, widoczne są jako niebieskie obszary obniżonego naprężenia południkowego, położone poza strefą optyczną (poza spłaszczoną częścią rogówki w strefie centralnej). Ponieważ głębokość nacięcia jest stała, w punkcie najbardziej oddalonym od osi pozostaje jeszcze znaczna część grubości rogówki zdolna do przenoszenia obciążenia. Miejsce to na przekroju zaakcentowane jest żółtą plamą koncentracji naprężenia. Największe naprężenia występują pod dnem nacięcia od strony osi, w tym też obszarze pojawiają się największe przemieszczenia i to ten właśnie obszar najmocniej wpływa na zmianę refrakcji strefy optycznej rogówki.



Rys. 7.20. Przekrój rogówki po keratotomii radialnej. Model z błoną $Q_{\text{Descemet}} = 1$.
Widoczna silna koncentracja naprężenia pod narożnikiem nacięcia – dolny wykres.
Zmniejszenie krzywizny wierzchołka prowadzi do spadku mocy optycznej o 9,5 dioptrii

Moc optyczna modelu rogówki określana jest przez konfigurację węzłów ulokowanych na jej zewnętrznej powierzchni, wzdłuż linii przecięcia z płaszczyzną osiową, połowiącą klin. Obliczenia prowadzone są podobnie jak dla modelu 2D – pozycje tych węzłów, do około 0,95 mm od osi, aproksymowano okręgiem, a całkowita moc optyczna modelu oka zawiera też wpływ soczewki zawieszonyj w przemieszczającym się rąbku (jak zostało to opisane w podrozdziale 4.3). Ostatecznym rezultatem „zabiegu” jest różnica mocy optycznych otrzymanych z rozwiązania bieżącego (po keratotomii, dla kolejnej wartości w) i bazowego (przed zabiegiem). Ciśnienie wewnątrzgałkowe jest przy tym jednakowe dla wszystkich przedstawionych tu rozwiązań, równe wartości nominalnej 16 mmHg. Wyniki rozwiązania dla $Q_{\text{Descemet}} = 1$ zawarto w tabeli 7.5.

Tabela 7.5. Rozwiązania dla $Q_{\text{Descemet}} = 1$

w	P [D]	f [mm]	U_y [mm]	B [mm]	ΔP [D]	ΔP^* [D]
1,00	54,68	24,43	0,479	-1,881		
0,05	56,75	23,54	0,492	-0,877	2,07	2,32
0,10	53,84	24,82	0,480	-2,302	-0,84	-0,93
0,20	51,07	26,16	0,464	-3,807	-3,61	-4,06
0,40	48,68	27,44	0,427	-5,251	-6,00	-6,81
0,70	47,57	28,08	0,432	-5,963	-7,11	-8,09
1,00	46,39	28,80	0,405	-6,779	-8,29	-9,50

W pierwszym wierszu ulokowane zostało rozwiązanie bazowe (rogówka bez nacięć, z materiału $M2$), w pozostałych wierszach – wyniki otrzymane dla modeli z rogówką po keratotomii radialnej, o wzrastającej gęstości włókien ciągłych w . W kolumnach mamy kolejno: moc całkowita P układu optycznego, jego ogniskowa f , przemieszczenie wierzchołka rogówki U_y (po obciążeniu ciśnieniem), położenie ogniska B (po obciążeniu ciśnieniem), zmiana mocy optycznej ΔP względem rozwiązania bazowego oraz zmiana mocy optycznej ΔP^* liczona jako *korekta*.

Ostatnia pozycja wymaga objaśnienia. Zmiana mocy optycznej rozumiana jest zwykle jako różnica mocy optycznej samej rogówki po zabiegu i przed zabiegiem. Odpowiada temu wynik umieszczony w przedostatniej kolumnie, z tą różnicą, że moc optyczna liczona jest tutaj dla *całego* układu rogówka-soczewka. Wynik ten byłby poprawny, gdyby główna płaszczyzna obrazowa układu optycznego nie zmieniała odległości od dna oka po wprowadzeniu nacięć. Tak jednak nie jest. Wiadomo, że za pogorszenie obrazu na siatkówce oka odpowiada nie *zmiana* ogniskowej Δf , lecz przesunięcie ogniska względem dna oka B (4.5). Z tego względu jako miarę *zmiany mocy* układu optycznego oka, w ostatniej kolumnie tabeli, przyjęto *korektę optyczną*, wymaganą do sprowadzenia ogniska w pierwotne położenie (przed wykonaniem nacięć, ale po obciążeniu ciśnieniem) względem dna oka:

$$\Delta P^* = P - \frac{1,336}{(f + \Delta B)}. \quad (7.18)$$

$P = 1,336/f$ jest bieżącą wartością mocy optycznej, a ΔB – zmianą położenia ogniska (różnicą B w wierszach bieżącym i pierwszym tab. 7.5).

Zagadnienie to jest dyskutowane także w podrozdziale 8.4.1, traktującym o PRK. Porównując dwie ostatnie kolumny tabeli 7.5 zauważmy, że liczby w nich zawarte różnią się o kilkanaście procent, zatem różnica między tymi dwoma sposobami obliczania zmiany refrakcji jest porównywalna z różnicą otrzymaną dla PRK (podrozdz. 8.3.2).

7.3.4. Dyskusja wyników

Wykres dla $Q_{\text{Descemet}} = 1$, wykreślony grubą linią na rysunku 7.19, dotyczy modelu, w którym błona Descemeta wykonana jest z materiału $M2$ – jak nienacięta warstwa stromy. Szczegółowe wyniki obliczeń dla tego przypadku zawarte są w tabeli 7.5. Ostatniemu punktowi wykresu, dla $w = 1$ (wtedy cała rogówka wykonana jest z $M2$), odpowiada ostatni wiersz tabeli. Na rysunku 7.20 pokazano jak wówczas zdeformowany jest model. Po wykonaniu ośmiu promieniowych nacięć rogówki ciśnienie sprawia, że ognisko przesuwają się względem dna oka o $-6,779 - (-1,881) = -4,897$ mm (do tyłu). Aby ognisko powróciło do położenia sprzed „zabiegu” (względem dna oka, a nie względem głównej płaszczyzny obrazowej układu optycznego) konieczne jest wprowadzenie korekcji $-9,50$ dioptrii, chociaż zmiana mocy optycznej układu rogówka–soczewka wynosi tylko $-8,29$ dioptrii.

Pierwszy punkt tego wykresu, dla $w = 0,05$, jest rozwiązaniem, w którym materiał $M2$ obejmuje jedynie obszar błony Descemeta i przyległej do niej warstwy stromy spoza strefy nacięcia (rys. 7.18). Warstwa stromy do głębokości $0,50$ mm ma przypisany materiał o wykładniku $\alpha = 61,6$ i współczynniku $A = 0,05 \cdot 0,2 = 0,01$ kPa. Można rozumieć to tak, że do głębokości $0,50$ mm materiału prawie nie ma – jego moduł sprężystości stanowi zaledwie $0,05$ tej wartości, jaką miał przed wykonaniem nacięcia. Model z tak „cienką” rogówką deformuje się zupełnie inaczej niż poprzednio, gdy w było równe jedności. Teraz jego moc optyczna wynosi $56,75$ dioptrii, a ognisko przesunięte jest o $B = -0,877 - (-1,881) = 1,004$ mm – zatem do przodu. W tym modelu moc optyczna po keratotomii nie tylko nie zmalała, ale nawet wzrosła i to aż o $2,32$ dioptrii, co oznacza, że wierzchołek rogówki jest teraz bardziej wypukły. (Wynik ten jest piękną ilustracją zjawiska ektazji, omawianego w podrozdziale 8.4.2.)

Zwiększanie gęstości włókien w , dla ustalonego Q_{Descemet} , sprawia, że „pooperacyjna” zmiana mocy optycznej staje się coraz większa (bezwzględnie). Drugim czynnikiem wpływającym na zmianę mocy optycznej jest sztywność błony Descemeta, zależna od parametru Q_{Descemet} (4.15a). Zwiększanie tego parametru, dla ustalonego w , ma działanie odwrotne do poprzedniego – zmiana mocy optycznej staje się coraz mniejsza. Ta zależność jest niezmiernie istotna, bo już pobieżna analiza wykresów na rys. 7.19 pozwala na oszacowanie parametrów materiału błony Descemeta. Przede wszystkim zaskakiwać musi niezwykle silny wpływ, jaki wywiera tak cienka warstwa na efekt optyczny keratotomii radialnej. Przecież stanowi ona niecałe 2% grubości rogówki w jej najcieńszym miejscu – widać to na rys. 7.18 (a właściwie *nie widać*, warstwa ta jest cieńsza od grubości linii. Porównując wykresy dla $Q_{\text{Descemet}} = 1$ (błona Descemeta nie różni się parametrami materiału od stromy) i $Q_{\text{Descemet}} = 0$, obydwa przy $w = 0,5$, widzimy, że zmiana refrakcji wynosi odpowiednio $-7,5$ dioptrii i -10 dioptrii. Te dwa modele różnią się tylko tym, że w drugim przypadku elementy skończone w obszarze błony Descemeta zostały usunięte – grubość rogówki jest o 10 mikrometrów mniejsza. Mimo tak małej zmiany geometrii, moc optyczna tych modeli różni się

aż o 2,5 dioptrii. To ogromny skutek, zważywszy na tak niepozorną przyczynę. (Podziwiać należy chirurgów, którzy wykonywali ten zabieg ręcznie, a jeszcze bardziej determinację ich pacjentów.)

Rozwiązania na rysunku 7.19 ujawniają jeszcze inną zależność, równie zaskakującą. Wykresy zmian mocy optycznej stopniowane są dość równomiernie, gdy Q_{Descemet} zmienia się od 0 do 1,5. Jednak powyżej tej wartości obserwowane zmiany mocy optycznej (brane bezwzględnie) gwałtownie maleją – kolejna krzywa, uzyskana dla $Q_{\text{Descemet}} = 2$, znalazła się znacznie wyżej, niż wynikałoby to z ekstrapolowania czterech poprzednich wykresów. Aby przyjrzeć się temu dokładniej, dodany został wykres pośredni, dla materiału $Q_{\text{Descemet}} = 1,75$, ale i ten ułożył się bardzo wysoko względem poprzednich. Wartość $Q_{\text{Descemet}} = 1,5$ wydaje się skrajną wartością tego parametru, zapewniającą jeszcze jednostajność zmian mocy optycznej. Powyżej uwidacznia się jakiś inny mechanizm, który zasadniczo zmienia przebieg badanego zjawiska, gwałtownie oddalając rozwiązania modelu od rzeczywistych funkcji oka.

Jak wynika z wyrażenia (7.6) maksymalne zmiany refrakcji po keratotomii radialnej są rzędu 10 dioptrii. Uzyskane rozwiązania sugerują, że taki skutek zabiegu zapewnia jedynie model, w którym $Q_{\text{Descemet}} \leq 1$. W aspekcie praktyki chirurgicznej wyniki przedstawione na rys. 7.19 wskazują na błonę Descemeta o module sprężystości podłużnej *nie większym* od modułu stromy. Określone w ten sposób ograniczenie dla Q_{Descemet} jest jeszcze mocniejsze od poprzedniego.

Ten rezultat pozwala zweryfikować oszacowanie (7.17). Wartość w zbliżona do 0,13 daje stosunkowo niewielką zmianę mocy optycznej, bo około –3 dioptrii dla krzywych $Q_{\text{Descemet}} \leq 1$ (rys. 7.19). Mając na uwadze doświadczenia chirurgii refrakcyjnej, czyli przedział (7.6), rezultat (7.17) można uznać za przypadek skrajny – współczynnik w realnej stromy powinien być niemniejszy niż 0,13.

Średnie, rejestrowane w warunkach klinicznych zmiany mocy optycznej po keratotomii radialnej wśród pacjentów niesortowanych według wieku są następujące [Rowsey i in. 1983]:

a) 16 nacięć i 3,0-milimetrowa strefa optyczna prowadzi do zmiany refrakcji 4,66 dioptrii, gdy przecinany był także pierścień rąbkowy (liczebność zbadanych przypadków $N = 13$) oraz 5,18 dioptrii, gdy nacięcia nie uszkadzały rąbka ($N = 39$),

b) 8 nacięć, strefa optyczna 3,0 mm – zmiana refrakcji 5,21 dioptrii ($N = 37$),

c) 8 nacięć, strefa optyczna 3,5 mm – zmiana refrakcji 3,66 dioptrii ($N = 6$),

d) 16 nacięć, strefa optyczna 4,0 mm – zmiana refrakcji 2,67 dioptrii ($N = 8$),

e) 8 nacięć, strefa optyczna 4,0 mm – zmiana refrakcji 3,45 dioptrii ($N = 9$).

Pomiary wykonane były rok po operacji i objęto nimi 251 pacjentów.

Ponieważ omawiany tu model keratotomii radialnej jest zgodny z opisanym w punkcie (c), można uznać, że zmiana refrakcji modelu, pochodząca z obliczeń, powinna być zbliżona do 4 dioptrii. Przy ograniczeniu $Q_{\text{Descemet}} \leq 1$, funkcje wykreślone na rysunku 7.19 wskazują na wartość w z przedziału

$$0,14 \leq w \leq 0,26. \quad (7.19)$$

To są liczby większe od otrzymanej w oszacowaniu (7.17), wciąż jednak nie wykracają poza wartości podane w (7.9).

Rozwiązania przedstawione na rysunku 7.19 dają też sposobność do zajęcia stanowiska w kwestii zależności skutku operacji od wieku i stopnia krótkowzroczności pacjenta. Obydwa parametry zwiększają ten skutek. Rozwiązania pokazują, że zmiana refrakcji po nacięciu rogówki jest większa wtedy, gdy stosunek sztywności warstwy nacinanej do sztywności pozostałej części rogówki (w której znajduje się błona Descemeta) jest większy. Zwiększenie zatem skutku operacji może wynikać ze wzrostu licznika albo ze zmniejszenia mianownika tego ułamka. Oznacza to, że w oku starszym lub bardziej krótkowzrocznym, albo moduł sprężystości materiału stromy w strefie nacięcia uległ zwiększeniu – przy stałym module błony Descemeta i nienaciętej części stromy, albo moduł sprężystości błony Descemeta zmalał – przy stałym module stromy. Może też zajść jedno i drugie jednocześnie, jeśli zważyć, że do osiągnięcia zmniejszenia refrakcji o 10 dioptrii wymagane jest spełnienie obu warunków: $w \geq 0,5$ i $Q_{\text{Descemet}} \leq 1$. Zauważmy, że 10 dioptrii okazuje się wartością graniczną zarówno w relacjach chirurgów, jak i dla modelu biomechanicznego gałki ocznej. Na ograniczenie to nie wpływają postulaty i uproszczenia przyjęte w podrozdziale 7.3.2.

7.3.5. Podsumowanie

Rozwiązania numeryczne pokazują, że dwa parametry mają wpływ na zmianę mocy optycznej po keratomii radialnej: w i Q_{Descemet} . Dla współczynnika w ustawionego na poziomie 0,2 (7.19) manipulowanie parametrem Q_{Descemet} pozwala objaśnić zmiany mocy optycznej opisywane fenomenologiczną formułą (7.5). Biorąc mianowicie ten wzór dosłownie, oko o zerowej krótkowzroczności (miarowe) osoby w wieku 21 lat po zabiegu zmieniłoby refrakcję o $-1,5$ dioptrii. Patrząc na wykresy podane na rysunku 7.19, oznaczałoby to, że $1,5 < Q_{\text{Descemet}} < 1,75$. Dla tej samej osoby w wieku 60 lat, wzór (7.5) przewiduje zmianę mocy optycznej – jeśli nadal oko jest miarowe – wynoszącą $-4,3$ dioptrii, co przelicza się na $Q_{\text{Descemet}} = 1$. Wynika z tego, że sztywność rozciągania błony Descemeta *zmniejsza* się z wiekiem (błona wiotczeje) i jest to przypałość dotycząca wszystkich.

Nie wszyscy natomiast są krótkowzroczni. Jeśli ktoś jest krótkowzroczny, to jego problem polega na nadmiernym wydłużeniu się gałki ocznej, ściślej – twardówki, czyli osłabieniu tej tkanki na tyle, że do jej trwałego odkształcenia wystarcza już samo ciśnienie wewnątrzgałkowe. Gałka oczna dotknięta tą wadą zachowuje się po keratomii radialnej tak samo jak oko dotknięte upływem czasu. Wzór (7.5) traktuje oba te przypadki oddzielnie, ale ich wpływ na skutek zabiegu jest taki sam.

Dlaczego choroba, prowadząca do krótkowzroczności oka, *powiększa* efekt wykonanego na nim zabiegu? – przecież mogłaby równie dobrze go zmniejszać, albo cho-

cięż nie zmieniać. Wtedy Rowsey, twórca zależności (7.5), zmieniłby tylko znak drugiego składnika na ujemny, albo usunął ten składnik, a zmiana ta nie wywołałoby niczyjzego zdziwienia – znak nie ma żadnego uzasadnienia, poza empirycznym. Jaki fizyczny mechanizm stoi za *silniejszym* spłaszczeniem wierzchołka rogówki oka *krótkowzrocznego* po keratotomii radialnej?

W świetle rozwiązań przedstawionych na rysunku 7.19 rzecz wyda się zrozumiała, jeśli przyjmiemy, że przyczyny krótkowzroczności, które jak wiadomo powodują zmniejszenie sztywności powłoki twardówkowej, działają tak samo na błonę Descemeta – także zmniejszają jej sztywność rozciągania. Etiologia obu tych przypadłości – zarówno krótkowzroczności jak i większej zmiany refrakcji po keratotomii radialnej – byłaby ta sama. Wówczas wiotczenie skłery i wiotczenie błony Descemeta musiałyby prowadzić zarówno do krótkowzroczności – co już od dawna jest zrozumiałe – jak też do silniejszego spłaszczania wierzchołka rogówki po keratotomii – o czym wiemy dopiero z rozwiązań przedstawionych na rysunku. Teraz, w świetle, tej wiedzy, nasze zdziwienie po zamianie znaku drugiego składnika w równaniu (7.5) byłoby jak najbardziej uzasadnione. („Jak to – przy krótkowzroczności sklera wiotczeje, a błona Descemeta sztywnieje?!”) Wzór Rowseya (7.5) zyskiwałby w ten sposób fizyczne uzasadnienie.

Drugi aspekt działania tego mechanizmu, gdy $Q_{\text{Descemet}} = \text{const}$, wymagałby zwiększenia parametru gęstości włókien stromy w dla zapewnienia przyrostu ΔP (branego bezwzględnie), obliczanego według wzoru (7.5). Przyjmując $Q_{\text{Descemet}} = 1$, rozważana zmiana mocy optycznej z $-1,5$ na $-4,3$ D, wymagałaby zmiany w z $0,11$ na $0,22$ – ponownie odczytujemy to z wykresu na rys. 7.19, zatem z wiekiem moduł sprężystości stromy musiałby wzrastać. Najprościej objaśnić to zjawisko zwiększającą się liczbą połączeń między lamellami. Z tego co zostało napisane w podrozdziale 2.1 wiemy, że takie przenikanie się sąsiadujących z sobą warstw zdarza się częściej u człowieka niż u królika, a u człowieka częściej w warstwach zewnętrznych niż w wewnętrznych. Gdyby z upływem czasu liczba tych połączeń była coraz większa i w ten sposób coraz bardziej utrudniała wzajemne przesuwanie się warstw, wzrastałby w ten sposób moduł sprężystości materiału (i poprzecznej, i podłużnej). Tak usieciowana stroma musiałaby wykazywać większą sztywność (właśnie z tego powodu twardówka ma większy moduł sprężystości), co byłoby równoznaczne ze wzrostem parametru w , zdefiniowanego wyrażeniem (7.7). Pomysł jest wiarygodny, gdyż jak wiadomo z upływem czasu zmniejsza się tempo narastania krótkowzroczności u młodych ludzi z taką wadą wzroku. Po osiągnięciu dojrzałości postępowanie krótkowzroczności zwykle ustaje, co mogłoby sugerować, że ten proces sieciowania dotyczy także twardówki (jeśli w twardówce ten proces jest także możliwy). Oczywiście na proces sieciowania może nakładać się wiotczenie błony Descemeta, a ostateczny rezultat może być wypadkową obu omawianych mechanizmów degradacji tkanek oka.

Zauważmy na koniec szczególnie rezultat, który pojawia się czasami w doniesieniach chirurgów refrakcyjnych, mianowicie zmiana mocy optycznej po keratotomii

radialnej sięgająca 10 dioptrii. Ten wynik znajduje się na brzegu przedziału (7.6), podają go na przykład Salz i in. [1981] (uzyskany *in vitro*) cytowani w tym samym podrozdziale 7.3.1. Otóż z wykresu na rysunku 7.19 wynika, że dla $Q_{\text{Descemet}} = 1$, taką zmianę refrakcji można uzyskać tylko w jednym przypadku, gdy $w = 1$. Oznacza to materiał dokładnie taki sam, jaki użyty został na przykład w symulacjach GAT, a więc gdy rogówka w ogóle nie jest nacinana. Czy miałoby to znaczyć, że do symulowania keratotomii radialnej, przy tak dużej zmianie refrakcji, wystarczy zwykły, izotropowy (ale nienormalnie) i jednorodny materiał rogówki? Mielibyśmy wtedy do czynienia z materiałem tak bardzo usieciowanym, że struktura warstwowa przestałaby cokolwiek znaczyć. Także po wykonaniu nacięć. Chociaż wariant ten wydaje się bardzo interesujący, można sądzić, że przyczyna tego efektu znajduje się raczej po stronie błędu zabiegu niż w mechanice rogówki. Tak dużą zmianę refrakcji łatwo osiągnąć przez choćby niewielkie zmiany grubości tej warstwy stromy, która pozostaje nienaruszona po wykonaniu nacięć. Przekonują o tym wykresy na rysunku 7.19, wykonane dla parametru $Q_{\text{Descemet}} = 1$ i $Q_{\text{Descemet}} = 0$. Różnica grubości nieuszkodzonej nacięciem warstwy wynosi zaledwie 0,01 mm, a zmiana mocy optycznej sięga aż jednej dioptrii. Znacznie bardziej prawdopodobne jest wobec tego objaśnienie tak dużej zmiany refrakcji zbyt głęboko wykonanymi nacięciami. Tym bardziej że panowanie nad głębokością nacięcia jest niewielkie.

Ostatni szczegół referowanych w tym rozdziale obliczeń nie jest pokazany na rysunku 7.19, łatwo go jednak opisać. Kolejna krzywa dla $Q_{\text{Descemet}} = 1$, otrzymana po serii rozwiązań modelu z mniej sztywnym rąbkim, bo $Q_{\text{limbus}} = 1$ (dotąd $Q_{\text{limbus}} = 2$), przyjmuje dokładnie taki sam kształt. Różni się tylko tym, że jest przesunięta do góry o 0,8 dioptrii. Przesunięcie wykresu do góry budzi zdziwienie, ponieważ intuicja podpowiada, że zmniejszenie obwodowej sztywności rozciągania pierścienia rąbkowego powinno tym bardziej przyczyniać się do spłaszczenia wierzchołka rogówki po keratotomii radialnej, zatem *zwiększać* skutek operacji. Tak przynajmniej rozumowała część chirurgów wykonujących ten zabieg. Aby osiągnąć większą zmianę refrakcji, przecinali także rąbek, co jest równoznaczne ze zmniejszeniem jego sztywności rozciągania obwodowego. Oczywiście podzielałam ich zaskoczenie, ale nie ulega wątpliwości, że intuicja zawodzi nas tu kolejny raz – z omawianych obliczeń wynika jednoznacznie, że osłabienie rąbka *zmniejsza* pooperacyjną zmianę refrakcji, zamiast ją zwiększać. Rezultat ten jest zgodny z doświadczeniem. Z badań cytowanych w podrozdziale 7.3.4 [Rowsey i in. 1983], opisanych w umieszczonym tam podpunkcie *a* wynika, że zaobserwowane zmniejszenie mocy optycznej rogówki, po keratotomii połączonej z przecięciem rąbka, wynosi 4,66 dioptrii, podczas gdy podobnie przeprowadzony zabieg bez przecinania rąbka powoduje zmianę mocy średnio o 5,18 dioptrii, zatem wiotki rąbek, to *mniejsza* zmiana refrakcji.

Jak rozumieć ten wynik? – przecież przerwanie pierścienia rąbkowego niewątpliwie *zmniejsza* krzywiznę rogówki. Dlaczego więc spadek mocy optycznej jest mniejszy? Odpowiedź jest tylko jedna: bo skutek zabiegu nie zależy od samej zmiany ogni-

skowej rogówki, zależy także od *przemieszczenia głównej płaszczyzny obrazowej* układu optycznego oka, a ta ewidentnie w tym przypadku oddala się od dna oka po przecięciu rąbka. Dlatego nie wystarczy w obliczeniach uwzględnić zmianę mocy optycznej samej rogówki, nawet nie wystarczy analiza refrakcji całego układu optycznego oka. Należy także wiedzieć, jak przemieszcza się ten układ wzdłuż osi gałki ocznej, bo ostatecznie istotna jest zmiana położenia ogniska *względem dna oka*, a nie względem układu optycznego. Zdefiniowaną wyrażeniem (4.5) funkcję *rozmazania obrazu B* (ang. *blur*) wymyśliłem początkowo jako narzędzie badania samonastawności oka, bo gdy zmienia się ciśnienie p , a w konsekwencji położenie i moc układu optycznego rogówka–soczewka, jest ona lepszą miarą jakości obrazu na siatkówce niż zmiana ogniskowej Δf . Pierwszy raz wykorzystaliśmy ją do tego celu w pracy [Asejczyk-Widlicka i in. 2004]. Teraz wykazała swoją przydatność w zupełnie innym zastosowaniu. Dzięki niej można wykazać, że nie tylko ciśnienie, także keratotomia radialna powoduje przemieszczenie układu optycznego, ponieważ ten (sprzeczny z intuicją) składnik obliczonej zmiany mocy optycznej pojawia się po tym zabiegu, mimo że ciśnienie nie uległo zmianie.

Przedstawione wyniki symulacji keratotomii radialnej nie przeczą możliwości postulowania $Q_{\text{Descemet}} = 1$. Z tego powodu we wszystkich innych obliczeniach, omawianych w tej monografii, materiał błony Descemeta utożsamiany jest z materiałem stromy.

Część III

8. Model biomechaniczny gałki ocznej w zastosowaniach

Zadania rozwiązywane w rozdziale 7 służyły uzgodnieniu działania modelu z przypadkami zbadanymi klinicznie lub laboratoryjnie, zatem wyniki rozwiązań były zwykle znane – to model był obiektem badań, to jego parametrami manipulowano, aby osiągnąć pożądaną zgodność funkcji z eksperymentem. W tym rozdziale te role są odwrócone – opracowany model służy do badania przypadków, dla których nie jest znane rozwiązanie. Uzyskane rezultaty są więc nowe i na tyle wiarygodne, na ile poprawnie zidentyfikowany został model gałki ocznej.

8.1. Tonometria aplanacyjna w ujęciu nieliniowym

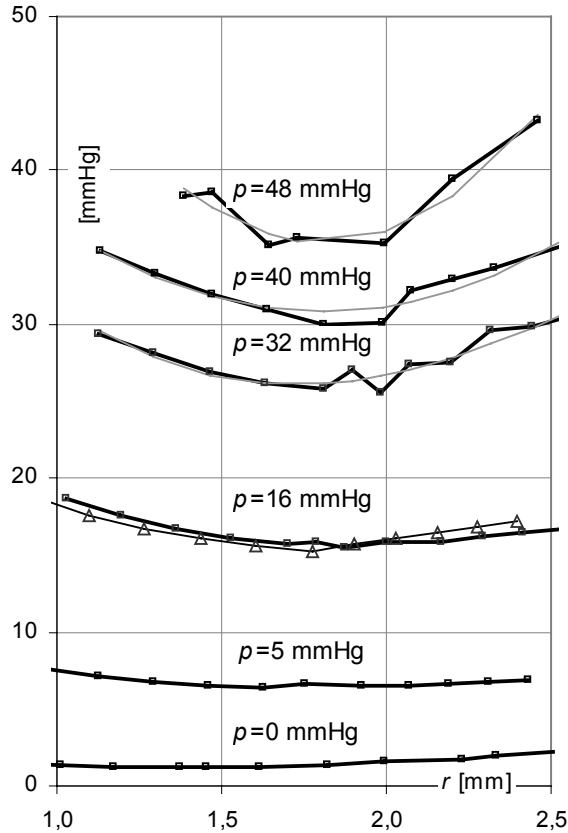
8.1.1. Analiza rozwiązań numerycznych

8.1.1.1. Zależność p_G od promienia strefy aplanacji r i od IOP

Aplanacja jest procesem obciążania wierzchołka rogówki płaską końcówką pomiarową tonometru, w trakcie którego narasta średnica spłaszczenia d i jednocześnie zmienia się średnie ciśnienie p_G wywierane z zewnątrz przez przyrząd. W tonometrii aplanacyjnej pomiar tego ciśnienia dokonywany jest dla $d = 3,06$ mm. Gdy rogówka ma wymiary kalibracyjne (6.2), średnica spłaszczenia o tej wartości sprawia, że ciśnienie zewnętrzne p_G i wewnętrzne p są sobie równe. Czy to oznacza jakiś szczególny stan mechaniczny powłoki rogówkowej?

Na rysunku 8.1 przedstawiono wykresy sześciu serii rozwiązań modelu, w którym rogówka wykonana jest z materiału $M2$ oraz, dla porównania, jedną serię z materiału $M4$ dla $p = 16$ mmHg. Każda seria pokazuje funkcyjną zależność p_G od promienia strefy aplanacji r , dla ustalonego ciśnienia wewnętrznego p . (Oczywiście siła napięcia powierzchniowego nie jest brana pod uwagę.) Kolejne serie obrazują proces spłaszczenia wierzchołka rogówki dla stałego ciśnienia p przyjmującego wartości 0; 5; 16; 32; 40 i 48 mmHg. Przecięcie tych wykresów prostą $r = 1,53$ mm pozwala odczytać

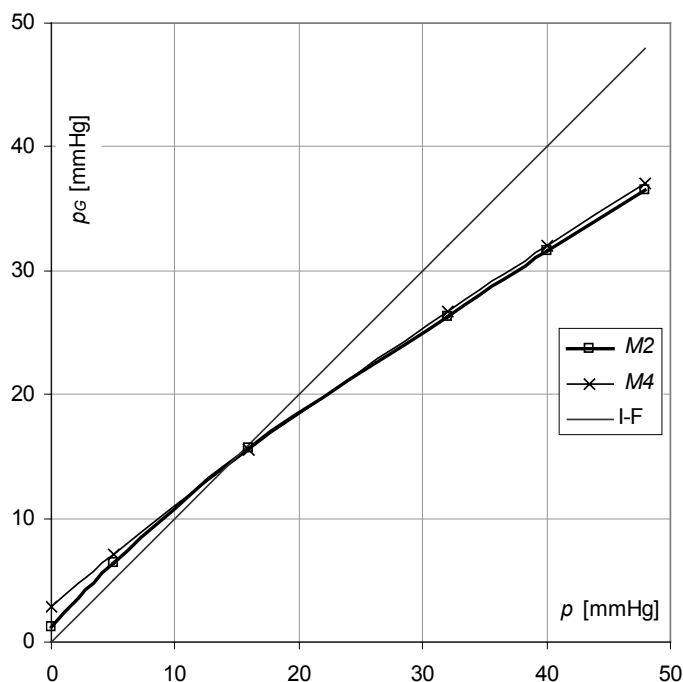
odpowiadające im „zmierzone” ciśnienia p_G . Tak utworzone zostały krzywe na rysunku 7.3 dla modelu z materiału od $M1$ do $M5$. Wykresy dla materiałów $M2$ i $M4$ powtórzone są na rysunku 8.2, parametry tych materiałów zawiera tabela 7.3.



Rys. 8.1. Ciśnienie aplanacji p_G w funkcji promienia strefy spłaszczenia r , dla ustalonego ciśnienia p . Kwadratami (grubą linią) wykreślone są wyniki dla rogówki z materiału $M2$, trójkątami – dla $M4$ i $p = 16$ mmHg. Linie szare – aproksymacja paraboliczna tych rozwiązań

Funkcje $p_G(p)$ pokazane na rysunku 8.2 są niemal identyczne. Jedyne punktu, w którym różnica jest nieco większa, to $p = 0$. Zwiększanie wykładnika α w równaniu (4.7) przy braku ciśnienia p powoduje zbliżanie p_G do zera. Jednak podwyższenie ciśnienia p choćby do 5 mmHg sprawia, że wyniki „pomiaru” p_G w badanych przypadkach są nierozróżnialne – pomimo że wartości wykładnika α obu materiałów sytuują się w pobliżu przeciwnych krańców przedziału ustalonego w pracy [Nash i in. 1982] dla rogówki ludzkiej (wyniki omówiono w podrozdziale 3.2). Rola, jaką tu odgrywa stała A ogranicza się do spełnienia warunku (7.1). Rozwiązania przedstawione

i dyskutowane w podrozdziale 7.1 sugerują możliwość traktowania GAT jako przypadku powłoki, która w warunkach pomiaru traci stateczność. Można sądzić, że ze zjawiskiem tym mamy do czynienia już dla ciśnienia 16 mmHg. Widoczne na rysunku 8.1 wykresy stanowią istotne uzupełnienie tamtych badań.

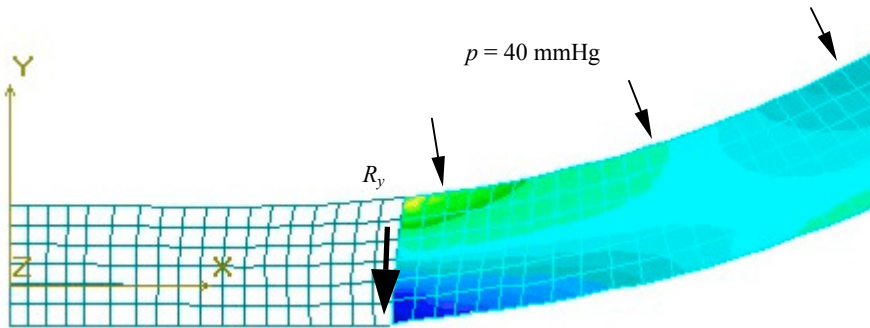


Rys. 8.2. Rozwiązania dla modelu rogówki z materiału $M2$ oraz $M4$. Punkty krzywej p_G dla materiału $M2$ powstały z przecięcia wykresów na rys. 8.1 prostą $r = 1,53$ mm

8.1.1.2. Przykład rozwiązania

Zbadamy przedostatni punkt wykresu pokazanego na rysunku 8.2 dla takiej właśnie konstrukcji – niestatecznej, z materiału $M2$. Po spłaszczeniu wierzchołka rogówki na średnicy kalibracyjnej, gdy ciśnienie wewnętrzne $p = 40$ mmHg, otrzymujemy z rozwiązania MES ciśnienie $p_G = 31,6$ mmHg. Wynika stąd, że gdyby wyciąć spłaszczony krążek, na który działają dwa wymienione ciśnienia, do zapewnienia mu równowagi potrzebna jest jeszcze siła tnąca na jego obwodzie, skierowana *do wnętrza* oka. Taką siłą działa na krążek otaczająca go, pozostała część rogówki. Efekt ten jest sprzeczny z głoszonymi opiniami, że działająca na strefę spłaszczenia siła F_t w równaniu (6.4) zawsze zwrócona jest na zewnątrz gałki ocznej i że może ona tylko *powiększać* odczyt tonometru p_G . W tym przypadku ewidentnie go *zmniejsza*.

Na rysunku 8.3 widać obciążony tak fragment modelu, pozbawiony spłaszczonego wierzchołka rogówki. Węzły na powierzchni otworu przesunięte zostały do położenia zajmowanego przed usunięciem strefy aplanacji, konfiguracja pozostałej części powłoki jest więc dokładnie taka jak w powłoce pełnej. Okazuje się po rozwiązaniu, że do utrzymania powłoki z otworem w tym położeniu, reakcja wypadkowa R_y w węzłach na krawędzi otworu jest zwrócona *na zewnątrz* modelu (a jej wartość wynika z różnicy ciśnień po obu stronach). Czyli peryferyjna część powłoki rogówkowej obciąża strefę aplanacji siłą F_l zwróconą przeciwnie, zatem *do wnętrza* gałki ocznej.



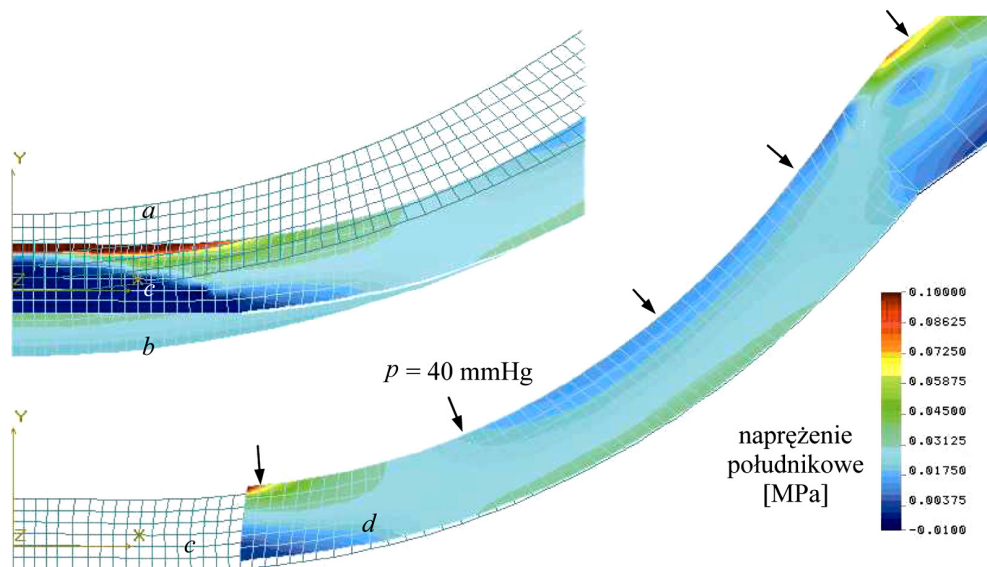
Rys. 8.3. Siła reakcji w węzłach unieruchomionych po usunięciu strefy spłaszczenia

Gdyby pozwolić teraz krawędzi rogówki, pozbawionej spłaszczonego wierzchołka, na swobodne przemieszczenie w kierunku równoległym do osi (przemieszczenie w kierunku prostopadłym do tej osi jest nadal zakazane – reakcja $R_x \neq 0$), wówczas zdeformuje się ona w sposób pokazany na rys. 8.4d.

Usunięcie więzów w kierunku osi y (usunięcie spłaszczonego krążka wraz z działającymi na niego ciśnieniami z zewnątrz i od wewnątrz) prowadzi zatem do wirtualnego przemieszczenia krawędzi otworu *w głąb* modelu, pomimo zwróconego na zewnątrz ciśnienia $p = 40$ mmHg. Utrzymanie ciągłości powłoki na granicy strefy aplanacji wymaga w tym przekroju działania siły R_y (rys. 8.3), wywołanej różnicą ciśnień 8,4 mmHg między p i p_G . Bezbłędnie mierzący tonometr pokaże wówczas 31,6 mmHg – ciśnienie przykładane z zewnątrz jest o wiele mniejsze od wewnętrznego. Przyczyna nierówności ciśnień $p_G < p$ tkwi, jak widać, w *samym mechanizmie spłaszczenia* powłoki rogówkowej, siła napięcia powierzchniowego w filmie łzowym ma niewiele wspólnego z tą nierównością.

O tym jak zawodna bywa w takich razach intuicja, świadczy też rezultat obliczeń przedstawionych w *Dodatku*. Na zamieszczonych tam rysunkach od D7 do D9 pokazane są przemieszczenia granicy przedziałów spłaszczonej błony kulistej, obciążonej ciśnieniem od wewnątrz, po usunięciu obszaru spłaszczenia – zadanie jest

podobne do opisanego. Otóż błona przemieszcza się *do wnętrza*, podobnie, jak w rozwiązaniu numerycznym, zilustrowanym rysunkiem 8.4d. Przeciwnie do zwrotu ciśnienia.



Rys. 8.4. Rozwiązania modelu w kolejnych fazach obciążania:

a) konfiguracja wierzchołka rogówki nieobciążonej, b) obciążonej $p = 40$ mmHg, c) spłaszczonej.

Dolny rysunek przedstawia ponownie model c), tym razem jako siatkę elementów skończonych, a na jej tle konfigurację rogówki pozbawionej spłaszczonego krążka i obciążonej tym samym ciśnieniem.

Węzłom na brzegu otworu pozostawiono swobodę przemieszczeń w kierunku y

8.1.1.3. Dyskusja wyników

Dlaczego w GAT średnica D_{aplan} jest zbliżona do 3 mm. Przedstawione wyniki pozwalają zrozumieć, dlaczego przyjęta przez Maklakoffa, a później Goldmanna, średnica strefy aplanacji jest zbliżona do 3 mm (argument, że stoi za tym napięcie powierzchniowe filmu łzowego okazał się nieuzasadniony fizycznie – podrozdziały 6.1.2 i 6.1.3). Widoczne na rysunku 8.1 wykresy p_G dla wszystkich poziomów obciążenia p wykazują taki sam, znamieny, przebieg – osiągają minimum, gdy promień strefy aplanacji jest nieco większy niż 1,5 mm. Właśnie to ekstremum skłania badaczy do wybrania średnicy kalibracyjnej (6.2), a nie siła napięcia powierzchniowego.

Dla modelu z materiału $M2$ i ciśnienia $p = 16$ mmHg – środkowa krzywa na rys. 8.1 – odchylenie p_G od p jest mniejsze od 0,5 mmHg w bardzo dużym zakresie zmian r , bo od 1,4 do 2,4 mm. Analogiczny przedział r dla materiału $M4$ wynosi od 1,3 do 2,2 mm.

To, że średnica kalibracyjna strefy spłaszczenia $D_{\text{aplan}} = 3,06$ mm (patrz uwaga na początku podrozdziału 6.1.3) zapewnia oku kalibracyjnemu spełnienie równości (7.1), jest bardzo użytecznym odkryciem. Jednak równie wielkie znaczenie ma to, że pomiar p_G dokonywany jest w pobliżu jego ekstremalnej wartości także, gdy ciśnienie wewnątrzgałkowe *różni się* od nominalnego (tutaj 0, 5, 32, 40 i 48 mmHg).

Zależność $p_G(r)$ jest nieliniowa, co komplikuje wybór średnicy aplancji (dokonany już przez twórców GAT). Narzucenie przez Ficka, a później Goldmanna, *stałej* średnicy D_{aplan} w trakcie pomiaru eliminuje ten problem, przy tym wartość wybranej średnicy jest nieprzypadkowa – w jej pobliżu funkcja $p_G(r)$ osiąga minimum, czyli jest prawie stała. Oznacza to, że w pewnym zakresie zmian r (od 1,5 do 2 mm, według wykresów na rys. 8.1) praktycznie stały jest iloraz siły i powierzchni spłaszczenia. W badaniach klinicznych oznacza to dużą tolerancję mierzonego ciśnienia p_G na zmiany średnicy strefy spłaszczenia.

Tolerancja ta, wbrew założeniu o stałości D_{aplan} , jest tutaj bardzo przydatna, ponieważ pomiary na rogówkach o różnych krzywiznach wykonywane są dla *różnych* stref aplancji – właśnie dlatego, że D_{aplan} zawsze jest równe 3,06 mm. O podobieństwie dwu różnych powłok rogówkowych przesądzą bowiem ich *względne* wymiary. Gdy druga rogówka ma o 10% większy promień R , o tyle większa powinna być jej średnica strefy aplancji, aby zachować tę samą wartość p_G . Jeśli jednak ta średnica pozostaje taka sama (zatem maleje względem R), a mimo to odczyt ciśnienia jest niezmienny, to tylko dlatego, że p_G , przy średnicy spłaszczenia zbliżonej do 3,06 mm, niemal *nie zależy* od tej średnicy, co wynika z rozwiązań numerycznych modelu nieliniowego pokazanych na rys. 8.1. (Równie dobra jak D_{aplan} jest np. $d = 3,6$ mm.)

Niezmiernie istotna okazuje się niezależność ciśnienia p_G , mierzonego w pobliżu ekstremum, od indywidualnych różnic sprężystości materiału rogówki. Z rysunku 8.1 wynika, że położenie minimum p_G dla materiału $M4$ pojawia się przy nieco mniejszym promieniu r (o około 0,2 mm) niż dla $M2$, ale odchylenie p_G od p w dużym zakresie zmian tego promienia jest nieznaczne. W pobliżu tego minimum wyniki pomiaru ciśnienia p_G , mierzonego na rogówkach różniących się jedynie materiałem, są prawie takie same, także dla $p \neq 16$ mmHg. Mimo że materiały od $M2$ do $M4$ określone zostały tak, aby jedynie spełnić kryterium $p_G = p = 16$ mmHg, to uzyskane dla modeli z tych materiałów odczyty p_G dla $p = 5$ mmHg i $p = 48$ mmHg także są identyczne, chociaż wtedy odczytywane wartości ciśnienia bardzo się różnią od p (rys. 7.3). To jest niezwykle cenny rezultat, oznacza on, że wynik pomiaru ciśnienia w GAT nie zależy od parametrów materiałowych rogówki.

Goldmann nie był pierwszy, który zmierzył się z problemami tonometrii. Przed nim, jeszcze pod koniec XIX wieku, Maklakoff (1885) zbudował tonometr i mierzył nim ciśnienie wewnątrzgałkowe, ale obciążenie wymuszał kinetycznie. Na rogówkę pacjenta ułożonego na wznak opuszczał płaski ciężarek o ustalonej masie. Nie narzucał zatem średnicy powierzchni aplancji, lecz siłę. Wartość tej siły dobrał tak, aby średnica powierzchni – zależna od ciśnienia wewnątrzgałkowego – zawierała się

w przedziale 3–4 mm. Doświadczenia te szybko doprowadziły do kinematycznego wymuszania obciążenia, ponieważ tonometr zaprojektowany przez Ficka mierzył już siłę po spłaszczeniu rogówki na średnicy ustalonej przez Maklakoffa. Nie można jednak wątpić, że kiedy pół wieku później Goldmann wybierał średnicę spłaszczenia 3,06 mm dla swojego znacznie dokładniejszego przyrządu, kierował się zaobserwowaną już przez Maklakoffa dużą tolerancją wyniku p_G na zmienność powierzchni aplanacji w trakcie wykonywania pomiaru (ale przede wszystkim faktem równoważenia się przy tej średnicy ciśnień p_G i p , gdy pomiar wykonywany jest w pobliżu p równego 16 mmHg \pm 4 mmHg). Maklakoff dostosował doświadczalnie swoją technikę pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego p do zjawiska, którego ekspresją mechaniczną są rozwiązania powłoki przedstawione na rysunku 8.1. Przyjęty przez niego zakres średnic strefy aplanacji dokładnie pokrywa się z przedziałem „stałego” ciśnienia p_G uzyskanym z rozwiązań numerycznych.

Wybór D_{aplan} nie ma więc związku z napięciem powierzchniowym filmu łzowego, podobnie jak wybór pozostałych wymiarów kalibracyjnych (6.2). Eksperyment mógł jedynie doprowadzić każdego z tych badaczy do konkluzji, że ciśnienia p_G i p są wtedy równe. Wiele trudniej było zauważyć, że tak jest tylko dla ciśnienia zbliżonego do nominalnego lub mniejszego. A już całkiem mało prawdopodobne było wykazanie, że przyczyna tkwi w geometrycznie nieliniowej naturze konstrukcji, jaką jest rogówka. Goldmann, próbując uzasadnić fizykalnie równość (7.1) zachodzącą pomimo oporu zginania F_s , postawił na działanie siły napięcia powierzchniowego. To była „ruletka”. Postawił, i przegrał. Ale pomysł był oryginalny, a także bardzo wiarygodny. W tamtym czasie, i na gruncie mechaniki liniowej, niewiele więcej mógł dokonać – jako lekarz. Dzisiaj możliwości obliczeniowe mechaniki konstrukcji są nieporównanie większe, niestety twórcy nowych odmian tonometrii nadal kurczowo trzymają się pomysłów Goldmanna. Nawet wtedy, gdy nie ma to sensu.

Opór spłaszczania wierzchołka rogówki jest ujemny. Z rozwiązań zamieszczonych na rysunku 8.2, otrzymanych dla odległych od siebie materiałów $M2$ i $M4$ wynika, że powyżej $p = 16$ mmHg ciśnienie p_G zawsze musi być mniejsze od p . Ten warunek jest trudny do intuicyjnego zaakceptowania. Oznacza on, że strefa spłaszczenia jest *wciągana do wnętrza oka* przez otaczającą ją część rogówki, zamiast być – jak się wydaje – przez nią wypychana na zewnątrz. Zasadniczo zmienia to podstawy teoretyczne GAT. O tym, że p_G bywa mniejsze od p Goldmann wiedział i aby to wytłumaczyć, wprowadził siłę napięcia powierzchniowego F_s , ale w rozwiązaniach numerycznych podanych na rys. 8.2, ta różnica ciśnień pojawia się *bez udziału* siły F_s . Ciśnienie p_G mniejsze od p wydaje się wówczas przeczyć prawom mechaniki! Pewnie tak to odebrał Goldmann, a jego zdziwienie wtedy tym faktem byłoby tak samo uzasadnione, jak uzasadnione jest nasze zdziwienie tym, że dzisiaj nikogo ten fakt nie dziwi. A przecież powinien, bo warunek (6.10) jest dla każdego łatwo dostępny.

Przekonanie, że „opór zginania” rogówki zawsze musi być pokonywany siłą zwróconą *do wnętrza* gałki ocznej bierze się z intuicji nabytej podczas rozwiązywania kon-

strukcji geometrycznie liniowej. Przykładem takiej konstrukcji jest kładka dla pieszych obciążona kilkoma przechodniami (a także rogówka dla p zbliżonego do zera). Dodanie ciężaru kolejnego przechodnia wywołuje dodatkowe przemieszczenia o wartości takiej samej jak po obciążeniu kładki tylko tym jednym przechodniem – przemieszczenia konstrukcji pochodzące od kolejnych obciążeń można superponować. Inaczej jest w przypadku konstrukcji geometrycznie nieliniowej. Z taką mamy do czynienia w zagadnieniach stateczności. Słup podtrzymujący duży ciężar G – zbliżony do obciążenia krytycznego, przy którym ulegnie on wyboczeniu – łatwo jest zdeformować nawet niewielką siłą poprzeczną. Wywołane tą siłą dodatkowe przemieszczenia są znacznie większe, niż gdyby na słup nie działał ciężar z góry. Przemieszczenia od sił przykładanych kolejno do tak obciążonej konstrukcji nie można superponować – taka konstrukcja nie jest geometrycznie liniowa.

Przeprowadzona w podrozdziale 7.1.4.1 dyskusja wyników obliczeń, zatytułowana *Problem stateczności powłoki rogówkowej z materiału liniowo-sprężystego*, wiąże uzyskane dla tej powłoki rozwiązanie z zagadnieniem stateczności konstrukcji. Z kolei *Przykład rozwiązania* podany w podrozdziale 8.1.1.2 wskazuje, że problem ten dotyczy także powłoki nieliniowo-sprężystej. Chociaż w tym drugim przypadku funkcja $p_G(p)$ monotonicznie rośnie (w przeciwieństwie do funkcji dla powłoki fizycznie liniowej) to jednak różnica $(p_G - p)$ wykazuje ten sam, charakterystyczny trend – ze wzrostem p jest coraz bardziej ujemna (rys. 7.3). Początkowo ten efekt jest niezauważalny, a przyrostom ciśnienia p towarzyszą niemal takie same przyrosty p_G . Kiedy jednak ciśnienie wewnętrzne przekracza 10 mmHg, odchylenie p_G od p staje się widoczne i szybko narasta. Zjawisko przypomina opisany przypadek słupa obciążonego siłą G . Gdy ta siła jest niewielka, przemieszczenia od siły poprzecznej F są do niej proporcjonalne, ale po osiągnięciu przez siłę ściskającą G wartości zbliżonej do krytycznej, przemieszczenia od siły poprzecznej F stają się znacznie większe (albo te same przemieszczenia pojawiają się dla znacznie mniejszej siły poprzecznej). Ciśnienie p odgrywa w tej analogii rolę siły G , a ciśnienie p_G – siły F . Na rysunku 8.2 widać, że narastaniu ciśnienia p towarzyszy *zmniejszanie sztywności* powłoki rogówkowej, ponieważ do wciąż tego samego przemieszczenia jej wierzchołka wystarcza ciśnienie p_G coraz mniejsze względem p . W punkcie równowagi (7.1) aplanacja zachodzi, gdy ciśnienia wewnętrzne i zewnętrzne są sobie równe, ale do spłaszczenia wierzchołka rogówki, gdy $p = 48$ mmHg, wystarcza już ciśnienie $p_G = 37$ mmHg – znacznie mniejsze od p . Powyżej punktu równowagi opór stawiany przez powłokę podczas spłaszczania, pokonywany różnicą ciśnień p_G i p , maleje tak bardzo, że staje się ujemny. Przemieszczenia z tym spłaszczeniem związane pojawiają się wówczas spontanicznie – jak we wspomnianym przypadku słupa przy obciążeniu krytycznym.

Z uzyskanych rozwiązań wynika zatem, że różnica ciśnień $p_G - p < 0$ nie pochodzi od napięcia powierzchniowego w filmie łzowym, a mechanika spłaszczenia wierzchołka rogówki daleka jest od wyobrażeń, które posłużyły do sformułowania postulatów tonometrii aplanacyjnej od (6.4) do (6.9). Opisywane zjawisko jest

przejawem niestateczności powłoki rogówkowej podczas jej spłaszczenia. Wynikają z tego istotne konsekwencje teoretyczne dla obliczanych poprawek w GAT. Przede wszystkim oznacza to, że w ten sposób już samo ciśnienie p staje się jednym z parametrów kalibracyjnych, bo do zapewnienia równości $p_G = p$ konieczne jest, oprócz (6.2), spełnienie dodatkowo warunku (7.1). Na przykład do odczytanego na tonometrze ciśnienia $p_G = 31,6$ mmHg należy dodać poprawkę 8,4 mmHg, aby otrzymać ciśnienie wewnątrzgałkowe – mimo że pomiar wykonany jest na rogówce o wymiarach kalibracyjnych. W tym przypadku korekcja odczytu p_G ze względu na samo tylko ciśnienie p staje się równie duża jak największa korekcja z powodu odchylenia CCT od wartości kalibracyjnej (patrz tab. 6.1). Przedstawione wyniki mają też znaczenie praktyczne. Tonometr aplanacyjny Goldmanna, choć całkiem nieźle pokazuje ciśnienie zbliżone do nominalnego, to *zawsze je zaniża* dla nadciśnienia. Przyczyną tego błędu *nie jest tonometr* (przyrząd ten może nawet bardzo dokładnie mierzyć ciśnienie p_G), wadliwe jest „rozwiązanie” powłoki (6.1). Równanie (6.1) jest słuszne dla płaskiej błony (patrz *Dodatek*), a nawet w postaci (7.1) sprawdza się dla (rzeczywistej) powłoki rogówkowej, ale równość (7.1) należy traktować jako szczególny zbieg mechanicznych okoliczności. To nie jest reguła ogólna – „prawo”, słuszna dla *dowolnego* ciśnienia p . Powyżej punktu równowagi (7.1) obciążona ciśnieniem część rogówki, otaczająca strefę aplanacji, pełni rolę, której nie byliśmy świadomi, a skutki, do jakich prowadzi w GAT, są dziś mylnie interpretowane.

Omawiane dotąd problemy dotyczą modelu o wymiarach kalibracyjnych, ideału, są więc zaledwie zapowiedzią tego, co napotkamy w realnym świecie, gdzie rogówka może przyjmować postać odległą od tego ideału.

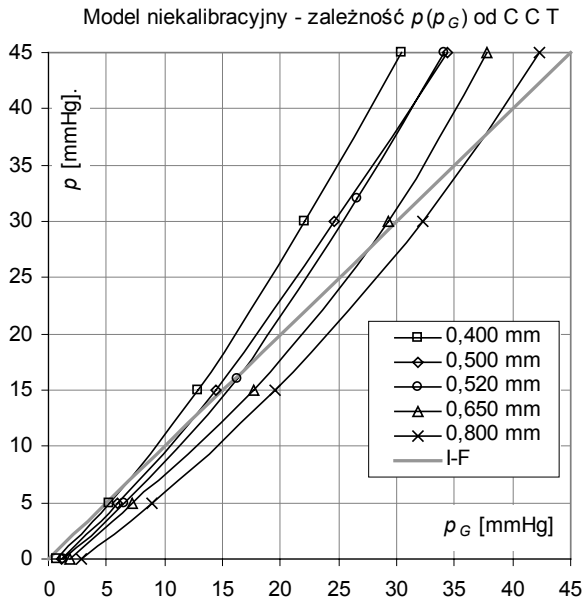
8.1.2. Model niekalibracyjny

Dużym problemem tonometrii aplanacyjnej jest wynik pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego, wymagający korekcji ze względu na indywidualne parametry geometryczne rogówki. Największy, rozpoznany dotąd, wpływ na ten wynik ma grubość CCT rogówki (w osi). Sytuację dodatkowo komplikuje nowa okoliczność, nieznaną w czasach Goldmanna – zaburzenia geometrii rogówki wprowadzane przez chirurgię refrakcyjną. Obecnie wartość korekcji odczytu p_G zależy nie tylko od CCT, zależy także – w przypadku pacjenta po takiej operacji – od rodzaju i parametrów zabiegu, który przeszedł. Analiza zjawisk towarzyszących GAT wymaga więc dzisiaj znacznie bardziej złożonego modelu mechanicznego gałki ocznej niż w czasach Goldmanna.

W kolejnych podrozdziałach badany jest jeden z największych problemów tonometrii aplanacyjnej, zagadnienie korekcji wyniku pomiaru ciśnienia p_G ze względu na grubość i promień krzywizny rogówki. Do dzisiaj czeka ono na rozwiązanie i można sądzić, że na gruncie GAT osiągnięcie sukcesu jest niemożliwe.

8.1.2.1. Zależność p_G od CCT

Zagadnienie korekcji wyniku pomiaru ciśnienia wewnątrzgąłkowego ze względu na wpływ CCT stanowi stały element tej techniki pomiarowej, gdyż pomiar ciśnienia na oku o wymiarach kalibracyjnych należy do wyjątkowych. W przeciwieństwie do rozwiązań omawianych w podrozdziałach 7.1.1 i 8.1.1, gdzie ciśnienie goldmanowskie p_G przedstawiane było jako *funkcja* ciśnienia wewnątrzgąłkowego, w tym rozdziale i w następnych obliczenia dotyczą problemu odwrotnego – funkcyjnej zależności ciśnienia p od ciśnienia p_G wskazywanego przez tonometr. Naturalne jest więc traktowanie ciśnienia p_G jako zmiennej niezależnej, a rezultatu obliczeń – ciśnienia wewnątrzgąłkowego p – jako zmiennej zależnej. Funkcje $p(p_G)$, uzyskane z rozwiązań numerycznych dla kilku wybranych wartości CCT, ilustrują wykresy pokazane na rys. 8.5.

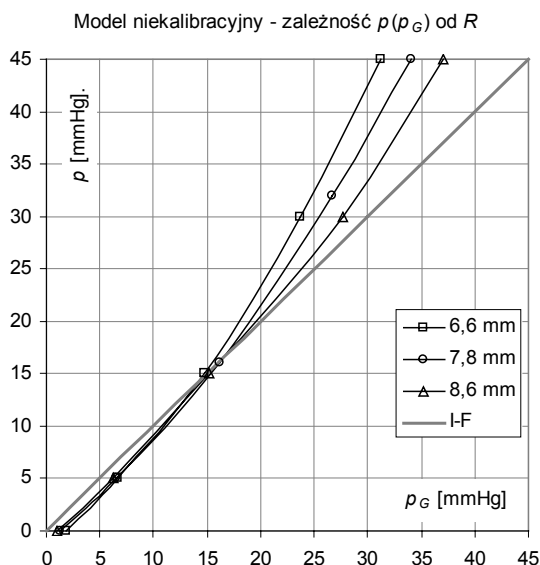


Rys. 8.5. Wyznaczone numerycznie krzywe $p(p_G)$ dla pięciu grubości rogówki CCT. Promień krzywizny rogówki $R = 7,8$ mm. Materiał $M2$

Krzywe powielają kształt wykresu uzyskanego dla modelu kalibracyjnego, oznaczonego tutaj 0,520 mm. Dla kolejnych coraz większych grubości rogówki punkt równowagi ciśnień przesuną się w górę, tak więc dla CCT = 0,4 mm równość $p_G = p$ zachodzi przy około 7 mmHg, dla CCT = 0,5 mm – przy ok. 13 mmHg, dla CCT = 0,52 mm – przy 16 mmHg, dla CCT = 0,65 mm – przy ok. 28 mmHg, a dla CCT = 0,8 mm ciśnienia zrównują się dopiero przy 38 mmHg.

8.1.2.2. Zależność p_G od promienia krzywizny rogówki

Na rysunku 8.6 wykreślone zostały serie rozwiązań modelu z rogówką o wierzchołkowym promieniu krzywizny $R = 6,6$ mm i $R = 8,6$ mm. Dla porównania umieszczono tam również wyniki otrzymane dla rogówki o promieniu kalibracyjnym $R = 7,8$ mm. Przebieg wykresów niewiele się różni w wypadku niskiego ciśnienia, a powyżej ciśnienia nominalnego różnice sięgają kilku milimetrów słupa rtęci.



Rys. 8.6. Wyznaczone numerycznie krzywe $p(p_G)$ dla trzech promieni krzywizny rogówki. Materiał M2. CCT = 0,520 mm. Wykres dla $R = 7,8$ przeniesiony został z rys. 8.5

Ewolucja wykresu dla kolejnych, coraz większych, promieni rogówki R jest teraz inna niż na poprzednim rysunku, gdzie przyrastała CCT. Ze wzrostem R funkcja $p(p_G)$ zdaje się prostować, jednocześnie obierając kierunek prostej Imberta–Ficka. Większy promień rogówki to nieco wyżej na wykresie położony punkt $p = p_G$, ale tutaj odległość między punktami równowagi dla skrajnych wartości R jest znacznie mniejsza niż poprzednio, dla skrajnych wartości CCT; w pobliżu ciśnienia nominalnego wpływ R na mierzone ciśnienie p_G jest niewielki. Staje się on wyraźniejszy powyżej ciśnienia nominalnego, ale nawet przy $p = 45$ mmHg symulowane odchylenie wskazania tonometru p_G od wskazania dla modelu kalibracyjnego nie przekracza 3 mmHg. To wyraźnie mniejsze odchylenia niż dla skrajnych wartości CCT. Natomiast znacznie większe są poprawki do p_G . Wskazanie tonometru wynoszące 30 mmHg należy przeliczyć na 42,5 mmHg dla $R = 6,6$ mm, a na 33 mmHg dla $R = 8,6$ mm.

To jednak, co jest najbardziej znamienne w wykresach na rysunku 8.6, wykracza poza uzyskane rozwiązania. Rosnący promień R sprawia, że wykres funkcji $p(p_G)$ coraz ściślej przylega do prostej $p = p_G$. Ekstrapolując te wyniki, można się spodziewać, że gdy promień R zdąży do nieskończoności, wykresy obu funkcji, $p(p_G)$ i $p = p_G$, staną się równoległe. Inaczej mówiąc, gdy maleje krzywizna powłoki przed spłaszczeniem, po spłaszczeniu ciśnienia po obu jej stronach zbliżają się do siebie, niezależnie od tego jak są duże, a w granicy, gdy $R \rightarrow \infty$, spełnia się ideał (6.1), czyli prawo Imberta–Ficka.

Widać, że w relacji między funkcjami $p(p_G)$ i $p = p_G$, wraz z rosnącym parametrem R , nie to jest najważniejsze czy ciśnienie równowagi rośnie, czy maleje (tutaj rośnie, w prognozach GAT – maleje). Istotą tej relacji jest nieokreśloność rozwiązania układu obu tych równań, ich *złe uwarunkowanie numeryczne*. Ponieważ rosnący promień krzywizny rogówki sprawia, że obie funkcje, $p(p_G)$ i $p = p_G$, stają się coraz bliższe i coraz bardziej „równoległe”, więc coraz też trudniej jest znaleźć liczbową wartość ciśnienia równowagi po obu jej stronach, czyli coraz trudniej jest znaleźć *rozwiązanie* – punkt przecięcia obu linii. To spostrzeżenie ma znaczenie praktyczne: wszelkie próby badania *in vivo* wpływu promienia R na korekcję p_G , zawsze będą obarczone dużymi błędami. Właśnie dlatego ten współczynnik korekcji budzi najwięcej kontrowersji i faktycznie nadal pozostaje nieznan. Nawet co do znaku.

8.1.2.3. Co wynika z tych rozwiązań

Charakterystyczny kształt wykresów $p(p_G)$ pokazanych na rysunku 8.5 – początek poniżej zera (p jest ujemne dla $p_G = 0$), nachylenie początkowe tym mniejsze, im większa jest CCT i wypukłość w dół – sprawia, że każdy model, o dowolnej grubości rogówki, ma swój indywidualny poziom ciśnienia wewnętrznego, przy którym ciśnienie zewnętrzne jest mu równe. Taka możliwość zrównania się ciśnienia mierzonego p_G z wewnątrzgałkowym p dla *różnych grubości rogówki* wydaje się może oczywista dla modelu oka, ale jeśli tak, to GAT, w której postulowane są wymiary kalibracyjne i słuszność prawa Imberta–Ficka, mocno nas tutaj zawodzi. Teoria Goldmanna mówi bowiem, że jeżeli CCT jest różna od 0,52 mm lub promień rogówki R jest różny od 7,8 mm, to już dla *żadnego* ciśnienia wewnątrzgałkowego nie zajdzie równość $p = p_G$. Teza ta sugeruje zatem, że w modelu o wymiarach kalibracyjnych tkwi jakaś tajemna, niepojęta doskonałość, wytyczająca *jakościową* różnicę między nim a *każdym innym* modelem. Ten szczególny model – kalibracyjny – nie tylko miałby zapewniać równość obu ciśnień, ale w dodatku ta, tak pożądana w tonometrii, równość zachodziłaby w *całym, fizjologicznym, zakresie* ciśnienia wewnątrzgałkowego. Sytuacja taka powinna niezmiernie ułatwiać pomiar IOP techniką GAT, czyż nie?

Otóż nie! Tak sformułowane podstawy mechaniczne tonometrii, pobudzają raczej do podejrzeń niż do wdzięczności dla ich twórców. Jeśli bowiem prawo Imberta–Ficka i pomysł z wymiarami kalibracyjnymi gałki ocznej miały zmniejszyć pro-

blemy GAT, to dlaczego nadal nie ma formalnego opisu zależności $p(p_G)$ od CCT lub R ? Bo chyba trudno uznać za taki równanie (8.1). Nie pochodzi ono przecież z rozwiązania konstrukcji, jest tylko kolejną próbą zgadnięcia jego fenomenologicznej postaci.

Warto też zauważyć, w którą stronę przemieściły się wykresy $p(p_G)$ dla R różnego od wartości kalibracyjnej 7,8 mm, rys. 8.6. Rozwiązania liniowe modeli zachowujących stały stosunek R/CCT są jednakowe – ta teza pojawiła się w podrozdziale 8.1.1.3 i dotyczyła wpływu D_{aplan} . Rozważając teraz ponownie przypadek rogówki o promieniu krzywizny R o 10% większym od wartości kalibracyjnej, można sądzić – odwołując się do natury rozwiązań liniowych – że także CCT powinna wzrosnąć o 10% dla zachowania proporcji i stałego wskazania tonometru p_G . Jeśli jednak CCT nie wzrosnie, zachowując wartość kalibracyjną, to grubość rogówki staje się relatywnie *mniejsza*, zatem p_G powinno *zmaleć*. Porównując wyniki na rysunkach 8.5 i 8.6 widać, że tak właśnie jest, ale tylko w zakresie *niskiego* ciśnienia p , bliskiego zera, gdy konstrukcja najbardziej przypomina model liniowy (a w dodatku różnice między wykresami są niewielkie). Natomiast dla wysokiego ciśnienia, powyżej wartości nominalnej, zależność ta ulega odwróceniu – z rozwiązań numerycznych dla powłoki rogówkowej o promieniu większym od kalibracyjnego, rys. 8.6, wynika, że także p_G jest wówczas *większe*. Ten trend jest *przeciwny do przewidywań opartych na modelu liniowym*, preferowanym w GAT.

W tabeli 8.1 przytoczony został fragment tabeli 3 z pracy Orssengo i Pye [1999]. Autorzy podają w niej przewidywane wartości współczynnika korekcji K_g , zdefiniowanego w równaniu (6.3). Pierwszy i ostatni wiersz jest ekstrapolacją ich danych, dokonaną tutaj na użytek porównań z analizowanymi rozwiązaniami numerycznymi. Z danych zawartych w tabeli wynika, że wzrastająca grubość rogówki, dla stałego promienia R , powoduje wzrost współczynnika K_g , i że powyżej $CCT = 0,520$ mm współczynnik ten jest większy od jedności ($p_G > p$). Pod tym względem wynik jest jakościowo zgodny z rozwiązaniami numerycznymi, podanymi na rys. 8.5. Zmniejszanie się jednak współczynnika korekcji K_g przy rosnącym promieniu krzywizny rogówki R jest trendem odwrotnym do uzyskanego w rozwiązaniach widocznych na rys. 8.6, może się więc pojawić jedynie w modelu *liniowym* (czyli przy wzrastającym promieniu R ciśnienie p_G staje się coraz mniejsze względem p). Łatwo sprawdzić, że taki trend jest z pewnością niepoprawny, oznaczałby bowiem, że w granicy, gdy promień krzywizny R zdąży do nieskończoności, ciśnienia po obu stronach płaskiej wówczas błony będą *różne*, a to przeczy warunkowi równowagi.

Najmniejsza wartość współczynnika K_g schodzi poniżej 0,8, sygnalizując znaczące obniżenie wskazania tonometru p_G względem p . Korekcja liczona według (8.1) zależy na szczęście od ciśnienia p , nie jest więc aż tak wielka, jak przewiduje to tab. 6.1, gdzie poprawki są duże i podawane bez względu na wartość ciśnienia. Problem z poprawką obliczaną według (8.1) polega jednak na tym, że dla wysokiego ciśnienia p część poprawki, zależna faktycznie od ciśnienia, przypisywana jest CCT.

Tabela 8.1. Współczynnik korekcji K_g wg Orssengo i Pye

CCT [mm]	R [mm]				
	7,00	7,40	7,80	8,20	8,60
0,40*			0,67		
0,44	0,82		0,78		0,77
0,48			0,89		
0,50			0,94		
0,52	1,06	1,03	1,00	0,98	0,97
0,56			1,12		
0,60	1,33		1,24		1,19
0,65*			1,40		

* Wartość ekstrapolowana poza zakres podany przez O&P.

8.1.3. Analityczny opis funkcji $p(p_G)$ w modelu niekalibracyjnym

W swej pierwotnej postaci, podanej przez Goldmanna, funkcja $p(p_G)$ była liniowa, o współczynniku kierunkowym równym jedności i przechodziła przez początek układu współrzędnych – równanie (6.1). Twórcy zmodyfikowanego prawa Imberta–Ficka (6.3) zakwestionowali współczynnik kierunkowy równy jedności, uzależniając go od CCT i R . Jednak z przedstawionych na rysunkach 8.5 i 8.6 rozwiązań wynika, że i pozostałych ograniczeń nie da się utrzymać – wykres funkcji $p(p_G)$, jak widać, ani nie przechodzi przez początek układu współrzędnych, ani nie jest liniowy. I nie chodzi tu o nieliniowość „estetyczną”, którą da się ominąć przez wykreślenie prostej grubszą linią (nie są to „dywagacje akademickie”). Zaobserwowana nieliniowość wynika z *rozwiązań modelu geometrycznie nieliniowego*. Jego użycie nie jest tu kwestią estetyki – jest koniecznością, gdyż uzyskiwane dzięki niemu rozwiązania są *jakościowo* różne od rozwiązań liniowych, preferowanych w tonometrii aplanacyjnej.

Przedstawione wyniki można osadzić w dotychczasowej konwencji, wypracowanej w GAT. Liniową zależność między ciśnieniami p i p_G należy uzupełnić składnikiem kwadratowym. Tu jednak kończy się podobieństwo ze zmodyfikowanym prawem Imberta–Ficka, każdy bowiem z trzech składników ma teraz inną interpretację.

8.1.3.1. Aproksymacja kwadratowa

Zależność (6.3), określaną jako zmodyfikowane prawo Imberta–Ficka,

$$p = K_g^{-1} p_G, \quad (8.1)$$

zastępujemy funkcją kwadratową

$$p = a + b p_G + c p_G^2. \quad (8.2)$$

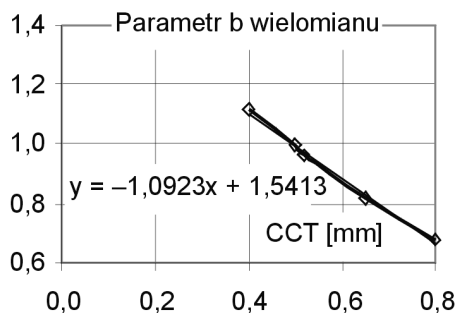
Parametry wielomianów drugiego stopnia, aproksymujących rozwiązania numeryczne przedstawione na rys. 8.5, zebrane zostały w tabeli 8.2.

Tabela 8.2. Współczynniki wielomianów drugiego stopnia, aproksymujących krzywe na rys. 8.5

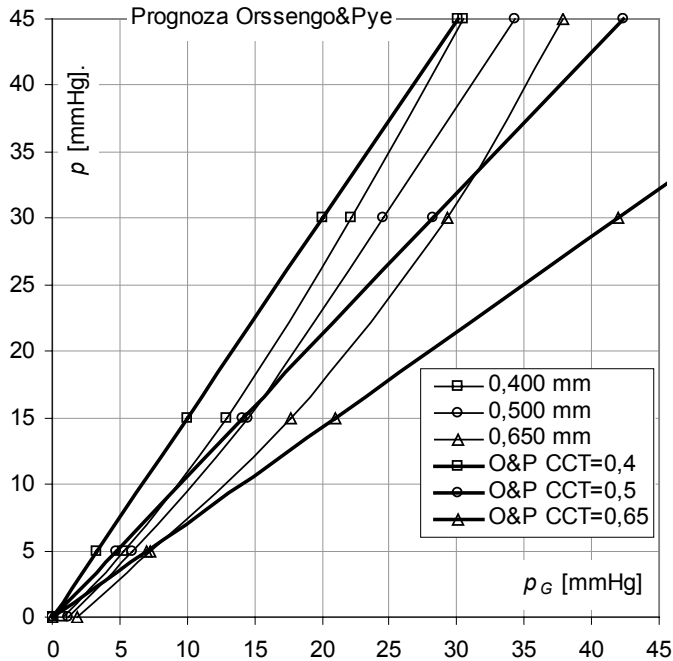
CCT	a	b	c
0,400	-1,24	1,117	0,0131
0,500	-1,28	0,996	0,0099
0,520	-1,79	0,963	0,0105
0,650	-1,99	0,816	0,0107
0,800	-2,00	0,680	0,0100

Z danych zawartych w tabeli 8.2 wynika, że przynajmniej dwa pierwsze współczynniki wielomianu (8.2), to jest a i b , zależą od grubości rogówki CCT. Przyjmijmy dla wszystkich trzech aproksymację liniową. Proste regresji otrzymują postać:

$$\begin{aligned} a &= -2,053 \text{ CCT} - 0,482, \\ b &= -1,092 \text{ CCT} + 1,541, \\ c &= -0,0053 \text{ CCT} + 0,014. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Rys. 8.7. Zależność współczynnika b (8.3) od CCT

Współczynnik b w składniku liniowym równania (8.2) jest związany ze współczynnikiem K_g^{-1} w (8.1) – jest mu równy przy p_G zdążającym do zera. Widać, że gdy CCT zbliżona jest do wartości kalibracyjnej, współczynnik b jest bliski jedności – rysunek 8.7. Ponieważ równanie (8.1) dopuszcza zmiany współczynnika kierunkowego, nasuwa się tu możliwość porównania funkcji (8.1) z funkcją kwadratową (8.2), uzupełnioną równaniami (8.3). Współczynnik K_g^{-1} , obliczony przez Orssengo i Pye dla rogówek o grubościach 0,400, 0,500 i 0,650 mm, wynosi odpowiednio: 1,49, 1,06 i 0,71 (odwrotności K_g z tab. 8.1). Można porównać rezultaty, do jakich prowadzi każda z tych funkcji dla trzech wybranych grubości CCT – rysunek 8.8.

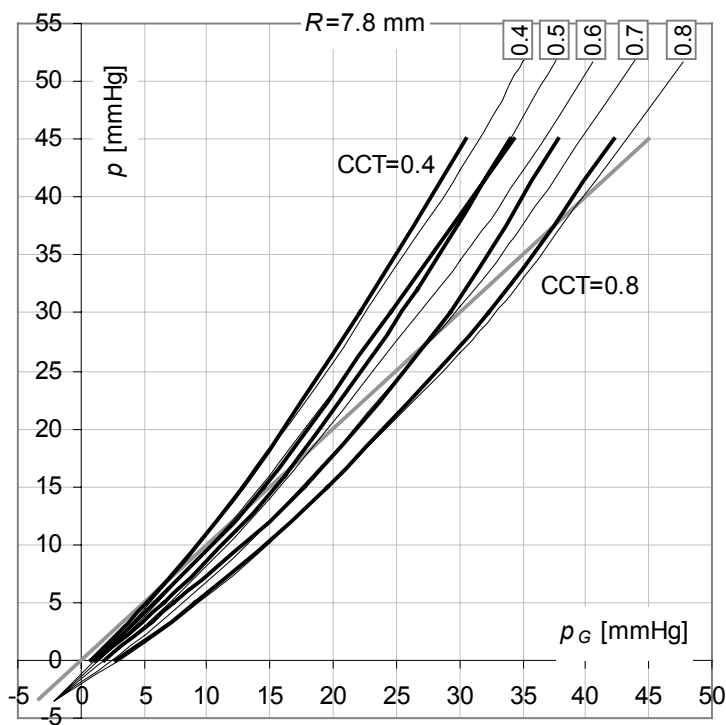


Rys. 8.8. Porównanie trzech serii rozwiązań przedstawionych na rys. 8.5 z przewidywaniem teoretycznym Orssengo i Pye – linie pogrubione

Charakterystyczna w prognozie Orssengo i Pye jest duża różnica współczynnika kierunkowego K_g^{-1} między modelami o skrajnych wartościach CCT, to jest 1,49 dla CCT = 0,400 mm i 0,71 dla CCT = 0,650 mm. Odpowiednie krzywe dla modelu numerycznego wykazują znacznie mniejszą rozpiętość wartości współczynnika b , który dla tych dwóch grubości rogówki wynosi odpowiednio 1,12 i 0,82 – tabela 8.2. Na takie przeszacowywanie poprawek ciśnienia obliczanych dla modelu Orssengo i Pye zwracają uwagę Gunvant i in. [2005].

Szczególnie duża rozbieżność wyników dotyczy CCT = 0,65 mm. Na przykład odczyt $p_G = 38$ mmHg oznacza według Orssengo i Pye $p = 27$ mmHg, gdy tymczasem rozwiązanie numeryczne przewiduje ciśnienie $p = 45$ mmHg (rys. 8.8). To już nie jest różnica ilościowa – wyniki korekcji różnią się jakościowo: poprawka obliczona według procedury Orssengo i Pye sugeruje, że tonometr *zawyżył* rzeczywiste ciśnienie o 11 mmHg, tymczasem rozwiązania dla modelu biomechanicznego wskazują na coś wręcz odwrotnego, że *zaniżył* o 7 mmHg.

Na rysunku 8.9 wykreślono linie stałej wartości CCT wynikające z aproksymacji (8.2) i (8.3) – cienkie linie, a na ich tle powtórzone są wykresy z rys. 8.5 – grube linie.



Rys. 8.9. Linie stałej wartości CCT od 0,4 do 0,8, co 0,1 mm wyznaczone według (8.2) i (8.3). Na ich tle umieszczone są wykresy z rys. 8.5 – linie pogrubione. Materiał M2, $R = 7,8$ mm.

Serie rozwiązań widoczne na rys. 8.9, stanowią uogólnienie wyników, dotyczących (rozdz. 7 i 8.1.1) ograniczonych do grubości rogówki $CCT = 0,520$ mm. Uwzględnienie roli, jaką w rozwiązaniach odgrywa CCT, pozwala lepiej określić średnie parametry modelu. Warunek (7.1) najlepiej spełniony jest przez model o grubości rogówki 0,550 mm. Ponieważ wartość ta przyjmowana jest w literaturze równie często jak 0,520 mm (szczegół ten wspomniany został w podrozdziale 4.2), w podrozdziałach 8.1.2 i 8.1.3 wartość 0,550 mm określana jest jako *kalibracyjna*.

Kohlhaas i in. [2006], którzy optują za wartością 0,550 mm, tak objaśniają różnicę preferencji w wyborze grubości rogówki: *W badaniach Ehlersa i in. [1975] ciśnienia p i p_G stawały się równe przy grubości 0,520 mm, w naszych równość zachodziła przy 0,550 mm. Ta różnica 30 mikrometrów wydaje się być spowodowana użyciem różnych technik pomiaru CCT. Ehlers i in. użyli pachymetru optycznego, który daje niższe wskazania niż pachymetr ultradźwiękowy użyty przez nas.*

Wybór między grubością 0,520 a 0,550 mm, bez względu na powód, nie ma wpływu na interpretację jakościową omawianych wyników.

8.1.3.2. Propozycja opisu analitycznego

Rodzina funkcji (8.2), sparametryzowanych grubością rogówki (8.3), wykazuje kilka szczególnych właściwości, ułatwiających opis analityczny zależności $p(p_G)$. Wszystkie te funkcje przecinają się w jednym punkcie (co widać na rys. 8.9), o współrzędnych

$$(p_G^{(0)}, p^{(0)}) = (-2,05, -3,44). \quad (8.4)$$

Okazuje się też, że w układzie współrzędnych p_G', p' :

$$p_G' = p_G - p_G^{(0)}, \quad (8.5a)$$

$$p' = p - p^{(0)}, \quad (8.5b)$$

wielomian (8.2) spełnia warunek

$$\frac{p'|_{CCT_2} - p'|_{CCT_1}}{p'|_{CCT_{kalibr}}} \approx \text{const} \quad (8.6)$$

niezależnie od ciśnienia p_G' . Czyli różnica ($p'|_{CCT_2} - p'|_{CCT_1}$) jest proporcjonalna do funkcji $p'|_{CCT_{kalibr}}$ modelu o kalibracyjnej grubości rogówki. Ta szczególna funkcja ciśnienia, dla rogówki o wymiarach kalibracyjnych, oznaczana będzie dalej p'_{kalibr} . Traktując licznik w wyrażeniu (8.6) jako przyrost ciśnienia p_G na skutek przyrostu grubości rogówki względem wartości kalibracyjnej ($CCT_1 = CCT_{kalibr}$), można napisać

$$p' = W p'_{kalibr}. \quad (8.7)$$

Współczynnik bezwymiarowy, liniowo zależny od grubości rogówki CCT, jest równy jedności, gdy CCT przyjmuje wartość kalibracyjną:

$$W = e (CCT_{kalibr} - CCT) + 1, \quad (8.8)$$

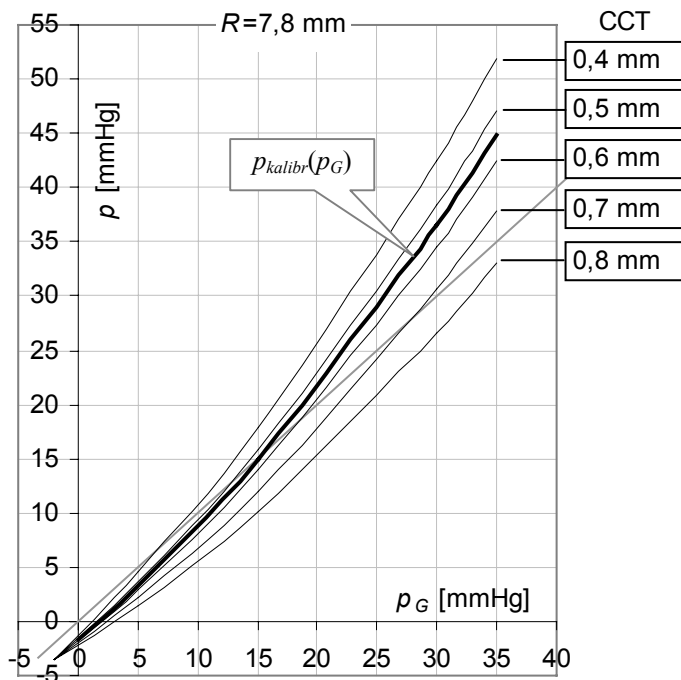
e jest stałą.

Na rysunku 8.10 przedstawiono właściwości rozwiązania $p(p_G)$, zawarte w równaniach od (8.4) do (8.8).

Wyrażenie (8.7), po zastosowaniu transformacji (8.5b), można zapisać w bliższym praktyki układzie współrzędnych p i p_G . Dla dowolnej wartości CCT funkcja $p(p_G)$ przyjmuje postać:

$$p(p_G) = W (p_{kalibr} - p^{(0)}) + p^{(0)}, \quad (8.9)$$

gdzie współczynnik W dany jest wyrażeniem (8.8).



Rys. 8.10. Cechy szczególne rodziny krzywych (8.2) z parametrami (8.3): różnice ciśnienia p między funkcjami wykreślonymi dla pięciu wartości CCT są jednakowe dla ustalonej wartości p_G i wszystkie te funkcje przecinają się w jednym punkcie: $(-2,05; -3,44)$. Różnica między dwiema funkcjami jest w przybliżeniu proporcjonalna do $(p_{\text{kalibr}} + 3,44)$

Funkcja $p_{\text{kalibr}}(p_G)$ jest wielomianem drugiego stopnia (8.2) o współczynnikach obliczanych według (8.3). Po podstawieniu tam $\text{CCT} = 0,55 \text{ mm}$:

$$a = -1,61, b = 0,940, c = 0,0111, \quad (8.10)$$

zatem

$$p_{\text{kalibr}} = -1,61 + 0,94 p_G + 0,0111 p_G^2. \quad (8.11)$$

Na rysunku 8.10 funkcja p_{kalibr} zaznaczona została pogrubioną linią. Należy ona do tej samej kategorii, co pozostałe funkcje na tym rysunku, a więc opisana jest równaniami (8.2) i (8.3), w których $\text{CCT} = 0,550 \text{ mm}$. Rozwiązania te można traktować jak wzorzec teoretyczny albo jak wynik doświadczenia przeprowadzonego z bardzo dużą dokładnością (procedury obliczeniowe uwzględniają wszystkie podstawowe równania mechaniki ośrodka ciągłego wraz z efektami nieliniowymi).

Równanie (8.9) jest natomiast propozycją fenomenologicznego opisu zależności pomiędzy ciśnieniem mierzonym tonometrem Goldmanna a ciśnieniem wewnątrzgał-

kowym, uzgodnioną z wynikami tego „doświadczenia”, jest więc odpowiednikiem zmodyfikowanego prawa Imberta–Ficka (6.3) w modelu Goldmanna. Opiera się jednak na prawach mechaniki zamiast wyłącznie na doświadczeniu. Zasadniczą rolę odgrywa w nim funkcja kalibracyjna. Współczynnik W w równaniu (8.9) „rozciąga” funkcję kalibracyjną p'_{kalibr} w stopniu zależnym od odchylenia parametrów geometrycznych CCT i R od wartości kalibracyjnych. Postać tego czynnika, dana wyrażeniem (8.8), okazuje się przy tym zaskakująco prosta:

1. Różnica między formułą (8.9) a aproksymacją (8.2) i (8.3) jest niezauważalna. Ilustrują to wykresy na rysunku 8.11, sporządzone dla trzech grubości rogówki: 0,3, 0,6 i 0,9 mm, podane, jak poprzednio, na tle linii stałej wartości CCT, obliczonych według (8.2). Widać, że funkcje obliczone według (8.9) – grube linie – wkomponowują się w (8.2) z dokładnością do ułamka mmHg. Ta zgodność wcale nie była oczywista od początku – funkcja (8.9) jest aproksymacją opartą na warunku (8.6). Wykresy pokazane na rysunku 8.11 potwierdzają jej poprawność.

2. Wyniki te osiągnięte zostały po przyjęciu stałej e równej 1 mm^{-1} . Gdyby nie konieczność zachowania zgodności wymiarowej, trudno byłoby zauważyć obecność tego współczynnika. Stała e równa jedności wydaje się tu szczęśliwym trafem.

3. Jeszcze większe zaskoczenie czeka nas podczas próby wprowadzenia do tego opisu zależności od R . Okazuje się bowiem, po porównaniu z wynikami podanymi na rys. 8.6, że CCT w wyrażeniu (8.8) wystarczy skorygować współczynnikiem R/R_{kalibr} , także równym jedności w modelu rogówki o promieniu kalibracyjnym. Wprowadzona tak proporcja, zawierająca promień i grubość rogówki, pozostaje w zgodzie z analizą wpływu R na p_G , przeprowadzoną w podrozdziale 8.1.2.3 (proporcja jest zatem *odwrotna* do tej w modelu GAT).

Wyrażenie (8.8) przyjmuje postać:

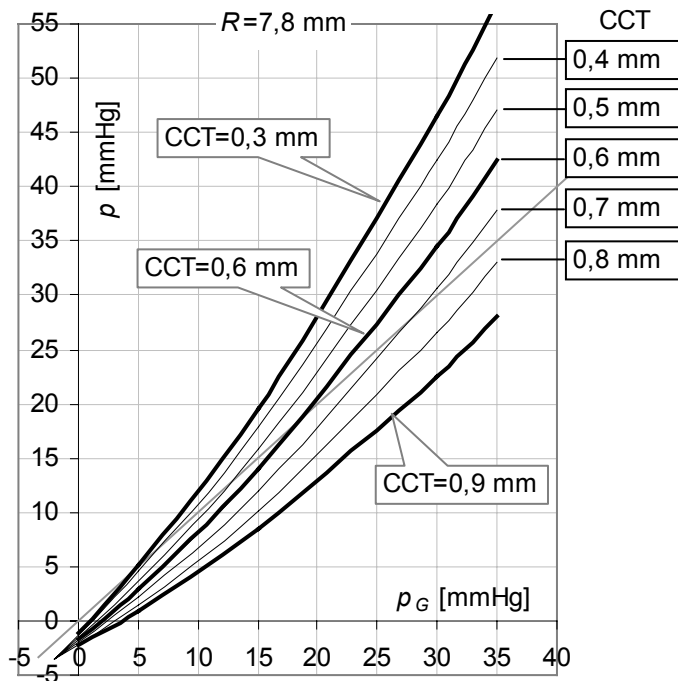
$$W = e \left(\text{CCT}_{\text{kalibr}} - \frac{R}{R_{\text{kalibr}}} \text{CCT} \right) + 1, \quad (8.12)$$

gdzie R i CCT są bieżącymi parametrami rogówki.

Ostatecznie

$$p(p_G) = \left[e \left(\text{CCT}_{\text{kalibr}} - \frac{R}{R_{\text{kalibr}}} \text{CCT} \right) + 1 \right] (p_{\text{kalibr}} - p^{(0)}) + p^{(0)}. \quad (8.13)$$

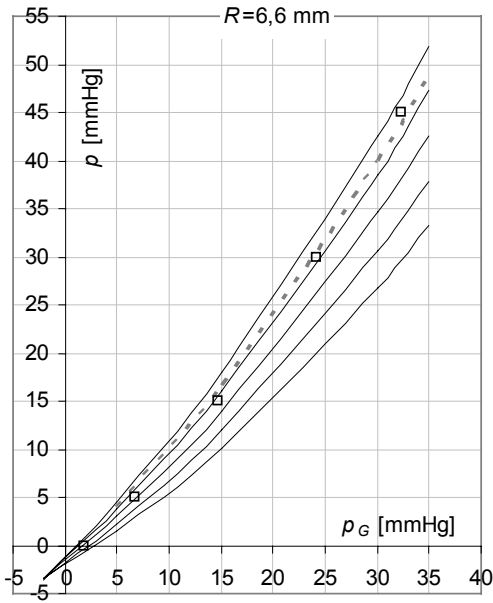
Parametry geometryczne rogówki umieszczone są jedynie we współczynniku W . Funkcja kalibracyjna p_{kalibr} jest *prawem* – rezultatem konfrontacji modelu z rzeczywistością – ustanowionym dla rogówki o (ustalonych) wymiarach kalibracyjnych. Zależy jedynie od obciążenia p_G . Postać tej funkcji jest „opcjonalna”, tutaj pochodzi z rozwiązania numerycznego, ale można ją zastąpić inną, uzasadnioną doświadczalnie – stanowi ona niezależny od W , wymienny element ogólnego opisu $p(p_G)$.



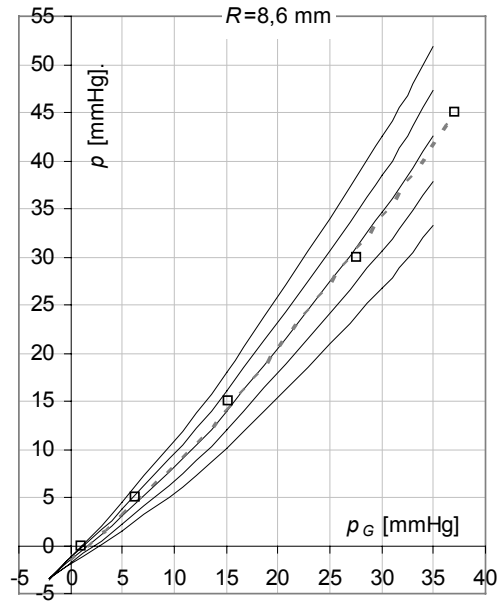
Rys. 8.11. Porównanie aproksymacji (8.13) – linie pogrubione, z funkcjami (8.2) – linie cienkie

Można się tu dopatrzeć analogii do GAT: funkcja $p_{\text{kalibr}}(p_G)$ opisuje model kalibracyjny, jak równanie (6.1), a współczynnik W wprowadza do niego poprawki ze względu na odstępstwa wymiarowe rogówki od wartości kalibracyjnych, jak usiłowa-
no to osiągnąć za pomocą współczynnika K_g^{-1} w (8.1). Różnica między tymi dwoma podejściami do kwestii korekcji odczytu GAT, i to zasadnicza, polega na tym, że zarówno współczynnik W , jak i funkcja $p_{\text{kalibr}}(p_G)$ pochodzą z *rozwiązania*, znajdują więc oparcie w mechanice (czyli w dobrze sprawdzonej teorii). Tymczasem zależność współczynnika K_g od CCT i R pochodzi wyłącznie z doświadczenia, podobnie zresztą jak prawo (8.1) – jest zatem rezultatem jedynie *podpatrywania* natury, z wszystkimi tego niedostatkami. Różnica jest więc taka, jak między mechaniką Newtona a mechaniką Arystotelesa.

Skuteczność formuły (8.13) w zastosowaniu do modelu rogówki o promieniu niekalibracyjnym można ocenić na rysunkach 8.12 i 8.13. Wykreślono na nich wyniki rozwiązania dwóch przypadków (punkty oznaczone kwadratami) – rogówka o promieniu 6,6 mm i rogówka o promieniu 8,6 mm, obydwa przedstawione wcześniej na rysunku 8.6. Ciśnienie $p(p_G)$ dla tych modeli, obliczone według (8.13), wykreślone zostało szarą linią przerywaną. Maksymalna różnica między tą funkcją a rozwiązaniem numerycznym jest zbliżona do 1 mmHg.



Rys. 8.12. Punkty oznaczają wyniki rozwiązań dla $R = 6,6$ mm, podane na rys. 8.6. Szarą linią przerywaną wykreślona jest funkcja $p(p_G)$ wg (8.13). W tle linie CCT=const, jak na rys. 8.10



Rys. 8.13. Wyniki obliczeń dla rogówki o promieniu $R = 8,6$ mm, analogiczne do pokazanych na rys. 8.12

Model o parametrach $R = 6,6$ mm i CCT_{kalibr} – szara linia przerywana na rys. 8.12 – reprezentowany jest przez funkcję taką samą jak model o promieniu R_{kalibr} , ale o grubości $CCT = 0,465$ mm. Podobnie model o promieniu $R = 8,6$ mm i CCT_{kalibr} – szara linia przerywana na rys. 8.13 – reprezentowany jest przez funkcję taką samą jak model o promieniu R_{kalibr} , ale przy $CCT = 0,61$ mm. Przeliczanie wpływu promienia krzywizny rogówki R na ekwiwalentną grubość obliczeniową CCT_{oblicz} (wówczas promień rogówki przyjmuje wartość kalibracyjną) może być dokonywane zgodnie z zapisem w równaniu (8.12) i poprzedzającym to równanie spostrzeżeniem zawartym w punkcie 3:

$$CCT_{\text{oblicz}} = \frac{R}{R_{\text{kalibr}}} CCT. \quad (8.14)$$

Wstępne użycie wyrażenia (8.14) pozwala w ogóle wyeliminować wpływ R na korekcję odczytu tonometru aplanacyjnego i pozostawić w formule (8.13) jedynie zależność od CCT . Mówiąc inaczej: różne rogówki, dla których iloraz R/CCT jest jednakowy, mogą być traktowane jak rogówka o promieniu kalibracyjnym i grubości obliczanej według (8.14).

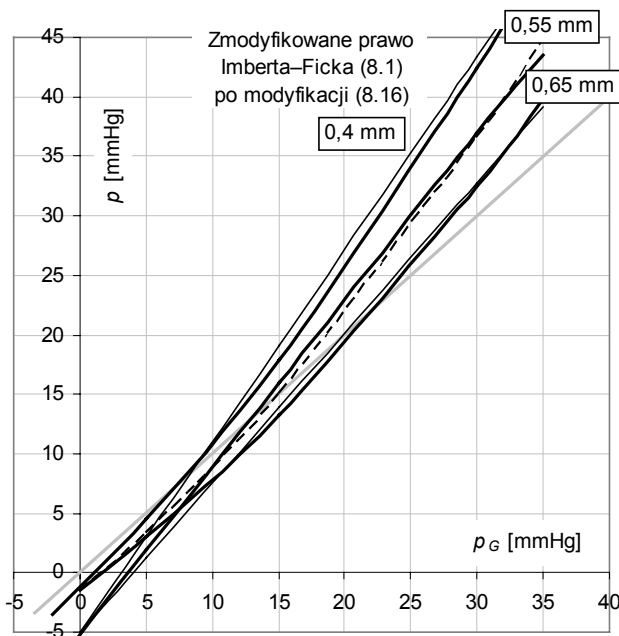
Wersja liniowa korekcji. Jest też możliwość przedstawienia funkcji kalibracyjnej w postaci liniowej. W takim przypadku mogłaby ona przyjąć postać zbliżoną do pokazanej na rys. 8.14. W zakresie p od 5 do 44 mmHg różnica między funkcją kwadratową (8.11) a jej aproksymacją liniową

$$p_{\text{kalibr}} = 1,4 p_G - 5 \text{ [mmHg]} \quad (8.15)$$

nie przekracza 1,3 mmHg. Wyższość funkcji (8.15), wykreślonej na rys. 8.14 grubą, prostą i ciągłą linią, nad prawem Imberta–Ficka (szara prosta na tym rysunku) polega na tym, że uwzględnia ona wpływ ciśnienia na wielkość korekcji p_G oraz pozwala na zastosowanie formuły (8.12) wobec rogówki niekalibracyjnej. Po przesunięciu punktu o współrzędnych (8.4) do położenia (0, -5), wyrażenie (8.13) można zapisać:

$$p(p_G) = \left[e \left(\text{CCT}_{\text{kalibr}} - \frac{R}{R_{\text{kalibr}}} \text{CCT} \right) + 1 \right] 1,4 p_G - 5. \quad (8.16)$$

Jak widać, nawet dla rogówki kalibracyjnej współczynnik kierunkowy prostej, równy tutaj 1,4, znacznie się różni od jedności.



Rys. 8.14. Funkcja kalibracyjna (linia przerywana) i jej aproksymacja liniowa – oznaczone 0,55 mm. Funkcje dla skrajnych grubości rogówki i ich aproksymacje liniowe, oznaczone zostały 0,4 mm i 0,65 mm. Szarą linią wykreślone jest prawo Imberta–Ficka (6.1)

Funkcja (8.15), jako nowa wersja prawa Imberta–Ficka (jest liniowa, ale nie wynika z równania Laplace’a), sugeruje kierunek badań doświadczalnych: przedmiotem pomiaru powinien być nie tylko współczynnik kierunkowy prostej $p_{\text{kalibr}}(p_G)$, ale także rzędna punktu początkowego. Dla oka o wymiarach kalibracyjnych ten współczynnik powinien być większy od jedności, a początku wykresu należy się spodziewać poniżej zera. Punkt początkowy można interpretować jako podciśnienie w gałce ocznej, przy którym tonometr pokazuje zero. Poprawki dla oka o innych wymiarach niż kalibracyjne nie wymagają badań doświadczalnych (które w tonometrii i tak są zwykle mało wiarygodne), korekcji należy dokonywać za pomocą wyrażenia (8.12).

Współczynniki korekcji. W GAT każdy ze współczynników korekcji, dla CCT i dla R , definiowany jest jako stosunek różnicy ciśnień p do przyrostu jednego lub drugiego parametru, który tę różnicę powoduje. Oznaczmy je odpowiednio C_t i C_R . Chociaż w literaturze definicje te stosowane są dosłownie (czyli przez podawanie różnicy ciśnień dla przyrostu np. CCT = 0,01 mm), należy je oczywiście rozumieć jako *pochodne* funkcji ciśnienia:

$$C_t = \frac{\partial p}{\partial \text{CCT}}, \quad (8.17)$$

$$C_R = \frac{\partial p}{\partial R}. \quad (8.18)$$

Po zróżniczkowaniu funkcji (8.13), dla rogówki o wymiarach kalibracyjnych otrzymujemy

$$C_t = -e \left(p_{\text{kalibr}}(p_G) - p^{(0)} \right), \quad (8.19)$$

$$C_R = -\frac{\text{CCT}_{\text{kalibr}}}{R_{\text{kalibr}}} e \left(p_{\text{kalibr}}(p_G) - p^{(0)} \right). \quad (8.20)$$

Już pierwszy kontakt z tym wynikiem wprowadza istotną zmianę pojęciową w naszej wiedzy o tonometrii aplanacyjnej. Otrzymane wyrażenia nie są *współczynnikami*, C_t i C_R to *funkcje*, bo są ewidentnie zależne od ciśnienia wewnątrzgałkowego. Obydwie funkcje korekcyjne są ujemne (stała $e = 1 \text{ mm}^{-1}$). Łatwo też zauważyć zależność między nimi:

$$C_R = \frac{\text{CCT}_{\text{kalibr}}}{R_{\text{kalibr}}} C_t. \quad (8.21)$$

Z równania 8.19 wynika, że funkcja korekcji C_t jest, z dokładnością do znaku, równa liczbowo p' , czyli ciśnieniu wewnątrzgałkowemu w układzie współrzędnych (8.5). Dla prawa liniowego (8.16)

$$C_t = -1,4 e p_G \text{ [mmHg/mm]}, \quad (8.22)$$

a funkcję C_R także tutaj obliczamy według (8.21).

Przykład użycia formuły korekcyjnej (8.13). Pomiaru ciśnienia $p_G = 35$ mmHg dokonano tonometrem Goldmanna na oku o następujących parametrach geometrycznych: $R = 8,6$ mm, $CCT = 0,44$ mm. Jakie jest ciśnienie wewnątrzgałkowe?

Funkcja kalibracyjna (8.11) przyjmuje wartość

$$p_{\text{kalibr}} = -1,61 + 0,94 \cdot 35 + 0,0111 \cdot 35^2 = 44,9 \text{ mmHg.}$$

Gdyby to było oko o wymiarach kalibracyjnych, wówczas zgodnie z (8.9), dla $W = 1$, ciśnienie wewnątrzgałkowe

$$p = 1 \cdot (44,9 - (-3,44)) - 3,44 = 44,9 \text{ mmHg}, \quad (8.23)$$

czyli jest prawie 10 mmHg większe od wskazania tonometru. Ponieważ jednak kalibracyjne nie jest, więc parametry geometryczne rogówki wprowadzamy do współczynnika (8.12):

$$W = 1 (0,55 - 8,6/7,8 \cdot 0,44) + 1 = 1,06.$$

Według (8.9)

$$p = 1,06 (44,9 - (-3,44)) - 3,44 = 48 \text{ mmHg}. \quad (8.24)$$

Ciśnienie wewnątrzgałkowe p jest o 13 mmHg większe od pokazywanego przez tonometr aplacyjny.

Komentarz do przykładu. Grubość $CCT < 0,55$ mm w połączeniu z wysokim ciśnieniem mocno oddalają odczyt p_G od p . Ta różnica 13 mmHg między ciśnieniem rzeczywistym $p = 48$ mmHg i wskazywanym przez tonometr $p_G = 35$ mmHg jest sumą trzech składników, które można przypisać odchyleniom parametrów modelu od wartości kalibracyjnych, a więc składnika powodowanego:

- odchyleniem CCT od 0,55 mm +5,3 mmHg,
- odchyleniem promienia R od 7,80 mm -2,7 mmHg,
- odchyleniem p od 16 mmHg +9,9 mmHg.

Dwa pierwsze składniki – od promienia krzywizny rogówki i jej grubości – wynoszą łącznie tylko 2,6 mmHg, czyli niewiele, ale tak jest dlatego, że te wpływy się częściowo znoszą. Najbardziej na odchylenie p_G od p wpływa samo ciśnienie p . Zaniża ono ciśnienie wskazywane przez tonometr aż o 9,9 mmHg. Przypadek ten pokazuje istotny wpływ ciśnienia wewnątrzgałkowego na odczyt p_G . Tablice korekcyjne powinny uwzględniać ten składnik korekcji, bo gdy ciśnienie jest wysokie, bywa on *większy* od składników obliczanych dla CCT i R .

Aproksymacja liniowa prowadzi do następujących wyników:

1. $C_t \Delta CCT = -1,4 e p_G (CCT - CCT_{\text{kalibr}}) = -49 (0,44 - 0,55) = +5,4$ mmHg, gdzie $C_t = -1,4 \cdot 1 \cdot 35 = -49$ mmHg, zgodnie z (8.22).

2. $C_R \Delta R = CCT_{\text{kalibr}}/R_{\text{kalibr}} \cdot C_t \cdot (R - R_{\text{kalibr}}) = 0,55/7,8 \cdot (-49) \cdot (8,6 - 7,8) = -2,8$ mmHg

3. $p - p_G = (1,4 p_G - 5) - p_G = (1,4 \cdot 35 - 5) - 35 = +9,0$ mmHg.

Mimo że łącznie oznacza to korekcję 11,6 mmHg, wynik ten wydaje się wystarczająco dokładny (w porównaniu z poprzednim rezultatem).

Współczynnik korekcji modelu Orssengo i Pye, odczytany z tabeli 8.1 dla powyższych danych, wynosi $K_g = 0,77$, stąd $p = 35/0,77 = 45,5$ mmHg. Czyli p różni się o 10,5 mmHg od odczytu z tonometru. Gdyby uwzględnić odchylenie jedynie CCT od wartości kalibracyjnej, wówczas p wynosiłoby $35/0,78 = 45$ mmHg. Wpływ odchylenia R od wartości kalibracyjnej jest tu, jak widać, odwrotny – promień krzywizny większy od wartości kalibracyjnej wprowadza *dodatnią* poprawkę, która wynosi 0,5 mmHg. Mamy zatem:

- składnik powodowany przez CCT +10 mmHg.
- składnik powodowany przez R +0,5 mmHg,

Pozornie korekcja Orssengo i Pye niewiele się różni od obliczonej dla modelu nieliniowego. Dane zawarte w tabeli 8.1 prowadzą do poprawki 10,5 mmHg, co w porównaniu z wynikiem 11,6 mmHg, uzyskanym w drodze „aproksymacji liniowej”, stanowi różnicę dopuszczalną w tonometrii. Zwróćmy jednak uwagę co składa się na te wyniki. „Klasyczna” GAT (Orssengo i Pye) przypisuje tę poprawkę głównie wpływowi CCT – aż 10 mmHg, tymczasem obliczenia numeryczne szacują ten składnik na zaledwie połowę tej wartości. Prawdziwa przyczyna dużego odchylenia p_G od ciśnienia rzeczywistego – samo ciśnienie – zupełnie nie jest brana pod uwagę w GAT. Pozory poprawności wzmacnia dodatkowo tutaj poprawka od R brana z przeciwnym znakiem.

Niestety nie zawsze poprawny rezultat uświęca błędne obliczenia. Przypadek rogówki o wymiarach $CCT = 0,44$ mm, $R = 7,0$ mm prowadzi już do bardzo dużych różnic między porównywanymi metodami, bo teraz GAT nie jest już chroniona przez korzystny dla niej zbieg okoliczności. Dla czytelnika zainteresowanego samodzielnymi obliczeniami w tabeli 8.1, przepisanej z pracy [Orssengo i Pye 1999], umieszczone są skrajne wartości współczynnika K_g . Dają one sposobność obliczenia współczynnika korekcji dla podanej rogówki, a także dla pozostałych skrajności wymiarowych.

8.1.3.3. Porównanie z tonometrią Goldmanna

Rola ciśnienia. Proponowana tu technika korekcji odczytu ciśnienia p_G oparta została na przewidywaniach teoretycznych, co stanowi zasadniczą różnicę wobec dotychczas preferowanego podejścia, opartego jedynie na pomiarze i uśrednieniu statystycznym. W konsekwencji okazało się, że na różnicę $(p_G - p)$ w modelu rogówki o wymiarach kalibracyjnych ma wpływ także ciśnienie p . Tego nie przewiduje tonometria goldmannowska. Z wykresu na rysunku 8.10 wynika, że po zmianie ciśnienia p z wartości „kalibracyjnej” 16 mmHg na 40 mmHg, różnica ciśnień $(p_G - p) = -8$ mmHg. Tak dużej różnicy między tymi ciśnieniami nie powoduje nawet zmniejszenie grubości CCT z kalibracyjnej na 0,4 mm, bo wówczas dla ciśnienia „kalibracyjnego” różnica ciśnień $(p_G - p) = -3$ mmHg. Być może z tego właśnie powodu współczynnik K_g w prognozach Orssengo i Pye, rys. 8.8, tak bardzo się różni dla stosunkowo nieodległych grubości rogówki CCT. Autorzy tę dużą różnicę między p_G i p przypisują wyłącznie odchyleniu CCT od wartości kalibracyjnej, tymczasem wpływ ciśnienia może być tu znacznie większy. Na mocy prawa Imberta–Ficka jest on jednak ignorowany. Wynikające z pominięcia tego wpływu maksymalne błędy są nawet większe niż w przypadku całkowitego zaniechania korekcji.

Obserwowane w rozwiązaniach numerycznych wyraźne odchylenie w dół ciśnienia zewnętrznego p_G względem ciśnienia wewnętrznego p , gdy to ostatnie jest wysokie (przynajmniej dwa razy większe od nominalnego), bywa czasem przyczyną zjawisk niemożliwych do objaśnienia na gruncie GAT, a zrozumiałych w kontekście stateczności konstrukcji. Przykładem jest eksperyment opisany przez Hallberga i in. [2006]. Autorzy badali oczy świnińskie *in vitro*. Sześć gałek ocznych poddano zabiegowi PRK, wprowadzając stopniowo cztery głębokości ablacji, dające końcową zmianę mocy optycznej o 0 (po usunięciu nabłonka), 5, 15 i 25 dioptrii. W rezultacie zabiegu promień krzywizny rogówki R stopniowo przyrasta. Grubość rogówki zmieniała się od początkowej 0,871 mm, przez 0,751, 0,744, 0,685 do ostatecznej 0,625 mm. Ciśnienie wewnątrzgałkowe wynosiło zawsze 30 mmHg. Średnia wyniku pomiaru GAT na poszczególnych etapach przyjmowała wartości 32,0 (0,7), 32,2 (0,8), 32,0 (1,6), 25,0 (2,9), 19,0 (3,7) mmHg. W nawiasach podane są odchylenia standardowe.

Pierwsze trzy rezultaty pomiaru ciśnienia p_G są takie same, 32 mmHg, chociaż rogówka w tych trzech stopniach traci na grubości i zyskuje na promieniu krzywizny. Liczby w tabeli 8.1 sugerują, że zarówno CCT jak i R powoduje wówczas *zmniejszanie* wskazania tonometru aplanacyjnego. Dlaczego zatem to wskazanie, stymulowane w eksperymencie Hallberga aż z dwóch źródeł, nie zmniejsza się? Autorzy nie tłumaczą tego. Z perspektywy rozwiązań numerycznych modelu nieliniowego, podanych na rysunku 8.6, objaśnienia dostarcza obserwowany tam trend – wzrost promienia krzywizny rogówki powoduje *zwiększanie* odczytu p_G , a nie zmniejszanie. Wówczas, przy wysokim ciśnieniu, wzrost promienia krzywizny

kompensuje wpływ na p_G malejącej po PRK grubości CCT. Oczywiście wiele jest źródeł niepewności w tej interpretacji, bo rogówka oka świnińskiego zbudowana jest (być może) z nieco innego materiału niż ludzka, geometria także jest inna – krzywizna jest w przybliżeniu stała na całej powierzchni, stała jest także grubość. Nie wydaje się jednak, aby z tego powodu miały ulec odwróceniu trendy wyznaczone rozwiązaniami podanymi na rysunkach 8.5 i 8.6.

To jednak, co jest najciekawsze w badaniach Hallberga zostało w tej pracy zupełnie niedocenione. Zauważmy, że średnie wartości ciśnienia p_G , choć coraz mniejsze w kolejnych etapach eksperymentu, pochodzą z coraz bardziej zróżnicowanych liczb. Na przedostatnim etapie jedna, a na ostatnim – druga gałka oczna nie została sklasyfikowana. Autorzy tak to opisują: *Pomiar ciśnienia GAT na oku nr 1 po zabiegach 3 i 4 oraz na oku nr 2 po zabiegu 4 nie został zakończony odczytem, ponieważ siła potrzebna do spłaszczenia na wymaganej średnicy była równa zero. Z tego powodu wyniki te zostały pominięte.* Przyczyny tego zjawiska autorzy nie podają.

Wyobraźmy to sobie. Wierzchołek rogówki w przedostatnim zabiegu PRK, chociaż stracił na grubości 0,25 mm, nadal zachowuje grubość około 0,7 mm – całkiem sporą. Po wewnętrznej stronie działa stosunkowo duże ciśnienie, bo aż 30 mmHg. Mimo to po spłaszczeniu wierzchołka rogówki siła nacisku była równa zero – spłaszczenie, po przyłożeniu końcówki tonometru, pojawiło się spontanicznie! Opisany przez autorów efekt jest nie tylko interesujący poznawczo, ma on ogromne znaczenie dla proponowanego tutaj modelu biomechanicznego, ponieważ jedynym wytłumaczeniem tego rezultatu wydaje się zjawisko opisane w podrozdziale 8.1.1.2 – utraty stateczności powłoki. Nawet mechanika spłaszczenia rogówki o naturalnej geometrii wkracza głęboko w problematykę stateczności konstrukcji, o czym przekonaliśmy się w podrozdziale 8.1.1, tym bardziej więc, gdy krzywizna wierzchołka zostanie tak zdecydowanie zmniejszona jak po PRK. Można oczekiwać, że po kolejnym stopniu ablacji (albo po podwyższeniu ciśnienia) następne gałki oczne dołączyłyby do dwóch pierwszych. Zaobserwowane przez Hallberga i kolegów zjawisko *nie jest zaburzeniem* uzasadniającym eliminację próbki ze statystyki. Te wyniki ($p_G = 0$) są jak najbardziej wartościową częścią ich doświadczenia i powinny być ujęte w statystyce. Okazałoby się wówczas, że średnia wartość ciśnienia p_G obniżałaby się znacznie mocniej po kolejnych zabiegach PRK, zdążając do rzeczywistego celu – do zera – oznaczającego utratę stateczności strefy ablacji podczas próby jej spłaszczania.

Opisywany przypadek dobrze ilustruje powszechne wśród badaczy przekonanie o poprawności liniowego modelu Goldmanna i ignorowanie potrzeby zweryfikowania prawa (6.1). Jak silna jest wiara w słuszność jego postulatów, świadczy fakt odrzucenia przez Hallberga i kolegów części wyników sprzecznych z obowiązującym w tonometrii paradygmatem. Choć opisany przez nich rezultat efektywnie obnażył istotę problemów GAT i stał się przez to niezwykle cenną częścią ich eksperymentu, został on pominięty w obliczeniach. Nic więc dziwnego, że inne, mniej widoczne mankamenty tonometrii aplanacyjnej, nie przyciągają niczyjej uwagi.

Rola CCT i R. Liczni autorzy publikacji, poświęconych problemom korekcji ciśnienia p_G po 1999 roku, cytują i potwierdzają wyniki zawarte w pracy [Orssengo i Pye 1999], zarówno w opracowaniach teoretycznych, dotyczących modelu matematycznego rogówki, jak i doświadczalnych. Można nawet sądzić, że wsparcie dla równania (6.4) – a jednocześnie dla prawa Imberta–Ficka (6.1) i pozostałych postulatów GAT – jest powszechne i bezkrytyczne. Niestety przyjmowanie tych założeń (bo przecież „prawa” (6.1) i (6.4) oparte są jedynie na mniemaniu) jako oczywistych, deformuje wyniki badań doświadczalnych. Na czym bowiem polega takie badanie w warunkach klinicznych (*in vivo*)? Pomiary ciśnienia dokonywane tonometrem apla-nacyjnym dostarczają danych, które można posortować na trzy kategorie ze względu na CCT i trzy kategorie ze względu na promień krzywizny R :

- wynik uzyskany dla wartości zbliżonej do kalibracyjnej,
- poniżej kalibracyjnej,
- powyżej kalibracyjnej.

Na tej podstawie tworzone są wykresy zależności p_G albo od CCT – dla ustalonego R , albo od R dla ustalonej CCT, bez względu na poziom ciśnienia. Posortowane tak wyniki nadal (mimo sortowania) układają się na wykresach, z grubsza, w izotropowe chmurki punktów, czyli kołowe plamy, w których nie można dostrzec wyraźnego trendu, a ich aproksymacje liniowe po obróbce statystycznej pokazują, że nie ma korelacji między badanymi parametrami. Wyjątek stanowi zależność p_G od CCT, bo ta akurat jest bardzo duża. Taka analiza wyników, w której *nie jest uwzględniany wpływ ciśnienia wewnątrzgałkowego* na odczyt tonometru, ewidentnie zawiera w sobie założenie równości (8.1). Tym błędem obciążony jest następnie empirycznie wyznaczony współczynnik kierunkowy funkcji liniowej p_G uzależnionej od CCT lub R . Na zakończenie takich badań można odnieść wrażenie (i takie przekonanie panuje powszechnie), że te wyniki *potwierdzają* postulaty GAT. Oczywiście, że „potwierdzają”, bo postulaty GAT są *zawarte* w procedurach pomiaru! Logika takiej procedury to zwykła tautologia.

W tablicach korekcyjnych GAT współczynnikiem o największym znaczeniu jest zmiana ciśnienia przypadająca na jednostkę grubości rogówki CCT. Wartości doświadczalne były mocno zróżnicowane do czasu publikacji Orssengo i Pye. Za najbardziej wiarygodny uchodził w tamtych czasach wynik uzyskany przez Ehlersa [1975], 0,71 mmHg na 0,01 mm grubości rogówki, czyli $C_t = 71$ mmHg/mm. Wartości podawane przez innych badaczy zawierały się w przedziale od 0 do 100 mmHg/mm [Damji i Munger 2000, Doughty i Zaman 2000, Shah i in. 1999, Shah 2000, Stodtmeister 1998]. Zerową wartość, oznaczającą brak korelacji między p_G i CCT, otrzymali Feltgen i in. [2001].

Ostatnio preferowana jest wartość zbliżona do 40 mmHg/mm. Taki wynik, oprócz Orssengo i Pye, przewiduje jeszcze kilku innych autorów [Gunvant i in. 2005, Kohlhaas i in. 2006, Elsheikh i in. 2006]. Na szczególną uwagę zasługuje praca Kohlhaasa. Jej autorzy, oprócz CCT, R , długości gałki ocznej i kilku innych

parametrów, kontrolowali też ciśnienie *rzeczywiste*, czyli p – co *jakościowo* zmienia znaczenie ich wyników. Badania przeprowadzili na 125 oczach podczas operowania zaćmy. Przed pomiarem GAT ciśnienie w komorze przedniej oka badacze ustawiali na poziomie 20, 35 lub 50 mmHg za pośrednictwem igły wprowadzonej tam przez rąbek. Z tego względu otrzymane wyniki mają duże znaczenie dla weryfikacji rozwiązań numerycznych, tym bardziej że – według wiedzy autorów – jest to jedyne oprócz Ehlersa [1975] studium, w którym pomiaru ciśnienia p_G dokonywano przy znanym IOP.

Kohlhaas i in. podają wartość współczynnika korekcji $C_t = 40$ mmHg/mm, którą uzyskali przy ciśnieniu p wynoszącym 20 i 35 mmHg. Z wykresu na rysunku, oznaczonym w ich pracy *fig. 7* widać, że ten współczynnik wynosi 50 mmHg/mm, gdy ciśnienie p jest równe 50 mmHg. Autorzy podkreślają, że różnice między wartościami otrzymanymi przy różnych ciśnieniach, nie są istotne statystycznie. Taką samą średnią wartość C_t otrzymali też dla wszystkich grubości rogówki łącznie. Drugi, znaczący, wynik przytaczany w cytowanej pracy dotyczy współczynnika korekcyjnego oznaczonego tu wcześniej C_R . Autorzy zamieszczają wykres, który przeczy powszechnie głoszonymu przekonaniu. Jak zauważyliśmy wcześniej, klasycy GAT przypisują rosnącemu promieniowi krzywizny rogówki R *ujemną* korekcję ciśnienia – kwintesencją tego jest współczynnik K_g podany w tab. 8.1. Wielu badaczy potwierdza zawarte w tej tabeli dane. Na przykład Elsheikh i in. [2006] budują model numeryczny rogówki, który (między innymi) zmniejsza ciśnienie p_G o 0,75 mmHg po zwiększeniu promienia krzywizny R o 1 mm. Tymczasem Kohlhaas i in. zamieszczają w swojej pracy znamiennej rezultat: gdy ciśnienie $p = 35$ mmHg, wskazywane ciśnienie p_G *przyrasta* średnio o około 2,5 mmHg, dla przyrostu promienia krzywizny o 1 mm [Kohlhaas 2006, *fig. 5b*]. Także wynik, $C_R = 2,5$ mmHg/mm, uzyskany został dla małego współczynnika korelacji.

Otrzymany przez Kohlhaasa i in. współczynnik korekcji $C_t = 40$ mmHg/mm dla $p = 35$ mmHg, natomiast $C_t = 50$ mmHg/mm dla $p = 50$ mmHg. Porównajmy te wyniki z przewidywaniami zawartymi w podrozdziale 8.1.3.2. Bezwzględna wartość funkcji C_t , danej wyrażeniem (8.19), równa jest liczbowo ciśnieniu p powiększonemu o 3,44 mmHg, zatem przy ciśnieniach badanych przez Kohlhaasa powinna przyjąć wartości około 38 mmHg/mm i 53 mmHg/mm. To całkiem niezła zgodność wyniku doświadczenia z przewidywaniem teoretycznym. Dana wyrażeniem (8.21) druga funkcja korekcji $C_R = 0,55/7,8 \cdot 38 = 2,7$ mmHg/mm dla ciśnienia wewnątrzgałkowego 35 mmHg. Dane Kohlhaasa ($C_R = 2,5$ mmHg/mm) nie tylko potwierdzają znak tej liczby (ze wzrostem R ciśnienie p_G rośnie), ale także jej wartość.

Jednak nie wszystkie wyniki doświadczenia Kohlhaasa są tak zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Dla ciśnienia $p = 20$ mmHg funkcja C_t , według (8.19), powinna przyjąć wartość bezwzględną 23 mmHg/mm. Kohlhaas i in. otrzymali 40 mmHg/mm (dla współczynnika korelacji uznanego przez nich za zbyt mały). Ten wynik jest jednak niepoprawny, co potwierdza sama GAT. To, że „współ-

czynnikami” korekcji C_I i C_R *zależą od ciśnienia* jest koniecznością teoretyczną, która wynika już z samej definicji współczynników korekcji (8.17) i (8.18) oraz praw (6.1) lub (8.1). Zgodnie z definicją (8.17), funkcja C_I jest pochodną cząstkową ciśnienia p względem grubości CCT. Po zróżniczkowaniu funkcji ciśnienia p (8.1) otrzymuje się

$$C_I = \frac{\partial(K_g^{-1} p_G)}{\partial \text{CCT}} = \frac{\partial(K_g^{-1})}{\partial \text{CCT}} p_G = -\frac{1}{K_g^2} \frac{\partial K_g}{\partial \text{CCT}} p_G, \quad (8.25)$$

gdyż zależność p od CCT zawarta jest we współczynniku K_g . Z tabeli 8.1, przytoczonej za Orssengo i Pye [Orssengo i Pye 1999, tab. 3], możliwe jest obliczenie tej pochodnej dla modelu kalibracyjnego (wtedy $K_g = 1$):

$$\frac{\partial K_g}{\partial \text{CCT}} \approx 3 \text{ mm}^{-1}, \quad (8.26)$$

zatem z (8.25) i (8.26)

$$C_I \approx -3 p_G \text{ mmHg/mm}. \quad (8.27)$$

Widać stąd, że funkcja C_I jest *proporcjonalna do ciśnienia*, a jej zmienność wynika już z klasycznej tonometrii aplanacyjnej. Jeśli więc dla ciśnienia $p = 35 \text{ mmHg}$, wynik pomiaru $C_I = 40 \text{ mmHg/mm}$ jest poprawny, to wartość C_I dla ciśnienia $p = 20 \text{ mmHg}$ powinna wynosić $40 \cdot 20/35 = 23$, a nie 40 mmHg/mm ! Wymaganie stałej wartości C_I , niezależnej od ciśnienia, jest sprzeczne ze zmodyfikowanym prawem Imberta–Ficka (8.1). Analogiczne obliczenia można przeprowadzić dla C_R (8.18).

Zauważmy też błąd w tabelicy Orssengo i Pye: jeśli już C_I i p_G powinny być do siebie *proporcjonalne*, to wynik pomiaru $C_I = 40 \text{ mmHg/mm}$ dla ciśnienia 35 mmHg oznacza, że współczynnik w równaniu (8.27) powinien wynosić $40/35 = 1,14$, a nie 3 mm^{-1} . Tabela korekcyjna Orssengo i Pye nie tylko nie zgadza się z przewidywaniem (8.22), co ilustruje rysunek 8.8, ale także z wynikiem pomiaru Kohlhaasa i in. (a więc także z ich własnym wynikiem $C_I = 40 \text{ mmHg/mm}$). Najgorsze jednak, że nie zgadza się z samą definicją współczynnika C_I .

W badaniach Kohlhaasa i in. zwraca uwagę jeszcze jeden bardzo istotny wynik, jest nim brak doniesienia o korelacji między wskazaniem tonometru p_G a ciśnieniem wewnątrzgałkowym p dla rogówki o wymiarach kalibracyjnych. Ten najważniejszy efekt rozwiązań, badanego w podrozdziale 7.1.1 modelu nieliniowego, nie został zaobserwowany przez autorów tego opracowania. Może dlatego, że rozrzut wyników pomiaru na 125 oczach, mimo dokładanych starań, jest stosunkowo duży. Ujawnienie tej korelacji byłoby zapewne łatwiejsze, gdyby zbadano zależność $p_G(p)$

indywidualnie *dla każdego oka*, ale takich wyników w pracy [Kohlhaas 2006] nie zamieszczono.

Liczne publikowane próby opracowania tablic korekcyjnych dla GAT dostarczają wiele wyników doświadczalnych, jednak ewidentnie brakuje w nich uzasadnienia teoretycznego: *dłaczego* współczynnik korekcji C_t miałby być zbliżony do 40 mmHg/mm (a nie na przykład do zera), albo *dłaczego* współczynnik korekcji C_R jest o rząd mniejszy od C_t (i czy jest dodatni, czy ujemny)? Odpowiedź na pytanie czy p_G rośnie, czy maleje ze wzrostem R także należałoby uzasadnić teoretycznie. Same wyniki pomiarów, bez interpretacji teoretycznej, jeszcze nie są (bio)mechaniką. A nawet więcej: *bez teorii* wyniki pomiarów niewiele znaczą, stwarzają zaledwie sposobność do wyrażania *przekonań*, a te bywają bardzo różne i wzajemnie sprzeczne. Jeśli wtedy jakaś interpretacja zyskuje większość głosów, to i tak nie ma to znaczenia, bo większość też może się mylić.

Refleksja końcowa. Wbrew pozorom tonometria aplanacyjna nie jest prostą pojęciowo i logiczną (intuicyjną) w użyciu. GAT wprowadza trudną do przyjęcia ideę konstrukcji *kalibracyjnej* o tak szczególnych właściwościach, że w swoich funkcjach różni się ona *jakościowo* od konstrukcji „niekalibracyjnej”. Skąd miałyby się brać w kalibracyjnych wymiarach gałki ocznej zdolność do zapewnienia równości $p = p_G$ dla *dowolnego ciśnienia* i – co jeszcze dziwniejsze – z jakiego powodu rogówka odbiegająca geometrycznie od tego ideału miałyby być pod tym względem tak bardzo upośledzona, że równość tych ciśnień nie może w niej zajść *nigdy*? Idea zawarta w równaniu (6.3) czyni rogówkę pozornie prostym układem mechanicznym, ale niemożliwym do zrealizowania, jak wynika z analizy przeprowadzonej w podrozdziale 7.1.4.1. A co do logiki praktycznego użytkowania GAT, to ewidentnie brakuje analitycznego opisu współczynnika korekcji K_g , uzależnionego od CCT i R . Nikt nawet nie próbuje go określać na gruncie *mechaniki*. Przytoczone rezultaty badań doświadczalnych, oparte na postulatach Goldmanna, wykazują duży rozrzut. Współczynnik korekcji C_t przyjmuje wartości od zera do 100 mmHg na milimetr zmiany CCT, ze wskazaniem na 40 mmHg/mm, ale z „teoretycznego” stanowiska tonometrii Goldmanna *każdy wynik* jest dopuszczalny. Jeszcze gorzej wygląda problem współczynnika korekcji C_R . Ani wartość, ani nawet znak współczynnika nie zostały dotąd uzgodnione. Przewidywania oparte na postulatach Goldmanna również niczego tu nie wnoszą, żadnego też wyniku nie wykluczają. A przecież takie, teoretyczne, ujęcie mechaniki zjawisk zachodzących w GAT jest niezwykle istotne dla praktyki, o czym świadczy pokazany przypadek pomiaru współczynnika C_t . Przez dziesięciolecia – do dzisiaj i zapewne w odległej jeszcze przyszłości – mierzony jest (będzie) jako „stała”, chociaż jego zależność od ciśnienia, widoczna w równaniu (8.25), była oczywista od lat siedemdziesiątych XX w., od chwili podjęcia badań nad rogówką o wymiarach niekalibracyjnych [Ehlers i in. 1975, Bier i Lowther 1977] (patrz podrozdz. 6.1.2). Bezpodstawne trzymanie się myśli zawartej w prawie Imberta–Ficka (6.1), aby odchylenie ($p_G - p$) w modelu kalibracyjnym rogówki *zawsze było równe zeru*, niezależnie

od ciśnienia, okazuje się destrukcyjne dla tonometrii, bo nawet tam, gdzie ten wpływ ciśnienia jest ewidentny, został on przez wyznawców Goldmanna wykluczony. Zasadniczym mankamentem tych badań jest ograniczenie ich jedynie do eksperymentu. Dla tego typu wiedzy opisowej nazwa *biomechanika* wydaje się niewłaściwa, bo przecież mechaniki w niej nie ma. Taki „spis z natury” jest zwykłą inwentaryzacją zasobów pomiarowych tonometrii.

Proponowany tutaj model tonometrii aplanacyjnej różni się od GAT zarówno w swoich założeniach, jak i w rozwiązaniach. Opis teoretyczny daje odpowiedź nie tylko na pytanie dlaczego C_t jest bliski 40 mmHg/mm dla wysokiego ciśnienia, ale także przewiduje, że współczynnik ten zmienia się wraz z ciśnieniem (i przestaje być *współczynnikiem*). Łatwo też jest wyznaczyć „współczynnik” C_R , który otrzymamy mnożąc C_t przez 0,07, czyli przez iloraz grubości i promienia rogówki. Przedstawione w podrozdziale 8.1.3.2 rozwiązania pokazały również dlaczego C_R tak trudno jest *zmierzyć* (ale nie – obliczyć). Empiria została tu zredukowana do właściwych rozmiarów, a współczynniki korekcyjne w ogóle oderwane od eksperymentu. W formule kalibracyjnej $p_{\text{kalibr}}(p_G)$, podlegającej weryfikacji doświadczalnej, nie ma nic takiego, co ją jakościowo odróżnia od funkcji $p(p_G)$ dla każdej *innej* geometrii rogówki. Zmiana parametrów geometrycznych rogówki z dowolnych na kalibracyjne koryguje nieco tę funkcję, jednak nie staje się ona przez to w jakimkolwiek sensie szczególna – inaczej niż w GAT, gdzie panuje zasada *wszystko albo nic*, zgodnie z którą dla oka o konkretnej geometrii p jest równe p_G albo dla *każdego* ciśnienia, albo dla *żadnego*. Działanie modelu gałki ocznej oparte na równaniu (8.13) wydaje się pod tym względem znacznie bardziej wiarygodne, bo nie wynika z przekonania o istnieniu oka „wybranego”, dla którego zjawiska mechaniki stworzone zostały tak, aby mu służyły. Nawet to, że mamy do czynienia z okiem Człowieka nie usprawiedliwia tak daleko posuniętej wiary.

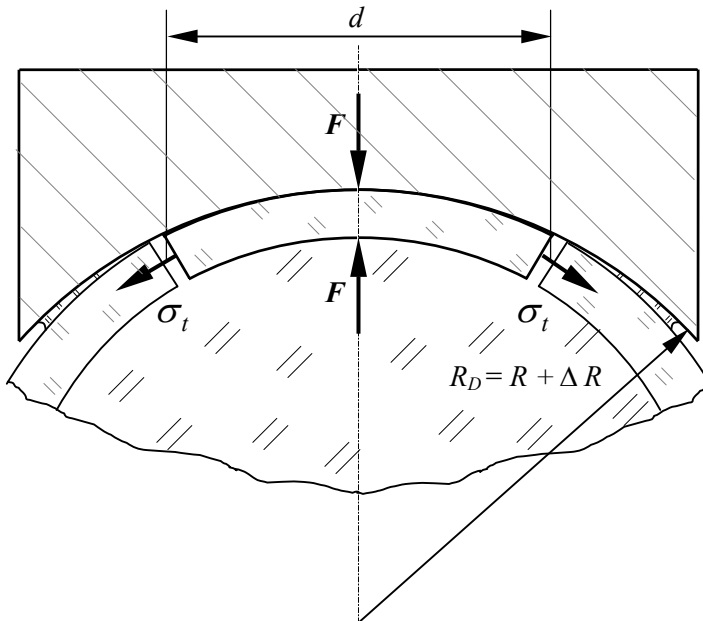
W podanym tu formalizmie należy zauważyć brak bezpośrednich odniesień do teorii błonowej. Rogówka od początku, z założenia, traktowana jest jak *powłoka o skończonej sztywności* zginania, a rozwiązanie uwzględnia jej geometryczną nieliniowość. Uzyskana w ten sposób funkcja ciśnienia aplanacji $p_G(p)$ nie ma żadnego związku z równaniem Laplace’a, a samo zadanie – z teorią Goldmanna. Rozwiązania nie są obciążone założeniami o siłach adhezji lub napięcia powierzchniowego, a obserwowane w praktyce zaniżanie wskazań tonometru znalazło proste wyjaśnienie w zjawisku utraty stateczności powłoki rogówkowej. Tonometria aplanacyjna w tym wydaniu całkowicie różni się od GAT – od założeń aż do formuły korekcyjnej. Jedynym zbieżnym punktem jest równanie (7.1). Warunek zawarty w tym równaniu nie wspiera jednak prawa Imberta–Ficka. Okazuje się ono bezużyteczne w tonometrii aplanacyjnej, podobnie jak wymienione siły. Jedyną podstawą formalną proponowanego tutaj rozwiązania jest mechanika ciała stałego w najczystszej postaci, bez zbędnych założeń i nowych praw. Tonometria to tylko *zadanie* mechaniki – *żadna teoria*.

8.2. Tonometria sferyczna

Na tonometrię aplanacyjną nałożony jest warunek utrzymywania stałej średnicy kalibracyjnej 3,06 mm podczas pomiaru, co w praktyce oznacza ograniczenie jej możliwości jedynie do odczytów statycznych. W ostatnich latach podejmowane są próby zbudowania przyrządu zdolnego mierzyć *chwilowe* wartości p , a więc rejestrowania ciśnienia wewnątrzgałkowego jako funkcji czasu. Założenia do teorii pomiaru tego ciśnienia są zbliżone do przyjętych w tonometrii aplanacyjnej. Na końcówkę pomiarową czujnika tonometru – takiego samego jak w GAT – zakładana jest nasadka zakończona powierzchnią kulistą zamiast płaską, a krzywizna bywa zarówno dodatnia, jak i ujemna. Obecnie rozpowszechniona jest wersja tonometrii, w której zastosowano wklęsłą końcówkę pomiarową, nazywana *dynamiczną tonometrią profilową* – DCT (*Dynamic Contour Tonometry*), a sam przyrząd – *Pascal® tonometer*.

8.2.1. Podstawy teoretyczne DCT wyłożone przez twórców metody

Autor metody, H. Kanngiesser (ze współpracownikami), sformułował podstawy mechaniczne DCT w pracach [Kanngiesser i Robert 2002, Kanngiesser i in. 2003]. Postulowany w nich schemat obciążenia wierzchołka rogówki poprzez nasadkę tonometru pokazano na rys. 8.15.



Rys. 8.15. Schemat obciążenia wierzchołka rogówki według [Kanngiesser i Robert 2002]

Autorzy pracy [Kangiesser i Robert 2002] na początku opisują eksperyment prowadzony w wyobraźni. Powłokę o takim samym kształcie jak powłoka rogówkowo-twardówkowa utwierdzają na całej zewnętrznej powierzchni (umieszczają ją w sztywnej obudowie, dopasowanej kształtem), następnie zwiększają ciśnienie p wewnątrz powłoki. Wtedy ciśnienie reakcji na zewnętrznej powierzchni powłoki powinno być, zdaniem autorów, równe ciśnieniu wewnętrznemu p . To *postulowane* „rozwiązanie” przenoszą następnie na zadanie sformułowane nieco inaczej, nadal przeplatając założenia z tym rozwiązaniem. Do wierzchołka rogówki o promieniu krzywizny R przyciśnięta zostaje wkłęsła końcówka pomiarowa o promieniu nieznacznie większym $R_D = R + \Delta R$. Powoduje to dopasowanie części rogówki do kształtu nasadki na średnicy d . Autorzy twierdzą, że w utworzonej w ten sposób *strefie dopasowania konturu* rogówki ciśnienia na zewnętrznej i na wewnętrznej powierzchni muszą być jednakowe – jak w poprzednim „rozwiązaniu”. Pojawia się zatem siła zewnętrzna F , a jej wartość powinna być równa sile wywieranej od wewnątrz przez ciśnienie wewnątrzgałkowe p . Z tego powodu, że takie dopasowanie dotyczy tylko *części* obszaru rogówki (o średnicy d), autorzy dopuszczają możliwość pojawienia się naprężenia rozciągającego σ_t na jej brzegu, jak pokazano na rys. 8.15, ale na tym kończy się rola naprężenia σ_t , ponieważ w dalszych obliczeniach nigdzie już nie jest ono uwzględniane.

Tak zdefiniowane zostało pojęcie *warunku dopasowania konturu* rogówki na średnicy d (zblizonej do 5 mm). Warunek ten pełni istotną rolę w rozwijanej teorii, bo autorzy *zakładają* – podobnie jak po utwierdzeniu całej gałki ocznej – że w strefie dopasowania konturu rogówki ciśnienia po obu stronach muszą być takie same.

Ciśnienie pomiędzy rogówką a nasadką mierzone jest w DCT za pomocą czujnika o średnicy 1,5 mm – mniejszej od d – umieszczonego na dnie nasadki, równo z jej sferyczną powierzchnią. Nasadka zakładana jest na trzpień pomiarowy tonometru, takiego samego jak używany w GAT. Przekonanie, że w ten sposób mierzymy „dokładne p ” uzasadniać mają przyjęte założenia. Warunki przeprowadzenia pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego stwarza jedna z opcjonalnych funkcji tonometru, jaką jest jego zdolność do wywierania stałej siły nacisku F_{ap} na rogówkę. Wybór padł na siłę jednego grama, która w GAT (dla średnicy $d = 3,06$ mm) oznacza ciśnienie 10 mmHg.

Próba obliczenia ciśnienia p_D działającego na czujnik zaczyna się w omawianej pracy od równania równowagi, identycznego z użytym przez Goldmanna, czyli (6.4). Równanie to – warunek równowagi sił działających na strefę aplanaacji w GAT – zostaje więc wykorzystane w zadaniu Kangiessera do zbilansowania sił postulowanych w DCT. Dokładnie *tych samych sił*, co w GAT. Aby ułatwić porównania z formalizmem zawartym w najważniejszej dla DCT pracy [Kangiesser i Robert 2002] pozostawiono użyte tam, oryginalne, symbole sił:

$$F_{iop} + F_c + F_r + F_{ap} = 0, \quad (8.28)$$

gdzie oznaczono wypadkowe siły:

F_{iop} – ciśnienia wewnątrzgałkowego działającego na obszar rogówki o średnicy d ,

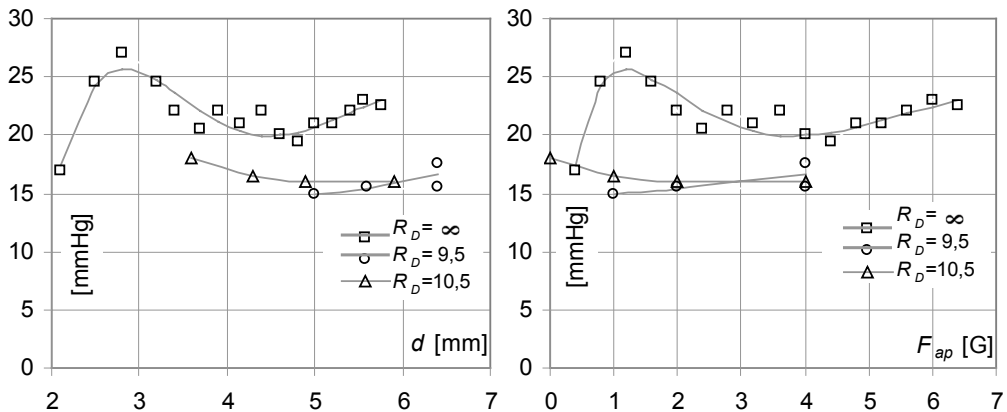
F_c – adhezji oraz napięcia powierzchniowego w filmie łzowym,

F_r – oporu zginania rogówki,

F_{ap} – nacisku końcówki tonometru.

Z równania (8.28) obliczana jest siła F_{ap} .

Istotne znaczenie dla oceny poprawności tych postulatów mają podane w pracy [Kangiesser i Robert 2002] wyniki pomiaru ciśnienia *in vivo*. Zamieszczone w niej wykresy, odtworzone na rys. 8.16, Kangiesser z współpracownikami uzyskał dla $R_D = 9,5$ mm, $R_D = 10,5$ mm oraz dla $R_D = \infty$ (końcówki płaskiej). Dla obu promieni $R_D < \infty$ odczytane ciśnienie osiąga minimalną wartość, wynoszącą 16 mmHg, dla średnicy d około 5 mm. Minimalne ciśnienie dla nasadki $R_D = \infty$ jest większe o 4 mmHg, a więc zbliżone jest do 20 mmHg. Nacisk F_{ap} wynosi wówczas około 1 grama siły dla $R_D = 9,5$ mm, około 2 gramów siły dla nasadki o promieniu $R_D = 10,5$ mm i prawie 5 gramów siły dla końcówki płaskiej.



Rys. 8.16. Porównanie wyników pomiaru ciśnienia z użyciem końcówek tonometru o trzech różnych promieniach krzywizny – wykresy odtworzone z pracy [Kangiesser i Robert 2002, rys. 4 i 5].

Po lewej: zależność odczytu ciśnienia od średnicy strefy dopasowania konturu d .

Po prawej: te same odczyty w funkcji siły nacisku F_{ap}

Rezultaty eksperymentu myślowego opisanego w pracy [Kangiesser i Robert 2002] skłaniają twórców DCT do twierdzenia, że gdy promień krzywizny końcówki pomiarowej jest dokładnie równy promieniowi rogówki R , to mierzone czujnikiem ciśnienie p_D musi być równe p . Wyniki pomiarów, podane na rys. 8.16, pozwalają autorom wysunąć kolejne twierdzenie: *zwiększanie* promienia R_D *zawyża* odczyt ciśnienia, a *największe* odchylenie odczytu p_D od p otrzymuje się dla końcówki płaskiej

– czyli w GAT. Twórcy DCT zmieniają zatem „układ odniesienia”, przenosząc go z GAT do DCT – teraz bezpośredni dostęp do rzeczywistego ciśnienia p ma DCT, a wynik uzyskiwany w GAT jest *zawyżony* względem ciśnienia rzeczywistego.

Oprócz opisanego „zawyżania” wskazań przyrządu wyposażonego w końcówkę pomiarową o promieniu krzywizny $R_D > R$ (a zwykle tak jest), autorzy zauważają też, że DCT zapewnia stałe wskazanie ciśnienia p_D , niezależne od użytej siły nacisku F_{ap} , równej lub większej od 1 grama (do 4 gramów), a także niezależne od promienia nasadki R_D (9,5 lub 10,5 mm), od grubości rogówki CCT i od jej promienia krzywizny R .

Należy wobec tego zauważyć, że gdyby ciśnienie p_D okazało się jednak *zależne* od siły nacisku F_{ap} , wówczas założenie Kanngiessera o równości ciśnień p_D i p w strefie dopasowania konturu byłoby fałszywe, zatem *nierówność tych ciśnień* przeczyłaby zarówno założeniom, jak i wszelkim konsekwencjom tych założeń.

Siła oporu zginania rogówki F_r z założenia powinna być w DCT mała, ponieważ wklęsła nasadka powoduje małe deformacje. Ta kwestia nie wydaje się kontrowersyjna. Natomiast rezultat eksperymentu zilustrowany na rysunku 8.16 oraz założenie o równości ciśnień po obu stronach strefy dopasowania konturu były zapewne weryfikowane przez autorów, a wyniki musiały wzbudzić ich wątpliwości, bo wysunęli tezę o „dramatycznym wzroście” siły F_c w porównaniu z GAT. Emocja ta staje się zrozumiała w kontekście konkluzji, że ani F_{ap} nie wpływa na wynik pomiaru ciśnienia (do tego przekonania autorzy doszli, obserwując wskazania tonometru przy różnych siłach nacisku na rogówkę), ani F_r (przekonanie motywowane intuicją). Okazuje się bowiem, po zbilansowaniu sił w równaniu (8.28), że same tylko siły F_{iop} , F_r , i F_{ap} są *bardzo dalekie* od stanu równowagi. Gdyby się równoważyły, wówczas pominięcie dodatkowo (i tak małej) siły F_r , prowadziłoby teraz do znajomo wyglądającego wyniku: $F_{ap} = F_{iop}$. Autorzy oczekiwali tej równości po opisanym wyżej „rozwiązaniu” w wyobraźni powłoki utwierdzonej na zewnętrznej powierzchni, jednak „dramat” polega na tym, że sił F_{ap} i F_{iop} nawet w najgrubszym przybliżeniu nie można uznać za równe, a wynikłe stąd ciśnienia po obu stronach rogówki są w DCT jeszcze bardziej odległe od siebie niż w modelu Goldmanna. O wiele bardziej! Mimo to postulat równości tych ciśnień został w DCT zachowany.

Dla zrównoważenia trzech wymienionych sił Goldmann wprowadził czwartą siłę napięcia powierzchniowego F_s . Na gruncie GAT jest ona odpowiedzialna za różnicę ciśnień p i p_G sięgającą nawet 10 mmHg. Tak duża siła napięcia powierzchniowego okazuje się w DCT jeszcze za mała do zachowania równowagi strefy dopasowania konturu, dlatego Kanngiesser wprowadził inną siłę, F_c – „adhezji oraz napięcia powierzchniowego w filmie łzowym”. Brzmi to nieco inaczej niż „siła napięcia powierzchniowego w filmie łzowym” ale, niestety, różnica sprowadza się jedynie do *brzmienia*. W istocie bowiem siła F_s , czy też siła F_c , pełni w każdej z tych metod *dokładnie taką samą rolę*: uzupełnia do zera pozostałe trzy siły w równaniu równowagi, które bez tego nie równoważą się. Ani Goldmann, ani Kanngiesser nie próbowali wyznaczyć rzeczywistych wartości tych sił, a są one zupełnie różne od ich oczekiwań,

w konsekwencji suma sił w równaniach równowagi (6.4) i (8.28) nadal jest bardzo odległa od zera.

Autorzy omawianej pracy [Kanngiesser i Robert 2002] wyrażają przekonanie, że dokładne określenie zależności mechanicznych i geometrycznych w powłoce tak obciążonej rogówki wymaga użycia metody elementów skończonych, a Kanngiesser podaje rozwiązanie numeryczne w jednej ze swoich kolejnych publikacji [Kanngiesser 2004]. Rozwiązanie to uwzględnia obecność sił postulowanych w GAT, z tą różnicą, że siła napięcia powierzchniowego F_S zastąpiona zostaje siłą F_c . Jest ona tak dobrana, aby spełniony został postulat równości ciśnienia na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni rogówki w strefie przyosiowej, w której umieszczono czujnik. W ten sposób siła adhezji F_c stała się dominującym składnikiem równania równowagi (8.28) – znacznie większym niż siła nacisku F_{ap} .

8.2.2. Symulacja numeryczna DCT

Do obliczenia ciśnienia wywieranego przez nasadkę tonometru na rogówkę użyty zostanie model, na którym symulowana była tonometria aplanacyjna. Także w tym przypadku obciążenie zewnętrzne wprowadzane jest kinematycznie. Odcinek okręgu o promieniu R_D , równym 9,5 lub 10,5 mm, początkowo stychny do wierzchołka rogówki obciążonej ciśnieniem wewnętrznym, przesuwany jest wzdłuż osi, w głąb modelu. Dla kolejnych wartości tego przesunięcia, przemieszczenia osiowe węzłów na zewnętrznym profilu rogówki, które okrąg przekroczył, dobierane są tak, aby węzły te znalazły się na okręgu. W kierunku prostopadłym do osi węzły zachowują swobodę przemieszczeń. Po rozwiązaniu MES reakcje węzłowe w tej strefie przeliczane są na siłę wypadkową, ciśnienie lokalne i ciśnienie średnie.

W przedstawionych obliczeniach uwzględniony jest udział:

- materiału rogówki,
- ciśnienia wewnątrzgałkowego,
- promienia krzywizny końcówki tonometru,
- promienia strefy kontaktu z tą końcówką,
- siły nacisku,
- grubości rogówki (CCT).

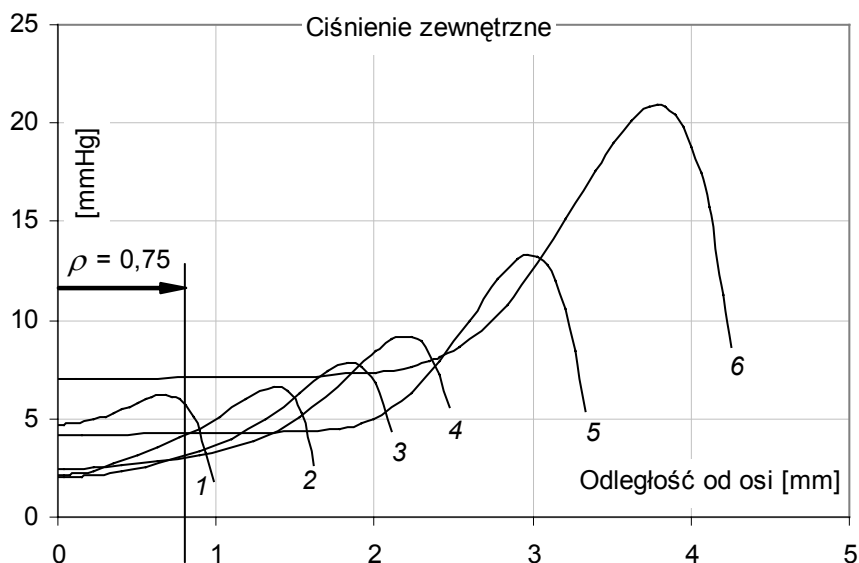
Najpierw przyjrzymy się rozkładowi ciśnienia na zewnętrznej powierzchni rogówki, w strefie kontaktu z nasadką tonometru. Pozwoli to zweryfikować zasadność założenia o jednorodności tego ciśnienia i jego równości z IOP.

8.2.2.1. Rozkład ciśnienia pod nasadką tonometru

Zadanie służy zasadniczo rozpoznaniu zagadnienia i jakościowej ocenie rozkładu ciśnienia pod nasadką. Obliczenia wykonane zostaną dla parametrów nominalnych, a zatem rogówki z materiału $M2$ (tab. 7.3), o promieniu krzywizny $R = 7,80$ mm i dla

promienia nasadki $R_D = 9,5$ mm. Na rysunku 8.17 zestawiono wykresy ciśnienia obliczonego dla kilku wartości przesunięcia nasadki sferycznej względem wierzchołka rogówki. Ciśnienie wewnątrzgłokowe $p = 16$ mmHg (2,1 kPa).

W tabeli 8.3 podano wyniki liczbowe odpowiadające wykresom na rysunku 8.17. Krzywa 3 jest najbardziej zbliżona do przypadku uznanego w DCT za optymalny, ponieważ siła nacisku tonometru $F_D = 0,01$ N jest wówczas bardzo bliska jednego grama siły. Wykres ciśnienia przypomina rozkład otrzymany dla GAT (podrozdz. 7.1.1, rys. 7.5), jednak tutaj ciśnienie zewnętrzne jest znacznie mniejsze od p . W obszarze zajmowanym przez czujnik ciśnienia, do $\rho = 0,75$ mm, średnie ciśnienie, oznaczone p_D , jest nieco większe od wartości dla $\rho = 0$ i wynosi 2,5 mmHg. Rozkład ciśnienia jest niejednorodny, a jego wartość p_D „mierzona” przez czujnik (kolumna 6) mocno się różni od średniej p_{Dm} dla obszaru dopasowania konturu (kolumna 7). Różnica p_a tych ciśnień podana jest w ostatniej kolumnie.



Rys. 8.17. Rozkład ciśnienia na zewnętrznej powierzchni rogówki, otrzymany dla kolejnych wartości przesunięcia nasadki tonometru w głąb rogówki. Ciśnienie wewnątrzgłokowe $p = 16$ mmHg.

W obszarze do promienia $\rho = 0,75$ mm ciśnienie jest uśredniane przez czujnik zamontowany w nasadce

Przy nacisku większym niż 0,016 N (krzywe 5 i 6) rzeczywiście pojawia się obszar stałego ciśnienia w pobliżu osi i można odnieść wrażenie, że wtedy rozwiązania przypominają postulowany w DCT obraz obciążeń rogówki, ale nawet przy największym nacisku tonometru (krzywa 6) stałe ciśnienie 7 mmHg, sięgające niemal do 2 mm od osi, jest przeszło dwukrotnie mniejsze od wewnątrzgłokowego p .

Tabela 8.3. Wybrane wyniki rozwiązań przedstawionych na rys. 8.17

Nr krzywej	Przesunięcie nasadki [mm]	Siła nacisku tonometru F_D [N]	Średnica strefy kontaktu d [mm]	Ciśnienie na osi [mmHg]	Ciśnienie średnie do 0,75 mm od osi, p_D [mmHg]	Ciśnienie średnie p_{Dm} [mmHg]	Odchylenie p_D od średniej p_{Dm} [mmHg]
1	0,05	0,0021	1,96	4,7	5,7	5,2	0,5
2	0,10	0,0055	3,24	2,1	3,2	5,0	-1,8
3	0,15	0,0104	4,22	2,0	2,5	5,6	-3,1
4	0,20	0,0160	4,95	2,5	2,7	6,2	-3,5
5	0,40	0,0372	6,67	4,0	4,2	8,0	-3,8
6	0,80	0,0984	8,51	7,0	7,1	13,0	-5,9

Dla najbardziej charakterystycznego szczegółu wykresów przedstawionych na rysunku 8.17, czyli dla maksimum ciśnienia występującego w pobliżu brzegu strefy dopasowania, nie ma żadnego uzasadnienia w przyjętych dla DCT postulatach. Obecność tego maksimum silnie zaburza jednorodność ciśnienia, a jednocześnie pojawia się daleko od czujnika pomiarowego. Rozwiązania metodą elementów skończonych, które przedstawia Kanngiesser w swojej pracy [Kanngiesser 2004], również wykazują podobny rozkład ciśnienia: na osi występuje umiarkowana jego wartość (równa p), w miarę oddalania się od osi nacisk narasta, by w pobliżu brzegu strefy dopasowania osiągnąć kulminację. Jednak wyniki Kanngiessera można tu porównywać tylko jakościowo, gdyż największą siłą obciążającą jego model rogówki jest F_c , przypisywana adhezji. Ta siła nie była uwzględniana w rozwiązaniach przedstawionych na rysunku 8.17 i tabeli 8.3. Powód zostanie podany w podrozdziale 8.2.4.

Z przedstawionych rozwiązań wynika, że ciśnienie p_D (rejestrowane przez czujnik na dnie zagłębienia nasadki pomiarowej) jest wielokrotnie mniejsze od ciśnienia wewnątrzgałkowego p . Z pewnością właśnie to zjawisko jest powodem tak wielkiego znaczenia nadawanego sile F_c w rozwiązaniu Kanngiessera, największy wysiłek w tworzeniu modelu numerycznego autor włożył bowiem w dopasowanie ciśnienia zewnętrznego p_D do wewnętrznego p , a równość tę osiągnął przez dodanie z zewnątrz hipotetycznej siły adhezji F_c [Kanngiesser 2004]. Wyniki symulacji pomiaru ciśnienia, podane w tab. 8.3, wskazują, że dla $p = 16$ mmHg ciśnienie $p_D = 2,5$ mmHg (trzeci wiersz). Siła F_c , wymagana do zwiększenia p_D aż do 16 mmHg, rzeczywiście musiałaby być „dramatycznie” wielka, jak określają to sami autorzy. Nawet siła nacisku 0,1 N, czyli 10 razy większa od nominalnej F_{ap} , wywołuje tylko ciśnienie 7 mmHg – wiersz 6. tabeli 8.3. Czym wytłumaczyć tę kontrowersję?

Przyczyną wydaje się właśnie siła F_c . Została ona powołana do istnienia na mocy założenia, że ciśnienia po obu stronach powłoki w strefie dopasowania konturu *muszą być sobie równe*. Doprawdy trudno zrozumieć dlaczego akurat ten warunek nabiera aż tak ogromnego znaczenia, przecież nie wynika on ani z przewidywań teoretycznych, ani nie pozostaje w zgodzie z aktualnie uznawanymi postulatami tonometrii. Jeżeli nawet w eks-

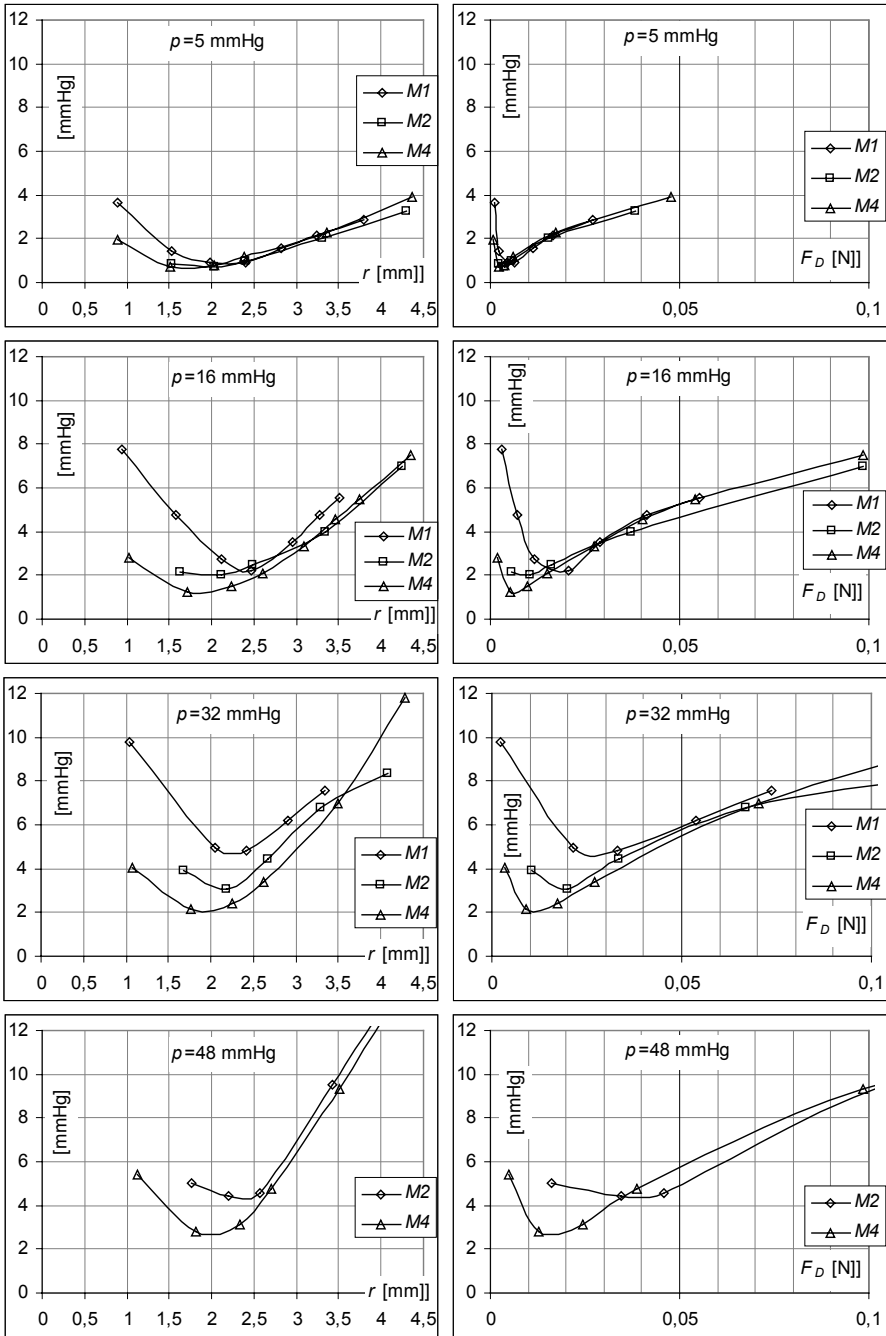
perymencie myślowym, opisanym w pracy [Kanngiesser i Robert 2002] (i przytoczonym w podrozdziale 8.2.1), prawdziwa jest teza o równości tych ciśnień w powłoce rogówkowo-twardówkowej, która *najpierw* zostaje utwierdzona na *całej* zewnętrznej powierzchni, a dopiero *potem* obciążona ciśnieniem wewnętrznym p , to jednak rzeczywisty pomiar ciśnienia techniką DCT zupełnie nie przypomina tego zadania. W DCT rogówka zostaje dopasowana kształtem do konturu nasadki dopiero *po* obciążeniu powłoki ciśnieniem p , a dopasowanie następuje na stosunkowo niewielkiej powierzchni. To jest *zupełnie inne* zadanie. Tezy o równości ciśnień $p = p_D$ nie można postulować, ponieważ nic jej nie uzasadnia (nawet prawo Imberta–Ficka ma jakiś sens w GAT, bo jest słuszne dla *płaskiej błony* – tutaj postulowanie równości ciśnień po obu stronach *powłoki sferycznej* staje w ewidentnej sprzeczności z równaniem Laplace’a). Podane na rysunku 8.17 i w tabeli 8.3 rozwiązania pokazują, że ciśnienia po obu stronach powłoki mocno się różnią i nie ma powodu by w to wątpić – jak długo równość obu ciśnień nie zostanie dowiedziona. Kiedy już dopuścimy różnicę między tymi ciśnieniami, to okazuje się, że siła adhezji w równaniu równowagi (8.28) – zjawisko stricte fizyczne, bez istotnego wpływu na obciążenie – staje się zbędna. Równowagę fragmentu rogówki w strefie dopasowania zapewniają w zupełności zjawiska mechaniczne.

Warto w tym kontekście przywołać przypadek GAT, opisany w podrozdziale 6.1.3. Dla wysokiego ciśnienia wewnątrzgąłkowego i małej grubości CCT, różnica ($p - p_G$) sięga kilkunastu mmHg i jest przypisywana działaniu napięcia powierzchniowego. Z przedstawionych tam obliczeń wynika jednak, że napięcie powierzchniowe – po zmierzeniu go – może obniżyć wskazanie tonometru p_G co najwyżej o pół mmHg względem p , zatem w GAT nie można tego problemu przerzucić na „fizykę”. W dodatku okazało się, że brakujące kilkanaście mmHg w ciśnieniu p_G odnalazło się w rozwiązaniu modelu nieliniowego (podrozdz. 8.1.3.3). Być może siła napięcia powierzchniowego i adhezji, to w tonometrii taki „wytrych” – hipoteza *ad hoc*, który otwiera drogę na skróty. Ale ta droga wiedzie w ślepy zaułek. W podrozdziale 8.2.4 będziemy mieli okazję zwiedzić ten zaułek, tam też dowiemy się, że siły F_c w ogóle *nie wolno* umieścić w równaniu (8.28). Natomiast brakuje w tym równaniu *siły rozciągającej* powłokę rogówkową – to właśnie ona jest w DCT przyczyną nierówności $p_D < p$. Jej obecność jest oczywista, o czym przekonuje nas bilans sił dany równaniem (8.32).

8.2.2.2. Obciążenie rogówki przez nasadkę o promieniu $R_D = 9,5$ mm

Wykresy ciśnienia p_D dla modeli rogówki z materiałów $M1$, $M2$ i $M4$ (tab. 7.3) pokazane na rys. 8.18 po lewej stronie, odpowiadają wykresom na rysunku 8.1, uzyskanym dla GAT.

Punkty na wykresach obliczane były dla kolejnych wartości przesunięcia nasadki tonometru względem początkowego położenia wierzchołka rogówki obciążonej ciśnieniem wewnątrzgąłkowym p . Dla każdego poziomu p , oprócz zależności od promienia strefy kontaktu r , wykreślona jest – po prawej stronie – także zależność od siły nacisku F_D .



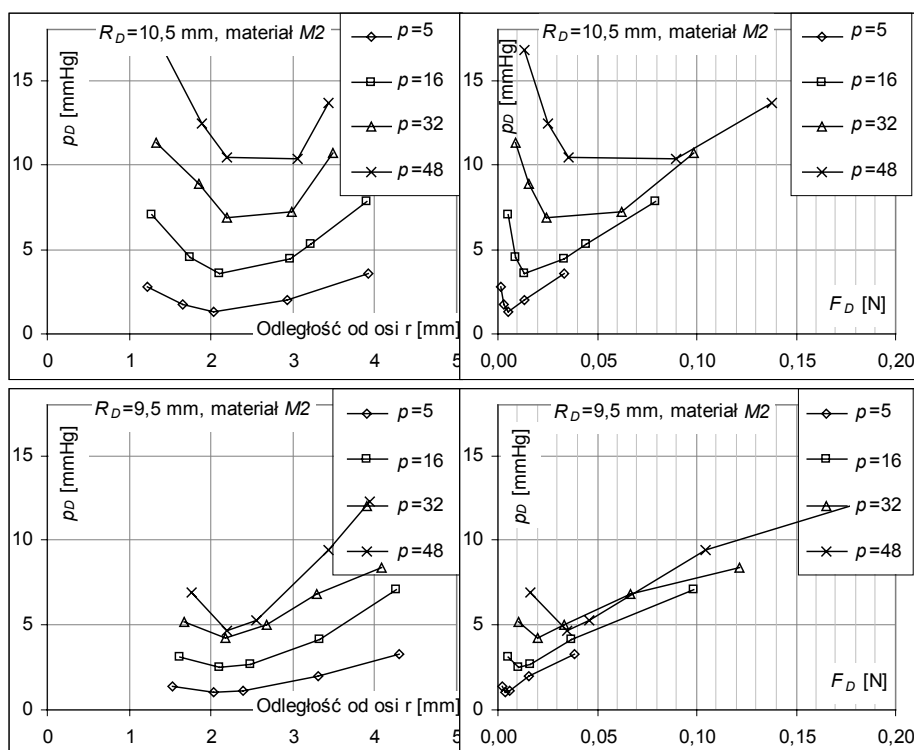
Rys. 8.18. Po lewej – $p_D(r)$, po prawej – $p_D(F_D)$. Promień krzywizny nasadki $R_D = 9,5$ mm

Każdy punkt na wykresie po lewej stronie ma odpowiadający mu punkt na wykresie po prawej, łatwo zatem powiązać ze sobą promień r z siłami F_D podczas obciążania rogówki. Na ostatnim wykresie, dla $p = 48$ mmHg, brakuje rozwiązań dla materiału $M1$, gdyż w większości są one wówczas rozbieżne.

Wyniki zestawione na rysunku są podobne do rozwiązań uzyskanych dla GAT w tym szczególności, że funkcja p_D wykazuje minimum. Pojawia się ono przy promieniu strefy kontaktu r zbliżonym do 2–2,5 mm lub F_D około 0,01–0,02 N. Jednak w przeciwieństwie do GAT „mierzone” ciśnienie p_D jest *znacznie mniejsze* od ciśnienia wewnątrz gałki ocznej. Widoczna jest również duża zależność wyników „pomiaru” ciśnienia p_D od parametrów materiału.

8.2.2.3. Obciążenia rogówki przez nasadkę o promieniu $R_D = 10,5$ mm

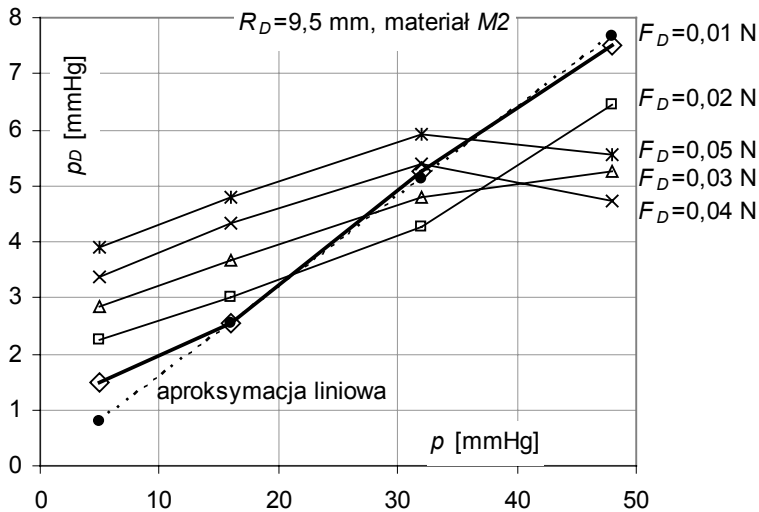
Analogiczne funkcje p_D dla rogówki z materiału $M2$, obciążanej poprzez nasadkę o promieniu $R_D = 10,5$ mm, zestawiono na rysunku 8.19 – górna para wykresów. Dla porównania z wynikami otrzymanymi dla nasadki $R_D = 9,5$ mm, dodana została dolna para wykresów.



Rys. 8.19. Zestawienie wykresów z rys. 8.18 dla materiału $M2$ (dół). Analogiczne wykresy p_D dla modelu rogówki z materiału $M2$ (góra), $R_D = 10,5$ mm. Ciśnienie p w mmHg

8.2.2.4. Wskazania tonometru w DCT

Na podstawie otrzymanych rozwiązań możliwe jest utworzenie zależności p_D od p dla ustalonej siły nacisku F_D . W DCT preferowana jest wartość siły 0,01 N, ale – jak wynika z badań *in vivo* opisanych w podrozdziale 8.2.1 – większe wartości tej siły także są dopuszczalne, bo podobno wielkość siły F_D nie ma wpływu na wynik pomiaru. Na rysunku 8.20 sporządzono wykresy ilustrujące zależność ciśnienia p_D od ciśnienia wewnątrzgałkowego p dla pięciu ustalonych wartości siły F_D . Obliczenia przeprowadzone zostały dla rogówki z materiału M2 i nasadki o promieniu $R_D = 9,5$ mm.



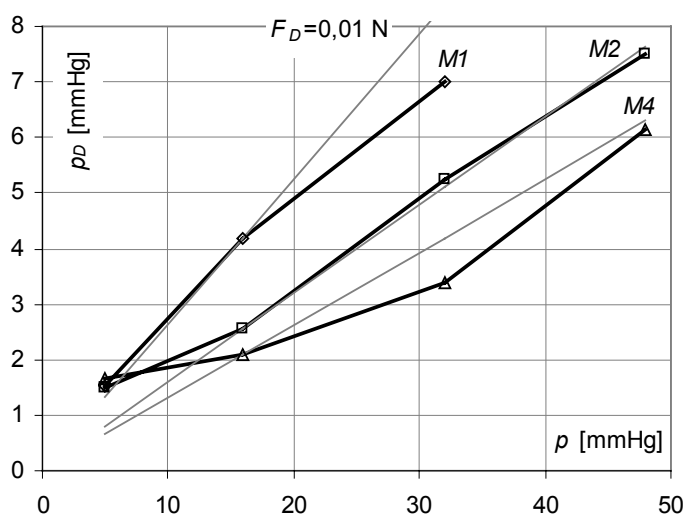
Rys. 8.20. Wykresy funkcji $p_D(p)$ dla pięciu wartości siły nacisku F_D . Promień nasadki $R_D = 9,5$ mm, materiał M2. Współczynnik kierunkowy aproksymacji liniowej dla $F_D = 0,01$ N wynosi 0,16

Jedynie dla siły nacisku $F_D = 0,01$ N ciśnienie p_D jest proporcjonalne do p w całym zbadanym tutaj zakresie. Ale pokazywane przez przyrząd ciśnienie p_D nie jest równe p , stanowi ono zaledwie *jedną szóstą* rzeczywistego ciśnienia. Prosta wykreślona na rysunku linią przerywaną, opisana jest równaniem $p_D = 0,16 p$.

Funkcje $p_D(p)$ dla sił 0,01 i 0,02 N niewiele się różnią, gdy p jest równe lub nieco większe od nominalnego, ich wykresy przecinają się, gdy $p = 20$ mmHg. Zwiększanie siły F_D powoduje zwiększanie funkcji $p_D(p)$, ale staje się ona przez to coraz bardziej nieliniowa, a nawet pojawia się maksimum. Gdy ciśnienie p jest niskie (tutaj 5 mmHg), wartości $p_D|_{F>0,01}$ są większe od $p_D|_{F=0,01}$, a ciśnienie p_D jest tym większe, im większa jest siła nacisku. Dla dużego ciśnienia p (48 mmHg), wartości $p_D|_{F>0,01}$ są nawet mniejsze od $p_D|_{F=0,01}$.

Najbardziej korzystną właściwością DCT na tym etapie obliczeń jest proporcjonalna zależność ciśnienia p_D od p , gdy $F_D = 0,01$ N. Jeśli już współczynnik proporcjonalności zostanie ustalony (tutaj jego wartość 0,16 została obliczona, ale w praktyce okulistycznej jest on wyznaczany przez porównanie ze wskazaniem tonometru Goldmanna dla rogówki o wymiarach kalibracyjnych i dla ciśnienia nominalnego), to odczyty ciśnienia uzyskiwane za pomocą tej techniki pomiarowej będą poprawne, niezależnie od wartości ciśnienia wewnątrzgałkowego. Pod tym względem DCT okazuje się lepsza nawet od GAT (która *nigdy* nie pozwala uzyskać wskazań p_G proporcjonalnych do p), a strategia dynamicznego pomiaru ciśnienia IOP – trafna.

Niestety DCT wykazuje mankament, który może całkowicie niwelować tę zaletę. Wynika on z analizy wykresów przedstawionych na rysunku 8.21.

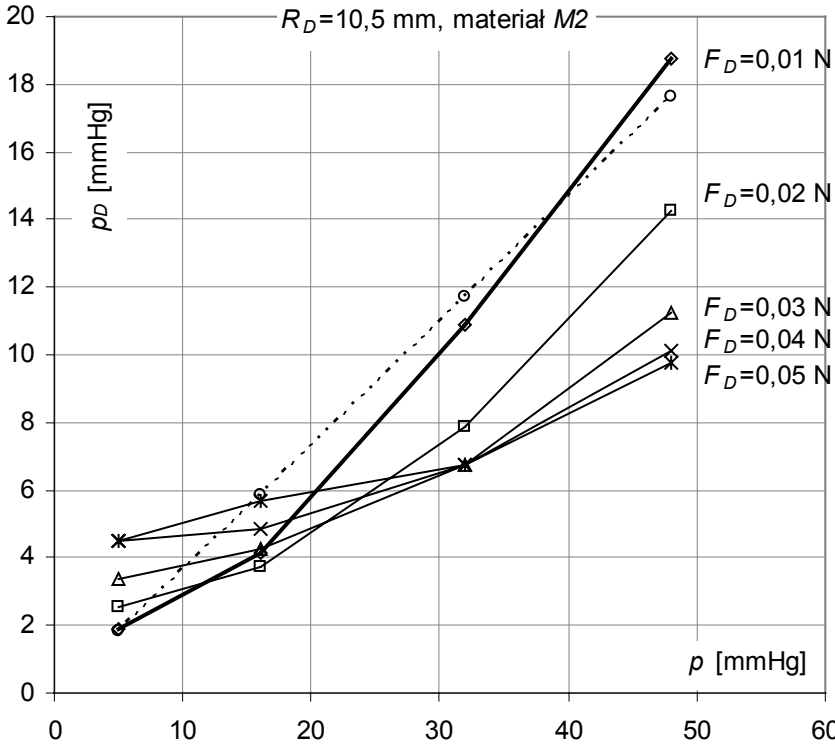


Rys. 8.21. Funkcja ciśnienia $p_D(p)$ dla ustalonej siły $F_D = 0,01$ N. Obliczenia wykonano dla modelu rogówki z materiału $M1$, $M2$ i $M4$. Promień nasadki $R_D = 9,5$ mm

Wykresy (analogiczne do przedstawionych na rys. 8.20) sporządzone dla siły optymalnej $F_D = 0,01$ N i materiałów $M1$, $M2$ i $M4$, świadczą o tym, że współczynnik kierunkowy funkcji liniowej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych i przez punkt uzyskany dla ciśnienia nominalnego $p = 16$ mmHg bardzo mocno zależy od materiału. Wynosi on 0,23 dla $M1$ i 0,12 dla $M4$.

Współczynnik proporcjonalności między ciśnieniami p_D i p dla siły $F_D = 0,01$ N zależy także od promienia krzywizny nasadki R_D . Porównując wykresy na rysunkach 8.20 i 8.22 widać, że wskazania tonometru są tym większe, im krzywizna

nasadki jest mniejsza. Taka tendencja wydaje się zgodna z GAT, bo gdy ta krzyżowa staje się równa zero, to średnie ciśnienie na zewnątrz rogówki spełnia warunek (7.1).

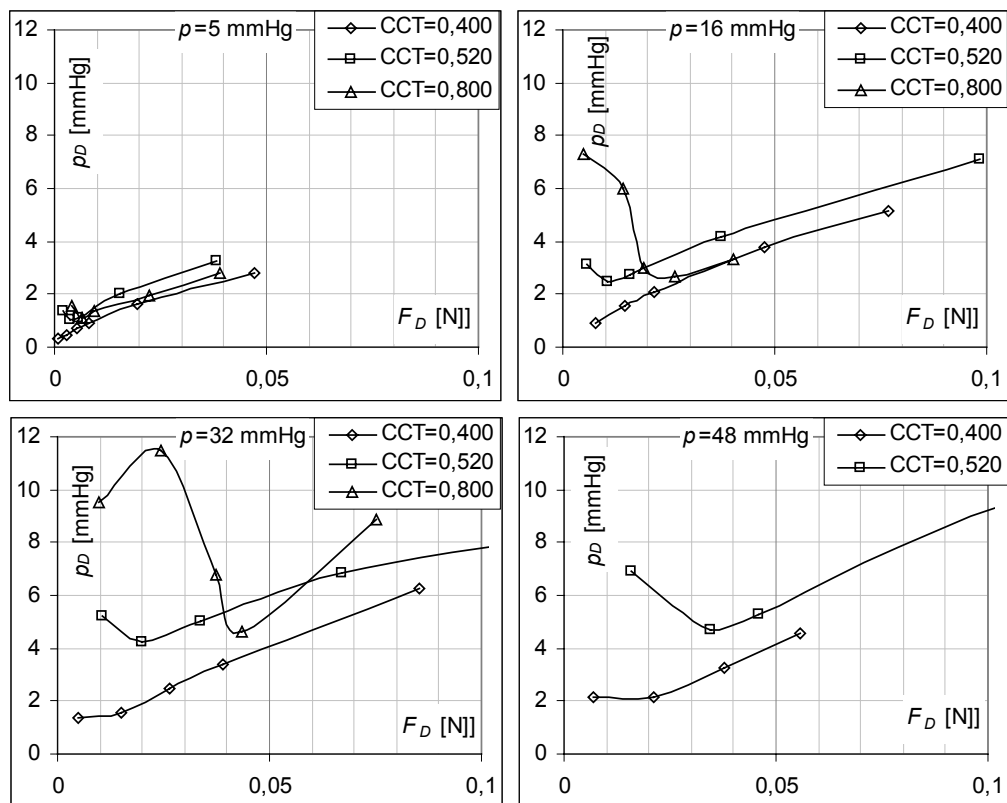


Rys. 8.22. Funkcja $p_D(p)$ dla pięciu wartości siły F_D . Promień nasadki $R_D = 10,5$ mm, materiał M2.
Współczynnik kierunkowy aproksymacji liniowej dla $F_D = 0,01$ N wynosi 0,37
– ponad dwa razy *więcej* od obliczonego dla $R_D = 9,5$ mm (rys. 8.20)

8.2.2.5. Jak p_D zależy od CCT

Zgodnie z założeniami DCT, przedstawionymi w podrozdziale 8.2.1, siła zginania powłoki rogówkowej podczas pomiaru jest bardzo bliska zera, dzięki temu nie zaburza ona mierzonego ciśnienia. To miałyby uzasadniać tezę, że tonometria dynamiczna z natury swej jest mało wrażliwa na grubość rogówki (podrozdz. 8.2.2.8. *Badania doświadczalne*). Kierując się tymi przesłankami, wyrażonymi *explicite* w pracy [Kanngiesser i Robert 2002], można też sądzić, że ciśnienie wewnątrzgałkowe powinno być tym dokładniej „przekazywane” na czujnik, im rogówka jest cieńsza – zatem wskazania przyrządu powinny być wówczas bliższe ciśnieniu p . W granicy, gdy CCT zdąży do zera, równość tych ciśnień staje się oczywista. Wyniki obliczeń dla modelu z mate-

riału $M2$ i nasadki o promieniu $R_D = 9,5$ mm, wykreślono na rysunku 8.23. (Rozwiązania dla $p = 48$ mmHg i $CCT = 0,800$ mm pominięto, ponieważ w większości były rozbieżne.)

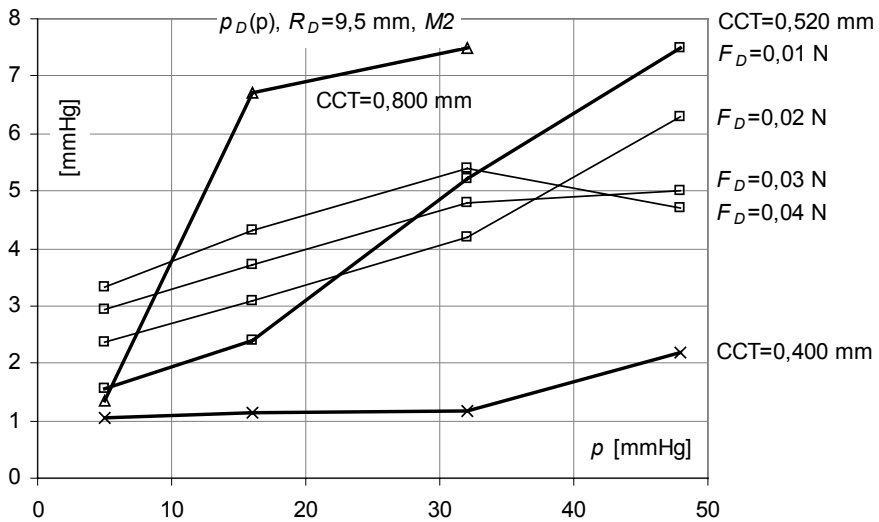


Rys. 8.23. Ciśnienie p_D jako funkcja siły nacisku końcówki tonometru na rogówkę.
Materiał $M2$, promień krzywizny nasadki $R_D = 9,5$ mm

Przewidywania wyprowadzone z założeń do DCT tylko częściowo znajdują tu potwierdzenie. Wykresy p_D dla trzech grubości CCT zdają się tworzyć wspólną wiązkę (zresztą dość luźną) jedynie powyżej pewnej wartości siły nacisku F_D dla każdego ze zbadanych poziomów ciśnienia p . Tak więc dla $p = 5$ mmHg siła ta przewyższa 0,01 N, dla $p = 16$ mmHg siła musi być większa od 0,02 N i dla $p = 32$ mmHg siła nacisku przekracza 0,04 N (dla $p = 48$ mmHg siła może być nie mniejsza od 0,04 N). Jednak nawet wtedy p_D nie jest stałe, rośnie wraz z narastającą siłą F_D .

Wykresy ciśnienia $p_D(p)$ w zależności od CCT pokazano na rysunku 8.24. To, co wynika z przedstawionych rozwiązań dla pomiaru ciśnienia dla siły $F_D = 0,01$ N, jesz-

cze bardziej odbiega od intuicyjnych wyobrażeń. Dla nominalnej wartości ciśnienia p (16 mmHg) rozwiązania dla grubości CCT, wynoszącej kolejno 0,400 mm, 0,520 mm i 0,800 mm, dostarczają p_D równego odpowiednio 1,1 mmHg, 2,4 mmHg i 6,7 mmHg. Różnice te są równie duże dla $p = 32$ mmHg. Tak wyraźna zależność p_D od CCT nie potwierdza przekonania, że DCT jest niewrażliwa na zmienność tego parametru (wyrażonego w podrozdziale 8.2.1). Dla ustalonego ciśnienia p , im cieńsza rogówka, tym niższe wskazanie tonometru p_D . Nieprawdziwe jest też mniemanie, wyrażone na początku tego rozdziału, że mała CCT implikuje dokładniejszy pomiar ciśnienia – jest wręcz odwrotnie: najcieńsza zbadana rogówka aż do $p = 32$ mmHg daje odczyty niemal stałe i bardzo małe. Najbliższe rzeczywistości są odczyty ciśnienia p_D dla rogówki o grubości 0,800 mm, ale i te są znacznie od niego mniejsze.

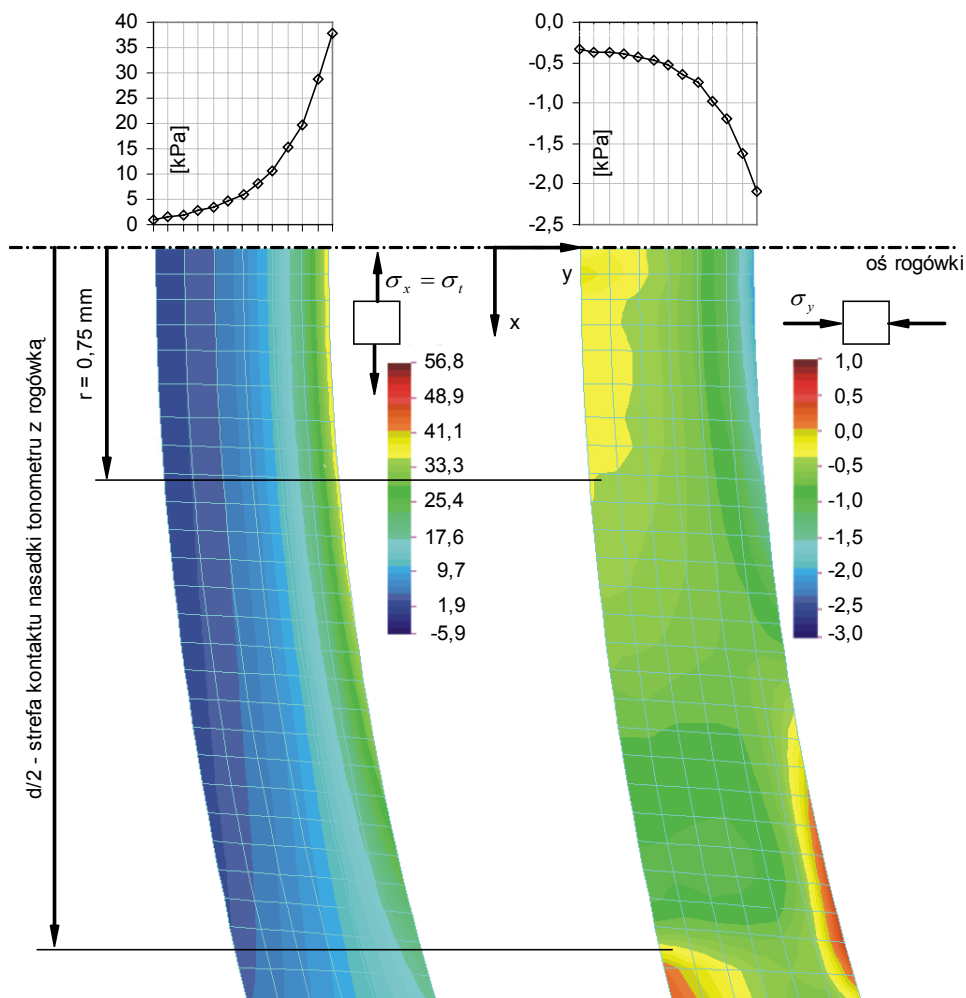


Rys. 8.24. Funkcje ciśnienia $p_D(p)$ dla modelu rogówki o grubości 0,400, 0,520 i 0,800 mm, przy sile nacisku $F_D = 0,01$ N – linie pogrubione. Te same funkcje ciśnienia dla modelu CCT = 0,520 mm przy sile nacisku 0,02, 0,03 i 0,04 N wykreślone są cienkimi liniami

8.2.2.6. Rozkład naprężenia na grubości rogówki

Rozwiązanie przedstawione jako krzywa 3 na rysunku 8.17 uzyskano dla układu parametrów, które uznawane są jako przeciętne dla ludzkiej gałki ocznej. Rogówka o promieniu 7,8 mm i grubości 0,520 mm z materiału *M2* została obciążona od wewnątrz ciśnieniem 16 mmHg (2,1 kPa) oraz siłą $F_D = 0,01$ N za pośrednictwem nasadki tonometru o promieniu $R_D = 9,5$ mm. Średnie naprężenia główne w obszarze rogówki przyległym do osi, $\sigma_x = \sigma_z$ oraz σ_y , wykreślone są na rysunku 8.25. Wyniki te pozwalają zweryfikować założenia i tezy DCT omówione w podrozdziale 8.2.1.

Zacznijmy od tezy najważniejszej: ciśnienie działające od wewnątrz „przekazywane” jest w pełni na czujnik tonometru, przylegający do zewnętrznej powierzchni rogówki w jej wierzchołku. Naprężenie $\sigma_y = -2,135$ kPa na powierzchni wewnętrznej jest równe $p = 16$ mmHg, co ilustruje wykres po prawej stronie rysunku 8.25. Szybko jednak rośnie i już w połowie grubości rogówki naprężenie osiąga wartość bliską tej, jaką ma na zewnętrznej powierzchni, to jest $\sigma_y = -0,338$ kPa, co przekłada się na ciśnienie $p_D = 2,53$ mmHg. Rozkład ten jest w obszarze do 0,75 mm od osi (zaznaczonym na rys. 8.25) względnie stały.



Rys. 8.25. Naprężenia σ_x i σ_y w wierzchołku rogówki. Nacisk nasadki $F_D = 0,01$ N, $p = 16$ mmHg

Druga fundamentalna teza tej techniki pomiaru IOP wyrażana jest w przekonaniu, że naprężenie σ_x (rozciągające powłokę rogówkową, na rys. 8.15 oznaczone σ_t) jest równe zeru w obszarze obejmowanym nasadką tonometru. Bez tej nasadki (przed rozpoczęciem pomiaru ciśnienia) średnie naprężenie σ_x w wierzchołku rogówki jest zbliżone do 15 kPa dla ciśnienia wewnątrzgałkowego $p = 16$ mmHg (patrz podrozdz. 3.1). Jeżeli miałyby ono „znikać” w strefie dopasowania konturu, to w najbardziej pesymistycznej prognozie (przy największych błędach rozwiązania numerycznego) wartość tego naprężenia nie powinna przekraczać rzędu jednego kilopaskala (o rząd mniej niż wynika z przewidywań). Tak faktycznie jest na zewnętrznej powierzchni wierzchołka rogówki (1,1 kPa). Naprężenie to okazuje się jednak zmienne wzdłuż osi i na wewnętrznej powierzchni osiąga wartość znacznie większą od średniej, bo 37,8 kPa. Na grubości rogówki średnia ta wynosi 10,9 kPa w strefie przysiosowej, naprężenie jest zatem o rząd *większe* od spodziewanego – nie może więc być zignorowane.

8.2.2.7. Jakie ciśnienie mierzy czujnik?

Przedstawione rozwiązania wskazują, że działające na czujnik tonometru ciśnienie p_D jest *wielokrotnie* mniejsze niż ciśnienie p , zatem wyniki te pozostają w sprzeczności z postulatami DCT, podanymi w punkcie 8.2.1. Wniosek ten potwierdzają rezultaty badań *in vivo* opisane w pracy [Kangiesser i Robert 2002]. Interesujący nas szczególnie zamieszczony został na rysunku 8.16. Rzędna pierwszego punktu wykresu dla nasadki $R_D = 9,5$ mm jest równa $p_D = 15$ mmHg – takie ciśnienie pokazuje czujnik i takie właśnie, wg założeń DCT, powinno być ciśnienie wewnątrzgałkowe p . Punkt ten na lewym wykresie ma odciętą $d = 5$ mm, a na prawym $F_{ap} = 1$ gram siły. Średnie ciśnienie p_{Dm} w strefie dopasowania konturu jest ilorazem tej siły i powierzchni koła o średnicy 5 mm, zatem wynosi 3,7 mmHg – *aż cztery razy mniej* niż ciśnienie wewnątrzgałkowe 15 mmHg (weryfikowane w następnym akapicie).

Wątpliwości budzą też wyniki pomiaru końcówką płaską podane na rys. 8.16. Na wykresie po lewej stronie ciśnienie dla $R_D = \infty$ i średnicy $d = 3,2$ mm (zbliżonej do kalibracyjnej) jest równe 25 mmHg (czwarty punkt). Temu punktowi na wykresie po prawej stronie odpowiada siła nacisku 1,6 grama (0,016 N). Dzieląc tę siłę przez powierzchnię koła o średnicy 3,2 mm, otrzymujemy ciśnienie 15 mmHg. Tyle *faktycznie* wynosi ciśnienie wewnątrzgałkowe – wskazanie tonometru 25 mmHg rzeczywiście jest „zawyżone” (jak o GAT przesądzają autorzy DCT), ale wynika to z wadliwego ustawienia przyrządu użytego do badań, a nie z błędu GAT.

Jeżeli tylko nie obciążamy procedury pomiarowej niepewnymi założeniami i obliczamy ciśnienie zewnętrzne na rogówce jako iloraz siły nacisku przyrządu i powierzchni kontaktu, to wyniki tego doświadczenia są bliższe rozwiązaniom modelu numerycznego niż tezom DCT. Doświadczenie to pokazuje, że ciśnienie p_{Dm} jest *co*

najmniej 4 razy mniejsze od ciśnienia p , wspiera jednocześnie technikę pomiaru prowadzonego za pomocą płaskiej końcówki – bo chyba nie można sądzić, że ciśnienie wewnątrzgałkowe badanego oka rzeczywiście jest równe 3,7 mmHg, a wynik GAT, wynoszący 15 mmHg – „zawyżony”.

8.2.2.8. Porównanie DCT i GAT

Rozwiązania numeryczne. Tonometria dynamiczna umożliwia prowadzenie pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego w funkcji czasu i rejestrowanie wyników w pamięci komputera, a to oznacza wszelkie dalsze udogodnienia wynikające z możliwości numerycznego przetwarzania danych. Korzyści są tak duże, że dzisiaj nie ma już odwrotu od bieżącej rejestracji ciśnienia przez komputer, jest bowiem bardzo prawdopodobne, że informacja zawarta w zapisie ciśnienia wewnątrzgałkowego zależnego od czasu ma związek z wieloma innymi przebiegami czasowymi w organizmie, na przykład sygnału EKG – parametrów niezwykle istotnych w diagnostyce medycznej. Od niedawna prowadzone w tym kierunku badania wytyczają, jak się zdaje, nowe horyzonty w pomiarach biomedycznych [Iskander i Kasprzak 2006, Kasprzak i Iskander 2006]. Tym większego znaczenia nabiera zatem wszelka wiedza o *jakości* pomiaru, osiąganey za pomocą DCT. Jej niewątpliwą zaletą (poza ciągłą rejestracją ciśnienia) jest liniowość tego sygnału względem ciśnienia p , i to w znacznie szerszym przedziale niż otrzymany w rozwiązaniach dla GAT. Niestety podstawy teoretyczne DCT, sformułowane w [Kangiesser i Robert 2002], pozostawiają wiele do życzenia. Zależność między mierzonym ciśnieniem p_D a ciśnieniem p jest tam *postulowana* ($p_D = p$), zatem jej prawdziwości należy dopiero dowieść. Chociaż tonometria aplanacyjna Goldmanna wykazuje taką samą słabość, jednocześnie ma też mocne strony (eksperyment opisany w podrozdziale 8.2.2.7 pięknie to ilustruje), dzięki którym jej pozycja „złotego standardu” nadal jest niekwestionowana.

Odczyt siły w GAT dokonywany jest po osiągnięciu średnicy aplanacji 3,06 mm. Wówczas spłaszczony obszar powłoki rogówkowej traci stateczność, a zapadając się, może powodować zauważalne „zafalowanie” wskazań tonometru¹. W przeciwieństwie do tonometrii aplanacyjnej, DCT nie ma ostrego kryterium, które uruchomiłoby procedurę pomiarową. Odczyt ciśnienia dokonywany jest, gdy siła nacisku osiągnie wartość jednego grama (około 0,01 N). Wartość ta nie została niczym uzasadniona, a ze zreferowanych w podrozdziale 8.2.1 założeń do tej metody wynika, że mogłaby to być dowolna inna siła, nie przekraczająca jakiegś granicy – bliżej nieokreślonej. Rozwiązania podane w formie wykresów na rys. 8.18, uzyskane dla materiału $M2$ i ciśnienia $p = 16$ mmHg, ujawniły występowanie minimum funkcji p_D przy sile nacisku zbliżonej do 0,01 N. W tym względzie rozwiązania DCT byłyby *zgodne* z rozwiązaniami

¹ O tym, że zjawisko to wykorzystywane bywa przez doświadczoną obsługę przyrządu jako sygnał osiągnięcia stanu pomiarowego, usłyszałem od doktora Andrzeja Hachola.

uzyskanymi dla GAT, gdyż pomiar p_D wykonywany jest w punkcie bliskim minimum tego ciśnienia. W DCT kryterium uruchamiającym procedurę pomiarową jest nie geometria (ustalona średnica strefy dopasowania konturu – czyli kinematyczny warunek brzegowy), a obciążenie (ustalona siła – kinetyczny warunek brzegowy). Minimalna wartość funkcji $p_D(F_D)$ wykazuje jednak silną zależność od ciśnienia p . Na przykład dla $p = 32$ mmHg minimum to pojawia się dopiero przy sile $F_D = 0,02$ N, a $p = 48$ mmHg wymaga już użycia siły $0,04$ N do osiągnięcia minimum p_D – rys. 8.18. W dodatku promień krzywizny nasadki także manifestuje swój udział w obliczanym p_D . Oznacza to, że w DCT – przeciwnie niż w GAT – pomiar p_D nie jest dokonywany w żadnym szczególnym dla konstrukcji stanie obciążenia.

W tonometrii aplanacyjnej określono warunki, dla których ciśnienie p_G powinno być równe ciśnieniu p . Nawet bez spełnienia tych warunków obydwie te ciśnienia są zwykle zbliżone (choć nie są proporcjonalne). Przypadek DCT jest inny. Wyniki obliczeń pokazują, że ciśnienie p_D jest bardzo odległe od p (jeżeli dno nasadki pomiarowej jest kuliste). Może samo w sobie nie jest to jeszcze najgorsze. Zupełnie wystarczyłoby gdyby p_D było *proporcjonalne* do p – jak faktycznie wynika z rozwiązania podanego na rys. 8.20 dla $F_D = 0,01$ N. Okazuje się jednak, że DCT jest techniką pomiaru *bardzo wrażliwą* na kilka parametrów mocno zróżnicowanych pośród pacjentów, a przy tym trudnych lub niemożliwych do kontrolowania. Przede wszystkim wynik pomiaru bardzo wyraźnie zależy od parametrów materiału rogówki – a tych nie potrafimy obecnie identyfikować w warunkach klinicznych² (GAT jest niemal zupełnie niewrażliwa na parametry materiałowe). Ciśnienie zewnętrzne p_D bardzo wyraźnie zależy też od CCT w rozwiązaniach przedstawionych na rys. 8.23. Ten parametr z kolei stosunkowo łatwo jest kontrolować, niestety jego wpływ w DCT jest z założenia pomijany. Jeśli uwzględnimy jeszcze zależność p_D od średnicy d (rys. 8.19), a także od stosunku promienia krzywizny nasadki pomiarowej do promienia rogówki, to można powiedzieć, że zależność funkcyjna p_D od p jest bardziej nieprzewidywalna niż w GAT, a ewentualne korekty odczytów p_D znacznie trudniejsze do oszacowania. Problem jest tym większy, że w powszechnym odczuciu technika DCT uchodzi za niewrażliwą na zmienność tych parametrów. Dlatego nikt nawet nie próbuje korygować odczytu uzyskanego w ten sposób.

Należy oczywiście mieć na względzie, że przyjęte tu skrajne grubości rogówki, 0,400 i 0,800 mm, z przesadą wytyczają przedział grubości obserwowany w praktyce, także ciśnienia 5 mmHg i 48 mmHg sięgają granic obserwowanego klinicznie zakresu IOP. Takie poszerzanie naturalnych przedziałów parametrów oka pozwala jednak wyraźniej pokazać badane na modelu trendy. Uzyskane w ten sposób rezultaty są zwykle bardzo trudne do zaobserwowania w badaniach doświadczalnych. Na przykład

² Oznaczana skrótem ORA (*Ocular Response Analyzer*) technika identyfikacji materiału rogówki jest próbą świeżej daty, w dodatku opartą na postulatach przyjętych w GAT. Jej dokładność wymaga krytycznej oceny.

z danych na rysunku 8.20 (i rys. 8.24) wynika, że dla $p = 48$ mmHg im większa jest siła nacisku F_D , tym mniejszy jest wynik pomiaru ciśnienia p_D . Natomiast w przedziale ciśnienia p od 22 do 32 mmHg odczyt p_D z tonometru może być interpretowany jako (niemal) niezależny od siły F_D . Wtedy badania *in vivo* powinny wskazywać raczej *na brak* zależności p_D od F_D (taka właśnie teza jest obecnie głoszona w literaturze). Narastanie odczytu $p_D(F_D)$, gdy ciśnienie wewnątrzgałkowe p jest niskie lub zmniejszanie tego odczytu, gdy ciśnienie p jest wysokie – jak widać na tych samych rysunkach – byłoby łatwiejsze do zaobserwowania, gdyby celem badań doświadczalnych było sfalsyfikowanie tej hipotezy. Tymczasem w tonometrii zwyczaj nakazuje, aby wynik eksperymentu *pozostawał w zgodzie z przewidywaniem „teoretycznym”*, a to wyraża się obecnie w przekonaniu o braku zależności p_D od F_D ³. W zakresie ciśnień najłatwiej dostępnym w tonometrycznych badaniach *in vivo* – od 15 do 30 mmHg – taką tezę rzeczywiście można uznać za zbliżoną do wyników przedstawionych na rysunku 8.20. Rozwiązania te pokazują jednak, że to nie jest reguła.

Pozostaje jeszcze kwestia „złotego postulat”, mianowicie: w jakich okolicznościach ciśnienie p_D odczytywane z przyrządu pomiarowego jest równe wewnątrzgałkowemu? Goldmann twierdził, że tak jest w tonometrii aplanacyjnej, gdy rogówka czyni zadość warunkom (6.2). Tego, że wówczas spełnione jest równanie (7.1), nikt dotąd nie kwestionował. To właśnie z tego powodu tonometria aplanacyjna uchodzi za „złoty standard”. Teza głoszona w pracy [Kanngiesser i Robert 2002], że ciśnienie zewnętrzne jest równe IOP tylko wtedy, gdy promień krzywizny nasadki R_D jest równy promieniowi rogówki R , a w miarę wzrostu promienia R_D wskazanie tonometru staje się coraz bardziej „zawyżone”, osiągając największe odchylenie od ciśnienia p właśnie w tonometrii aplanacyjnej, jest zupełnie nowa (szczegóły zawiera podrozdz. 8.2.2.1). Wynika z niej ni mniej ni więcej, że to DCT jest teraz „złotym standardem”. W świetle uzyskanych w rozdziale 7 rozwiązań, teza ta jest wyjątkowo kontrowersyjna. Sprzeczna nie tylko z tonometrią Goldmanna, sprzeczna przede wszystkim z wynikami badań doświadczalnych (opisanymi dalej). Budzi ona tym większe zdziwienie, że jedyne uzasadnienie, jakie podają autorzy na jej obronę, to wynik eksperymentu przeprowadzonego... w wyobraźni. Ale najdziwniejsze jest to, że obalenie w ten sposób fundamentalnego dla GAT prawa Imberta–Ficka na nikim nie zrobiło żadnego wrażenia (patrz np. literatura cytowana pod adresem <http://ThorEyes.com/articles22.aspx>).

Badania doświadczalne. Znacznie wyżej oceniana jest DCT przez eksperymentatorów. Większość autorów prac porównawczych poświęconych obu omawianym technikom pomiarowym – GAT i DCT – utrzymuje, że wyniki badań *in vivo potwier-*

³ Kosmolog Fred Hoyle nigdy nie prowadził obserwacji astronomicznych. Powiedział kiedyś: *Ubolewam nad panującym obecnie w USA trendem, by obserwatorzy interpretowali wyniki swoich badań. Czyniąc to narażają na szwank swoje obserwacje. Zawsze woląłem, by dane obserwacyjne zbierał ktoś, kto nie ma zielonego pojęcia o teorii.* Oczywiście trudno o taki podział pracy w tonometrii, patrząc jednak na jej rezultaty, łatwo pojąć co Hoyle miał na myśli.

dzają postulaty DCT, to jest równość ciśnień p i p_D , niezależność odczytu p_D od CCT i od promienia krzywizny rogówki R . Na przykład autorzy prac [Kaufmann i in. 2004, Doyle i Lachkar 2005, Kampeter i Jonas 2005, Kniestedt i in. 2006, Viestenz i in. 2006] zwracają uwagę na brak wrażliwości odczytu ciśnienia p_D na zmienną CCT. Viestenz i in. zauważają ponadto, że nie tylko w DCT odczyty ciśnienia nie korelują z CCT, ich zdaniem nie korelują one także w GAT, a Kaufmann i in. dołączają do tej listy parametrów nie wpływających na wynik DCT, także promień krzywizny R i astygmatyzm. Wiele jest też stwierdzeń, że DCT pozostaje w pełnej zgodności z GAT, choć w powszechnie dostępnej literaturze wskazania p_D większe od p_G okazują się regułą [Pache i in. 2005, Kaufmann i in. 2004, Kampeter i Jonas 2005, Viestenz i in. 2006, Francis i in. 2007]. Ten ostatni wniosek przeczy więc результатам podanym na rys. 8.16 [Kanngiesser i Robert 2002], na którym p_D jest o prawie 10 mmHg *mniejsze* od p_G .

Interesująco podsumowują wyniki swoich badań Francis i in. [2007]:

1. Ciśnienie mierzone tonometrem aplanacyjnym jest niższe niż w DCT, a różnica jest tym większa, im mniejsza jest CCT.

2. Promień krzywizny rogówki *wpływa* na odczyty ciśnienia w DCT – ale nie w GAT. Ten wpływ (promienia krzywizny w DCT) jest jednak *mniejszy niż* powszechnie uznawany wpływ CCT na GAT.

3. GAT *zaniża* odczyty ciśnienia, gdy jest ono wysokie i *zawyża* je w przypadku niskiego ciśnienia – w porównaniu do DCT.

Wnioski Francis'a są więc zgodne – przynajmniej częściowo – z rezultatami rozwiązań numerycznych referowanych w podrozdziale 8.1.1 i 8.2.2, a wobec tego *przeczą* wynikom większości cytowanych prac.

Pamiętając rezultaty podane na rysunku 8.24, należałoby zapytać dlaczego doświadczalne badania *in vivo potwierdzają* brak zależności p_D od CCT? Przecież podstawy formalne DCT (podrozdz. 8.2.1) zawierają ewidentny błąd, który przyczynił się do przekonania, że takiej zależności nie może być. Po jego wyeliminowaniu staje się oczywiste, że ciśnienie p_D *musi zależeć* od CCT. Dlaczego więc wyniki badań doświadczalnych potwierdzają te błędne przekonania?

Są przynajmniej dwa powody. Pierwszy powód bierze się z nadmiernego zaufania badaczy pokładanego w podstawach formalnych podanych przez twórców DCT. Robią one dobre wrażenie, ponieważ zostały wzmocnione rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą modelu numerycznego gałki ocznej [Kanngiesser 2004]. Problem jest jednak w tym, że te rozwiązania niczego nie dowodzą, gdyż model biomechaniczny zbudowany został tak, aby jego funkcje były zgodne z założonymi, a więc aby nacisk nasadki pomiarowej powodował wystąpienie na zewnętrznej powierzchni rogówki ciśnienia dokładnie równego IOP. Oczywiście siła nacisku nasadki, wprowadzana do rozwiązania MES, musi być wtedy wielokrotnie większa od jednego grama, ale autor arbitralnie przesądza, że tylko jeden gram z tej siły pochodzi od nacisku tonometru. Resztę – czyli przeważającą jej część – przypisuje siłom adhezji. Ponieważ taki podział

obciążenia dokonywany jest na mocy założenia o równości ciśnień na zewnątrz i wewnątrz rogówki, więc rezultatów obliczeń nie można traktować jak weryfikacji tej hipotezy.

Drugi powód błędnych przekonań związanych z korekcją odczytu (a raczej jej brakiem) w DCT można objaśnić niezmiernie prosto, wiąże się to jednak z fundamentalną poprawką w założeniach do tej metody. Pomimo że czujnik ciśnienia na dnie kulistego zagłębienia nasadki pomiarowej tonometru jest mały (jego średnica zbliżona jest do 1 mm), to krzywizna tego obszaru ma ogromny wpływ na panujące tam ciśnienie. Gdyby dno zagłębienia o promieniu krzywizny $R_D = 9,5$ mm zostało spłaszczone na średnicy 1,5 mm, wówczas zamiast ciśnienia 2,5 mmHg, jakie uzyskaliśmy dla krzywej 3 na rysunku 8.17 i w tabeli 8.3, otrzymalibyśmy średnie ciśnienie w obszarze spłaszczenia *przekraczające* 16 mmHg. Byłoby więc niemal równe IOP (rozwiązania MES nie pozostawiają co do tego wątpliwości). Być może tym właśnie efektem należałoby tłumaczyć rozbieżności między rezultatami obliczeń dla nasadki sferycznej, referowanych w podrozdziale 8.2.2, a wskazaniem przyrządu pomiarowego *Pascal*. Oznaczałoby to jednak, że model biomechaniczny DCT wygląda zupełnie inaczej niż opisywany w pracach promujących *Pascala*. Inaczej też należałoby uzasadnić zależność funkcyjną między ciśnieniem pokazywanym przez przyrząd pomiarowy a ciśnieniem wewnątrzgałkowym. Także przewidywania negujące wpływ CCT, R , R_D , F_D itd. na ciśnienie p_D stałyby się nieaktualne. Czy zatem powierzchnia, pod którą zatopiony jest czujnik ciśnienia, faktycznie jest kulista?

8.2.3. Tonometria rezonansowa (ART)

Inną próbą zdigitalizowania wskazań tonometru jest *rezonansowa tonometria aplanacyjna* – ART (*applanation resonance tonometry*). W przeciwieństwie do DCT, sferyczna końcówka pomiarowa tonometru jest wypukła. Poza tym jednym szczegółem pozostałe warunki wykonania pomiaru są takie same jak w GAT. Miarą ciśnienia wewnątrzgałkowego jest stosunek siły nacisku końcówki pomiarowej na wierzchołek rogówki do powierzchni strefy dopasowania konturu o średnicy $d = 3,06$ mm. Różnica techniczna (pomijając sferyczną końcówkę tonometru) polega na sposobie kontrolowania średnicy d , opisanym przez Eklunda [2002]. Bakelitowa końcówka czujnika pomiarowego tonometru, o promieniu krzywizny $R_R = 7$ mm, zaopatrzona jest w rezonator piezoelektryczny. Obwód sprzężenia zwrotnego podtrzymuje drgania kryształu i jednocześnie umożliwia pomiar częstotliwości rezonansowej, która zmienia się zależnie od wielkości obszaru zetknięcia z rogówką. Efektem pomiaru jest częstotliwość drgań, przeliczana następnie na średnicę powierzchni styku. Podobnie jak w DCT, rejestracja sygnału prowadzona jest przez komputer w czasie rzeczywistym.

Także w tym przypadku mechaniczne podstawy pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego oparte zostały na postulatach Goldmanna dla GAT. Równanie równowagi strefy kontaktu rogówki z końcówką pomiarową, podane w pracy [Hallberg i in. 2006], zawiera

te same siły, które umieścił Goldmann w równaniu (6.4) dla końcówki płaskiej: nacisku tonometru F_R , zginania powłoki F_b , ciśnienia wewnątrzgałkowego F_p i napięcia powierzchniowego w filmie łzowym F_S :

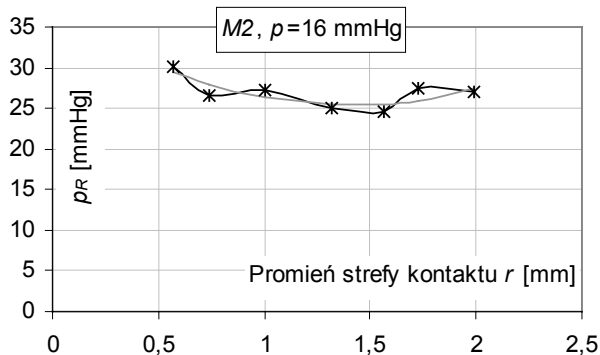
$$F_R + F_b + F_p + F_S = 0. \quad (8.29)$$

8.2.3.1. Symulacja numeryczna ART

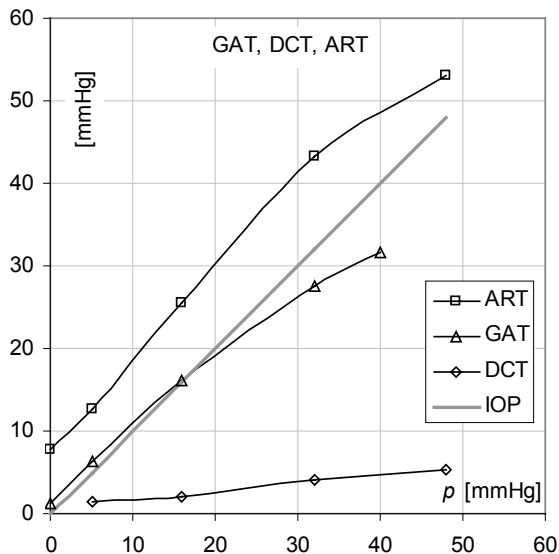
Wyniki prezentowane w tym rozdziale uzyskane zostały na tym samym modelu biomechanicznym gałki ocznej, który w poprzednich rozdziałach został wykorzystany do symulowania GAT i DCT. Różnica dotyczy jedynie kształtu końcówki pomiarowej. Podczas obliczania ciśnienia p_R wywieranego przez tonometr na rogówkę, węzły na wierzchołku modelu rogówki obciążane są kinematycznie przez ułożenie ich na okręgu o promieniu 7 mm. Środek tego okręgu znajduje się na zewnątrz rogówki. Parametrem obciążenia, obok ciśnienia wewnątrzgałkowego p , jest wielkość zagłębienia tego okręgu w modelu rogówki.

Rozwiązania ilustrujące proces zagłębienia kulistej końcówki w wierzchołku rogówki, obciążonej od wewnątrz ciśnieniem 16 mmHg (2,1 kPa), pokazane są na rys. 8.26. Obliczone średnie ciśnienie p_R osiąga minimum dla promienia strefy kontaktu zbliżonego do 1,5 mm, podobnie jak w GAT. Kolejne serie rozwiązań dla wartości p , innych niż 16 mmHg, pozwalają wykreślić zależność p_R od p , gdy $r = 1,53$ mm. Funkcja $p_R(p)$ pokazana jest na rys. 8.27 obok analogicznych funkcji dla GAT i DCT.

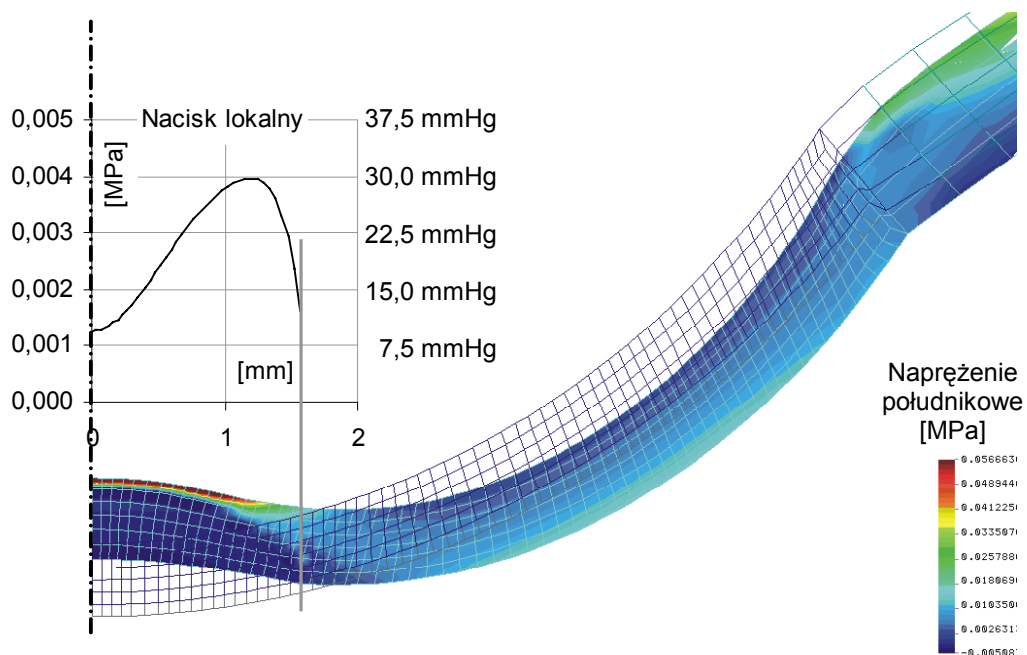
Mimo że końcówka tonometru jest teraz odcinkiem kuli, wykres ciśnienia średniego $p_R(r)$, widoczny na rys. 8.26, podobny jest do otrzymanego dla GAT i DCT, rysunki 8.1 i 8.18. Także rozkład ciśnienia na powierzchni kontaktu, pokazany na rys. 8.28, przypomina wykresy na rysunkach 7.5 i 8.17.



Rys. 8.26. Ciśnienie $p_R(r)$ gdy $p = 16$ mmHg. Dwa początkowe punkty odpowiadają zagłębieniu 0,1 i 0,2 mm, dalej jest ono stopniowane co 0,2 mm aż do 1,2 mm. Gdy promień $r = 1,53$ mm, ciśnienie $p_R = 25,5$ mmHg. Szarą linią wykreślono aproksymację kwadratową

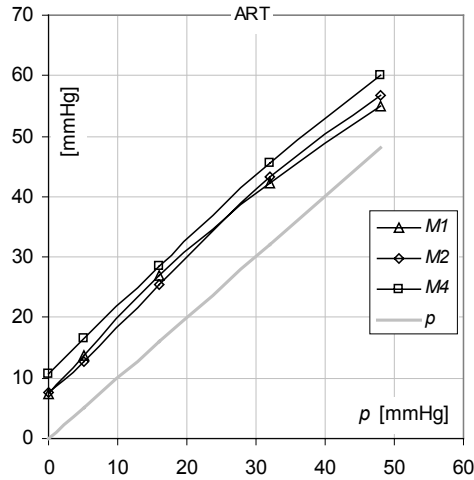


Rys. 8.27. Mierzone ciśnienie według ART, GAT i DCT, w zależności od ciśnienia p . Punkty dla DCT obliczono dla siły nacisku 0,01 N. Materiał rogówki M2, wymiary kalibracyjne

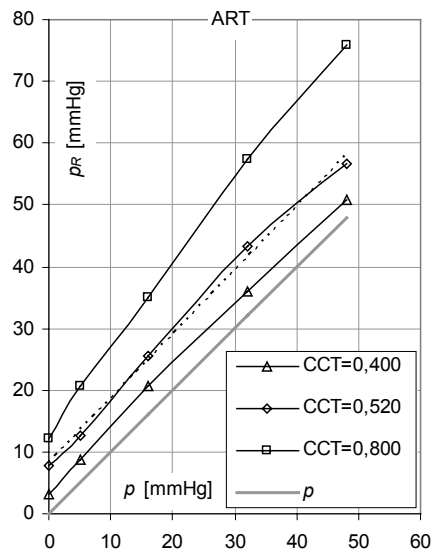


Rys. 8.28. Wykres ciśnienia na zewnętrznej powierzchni modelu ART. Siatka elementów skończonych ilustruje kształt rogówki nieobciążonej. Ciśnienie $p = 16$ mmHg, materiał M2

Wykresy funkcji $p_R(p)$, zależne od materiału rogówki o wymiarach kalibracyjnych, możemy prześledzić na rys. 8.29. Dla rogówki o wymiarach niekalibracyjnych wykresy funkcji ciśnienia $p_R(p)$, w zależności od grubości CCT, podane są na rys. 8.30.



Rys. 8.29. Wykresy ciśnienia $p_R(p)$. Materiały $M1$, $M2$ i $M4$ modelu rogówki opisane są w tabeli 7.3



Rys. 8.30. Rozwiązania numeryczne $p_R(p)$ dla wybranych grubości rogówki. Materiał $M2$, $R = 7,8$ mm. Linia przerywaną wykreślono aproksymację liniową ciśnienia p_R dla modelu kalibracyjnego

8.2.3.2. Wnioski

Model o wymiarach kalibracyjnych

1. Ciśnienie p_R jest znacznie wyższe niż p , co wynika z konieczności pokonywania przez nie dodatkowej siły pochodzącej od napięcia błonowego w powłoce rogówkowej (szczegóły obliczeń podane są w podrozdziale 8.2.4).

2. Wykres funkcji $p_G(p)$ jest mniej zakrzywiony niż w GAT, a jego aproksymacja liniowa w zakresie do 48 mmHg (linia przerywana na rys. 8.30) niewiele się różni od rozwiązań numerycznych – najwyżej 2 mmHg. Wykres nie przechodzi przez początek układu współrzędnych.

3. Współczynnik kierunkowy aproksymacji liniowej $p_R(p)$ zbliżony jest do jedności, co w połączeniu z poprzednim wnioskiem, stwarza niezwykle sprzyjającą okoliczność dla tej techniki pomiaru IOP, gdyż wynik pomiaru, jeśli tylko zostanie zmniejszony o stałą wartość (równoważną około 8 mmHg), staje się *równy* ciśnieniu wewnątrzgałkowemu. Pod tym względem ART wydaje się wręcz lepsza niż GAT, być może nawet nie wymaga korekty wskazania tonometru ze względu na ciśnienie. GAT prowadzi do odczytu 35 mmHg dla ciśnienia wewnątrzgałkowego 45 mmHg (patrz np. rys. 8.10), różnica sięga więc 10 mmHg. Różnica ta w ART (po uwzględnieniu przesunięcia) jest o rząd mniejsza.

4. Zaburzenia odczytu ciśnienia powodowane zmiennymi parametrami materiałowymi, pokazane na rys. 8.29, są w ART nieco większe niż w GAT (rys. 7.3), ale znacznie mniejsze niż w DCT (rys. 8.21).

Model o wymiarach niekalibracyjnych

5. Grubość rogówki ma duży wpływ na wynik pomiaru p_R , konieczne jest zatem opracowanie procedury korekcji odczytów ART.

6. Wykresy pokazane na rysunku 8.30, chociaż podobne do uzyskanych dla GAT (rys. 8.5), nie dają możliwości tak łatwego określenia punktu początkowego jak w przypadku współrzędnych (8.4). Nie to jest jednak najważniejsze, powtórzenie dla ART procedury przeprowadzonej w podrozdziale 8.1.3.2 dla GAT wydaje się możliwe z tego względu, że wykresy na rys. 8.30 stosują się do warunku (8.6) – z wszystkimi tego konsekwencjami. Korekcja wyniku pomiaru ciśnienia może się w tym przypadku okazać nawet łatwiejsza niż w GAT, ponieważ funkcja kalibracyjna ciśnienia daje się aproksymować liniowo.

Współczynnik kierunkowy równy jedności, o którym mowa we wniosku 3, oznacza stałą sztywność powłoki rogówkowej w procesie zwiększania IOP. Obciążanie powłoki w ART nie prowadzi zatem do utraty stateczności. Pod tym względem proces deformacji różni się od tego, z jakim mamy do czynienia w GAT. To upraszcza analizę tej konstrukcji.

8.2.4. Równanie równowagi wierzchołka rogówki

Podstawą teoretyczną pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego każdej z omówionych odmian tonometrii jest *równanie równowagi*, w którym bilansowane są siły działające na strefę rogówki, pozostającą w kontakcie z końcówką pomiarową tonometru. W tonometrii apłanacyjnej równanie podane przez Goldmanna ma postać (6.4). W zastosowaniu zarówno do DCT, jak i do ART zostało ono przepisane bez żadnych zmian. Nasuwa się wobec tego pytanie *dlaczego* równanie równowagi jest w każdym z tych trzech przypadków identyczne, mimo że rozwiązywane zadania są *różne*? Odpowiedź jest tyleż prosta, co zadziwiająca: równania równowagi dla obu odmian tonometrii sferycznej (8.28) i (8.29) są ewidentnie błędne.

8.2.4.1. Siła napięcia błonowego

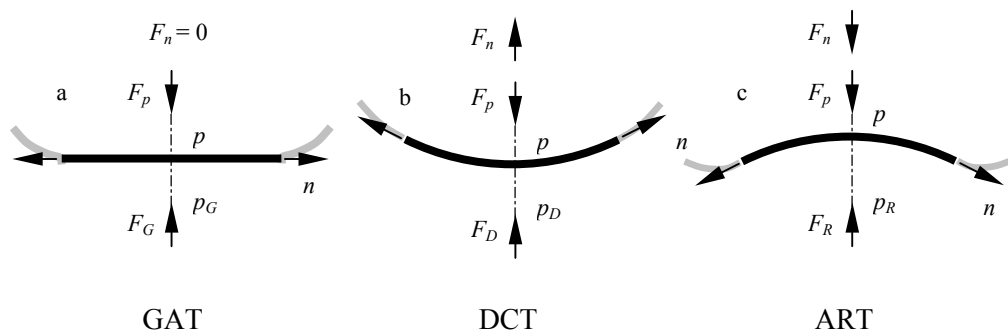
Równanie (6.1) jest konsekwencją równania Laplace’a zastosowanego do *płaskiego obszaru błony*. Równanie (6.5) dotyczy spłaszczonej *powłoki*. Obydwa równania są zapisane poprawnie – pierwsze dla błony, drugie dla powłoki. Ale wobec rogówki nie można w tonometrii apłanacyjnej (przy tym obciążeniu, geometrii i materiale) stosować prostej teorii błonowej (patrz podrozdz. 8.1.1.2, także *Dodatek – Wnioski*), więc nie podlega ona prawu (6.1), natomiast równanie (6.4) nie zawiera sił adekwatnych dla powłoki rogówkowej. To nie siła napięcia powierzchniowego F_S powoduje zaniżanie wskazań tonometru p_G względem p , przyczyna nierówności ciśnień tkwi w tym, że powłoka rogówkowa podczas spłaszczania traci stateczność. Wymienione w równaniu (6.4) siły wyczerpują listę obciążeń wierzchołka rogówki w tonometrii apłanacyjnej, ale tak jest tylko dlatego, że końcówka pomiarowa jest *płaska*. Ten kształt końcówki okazuje się szczęśliwą okolicznością dla GAT. Twórcy sferycznych odmian tonometrii, DCT i ART, już tego szczęścia nie mieli. Fragment wierzchołka rogówki, dopasowany kształtem do kulistej końcówki pomiarowej tonometru, obciążony jest bowiem jeszcze jedną siłą, i to znacznie większą od siły „zginania” F_t , mianowicie siłą wypadkową od napięcia błonowego n w powłoce. Dzięki płaskiej końcówce tonometru Goldmanna siła F_n jest równa zero, gdyż na brzegu kołowego fragmentu takiego dźwigara powierzchniowego napięcie n jest prostopadłe do osi symetrii (rys. 8.31a). Z tego powodu F_n nie występuje w równaniu równowagi (6.4).

W tonometrii dynamicznej siła wypadkowa F_n od napięcia n jest *różna* od zera i zwrócona zgodnie z siłą tonometru F_D – rys. 8.31b. Ciśnienie p_{Dm} jest więc przez F_n *pomniejszane*. Poprawnie zapisane równanie równowagi powinno zawierać siłę F_n (a nie zawierać siły adhezji – podrozdz. 8.2.4.2):

$$F_D + F_t + F_p + F_n = 0, \quad (8.30)$$

$$p_{Dm} = p + p_g - p_n. \quad (8.31)$$

gdzie $p_{Dm} = F_D / (\pi r^2)$, $r = d/2$ – promień strefy dopasowania konturu.



Rys. 8.31. Schemat obciążenia wierzchołka rogówki. Siła F_p jest iloczynem ciśnienia p i powierzchni πr^2 , F_G , F_D , F_R oznaczają siły nacisku tonometru, F_n – wypadkowa napiecia n działającego na brzegu strefy dopasowania rogówki do kształtu końcówki tonometru

Nominalna siła nacisku tonometru F_D jest stała, równa 0,01 N, a siłę zginania F_t można pominąć (promień krzywizny nasadki pomiarowej jest niewiele większy od promienia rogówki). Ponieważ od wewnątrz panuje ciśnienie 16 mmHg (0,00214 N/mm²), a $d = 4,22$ mm (tab. 8.3, krzywa 3), to siła wypadkowa napiecia błonowego (rys. 8.31b)

$$F_n = F_p - F_D = 0,00214 \pi 2,11^2 - 0,01 = 0,03 - 0,01 = 0,02 \text{ N.} \quad (8.32)$$

Jest to druga co do wielkości siła w równaniu (8.30) – po $F_p = 0,03$ N. Siła F_n jest *dwa razy większa* od siły nacisku tonometru F_D . Ponieważ (niesłusznie) pominięto ją w równaniu równowagi (8.28), twórcy DCT zmuszeni byli wprowadzić jakąś siłę, która przywracałaby równowagę. Postawili na „siłę adhezji”.

Tonometria rezonansowa jest drastycznym przypadkiem. Wierzchołek rogówki w ART jest podczas pomiaru zwrócony wypukłością do wnętrza gałki ocznej, jak na rys. 8.31c. To sprawia, że siła wypadkowa napiecia n jest zwrócona przeciwnie do siły F_R wywieranej przez tonometr. Równanie równowagi przyjmuje postać:

$$F_R + F_t + F_p + F_n = 0, \quad (8.33)$$

$$p_R = p + p_g + p_n. \quad (8.34)$$

Jeżeli w DCT jeszcze można było się łudzić, że siła F_n jest bliska zera, to w przypadku ART schemat obciążenia pokazany na rys. 8.31c nie pozostawia wątpliwości: siły F_n w żadnym razie nie można zaniedbać, a mierzone ciśnienie p_R jest ewidentnie większe od p . Wszystkie składowe ciśnienia w równaniu (8.34) działają przeciwko p_R . W tonometrii rezonansowej powłoka musi już być *naprawdę*

rozwiązana – nawet intuicja staje bezradna wobec wielkości siły F_n ! Pominięcie F_n w równaniu (8.29) jest błędem.

8.2.4.2. Siły adhezji i napięcia powierzchniowego

Od początku historii tonometrii adhezja i napięcie powierzchniowe w filmie lżowym odgrywały dużą rolę w próbach teoretycznego objaśnienia, niewytłumaczalnej na gruncie teorii błonowej, nierówności $p_G < p$. W tonometrii aplanacyjnej nierówność tych ciśnień do dzisiaj przypisywana jest działaniu napięcia powierzchniowego w filmie lżowym. Z kolei w DCT do rangi siły o zasadniczym znaczeniu podniesiona została siła adhezji. Wiemy z rozwiązań omawianych w podrozdziale 8.2.1, że ciśnienie p_D jest znacznie mniejsze od ciśnienia wewnętrznego p , wydaje się więc, że problem jest taki sam jak w GAT. Stąd zapewne myśl, że także przyczyna jest ta sama. Jednak różnica ciśnień – wewnętrznego p i zewnętrznego p_D – jest w DCT znacznie większa.

Czy siły adhezji i napięcia powierzchniowego mogą być przyczyną występowania tak dużej różnicy pomiędzy ciśnieniami p i p_D ? Aby to ustalić musimy poprawnie zapisać równanie równowagi sił działających na obszar rogówki w strefie dopasowania konturu. Analizę obciążeń ułatwi krótki kurs mechaniki:

1. Równanie równowagi zawiera wszystkie siły *zewnętrzne*, działające na *wydzielony fragment konstrukcji*, a suma rzutów tych sił na dowolną oś układu współrzędnych jest równa zeru. (Także suma momentów tych sił względem dowolnego punktu jest równa zeru w stanie równowagi.)

2. Obciążenie może być przykładane do konstrukcji na dwa sposoby

- kinetycznie, poprzez siły zewnętrzne (przykładem może być ciężar G zawieszony na sprężynie, który spowoduje jej wydłużenie o Δ),
- kinematycznie, przez przemieszczenie wybranych punktów konstrukcji (np. zaczepienie końców tej samej sprężyny w punktach wzajemnie oddalonych o długość początkową sprężyny powiększoną o Δ – siła w sprężynie wynosi wówczas G).

Skutkiem działania sił zewnętrznych są siły wewnętrzne w konstrukcji.

3. Siła wewnętrzna na pomyślanej powierzchni podziału, przecinającej obciążony obszar konstrukcji, jest sumą sił *zewnętrznych* po jednej stronie tej powierzchni.

PRZYKŁAD pręta ściskanego

Wersja 1. Pręt o przekroju kołowym ściskany jest siłami F_L i F_R , przyłożonymi do obu jego końców. Równanie równowagi sił obciążających pręt zawiera tylko te dwa składniki:

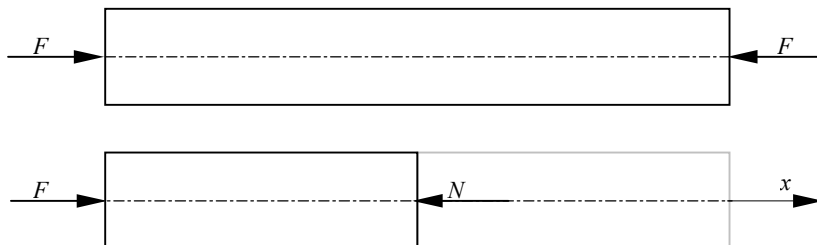
$$F_L + (-F_R) = 0.$$

Oczywiście obie siły są jednakowe, oznaczmy je po prostu F .

Na pomyślanym przekroju, powiedzmy w połowie długości pręta, działa siła *wewnętrzna*

$$N = \int_A \sigma dA, \quad (\text{a})$$

gdzie A jest powierzchnią przekroju poprzecznego, a σ jest naprężeniem na tej powierzchni. Jak duża jest siła N ?



Rys. A

Wyznacza się ją z równania równowagi sił obciążających z zewnątrz odcinek pręta położonego po lewej stronie (pomyślanej) powierzchni podziału. Na ten fragment konstrukcji działa siła czynna F przyłożona do lewego końca pręta i oddziaływanie prawej (odrzuconej) części pręta, zredukowane do siły wypadkowej N (rys. A). Aby lewa część pręta pozostawała w równowadze, suma tych sił (rzuconych na oś x) musi być równa zeru:

$$F + N = 0, \quad (\text{b})$$

stąd

$$N = -F. \quad (\text{c})$$

Wersja 2. Jak zmienia się te obliczenia, gdy powierzchnię pręta pokrywać będzie warstwa płynu? Czy napiecie powierzchniowe wpływa na wartość siły N ? Schemat obciążenia pokazany jest na rys. B.

Na (pomyślanym) przekroju poprzecznym pręta pojawia się teraz dodatkowa siła pochodząca od napiecia powierzchniowego S . Wypadkowa

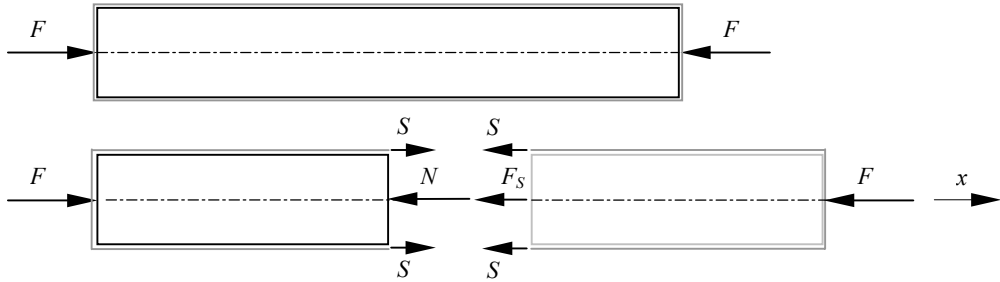
$$F_S = S \pi d_p,$$

d_p – średnica przekroju pręta.

Napiecie S zaznaczone na rysunku działa *poza* przekrojem pręta, a jego siła wypadkowa F_S powiększa oddziaływanie prawej części pręta na lewą (dociska do siebie obydwie części). Teraz siła wewnętrzna N jest sumą algebraiczną sił F i F_S :

$$N = -F - F_S. \quad (\text{d})$$

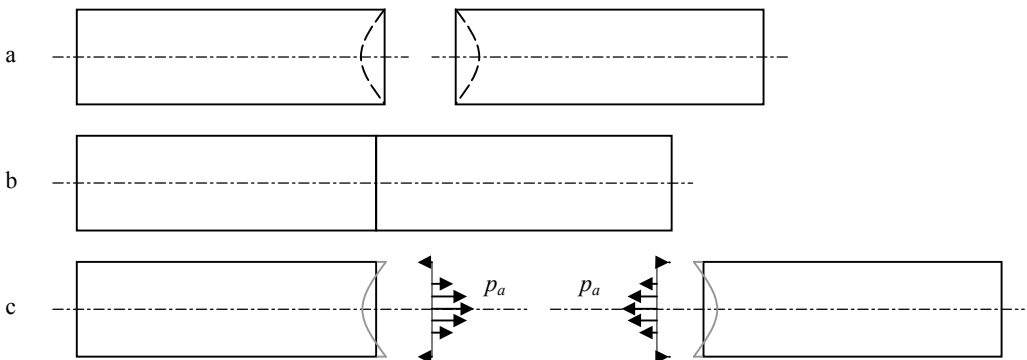
Napiecie powierzchniowe *powiększa* siłę wewnętrzną N .



Rys. B

Wersja 3a. W kolejnej wersji zadania zbadana zostanie rola, jaką w równaniu równowagi pełnią siły adhezji. Tym razem pręt rzeczywiście musi być przecięty (np. w połowie), a następnie złożony w całość za pomocą sił adhezji. W odróżnieniu od poprzedniego zadania, siła przyciągania (adhezji) między oboma częściami występuje teraz *na przekroju* pręta, a nie poza nim. Na pomyślanym przekroju poprzecznym, pokrywającym się z płaszczyzną podziału, prawa połowa pręta naciska na lewą, zatem jedynie siła F przyłożona do prawej końcówki pręta składa się na siłę N – siły adhezji na powierzchni podziału nie obciążają *z zewnątrz* lewej połowy pręta. Gdyby pręt nie został podzielony na dwie części, wówczas w tym przekroju zamiast sił adhezji działałyby (znacznie większe) siły kohezji. Jedne i drugie siły zapewniają jedynie spójność ośrodka i odporność na działanie dewiatora naprężenia. Sił kohezji nie umieszcza się w równaniach równowagi elementu objętości ośrodka – zatem także i sił adhezji. Dlatego równanie równowagi lewej połowy pręta niczym się tutaj nie różni od równania (b). Także równania (a) i (c) nadal pozostają w mocy – pod tym względem nie ma żadnej różnicy między *wierszą 1* pręta a *wersją 3a*. Adhezja/kohezja *nie ma wpływu* na wielkość siły oddziaływania jednej części pręta na drugą. (Gdyby wpływała, wówczas pręt byłby ściskany wielką siłą, i to bez udziału siły zewnętrznej F).

Wersja 3b. Ta wersja zadania różni się od poprzedniej tym, że obie powierzchnie spajane siłami adhezji są nieznacznie wklęsłe, o jednakowej krzywiznie – rys. C-a. Zakładamy, że odkształcenia są sprężyste. Po pełnym przyłgnięciu do siebie, a przed obciążeniem siłami F , obie powierzchnie podziału muszą stać się płaskie (ze względu na symetrię), rys. C-b. Na rozpatrywanym przekroju pojawia się zatem siła powierzchniowa p_a , powodująca to spłaszczenie. Siła p_a jest skutkiem oddziaływania prawej połowy pręta na lewą (siłami adhezji) i dla tej lewej połowy jest to siła zewnętrzna. Oczywiście prawa połowa pręta obciążona jest symetrycznie, rys. C-c.



Rys. C

Połączone w jedną całość obie części pręta nie są (jeszcze) obciążone żadną zewnętrzną siłą, więc wypadkowa sił na powierzchni przekroju, zapisana dla lewej połowy pręta, przyjmuje postać:

$$N = \int_A p_a dA = 0. \quad (e)$$

Po ściśnięciu pręta dodatkowo siłami zewnętrznymi F pojawi się na powierzchni podziału – jak poprzednio – siła wewnętrzna N , spełniająca równania od (a) do (c), ale teraz na naprężenie σ składa się połączone działanie sił F i p_a .

Jeśli siły adhezji zastąpi się siłami kohezji, to omówiony właśnie przypadek stanie się klasycznym zagadnieniem dystorsji sprężystych, rozważanym w podręcznikach mechaniki ciała stałego. Pole sił p_a nazywane jest wówczas naprężeniem własnym pierwszego rodzaju. Takie siły wewnętrzne wpływają na pole przemieszczeń obciążonego nimi ośrodka, a nawet bywają zagrożeniem dla spójności materiału, ale niezależnie od ich wielkości równoważą się wewnątrz konstrukcji. Naprężenia własne nie „wychodzą poza konstrukcję” i nie można ich dodawać do sił *zewnętrznych*. To samo dotyczy sił adhezji. Zagadnienie naprężeń własnych omawiane jest na przykład w podręczniku [Fung 1965].

Jedynym mechanicznym skutkiem działania sił adhezji na powierzchni podziału pręta jest pojawienie się pola naprężeń p_a . Nie jest to jednak siła adhezji – tak samo jak naprężenia własne nie są siłami kohezji. W literaturze dotyczącej tonometrii wielokrotnie powtarzana jest teza o dużej roli odgrywanej rzekomo przez siły adhezji między końcówką tonometru a rogówką. Zwalczając to błędne przekonanie, powołałam się na ostatni już przykład. Każdy, kto wyobraża sobie, że można dodać wypadkową siłę adhezji do siły nacisku tonometru i w ten sposób zwiększyć wartość siły spłaszczającej wierzchołek rogówki, ma zapewne w pamięci doświadczenie z płytkami wzorcowymi Johanssona, które po przyłgnięciu do siebie bardzo trudno rozdzielić. Potrzebna do tego siła rozciągania faktycznie jest bardzo duża, ale czy to oznacza, że kiedy płytki nie są rozciągane, to są taką samą siłą *ściskane*? Oczywiście, że nie. Każda z płytek, podobnie jak każda ze składających się na nią cząstek, po przyłgnięciu pozostaje w *stanie równowagi*, ponieważ siła przyciągania („ściskania”) jest równa sile odpychania – żadna z nich ani nie ściska, ani nie rozciąga sąsiada. W ogóle go nie obciąża! Przyczyną rozciągania/ściskania są siły, jakie my sami przykładamy z zewnątrz, próbując je rozdzielić. Bez nich połączone płytki pozostaną *nieobciążone*, zarówno na przekroju podziału, jak i na każdym innym.

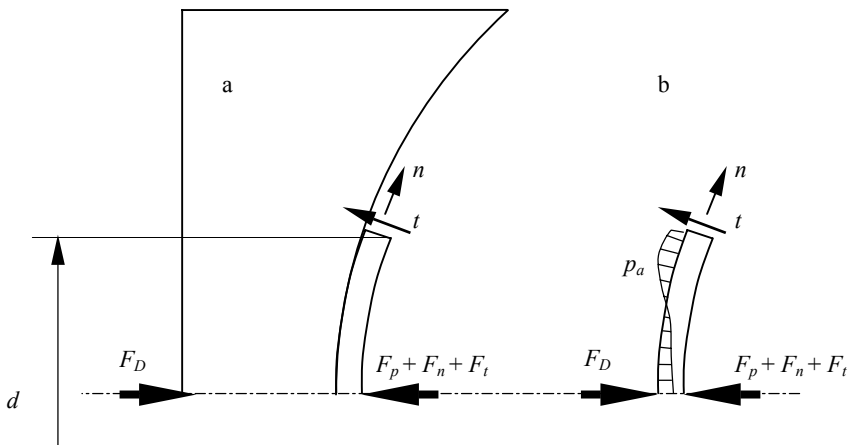
Podobnie jest w tonometrii: jedyną siłą (pomijając nieistotną siłę napięcia powierzchniowego w filmie łzowym) wywieraną na rogówkę z zewnątrz jest siła nacisku tonometru, *dokładnie* ta, którą ten przyrząd mierzy. Na rysunku 8.32a pokazany jest *wydzielony fragment konstrukcji*, w jego skład wchodzi nasadka tonometru wraz ze ściśle przylegającą do niej częścią rogówki o średnicy d . Ten obszar konstrukcji obciążony jest *układem sił zewnętrznych*: F_D (nacisk tonometru), F_p (wypadkowa ciśnienia wewnątrzgąłkowego p), F_n (wypadkowa napięcia n na brzegu strefy dopasowania) i F_t (wypadkowa siły tnącej t na brzegu strefy dopasowania).

Na rysunku 8.32b „wydzielony fragment konstrukcji” ograniczony został do samej rogówki w strefie dopasowania konturu. Pozostaje on w równowadze, ponieważ siły F_D , F_p , F_n i F_t spełniają równanie (8.30). Nie ma w nim siły adhezji – mimo, że podziału dokonano właśnie na powierzchni, na której ta siła występuje. Jej jedynym mechanicznym skutkiem może być (ale nie musi) ciśnienie p_a , jakie pojawia się na powierzchni podziału po dopasowaniu kształtu rogówki do konturu nasadki. Może się ono także pojawić pod nieobecność siły F_D , na przykład po „sklejeniu” końcówki

tonometru z rogówką siłą napięcia powierzchniowego filmu łzowego. Niezależnie jednak od wartości F_D wypadkowa ciśnienia p_a jest równa zero, jak w równaniu (e):

$$\int_A p_a dA = 0 \quad (8.35)$$

A jest rzutem powierzchni dopasowania konturu na płaszczyznę prostopadłą do osi symetrii. Siły adhezji mogą być przy tym absolutnie dowolne – tak duże jak siły kohezji albo równe zero, a nawet ujemne. Ich wartość nie będzie miała żadnego wpływu na wynik pomiaru ciśnienia p_D (a także p_G lub p_R), nie wpłynie też na p_a . *Siły adhezji nie mają żadnego znaczenia w tonometrii.*



Rys. 8.32. Kolejne stopnie redukcji układu mechanicznego w stanie równowagi statycznej:
a) siły zewnętrzne dla układu nasadka–strefa dopasowania konturu rogówki,
b) siły zewnętrzne dla części rogówki w strefie dopasowania

Gdy siła nacisku F_D jest większa od zera, wówczas wypadkowa ciśnienia wywieranego na rogówkę przez końcówkę pomiarową tonometru będzie równa tej sile:

$$F_D = \int_A (p_{Dm} + p_a) dA = p_{Dm} A. \quad (8.36)$$

Funkcja ciśnienia całkowitego jest superpozycją ciśnienia średniego p_{Dm} (8.31) i różnicy między nimi, jaką jest p_a . Prawdopodobnie ten sposób zapisania całki sugeruje zwolennikom „sił adhezji” wzrost siły nacisku F_D na rogówkę – o wypadkową ciśnienia p_a . Ale ciśnienie p_a , chociaż teraz inne, nadal spełnia warunek (8.35). Warto zwrócić na to uwagę (choć jest to oczywiste), że siła F_D wskazywana przez tonometr pozostaje w jednoznacznej zależności jedynie od ciśnienia p_{Dm} . Natomiast ciśnienie pokazywane przez czujnik w centrum nasadki, p_D , to odrębny i nieco bardziej złożony

problem, gdyż wymaga uwzględnienia niejednorodnego, samorównoważającego się ciśnienia p_a . Zajmiemy się nim w następnym podrozdziale.

Zauważmy, że równanie (8.30) różni się od równania (8.28) tylko jedną siłą – zamiast F_c występuje w nim F_n . Zwrot siły F_n jest taki sam jak przyjęty w pracy [Kanngiesser i Robert 2002] dla siły F_c . Także wartości obu sił są porównywalne, czyli tak duże jak w (8.32). Nie ulega wątpliwości, że tą kontrowersyjną siłą, dotąd w równaniu równowagi (8.28) kojarzoną z siłą adhezji, jest pominięta w nim siła napięcia n o wypadkowej F_n . Jednak błąd nie polega tu tylko na niewłaściwym nazwaniu tej siły. Według Kanngiessera siła F_c naciska z zewnątrz na rogówkę, co powodowałoby raczej jej ściskanie, natomiast siła napięcia błonowego zdecydowanie *rozciąga* powłokę rogówkową. Zmienia to w zasadniczy sposób stan obciążenia materiału rogówki, wrażliwego na znak naprężenia (patrz podrozdz. 3.5 i 4.4.1).

Ze względu na równanie (8.35) problem niejednorodności rozkładu ciśnienia między rogówką a nasadką tonometru nie dotyczy ani GAT, ani ART, gdzie ciśnienie p_G lub p_R jest liczone jako średnia z *całego* obszaru rogówki, stykającego się z końcówką pomiarową. Wcale nie oznacza to jednak mniejszych problemów dla tych technik pomiarowych, wręcz przeciwnie. Po wyeliminowaniu siły adhezji z równania równowagi wierzchołka rogówki, jedyną siłą zdolną potencjalnie zmniejszyć wskazania tonometru pozostaje siła napięcia powierzchniowego F_S , ale jak już wiadomo z równania (6.10), powodowane przez nią ciśnienie p_S nie przekracza granicy 0,5 mmHg. Tym samym znika ostatni już argument w GAT na rzecz nierówności ciśnień p_G i p . Różnica rzędu 10 mmHg między tymi ciśnieniami jest *niewytłumaczalna* na gruncie tonometrii Goldmanna.

8.2.4.3. Ciśnienie p_D rejestrowane przez czujnik

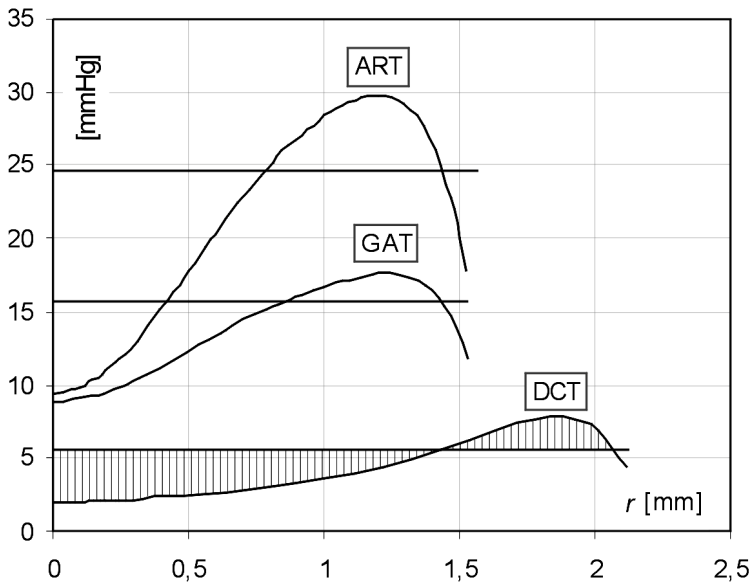
Na rysunku 8.33 zestawiono wykresy rozkładu nacisku w GAT, DCT i ART, dla modelu z materiału $M2$, gdy $p = 16$ mmHg. Wykresy te zamieszczone były wcześniej na rysunkach 7.5, 8.17 i 8.28. Średnie ciśnienie w strefie dopasowania rogówki do wklęsłej nasadki o promieniu 9,5 mm wynosi $p_{Dm} = 5,6$ mmHg (tab. 8.3). Lokalne ciśnienie oscyluje wokół tej wartości, a jego odchylenie od średniej jest właśnie ciśnieniem p_a , omawianym wcześniej. Przebieg funkcji p_a zaznaczono kreskowaniem na rys. 8.33 i, symbolicznie, wykreślony też został na rys. 8.32b. W obszarze czujnika, czyli w odległości do 0,75 mm od osi, średnie ciśnienie osiąga zaledwie $p_D = 2,5$ mmHg – aż o 3,1 mmHg mniej (tab. 8.3 i rys. 8.33) niż średnia w całym obszarze kontaktu nasadki z rogówką. Postulat stałego ciśnienia w strefie dopasowania konturu nie znajduje tu potwierdzenia. Także średnie ciśnienie p_{Dm} znacznie się różni od IOP.

Przyczyny dużej różnicy między mierzonym w DCT ciśnieniem p_D a p są dwie:

1. Średnie ciśnienie p_{Dm} , równe 5,6 zamiast 16 mmHg, jest tak małe przede wszystkim z powodu działania siły rozciągającej powłokę rogówkową F_n .
2. Ciśnienie p_D w centrum, wynoszące 2,5 zamiast 5,6 mmHg jest tak małe z powodu niejednorodności ciśnienia p_a .

Wbrew bowiem postulatom DCT (punkt 8.2.1) ani siła F_n nie jest równa zero, ani ciśnienie w strefie dopasowania konturu nie jest stałe.

Podobny rozkład funkcji p_a jest również w GAT i ART. Ciśnienie na osi symetrii jest tam także znacznie niższe niż średnie. W przeciwieństwie jednak do DCT w GAT i ART mierzone jest ciśnienie średnie, a ponieważ p_a spełnia równanie (8.35), więc rozkład ciśnienia p_a nie ma wpływu na wynik pomiaru.



Rys. 8.33. Rozkład nacisku i jego wartość średnia pod końcówką pomiarową tonometru, $p = 16$ mmHg. Materiał rogówki M2. Kreskowaniem zaznaczono w DCT wykres ciśnienia p_a

8.2.5. Tonometria – podsumowanie

Z rozważań zawartych w podrozdziale 8.2.4 wynika niezwykle istotny dla tonometrii wniosek: *siła adhezji nie występuje w równaniu równowagi* strefy dopasowania konturu. Równania (8.28) i (8.29) są zatem niepoprawne i to aż z dwóch powodów:

- wprowadzenia do nich siły adhezji,
- pominięcia w nich siły rozciągającej powłokę rogówkową F_n .

Błędy te biorą się z bezkrytycznego przeniesienia równania równowagi (6.4) na grunt tonometrii sferycznej. W tonometrii aplanacyjnej równanie (6.4) jest w zasadzie poprawne. Jedyne, ale bardzo istotne, mankament GAT wynika z próby wykorzystania siły napięcia powierzchniowego w filmie łzowym do objaśnienia nieliniowej natury zjawisk towarzyszących aplanacji wierzchołka rogówki. Siła ta okazała się za mała, ale samo jej wprowadzenie do równania równowagi nie było błędem. Ostatecznie

jednak w każdej z tych trzech odmian tonometrii konieczne było wykreowanie pewnej siły, dopełniającej do zera równanie równowagi strefy dopasowania konturu. W GAT i ART ta brakująca siła przypisywana jest obecności napięcia powierzchniowego w filmie łzowym, a w DCT – zjawisku adhezji.

Obecnie na tonometrię składają się też liczne zbiory wyników doświadczalnych, w których zależności między zmiennymi aproksymowane są zwykle funkcją liniową. Dorobek ten zbliża się dzisiaj do trzech tysięcy publikacji. Jednak ich interpretacja teoretyczna (czyli te aproksymacje) bardziej przypomina esej niż formalizm mechaniki, przyjęło się bowiem w tonometrii dochodzić do rezultatów nie przez *rozwiązanie* zadania, a przez *postulowanie* wyniku, poprzedzone zwykle egzegezą publikacji Goldmanna. Prowadzi to do błędów i sprzeczności w tym „systemie teoretycznym”. Z tonometrii jako działu biomechaniki niewiele wynika – ta teoria nie przewiduje niczego poza tym, co wiadomo z doświadczenia (a wyniki doświadczenia skażone są przez tę teorię), niemal niczego też nie zakazuje. Dostarcza jedynie interpretacji *post factum*, snutej w formie opowieści. Esey ten posiłkuje się żargonem czerpanym z mechaniki, ale pozbawiony sensownego formalizmu, mało przypomina naukę ścisłą. O wyniku przesądza zbyt często intuicja badacza, odwołująca się nie do mechaniki, a do autorytetu Goldmanna. Przykładem jest rezultat zawarty w równaniu (6.10), który pokazuje, że siła napięcia powierzchniowego nie może obniżyć ciśnienia aplanacji aż o kilkanaście mmHg względem IOP. Wynik ten jest jednym z nielicznych ograniczeń wprowadzanych przez teorię Goldmanna, umożliwia zatem weryfikację jej poprawności. Zwykle fizycy wykorzystują taką sposobność do sprawdzenia teorii⁴. Jednak w tonometrii możliwość sfalsyfikowania GAT w ogóle nie jest brana pod uwagę.

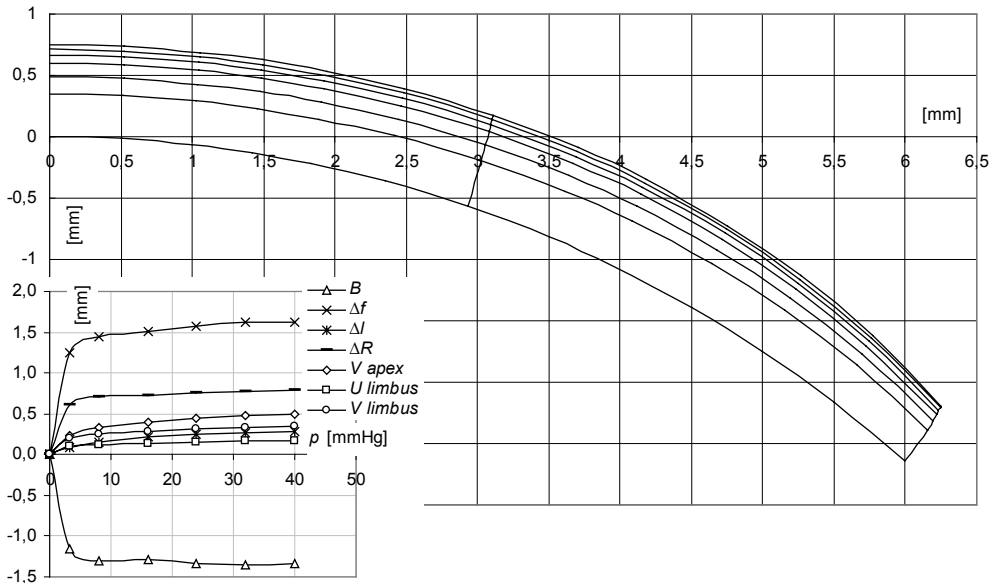
8.3. Warunki brzegowe rozwiązań MES a funkcje optyczne modelu biomechanicznego gałki ocznej

Trafiamy w literaturze na opinie o nieistotnym jakoby wpływie zamocowania modelu rogówki na symulowane skutki chirurgicznej korekty jej geometrii [Alastrué i in. 2006, Elsheikh i in. 2006] albo w obliczeniach pomijana jest rola soczewki po takim zabiegu. Czy optyczne funkcje rogówki w modelu obciążonym ciśnieniem p rzeczywiście są niewrażliwe na sposób jej zamocowania? Obliczenia przedstawione w podrozdziale 8.3 i 8.4, pozwalają sprawdzić tę tezę. Znaczenie warunków brzegowych badano w pracach [Śródka i Iskander 2008, Śródka 2006, Śródka 2009].

⁴ Opublikowana w 1915 r. ogólna teoria względności przewiduje m.in. zakrzywanie promieni świetlnych przez pole grawitacyjne. W 1919 r. wyruszyło kilka ekspedycji w strefę tropikalną, które ten efekt miały sprawdzić podczas zaćmienia Słońca. I tylko dlatego tak późno, że trwała I wojna światowa.

8.3.1. Model pełny

Model gałki ocznej o standardowej geometrii (tab. 4.1), w którym rogówka wykonana jest z materiału $M1$ (tabela 7.3 oraz warunki (4.13)), spełniający kryterium (7.1), swobodnie podparty, obciążony jest narastającym ciśnieniem p . Na rysunku 8.34 zestawione są wykresy funkcji pochodzących z rozwiązań numerycznych, zależnych od ciśnienia wewnątrzgałkowego: B – położenie ogniska względem dna oka, ΔR – zmiana promienia krzywizny wierzchołka rogówki, V_{limbus} , U_{limbus} – osiowe i promieniowe przemieszczenia rąbka oraz $V_{\text{rogówka}}$ – przemieszczenie wierzchołka rogówki.

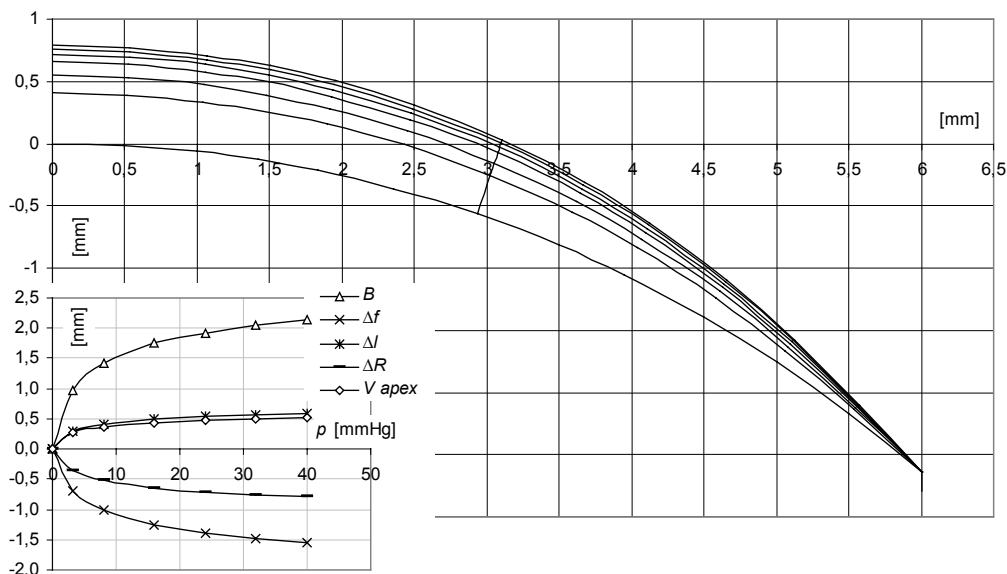


Rys. 8.34. Zmiany wybranych parametrów optycznych w funkcji ciśnienia p . Początkowa wartość promienia krzywizny wierzchołka rogówki $R = 7,82$ mm. Powyżej: kolejne profile rogówki dla p równego 0; 3,2; 8; 16; 24; 32; 40 mmHg. Przemieszczenia powiększone są na wykresie 1,5-krotnie. Średnie nachylenie toru rąbka wynosi 61°

Na rysunku pokazana jest też konfiguracja zewnętrznego profilu rogówki w kolejnych fazach jej obciążania ciśnieniem wewnątrzgałkowym p . Wykresy sporządzone są dla siedmiu poziomów ciśnienia p , odpowiadających punktom na wykresach – od 0 do 40 mmHg, co 8 mmHg i dodatkowo dla $p = 3,2$ mmHg. Wykreślone są też torry punktów znajdujących się początkowo w odległościach 2,9 i 6 (rąbek) milimetrów od osi symetrii. Widoczne jest działanie sprężystego pierścienia rąbkowego, który przy wzrastającym ciśnieniu p ogranicza przemieszczenie brzoju rogówki, zwiększając przez to przemieszczenie jej wierzchołka, jednocześnie sterując przyrostem promienia krzywizny rogówki R . Efekt ten decyduje o przebiegu funkcji położenia ogniska optycznego $B(p)$, która powyżej ciśnienia 8 mmHg jest niemal stała, co oznacza model samonastawny optycznie.

8.3.2. Model rogówki utwierdzonej na brzegu

Zbadamy teraz rozwiązania modelu rogówki o identycznych parametrach, ale utwierdzonej na obwodzie. W opinii twórców takich modeli są one wystarczająco dokładne [Orssengo i Pye 1999, Liu i Roberts 2005, Alastrue i in. 2006].



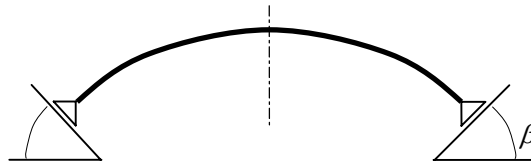
Rys. 8.35. Zmiany wybranych parametrów optycznych modelu gałki ocznej z utwierdzoną rogówką w funkcji ciśnienia p . Początkowy promień krzywizny R , przyrosty ciśnienia p i powiększenie przemieszczeń są takie jak na rys. 8.34

Należy podkreślić, że negatywny wynik porównania wcale nie musi przeczyć tej opinii – jest to kwestia zadeklarowanej sprężystości materiału rogówki lub dokładności wymaganej w konkretnym zastosowaniu. Na przykład Alastrue przyjął wyraźnie większy moduł sprężystości niż wynika z tabeli 7.3 dla materiału $M1$. Rozwiązanie dla rogówki utwierdzonej jest podobne do rozwiązania modelu z pierścieniem rąbkowym o nieskończenie wielkiej sztywności (nie jest jednak takie samo – twardówka ulega wydłużeniu). Wykresy widoczne na rysunku 8.35 pokazują, że mechanizm optyczny takiego modelu jest zupełnie inny niż opisany poprzednio (rys. 8.34). Najważniejsza różnica widoczna jest w przebiegu funkcji ΔR . Promień krzywizny wierzchołka rogówki *maleje* podczas zwiększania p – przeciwnie niż w modelu pełnym. W konsekwencji ogniskowa ulega skróceniu, i to bardziej niż poprzednio się wydłużała. Inny jest w związku z tym ruch ogniska podczas zwiększania ciśnienia – teraz przesuwa się ono do przodu. Przyczyna tych wszystkich różnic tkwi w zupełnie innej dynamice zewnętrznego profilu rogówki utwierdzonej na obwodzie, co widać na rysunku 8.35.

Uzyskane wyniki świadczą zatem o dużym wpływie sposobu zamocowania modelu gałki ocznej na jej optykę. Sztywne zamocowanie modelu rogówki w rąbku jest warunkiem skrajnym, ale dość często przyjmowanym w obliczeniach. Uniemożliwia on jednak analizę tak złożonych funkcji jak $B(p)$.

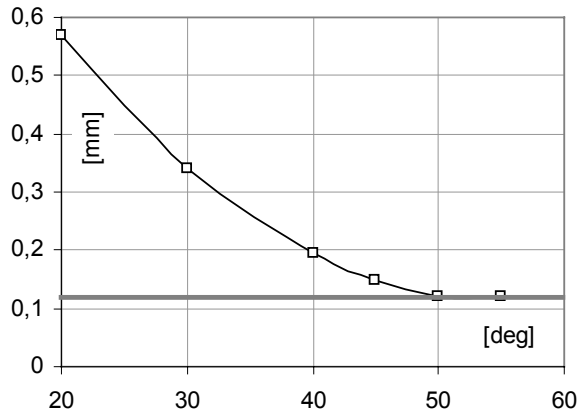
8.3.3. Model rogówki na podporze przesuwnej

Bardziej realistyczny wydaje się model numeryczny uproszczony do rogówki podpartej suwliwie. Postuluje się wówczas, że jeśli model samej rogówki zostanie osadzony na podporze przesuwnej, ustawionej pod odpowiednio dobranym kątem β , to deformacja rogówki, obciążonej ciśnieniem wewnątrzgałkowym, będzie taka sama jak w modelu pełnej gałki ocznej.



Rys. 8.36. Podparcie przesuwne modelu rogówki

Elsheikh i in. [2006, 2007] obliczyli, że przemieszczenie wierzchołka względem płaszczyzny rąbka, rogówki podpartej przesuwnie pod kątem $\beta = 23^\circ$, jest takie samo jak w (pełnym) modelu gałki ocznej. Podobne obliczenia doprowadziły autorów prac [Anderson i in. 2004, Orssengo i Pye 1999] do wartości $40\text{--}45^\circ$.

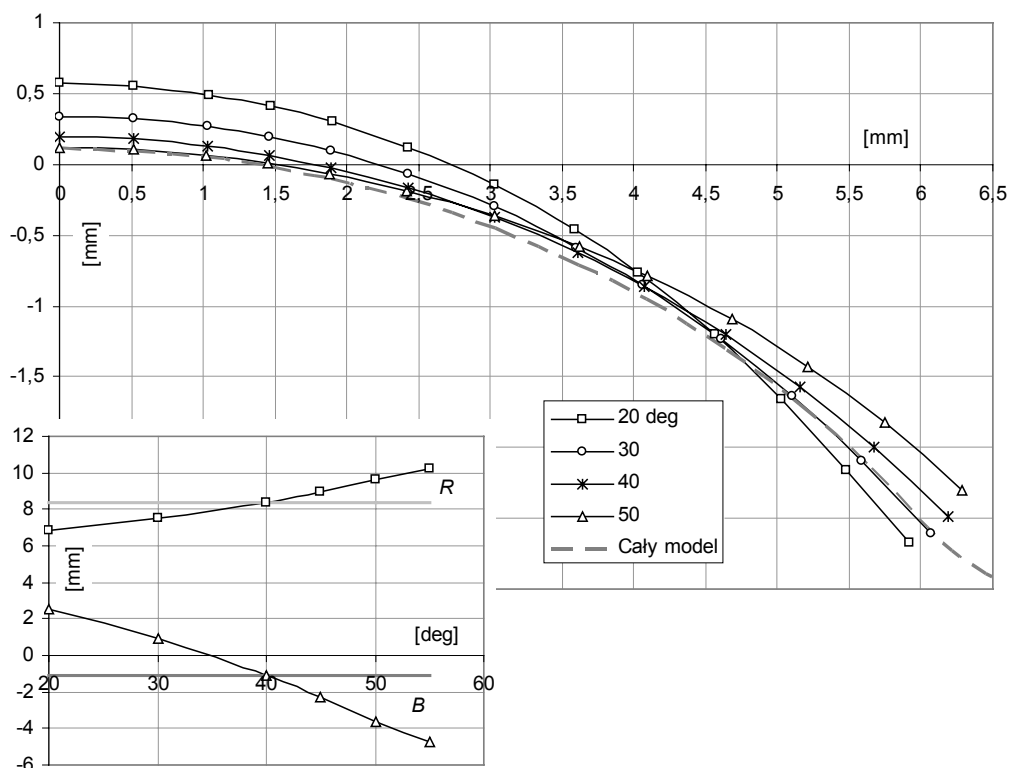


Rys. 8.37. Przesunięcie wierzchołka rogówki względem płaszczyzny rąbka w modelu z materiału $M1$, obciążonym ciśnieniem 16 mmHg. Na osi odciętych odmierza się kąt podparcia β .

Szarą, grubą linią wykreślono przesunięcie wierzchołka otrzymane dla pełnego modelu samonastawnego

Ponieważ wyniki te mocno się różnią, interesujące jest wyznaczenie optymalnej wartości kąta podparcia rogówki dla badanego tu modelu samonastawnego. Na rysunku 8.37 wykreślono przemieszczenie wierzchołka względem płaszczyzny rąbka, uzależnione od kąta β , obliczone dla modelu rogówki z materiału M1. Kąt podparcia zmienia się od 20° do 55° . Warunek brzegowy – zmienny kąt podparcia – realizowany był indywidualnie dla każdego węzła modelu rogówki, usytuowanego na granicy z twardówką. Wpływ twardówki został wyeliminowany przez jej całkowite usunięcie.

Z obliczeń wynika, że przemieszczenie wierzchołka modelu rogówki na podporze przesuwnej staje się równe przemieszczeniu obliczonemu dla modelu gałki ocznej, gdy β zbliża się do 50° . Wtedy jednak średnica rogówki obciążonej ciśnieniem staje się stosunkowo duża, wyraźnie większa od tej, jaką ma rogówka osadzona w twardówce. Serię rozwiązań ilustrujących ewolucję profilu rogówki kształtowanego zmieniającym się nachyleniem podpory przesuwnej, można prześledzić na rys. 8.38.



Rys. 8.38. Po lewej – promień rogówki R i położenie ogniska optycznego B w zależności od kąta podparcia rogówki β . U góry – profil rogówki zależny od β

Kąt podparcia $\beta = 40^\circ$ rzeczywiście jest szczególny, wtedy bowiem promień krzywizny rogówki R i przemieszczenie ogniska optycznego B są takie same w obu wersjach modelu rogówki, zarówno tej osadzonej w twardówce, jak i podpartej przesuwnie (wykreśy w dolnej części). Położenie ogniska w modelu pełnym, samonastawnym, zaznaczone jest na dolnym rysunku szarą grubą linią, a odpowiadająca temu konfiguracja profilu rogówki wykreślona jest linią przerywaną na rysunku górnym. Mimo że do porównania obu modeli użyte zostało kryterium mechaniczne, mianowicie przemieszczenie wierzchołka rogówki, funkcje optyczne modelu zastępczego (rogówka na podporze przesuwnej) także pozostają zbliżone do oryginału. Z tego względu pomysł zredukowania modelu do rogówki podpartej pod kątem zbliżonym do 40° nie wydaje się całkiem zły, jednak pole przemieszczeń rogówki nie jest w pełni zgodne z rezultatem otrzymanym dla modelu pełnej gałki ocznej. Na rysunku 8.38 widać, że profil rogówki dla kąta podparcia 50° znacznie się różni od profilu otrzymanego dla modelu pełnego (linia przerywana), chociaż nachylenie trajektorii rąbka pod kątem 61° w modelu pełnym jest niewiele większe – rys. 8.34. Wynik ten sugeruje, że w przeciwieństwie do podparcia przesuwnego, twardówka krępuje swobodę przemieszczeń rogówki w kierunku *prostopadłym* do jej powierzchni, zatem na granicy, między powłokami rogówki i twardówki występuje siła tnąca, która ogranicza to przemieszczenie. Obecność siły tnącej jest konsekwencją różnicy sztywności rogówki i twardówki. Wpływ, jaki ma ta siła na samonastawność optyczną modelu badany był w podrozdziale 7.2. Uproszczenie układu optycznego oka do modelu rogówki podpartej przesuwnie wydaje się więc nadmierne. Także z tego względu, że w ten sposób utracona zostaje możliwość zapewnienia modelowi samonastawności optycznej.

8.3.4. Warunki brzegowe – podsumowanie

Zasadniczą cechą modelu o naturalnej geometrii rogówki jest postulowana samonastawność optyczna, widoczna w przebiegu wykresu $B(p)$ na rys. 8.34. Zarówno zmiana ogniskowej Δf , jak i optycznej długości oka Δl , są wyraźnie zmiennymi funkcjami ciśnienia p , jednak powyżej $p = 8$ mmHg różnica tych funkcji jest niemal stała (równa B). Po zwiększeniu ciśnienia do 16 mmHg ogniskowa wydłużyła się o $\Delta f = 1,5$ mm. Nie uwzględniając wydłużenia oka, uznalibyśmy, że ognisko przesunęło się o tę wartość do tyłu. Tymczasem przesunęło się ono względem dna oka o $B = -1,3$ mm, co przekłada się na nieco inną zmianę mocy optycznej. Takie rozbieżności w przewidywaniu zmian parametrów optycznych oka, w zależności od przyjętego układu współrzędnych (związanego albo z główną płaszczyzną obrazową, albo z dnem oka), skłaniają do zweryfikowania tezy, że sposób zamocowania rogówki nie ma wpływu na obliczaną moc optyczną po jej obciążeniu ciśnieniem p .

Rozwiązania dla rogówki utwierdzonej na obwodzie, przedstawione na rysunku 8.35, dowodzą, że jest to całkiem inny model. Unieruchomienie rąbka oznacza przemieszczenie osiowe $a_l = 0$. Zdefiniowane w (4.4) przesunięcie głównej płaszczyzny obrazowej Δl , mimo że pochodzi tylko od przyrostu $\Delta S'_H$, jest teraz znacznie większe

niż w modelu gałki ocznej. Jednak najbardziej destrukcyjna różnica widoczna jest w zmianach ogniskowej Δf względem początkowej wartości $f = 22,38$ mm (w razie braku ciśnienia). Nie tylko znacznie wzrosła jej bezwzględna wartość, ale funkcja Δf zmieniła też znak. Teraz, zamiast rosnać – maleje. Wynika to oczywiście z zupełnie innego przebiegu funkcji $R(p)$, którą dotknęły podobne zmiany. Ostatecznie ognisko, zamiast o $-1,3$ mm (do tyłu), przesuwa się teraz o $1,75$ mm (do przodu). To są rozwiązania zupełnie inne od uzyskanych dla modelu samonastawnego, ponieważ przesunięcie ogniska optycznego z pozycji $1,75$ mm na $-1,3$ mm oznacza, dla ogniskowej $f = 0,02238$ m i na podstawie (4.3), różnicę mocy optycznej oka

$$\Delta P_{\text{oko}} = \frac{1,336}{0,02238 - 0,00175} - \frac{1,336}{0,02238 + 0,0013} = 64,76 - 56,42 = 8,3 \text{ D.}$$

Unieruchomienie rąbka rogówki czyni z niej zupełnie *inny układ optyczny*, niż gdy rogówka jest osadzona w odkształcalnej twardówce.

Model rogówki podpartej przesuwnie prezentuje się nieco lepiej niż utwierdzonej, nie ma jednak wątpliwości, że do analizy optycznej modelu gałki ocznej należy wykonywać jego pełną wersję.

8.4. Symulacja numeryczna PRK

8.4.1. Rola warunków brzegowych w refrakcji modelu rogówki

Symulacja PRK (*photorefractive keratectomy*) ograniczona tutaj zostanie do korekcji krótkowzroczności. Zabieg, wykonywany za pomocą lasera ekscimerowego, który emituje wiązkę promieniowania ultrafioletowego, polega na zmianie promienia krzywizny wierzchołka rogówki, na średnicy około 7 mm, przez odparowanie (ablację) jej zewnętrznych warstw. Podczas operacji ciśnienie wewnątrzgałkowe nie ulega zmianie. Jeśli nie jest korygowany astygmatyzm, a jedynie moc optyczna, to rogówka, po wprowadzeniu nowego profilu, pozostaje nadal osiowoosymetryczna. Utworzenie modelu i rozwiązanie numeryczne takiego zadania wydaje się całkiem łatwe. Niestety prawdziwe w tej tezie są jedynie słowa *wydaje się*.

Próba rozwiązania trafia na ogromną trudność z całkiem niepozornego powodu. Model gałki ocznej zawsze rozpoczyna swoje istnienie od projektu, czyli konfiguracji konstrukcji *przed obciążeniem*. Dotyczy to geometrii obu modeli, zarówno tego dla oka przed operacją, jak i modelu gałki ocznej po zabiegu. Problem tkwi w tym, że w warunkach klinicznych geometria ta w obu przypadkach jest niedostępna. Znana jest jedynie konfiguracja końcowa, czyli wymiary rogówki obciążonej ciśnieniem przed zabiegiem, a także wymiary rogówki zdeformowanej jednocześnie chirurgicznie i ciśnieniem wewnątrzgałkowym po zabiegu. O tym, czy model rogówki (zarówno ten przed zabie-

giem, jak i ten po zabiegu) otrzymał poprawne wymiary, można przekonać się dopiero po rozwiązaniu, ale konfiguracja modelu obciążonego zależy zarówno od początkowej geometrii, jak i od przyjętej sprężystości materiału. Niesprawiedliwość, jakiej doświadcza tu projektant modelu mechanicznego, polega na tym, że chirurg jest w ogóle nieświadomy tego problemu – pomiary przed zabiegiem, sam zabieg i kontrola pooperacyjna przebiegają przy niezmiennym (w przybliżeniu) ciśnieniu wewnątrzgałkowym. Zagadnienie geometrii rogówki nieobciążonej w ogóle się tutaj nie pojawia. Chirurga planującego korekcję refrakcji, z użyciem wzoru Munnerlyna (8.38), nie interesuje nawet promień krzywizny R wierzchołka rogówki przed zabiegiem. Wymagana wartość promienia R po zabiegu, wykonanym pod ciśnieniem p , jednoznacznie wynika z założonej zmiany ΔP , średnicy strefy ablacji d_{abl} i obliczonej zmiany grubości rogówki Δt .

W odróżnieniu od tej sytuacji, nowo tworzony model numeryczny kształtowany jest *przed* obciążeniem, a różni się on bardzo wyraźnie w swej geometrii od modelu obciążonego. Na przykład rozwiązanie modelu pełnego, swobodnie podpartego, z rogówką o promieniu $R = 7,82$ mm przed obciążeniem, prowadzi, dla $p = 16$ mmHg, do $R = 8,55$ mm (rys. 8.34). Ten sam model z rogówką utwierdzoną osiąga przy tym ciśnieniu promień $R = 7,17$ mm (rys. 8.35). Są to dwa zupełnie różne przypadki w numerycznym planowaniu korekcji refrakcji. Zagadnienia zależności parametrów optycznych gałki ocznej od ciśnienia p i warunków brzegowych nie dotyczą więc wprost chirurgii refrakcyjnej (i mogą być tam w ogóle niezauważane), są natomiast poważnym problemem modelowania i obliczeń numerycznych [Asejczyk-Widlicka i in. 2003, Śródka 2009].

Innym problemem, z którym musimy się zmierzyć podczas opracowywania modelu gałki ocznej, poddawanej zabiegom korygującym jego refrakcję, jest kryterium oceny skuteczności takich zabiegów, a konkretnie odpowiedź na pytanie: jakiej miary należy użyć do określenia zmian optycznych w modelu oka. Skutek symulowanej korekty chirurgicznej nie powinien być mierzony samym tylko wydłużeniem Δf ogniskowej rogówki (zmianą R), ostatecznie bowiem to nie położenie ogniska względem głównej płaszczyzny obrazowej układu optycznego oka (4.3) decyduje o ostrości obrazu na siatkówce, a położenie ogniska względem dna oka (4.5). Wyjdzie to może na jedno, ale tylko wtedy, gdy zaniedbamy Δl (4.4). Możliwość obliczenia optycznej długości oka l , uzależnionej od ciśnienia p lub od geometrii rogówki skorygowanej chirurgicznie, jest jednym z zasadniczych powodów stworzenia omawianego tu modelu biomechanicznego gałki ocznej⁵. Ta szczególna cecha modelu została już wykorzystana w podrozdziale 7.2 do badania warunków występowania samonastawności optycznej gałki ocznej, jej przydatność ujawniła się też przy symulowaniu keratotomii radialnej, opisanej w podrozdziale 7.3.3. Dwa następne rozdziały zawierają kolejne zastosowania odkształcalnego układu optycznego.

⁵ Nie znam ani jednej próby stworzenia modelu biomechanicznego gałki ocznej, w którym uwzględniane jest przemieszczenie głównej płaszczyzny obrazowej rogówki przy obliczaniu położenia ogniska optycznego względem dna oka.

8.4.1.1. Model pełny

W symulowanym numerycznie zabiegu PRK skorygujemy moc optyczną modelu gałki ocznej z materiału $M1$. Spełnione są przy tym kryteria (4.13) i (4.14). Istotne dla optyki funkcje ilustruje rysunek 8.34. Początkowy promień krzywizny wierzchołka rogówki $R = 7,82$ mm.

Symulacja zabiegu PRK polega na tym, że wierzchołek rogówki na średnicy $d_{abl} = 6$ mm zastępujemy sferą o promieniu $R = 9,66$ mm. Ta zmiana geometrii dokonana jest oczywiście na modelu nieobciążonym, przed rozwiązaniem. Prowadzi ona do zmniejszenia centralnej grubości rogówki o $\Delta t = 0,1194$ mm. W tabeli 8.4 zebrane zostały dane liczbowe pochodzące z rozwiązania modelu w dwu wersjach: przed i po zabiegu. Wykresy wszystkich funkcji układu optycznego w obu tych wersjach pokazane są na rysunkach 8.34 i 8.39.

Zmiana mocy optycznej modelu po zabiegu, tab. 8.5, obliczana jest względem mocy modelu przed zabiegiem, pod tym samym ciśnieniem p . Moc optyczna rogówki (i jej zmiana) wyznaczana jest wg formuły (4.2). Moc całego układu optycznego – według (4.1) i (4.3). Zmiana mocy optycznej układu rogówka-soczewka nie jest tylko różnicą mocy optycznej P po zabiegu i przed zabiegiem – przy jej obliczaniu uwzględniono także zmianę położenia ogniska względem dna oka.

Tabela 8.4. Rozwiązania modelu pełnego przed i po zabiegu PRK

Przed zabiegiem (rys. 8.34)						
p [mmHg]	S'_H [mm]	f [mm]	P [D]	B [mm]	a_l [mm]	L [mm]
0	4,231	22,376	59,7	0	0	22,376
16	4,155	23,882	55,9	-1,295	0,286	22,587
32	4,168	23,992	55,7	-1,349	0,330	22,643
Po zabiegu (rys. 8.39)						
p [mmHg]	S'_H [mm]	f [mm]	P [D]	B [mm]	a_l [mm]	L [mm]
0	3,670	25,934	51,5	-4,118	0	25,934
16	3,707	26,423	50,6	-4,266	0,304	26,275
32	3,733	26,421	50,6	-4,196	0,346	26,343

Tabela 8.5. Zmiana mocy optycznej ΔP [D]

p [mmHg]	Rogówka	Według (8.38)	Układ optyczny modelu
0	-8,3	-8,9	-7,1
16	-5,5	-7,9	-5,1
32	-5,2	-7,8	-4,9

Przykładowo moc optyczna modelu po zabiegu, dla $p = 16$ mmHg, zmieniła się na 50,6 D (z 55,9 D, tab. 8.4). Ale nie jest to zmiana o 50,6 – 55,9 = -5,3 D. Teraz, po

zabiegu, ogniskowa $f = 26,423$ mm, a przesunięcie ogniska $B = -4,266$ mm (do tyłu). Aby ognisko znalazło się w pozycji sprzed zabiegu, czyli $B = -1,295$ mm, ogniskowa musiałaby wynosić

$$f = 26,423 - 4,266 + 1,295 = 23,452 \text{ mm.}$$

Oznacza to, zgodnie z (4.3) i (7.18), zmianę mocy optycznej

$$\Delta P_{\text{oko}} = 50,6 - \frac{1,336}{0,023452} = -6,4 \text{ D,} \quad (8.37)$$

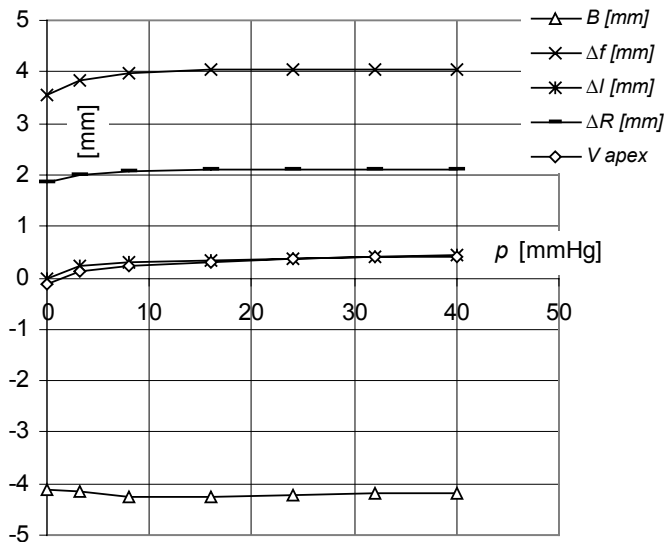
co jest znacząco różne od $-5,3$ D. Różnica bierze się z wyboru układu współrzędnych, w którym opisywane jest położenie ogniska, związanego albo z układem optycznym, albo z dnem oka. Ten drugi przypadek znalazł swój wyraz w równaniu (7.18).

W tabeli 8.5 zawarto także wyniki otrzymane z użyciem przybliżonej formuły, zaproponowanej przez Munnerlyna [1988]:

$$\Delta P = -\frac{8(n-1)\Delta t}{d_{\text{abl}}^2}, \quad (8.38)$$

Δt – ubytek osiowej grubości rogówki po ablacji, d_{abl} – średnica strefy ablacji.

Obliczona według wzoru Munnerlyna zmiana mocy optycznej po PRK jest nieco większa od otrzymanej dla samej rogówki, a także od wartości ścisłej, wyznaczonej wg (8.37). Ten ostatni wynik umieszczony jest w kolumnie *Układ optyczny modelu* tabeli 8.5. Zmiana mocy optycznej po PRK jest w chirurgii refrakcyjnej planowana właśnie na podstawie wyrażenia (8.38).



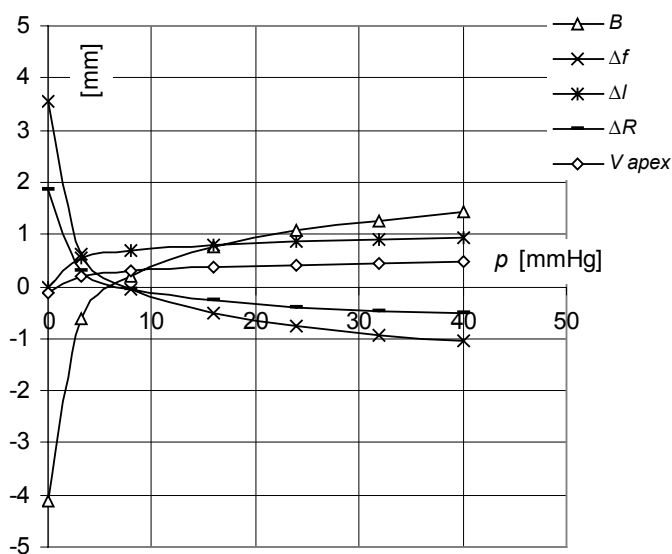
Rys. 8.39. Zależność od ciśnienia wybranych parametrów pełnego modelu PRK. Przyrost promienia krzywizny wierzchołka rogówki obliczany jest względem wartości początkowej $R = 9,68$ mm

Największe zmiany parametrów optycznych (rys. 8.39) zachodzą w początkowej fazie obciążania, do ok. 3 mmHg – podobnie jak dla modelu gałki ocznej o naturalnej geometrii – rys. 8.34. Wynika stąd, że parametry optyczne modelu w każdym przypadku należy badać *pod obciążeniem*, z dala od ciśnienia p zbliżonego do zera.

8.4.1.2. Model rogówki utwierdzonej

Jak zachowa się ten sam model PRK podczas zwiększania ciśnienia p , gdy rogówka jest utwierdzona na obwodzie? Wyniki rozwiązania zilustrowano na rysunku 8.40.

Najważniejsza różnica widoczna jest na wykresie Δf . Zmiana długości ogniskowej, początkowo równa 3,56 mm, maleje dla $p = 16$ mmHg do $-0,51$ mm – gdy w pełnym modelu była równa 4,05 mm (rys. 8.39). Z kolei ognisko, które w pełnym modelu PRK cofnęło się o 4,27 mm, tutaj przesunęło się do przodu o 0,80 mm. Przyczyną jest oczywiście gwałtowne zmniejszanie się promienia krzywizny wierzchołka rogówki, po jej utwierdzeniu na obwodzie, a równocześnie nadmierne przesuwanie się do przodu głównej płaszczyzny obrazowej układu optycznego. Zmiana promienia krzywizny modelu z rogówką utwierdzoną, gdy $p = 16$ mmHg, jest ujemna i wynosi $\Delta R = -0,27$ mm – rys. 8.40.



Rys. 8.40. Wykresy analogiczne do podanych na poprzednim rysunku, tym razem dla modelu rogówki po PRK, utwierdzonej w rąbku. Przyrost Δl równy jest tu $\Delta S'_H$. Promień krzywizny rogówki dla $p = 0$, wynosi $R = 9,68$ mm. Zmiany funkcji, oznaczone symbolem Δ , odnoszone są do ich wartości obliczonych dla pełnego modelu o geometrii naturalnej, pod tym samym ciśnieniem

Rozwiązania podane w tabeli 8.6 zdecydowanie się różnią od rozwiązań zamieszczonych w tabeli 8.5. Nie ulega wątpliwości, że model rogówki utwierdzonej na obwodzie prowadzi do błędnych wyników. Złudzeniu, że są poprawne można jednak ulec wtedy, gdy zmianę mocy optycznej oblicza się dla nieobciążonego modelu. Pierwszy wiersz tab. 8.6 jest wówczas taki sam jak w tab. 8.5 (a także wtedy, gdy moduł sieczny rogówki E_{sieczny} jest przesadnie wysoki). Wzór Munnerlyna (8.38) daje oszacowanie wartości ΔP prawie niezależne od ciśnienia.

Tabela 8.6. Zmiana mocy optycznej ΔP [D] utwierdzonej rogówki po PRK, względem mocy optycznej modelu pełnego przed zabiegiem – górna tabela 8.4

p [mmHg]	Rogówka	Według (8.38)	Układ optyczny modelu
0	-8,3	-8,9	-7,1
16	5,2	-8,0	6,3
32	6,6	-7,8	8,7

8.4.1.3. Dyskusja wyników

Celem zabiegu PRK korygującego krótkowzroczność jest zwiększenie promienia krzywizny rogówki w strefie przyosiowej przez usunięcie części tkanki na zewnętrznej powierzchni. Oznacza to zmniejszenie grubości rogówki w tym obszarze. Ścierają się wówczas dwie tendencje mające wpływ na zmianę mocy optycznej:

- *wzrost* promienia R rogówki nieobciążonej ciśnieniem p (po ablacji),
- *zmniejszenie* nowego promienia R cieńszej teraz rogówki obciążonej ciśnieniem p (na skutek ektazji).

Symulowanie numeryczne efektu końcowego jest trudne z powodów omówionych wcześniej, czyli konieczności takiego zaplanowania modelu, aby dopiero po obciążeniu jego parametry były zgodne z rzeczywistymi, zarówno przed zabiegiem jak i po nim. Związane z tym utrudnienia występują tu ze wzmożoną intensywnością.

Wykresy podstawowych parametrów wpływających na układ optyczny, dla pełnego modelu PRK, podane są na rysunku 8.39. Promień krzywizny rogówki R po przyroście spowodowanym zmianą profilu, nieznacznie wzrasta w początkowej fazie obciążania, do 8 mmHg, ale dalsze narastanie p nie powoduje już istotnych zmian. Dzieje się tak dlatego, że rąbek ma swobodę przemieszczeń. Są one porównywalne z przemieszczeniami rąbka modelu przed zabiegiem PRK (jak na rys. 8.34). Jednak znaczenie tych przemieszczeń jest bardzo duże, gdyż dzięki temu wszystkie funkcje optyczne wykreślone na rysunku 8.39 są niemal stałe. Po zmianie promienia R z 7,82 na 9,68 mm ogniskowa układu przyrosła skokowo o $\Delta f = 3,558$ mm, a następnie, w początkowej fazie obciążania, osiągnęła wartość zbliżoną do 4 mm i przy niej już pozostała. W trakcie nieznacznego przemieszczania się wierzchołka rogówki $V_{\text{rogówka}}$

do przodu, ognisko stabilizuje swoje położenie B w punkcie przesuniętym o 2,95 mm do tyłu względem położenia sprzed zabiegu. Obliczone zgodnie z (4.1) zmiany mocy optycznej dla trzech poziomów ciśnienia podane zostały w ostatniej kolumnie tabeli 8.5. Dodatkowo tabela zawiera zmianę mocy optycznej obliczoną dla samej rogówki według (4.2) i (8.38).

Interesujące są porównania wzajemne tych wyników. Dla rogówki sztywnej, czyli dla ciśnienia równego zero, wykazują one największe skupienie. Najczęściej tak właśnie obliczana jest moc optyczna – dla samej rogówki, wg (4.2). Pod ciśnieniem nominalnym (16 mm Hg) $\Delta P_{\text{rogówka}} = -5,5$ (tab. 8.5), zatem różnica względem wyniku otrzymanego dla pełnego modelu, $-5,1$ D, jest stosunkowo mała (nie przekracza 8%). Wzór Munnerlyna nie wypada w tych porównaniach najlepiej, w miarę zwiększania obciążenia i powodowanej tym deformacji modelu, jego wskazania są coraz bardziej odległe od pozostałych wartości.

Optyczne skutki utwierdzenia rogówki w rąbku widać na rysunku 8.40. Uzyskane funkcje są zupełnie inne niż podane na rysunku 8.39, do czego przyczyniają się oczywiście wadliwe warunki brzegowe. Utwierdzenie na obwodzie zmniejsza promień krzywizny zewnętrznego profilu rogówki R , i to do wartości mniejszej niż w modelu przedoperacyjnym, przez co zmiana mocy optycznej przekracza teraz $+5$ dioptrii. Efekt zabiegu jest więc przeciwny do oczekiwanego – moc optyczna wzrosła, zamiast zmaleć.

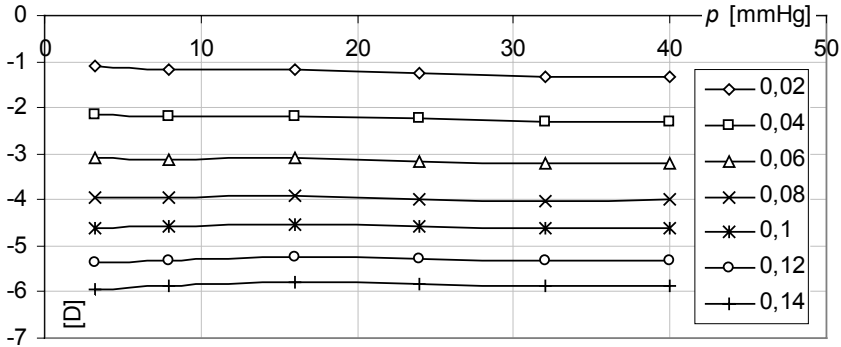
Sposób podparcia modelu rogówki nie jest zatem obojętny, jej utwierdzenie na obwodzie prowadzi do wypaczonych wyników. Można to zauważyć tylko dzięki użyciu podstawowych formuł optyki (4.1) i (4.2). Wyrażenie (8.38) jest w zastosowaniu do tego zadania zupełnie nieprzydatne, bo jest ono niemal niewrażliwe na zmiany krzywizny wierzchołka rogówki powodowane obciążeniem (tab. 8.6), co prowadzi do wyjątkowo dużych błędów. Wzór Munnerlyna podaje zmianę mocy *rogówki* sztywnej, ale nawet wtedy nie jest dokładny. Tym bardziej gdy użyty w tak odległym od rzeczywistości zastosowaniu jak rogówka z unieruchomionym rąbkiem.

Przemieszczenia rąbka, mimo że niewielkie, mają więc fundamentalny wpływ na moc całego układu optycznego gałki ocznej. Przemieszczenia te, powodowane zmianami ciśnienia p , silnie zależą zarówno od sztywności twardówki, jak i pierścienia rąbkowego, zatem powinny być starannie obliczane, i to w *pełnym* modelu, z poprawnie zaprojektowaną twardówką i pierścieniem rąbkowym. Sprężystość tych tkanek należy zaliczyć do podstawowych parametrów optycznych oka.

8.4.2. Parametry PRK w planowaniu zmiany refrakcji gałki ocznej

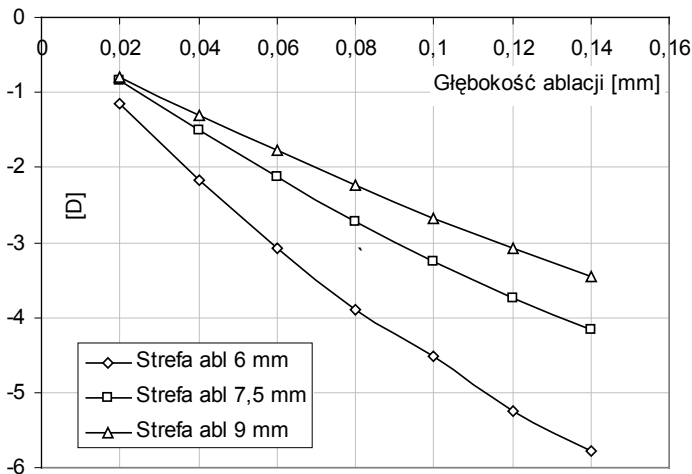
Podstawą planowania skutku zabiegu PRK są parametry użyte we wzorze (8.38), a więc przede wszystkim średnica strefy ablacji d_{abl} i głębokość ablacji w centrum rogówki Δt . Przyjmuje się, że prognoza oparta na wzorze Munnerlyna jest zbliżona

do obserwowanej w praktyce chirurgicznej. Średnica strefy ablacji dobierana jest w zakresie od około 6 mm do około 9 mm. Głębokość ablacji może sięgać kilkunastu setnych milimetra. Opierając się na tych przesłankach ustalimy, czy moc optyczna modelu oka po PRK zależy od IOP. Rezultaty obliczeń dla przykładowej średnicy strefy ablacji 6 mm i kilku stopni ablacji zestawione są na rysunku 8.41.



Rys. 8.41. Zmiana mocy optycznej oka po PRK jako funkcja ciśnienia wewnątrzgałkowego. Średnica $d_{abl} = 6$ mm. Głębokość ablacji Δt przyrasta co 0,02 mm od 0,02 do 0,14 mm

Podczas obliczania mocy optycznej uwzględniono odkształcalność twardówki, a więc algorytm oparty na opisie położenia ogniska względem dna oka (a nie względem głównej płaszczyzny obrazowej układu optycznego), omówiony w podrozdziale 8.4.1.1.



Rys. 8.42. Zmiana mocy optycznej oka po PRK w funkcji głębokości ablacji Δt . Ciśnienie $p = 16$ mmHg

Wykresy widoczne na rysunku 8.41 wychodzą naprzeciw naszym – ludzkim – życzeniom, ponieważ moc optyczna po tym zabiegu praktycznie nie zależy od ciśnienia wewnątrzgałkowego. To niezwykle istotny wynik i podwójnie szczęśliwa okoliczność, bo także rosnąca głębokość ablacji nie zmienia tej niezależności. Gdyby miało być inaczej, przypadek ten stwarzałby okoliczności sprzyjające ektazji – zjawisku, które manifestuje się jako stożek rogówki. Rozwiązania pokazują jednak, że jeśli oko było samonastawne optycznie przed zabiegiem, to pozostaje takim po zabiegu.

Zmiana mocy optycznej po PRK wykazuje natomiast wyraźną zależność od średnicy strefy ablacji d_{abl} . Efekt ten widoczny jest w rozwiązaniach przedstawionych na rys. 8.42, potwierdza go także praktyka kliniczna.

W okulistyce znane jest zjawisko określane jako *keratektazja* (rozstrzeń, rozdęcie rogówki), co językiem mechaniki opisałibyśmy jako lokalną utratę stateczności powłoki elipsoidalnej, poddanej działaniu ciśnienia wewnątrzgałkowego. Także to zagadnienie stanowi przedmiot dociekań biomechanicznych, czego przykładem może być praca Guirao [2005]. Przeprowadzona dyskusja rozwiązań modelu zdaje się wskazywać na źródła tego zjawiska. Nie pojawia się ono w rogówce-powłóce zbliżonej do jednorodnej (zarówno geometrycznie, jak i materiałowo), gdyż nawet gdy jej grubość jest mała, narastające ciśnienie wewnątrzgałkowe powoduje *zmniejszanie* krzywizny wierzchołka. Samo zmniejszanie grubości nie jest jeszcze przyczyną keratektazji. Lokalne wybrzuszenie rogówki możliwe jest tylko w przypadku dużego *gradientu sztywności* powłoki, a więc gdy *zmiana* grubości jest duża lub gdy zmienia się gwałtownie moduł sprężystości stromy w niewielkiej odległości od osi (modelu osiowo-symetrycznego). Przykładów dostarcza sama natura (stożek rogówki), a także doświadczenia chirurgii refrakcyjnej, zdarza się bowiem, że po zabiegu korygującym refrakcję oka krótkowzrocznego centralna część rogówki, o zmniejszonej grubości, zamienia się w „stożek”. Takiej deformacji, wywołanej działaniem ciśnienia p , uległa powłoka pokazana na rysunku 8.35, skrępowana na obwodzie. W tym przypadku *zmiana sztywności* zachodzi w miejscu utwierdzenia rogówki. Gdy ma ona swobodę ekspansji, deformuje się tak, jak na rysunku 8.34.

Symulowane rezultaty PRK, pokazane na rysunku 8.42, nie są zgodne z wzorem Munnerlyna (8.38) – przybliżeniem przydatnym dla sztywnego modelu PRK, ale prowadzącym do dużych błędów, gdy rogówka mocno zmienia krzywiznę po zmianie obciążenia lub (chirurgicznej) zmianie geometrii (tab. 8.6). Można nawet sądzić, że ten wzór ma wówczas ograniczone zastosowanie – wbrew przekonaniu niektórych badaczy [Alastrue i in. 2006]. Na przykład parametry $\Delta t = 0,10$ mm i $d_{abl} = 6$ mm zapewniają, wg (8.38), dużą zmianę mocy optycznej, bo zbliżoną do 10 dioptrii, ale parametry te równocześnie prowadzą do stosunkowo dużego gradientu grubości rogówki w tym obszarze. Mówiąc obrazowo: cienki krążek strefy optycznej w pobliżu osi podtrzymywany jest przez stosunkowo sztywne otoczenie. To są warunki sprzyjające ektazji, czyli *zmniejszeniu* promienia krzywizny R pod wpływem ciśnienia. Ścierają się wówczas dwie sprzeczne tendencje: wzrost promienia krzywizny po zabiegu

PRK wykonanym na „zamrożonej” rogówce (tak obliczana jest zmiana mocy optycznej według wzoru (8.38)), a następnie zmniejszenie promienia krzywizny po jej „rozrożeniu”, spowodowane działaniem ciśnienia p na cieńszą teraz rogówkę w centrum. Nic zatem dziwnego, że zmiana refrakcji, jaką można odczytać z rys. 8.42, stanowi zaledwie połowę tego, co przewiduje wzór (8.38) przy dużych Δt . Doświadczenia chirurgii refrakcyjnej wskazują, że ten wzór prowadzi wówczas do znacznie przeszacowanych prognoz. Z analizy rozwiązań numerycznych, dokonanej w podrozdziale 8.4.1 wynika, że w tego rodzaju obliczeniach, gdy zakładane warunki brzegowe mogą zbyt mocno odbiegać od rzeczywistości, znacznie bezpieczniej jest posługiwać się wzorami optyki, niż przybliżeniem Munnerlyna (8.38).

8.4.3. Tonometria aplanacyjna rogówki po PRK

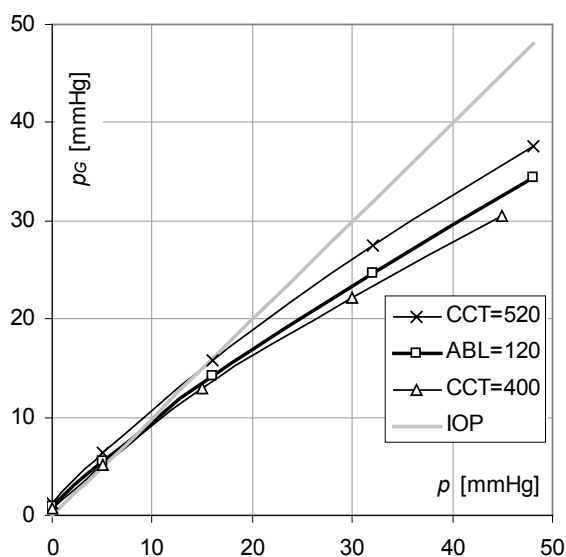
Stosunkowo nowym problemem tonometrii jest pomiar ciśnienia na rogówce o geometrii skorygowanej chirurgicznie. Najczęściej ostatnio wykonywanym zabiegiem modyfikującym jej refrakcję, jest LASIK lub PRK. W literaturze można znaleźć wiele doniesień sugerujących, że po tego rodzaju zabiegu wyniki pomiaru IOP są заниżane przez GAT [Min i in. 1995, Levy i in. 1999, Garzosi i in. 2001, Wang i in. 2002]. Dużym mankamentem takich badań prowadzonych *in vivo* jest brak kontroli nad IOP. Za próbę ustalenia rzeczywistego ciśnienia wewnątrzgałkowego można uznać porównywanie wskazań tonometru po zabiegu ze wskazaniem przed zabiegiem, oraz obejmowanie pomiarami możliwie licznej grupy pacjentów. Uzyskane w ten sposób wyniki są dość podobne u różnych autorów, lecz obarczone dużym rozrzutem, przez co zmiana odczytu ciśnienia jest zwykle nieistotna statystycznie. Na przykład Min i in. otrzymali średnią zmianę wskazania tonometru Goldmanna z $14,7 \pm 2,7$ na $11,9 \pm 2,5$ mmHg, zatem $2,8$ mmHg dla średniej głębokości ablacji $71,4 \pm 22$ mikrometry. Badania przeprowadzono na 353 oczach. Z kolei Garzosi i in. otrzymali zmianę wyniku pomiaru GAT z $13,37 \pm 1,52$ na $11,87 \pm 1,73$ mmHg, czyli niemal dwa razy mniej, bo $1,5$ mmHg.

Badania te ujawniły inny ciekawy rezultat. Przy takich pomiarach porównywane są z GAT wskazania tonometru nazywanego tonopen (ma gabaryty pióra). Technika pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego tym urządzeniem jest podobna jednocześnie do DCT i do GAT – czujnik „ciśnienia” (układ pomiarowy, wrażliwy na nacisk) umieszczony jest w centrum płaskiej końcówki pomiarowej przyrządu trzymanego w rękę. Ciśnienie jest więc mierzone lokalnie, na powierzchni znacznie mniejszej niż strefa kontaktu rogówki z końcówką pomiarową – jak w DCT – ale wierzchołek rogówki jest spłaszczony – jak w GAT. Badacze zgodnie zauważają, że tonopen pokazuje po PRK *mniejszą* zmianę ciśnienia niż tonometr Goldmanna. W cytowanych badaniach Garzosi i in. otrzymali tym przyrządem wynik $12,18 \pm 1,60$ po PRK, gdy przed zabiegiem wynosił on $13,48 \pm 1,55$ mmHg, czyli zmianę $1,3$ mmHg – niewielką. Levy i in. uzyskali nieco wyraźniejszy wynik, ich „GAT IOP” okazało się po PRK

o $2,0 \pm 1,18$ mmHg mniejsze niż w sąsiednim oku, nie poddanym zabiegowi, tymczasem „tono-pen IOP” nie różniło się istotnie.

Podobne wyniki otrzymali na oczach świńskich Hallberg i in. [2006]. W podrozdziale 8.1.3.3 podane są szczegóły tych badań. Istotne w nich jest to, że zależność odczytu GAT od głębokości ablacji po PRK rejestrowana była pod stałym ciśnieniem wewnętrznym 30 mmHg. Przy głębokości ablacji 186 mikrometrów wskazanie tonometru Goldmanna wynosiło 25 mmHg, o 5 mmHg mniej niż IOP. Niestety nie można wyników Hallbarga porównywać bez zastrzeżeń z podanymi rezultatami *in vivo* dla ludzi, gdyż rogówka świniaka jest znacznie grubsza, inny jest też jej profil, rozkład grubości wzdłuż południka, a być może także parametry materiałowe. Mimo to względna zmiana CCT po PRK prowadzi do zmiany wskazania tonometru – także porównywanej z ciśnieniem nominalnym – zawartej w podanych przedziałach otrzymanych dla człowieka.

Na rysunku 8.43 zestawione zostały wyniki obliczeń dla trzech modeli różniących się geometrią rogówki. Grubą linią aproksymowano zależność $p_G(p)$, uzyskaną dla modelu o standardowej geometrii (tab. 4.1) i z materiału M2 (tab. 7.3), poddanego zabiegowi PRK o następujących parametrach: $\Delta t = 12$ mm (zmniejszenie CCT), średnica strefy ablacji $d_{abl} = 6$ mm. Dla porównania na rysunku umieszczone są analogiczne wykresy – jeden dla modelu o geometrii, jaką miał przed PRK, oznaczony CCT = 520 (mikrometrów), drugi dla modelu z rogówką cieńszą w osi o 0,12 mm, oznaczony CCT = 400.



Rys. 8.43. Linia pogrubiona – ciśnienie „mierzone” tonometrem aplanacyjnym na modelu PRK: głębokość ablacji $\Delta t = 0,12$ mm, $d_{abl} = 6$ mm. Linie cienkie – zależność $p_G(p)$ dla rogówki o geometrii sprzed zabiegu i dla rogówki o naturalnej geometrii, ale cieńszej o 0,12 mm

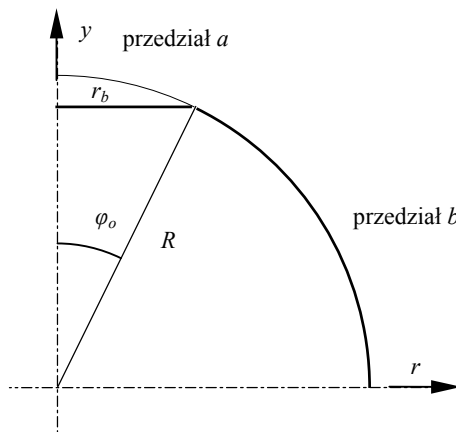
Ten ostatni wykres pozwala sprawdzić pomysł, czy odczyt dokonany dla rogówki po PRK można korygować podczas pomiaru ciśnienia w taki sposób jak dla rogówki cieńszej, o grubości CCT = 0,400 mm (0,520–0,120 mm). Jak widać, wykresy nie pokrywają się, a „odczyty” dla rogówki po PRK znajdują się pomiędzy uzyskanymi dla rogówek, o grubościach 0,520 i 0,400 mm, niemodyfikowanych laserowo. Usunięcie jednak części wierzchołkowej, o grubości 0,120 mm na średnicy 6 mm, spowodowało *obniżenie* wskazań ciśnienia p_G . Ale nie tylko kierunek zmiany wskazania ciśnienia, także jego wartość pozostaje w zgodzie z podanymi liczbami, uzyskanymi doświadczalnie. Po PRK, dla ciśnienia $p = 16$ mmHg, zmiana wskazania tonometru zbliżona jest do $-1,7$ mmHg, a dla ciśnienia 30 mmHg wynosi -3 mmHg.

Dodatek

Splaszczanie błony kulistej

Zadanie

Powłokę cienkościenną, o stałej grubości t i średnim promieniu R , z materiału nieściśliwego, o module Younga E , splaszczono na powierzchni o promieniu r_b . Wyznaczyć pola przemieszczeń i naprężeń, ograniczając obliczenia do stanu błonowego.



Rys. D1. Granica między przedziałami a i b jest punktem o współrzędnej φ_0 .

Przedział a – strefa splaszczania

Układ równań podstawowych

Geometria i obciążenie powłoki są symetryczne względem osi y , nie zależą więc od kąta \mathcal{S} odmierzanego wokół osi symetrii. Strefa aplanacji, obejmująca zakres zmiennej φ od 0 do φ_0 , jest obszarem powłoki, który po deformacji zamienia się w tarczę kołowo-symetryczną (błonę płaską). Użycie transformacji

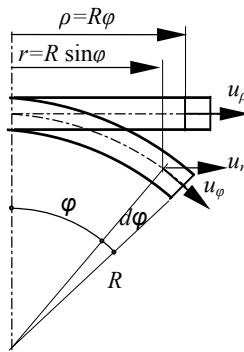
$$\rho = R \varphi \tag{D1}$$

ułatwi interpretację odkształcenia wstępnego wprowadzonego wyrażeniami (D6). Samą transformację ilustruje rysunek D2. Zadanie jest jednowymiarowe: w układzie pierwotnym (sferycznym) jedyną zmienną jest φ , a w układzie pomocniczym (biegunowym) – zmienna ρ . Wektor przemieszczenia

$$u_r = u_\rho + R \varphi - R \sin \varphi \quad (D2)$$

składa się z obliczonego w układzie pomocniczym przemieszczenia u_ρ oraz z części pochodzącej z transformacji układu współrzędnych (D1). Odległość od osi

$$r = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \rho . \quad (D3)$$



Rys. D2. Współrzędne i przemieszczenia w układzie sferycznym (R, φ, ϑ) i biegunowym (ρ, ϑ) .

Kąt ϑ odmierza się wokół osi symetrii.

Związki geometryczne:

$$\varepsilon_\rho = \frac{d u_\rho}{d \rho} = \frac{1}{R} \frac{d u_\rho}{d \varphi}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_\rho}{\rho} = \frac{u_\rho}{R \varphi}, \quad (D4)$$

gdzie: ε_ρ – odkształcenie promieniowe w układzie pomocniczym (wzdłuż ρ),

ε_ϑ – odkształcenie obwodowe.

Związki fizyczne:

$$\sigma_\rho = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_\rho^{(\sigma)} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_\vartheta^{(\sigma)}, \quad (D5a)$$

$$\sigma_g = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_g^{(\sigma)} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_\rho^{(\sigma)}. \quad (\text{D5b})$$

Splaszczanie sfery na promieniu r_b jest równoznaczne z wprowadzeniem odkształcenia wstępnego

$$\varepsilon_{\rho 0} = -\nu \varepsilon_{g 0} = -\nu \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right), \quad (\text{D6a})$$

$$\varepsilon_{g 0} = \frac{R \sin \varphi - R \varphi}{R \sin \varphi} = 1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (\text{D6b})$$

Otrzymane odkształcenia można interpretować jak skutek dystorsji. Odkształcenia, które stają się źródłem naprężeń są wówczas różnicą odkształceń geometrycznych (D4) i wstępnych (D6):

$$\varepsilon_\rho^{(\sigma)} = \varepsilon_\rho - \varepsilon_{\rho 0} = \frac{1}{R} \frac{d u_\rho}{d \varphi} + \nu \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) \quad (\text{D7a})$$

$$\varepsilon_g^{(\sigma)} = \varepsilon_g - \varepsilon_{g 0} = \frac{u_\rho}{R \varphi} - \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right). \quad (\text{D7b})$$

Równanie równowagi elementu objętościowego w konstrukcji osiowosymetrycznej:

$$\frac{1}{R} \frac{d \sigma_\rho}{d \varphi} = \frac{\sigma_g - \sigma_\rho}{R \varphi},$$

czyli

$$\frac{d \sigma_\rho}{d \varphi} = \frac{\sigma_g - \sigma_\rho}{\varphi}. \quad (\text{D8})$$

Po podstawieniu (D7) do (D5), a tego z kolei do (D8), otrzymujemy:

$$\frac{d^2 u_\rho}{d \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{d u_\rho}{d \varphi} - \frac{1}{\varphi^2} u_\rho = R(1-\nu^2) \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\varphi} \right). \quad (\text{D9})$$

Równanie Eulera (D9), typowe dla zadań osiowosymetrycznych, okazuje się względnie proste. Ta prostota jest konsekwencją wprowadzenia układu biegunowego przyjętego dla strefy splaszczania.

Rozwiązanie równania Eulera

Całka równania jednorodnego:

$$u_{\rho}^{(0)} = R C_1^{(0)} \varphi + \frac{C_2^{(0)}}{\varphi},$$

$R C_1^{(0)}$ zamiast $C_1^{(0)}$, to zabieg, który uprości dalsze obliczenia (R jest stałą).

Przy φ zdążającym do zera przemieszczenie tylko wtedy ma skończoną wartość, gdy $C_2^{(0)} = 0$, zatem w tarczy jednorodnej (bez centralnego otworu)

$$u_{\rho}^{(0)} = R C_1^{(0)} \varphi. \quad (\text{D10})$$

Całka równania niejednorodnego (z Prawą stroną różną od zera):

$$u_{\rho}^{(p)} = C_1(\varphi) \varphi + \frac{C_2(\varphi)}{\varphi}. \quad (\text{D11})$$

(Także tutaj $C_2(\varphi)$ musi zdążać do zera, gdy φ zdąża do zera.)

Funkcje $C_1(\varphi)$ i $C_2(\varphi)$ należy wyznaczyć z układu równań (metoda uzmienniania stałych całkowania):

$$C_1' \varphi + C_2' \frac{1}{\varphi} = 0,$$

$$C_1' \cdot 1 - C_2' \frac{1}{\varphi^2} = R(1 - \nu^2) \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\varphi} \right).$$

Prim oznacza pochodną po φ . Stąd

$$C_1' = \frac{1}{2} R(1 - \nu^2) \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\varphi} \right),$$

$$C_2' = -\frac{1}{2} R(1 - \nu^2) \varphi^2 \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\varphi} \right).$$

Po scałkowaniu:

$$C_1 = \frac{1}{2} R(1 - \nu^2) \int \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{1}{\varphi} \right) d\varphi, \quad (\text{D12a})$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}R(1-\nu^2) \int \frac{\varphi^2}{\sin \varphi} d\varphi + \frac{1}{2}R(1-\nu^2) \int \varphi d\varphi. \quad (\text{D12b})$$

Z tablicy całek:

$$\int \frac{1}{\sin \varphi} d\varphi = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right|,$$

$$\int \frac{\varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7 \varphi^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31 \varphi^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127 \varphi^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots = \Sigma, \quad (\text{D13})$$

zatem

$$C_1 = \frac{1}{2}R(1-\nu^2) \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| - \ln |\varphi| \right), \quad (\text{D14})$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}R(1-\nu^2) F + \frac{\varphi^2}{4}R(1-\nu^2) = \frac{1}{2}R(1-\nu^2) \left(\frac{\varphi^2}{2} - F \right),$$

gdzie

$$F = \int \frac{\varphi^2}{\sin \varphi} d\varphi = \varphi \Sigma - \int \Sigma d\varphi \quad (\text{całkowanie przez części}).$$

Po podstawieniu (D13)

$$F = \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{3 \cdot 3!} + \frac{7 \varphi^6}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31 \varphi^8}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127 \varphi^{10}}{3 \cdot 5 \cdot 9!}$$

$$- \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{4 \cdot 3 \cdot 3!} - \frac{7 \varphi^6}{6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5!} - \frac{31 \varphi^8}{8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7!} - \frac{127 \varphi^{10}}{10 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \varphi^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{\varphi^4}{3 \cdot 3!} + \left(1 - \frac{1}{6}\right) \frac{7 \varphi^6}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \left(1 - \frac{1}{8}\right) \frac{31 \varphi^8}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \left(1 - \frac{1}{10}\right) \frac{127 \varphi^{10}}{3 \cdot 5 \cdot 9!}$$

$$F = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4 \cdot 3!} + \frac{7 \varphi^6}{6 \cdot 3 \cdot 5!} + \frac{31 \varphi^8}{8 \cdot 3 \cdot 7!} + \frac{9 \cdot 127 \varphi^{10}}{10 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots$$

Funkcja $C_2(\varphi)$ przyjmuje ostatecznie postać

$$C_2 = -\frac{1}{2} R(1-\nu^2) \left(\frac{\varphi^4}{4 \cdot 3!} + \frac{7 \varphi^6}{6 \cdot 3 \cdot 5!} + \frac{31 \varphi^8}{8 \cdot 3 \cdot 7!} + \frac{9 \cdot 127 \varphi^{10}}{10 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots \right), \quad (D15)$$

a pole przemieszczeń (D11)

$$u_\rho^{(P)} = \varphi R(1-\nu^2) \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| - 0,020833 \varphi^2 - 0,001620 \varphi^4 - 0,000128 \varphi^6 - 0,000010 \varphi^8 - \dots \right).$$

Całka ogólna równania (D9)

$$u_\rho = u_\rho^{(0)} + u_\rho^{(P)},$$

zatem

$$u_\rho = \varphi R C_1^{(0)} + \varphi R(1-\nu^2) \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| - 0,020833 \varphi^2 - 0,001620 \varphi^4 - 0,000128 \varphi^6 - \dots \right) \quad (D16)$$

Uzyskane pole przemieszczeń jest rozwiązaniem dla spłaszczonego odcinka powłoki kulistej. Ze względu na brak momentu gnącego (rozwiązanie obejmuje tylko stan błonowy) tarcza obciążona jest jedynie samorównoważącymi się siłami wewnętrznymi (obszar spłaszczenia jest wyizolowany z pozostałej części sfery).

Obciążenie tarczy kołowej stałym naprężeniem promieniowym $\sigma_\rho^{(a)}$ na brzegu przedziału a wywołuje w niej jednorodny stan naprężenia

$$\sigma_\rho = \sigma_g = \sigma_\rho^{(a)}.$$

Także odkształcenie w płaszczyźnie tarczy nie zależy wówczas od kierunku i wynosi

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_g = \frac{1-\nu}{E} \sigma_\rho^{(a)}.$$

Naprężenia własne, które pojawiły się po spłaszczeniu, superponują się z powyższym stanem jednorodnym (w rozwiązaniu liniowym).

W rozwiązaniu osiowosymetrycznym przemieszczenie promieniowe (prostopadłe do osi symetrii), zgodnie z (D4),

$$u_\rho = \varepsilon_g R\varphi = \varphi R \frac{1-\nu}{E} \sigma_\rho^{(a)}.$$

Pole przemieszczeń w strefie aplanacji również jest superpozycją tych dwu stanów:

$$u_\rho = \varphi R \left(C_1^{(0)} + \frac{1-\nu}{E} \sigma_\rho^{(a)} \right) + \varphi R (1-\nu^2) \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| - 0,020833 \varphi^2 - 0,001620 \varphi^4 \dots \right). \quad (\text{D17})$$

Powrót do układu podstawowego

Pole przemieszczeń (D17) opisane zostało w układzie pomocniczym $\rho = R\varphi$, traktowanym w tym obszarze obliczeń jak układ początkowy. Jednak rzeczywista konfiguracja początkowa konstrukcji jest sferyczna, a użyta transformacja współrzędnych (D1) deformuje przestrzeń (bez konsekwencji siłowych) w taki sposób, że punkt leżący w warstwie środkowej powłoki przesuwa się z $R\sin\varphi$ na odległość $R\varphi$, przemieszczenie u_r zyskuje więc, zgodnie z (D2), dodatkowy składnik $R(\varphi - \sin\varphi)$

$$u_r = \varphi R \left(C_1^{(0)} + \frac{1-\nu}{E} \sigma_\rho^{(a)} \right) + \varphi R (1-\nu^2) \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| - 0,020833 \varphi^2 - 0,001620 \varphi^4 \dots \right) + R(\varphi - \sin\varphi).$$

Ostatecznie

$$u_r = \varphi R \left(1 + C_1^{(0)} + \frac{1-\nu}{E} \sigma_\rho^{(a)} - \frac{\sin\varphi}{\varphi} + (1-\nu^2) S(\varphi) \right), \quad (\text{D17a})$$

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| - 0,020833 \varphi^2 - 0,001620 \varphi^4 \dots \quad (\text{D17b})$$

Stała całkowania

Z równań (D5) i (D7)

$$\sigma_\rho = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R} \frac{du_\rho}{d\varphi} + \nu \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) \right) + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \left(\frac{u_\rho}{R\varphi} - \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) \right), \quad (D18)$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u_\rho}{R\varphi} - \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) \right) + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R} \frac{du_\rho}{d\varphi} + \nu \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) \right), \quad (D19)$$

gdzie, obliczone z (D17), należy podstawić

$$\frac{u_\rho}{R\varphi} = C_1^{(0)} + \frac{1-\nu}{E} \sigma_\rho^{(a)} + (1-\nu^2) \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| - 0,020833\varphi^2 - 0,001620\varphi^4 \dots \right), \quad (D20)$$

$$\frac{1}{R} \frac{du_\rho}{d\varphi} = C_1^{(0)} + \frac{1-\nu}{E} \sigma_\rho^{(a)} + (1-\nu^2) \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| + \frac{\varphi}{2 \sin \varphi} - \frac{1}{2} - 3 \cdot 0,020833\varphi^2 - 5 \cdot 0,001620\varphi^4 \dots \right). \quad (D21)$$

Przekształcone wyrażenie (D18)

$$\sigma_\rho = \frac{E}{(1-\nu^2)R} \left(\frac{du_\rho}{d\varphi} + \nu \frac{u_\rho}{\varphi} \right)$$

po podstawieniach (D20) i (D21) przyjmuje postać

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^{(a)} + \frac{E}{1-\nu} C_1^{(0)} + E \left(\frac{1+\nu}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \right| + \frac{\varphi}{2 \sin \varphi} - \frac{1}{2} - 0,020833(3+\nu)\varphi^2 - 0,001620(5+\nu)\varphi^4 \dots \right) \quad (D22)$$

W płaskiej powłoce kołowej, obciążonej jedynie polem naprężeń wstępnych – zdeformowanej jak na rysunku D2 – naprężenie promieniowe $\sigma_\rho^{(a)}$ na brzegu jest równe zeru. Wówczas z równania (D22),

$$C_1^{(0)} = -(1-\nu) \left(\frac{1+\nu}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}{\varphi_0} \right| + \frac{\varphi_0}{2 \sin \varphi_0} - \frac{1}{2} - 0,020833(3+\nu)\varphi_0^2 - 0,001620(5+\nu)\varphi_0^4 \dots \right)$$

Jeżeli

$$R = 7,8 \text{ mm},$$

$$r_b = 1,53 \text{ mm}, \text{ co oznacza}$$

$$\varphi_0 = 0,196323, \text{ a parametry materiałowe przyjmują wartości}$$

$$\nu = 0,49,$$

$$E = 0,3 \text{ MPa},$$

to stała całkowania $C_1^{(0)} = 0,26193^1$.

Przemieszczenie promieniowe (D17a) na brzegu tarczy (w przedziale a) wynosi wówczas

$$u_r^{(a)} = 0,00856 \text{ mm}. \quad (\text{D23})$$

Przedział b – powłoka kulista otwarta

W powłoce osiowosymetrycznej (co do geometrii i warunków brzegowych) równania równowagi elementu powłoki w stanie błonowym przyjmują postać:

$$\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_g}{r_g} = Z, \quad (\text{D24})$$

$$N_g = -r_g \left(Z + \frac{N_\varphi}{r_\varphi} \right). \quad (\text{D25})$$

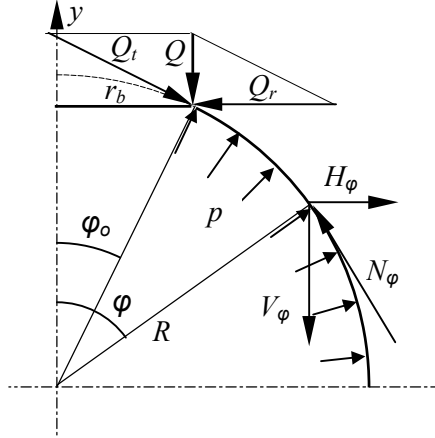
gdzie: N_φ – napięcie na przekroju równoleżnikowym (skierowanym wzdłuż południka),

N_g – napięcie na przekroju południkowym, obydwie mierzone są w N/m.

Ze względu na symetrię osiową konstrukcji i obciążenia, rozważane tu funkcje nie zależą od kąta obrotu \mathcal{G} wokół osi symetrii y . Obciążenie Z działa prostopadle

¹ Ponieważ operujemy tu na rozwiązaniach zamkniętych, dane liczbowe należy rozumieć jako wielkości matematyczne, zatem $R = 7,8 \text{ mm}$ oznacza dokładnie tę liczbę, a nie $7,8 \pm 0,1 \text{ mm}$. Dokładność, z jaką zapisana jest stała $C_1^{(0)}$, a także przemieszczenie (D23), dostosowane są do dokładności wymaganej w dalszych obliczeniach.

do powierzchni powłoki i mierzone jest w N/m^2 . Promienie r_φ i r_g są promieniami krzywizny w przekrojach prostopadłych do powłoki, zgodnych z kierunkami odpowiadających im sił N_φ i N_g . W powłoce sferycznej obydwie promienie są równe R .



Rys. D3. Schemat obciążenia powłoki

Siła wewnętrzna w punkcie o współrzędnej φ pochodzi od ciśnienia p i od siły wywieranej z zewnątrz na strefę spłaszczenia Q (w [N]). Pionowa siła wypadkowa w tym punkcie

$$V_\varphi = -\pi p (R^2 \sin^2 \varphi - r_b^2) + Q$$

wywołuje w powłoce napięcie

$$N_\varphi = -\frac{V_\varphi}{2\pi(R \sin \varphi) \sin \varphi},$$

$$N_\varphi = -\frac{-p(R^2 \sin^2 \varphi - r_b^2) + 2q}{2R \sin^2 \varphi}. \quad (\text{D26})$$

Obciążenie

$$q = \frac{Q}{2\pi} \quad (\text{D27})$$

jest siłą przypadającą na jednostkę kąta \mathcal{G} (wyraża się ona w N/rad). Siła prostopadła do powłoki pochodzi jedynie od ciśnienia:

$$Z = -p. \quad (D28)$$

Po podstawieniu (D27) i (D28) do (D25) otrzymujemy ostatnią z trzech sił występujących w równaniach równowagi (D24) i (D25):

$$N_{\mathcal{G}} = R p + \frac{1}{2R \sin^2 \varphi} \left(-p \left(R^2 \sin^2 \varphi - r_b^2 \right) + 2q \right). \quad (D29)$$

Naprężenia:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{t} = \frac{p \left(R^2 \sin^2 \varphi - r_b^2 \right) - 2q}{2R t \sin^2 \varphi}, \quad (D30)$$

$$\sigma_{\mathcal{G}} = \frac{N_{\mathcal{G}}}{t} = \frac{R p}{t} + \frac{1}{2R t \sin^2 \varphi} \left(-p \left(R^2 \sin^2 \varphi - r_b^2 \right) + 2q \right). \quad (D31)$$

Odształcenia:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{\varphi} - \nu \sigma_{\mathcal{G}} \right),$$

$$\varepsilon_{\mathcal{G}} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{\mathcal{G}} - \nu \sigma_{\varphi} \right).$$

Po podstawieniu (D30) i (D31)

$$\varepsilon_{\varphi} = -(1 + \nu) \frac{\left(R^2 \sin^2 \varphi - r_b^2 \right) p + 2q}{2ER t \sin^2 \varphi} - \frac{\nu R p}{Et}, \quad (D32)$$

$$\varepsilon_{\mathcal{G}} = \frac{R p}{Et} + \frac{1 - \nu}{2ER t \sin^2 \varphi} \left(-p \left(R^2 \sin^2 \varphi - r_b^2 \right) + 2q \right). \quad (D33)$$

Przemieszczenie u_y jest sumą rzutów na oś symetrii przyrostów elementarnych przemieszczenia, tak więc

$$u_y = \int_{\varphi}^{\pi/2} \varepsilon_{\varphi} R \sin \varphi \, d\varphi.$$

Po podstawieniu odkształcenia (D32) i scałkowaniu przemieszczenie

$$u_y = \frac{P}{2Et} \left((1-\nu)R^2 \cos \varphi + (1+\nu)r_b^2 \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{q(1+\nu)}{Et} \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (\text{D34})$$

Przemieszczenie u_r prostopadłe do osi symetrii zależy od odkształcenia

$$\varepsilon_g = \frac{u_r}{R \sin \varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_g - \nu \sigma_\varphi),$$

stąd przemieszczenie promieniowe

$$u_r = \frac{R \sin \varphi}{E} \sigma_g - \frac{\nu}{E} R \sin \varphi \sigma_\varphi.$$

Przez podstawienie (D30) i (D31) i po przekształceniach

$$u_r = \frac{P}{2Et} \left((1-\nu)R^2 \sin \varphi + (1+\nu)r_b^2 \frac{1}{\sin \varphi} \right) + \frac{q(1+\nu)}{Et} \frac{1}{\sin \varphi}. \quad (\text{D35})$$

Warunki brzegowe – połączenie przedziałów a i b

Warunek ciągłości przemieszczenia u_r na granicy przedziałów

Przemieszczenie promieniowe brzegu strefy aplanacji (przedziału a), zgodnie z (D17a),

$$u_r^{(a)} = \varphi_0 R \left(1 + C_1^{(0)} + \frac{1-\nu}{Et} N_\rho^{(a)} - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} + (1-\nu^2) S(\varphi_0) \right).$$

Suma $S(\varphi)$ zdefiniowana została wyrażeniem (D17b), a występujące w (D17a) naprężenie zastąpiono napięciem, jak w (D30) i (D31).

Przemieszczenie promieniowe (D35) brzegu przedziału b

$$u_r^{(b)} = p \frac{R^2 \sin \varphi_0}{Et} + q \frac{(1+\nu)}{Et \sin \varphi_0}. \quad (\text{D36})$$

Te dwa przemieszczenia muszą być sobie równe w powłoce ciągłej, zatem

$$\varphi_0 R \left(1 + C_1^{(0)} + \frac{1-\nu}{Et} N_\rho^{(a)} - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} + (1-\nu^2) S(\varphi_0) \right) = p \frac{R^2 \sin \varphi_0}{Et} + q \frac{(1+\nu)}{Et \sin \varphi_0}. \quad (D37)$$

Warunek równowagi

W przedziale b napięcie N_φ z równania (D30), dla $\varphi = \varphi_0$,

$$N_\varphi^{(b)} = -\frac{q}{R \sin^2 \varphi_0}.$$

Dodatnie obciążenie *zewnątrzne* q (działające w dół na rys. D3) wywołuje ujemne napięcie w przedziale b i przemieszczenie brzegu zwrócone *od osi*.

Napięcie na brzegu przedziału a równe jest rzutowi $N_\rho^{(b)}$ na kierunek r (prostokątny do osi symetrii)

$$N_\rho^{(a)} = -\frac{q \cos \varphi_0}{R \sin^2 \varphi_0}. \quad (D38)$$

Obciążenie q

Po podstawieniu (D38) do (D37) zostaje wyrugowane napięcie $N_\rho^{(a)}$, a po przekształceniach

$$q = \frac{Et \varphi_0 R \sin^2 \varphi_0 \left(1 + C_1^{(0)} + (1-\nu^2) S(\varphi_0) - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right)}{(1+\nu) \sin \varphi_0 + (1-\nu) \varphi_0 \cos \varphi_0} + p \frac{-R^2 \sin^3 \varphi_0}{(1+\nu) \sin \varphi_0 + (1-\nu) \varphi_0 \cos \varphi_0}.$$

Obciążenie q składa się z części stałej q_0 i części q_p , zależnej od ciśnienia:

$$q = q_0 + q_p, \quad (D39)$$

$$q_0 = \frac{Et \varphi_0 R \sin^2 \varphi_0 \left(1 + C_1^{(0)} + (1-\nu^2) S(\varphi_0) - \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right)}{(1+\nu) \sin \varphi_0 + (1-\nu) \varphi_0 \cos \varphi_0}, \quad (D40)$$

$$q_p = p \frac{-R^2 \sin^3 \varphi_0}{(1+\nu)\sin \varphi_0 + (1-\nu)\varphi_0 \cos \varphi_0}. \quad (\text{D41})$$

Składnik q_0 obciążenia zewnętrznego pojawia się dopiero po „podłączeniu” strefy aplanacji.

Siła jednostkowa q przyłożona jest do granicy między przedziałami, ale kinematyczne wymuszenie aplanacji sztywnym stemplem pozwala rozłożyć ją równomiernie na powierzchni spłaszczonej i traktować jak średnie ciśnienie p_{Gq} . Po uwzględnieniu równania (D27)

$$p_{Gq} = \frac{Q}{\pi r_b^2} = \frac{2\pi q}{\pi(R \sin \varphi_0)^2}.$$

Po uproszczeniu

$$p_{Gq} = \frac{2q}{R^2 \sin^2 \varphi_0}, \quad (\text{D42})$$

gdzie r_b – promień strefy aplanacji – rys D3.

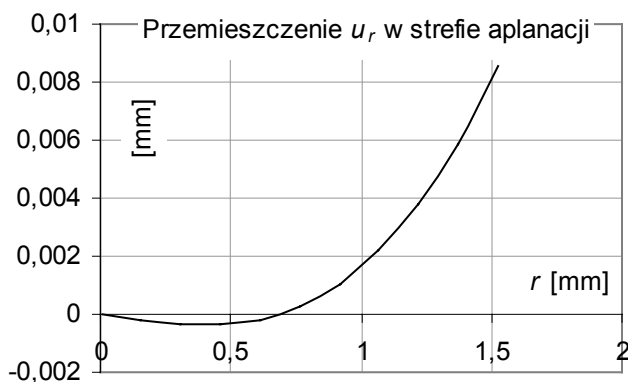
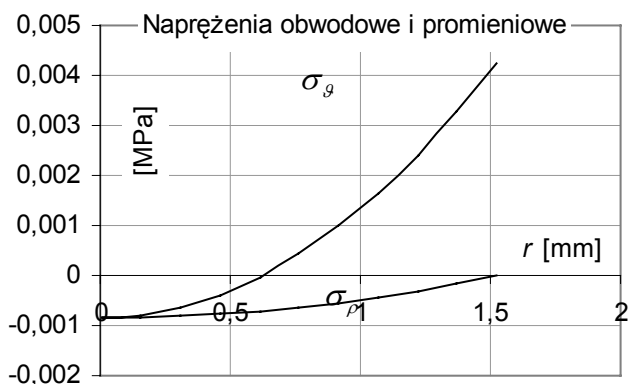
Ciśnienie p_{Gq} pozornie tylko jest ciśnieniem zewnętrznym, faktycznie pochodzi od napięcia (a więc siły wewnętrznej) powodowanego rozciąganiem strefy aplanacji.

Dyskusja rozwiązania

Strefa spłaszczenia

Pole przemieszczeń promieniowych w spłaszczonym odcinku powłoki sferycznej, oderwanym od pozostałej jej części (kulistej), opisane zostało wyrażeniem (D17a). Wartość tego przemieszczenia na brzegu przedziału a , $u_r^{(a)} = 0,00856$ mm, obliczona według wzoru (D23), oznacza nieznaczny wzrost średnicy strefy aplanacji po spłaszczeniu.

Strefa ta dzieli się na dwa obszary: zewnętrzny, w którym przemieszczenie jest dodatnie (zwrócone od osi symetrii) i wewnętrzny, o przeciwnym zwrocie przemieszczenia, rys. D4. Podobny jest rozkład naprężenia σ_ϑ (D5b) (to naprężenie nie zostało wprowadzone, ponieważ nie miało znaczenia dla rozwiązania powłoki, można je obliczyć, podstawiając (D17a) do (D7a) i (D7b), a te z kolei do (D5b)). Wykresy funkcji naprężenia obwodowego σ_ϑ i promieniowego σ_ρ (D5a) i (D22) pokazane są na rys. D5.

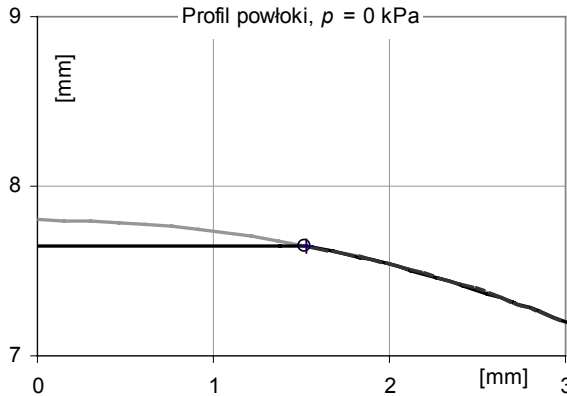
Rys. D4. Pole przemieszczenia u_r w strefie aplanacji, opisane wzorem (D17a)

Rys. D5. Naprężenia obwodowe i promieniowe w strefie aplanacji

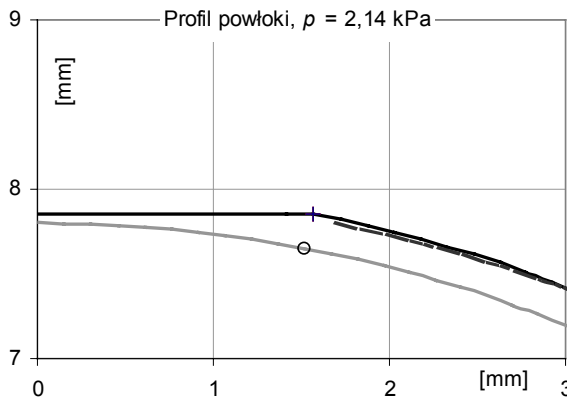
Część kulista powłoki

Przemieszczenie promieniowe brzegu powłoki pozbawionej spłaszczonej części centralnej opisano wyrażeniem (D36). Gdy ciśnienie $p = 0$, wówczas obciążenie krawędzi siłą q powoduje powiększenie otworu (siła q działająca w dół oddala brzeg powłoki od osi – rys. D3). Do tego samego skutku prowadzi siła, z jaką strefa centralna po zwiększeniu jej średnicy (po jej spłaszczeniu) rozpięra brzeg otworu. Można przyjąć, że napięcie w płaskiej części powłoki, przekazywane na część kulistą (siła promieniowa), przekłada się jednoznacznie na równoważny nacisk zewnętrzny q skierowany na powłokę wzdłuż osi. Stąd właśnie bierze się stały składnik q_0 (D40) siły q . W razie braku ciśnienia p jego wpływ jest niewielki.

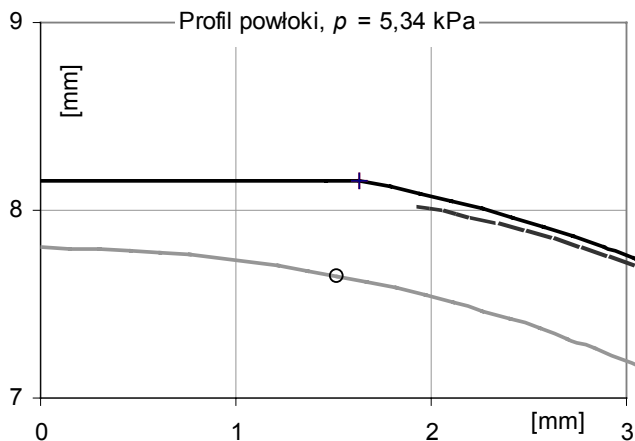
Po zwiększeniu ciśnienia wewnętrzne przemieszczenie granicy przedziałów wywołuje napięcie w krążku centralnym, a to oznacza dodatkową siłę q_p (D41), niezbędną do zachowania równowagi. Wywołane tym pola przemieszczeń, opisane funkcjami (D17a), (D34) i (D35), ilustrują następujące rysunki. Dodatkowo, linią przerywaną, wykreślono na nich deformację powłoki z otworem środkowym (po usunięciu strefy aplanaacji) – obciążenie $q = 0$ we wzorach (D34) i (D35). Zauważmy, że wówczas obciążenie powłoki ciśnieniem p skutkuje przemieszczeniem krawędzi otworu *do wnętrza* powłoki.



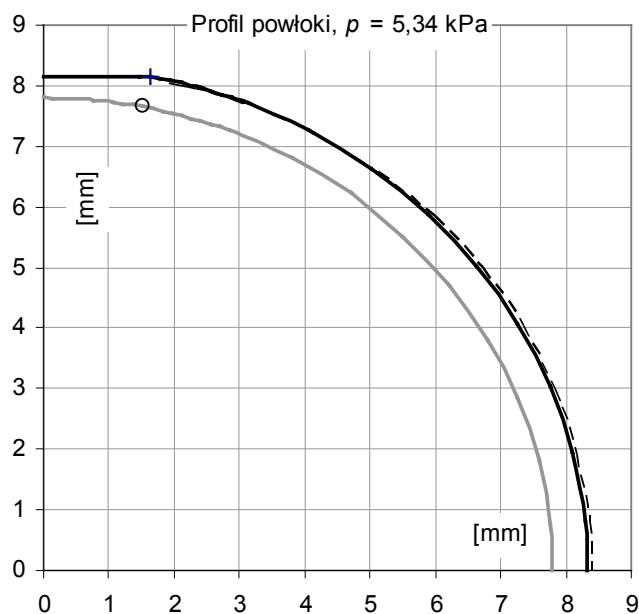
Rys. D6. Powłoka spłaszczona, nieobciążona ciśnieniem wewnętrznym. Szarą linią wykreślona jest konfiguracja powłoki przed spłaszczeniem



Rys. D7. Konfiguracja powłoki spłaszczonej pod ciśnieniem wewnętrznym 16 mmHg. Linia przerywana obrazuje deformację powłoki pozbawionej strefy aplanaacji. Szarą linią wykreślona jest konfiguracja powłoki nieobciążonej – taka sama jak na rysunku poprzednim i następnym

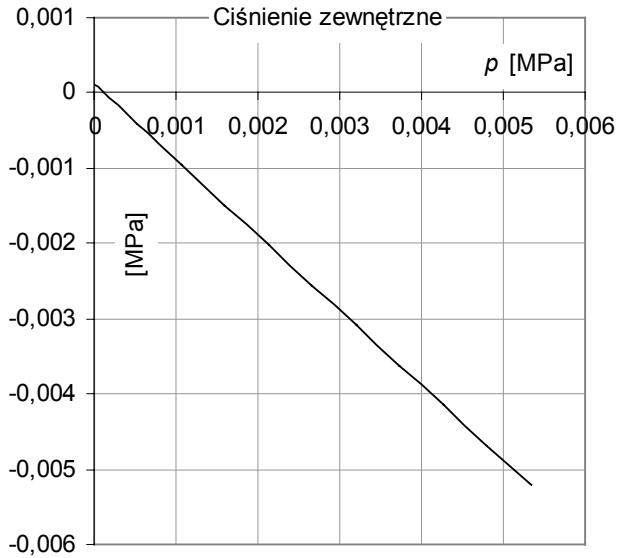


Rys. D8. Powłoka po spłaszczeniu pod ciśnieniem 2,5 razy większym od nominalnego (40 mmHg). Linia przerywana ukazuje konfigurację powłoki z otworem o średnicy 3,06 mm (jego brzeg oznaczony jest kółkiem), zdeformowaną tym ciśnieniem



Rys. D9. Ta sama powłoka widziana w całości

W stanie błonowym nacisk zewnętrzny, wymagany do utrzymania powłoki w konfiguracji spłaszczonej, liczymy według (D42). Po podstawieniu obciążenia q (D39), otrzymuje się zależność wykreśloną na rys. D10.



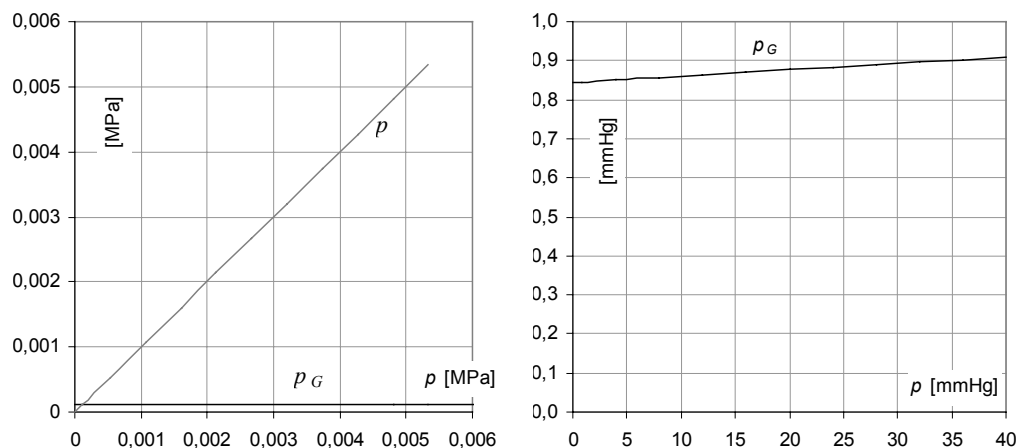
Rys. D10. Ciśnienie zewnętrzne p_{Gq} wymagane do zrównoważenia sił działających na strefę aplancji od ciśnienia wewnętrznego p i od napięcia w przedziale b

Pomijając niewielkie ciśnienie wstępne (po spłaszczeniu), ciśnienie p_{Gq} wymagane do zachowania równowagi powłoki skierowane jest na zewnątrz (do góry na rys. D3) i prawie równe sile wypadkowej ciśnienia p działającego na strefę aplancji od wewnątrz. Dodając te dwie siły otrzymuje się

$$p_G = \frac{2q}{R^2 \sin^2 \varphi_0} + p. \quad (\text{D43})$$

Wynika stąd niewielkie i prawie stałe ciśnienie p_G . Nie przekracza ono 1 mmHg, jak widać na rys. D11.

Ciśnienie p_G utrzymuje tę prawie stałą wartość przy wysokim ciśnieniu p dlatego, że stały jest kąt pomiędzy obiema częściami powłoki na granicy przedziałów (równy kątowi φ_0). W taki sposób deformuje się idealna błona – sama sobie dostarcza siły (D42) równoważącej ciśnienie p , działające od wewnątrz na strefę aplancji. Natomiast z rozwiązań numerycznych rogówki wynika (podrozdz. 7.1 i 8.1 oraz zamieszczone tam rysunki, np. 7.5 lub 8.4), że w realnej powłoce kąt załamania na granicy przedziałów jest równy zero. Ta różnica zmienia *jakościowo* warunek równowagi spłaszczonej części powłoki, ponieważ siła napięcia *błony*, działająca na granicy przedziałów, zostaje w *powłoce* uzupełniona siłą tnącą, a to oznacza konieczność pojawienia się dodatkowej siły zewnętrznej dla jej zrównoważenia. Właśnie wtedy ciśnienie p_G staje się mniejsze od ciśnienia p .



Rys. D11. Wykres po lewej stronie ilustruje funkcję (D37) w jednostkach użytych na poprzednich rysunkach. Po prawej ta sama funkcja w układzie współrzędnych przyjętym w tonometrii

Wnioski

Omówione w *Dodatku* rozwiązania ujawniają zasadniczy mankament błony, jako modelu deformacji rogówki w strefie spłaszczenia. Model błonowy z samej swojej natury nie nadaje się do badania przyczyn nierówności $p_G < p$, bo żadnym sposobem nie można w nim wywołać tego zjawiska, jak pokazują uzyskane rozwiązania. Za to idealnie nadaje się do „potwierdzania” równości $p_G = p$ (p zmienne), ponieważ do niczego innego nie jest zdolny. Dlatego uzasadnianie prawa Imberta–Ficka rozwiązaniami dla błony niczego w tonometrii nie objaśnia, bo to, że błona zachowuje się jak błona jest dość oczywiste. Rogówka nie znajduje się jednak w stanie błonowym, o czym świadczy stosunkowo duża różnica między ciśnieniami p i p_G , a wobec tego prawo Imberta–Ficka – jako słuszne jedynie dla błony – w ogóle nie ma zastosowania w tonometrii.

Literatura

1. *Adler's Physiology of the Eye*, Tenth Edition, Elsevier, Mosby Published, 2002, Editor: Paul Kaufman, Albert Alm (F.H. *Adler, Physiology of the Eye*, Mosby, St. Louis, 1965).
2. Alastrué V., Calvo B., Peña E., Doblare M., *Biomechanical modeling of refractive corneal surgery*. Journal of Biomechanical Engineering–Transactions of the ASME, 2006, 128(1), 150–160.
3. van Alphen G.W.H.M., Graebel W.P., *Elasticity of tissues involved in accommodation*. Vision Research, 1991, 31, 1417–1438.
4. Anderson K., El-Sheikh A., Newson, T., *Application of structural analysis to the mechanical behavior of the cornea*. Journal of Royal Society Interface, 2004, 1(1), 3–15.
5. Andreassen T.T., Simonsen A.J., Oxlund, H., *Biomechanical properties of keratoconus and normal corneas*. Experimental Eye Research, 1980, 31, 435–441.
6. Asejczyk-Widlicka M., Śródka W., Kasprzak H., *The modelling of effect of refractive surgery on the physically linear model of human eyeball. Influence of IOP on the geometrical and biomechanical properties of the model of the eye globe*. An International Conference on Astigmatism, Aberrations and Vision. Mopane 2003. [Ed. by] Alan Rubin. Mopani Camp, South Africa, August 1–6, 2003. Auckland Park: Optometric Science Research Group Department of Optometry Rand Afrikaans University 2003, 221–224.
7. Asejczyk-Widlicka M., Śródka W., Kasprzak H., Iskander D.R., *Influence of intraocular pressure on geometrical properties of a linear model of the eyeball: Effect of optical self-adjustment*. Optik – International Journal for Light and Electron Optics, 2004, 115(11), 517–524.
8. Asejczyk-Widlicka M., Śródka W., Kasprzak H., Pierscionek B.K., *Modeling the elastic properties of the anterior eye and their contribution to maintenance of image quality: the role of the limbus*. Eye, 2006, advance online publication, June 23; doi:10.1038/sj.eye.6702464.
9. Atchison D.A., Jones C.E., Schmid K.L., Pritchard N., Pope J.M., Strugnell W.E., Riley R.A., *Eye shape in emmetropia and myopia*. Investigative Ophthalmology & Visual Science, 2004, 45(10), 3380–3386.
10. Beers A.P.A., van der Heijde G.L., *In vivo determination of the biomechanical properties of the component elements of the accommodation mechanism*. Vision Research., 1994, 34(21), 2897–2905.
11. Belaidi A., Pierscionek B.K., *Modelling internal stress distributions in the human lens: can opponent theories coexist?*, Journal of Vision, 2007, 7(11), 1–12
12. Benedek G.B., *Theory of the transparency of the eye*. Applied Optics, 1971, 10, 459–473.
13. Bettelheim F.A., *Physical basis of lens transparency*. The Ocular Lens (ed. by H. Maisel), 265–300, New York, Marcel Dekker Inc., 1985.
14. Bier N., Lowther G.E., *Contact lens correction*, London, Butterworths, 1977.
15. Boote C., Dennis S., Newton R.H., Puri H., Meek K.M., *Collagen fibrils appear more closely packed in the prepupillary cornea: Optical and biomechanical implications*, Investigative Ophthalmology & Visual Science, 2003, 44, 2941–2948.

16. Borcharding M.S., Blacic L.J., Sittig R.A., Bizzell J.W., Breen M., Weinstein H.G., *Proteoglycans and collagen fiber organization in human corneoscleral tissue*. Experimental Eye Research, 1975, 21, 59–70.
17. Borja D., Manns F., Lamar P., Rosen A., Fernandez V., Parel, J.M., *Preparation and hydration control of corneal tissue strips for experimental use*. Cornea, 2004, 23, 61–66.
18. Bryant M.R., McDonnell P.J., *Constitutive laws for biomechanical modeling of refractive surgery*, Journal of Biomechanical Engineering, 1996, 118, 473–481.
19. Buzard K.A., *Introduction to biomechanics of the cornea*. Refractive and Corneal Surgery, 1992, 8, 127–138.
20. Cheng H-M, Singh O.S., Kwong K.K., Xiong J., Woods B.T., Brady T.J., *Shape of the myopic eye as seen with high-resolution magnetic resonance imaging*. Optometry and Vision Science 1992, 69, 698–701.
21. Clark J.L., *Fourier and power law analysis of structural complexity in cornea and lens*, Micron, 2001, 32(3), 239–249.
22. Coleman D.J., Trokel S., *Direct-recorded IOP variations in a human subject*. Archives of Ophthalmology, 1969, 82, 637–640.
23. Collins R., Van Der Werff T.J., *Mathematical models of the dynamics of the human eye*. Springer-Verlag, 1980. Part of the Lecture Notes in Biomathematics series, No. 34.
24. Damji K.F., Munger R., *Influence of central corneal thickness on applanation intraocular pressure*, Journal of Glaucoma, 2000, 9, 205–207.
25. Danielsen C.C., *Tensile mechanical and creep properties of Descemet's membrane and lens capsule*, Experimental Eye Research, 2004, 79, 343–350.
26. Daxer A., Fratzl P., *Collagen fibril orientation in the human corneal stroma and its implication in keratoconus*, Investigative Ophthalmology & Visual Science, 1997, 38, 121–129.
27. Deenadayalu C., Mobasher B., Rajan S.D., Hall G.W., *Refractive Change Induced by the LASIK Flap in a Biomechanical Finite Element Model*. Journal of Refractive Surgery, 2006, 22(2).
28. Doughty M.J., Zaman M.L., *Human corneal thickness and its impact on intraocular pressure measures: a review and meta-analytical approach*, Survey of Ophthalmology, 2000, 44, 367–408.
29. Doyle A., Lachkar Y., *Comparison of dynamic contour tonometry with goldman applanation tonometry over a wide range of central corneal thickness*, Journal of Glaucoma, 2005, 14(4), 288–292.
30. Ehlers N., Bramsen T., Sperling S., *Applanation tonometry and central corneal thickness*. Acta Ophthalmologica (Copenh), 1975, 53, 34–43.
31. Eklund A., *Resonator sensor technique for medical use—an intraocular pressure measurement system*. Umea, Umea University, 2002.
32. Elsheikh A., Alhasso D., Rama P., *Assessment of the epithelium's contribution to corneal biomechanics*. Experimental Eye Research, 2008a, 86, 445–561.
33. Elsheikh A., Anderson K., *Comparative study of corneal strip extensometry and inflation tests*. Journal of the Royal Society Interface, 2005, 2, 177–185.
34. Elsheikh A., Wang D., *Numerical modelling of corneal biomechanical behaviour*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 2007, 10(2), 85–95.
35. Elsheikh A., Wang D., Kotecha A., Brown M., Garway-Heath G., *Evaluation of Goldmann applanation tonometry using a nonlinear finite element ocular model*, Annals of Biomedical Engineering, 2006, 34(10), 1628–1640.
36. Elsheikh A., Wang D., Rama P., Campanelli M., Garway-Heath D., *Experimental assessment of human corneal hysteresis*, Current Eye Research, 2008b, 33, 205–213.
37. Ethier C.R., Johnson M., Ruberti J., *Ocular biomechanics and biotransport*. Annual Review of Biomedical Engineering, 2004, 6, 249–73.
38. Feltgen N., Leifert D., Funk J., *Correlation between central corneal thickness, applanation tonometry, and direct intracameral IOP readings*, British Journal of Ophthalmology, 2001, 85, 85–87.
39. Feuk T., *On the transparency of the stroma in the mammalian cornea*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1970, BME-17, 186–190.

40. Fick A., *Über Messung des Druckes im Auge*, Archiv. Fur Die Gesamte Physiologie Des Menschen und Der Thiere, 1888, 42, 86–90.
41. Fisher R.F., *Elastic constants of the human lens capsule*. Journal of Physiology, 1969a, 201, 1–19.
42. Fisher R.F., *The significance of the shape of the lens and capsular energy changes in accommodation*. Journal of Physiology, 1969b, 201, 21–47.
43. Fisher R.F., *The ciliary body in accommodation*. Transactions of the Ophthalmology Society U.K., 1986, 105, 208–219.
44. Francis B.A., Hsieh A., Lai M.Y., Chopra V., Pena F., Azen S., Varma R., *Effects of corneal thickness, corneal curvature, and intraocular pressure level on Goldmann applanation tonometry and dynamic contour tonometry*, Ophthalmology, 2007, 114(1), 20–26.
45. Franklin R.J., Morelande M.R., Iskander D.R.I., Collins M.J., Davis B.A., *Combining central and peripheral videokeratoscope maps to investigate total corneal topography*. Eye Contact Lens, 2006, 32, 27–32.
46. Freund D.E., McCally R.L., Farrell R.A., et al. *Ultrastructure in the anterior and posterior stroma of perfused human and rabbit corneas*. Investigative Ophthalmology & Visual Science, 1995, 36, 1508–1523.
47. Friedenwald J.S., *Contribution to the theory and practice of tonometry*. American Journal of Ophthalmology, 1937, 20, 985–1024.
48. Fung Y.C., *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. New York, Springer-Verlag, 1993.
49. Fung Y.C., *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Warszawa, PWN, 1969. (*Foundations of solid mechanics*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1965)
50. Garzozzi H.J., Chung H.S., Lang Y., Kagemann L., Harris A., *Intraocular Pressure and Photorefractive Keratectomy: A Comparison of Three Different Tonometers*. Cornea, 2001, 20(1), 33–36.
51. Ghista D.N., Kobayashi A.S., Davis N., Ray G., *Finite Element Analysis in Biomedicine*. 1st Int. Conf. on Variational Methods in Engineering (C.A. Brebbia and H. Tottenham, Eds.), Southampton University Press, 1972.
52. Gierek-Lapińska A., Kałużny J., *Chirurgia refrakcyjna rogówki*. Volumes, 1993.
53. Goldman J.N., Benedek G.B., Dohlman C.H., Kravitt A., *Structural alteration affecting transparency in swollen human corneas*, Investigative Ophthalmology, 1968, 7, 501–519.
54. Goldmann H., Schmidt T., *Über Applanations-tonometrie*. Ophthalmologica, 1957, 134, 221–242.
55. Goldmann H., Schmidt T., *Weiterer beitrage zur applanationstonometrie*. Ophthalmologica, 1961, 141, 441–456.
56. Gonzales G., Fitt A., *The mathematical modelling of human eyes – a PhD study*. Mathematics Today, February 2003, 20–25.
57. Graebel W.P., van Alphen G.W.H.M., *The elasticity of sclera and choroid of the human eye, and its implications on scleral rigidity and accommodation*. Journal of Biomechanical Engineering, 1977, 99, 203–208.
58. Guirao A., *Theoretical elastic response of the cornea to refractive surgery: risk factors for keratectasia*. Journal of Refractive Surgery, 2005, 21, 176–185.
59. Gunvant P., O’Leary D.J., Baskaran M., Broadway D.C., Watkins R.J., Vijaya L., *Evaluation of tonometric correction factors*. Journal of Glaucoma, 2005, 14(5), 337–343.
60. Hachoł A., Śródka W., *Model biomechaniczny gałki ocznej oparty na zjawisku samonastawności optycznej weryfikowany w tonometrycznym pomiarze IOP*. Pomiar Autom. Kontr., 2006, 5bis wyd. spec. dod., 55–60. Referat z VIII Sympozjum Modelowanie i Pomiar w Medycynie MPM 2006, Krynica, 14–18 maja 2006.
61. Hallberg P., Eklund A., Santala K., Koskela T., Lindahl O., Linden C., *Underestimation of intraocular pressure after photorefractive keratectomy: a biomechanical analysis*, Medical & Biological Engineering & Computing, 2006, 44, 609–618.
62. Hamilton K.E., Pye D.C., *Young’s Modulus in Normal Corneas and the Effect on Applanation Tonometry*. Optometry & Vision Science, 2008, 85(6), 445–450.

63. Hart R.W., Farrell R.A., *Light scattering in the cornea*. Journal of the Optical Society of America, 1969, 59, 766–774.
64. Hibbard R.R., Lyon C.S., Shepherd M.D., McBain E. H., McEwen W.K., *Immediate rigidity of an eye: whole, segments and strips*. Experimental Eye Research., 1970, 9, 137–143.
65. Hjortdal J.Ø., *Regional elastic performance of the human cornea*. Journal of Biomechanics, 1996, 29(7), 931–942.
66. Hjortdal J.Ø., *On the biomechanical properties of the cornea with particular reference to refractive surgery*. Acta Ophthalmol Scand Suppl, 1998, 225, 1–23.
67. Hjortdal J.Ø. Ehlers N., *Effect of excimer laser keratectomy on the mechanical performance of the human cornea*. Acta Ophthalmologica Scandinavica, 1995, 73, 18–24.
68. Hoeltzel D.A., Altman P., Buzard K., Choe K.-I., *Strip extensometry for comparison of the mechanical response of bovine, rabbit and human corneas*. Journal of Biomechanical Engineering, 1992, 14, 202–215.
69. Hogan M.J., Alvarado J.A., Weddell J., *Histology of the human eye*. W.B. Sanders Co., Philadelphia PA, 1971.
70. Iskander D.R., Kasprzak H.T., *Dynamics in longitudinal eye movements and corneal shape*. Ophthalmic and Physiological Optics, 2006, 26, 572–579.
71. Jakus M.A., *Studies on the cornea. II. The fine structure of Descemet's membrane*. Journal of Biophysical and Biochemical Cytology, 1956, 2, 243–252.
72. Jayasuriya A.C., Ghosh S., Scheinbeim J.I., Lubkin V., Bennett G., Kramer P., *A study of piezoelectric and mechanical anisotropies of the human cornea*. Biosensors and Bioelectronics, 2003, 18, 381–387.
73. Jester J.V., Venet T., Lee J., Schanzlin D.J., Smith R.E., *A statistical analysis of radial keratotomy in human cadaver eyes*. American Journal of Ophthalmology, 1981, 92(2), 172–177.
74. Jue B., Maurice D.M. *The mechanical properties of the rabbit and human cornea*, Journal of Biomechanics, 1986, 19(10), 847–853.
75. Kampmeter B.A., Jonas J.B., *Dynamic contour tonometry for intraocular pressure measurement*, American Journal of Ophthalmology, 2005, 140(2), 318–320.
76. Kaneko M., Tokuda K., Kawahara T., *Dynamic Sensing of Human Eye*. Proceedings of the 2005 IEEE, International Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain, April 2005.
77. Kanngiesser H.E., *Dynamic contour tonometry simulation on the human cornea using finite element methods. The theoretical foundations of dynamic contour tonometry (part II)*, ARVO 2004, Poster.
78. Kanngiesser H.E., Nee M., Kniestedt C., Inversini C., Stamper R.L., *Simulation of dynamic contour tonometry compared to in-vitro study revealing minimal influence of corneal radius and astigmatism. The theoretical foundations of dynamic contour tonometry*, ARVO 2003, Poster.
79. Kanngiesser H.E., Robert Y.C.A., *Dynamic contour tonometry – DCT: A new method for the direct and continuous measurement of intraocular pressure (IOP)*, ARVO 2002, Poster.
80. Kasprzak H., *A model of inhomogeneous expansion of the cornea and stability of its focus*. Ophthalmic and Physiological Optics, 1997, 17, 133–136.
81. Kasprzak H.T., Iskander D.R., *Spectral characteristics of longitudinal corneal apex velocities and their relation to the cardiopulmonary system*, Eye, 2007, 21, 1212–1219; doi:10.1038/sj.eye.6702578.
82. Kasprzak H., Jankowska-Kuchta E., *A new analytical approximation of corneal topography*. Journal of modern optics, 1996, 43, 1135–1148.
83. Kaufmann C., Bachmann L.M., Thiel M.A., *Comparison of dynamic contour tonometry with goldmann applanation tonometry*, Investigative Ophthalmology & Visual Science, 2004, 45(9), 3118–21.
84. Kempf R., Kurita Y., Iida Y., Kaneko M., Mishima H., Tsukamoto H., Sugimoto E., *Dynamic properties of human eyes*, Proceedings of the 2005 IEEE, Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference, Shanghai, China, September 1–4, 2005.
85. Kirstein E.M., Husler A. *Evaluation of the Orssengo-Pye IOP corrective algorithm in LASIK patients with thick corneas*. Optometry, 2005, 76(9), 536–43.
86. Klein S.A., Corzione J., Corbin J.A., Wechsler S., *Wide-angle cornea-sclera (ocular) topography*. Proc SPIE – International Society for Optical Engineering, 2002, 4611, 149–158.

87. Kniestedt C., Lin S., Choe J., Nee M., Bostrom A., Sturmer J., Stamper R.L., *Correlation between intraocular pressure, central corneal thickness, stage of glaucoma, and demographic patient data: prospective analysis of biophysical parameters in tertiary glaucoma practice populations*, Journal of Glaucoma, 2006, 15(2), 91–97.
88. Kohlhaas M., Boehm A.G., Spoerl E., Pürsten A., Grein H. J., Pillunat, L. *Effect of Central Corneal Thickness, Corneal Curvature, and Axial Length on Applanation Tonometry*, Archives of Ophthalmology, 2006, 124(4), 471–476.
89. Komai Y., Ushiki T., *The three-dimensional organization of collagen fibres in the human cornea and sclera*. Investigative Ophthalmology & Visual Science, 1991, 32, 2244–2258.
90. Le Grand Y., El Hage S.G., *Physiological Optics*. Springer Series in Optical Sciences, Vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
91. Levy Y., Zadok D., Glovinsky Y., Krakowski D., Nemet P., *Tono-Pen versus Goldmann tonometry after excimer laser photorefractive keratectomy*. Journal of Cataract and Refractive Surgery, 1999, 25(4), 486–491.
92. Liu J., Roberts C.J., *Influence of corneal biomechanical properties on intraocular pressure measurement*, Journal of Cataract and Refractive Surgery, 2005, 31, 146–155.
93. Lynn M.J., Waring G.O., Sperduto R.D., *PERK Study Group: Factors affecting outcome and predictability of radial keratotomy in the PERK Study*. Archives of Ophthalmology, 1987, 105, 42–51.
94. Maurice D.M., *The cornea and sclera*. In: Davson H., ed, The Eye. London, London Academic Press, 1984.
95. Maurice D.M., *Mechanics of the cornea*, The cornea: Transactions of the world congress on the cornea III, edited by H. Dwight Cavanagh. Raven Press. Ltd., NY 1988.
96. McBain E.H., *Tonometer Calibration II. Ocular Rigidity*. Archives of Ophthalmology, 1958, 60(6), 1080–1091.
97. McMonnies C.W., *Pulsating vision* [letter], Australian Journal of Optometry, 1970, 53, 257.
98. McMonnies C.W., Boneham G.C., *Experimentally increased intraocular pressure using digital forces*, Eye Contact Lens, 2007, 33, 124–129.
99. Meek K.M., Blamires T., Elliot G.F., Gyi T.J., Nave C., *The organization of collagen fibrils in the human corneal stroma: a synchrotron x-ray diffraction study*, Current Eye Research, 1987, 6, 841–846.
100. Meek K.M., Fullwood N.J., *Corneal and scleral collagens—a microscopist's perspective*, Micron, 2001, 32(3), 261–272.
101. Meek K.M., Newton R.H., *Organization of collagen fibrils in the corneal stroma in relation to mechanical properties and surgical practice*, Journal of Refractive Surgery, 1999, 15, 695–699.
102. Mejia-Barbosa Y., Malacara-Hernandez D., *A review of methods for measuring corneal topography*. Optometry and Vision Science, 2001, 78, 240–53.
103. Miller D., *Pressure of the lid on the eye*. Archives of Ophthalmology, 1967, 78, 328–330.
104. Min H.K., Choi Y.I., Ghim D.G., *Effect of Excimer Laser Photorefractive Keratectomy on Goldmann Applanation Tonometry*. Journal of Korean Ophthalmological Society, 1995, 2022–2028.
105. Munneryn C., Koons S.J., Mearshall J., *Photorefractive Keratectomy: A Technique for Laser Refractive Surgery*. Journal of Cataract & Refractive Surgery, 1988, 14, 46–52.
106. Nash L.S., Greene P.R., Foster C.S., *Comparison of mechanical properties of keratoconus and normal corneas*, Experimental Eye Research, 1982, 35, 413–423.
107. Nestorov A.P., Bunin A.Y., Kantselson L.A., *Ciśnienie wewnątrzgałkowe* [po rosyjsku], Nauka, 1974.
108. Nestorov A.P., Vurgaft M.B., *Tablice kalibracyjne do elastometru Filatowa-Kalfy* [po rosyjsku], Vestnik Oftalmologii, 1972, 2, 20–25.
109. Newton R.H., Meek K.M., *Circumcorneal annulus of collagen fibrils in the human limbus*, Investigative Ophthalmology & Visual Science, 1998a, 39, 1125–1134.
110. Newton R.H., Meek K.M., *The integration of the corneal and limbal fibrils in the human eye*, Biophysical Journal, 1998b, 75, 2508–2512.

111. Orłowski W.J. – redakcja, *Okulistyka współczesna*, T1, Warszawa, Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich, 1986.
112. Orsengo G.J., Pye D.C., *Determination of the true intraocular pressure and modulus of elasticity of the human cornea*, Bulletin of Mathematical Biology, 1999, 61(3), 551–572.
113. Pallikaris I.G., Kymionis G.D., Ginis H.S., Kounis G.A., Tsilimbaris M.K., *Ocular rigidity in living human eyes*. Investigative Ophthalmology and Visual Science, 2005, 46(2), 409–414.
114. Pache M., Wilmsmeyer S., Lautebach S., Funk J., *Dynamic contour tonometry versus Goldmann applanation tonometry: a comparative study*, Graefe's Archive for Clinical and Experimental Ophthalmology, 2005, 243(8), 763–767.
115. Pandolfi A., Manganiello F., *A model for the human cornea: constitutive formulation and numerical analysis*, Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 2006, 5(4), 237–246.
116. Pinsky P.M., Heide D., Chernyak D., *Computational modeling of mechanical anisotropy in the cornea and sclera*, Journal of Cataract and Refractive Surgery, 2005, 31, 136–145.
117. Popper K., *The logic of scientific discovery*, London and New York, Routledge, 2002.
118. Radner W., Zehetmayer M., Aufreiter R., Mallinger R., *Interlacing and cross angle distribution of collagen lamellae in the human cornea*, Cornea, 1998, 17, 537–543.
119. Roberts C., *Biomechanics of the cornea and wavefront-guided laser refractive surgery*, Journal of Refractive Surgery, 2002, 18, 589–592.
120. Rowsey J.J., Balyeat H.D., Rabinovitch B., Burris T.E., Hays J.C., *Predicting the results of radial keratotomy*, Ophthalmology, 1983, 90(6), 642–654.
121. Salz J., Lee J.S., Jester J.V., Steel D., Villasenor R.A., Nesburn A.B., Smith R.E., *Radial keratotomy in fresh human cadaver eyes*. Ophthalmology. 1981, 88(8), 742–746.
122. Sawada H., Konomi H., Hirokawa K., *Characterization of the collagen in the hexagonal lattice of Descemet's membrane: its relation to type VIII collagen*, Journal of Cell Biology, 1990, 110, 219–227.
123. Schachar R.A., *Zonular function. A new hypothesis with clinical implications*. Annals of Ophthalmology, 1994, 26, 36–38.
124. Schachar R.A., *Is Helmholtz theory of accommodation correct?*, Annals of Ophthalmology, 1999, 31, 10–17.
125. Schachar R., Pierscionek B.K., *Proper controls are required for determining the mechanism of accommodation*. Investigative Ophthalmology and Visual Science (E-letter), 9th April 2009.
126. Schuman J.S., Massicotte E.C., Connolly S., et al. *Increased intraocular pressure and visual field defects in high resistance wind instruments players*. Ophthalmology, 2000, 107, 127–133.
127. Schutte S., van den Bedem S.P.W., van Keulen F., van der Helm F.C.T., Simonsz H.J., *A finite-element analysis model of orbital biomechanics*. Vision Research, 2006, 46, 1724–1731.
128. Schwartz N.J., Mackay R.S., Sackman J.L., *A theoretical and experimental study of the mechanical behavior of the cornea with application to the measurement of intraocular pressure*. Bulletin of Mathematical Biophysics, 1966, 28, 585–643.
129. Seiler T., Matallana M., Sandler S., Bende T., *Does Bowman's layer determine the biomechanical properties of the cornea?*, Journal of Refractive Corneal Surgery, 1992, 8(2), 139–142.
130. Serrao S., Lombardo G., Lombardo M., *Differences in nasal and temporal responses of the cornea after photorefractive keratectomy*, Journal of Cataract and Refractive Surgery, 2005, 31, 30–38.
131. Shah S., *Accurate intraocular pressure measurement – the myth of modern ophthalmology?*, Ophthalmology, 2000, 107, 1805–1807.
132. Shah S., Chatterjee A., Mathai M., et al., *Relationship between corneal thickness and measured intraocular pressure in a general ophthalmology clinic*, Ophthalmology, 1999, 106, 2154–2160.
133. Shin T.J., Vito R.P., Johnson L.W., McCarey B.E., *The distribution of strain in the human cornea*. Journal of Biomechanics, 1997, 30, 497–503.
134. Shuttleworth C.A., *Molecules in focus. Type VIII collagen*. International Journal of Biochemistry & Cell Biology, 1997, 29, 1145–1148.
135. Silver D.M., Geyer O., *Pressure-volume relation for the living human eye*, Current Eye Research, 2000, 20, 115–120.

136. Sjontoft E., Edmund C., *In vivo determination of Young's modulus for the human cornea*. Bulletin of Mathematical Biology, 1987, 49, 217–232.
137. Stodtmeister R., *Applanation tonometry and correction according to corneal thickness*, Acta Ophthalmologica Scandinavica, 1998, 76, 319–324.
138. Śródka W., *Effect of kinematic boundary conditions on optical and biomechanical behaviour of eyeball model*. Acta of Bioengineering and Biomechanics, 2006, 8(2), 69–77.
139. Śródka W., *Biomechanical model of human eyeball and its applications*. Optica Applicata, 2009, 39(2), 401–413.
140. Śródka W., Asejczyk-Widlicka M., Kasprzak H., Jamroz-Witkowska A., *The effect of optical self-adjustment in the linear eyeball model with the crystalline lens and without lens*. 13th Polish–Czech–Slovak Conference on Wave and Quantum Aspects of Contemporary Optics. Eds Jerzy Nowak, Marek Zajac, Jan Masajada. Krzyżowa, 9–13 September 2002. Bellingham, Wash.: SPIE–The International Society for Optical Engineering 2003, s. 323–329.
141. Śródka W., Iskander D.R., *Optically inspired biomechanical model of the human eyeball*, Journal of Biomedical Optics, 2008, 13(4), 044034.
142. Śródka W., Kasprzak H., *Identification of mechanical parameters of incised cornea by means of finite element method*. Optica Applicata, 1996, 26(1), 9–17.
143. Śródka W., Kasprzak H., *Wpływ aproksymacji profilu rogówki na dynamiczne zmiany jej refrakcji*. Biology of Sport, 1997, 14 suppl. 7, 324–328, Referat z XIV Szkoły Biomechaniki. Spała, 10–12 września 1997.
144. Śródka W., Pierson B.K., *Effect of material properties of the eyeball coat on optical image stability*, Journal of Biomedical Optics, 2008, 13(5), 054013.
145. Uchio E., Ohno S., Kudoh J., Aoki K., Kisielewicz L.T., *Simulation model of an eyeball based on finite element analysis on a supercomputer*. British Journal of Ophthalmology, 1999, 83, 1106–1111.
146. Vaezy S., Clark J.I., *A quantitative analysis of transparency in human sclera and cornea using Fourier methods*. Journal of Microscopy, 1991, 163, 85–94.
147. Vaezy S., Clark J.I., *Quantitative analysis of the microstructure of the human cornea and sclera using 2-D Fourier methods*, Journal of Microscopy, 1994, 175, 93–99.
148. Viestenz A., Langenbucher A., Seitz B., Viestenz A., *Evaluation of dynamic contour tonometry in penetrating keratoplasties*, Ophthalmology, 2006, 103(9), 773–776.
149. Vito R.P., Carnell P.H., *Finite element based mechanical models of the cornea for pressure and indenter loading*. Refractive & Corneal Surgery, 1992, 8, 146–151.
150. Wang X., Shen J., McCulley J., Bowman R.W., Petroll W.M., Cavanagh H.D., *Intraocular Pressure Measurement after Hyperopic LASIK*. CLAO Journal, 2002, 28(3), 136–139.
151. Whitacre M.M., Stein R.A., Hassanein K., *The effect of corneal thickness on applanation tonometry*. American Journal of Ophthalmology, 1993, 115, 592–596.
152. Wollensak G., *Stress-strain measurements of human and porcine corneas after riboflavin-ultra-violet-A-induced cross-linking*, Journal of Cataract & Refractive Surgery, 2003, 29, 1780–1785.
153. Woo S.L., Kobayashi A.S., Lawrence C., Schlegel W.A., *Mathematical model of the corneo-scleral shell as applied to intraocular pressure-volume relations and applanation tonometry*. Annals of Biomedical Engineering, 1972a, 1(1), 87–98.
154. Woo S.L.-Y., Kobayashi A.S., Schlegel W.A., Lawrence C., *Nonlinear material properties of intact cornea and sclera*, Experimental Eye Research, 1972b, 14(1), 29–39.
155. Yeh H.-L., Huang T., Schachar R.A., *A closed shell structured eyeball model with application to radial keratotomy*. Journal of Biomechanical Engineering, 2000, 122(5), 504–510.
156. Young W.C., *Roark's formulas for stress and strain*, International Editions: McGraw-Hill. 6th Edn., 1989.
157. Ytteborg J., *The effect of intraocular pressure on rigidity coefficient in the human eye*. Acta Ophthalmologica, 1960, 38, 548–561.

Biomechanical model of human eyeball

Refraction surgery, tonometry and eye optical system theory are the fields of ophthalmology, in which a biomechanical model of the eyeball could play a significant research and utilitarian role. Attempts at creating such a model have been made since the 1970s. Today when highly sophisticated systems using most advanced methods of structural analysis are available, such problems can be relatively easily solved. Unfortunately, pre-information era assumptions and ways of thinking are still underlying the biomechanical model of the eyeball. This clash of outdated ideas and modern computing tools leads to results which do not find practical application – up to this day the effects of cornea surgeries are empirically predicted, similarly IOP reading corrections in applanation tonometry are experimentally determined. The aim of this research was to diagnose the condition of eye biomechanics, to carry out a critical assessment of the binding formal foundations and to attempt to solve selected problems.

The *invers process* was used to identify the material parameters of the cornea, the sclera and the corneal limbus. In this method, the eyeball model is so designed that its functioning is in agreement with the commonly known experimental results. The results available today relate to tonometry, eyeball stiffness and the cornea. Also the original idea of the optical self-adjustment of the eyeball was used. The number of model assumptions was considerably reduced and the latter were well-founded. The assumptions boil down to the three postulates: abnormal anisotropy of the material, optical self-adjustment of the model and Goldman's postulate that the (nominal) pressures on both sides of the calibration cornea are equal. The calculation eyeball model was solved using the finite element method. Its optical system was built according to the rules predicted by the self-adjustment hypothesis.

This new approach to the applanation problem has enabled the investigation of corneal shell stability in GAT. As a result, the hitherto unnoticed influence of IOP on the correction value for the pressure measured by the Goldmann tonometer has been revealed. A detailed critique of the method is presented. A new measurement theory is proposed and a formalism making it possible to correct readings disturbed by cornea thickness and curvature radius variation among people is derived from this theory. Also the IOP measuring techniques: DCT and ART were tested. Numerical simulations showed, contrary to the authors of the techniques, that intraocular pressure measurement results are not in agreement with GAT and need to be corrected as well. Thanks to the eye self-adjustment hypothesis the components of the eyeball could be integrated into one coherent optical system. The examination of the model's optical functions revealed the relationship which must exist between the materials of the cornea, the corneal limbus and the sclera: in order to preserve the self-adjustment of the model, the secant modulus of elasticity of the sclera must be about five times larger than the modulus of the cornea, and the latter is close to 0.27 MPa under natural stress.

The investigations showed that above the pressure of 16 mmHg the Goldmann tonometer readings are understated and the deviation from the real IOP value increases with pressure, to as much as 10 mmHg. The same is observed for a cornea with calibration dimensions. This contradicts the Imbert-Fick law. The causes of this phenomenon, until now associated with surface tension in the lacrimal fluid, should be

linked with corneal shell stability during flattening. On this basis an applanation pressure function in GAT for the cornea of any dimensions has been developed. The correction formulas for CCT and cornea curvature have been found to depend on IOP and to be mutually dependent. Their analytical form has, besides the empirical basis, a theoretical basis now. Contrary to the common belief, the numerical simulations of DCT suggest that the pressure measured by the tonometer clearly depends on CCT – like in GAT

Translated by Leonard Garczyński

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU KONSTRUKCJI I EKSPLOATACJI MASZYN
(wydane w latach 2002–2010)

- Nr 84, Monografie nr 30, W. Wieleba, *analiza procesów tribologicznych zachodzących podczas współpracy kompozytów PTFE ze stalą ze specjalnym uwzględnieniem ciepła tarcia*, Wrocław 2002
- Nr 85, Konferencje nr 25, *XVIII Ogólnopolska konferencja naukowo-techniczna teorii maszyn i mechanizmów*, Wrocław 2002
- Nr 86, Konferencje nr 26, *Pojazdy szynowe 2002*, Wrocław 2002
- Nr 87, Konferencje nr 27, *XXV Jubileuszowa Szkoła Tribologiczna „Tribologia na progu trzeciego tysiąclecia”*, Wrocław 2002
- Nr 88, Monografie nr 31, A. Kaźmierczak, *Wpływ zastosowania powłoki cermetalicznej na procesy tribologiczne w uszkodzeniu pierścieniowym silników spalinowych*, Wrocław 2002
- Nr 89, Monografie nr 32, A. Kaźmierczak, *Fizyczne aspekty strat na tarcie w zespole tłok–pierścień –cylinder*, Wrocław 2005
- Nr 90, Monografie nr 33, I. Rydzanicz, *Struktura przestrzeni zadań technicznych w kontekście twórczości projektowo-konstrukcyjnej*, Wrocław 2005



BIBLIOTEKA GŁÓWNA

348194 W/5

Przedmiotem badań jest model strukturalny symulowania za jego pomocą funkcji opisywania aspektów mechanicznych pomiaru ciśnienia wewnątrzgałkowego (IOP) technika określaną jako tonometria aplanacyjna Goldmanna. Wyznaczone na drodze obliczeń numerycznych ciśnienie aplanacji okazuje się nieliniową funkcją IOP, znacznie odbiegającą od przewidywań Goldmanna. Przeprowadzono szczegółową krytykę tej metody oraz zaproponowano nowy opis teoretyczny pomiaru, a także wynikający z niego formalizm umożliwiający korygowanie odczytu ze względu na grubość rogówki i promień jej krzywizny.

Badania przyczyniły się też do uwiarygodnienia hipotezy samonastawności optycznej oka, mówiącej o tym, że ostrość obrazu na dnie oka jest niezależna od IOP – pomimo znacznych deformacji układu optycznego powodowanych zmianami ciśnienia. Ten efekt optyczny został wykorzystany do zidentyfikowania parametrów materiałowych powłok oka.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w księgarni „Tech”
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. 71 320 29 35
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową
zamawianie.ksiazek@pwr.wroc.pl

ISSN 0324-962X