AKADEMIA EKONOMICZNA IM. OSKARA LANGEGO WE WROCŁAWIU
WYDZIAŁ ZARZĄDZANIA I INFORMATYKI
KATEDRA STATYSTYKI I CYBERNETYKI EKONOMICZNEJ

Edyta Mazurek

Statystyczna analiza czasu trwania bezrobocia i optymalnego wyboru oferty pracy

PRACA DOKTORSKA

PROMOTOR:
prof. dr hab. Witold Miszczak

WROCŁAW 2000

PRACA DOKTORSKA EDYTY MAZUREK NA TEMAT:

Statystyczna analiza czasu trwania bezrobocia i optymalnego wyboru oferty pracy

PRZYGOTOWANA ZOSTAŁA W RAMACH REALIZACJI
PROJEKTU BADAWCZEGO NR 1 H02B 014 18
FINANSOWANEGO PRZEZ KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

W KATEDRZE STATYSTYKI I CYBERNETYKI EKONOMICZNEJ
AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU

POD KIERUNKIEM PROF. DR HAB. WITOLDA MISZCZAKA

Pragnę wyrazić wdzięczność mojemu promotorowi Panu Profesorowi Witoldowi Miszczakowi, którego rady były dla mnie pouczające i inspirujące. Serdeczne podziękowania składam również pracownikom Powiatowego Urzędu Pracy we Wrocławiu, dzięki życzliwości których miałam możliwość skonfrontowania teorii z praktyką oraz wszystkim, którzy bezinteresownie poświęcali swój czas w celu udzielenia mi szeroko pojętej pomocy.

Edyta Mazurek

Spis treści

Spis tabel

Spis rysunków

WSTĘP

Zjawisko bezrobocia jest znane od wielu lat. Kraj nasz prawdziwe znaczenie terminu *bezrobocie* na nowo poznał niedawno bo zaledwie dziesięć lat temu, kiedy rozpoczęły się zmiany prowadzące w kierunku przekształcenia gospodarki naszego kraju w gospodarkę rynkową. Zmiany, które miały na celu spowodowanie by gospodarką rządził rachunek ekonomiczny nie mogły się dokonać bez wpływu na wszystkie sfery gospodarki w tym również (a może w szczególności) na rynek pracy.

Sytuacja rynku pracy przed przełomem lat dziewięćdziesiątych była adekwatna do sytuacji całej gospodarki. Historia działania mechanizmów rynkowych na polskim rynku pracy jest krótka, jednakże pewne obserwacje zostały poczynione i należy wykorzystać je do pełniejszego zrozumienia i łagodzenia pojawiających się zagrożeń związanych ze stale utrzymującym się dość wysokim poziomem bezrobocia w naszym kraju. Powoduje to, że w badaniach nad rynkiem pracy na czołowe miejsca wysuwają się badania dotyczące modelowania i prognozowania rynku pracy. Właściwa ocena popytu i podaży na rynku pracy pozwolić może na dostosowanie programu kształcenia do potrzeb kadrowych regionu. Dokładna prognoza zjawisk na rynku pracy pozwala na wcześniejsze dostrzeżenie pojawiających się zagrożeń, podjęcie działań wyprzedzających powstanie problemu i w wyniku zapobieganie bądź przynajmniej łagodzenie skutków rosnącego poziomu bezrobocia.

Podstawowym problemem w przypadku analizy wszelkich zjawisk ekonomicznych i społecznych jest pomiar wielkości tych zjawisk. W celu zdobycia wiedzy o rozmiarach bezrobocia prowadzi się szczegółowe ewidencje w Powiatowych Urzędach Pracy oraz Urzędach Statystycznych a następnie konstruuje się liczne wskaźniki społeczno-ekonomiczne. Wskaźniki obliczone na podstawie zebranych danych pozwalają na przedstawienie wstępnego obrazu zjawiska, które jest koniecznym etapem początkowym do stosowania bardziej zaawansowanych metod analizy. Ze względu na zróżnicowanie przestrzenne rozwijane są również metody pozwalające na szacowanie wielkości wskaźników dla różnych regionów Polski. Prowadzone są również prace nad klasyfikacją regionów pod względem różnic bądź podobieństw rynku pracy.

Wiele prac poświęconych jest opracowywaniu efektywnego modelu pozwalającego na skuteczne prognozowanie wielkości bezrobocia oraz zatrudnienia (również z podziałem na sekcje gospodarki) (por. [26]). Odpowiednia prognoza mogłaby przyczynić się do podjęcia odpowiednich kroków w celu dostosowania szkolnictwa do spodziewanych potrzeb rynku pracy i w konsekwencji do redukcji bezrobocia. Jak dotąd nie udało się skonstruować poprawnego modelu pozwalającego w sposób zadowalający przewidywać potrzeby rynku. Należy zdawać sobie sprawę, że bezrobocie jako problem społeczno-ekonomiczny podlega ciągłym zmianom. Zjawiska społeczne są jak dotąd mało przewidywalne co być może wyjaśnia błędy stosowanych modeli prognostycznych bezrobocia. Należy również brać pod uwagę uwarunkowania środowiska, w którym rozpatrywane jest zjawisko. Może się okazać, że postępowanie dające dobre rezultaty w jednym regionie będzie całkowicie błędne w innym.

W wielu pracach analizowany jest wpływ czasu pozostawania bez pracy na zdrowie. Dowodzi się, że u bezrobotnych obniża się kondycja fizyczna ale jeszcze groźniejszym zjawiskiem jest pogarszanie się kondycji psychicznej. Przedłużający się okres bezczynności powoduje u bezrobotnego obniżenie oceny własnej wartości co może prowadzić do apatii a nawet głębokich depresji (por. [19], [32]).

Powodem do niepokoju jest rosnąca stopa bezrobocia. Można jednak zauważyć, że dla bezrobotnego długotrwałe przebywanie w stanie bezrobocia jest gorsze niż ryzyko utraty pracy. Spośród dwóch regionów charakteryzujących się podobnym poziomem stopy bezrobocia w trudniejszej sytuacji znajdują się z pewnością bezrobotni w regionie o dłuższym czasie ponownej aktywizacji zawodowej.

Niniejsza praca ma na celu analizę czasu pozostawania bez pracy. Taka analiza jest rzadko rozpatrywana w literaturze. Okazuje się, że może przynieść ona wiele korzystnych informacji dających pełniejszy obraz zjawiska bezrobocia oraz umożliwić podejmowanie odpowiednich kroków sprzyjających skróceniu tego okresu. W tym celu ważne jest posiadanie wiedzy, od czego oraz w jaki sposób zależy długość czasu pozostawania bez pracy. Kolejnym problemem poruszonym w pracy jest problem ponownej aktywizacji bezrobotnego. Osoba, która znalazła się w sytuacji bez pracy staje przed problemem zdobycia zatrudnienia. Nierzadko bywa, że takie osoby są rozgoryczone i zdezorientowane, co może i z pewnością ma wpływ na ocenę własnej pozycji i sytuacji na rynku pracy w ogóle (por. [19], [32], [33]). Podjęcie decyzji o przyjęciu bądź odrzuceniu oferty pracy w takich warunkach może nastręczać trudności. Aby wyjść na przeciw potrzebom osób stających przed dylematem podejmowania decyzji proponuje się metody pozwalające wspomagać proces wyboru oferty.

Cała praca podzielona jest na trzy rozdziały. Rozdział pierwszy zawiera prezentacje metod statystycznych, które mogą zostać wykorzystane do analizy czasu pozostawania bez pracy. Omówione zostały:

- tablice trwania bezczynności,
- model proporcjonalnej intensywności Coxa,
- model nieproporcjonalnej intensywności Coxa,
- model lgoitowy.

Tablice trwania w określonym stanie od dawna stosowane były przede wszystkim w demografii do konstrukcji tablic umieralności. Ponadto omówione metody stosowane są do analizy niezawodności, jak również w licznych badaniach medycznych, przyrodniczych i społecznych. Praca wykazuje przydatność tych metod także do analizy rynku pracy. Analiza długości czasu poszukiwania pracy w niniejszej rozprawie nazywana jest *analizą trwania bezczynności* lub krócej analizą bezczynności. W pracy wprowadzone zostały podstawowe pojęcia wykorzystywane w tej analizie. Rozdział pierwszy prezentuje również konstrukcję tablic długości trwania bezrobocia, które nazwane są tablicami bezczynności. Osoby bezrobotne często stanowią grupę ludzi bardzo zróżnicowaną, dlatego też w pierwszej części pracy zostanie omówiony również sposób postępowania w przypadku, kiedy nie jest spełnione założenie jednorodności kohorty wymagane podczas konstrukcji tablic bezczynności. Należy wówczas dokonać odpowiedniego podziału kohorty na podgrupy, a następnie zastosować testy statystyczne porównujące funkcje bezczynności w tych podgrupach. W celu zbadania zależności szansy znalezienia zatrudnienia jednocześnie od kilku cech charakteryzujących osoby bezrobotne omówiono modele regresji – model logitowy oraz model proporcjonalnej intensywności Coxa z możliwością uwzględniania zmiennych zależnych od czasu. Zaletą tych modeli jest możliwość badania jednoczesnego wpływu różnych cech na czas poszukiwania zatrudnienia.

Przeprowadzenie analizy bezczynności możliwe jest tylko na podstawie danych dotyczących długości czasu pozostawania bez pracy. Dane tego typu uzyskuje się poprzez obserwację grupy ludzi poszukujących zatrudnienia. W praktyce często przy takim sposobie zbierania danych zdarza się, że tracimy informację na temat obserwowanej jednostki. Obserwowana osoba może np. wyjechać za granicę lub znaleźć zatrudnienie nie powiadamiając o tym osoby zbierającej dane. Wówczas mamy do czynienia z tzw. obserwacjami uciętymi. Dla obserwacji uciętych dysponujemy tylko częściową informacją na temat poszukiwania zatrudnienia. Znana jest bowiem historia poszukiwania pracy od momentu rozpoczęcia analizy do momentu, w którym z różnych przyczyn została utracona możliwość dalszej obserwacji. Sposób wykorzystania obserwacji uciętych do analizy bezczynności omówiony jest w rozdziale pierwszym.

Rozdział drugi poświęcony jest analizie rynku pracy wybranego regionu województwa dolnośląskiego opartej na omówionych i zaproponowanych w rozdziale pierwszym metodach statystycznych. Do przeprowadzonej analizy wybrane zostały następujące cechy charakteryzujące badane osoby bezrobotne:

- płeć,
- wiek,
- wykształcenie,
- miejsce zamieszkania,
- posiadanie prawa do zasiłku,
- znajomość języków obcych,
- istnienie osób pozostających na utrzymaniu osoby bezrobotnej,
- status bezrobotnego absolwenta,
- staż pracy,
- bycie jedynym żywicielem rodziny,
- posiadanie gospodarstwa rolnego,
- inwalidztwo,
- posiadanie uprawnień zawodowych.

Dane, na podstawie których została przeprowadzona analiza pochodzą z bazy danych Powiatowego Urzędu Pracy we Wrocławiu i zostały udostępnione dzięki życzliwości i uprzejmości pracowników tego urzędu (przy zachowaniu postanowień ustawy o ochronie danych osobowych). W pierwszym etapie analizy wyeliminowane zostały cechy, które okazały się nieistotne ze względu na to, iż nie różnicowały badanej zbiorowości osób bezrobotnych. Następnie dla badanej grupy skonstruowano odpowiednie tablice bezczynności. W celu uzyskania odpowiedzi na pytanie jakie cechy i w jaki sposób wpływają na szansę znalezienia zatrudnienia przez badane osoby w powiecie wrocławskim oraz w samym mieście Wrocławiu, skonstruowane zostały modele regresyjne. W szczególności skonstruowany model Coxa umożliwia porównanie szansy znalezienia zatrudnienia ze względu na różne cechy charakteryzujące osoby bezrobotne, biorąc pod uwagę cały okres obserwacji kohorty. Natomiast modele logitowe umożliwiają porównanie szans znalezienia zatrudnienia ze względu na badane cechy w ustalonych przez badacza okresach.

Rozdział trzeci pracy prezentuje metodologię mającą na celu wspomaganie decyzji o podjęciu pracy zarówno przez bezrobotnych jak też i przez inne osoby poszukujące zatrudnienia. Przedłużające się bezrobocie jest z reguły powodowane brakiem miejsc pracy. Jednakże osoba poszukująca pracy może mieć trudności z podejmowaniem decyzji o przyjęciu zatrudnienia oczekując na jeszcze lepszą ofertę. Do rozwiązywania tego typu problemów decyzyjnych mogą być wykorzystane metody statystyczne znane jako teoria reguł stopu. W rozdziale trzecim pokazano możliwość wykorzystania tych metod do problemu poszukiwania pracy.

Wykorzystując teorię procesów stochastycznych, a w szczególności teorię martyngałów, w pracy rozpatrzono modele poszukiwania pracy zarówno z ustaloną jak i nieograniczoną liczbą ofert. Dla modelu z nieograniczoną liczbą ofert istnieje dodatkowo możliwość uwzględnienia współczynnika dyskontowania. Dla każdego modelu analizowane są dwa przypadki. Pierwszy z nich zakłada, że poszukujący nie ma możliwości powrotu, czyli ponownego rozpatrywania oferty, którą już wcześniej podczas analizy odrzucił. Każda nie przyjęta oferta przestaje być aktualna dla poszukującego, gdyż zakłada się, że zaraz po odrzuceniu skorzystała z niej inna osoba. W drugim przypadku poszukujący ma możliwość przeprowadzenia ponownej analizy odrzuconej oferty, może każdą z nich rozpatrywać wielokrotnie.

Sformułowane reguły postępowania przy optymalnym wyborze oferty pracy, przyjmują dla poszukującego zatrudnienia kryterium płacowe jako podstawowe. Formułowane reguły uwzględniają następujące czynniki:

- proponowane dochody w ofercie pracy,
- koszty poszukiwania oferty,
- minimalne określone przez poszukującego wynagrodzenie zapewniające byt bezrobotnemu i rodzinie.

W modelach poszukiwania pracy z ustaloną liczbą ofert zaproponowano, aby liczba ofert była ustalana na podstawie posiadanego (zaoszczędzonego) przez poszukującego kapitału oraz kosztu poszukiwania oferty. Im zgromadzone przez poszukującego oszczędności są większe, tym więcej propozycji pracy może rozpatrzyć.

Aby reguły postępowania podczas znajdowania zatrudnienia można było z powodzeniem stosować w praktyce, powinny charakteryzować się wysoką skutecznością. W celu zbadania skuteczności dowolnych reguł podejmowania decyzji o zatrudnieniu, a w szczególności tych rozpatrzonych w niniejszej pracy, należałoby obserwować grupę jednostek postępujących zgodnie ze wspomnianymi regułami i na podstawie odpowiedniego kryterium ocenić przydatność omawianych metod. Ze względu na brak rzeczywistych obserwacji skuteczność proponowanych reguł zbadana została przy pomocy symulacji procesu poszukiwania pracy (przeglądania ofert). Symulacja polegała na generowaniu liczb zgodnie z zadanym rozkładem płac, które traktowane były jako kolejno oferowane wynagrodzenia. Oceny skuteczności dokonano obserwując rangi ofert wskazywanych przez poszczególne reguły.

Wykorzystując analizę skuteczności modeli dokonano również porównania przydatności różnych reguł postępowania. Dodatkowo zbadano wpływ wielkości zaoszczędzonego kapitału na skuteczność reguł poszukiwania pracy.

Wyniki przeprowadzonych symulacji świadczą o ewentualnym powodzeniu stosowania przedstawionych metod do rozwiązywania rzeczywistych problemów.

Do obliczeń numerycznych i wykonania rysunków wykorzystano pakiet statystyczny STATISTICA PL oraz standardowe oprogramowanie pakietu Microsoft Office.

ROZDZIAŁ 1

Modele trwania bezrobocia

1.1 Podstawowe pojęcia

1.1.1 Uwagi wstępne

Okres pozostawania bez pracy jest rzadko analizowany przez badaczy. Okazuje się jednak, że analiza tego okresu może przynieść wiele cennych informacji prowadzących do dokładniejszej znajomości zjawiska oraz umożliwić podejmowanie odpowiednich kroków sprzyjających skróceniu tego okresu. Dlatego ważne jest posiadanie wiedzy, od czego oraz w jaki sposób zależy długość czasu pozostawania bez pracy. Można się zastanawiać czy długość okresu poszukiwania pracy dla kobiet i mężczyzn jest taka sama, czy wykształcenie ma istotny wpływ na znajdowanie pracy, w jaki sposób na czas poszukiwania pracy oddziaływują posiadane umiejętności lub staż pracy.

W niniejszym rozdziale przedstawione są metody statystyczne, które mogą być wykorzystane do analizy czasu pozostawania bez pracy. Zastosowanie omawianych metod znane jest przede wszystkim w demografii do konstrukcji tablic umieralności, w analizie niezawodności, jak również w licznych badaniach medycznych, przyrodniczych i społecznych. Będą one w dalszej części wykorzystane do analizy rynku pracy.

Analiza długości czasu pozostawania bez pracy nazywana będzie analizą trwania bezczynności lub krócej *analizą bezczynności.* Na początek zostaną wprowadzone podstawowe pojęcia wykorzystywane w analizie bezczynności. Następnie przedstawiona zostanie konstrukcja tablic trwania bezrobocia, które nazwane zostaną tablicami bezczynności. W dalszej części podjęta zostanie próba znalezienia odpowiedzi na pytanie od jakich czynników i w jaki sposób zależy rozkład czasu poszukiwania zatrudnienia oraz w jaki sposób czynniki wpływają na szansę przerwania okresu bezczynności. W tym celu zaprezentowane zostaną półparametryczne modele regresji oraz modele logitowe. Pokazany zostanie również sposób wykorzystania w analizie danych niekompletnych.

1.1.2 Charakterystyka zbioru danych

Analiza bezczynności oparta jest na danych dotyczących czasu pozostawania bez pracy. W celu zdobycia takich danych należy przez określony czas obserwować wyróżnioną grupę ludzi bezrobotnych. Chwila rozpoczęcia obserwacji nazywana jest chwilą zerową. Obserwowaną w ciągu określonego czasu grupę ludzi bezrobotnych nazywa się kohortą. Obserwacja kohorty polega na notowaniu momentów, w których kolejne osoby opuszczają kohortę na skutek zmiany wartości cechy, która decydowała o przynależności do kohorty. Opuszczenie kohorty może być spowodowane na przykład zgonem w analizie umieralności lub usterką elementu w analizie niezawodności. W analizie bezczynności natomiast opuszczenie wyjściowej kohorty osób bezrobotnych będzie spowodowane zmianą stanu z bezrobotnego na czynnego zawodowo. Często w trakcie badania kohorty zdarza się, że tracimy informację na temat obserwowanych osób. Wówczas mamy do czynienia z tzw. *obserwacjami uciętymi*. Obserwacje ucięte charakteryzują się tym, że znana jest dla nich historia poszukiwania zatrudnienia od chwili zerowej do momentu, w którym z różnych przyczyn przerwana została możliwość dalszej obserwacji. W badaniu bezrobotnych taka sytuacja ma miejsce, gdy osoba należąca do kohorty przestaje zgłaszać się do Urzędu Pracy nie powiadamiając urzędu o przyczynie. Utrata informacji na temat obserwowanej osoby jest jedną z przyczyn powstawania obserwacji uciętych. Drugą przyczyną jest fakt, iż obserwacja kohorty nie jest prowadzona do chwili znalezienia pracy przez ostatnią należącą do niej osobę. Wówczas czas poszukiwania zatrudnienia dla bezrobotnych, którzy nie znaleźli zatrudnienia przed upływem zakończenia obserwacji kohorty, również określany jest jako ucięty. Wiadomo bowiem tylko, że czas poszukiwania zatrudnienia dla tego bezrobotnego jest co najmniej tak długi, jak długo trwało badanie.

Dane potrzebne do analizy czasu pozostawania w określonym stanie powinny zawierać dla każdej jednostki należącej do kohorty następujące informacje:

- moment rozpoczęcia obserwacji,
- moment opuszczenia kohorty,
- moment zakończenia obserwacji,
- przyczynę zakończenia obserwacji,
- wartości cech mających potencjalny wpływ na opuszczenie kohorty.

W przypadku analizy czasu trwania bezrobocia dane zawierać powinny następujące informacje dla każdej obserwowanej w kohorcie osoby bezrobotnej:

- data rozpoczęcia obserwacji,
- data opuszczenia kohorty – znalezienia zatrudnienia,
- chwila zakończenia obserwacji,
- przyczyna zakończenia obserwacji,
- wartości cech mających potencjalny wpływ na znalezienie pracy takich jak wiek, płeć, staż pracy, wykształcenie, itp.

Daty rozpoczęcia obserwacji oraz opuszczenia kohorty wyznaczają dla bezrobotnego czas poszukiwania zatrudnienia zdefiniowany poniżej.

Niech Z będzie zmienną losową oznaczającą dokładny czas poszukiwania pracy, zaś U będzie zmienną losową oznaczającą czas ucięty. Dokładny czas poszukiwania pracy Z rejestrowany jest tylko wtedy, gdy obserwacje nie są ucięte. Zakłada się, że zmienne Z oraz U są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wówczas czas poszukiwania pracy reprezentuje para zmiennych losowych (T,Q), gdzie $T=\min(Z,U)$, a zmienna losowa Q zdefiniowana jest wzorem:

$$Q=\begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad \mathrm{T} \le \mathrm{U}, \\ \\ 0 & \text{jeśli} \quad T > U. \end{cases}$$

Zatem zmienna losowa Q przyjmuje wartość zero dla obserwacji uciętych i wartość równą jeden w przeciwnym wypadku. Zmienną losową T można więc alternatywnie określić następująco:

$$T = \begin{cases} Z & \text{jeśli} \quad Q = 1, \\ U & \text{jeśli} \quad Q = 0. \end{cases}$$

Obserwowany czas poszukiwania pracy dla każdej osoby bezrobotnej traktowany jest więc jako realizacja zmiennej losowej T.

1.1.3 Charakterystyki długości czasu pozostawania bez pracy

Zmienna losowa T oznaczająca czas poszukiwania pracy może być wyrażona w latach, miesiącach, tygodniach lub dniach. Zakładamy, że jest ona nieujemną ciągłą zmienną losową o dystrybuancie oznaczonej jako $F_T(t)$ lub krótko jako $F(t)$, $t \geq 0$ i gęstości $f(t)$. Dystrybuanta zmiennej losowej w pracy będzie definiowana wzorem:

$$F(t) = P(T \leq t).$$

Często zamiast dystrybuanty wygodniej będzie posługiwać się funkcją:

$$S(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t). \tag{1.1}$$

Przy okazji różnych zastosowań funkcja (1.1) przyjmuje różne nazwy, np. w teorii ubezpieczeń nazywa się funkcją przeżycia. Na potrzeby niniejszej pracy funkcja ta nazywana będzie funkcją dalszego trwania w bezczynności lub krótko - funkcją bezczynności. Nazwa taka podyktowana jest interpretacją wartości $S(t)$, jest to bowiem prawdopodobieństwo pozostania osobą bezrobotną (w stanie bezczynności) przez czas dłuższy niż t. Funkcja bezczynności jest funkcją monotoniczną, nierosnącą oraz taką, że $S(0) = 1$ i $\lim_{t \to \infty} S(t) = 0$. Czas bezczynności może być także opisany przy użyciu funkcji intensywności wyjścia ze stanu bezrobocia. Funkcja taka oznaczana jako $\lambda(t)$ nazywana będzie funkcją *intensywności aktywizacji* lub krótko funkcją intensywności. Jeżeli badana jednostka pozostała bezrobotna do czasu t, to prawdopodobieństwo, że znajdzie ona pracę w krótkim czasie Δt, można wyrazić za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego w następujący sposób:

$$P(t \le T < t + \Delta t \mid T \ge t).$$

Funkcją intensywności $\lambda(t)$ dla określonej chwili czasu t nazywa się prawdopodobieństwo natychmiastowego znalezienia pracy przez osobę, która do momentu t pozostała bez pracy. Funkcja intensywności w momencie t traktowana jest jako wskaźnik przejścia z jednego stanu do drugiego w nieskończenie małym przedziale czasu $(t, t + \Delta t)$ pod warunkiem, że przejście to nie nastąpiło wcześniej. Funkcję tę definiuje się następująco:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t \mid T \ge t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le T < t + \Delta t)}{\Delta t \cdot P(T \ge t)}.$$

Z powyższej definicji wynika, że funkcja intensywności jest funkcją nieujemną, która przyjmuje wartości od 0 do ∞. Funkcję intensywności można także wyrazić przy użyciu funkcji gęstości $f(t)$ oraz dystrybuanty:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \tag{1.2}$$

lub za pomocą wcześniej zdefiniowanej funkcji bezczynności:

$$\lambda(t) = \frac{-S'(t)}{S(t)}. \tag{1.3}$$

$S'(t)$ oznacza pochodną funkcji $S(t)$ po czasie t. Całkując obustronnie równanie (1.3) otrzymujemy

$$S(t) = \exp\{-\Lambda(t)\},$$

gdzie funkcja $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) \cdot du$ nazywana jest skumulowaną funkcją intensywności zmiennej losowej T. Z powyższych zależności wynika, że funkcja intensywności jednoznacznie wyznacza dystrybuantę, funkcję gęstości oraz funkcję bezczynności zmiennej losowej T i odwrotnie.

1.2 Tablice trwania bezczynności

1.2.1 Wstęp

Najprostszym modelem nieparametrycznym analizy bezczynności są tablice czasu trwania w stanie bezrobocia, które nazywane będą tablicami trwania bezczynności lub krótko tablicami bezczynności. Metoda analizy oparta na takich tablicach nie zakłada żadnej postaci analitycznej rozkładu zmiennej losowej T. Może być stosowana zarówno dla zmiennej losowej typu ciągłego o dowolnej funkcji gęstości, jak i zmiennej losowej typu dyskretnego o dowolnej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa. Do konstrukcji tablic długości trwania bezrobocia zostanie wykorzystane podejście stosowane w demografii do konstruowania tablic trwania życia (por. [3], [5], [39]) polegające na estymacji podstawowych charakterystyk zmiennej losowej T.

1.2.2 Konstrukcja tablic trwania bezczynności

Na podstawie indywidualnych danych dotyczących długości okresu poszukiwania zatrudnienia oraz informacji o obserwacjach niekompletnych można stworzyć tablicę długości trwania bezczynności, która będzie miała następującą postać:

Tabela 1.1. Ogólna postać tablicy trwania bezczynności

Czas pozostawania bez pracy	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności
$[t_i, t_i + \Delta t)$	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

W pierwszych trzech kolumnach tabeli 1.1 zawarte są wielkości, które są bezpośrednio obserwowane. Następnie na podstawie tych wielkości wyliczane są wartości w pozostałych kolumnach tabeli w opisany poniżej sposób.

W pierwszym etapie konstrukcji tablic należy pogrupować dane dotyczące czasu pozostawania osób w kohorcie w przedziały lewostronnie domknięte $t_i \le t < t_i + \Delta t$ o jednakowej rozpiętości. Dzieląc czas pozostawania bez pracy w momentach $t_1, t_2, \ldots, t_k$ takich, że

$$0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k, \quad t_{k+1} = \infty$$

otrzymuje się przedziały

$$[t_1, t_2), \ldots, [t_{i,} t_{i+1}), \ldots, [t_k, \infty).$$

Czas poszukiwania oznaczony jako t_i oznaczać będzie, że bezrobotny poszukiwał pracy przez czas nie krótszy niż t_i i jednocześnie nie dłuższy niż t_{i+1}. Obserwacje o czasie poszukiwania t_i należą do *i*-tego przedziału czasowego. W konstrukcji tablic bezczynności dla każdego czasu poszukiwania t_i, $i = 1,2,\ldots,k$ (*i*-tego przedziału klasowego) należy określić następujące wielkości:

- m_i - liczbę osób znajdujących pracę w czasie $[t_{i,} t_{i+1})$,
- u_i - liczbę obserwacji uciętych, opuszczających kohortę w czasie $[t_{i,} t_{i+1})$,
- n_i - liczbę osób pozostających bez pracy na początku przedziału czasowego $[t_{i,} t_{i+1})$,
- b_i - liczbę osób mających szansę na znalezienie pracy w czasie $[t_{i,} t_{i+1})$.

Liczba osób pozostających bez pracy na początku pierwszego przedziału czasowego $[0, t_1)$ określona jest przez liczebność kohorty. Dla pozostałych przedziałów czasowych liczba ta określona jest według wzoru:

$$n_i = n_{i-1} - m_{i-1} - u_{i-1},$$

gdzie $i = 2,3,\ldots,k$.

Osoby mające szansę na znalezienie pracy tworzą tak zwany *zbiór szans*. Liczebność tego zbioru łatwo ustalić w określonej chwili czasu, gdyż zbiór szans dla momentu t tworzą te osoby, dla których czas poszukiwania zatrudnienia jest co najmniej równy t bez względu na to czy są to obserwacje ucięte czy nie. W przypadku, kiedy czas jest podzielony na przedziały, liczebność zbioru szans dla i-tego przedziału czasowego definiuje się następująco:

$$b_i = n_i - \omega \cdot u_i,$$

gdzie $0 \le \omega \le 1$. Współczynnik ω określa stopień w jakim osoby, których możliwość dalszej obserwacji została przerwana w danym przedziale czasowym, miały szansę znaleźć w nim zatrudnienie. Standardowo przyjmuje się $\omega = \frac{1}{2}$ co oznacza, że osoby te jeszcze przez połowę i-tego przedziału czasowego poszukiwały zatrudnienia (por. [16]). Jeżeli założymy, że ucięcie obserwacji (przerwanie możliwości dalszej obserwacji) następuje na początku przedziału czasowego, to wówczas należy przyjąć $\omega = 1$. Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń wyznacza się kolejne charakterystyki tablicy trwania bezczynności. Estymator prawdopodobieństwa znalezienia pracy w i-tym przedziale czasowym pod warunkiem, że nie znaleziono jej wcześniej oblicza się jako stosunek liczby osób znajdujących pracę w danym przedziale do liczby osób mających szansę na znalezienie pracy w tym przedziale i wyraża się następującym wzorem:

$$\hat{p}_i = \frac{m_i}{b_i}. \qquad (1.4)$$

Natomiast $\hat{q}_i = 1 - \hat{p}_i$ jest estymatorem prawdopodobieństwa pozostania osobą bezrobotną w i-tym przedziale czasowym pod warunkiem, że osoba ta nie znalazła pracy wcześniej.

Funkcję bezczynności określoną jako prawdopodobieństwo pozostania bez pracy aż do momentu t_i przy założeniu, że prawdopodobieństwa pozostania bezrobotnym są niezależne w kolejnych przedziałach czasowych, oblicza się jako iloczyn prawdopodobieństw pozostania bezrobotnym dla wszystkich wcześniejszych przedziałów czasowych. Zatem funkcję bezczynności dla i-tego przedziału czasowego wyznacza się rekurencyjnie według wzoru (por. [39]):

$$\hat{S}(t_i) = \hat{q}_{i-1}\hat{S}(t_{i-1}), \qquad i = 2,3,\ldots,k,$$

przyjmując, że

$$\hat{S}(t_1) = 1,$$

gdzie k jest liczbą przedziałów, na które został podzielony czas.

Uwzględniając wzór (1.4) dla $i = 2,3,\ldots,k$ otrzymujemy

$$\hat{S}(t_i) = \left(1 - \frac{m_{i-1}}{b_{i-1}}\right) \cdot \hat{S}(t_{i-1}).$$

Następnie korzystając z najprostszego estymatora gęstości prawdopodobieństwa dla danego przedziału czasowego, to znaczy prawdopodobieństwa znalezienia pracy w tym przedziale obliczonego na jednostkę czasu wyznaczonego zgodnie ze wzorem:

$$\hat{f}(t_i) = \frac{\hat{S}(t_i) - \hat{S}(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i}, \quad i = 1,2,\ldots,k-1$$

oraz estymatora funkcji bezczynności w tym przedziale łatwo wyznaczyć estymator funkcji intensywności dla i-tego przedziału, $i = 1,2,\ldots,k-1$:

$$\hat{\lambda}(t_i) = \frac{\hat{f}(t_i)}{\bar{\hat{S}}(t_i)},$$

gdzie

$$\bar{\hat{S}}(t_i) = \frac{\hat{S}(t_i) + \hat{S}(t_{i+1})}{2}.$$

Dla estymowanej w każdym przedziale czasowym funkcji bezczynności, intensywności i gęstości można wyznaczyć estymator wariancji ocen tych funkcji w i-tym przedziale czasowym według następujących wzorów (por [16], [39]):

- dla funkcji bezczynności

$$Var\left(\hat{S}(t_i)\right) = \hat{S}^2(t_i) \cdot \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\hat{p}_k}{\hat{q}_k b_k},$$

➢ dla funkcji intensywności

$$Var\left(\hat{\lambda}(t_i)\right)=\frac{\hat{\lambda}^2(t_i)}{b_i\hat{p}_i}\cdot\left(1-\frac{(t_{i+1}-t_i)^2\hat{\lambda}^2(t_i)}{4}\right),$$

➢ dla funkcji gęstości

$$Var\left(\hat{f}(t_i)\right)=\left(\frac{\hat{p}_i\hat{S}(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{\hat{p}_k}{\hat{q}_k b_k}+\frac{\hat{q}_k}{\hat{p}_k b_k}\right).$$

Estymatory wariancji wykorzystuje się do obliczania przedziałów ufności dla estymowanych funkcji bezczynności, intensywności i gęstości.

W celu uzyskania nieobciążonych estymatorów powyższych funkcji dla wyodrębnionych przedziałów czasowych wymagana jest kohorta o dużej liczebności. Omówiona metoda daje wówczas dobre wyniki.

1.2.3 Porównywanie funkcji bezczynności

Tworząc tablice trwania bezczynności przyjmuje się dwa podstawowe założenia:

1) analizowana kohorta osób pozostających bez pracy jest jednorodna,
2) zdarzenie polegające na rezygnacji z poszukiwania pracy (ucięcie czasu obserwacji) i na znalezieniu zatrudnienia są niezależne.

Kohorta jest jednorodna, jeżeli dla wszystkich osób do niej należących i mających szansę na podjęcie pracy w momencie t, prawdopodobieństwo znalezienia zatrudnienia w momencie t jest jednakowe. Drugie założenie oznacza, że obserwacje nie są wybiórczo ucinane, na przykład z powodu wieku, lecz jest to proces losowy niezależny od szansy znalezienia pracy.

Osoby bezrobotne stanowią zwykle grupę ludzi bardzo zróżnicowaną. Dokonując jednak podziału badanej zbiorowości ze względu na wybrane kategorie badanych cech otrzymuje się bardziej jednorodne grupy bezrobotnych. Jeżeli jedną z badanych cech jest płeć, to kohorta według tej cechy zostanie podzielona na dwie grupy kohortę mężczyzn i kohortę kobiet. Wówczas dla każdej z kohort oddzielnie można utworzyć tablice trwania bezczynności, a następnie dokonać za pomocą odpowiednich testów statystycznych porównania funkcji bezczynności w tych grupach. W przypadku kiedy badana cecha posiada więcej niż dwie kategorie, jak na przykład wykształcenie, istnieje konieczność porównywania więcej niż dwóch funkcji bezczynności.

Załóżmy, że kohorta została podzielona na r jednorodnych grup, każda z nich charakteryzuje się funkcją bezczynności $S_r(t)$. Aby stwierdzić, że różnice pomiędzy funkcjami bezczynności w tych grupach są statystycznie istotne należy zweryfikować hipotezę postaci:

$$H_0: S_1(t) = S_2(t) = \ldots = S_r(t) \quad \text{dla wszystkich } t, \tag{1.5}$$

przeciwko

$$H_1: S_i(t) \neq S_j(t) \quad \text{dla dowolnej pary } (i,j)\text{: } i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots,r .$$

W tym celu łączymy wszystkie obserwowane osoby należące do r różnych grup w jedną grupę. Następnie porządkujemy rosnąco wszystkie różne momenty czasowe, w których obserwowane osoby znajdowały zatrudnienie. Niech k oznacza liczbę różnych powyżej opisanych momentów czasowych. Wówczas dla każdego momentu czasowego t_i, $i = 1,2,\ldots,k$ takiego, że

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_k$$

tworzymy $(r \times 2)$ - wymiarową tabelę, która zawiera następujące informacje dla każdej z r grup oddzielnie (porównaj tabela 1.2):

- m_{ji} - liczbę osób, które znalazły zatrudnienie w momencie t_i, $j = 1,2,\ldots,r$,
- b_{ji} - liczbę osób, które miały szansę na znalezienie pracy w momencie t_i, $j = 1,2,\ldots,r$.

Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy dla j-tej grupy w momencie t_i oznaczona przez b_{ji} jest równa liczbie obserwacji należących do j-tej grupy, które nie znalazły jeszcze zatrudnienia lub nie zostały ucięte do czasu t_i.

Tabela 1.2. Ogólna postać tabeli zawierającej pogrupowane dane dla momentu t_i według r jednorodnych grup

	Liczba osób znajdujących zatrudnienie	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy
Grupa 1	m_{1i}	b_{1i}
Grupa 2	m_{2i}	b_{2i}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Grupa r	m_{ri}	b_{ri}
Suma	m_i	b_i

Prawdziwość hipotezy zerowej (1.5) orzekającej o równości wartości funkcji bezczynności w obserwowanych momentach t_i oznacza, że prawdopodobieństwo znalezienia pracy w momentach t_i pod warunkiem, że znalezienie pracy nie nastąpiło wcześniej, w każdej badanej grupie jest takie samo równe $\frac{m_i}{b_i}$, czyli analogicznemu prawdopodobieństwu wyznaczonemu dla całej kohorty. Zatem przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej teoretyczną liczbę osób znajdujących zatrudnienie w j-tej grupie dla i-tej chwili t_i wyznacza się zgodnie ze wzorem:

$$m'_{ji} = \frac{b_{ji}}{b_i} \cdot m_i . \tag{1.6}$$

Statystyka testowa do weryfikacji hipotezy (1.5) porównuje empiryczną i teoretyczną liczbę osób znajdujących zatrudnienie w poszczególnych grupach i przyjmuje następującą postać:

$$U = \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{g}. \tag{1.7}$$

Wektor $\mathbf{g}$ jest wektorem zdefiniowanym następująco:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} w_i \left(m_{1i} - m'_{1i} \right) \\ \sum_{i=1}^{k} w_i \left(m_{2i} - m'_{2i} \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} w_i \left(m_{(r-1)i} - m'_{(r-1)i} \right) \end{bmatrix}.$$

Elementy tego wektora traktowane są jako odchylenia wartości zaobserwowanych m_{ji} od wartości spodziewanych m'_{ji} (zakładając równe funkcje intensywności w każdej grupie) w chwili t_i.

Macierz $\mathbf{V}$ jest macierzą kowariancji o elementach:

$$v_{sl} = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \frac{m_i (b_i - m_i)}{b_i - 1} \cdot \frac{b_{si}}{b_i} \cdot \left(\delta_{sl} - \frac{b_{li}}{b_i} \right),$$

gdzie

$$s, l = 1, 2, \ldots, k-1$$

oraz

$$\delta_{sl} = \begin{cases} 1 & s = l, \\ 0 & s \neq l. \end{cases}$$

Statystyka testowa U przy prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład chi-kwadrat o $r-1$ stopniach swobody (por. [5]). Porównując wartość statystyki testowej U z odpowiednim kwantylem rozkładu chi-kwadrat $\chi_{1-\alpha}$ dla zadanego poziomu istotności α podejmujemy decyzję odnośnie istotności różnic pomiędzy funkcjami bezczynności w badanych grupach. Jeżeli prawdziwa jest nierówność $U > \chi_{1-\alpha}$, to odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej.

W zależności od tego jak zdefiniowane są wagi w_i w statystyce testowej określonej wzorem (1.7) otrzymuje się różne testy statystyczne. Jeżeli wszystkie wagi są jednakowe, tzn. jeśli $w_i = 1$, $i = 1,2,\dots,k$, to test nazywany jest testem log-rank lub Coxa-Mantela (por. [8], [9]). Jeśli zaś $w_i = b_i$, $i = 1,2,\dots,k$, to otrzymany test nosi nazwę testu Peto (por. [14], [42]). W literaturze opisane są również inne alternatywne testy statystyczne (por. [5], [14], [16]).

Test Peto jest czuły na informację dotyczącą początkowej części krzywej bezczynności, kiedy liczba osób mających szansę na znalezienie zatrudnienia jest duża. Test ten nadaje większe wagi obserwacjom, dla których zdarzenie polegające na znalezieniu pracy wystąpiło wcześniej. W przeciwieństwie do testu Peto, test log-rank bardziej reaguje na odchylenia ogona krzywej bezczynności, kiedy liczba osób mających szansę na znalezienie zatrudnienia maleje w czasie, przypisując równe wagi każdej obserwacji. Test Peto jest testem mocniejszym w wykrywaniu różnic w przypadku krótkich okresów bezczynności, podczas gdy test log-rank jest bardziej wrażliwy na różnice funkcji bezczynności w późniejszym czasie.

1.3 Model proporcjonalnej intensywności Coxa

1.3.1 Wstęp

W przypadku polityki dotyczącej przeciwdziałaniu bezrobocia ważne jest przeanalizowanie czasu poszukiwania pracy jednocześnie ze względu na wiele cech charakteryzujących osoby bezrobotne. Być może pojawi się możliwość sterowania zmiennymi mającymi wpływ na długość okresu pozostawania bez pracy na przykład poprzez organizowanie odpowiednich szkoleń, prac interwencyjnych czy też wprowadzenie różnego rodzaju ulg dla pracodawców zatrudniających osoby bezrobotne. W niniejszym paragrafie zostaną przedstawione metody oceny szansy znalezienia pracy w zależności od pewnych cech osobowych jednostki poszukującej zatrudnienia. Metody te mogą być także wykorzystane w celu badania szansy znalezienia zatrudnienia w zależności od dowolnych interesujących nas cech, nie tylko charakteryzujących osoby bezrobotne, ale na przykład cech środowiska, w którym dana jednostka żyje.

Załóżmy, że czas poszukiwania pracy zależy od *k* zmiennych $X_1, X_2, \dots, X_k$ nazwanych zmiennymi objaśniającymi. Przykładem zmiennej objaśniającej może być wiek, wykształcenie czy płeć osoby poszukującej zatrudnienia. Ponieważ funkcja intensywności $\lambda(t)$ jest jedną z funkcji opisujących zmienną losową *T*, to można przypuszczać, że również funkcja ta będzie zależna od zmiennych objaśniających $X_1, X_2, \dots, X_k$, co w zapisie oznaczane będzie przez $\lambda(t \mid X_1, X_2, \dots, X_k)$. Szczegółowa analiza funkcji intensywności pozwoli opisać i zanalizować rozkład danej zmiennej losowej (por. paragraf 1.1). Na podstawie analizy statystycznej można stwierdzić, które z wymienionych zmiennych oraz jak silnie wpływają na szansę znalezienia pracy.

Niech

$$\lambda(t \mid X_1, X_2, \dots, X_k) \equiv \lambda(t \mid \mathbf{X})$$

oznacza funkcję intensywności wyznaczoną dla osób bezrobotnych o cechach opisanych za pomocą wektora *k* zmiennych objaśniających $\mathbf{X}^T = (X_1, X_2, \dots, X_k)$.

Gdyby funkcja intensywności nie zależała od zmiennych objaśniających to można byłoby zapisać

$$\lambda(t \mid X_1, X_2, \ldots, X_k) = \lambda_0(t),$$

co oznacza, iż zależy ona jedynie od czasu. Można jednak przypuszczać, że czas poszukiwania zatrudnienia zależy od wieku osoby poszukującej pracy. Im osoba jest młodsza tym prawdopodobnie szybciej znajduje zatrudnienie. Funkcja intensywności zależy więc nie tylko od czasu poprzez funkcję $\lambda_0(t)$, ale także od funkcji zmiennych objaśniających $\xi(\mathbf{X})$. Jednym ze sposobów uwzględnienia tej zależności jest następujący model multiplikatywny funkcji intensywności (por. [5], [9], [20]):

$$\lambda(t \mid \mathbf{X}) = \lambda_0(t) \cdot \xi(\mathbf{X}). \tag{1.8}$$

Funkcja $\xi(\mathbf{X})$ może być dowolną funkcją zdefiniowaną, tak aby $\lambda(t \mid \mathbf{X}) > 0$. Natomiast funkcja $\lambda_0(t)$ jest nieznaną funkcją czasu. Do każdego modelu postaci (1.8) można dołączyć także zmienne objaśniające opisujące wpływ kombinacji dowolnych zmiennych tzw. interakcje. Tworzymy je poprzez iloczyny odpowiednich zmiennych objaśniających. Jeżeli chcemy zbadać wpływ interakcji płci i wieku, to do modelu (1.8) należy dołączyć zmienną objaśniającą $X_{12} = X_1 \cdot X_2$, gdzie zmienna X_1 oznacza wiek a X_2 płeć.

Cox w 1972 (por. [7], [20]) jako pierwszy zaproponował wykładniczą postać funkcji $\xi(\mathbf{X})$ tworząc następujący model:

$$\lambda(t \mid X_1, X_2, \ldots, X_k) = \lambda_0(t)\exp(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k), \tag{1.9}$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ są nieznanymi współczynnikami modelu.

Model postaci (1.9) określany jest w literaturze jako model proporcjonalnej intensywności Coxa lub po prostu model Coxa. Wykładnicza postać funkcji $\xi(\mathbf{X})$ w modelu (1.9) gwarantuje, że funkcja intensywności przyjmuje wartości nieujemne bez względu na wartości współczynników. W modelu tym także funkcja $\lambda_0(t)$ interpretowana jest jako funkcja intensywności dla jednostki, dla której wszystkie zmienne objaśniające przyjmują wartość zero $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (*ang. baseline hazard*). Zaletą tego modelu jest również możliwość badania wpływu jednocześnie kilku zmiennych na proces poszukiwania pracy. Zmienne te mogą być zmiennymi mierzalnymi lub kategorialnymi. Ponadto w modelu tym można także uwzględniać zmienne zmieniające się w czasie. Model proporcjonalnej intensywności jest jednak poprawny w przypadku, kiedy spełnione są dwa podstawowe założenia:

1) wszystkie jednostki z ustalonymi wartościami zmiennych objaśniających $X_1, X_2, ..., X_k$ mają identyczną funkcję intensywności,
2) założenie proporcjonalności.

Założenie proporcjonalności oznacza, że stosunek funkcji intensywności dla każdych dwóch jednostek o różnych wartościach zmiennych objaśniających nie zależy od czasu. Po weryfikacji wymaganych założeń należy dokonać estymacji parametrów modelu.

1.3.2 Estymacja parametrów modelu

Aby ocenić wpływ zmiennych objaśniających na czas poszukiwania pracy należy znaleźć estymatory nieznanych parametrów $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ modelu postaci (1.9). Model proporcjonalnej intensywności należy do klasy tzw. modeli półparametrycznych ze względu na niewyspecyfikowaną parametrycznie funkcję czasu $\lambda_0(t)$. Z tego też powodu do estymacji parametrów nie można zastosować klasycznej metody największej wiarygodności. Nieznana jest bowiem funkcja gęstości, która zależy od funkcji $\lambda_0(t)$. Podstawową metodą estymacji modeli półparametrycznych jest przedstawiona poniżej metoda częściowej wiarygodności zaproponowana przez Coxa w 1972 roku (por. [7]).

Załóżmy, że kohorta, na podstawie której będzie dokonywana estymacja, składa się n osób bezrobotnych. Niech $t_1, t_2, ..., t_n$ $(t_1 < t_2 < ... < t_n)$ oznaczają momenty, w których bezrobotni znaleźli pracę. Załóżmy, że kohorta składa się z osób o różnym czasie poszukiwania pracy co oznacza, że do kohorty nie należą dwie różne osoby, dla których czas poszukiwania pracy jest identyczny. Ponadto przyjmijmy następujące oznaczenia:

- Φ_i oznacza grupę osób pozostających bez pracy tuż przed momentem t_i,
- φ_i oznacza liczebność grupy Φ_i,
- Γ_i oznacza grupę osób, które znalazły pracę lub zrezygnowały z poszukiwania pracy w momencie t_i,
- γ_i oznacza liczebność grupy Γ_i,
- C_i oznacza wszystkie możliwe podzbiory γ_i-elementowe osób z grupy Φ_i.

Wówczas prawdopodobieństwo tego, że pierwsza osoba znajdzie pracę w momencie t_1 można zapisać jako:

$$p_1 = \frac{\lambda(t_1 \mid X_1)}{\sum_{i=1}^{n} \lambda(t_i \mid X_i)}, \tag{1.10}$$

gdzie $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ki})$ jest wektorem wartości k zmiennych objaśniających dla i-tej osoby. Korzystając z założenia proporcjonalności wzór (1.10) można zapisać następująco:

$$p_1 = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{j1}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ji}\right)}.$$

Ogólnie prawdopodobieństwo dla l-tej jednostki można zapisać jako:

$$p_l = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{jl}\right)}{\sum_{i=l}^{n} \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ji}\right)}, \qquad l = 1,2,\ldots,n.$$

W każdym przypadku prawdopodobieństwo to jest ilorazem intensywności dla osoby, która opuściła kohortę (znalazła pracę) i sumy intensywności dla tych osób, które miały szansę znaleźć pracę. Sumę w mianowniku w powyższych wzorach można oznaczyć jako sumę po wszystkich obserwacjach należących do grupy Φ_l:

$$\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{jl}\right)}{\sum_{i\in\Phi_l}\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{ji}\right)}.$$

W ten sposób zostaną opuszczone te momenty czasowe, w których nikt nie znalazł pracy. Funkcja częściowej wiarygodności jest iloczynem prawdopodobieństw znalezienia pracy dla wszystkich osób należących do kohorty i wyraża się wzorem:

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{ji}\right)}{\sum_{u\in\Phi_i}\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{ju}\right)}. \tag{1.11}$$

W badanej próbie, na podstawie której dokonuje się estymacji parametrów, może się zdarzyć sytuacja, że w tym samym czasie znajdzie pracę więcej niż jedna osoba. Oznacza to, że $\gamma_i > 1$ dla pewnych i. Uwzględniając przyjęte założenie, że liczba osób, dla których czas poszukiwania pracy jest równy t_i, jest równy γ_i oraz porządkując p różnych momentów czasowych, w których następowało znalezienie pracy lub zaprzestanie obserwacji w taki sposób, że $t_1 < t_2 < \ldots < t_p$ funkcja częściowej wiarygodności przyjmuje postać:

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\beta_j s_{ji}\right)}{\left(\sum_{u\in\Phi_i}\exp\left(\sum_{j=1}^{k}\beta_j x_{ju}\right)\right)^{\gamma_i}}, \tag{1.12}$$

gdzie $s_{ji} = \sum_{l\in\Gamma_i} x_{jl}$ jest sumą zmiennych objaśniających dla osób, które znalazły pracę

lub które zaprzestano obserwować w momencie t_i.

Maksymalizując funkcję wiarygodności (1.12) względem $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ uzyskuje się estymatory nieznanych parametrów. Zastosowanie klasycznej metody największej wiarygodności znajdowania estymatorów modelu Coxa byłoby możliwe w przypadku kiedy znany byłby rozkład zmiennej losowej oznaczającej czas poszukiwania pracy. Znajomość tego rozkładu implikuje parametryczną postać funkcji czasu $\lambda_0(t)$ w modelu określonym wzorem (1.9). Otrzymany wówczas model parametryczny zakłada odpowiednią postać funkcji gęstości dla rozkładu zmiennej losowej T. Na przykład dla wykładniczego czasu poszukiwania zatrudnienia należy zdefiniować funkcję $\lambda_0(t)$ jako stałą $\lambda_0(t) = \alpha$. Podobnie przyjmując $\lambda_0(t) = \alpha \cdot \ln t$ zakłada się rozkład Weibulla zmiennej losowej T, czy też $\lambda_0(t) = \alpha \cdot t$ rozkład Gompertza. Zatem dla znanego rozkładu czasu poszukiwania pracy określonego przez funkcję gęstości $f(t, \theta)$ zależną od nieznanych parametrów można zastosować klasyczną metodę największej wiarygodności estymacji parametrów przyjmując funkcję wiarygodności

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \theta),$$

gdzie $f(t, \theta) = \lambda(t \mid \theta) S(t \mid \theta)$. W przypadku obserwacji uciętych, kiedy jedyną dostępną informacją dla tych osób jest to, że poszukiwały one zatrudnienia co najmniej do momentu, w którym nastąpiło ucięcie, funkcja wiarygodności przyjmuje nieco inną postać. Otóż pamiętając, że $T = \min(Z, U)$ oraz, że zmienna Q przyjmuje wartość równą zero dla obserwacji uciętych mamy:

$$P(T = t, Q = 0) = P(Z > t) = S(t).$$

Uwzględniając obserwacje ucięte logarytm funkcji wiarygodności jest postaci:

$$\ln L(t_i, \theta) = \sum_{i=1}^{n} (1 - q_i) \ln f(t_i, \theta) + \sum_{i=1}^{n} q_i \ln S(t_i, \theta), \qquad (1.13)$$

gdzie q_i jest realizacją zmiennej losowej Q dla i-tej obserwacji.

Parametry, dla których funkcja (1.13) przyjmuje wartość największą, są estymatorami największej wiarygodności parametrów modelu parametrycznego Coxa.

1.3.3 Ocena istotności zmiennych w modelu

Przeprowadzona analiza czasu poszukiwania zatrudnienia zakładała, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_k$ w modelu są ustalone. Ważnym problemem jest jednak ocena wpływu poszczególnych zmiennych na szansę znalezienia pracy, jedne z nich mogą mieć większy wpływ inne z kolei mniejszy. Oceny istotności zmiennych zarówno w modelu Coxa jak i dowolnym modelu regresyjnym można dokonać przy pomocy testu Walda lub statystyki opartej na ilorazie funkcji wiarygodności.

Test Walda służy do badania istotności wybranych wcześniej cech poprzez parametr β, czyli do weryfikacji następujących hipotez statystycznych:

$$H_0 : \beta = 0,$$

$$H_1 : \beta \neq 0.$$

Dla testu Walda statystyka testowa określona jest wzorem (por. [20]):

$$W = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{Var\left(\hat{\beta}\right)}},$$

gdzie $\hat{\beta}$ jest estymatorem parametru uzyskanym metodą największej wiarygodności. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka ta ma rozkład normalny N(0,1).

Do wyboru istotnych zmiennych w modelu można wykorzystać również statystykę opartą na funkcji wiarygodności zdefiniowanej następująco (por. [6]):

$$\mathrm{D} = -2\log\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{b}},$$

gdzie

$$\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{b}} = \sup_{\boldsymbol{\beta}} \mathrm{L}(\boldsymbol{\beta}),$$

natomiast $L(\boldsymbol{\beta})$ oznacza funkcję wiarygodności parametrów w badanym modelu.

Ocena istotności zmiennych dokonywana będzie poprzez testowanie, czy uwzględnienie dodatkowych zmiennych w modelu poprawia jego dopasowanie do danych empirycznych. W tym celu należy porównać dopasowanie odpowiednich dwóch modeli regresyjnych (por. model postaci (1.14) oraz (1.15)).

Rozpatrzmy dla przykładu porównanie dwóch modeli Coxa.

Model 1:

$$\lambda(t \mid X_1, X_2, \ldots, X_h) = \lambda_0(t)\exp(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_h X_h) \tag{1.14}$$

i model 2:

$$\begin{aligned} &\lambda(t \mid X_1, X_2, \ldots, X_h, X_{h+1}, \ldots, X_k) = \\ &= \lambda_0(t)\exp(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_h X_h + \beta_{h+1} X_{h+1} + \ldots + \beta_k X_k). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Jak widać model (1.15) powstał z modelu (1.14) poprzez dołączenie zmiennych objaśniających $X_{h+1}, X_{h+2}, \ldots, X_k$. Mówimy wówczas, że model (1.14) jest zagnieżdżony w modelu (1.15). Porównując te dwa modele dokonana zostanie ocena istotności dołączonych zmiennych $X_{h+1}, X_{h+2}, \ldots, X_k$.

Niech D_1 oraz D_2 oznaczają statystyki oparte na funkcji wiarygodności odpowiednio dla modeli (1.14) i (1.15). Model (1.15) zawiera więcej zmiennych niż model (1.14), jest więc lepiej dopasowany do danych, zatem prawdziwa jest nierówność $D_2 \leq D_1$. Różnica $D_1 - D_2$ odzwierciedla efekt dołączenia zmiennych $X_{h+1}, X_{h+2}, \ldots, X_k$ do modelu (1.14). Obserwując jej wartości można rozstrzygnąć, czy dołączenie dodatkowych zmiennych istotnie poprawia dopasowanie modelu do danych empirycznych.

Niech

$$D_1 = -2 \cdot \left(\log \hat{L}_{b_1}\right),$$

$$D_2 = -2 \cdot \left(\log \hat{L}_{b_2}\right).$$

Wówczas statystyka

$$D_1 - D_2 = \left(-2 \cdot \log \hat{L}_{b_1}\right) - \left(-2 \cdot \log \hat{L}_{b_2}\right) =$$

$$= -2 \cdot \left(\log \hat{L}_{b_1} - \log \hat{L}_{b_2}\right) \tag{1.16}$$

ma asymptotyczny rozkład chi-kwadrat o $k-h$ stopniach swobody (por. [6]) i jest statystyką testową do weryfikacji hipotezy

$$H_0: \ \lambda(t \mid \mathbf{X}) \text{ nie zależy od zmiennych: } X_{h+1}, X_{h+2}, \ldots, X_k$$

przeciwko

$$H_1 \quad \lambda(t \mid \mathbf{X}) \text{ zależy od zmiennych: } X_{h+1}, X_{h+2}, \ldots, X_k .$$

Hipotezę zerową orzekającą o tym, że dołączenie do modelu zmiennych $X_{h+1}, X_{h+2}, \ldots, X_k$ nie poprawia dopasowania modelu do danych, to znaczy wyszczególnione zmienne są nieistotne, należy odrzucić na poziomie istotności α, gdy obliczona wartość statystyki testowej (1.16) będzie większa od wartości krytycznej χ_α wyznaczonej ze wzoru:

$$P(Y > \chi_\alpha) = \alpha ,$$

gdzie zmienna losowa Y ma rozkład chi-kwadrat o $k-h$ stopniach swobody.

Odrzucenie hipotezy zerowej oznacza, że dołączone zmienne $X_{h+1}, X_{h+2}, \ldots, X_k$ mają istotny wpływ na czas poszukiwania zatrudnienia.
Statystyka (1.16) może zostać również wykorzystana do oceny istotności pojedynczej zmiennej objaśniającej poprzez porównanie takich dwóch zagnieżdżonych modeli, które różnią się między sobą tylko o tę jedną zmienną objaśniającą.

1.3.4 Weryfikacja założenia proporcjonalności

Założenie o proporcjonalnej intensywności w modelu Coxa oznacza, iż iloraz funkcji intensywności dla każdych dwóch jednostek o różnych wartościach zmiennych objaśniających jest niezależny od czasu. Założenie to wynika bezpośrednio z definicji modelu Coxa:

$$\frac{\lambda(t \mid x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki})}{\lambda(t \mid x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{kj})} = \frac{\lambda_0(t)\exp(\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} \ldots + \beta_k x_{ki})}{\lambda_0(t)\exp(\beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} \ldots + \beta_k x_{kj})},$$

gdzie wektor realizacji $(x_{1l}, x_{2l}, \ldots, x_{kl})$ oznacza zaobserwowane wartości zmiennych objaśniających dla l-tej osoby bezrobotnej.

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\frac{\lambda(t \mid x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki})}{\lambda(t \mid x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{kj})} = \exp(\beta_1 (x_{1i} - x_{1j}) + \beta_2 (x_{2i} - x_{2j}) + \ldots + \beta_k (x_{ki} - x_{kj})).$$

Założenie proporcjonalności można ocenić graficznie wykreślając w układzie współrzędnych funkcję intensywności dla dwóch obserwowanych osób bezrobotnych w zależności od czasu. Jeśli założenie jest spełnione, to wykresy funkcji dla osoby i-tej oraz j-tej są równoległe do siebie. Metodę graficzną można również zastosować w odniesieniu do funkcji bezczynności. Model Coxa postaci (1.9), w którym wszystkie zmienne są niezależne od czasu można zapisać wykorzystując funkcję bezczynności w następujący sposób:

$$S_i(t) = S_0(t)^{\exp(\sum \beta_k x_{ik})}, \tag{1.17}$$

gdzie $S_0(t)$ jest funkcją bezczynności dla jednostki, dla której wszystkie zmienne objaśniające przyjmują wartość równą zero:

$$S_0(t) = \exp\left(- \int_0^t \lambda_0(s) ds \right). \tag{1.18}$$

Po podwójnym logarytmowaniu funkcji bezczynności i wykorzystaniu wzorów (1.17) oraz (1.18) otrzymuje się:

$$\ln(-\ln S_i(t)) = \ln(-\ln S_0(t)) + \sum \beta_k x_{ik} . \tag{1.19}$$

Z równania (1.19) wynika, że jeśli zmienne są niezależne od czasu, to różnice wartości $\ln(-\ln S_i(t))$ między grupami z różnymi wektorami zmiennych objaśniających są niezmienne w czasie. Wykresy przekształconych funkcji bezczynności dla dwóch różnych grup powinny być równoległe do siebie.

Jako estymator funkcji bezczynności do testowania założenia proporcjonalności wykorzystuje się estymator zaproponowany przez Kaplana i Meiera (por. [1]).

Niech momenty $t_1, t_2, \ldots, t_k$ będą uporządkowanymi $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k)$ różnymi momentami czasowymi, w których obserwowane osoby znajdowały zatrudnienie. Estymator Kaplana-Meiera funkcji bezczynności określony jest następująco:

$$\hat{S}(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad t < t_1 \\ \prod\limits_{t_i \le t} \left(1 - \dfrac{m_i}{b_i}\right) & \text{jeżeli} \quad t \ge t_1 \end{cases}, \tag{1.20}$$

gdzie

m_i oznacza liczbę osób znajdujących zatrudnienie w chwili t_i,

b_i oznacza liczbę osób mających szansę na znalezienie pracy w momencie t_i.

Dowodzi się (por. [1]), że estymator ten jest asymptotycznie nieobciążony i zgodny. Estymator Kaplana-Meiera jest określony jedynie dla $t \in [0, t_k]$ oraz uwzględnia, co w praktyce jest bardzo ważne, poprzez wartości b_i obserwacje ucięte.

Niedopuszczalne jest stosowanie modelu Coxa w przypadku, kiedy wykresy odpowiednio przekształconych funkcji bezczynności krzyżują się, czyli założenie proporcjonalności nie jest spełnione. W pracy [34] zostało pokazane do jakich błędnych wniosków można dojść stosując model proporcjonalnej intensywności Coxa uwzględniający zmienną, dla której nie jest spełnione podstawowe założenie proporcjonalności.

1.4 Model nieproporcjonalnej intensywności Coxa

Model proporcjonalnej intensywności Coxa można uogólnić w ten sposób, aby uwzględnić również zmienne objaśniające zmieniające się w czasie (zależne od czasu). Przykładem takiej zmiennej mogą być umiejętności poszukującego zdobywane podczas zbierania danych. Z taką sytuacją mamy do czynienia w przypadku, kiedy w trakcie obserwacji kohorty, poszukujący został skierowany na szkolenie, po ukończeniu którego zdobył pewne umiejętności. Wówczas zmienną zależną od czasu $Y(t)$ definiuje się jako iloczyn zmiennej niezależnej od czasu X oznaczającej posiadanie określonych umiejętności (np. jeśli bezrobotny posiada owe umiejętności to $X=1$ w przeciwnym wypadku $X=0$) i funkcji czasu $g(t)$ określającej moment, od którego poszukujący posiada określone umiejętności: $Y(t)=X\cdot g(t)$. Jeżeli zostały one zdobyte w momencie t_0, to funkcja $g(t)$ definiowana jest następująco jeżeli:

$$g(t)=\begin{cases}1 & \text{jeżeli} \quad t>t_0,\\ 0 & \text{jeżeli} \quad t\le t_0.\end{cases}$$

Załóżmy zatem, że wektor zmiennych objaśniających jest wektorem składającym się z p zmiennych niezależnych od czasu oraz q zmiennych zależnych od czasu i jest postaci:

$$\mathbf{X(t)}^T=\left(\underbrace{X_1,X_2,\dots,X_p}_{\text{niezależne od czasu}},\underbrace{Y_1(t),Y_2(t),\dots,Y_q(t)}_{\text{zależne od czasu}}\right).$$

Wówczas model nieproporcjonalnej intensywności Coxa definiuje się następująco:

$$\lambda(t\mid \mathbf{X}(t))=\lambda_0(t)\exp\left(\sum_{i=1}^{p}\beta_i X_i+\sum_{j=1}^{q}\alpha_j Y_j(t)\right). \tag{1.21}$$

W modelu (1.20) zakłada się, że intensywność znajdowania zatrudnienia zależy od wartości zmiennej zależnej od czasu $Y_j(t)$ mierzonej w tym samym czasie t.

Intensywność mierzona w chwili t nie zależy natomiast od wartości tej zmiennej w czasie wcześniejszym lub późniejszym.

Możliwa jest jednak modyfikacja modelu (1.21) w przypadku, kiedy interesująca jest zależność funkcji intensywności od zmiennej $Y_j(t)$ mierzonej nie w tym samym czasie co funkcja intensywności, lecz mierzonej w czasie wcześniejszym. Modyfikacji takiej dokonuje się poprzez uwzględnienie opóźnienia w czasie dla j-tej zmiennej L_j:

$$\lambda(t \mid \mathbf{X}(t)) = \lambda_0(t)\exp\left(\sum_{i=1}^{p}\beta_i X_i + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j Y_j(t - L_j)\right).$$

Estymacji parametrów modelu (1.21) dokonuje się metodą częściowej wiarygodności przedstawioną w punkcie 1.3.2.

Niech dla dwóch różnych osób zaobserwowane wektory zmiennych objaśniających będą zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{X}_l^T(t) = (x_{1l}, \ldots, x_{pl}, y_{1l}(t), \ldots, y_{ql}(t)),$$

$$\mathbf{X}_s^T(t) = (x_{1s}, \ldots, x_{ps}, y_{1s}(t), \ldots, y_{qs}(t)).$$

Wówczas stosunek funkcji intensywności dla tych dwóch osób jest zależny od czasu, bowiem wyraża się wzorem:

$$\upsilon = \frac{\lambda(t \mid \mathbf{X}_l(t))}{\lambda(t \mid \mathbf{X}_s(t))} = \frac{\lambda_0(t)\exp\left(\sum_{i=1}^{p}\beta_i x_{il} + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j y_{jl}(t)\right)}{\lambda_0(t)\exp\left(\sum_{i=1}^{p}\beta_i x_{is} + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j y_{js}(t)\right)} =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{p}\beta_i (x_{il} - x_{is}) + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j (y_{jl}(t) - y_{js}(t))\right).$$

Model (1.21) może być zatem stosowany w przypadku, kiedy zastosowanie modelu proporcjonalnej intensywności Coxa nie jest możliwe ze względu na niespełnione założenie proporcjonalności.

Model (1.21) można również wykorzystać w celu sprawdzenia założenia proporcjonalności (por. [14], [35]). Wówczas czas poszukiwania zatrudnienia należy podzielić na l przedziałów $[0,t_1),[t_1 t_2),\ldots,[t_{l-1},t_l)$. Następnie do oceny proporcjonalności ze względu na j-tą zmienną X_j należy dopasować model (1.9) zastępując w nim zmienną X_j zmiennymi $X_j \cdot \mathbf{I}_{\{t_{k-1}\le t<t_k\}}$, gdzie $k=1,2,\ldots,l$ oraz

$$\mathbf{I}_{\{t_{k-1}\le t<t_k\}} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad t \in [t_{k-1},t_k), \\ 0 & \text{gdy} \quad t \notin [t_{k-1},t_k). \end{cases}$$

Otrzymany model zawiera zatem zmienne zależne od czasu i jest postaci:

$$\lambda(t \mid X_1, X_2, \ldots, X_s) =$$

$$= \lambda_0(t)\exp\left(\beta_1 X_1 + \ldots + \beta_{j-1}X_{j-1} + \sum_{k=1}^{l} \beta_{jk} X_j \mathbf{I}_{\{t_{k-1}\le t<t_k\}} + \beta_{j+1}X_{j+1} + \ldots + \beta_s X_s\right).$$

Oznaką niespełnienia warunku proporcjonalności modelu ze względu na zmienną X_j będą różne współczynniki $\hat{\beta}_{j1},\hat{\beta}_{j2},\ldots,\hat{\beta}_{jl}$.

1.5 Model logitowy

1.5.1 Uwagi wstępne

Modele opisane w paragrafie 1.3 oraz 1.4 dotyczą problemu znajdowania zatrudnienia zakładając, że czas poszukiwania pracy opisuje ciągła zmienna losowa T. Rozpatrzmy teraz model analizy zjawiska znajdowania zatrudnienia, gdy zmienna T jest zmienną o czasie dyskretnym. Oznacza to, iż znalezienie pracy przez poszukującego jest rejestrowane w ustalonych momentach czasowych. Takimi punktami czasowymi mogą być na przykład kolejne miesiące poszukiwania pracy. Wówczas zmienna losowa przyjmuje wartości ze zbioru liczb naturalnych. Dla dyskretnej zmiennej T można sformułować funkcję rozkładu prawdopodobieństwa:

$$p_i = P(T = t_i) \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,k.$$

Dla uporządkowanych momentów czasowych $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ definiuje się następująco dystrybuantę:

$$F(t) = P(T \le t) = \sum_{t_i \le t} p_i ,$$

funkcję bezczynności:

$$S(t) = P(T > t) = \sum_{t_i > t} p_i$$

oraz intensywności:

$$\lambda(t) = P(T = t \mid T \ge t). \tag{1.22}$$

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa interpretowana jest jako prawdopodobieństwo znalezienia zatrudnienia w momencie t, natomiast funkcję intensywności jako prawdopodobieństwo znalezienia zatrudnienia w chwili t pod warunkiem, że nie zostało ono znalezione do chwili t

W niniejszym paragrafie analizowana będzie liniowa zależność prawdopodobieństwa znalezienia zatrudnienia w ustalonym momencie t dla i-tej osoby od ustalonych cech charakteryzujących tę osobę. Ogólnie zależność tę można zapisać następująco:

$$p_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki}. \tag{1.23}$$

Ponieważ estymatory $\hat{\beta}_i$ mogą przyjmować dowolne wartości, a estymator prawdopodobieństwa znalezienia pracy $\hat{p}_{it}$ wyraża się wzorem

$$\hat{p}_{it} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki},$$

więc takie podejście nie gwarantuje nam, że otrzymane prawdopodobieństwo będzie należało do przedziału $[0,1]$. Dlatego wprowadza się przekształcenie logitowe (por. [37]) odwzorowujące skalę parametru p z przedziału $[0,1]$ na przedział $(-\infty,+\infty)$:

$$\mathrm{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

Transformacja ta ma następujące własności:

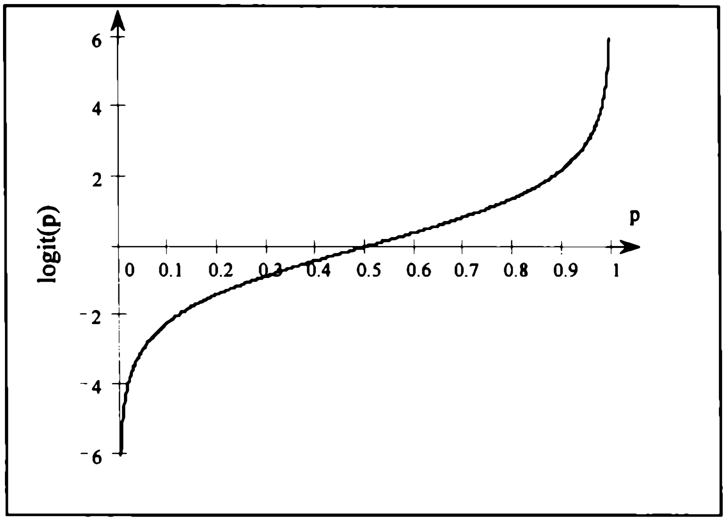
$$p \in (0,1) \Leftrightarrow \mathrm{logit}(p) \in (-\infty,+\infty),$$
$$p \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{logit}(p) \to -\infty, \qquad p \to 1 \Leftrightarrow \mathrm{logit}(p) \to +\infty$$

Wykres funkcji logit przedstawiono na rysunku 1.1. Do modelowania prawdopodobieństwa wykorzystywana jest również transformata probitowa i logarytmiczna (por. [37], [45]), ponieważ jednak dotyczą one ciągłej zmiennej losowej nie będą w pracy rozpatrywane.

Stosując przekształcenie logitowe prawdopodobieństwa p_{it} w modelu (1.23) otrzymujemy model logitowy (por. [37],[40],[45]), który zaliczany jest do dyskretnych modeli wyrażających zależność prawdopodobieństwa znalezienia zatrudnienia od zmiennych objaśniających.

Modele logitowe mogą być szacowane zarówno na podstawie danych jednostkowych (indywidualnych) jak i danych pogrupowanych w tabeli kontyngencji ze względu na różne wartości zmiennych objaśniających. Załóżmy, że w kohorcie, którą będziemy analizować, znajduje się N osób, które zostały podzielone na n klas ze względu na różne wartości k zmiennych objaśniających. Oznaczmy przez n_i liczność

i-tej klasy, gdzie $N=\sum_{i=1}^{n} n_i$ oraz niech Y_i oznacza zmienną zliczającą osoby znajdujące zatrudnienie w i-tej klasie. Zmienna Y_i często jest nazywana zmienną odpowiedzi.



Rysunek 1.1. Przekształcenie logitowe

Oznaczmy przez p_{it} prawdopodobieństwo znalezienia pracy w momencie t przez osobę należąca do i-tej klasy pod warunkiem, że osoba ta nie znalazła zatrudnienia wcześniej. Na podstawie wzoru (1.22) prawdopodobieństwo p_{it} można zastąpić funkcją intensywności $\lambda_i(t)$ określoną w chwili t dla osób z i-tej klasy. Wówczas zależność prawdopodobieństwa $\lambda_i(t)$ od k zmiennych objaśniających $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki}$ związanych z i-tą klasą wyprowadzimy z następującego modelu:

$$\operatorname{logit}(p_{it}) = \log\left(\frac{p_{it}}{1-p_{it}}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki}.$$

Dokonując wprowadzonej wyżej zamiany otrzymujemy:

$$\operatorname{logit}(\lambda_i(t)) = \log\left(\frac{\lambda_i(t)}{1-\lambda_i(t)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki},$$

skąd

$$\lambda_i(t) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki})}.$$

W modelu logitowym w analogiczny sposób jak w modelu Coxa można także uwzględniać interakcje pomiędzy dwiema zmiennymi objaśniającymi.

W celu estymacji modelu należy wyznaczyć estymatory $k+1$ parametrów $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k) = \boldsymbol{\beta}$. Odpowiednie estymatory można otrzymać metodą największej wiarygodności maksymalizując logarytm funkcji wiarygodności postaci:

$$\log L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_i \left\{ \log \binom{n_i}{y_i} + y_i \log(p_i) - (n_i - y_i) \cdot \log(1 - p_i) \right\} =$$

$$= \sum_i \left\{ \log \binom{n_i}{y_i} + y_i \log\left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right) - n_i \log(1 - p_i) \right\} =$$

$$= \sum_i \left\{ \log \binom{n_i}{y_i} + y_i \eta_i - n_i \log\left(1 + e^{\eta_i}\right) \right\},$$

gdzie $\eta_i = \sum_{j=0}^{k} \beta_j x_{ji}$, $x_{0i} = 1$ dla każdego i.

Mając estymator $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ wektora parametrów można dokonać estymacji części liniowej modelu $\hat{\eta}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}$, a następnie prawdopodobieństwa zdobycia zatrudnienia w i-tej klasie $\hat{\lambda}_i(t) = \dfrac{e^{\hat{\eta}_i}}{1 + e^{\hat{\eta}_i}}$.

Do wyboru zmiennych mających istotny wpływ na prawdopodobieństwo analizowane w modelu oraz porównywania dwóch wybranych modeli wykorzystuje się procedury opisane wcześniej w punkcie 1.3.3.

Modele logitowe należy analizować dla każdego ustalonego momentu czasu t oddzielnie, dlatego też w dalszej części pracy zamiast oznaczenia prawdopodobieństw p_{it}, $\lambda_i(t)$ stosowane będą odpowiednio oznaczenia p_i oraz λ_i.

1.5.2 Estymacja względnej szansy i ilorazu szans

Jednym ze sposobów oceny ryzyka lub szansy zajścia określonego zdarzenia jest szacowanie tzw. względnej szansy i ilorazu szans. Obie wielkości mogą być wyznaczane na podstawie logitowego modelu liniowego oceniającego wpływ odpowiednich czynników na szansę znalezienia pracy.

Najprostszym wskaźnikiem znajdowania zatrudnienia jest częstość nowych zatrudnień wśród populacji osób poszukujących pracy w zadanym czasie. Głównym celem estymacji tego wskaźnika jest możliwość porównania szansy znalezienia zatrudnienia przy różnych poziomach kategorialnych zmiennych objaśniających, a dzięki temu ocena zależności między poszukiwaniem pracy a badaną zmienną. Interesująca jest więc miara różnicy szansy zatrudnienia dla dwóch różnych kategorii zmiennej. Aby dokonać takiej oceny oprócz dostępnych zmiennych objaśniających dla każdej badanej osoby poszukującej zatrudnienia musi być zdefiniowana tak zwana zmienna odpowiedzi określająca, czy dana osoba znalazła zatrudnienie w badanym okresie.

Wyróżnia się dwie główne metody pozyskiwania informacji:

1) badania prospektywne,
2) badania retrospektywne.

Badania prospektywne oparte są na danych obserwowanych przez długi czas. Z populacji, w której chcemy zbadać zjawisko bezrobocia, wybieramy grupę ludzi poszukujących pracy. Następnie obserwujemy tę grupę przez zadany okres, po upływie którego samoczynnie w sposób losowy tworzą się dwie podgrupy osób w dalszym ciągu bezrobotnych i osób, które znalazły zatrudnienie wraz z zaobserwowanym dla nich czasem, jaki potrzebowali na znalezienie pracy. Natomiast w badaniach retrospektywnych pobierana jest część próby spośród tych osób, które w ostatnim czasie poszukiwały zatrudnienia i odniosły sukces, to znaczy znalazły pracę i część spośród tych osób, które również poszukiwały pracy w ostatnim okresie, ale niestety jeszcze jej nie znalazły. Liczba osób, które znalazły zatrudnienie nie jest losowa, decyduje o niej badacz pobierając próbę. Informację o czasie poszukiwania zatrudnienia zdobywa się wówczas na podstawie dostępnych dokumentów, np. rejestru bezrobotnych w powiatowych urzędach pracy lub opierając się na pamięci samych badanych. Zaletą badania retrospektywnego jest to, że można je przeprowadzić znacznie szybciej i mniejszym kosztem, niż badanie prospektywne.

Pozytywną stroną badań prospektywnych jest to, że szansę znalezienia zatrudnienia w każdej grupie można estymować bezpośrednio z ilorazu:

$$\frac{\text{liczba osób znajdujących zatrudnienie}}{\text{liczba obserwacji w badanym okresie}}.$$

W przypadku badań retrospektywnych liczba osób, które znalazły zatrudnienie nie jest porównywalna z liczbą osób znajdujących zatrudnienie w populacji osób bezrobotnych, ponieważ badacz sam ustala tę liczbę wybierając do próby tę część osób poszukujących pracy w ostatnim okresie, które odniosły sukces poprzez znalezienie zatrudnienia. Dlatego też bezpośrednio z danych nie można dobrze estymować szansy znajdowania zatrudnienia. Badacz zwiększając odpowiednią część próby mógłby uzyskać dowolne oszacowanie tej szansy.

Załóżmy teraz, że chcemy przeanalizować, jak zmienia się szansa znalezienia zatrudnienia w zależności od zmiennej przyjmującej dwie różne wartości w trakcie obserwacji osób poszukujących pracy. Tabela 1.3 stanowi ogólną reprezentację danych, pojawiających się w takiej sytuacji. Grupy 1 i 2 dotyczą osób, u których zanotowano odpowiednio pierwszą i drugą wartość zmiennej. Wartości te mogą oznaczać np. płeć.

Tabela 1.3. Ogólna prezentacja liczebności empirycznych dla badań prospektywnych

	Grupa 1	Grupa 2	**Suma**
Zatrudnieni	a	b	$\boldsymbol{a+b}$
Bezrobotni	c	d	$\boldsymbol{c+d}$
Suma	$\boldsymbol{a+c}$	$\boldsymbol{b+d}$	$\boldsymbol{n}$

Przez p_1 oznaczamy szansę znalezienia zatrudnienia przez osoby, dla których obserwowana jest pierwsza wartość zmiennej, natomiast p_2 niech oznacza szansę znalezienia zatrudnienia w grupie drugiej. Można obliczyć estymatory największej wiarygodności szans dla obu grup - wynoszą one $\frac{a}{a+c}$ dla pierwszej i $\frac{b}{b+d}$ dla drugiej grupy. Iloraz prawdopodobieństw p_1 i p_2 jest miarą zmieniającej się szansy zatrudnienia dla badanych grup i oznaczany jest przez ρ.

Mamy więc

$$\rho = \frac{p_1}{p_2}.$$

Estymatorem dla ρ jest wyrażenie postaci:

$$\hat{\rho} = \frac{a/(a+c)}{b/(b+d)}.$$

Można powiedzieć, że w badanym okresie osoba z grupy 1 ma ρ razy większą szansę na zatrudnienie niż osoba z grupy 2. Szanse te w obu grupach są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy wartość ρ jest bliska 1. Szansa względna ρ mniejsza od 1 wskazuje, że grupa pierwsza jest bardziej zagrożona bezrobociem niż druga, ρ większe od 1 zinterpretujemy odwrotnie.

Statystyka $\log\hat{\rho}$ ma rozkład asymptotycznie normalny (por. [37]), który może być użyty do konstrukcji przedziału ufności dla ρ (wykorzystany został logarytm $\hat{\rho}$, gdyż jest on lepiej aproksymowany rozkładem normalnym niż $\hat{\rho}$ zwłaszcza, gdy całkowita liczba obserwacji nie jest zbyt duża).

Jeżeli

$$\log\hat{\rho} = \log\left[\frac{a(b+d)}{b(a+c)}\right],$$

to

$$\log\hat{\rho} \sim \mathrm{AN}\left(\log\rho, \sigma^2_{\log\hat{\rho}}\right), \tag{1.24}$$

gdzie

$$\sigma^2_{\log\hat{\rho}} = \left[\frac{1-p_1}{(a+c)p_1} + \frac{1-p_2}{(b+d)p_2}\right].$$

Asymptotycznie nieobciążony estymator wariancji $\sigma^2_{\log\hat{\rho}}$ ma postać (por. [6]):

$$\hat{\sigma}^2_{\log\hat{\rho}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b+d}$$

Korzystając z faktu (1.24) nietrudno już zbudować 100(1-α)% przedział ufności dla $\log\rho$. Ma on następującą postać:

$$\left[\log\hat{\rho} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\rho}}, \log\hat{\rho} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\rho}}\right],$$

gdzie $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jest kwantylem rzędu $1-\frac{\alpha}{2}$ rozkładu normalnego N(0,1).

Przedział ufności dla rzeczywistego ρ otrzymuje się poprzez przekształcenie uzyskanych granic za pomocą funkcji wykładniczej, tzn. funkcji odwrotnej do funkcji logarytmicznej. Ma on zatem postać:

$$\left[\hat{\rho}\cdot\exp\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\rho}}\right), \hat{\rho}\cdot\exp\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\rho}}\right)\right].$$

W sytuacji, gdy pewne klatki tabeli 1.3 są puste, rozkład asymptotyczny zmiennej losowej $\log\hat{\rho}$ będzie również rozkładem normalnym po uwzględnieniu jednak pewnej poprawki. Poprawka ta ma postać:

$$\log\hat{\rho} = \log\left[\frac{(a+0.5)\cdot(b+d+0.5)}{(a+c+0.5)\cdot(b+0.5)}\right].$$

Dla tak określonej statystyki estymator wariancji $\sigma^2_{\log\hat{\rho}}$ obliczany jest zgodnie ze wzorem (por. [6]):

$$\hat{\sigma}^2_{\log \hat{\rho}} = \frac{1}{a+0.5} - \frac{1}{a+c+0.5} + \frac{1}{b+0.5} - \frac{1}{b+d+0.5}.$$

Estymator szansy względnej można wyznaczyć jedynie w badaniach przyszłościowych. Mimo, że w badaniach retrospektywnych dostępne dane można przedstawić w postaci tabeli analogicznej do tej z badań prospektywnych, to w interpretacji tej tabeli jest zasadnicza różnica.

Tabela 1.4. Ogólna prezentacja liczebności empirycznych dla badań retrospektywnych

	Grupa 1	Grupa 2	**Suma**
Zatrudnieni	a	b	$\boldsymbol{a+b}$
Bezrobotni	c	d	$\boldsymbol{c+d}$
Suma	$\boldsymbol{a+c}$	$\boldsymbol{b+d}$	$\boldsymbol{n}$

W badania retrospektywnych nie jest dokonywana bowiem losowa selekcja na zatrudnionych i bezrobotnych - status aktywności zawodowej znany jest z góry. Nie można oceniać szansy zatrudnienia na podstawie liczby osób zatrudnionych w taki sam sposób jak dla badań prospektywnych, gdyż sami o tej liczbie decydujemy planując eksperyment. W sposób losowy rozkładają się natomiast kategorie zmiennej wśród badanych. Można jednak w tym przypadku użyć metod opartych na obliczeniach w każdej grupie z osobna.

Jeżeli przyjmiemy, że p_1^* oznacza prawdopodobieństwo, iż u osób zatrudnionych zaobserwowano pierwszą wartość zmiennej i uznamy to za sukces, to $1-p_1^*$ będzie prawdopodobieństwem zaobserwowania u zatrudnionych osób drugiej wartości zmiennej (porażka) i wówczas $\frac{p_1^*}{1-p_1^*}$ jest stosunkiem prawdopodobieństwa sukcesu do prawdopodobieństwa porażki dla osób zatrudnionych. Dla osób bezrobotnych analogicznie można zdefiniować iloraz $\frac{p_2^*}{1-p_2^*}$. Można więc wyznaczyć

„szanse” $\frac{a/(a+b)}{b/(a+b)}=\frac{a}{b}$ i $\frac{c/(c+d)}{d/(c+d)}=\frac{c}{d}$ odpowiednio dla grup zatrudnionych i bezrobotnych, będące estymatorami wartości $\frac{p_1^*}{1-p_1^*}$ oraz $\frac{p_2^*}{1-p_2^*}$. Iloraz ułamków $\frac{p_1^*}{1-p_1^*}$ i $\frac{p_2^*}{1-p_2^*}$ jest miarą porównania obu grup. Nazywa się go ilorazem szansy i oznacza przez ψ:

$$\psi=\frac{p_1^*}{1-p_1^*}\cdot\frac{1-p_2^*}{p_2^*}.$$

Estymator ilorazu szans wyraża się następującym wzorem (por. [6]):

$$\hat{\psi}=\frac{ad}{bc}. \tag{1.25}$$

Konstrukcja przedziału ufności dla rzeczywistego ψ opiera się na statystyce $\log\hat{\psi}$. Dla $\hat{\psi}=\frac{ad}{bc}$ rozkład statystyki $\log\hat{\psi}$ jest asymptotycznie normalny (por.[37]):

$$\log\hat{\psi}\sim \mathrm{AN}\left(\log\psi,\sigma^2_{\log\hat{\psi}}\right), \tag{1.26}$$

gdzie

$$\sigma^2_{\log\hat{\psi}}=\left[\frac{1}{(a+b)\cdot p_1^*\cdot\left(1-p_1^*\right)}+\frac{1}{(c+d)\cdot p_2^*\cdot\left(1-p_2^*\right)}\right].$$

Dla tego rozkładu estymator wariancji $\sigma^2_{\log\hat{\psi}}$ ma postać:

$$\hat{\sigma}^2_{\log\hat{\psi}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Wykorzystując rozkład statystyki $\log\hat{\psi}$ można utworzyć przedział ufności dla logarytmu ψ na poziomie ufności $1-\alpha$. Przyjmie on postać:

$$\left[\log\hat{\psi} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\psi}},\ \log\hat{\psi} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\psi}}\right].$$

Po odpowiednim przekształceniu tego przedziału otrzymuje się następujący 100(1-α)% przedział ufności dla rzeczywistej wartości ψ

$$\left[\hat{\psi} \cdot \exp\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\psi}}\right),\ \hat{\psi} \cdot \exp\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\log\hat{\psi}}\right)\right].$$

Konstrukcja przedziału w przypadku, gdy w tabeli 1.4 danych występują zera opiera się na statystyce $\log\hat{\psi}$ dla $\hat{\psi} = \dfrac{(a+0.5)\cdot(d+0.5)}{(b+0.5)\cdot(c+0.5)}$. Rozkład asymptotyczny $\log\hat{\psi}$ nie ulega zmianie, lecz tym razem wariancja wyraża się wzorem (por. [6]):

$$\hat{\sigma}^2_{\log\hat{\psi}} = \frac{1}{a+0.5} + \frac{1}{b+0.5} + \frac{1}{c+0.5} + \frac{1}{d+0.5}.$$

Szansę znalezienia zatrudnienia można wyznaczyć na podstawie logitowego modelu liniowego, jednak w przypadku badań retrospektywnych bezpośrednio z modelu nie można estymować prawdopodobieństwa znalezienia zatrudnienia ze względu na to, iż sami decydujemy o liczbie osób w próbie, które znalazły pracę. Można jednak logitowy model liniowy wykorzystać do badania zależności prawdopodobieństwa znalezienia zatrudnienia od zmiennych objaśniających oraz do wyznaczania odpowiednich wskaźników ψ. Okazuje się, że wskaźniki ψ wyznaczone dla badań prospektywnych i retrospektywnych są takie same (por. [12]) zatem w kolejnych rozdziałach zostanie przedstawiona zależność między wskaźnikiem ψ a parametrami modelu logitowego.

1.5.3 Zależność szansy zatrudnienia od zmiennej mającej *m* kategorii

Załóżmy, że prawdopodobieństwo p_j znalezienia zatrudnienia przez osobę należącą do j-tej klasy zależy od cechy która ma m kategorii (zmiennej przyjmującej *m* różnych wartości). Przykładem takiej cechy może być wiek, który zostanie podzielony na 4 następujące przedziały:

od 20 do 29 lat,
od 30 do 39 lat,
od 40 do 49 lat,
od 50 do 59 lat.

Zmienna wiek jest więc zmienną uwzględniającą cztery grupy wiekowe, $m = 4$. Osobom w wieku od 20 do 29 lat zostanie przypisana pierwsza kategoria cechy, w wieku od 30 do 39 lat – druga, w wieku 40-49 lat – trzecia, od 50-59 lat – czwarta.

Ponieważ interesujący jest wpływ każdej kategorii cechy oddzielnie na szansę znalezienia zatrudnienia wprowadzonych zostanie *m-1* zmiennych wskaźnikowych często nazywanych także zmiennymi pomocniczymi, których definicje prezentuje tabela 1.5.

Tabela 1.5. Definicje zmiennych wskaźnikowych dla cechy mającej *m* kategorii

Kategoria cechy	X_1	X_2	X_3	...	X_{m-1}
1	1	0	0	...	0
2	0	1	0	...	0
3	0	0	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m-1	0	0	0	0	1
m	-1	-1	-1	...	-1

Każda zmienna wskaźnikowa X_i $(i = 1,2,\ldots,m-1)$ przyjmuje trzy różne wartości: 1,0,-1:

- wartość równą 1 dla grupy osób, u których zaobserwowano i-tą kategorię cechy,
- wartość równą -1 dla grupy osób, u których zaobserwowano m-tą kategorię cechy,
- wartość równą 0 dla grupy osób, u których zaobserwowano kategorię cechy różną od i-tej oraz m-tej.

Tabela 1.5 zawiera jeden z wielu możliwych przykładów wprowadzania zmiennych pomocniczych (wskaźnikowych). W rozdziale drugim zostanie zaprezentowana inna metoda definiowania takich zmiennych.

Pakiety statystyczne często automatycznie wprowadzają zmienne pomocnicze. Użytkownik pakietu musi jednak dokładnie znać sposób kodowania tych zmiennych, ponieważ każda definicja tych zmiennych pociąga za sobą odpowiednią interpretację parametrów modelu.

W pracy podana zostanie interpretacja parametrów modelu dla zmiennych pomocniczych zdefiniowanych w tabeli 1.5.

Model logitowy uwzględniający cechę m-kategorialną przyjmie wówczas postać:

$$\operatorname{logit}(p_j) = \beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \ldots + \beta_{m-1} x_{m-1j}. \tag{1.27}$$

Dla osób z pierwszej grupy, czyli z zaobserwowaną pierwszą kategorią cechy wszystkie wartości zmiennych wskaźnikowych z wyjątkiem x_1 są równe 0. Stąd prawdopodobieństwo znalezienia zatrudnienia w tej grupie opisuje model

$$\operatorname{logit}(p_1) = \beta_0 + \beta_1.$$

Przy j-tej kategorii cechy $(j = 2,3,\ldots,m-1)$ wszystkie wartości zmiennych wskaźnikowych oprócz x_j przyjmują wartość zero, tak więc model (1.27) dla prawdopodobieństwa znalezienia zatrudnienia w j-tej grupie przyjmuje postać:

$$\operatorname{logit}(p_j) = \beta_0 + \beta_j.$$

A zatem iloraz szans znalezienia zatrudnienia przez osoby z j-tej grupy w stosunku do osób z pierwszej grupy wynosi:

$$\psi_{j/1} = \frac{p_j}{1-p_j} \cdot \frac{1-p_1}{p_1} = \frac{e^{\beta_0+\beta_j}}{e^{\beta_0+\beta_1}} = e^{\beta_j-\beta_1}, \qquad j = 2,3,\ldots,m-1,$$

czyli

$$\beta_j - \beta_1 = \log\psi_{j/1}.$$

Natomiast dla $j = m$ model (1.27) wygląda następująco:

$$\mathrm{logit}(p_m) = \beta_0 - \beta_1 - \ldots - \beta_{m-1},$$

tak więc iloraz szansy znalezienia zatrudnienia przez osoby z m-tej grupy w stosunku do osób z pierwszej grupy ma postać:

$$\psi_{m/1} = \frac{p_m}{1-p_m} \cdot \frac{1-p_1}{p_1} = \frac{e^{\beta_0-\beta_1-\ldots-\beta_{m-1}}}{e^{\beta_0+\beta_1}} = e^{-2\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_{m-1}},$$

skąd

$$-2\beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_{m-1} = \log\psi_{m/1}.$$

Nie zawsze interesujący jest tylko wzrost szansy zatrudnienia w odniesieniu do grupy osób poszukujących pracy, u których zanotowano pierwszą kategorię cechy. Załóżmy, że chcemy oszacować nieznaną wartość współczynnika $\psi_{j/k}$ będącą miarą porównania grup j-tej z k-tą dla dowolnych $j,\ k = 1,2,\ldots,m$. Na podstawie modelu (1.27) otrzymujemy zależność

$$\frac{p_j}{1-p_j} = e^{\beta_0+\beta_j}$$

oraz

$$\frac{p_k}{1-p_k} = e^{\beta_0+\beta_k}.$$

Wówczas szukany współczynnik $\psi_{j/k}$ jest równy $e^{\beta_j-\beta_k}$, zaś jego estymator $e^{\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_k}$. Ponieważ do konstrukcji przedziału ufności potrzebny jest estymator błędu standardowego $\hat{\psi}_{j/k}$, obliczamy zatem wariancję

$$\sigma^2_{\log\hat{\psi}_{jk}} = \sigma^2_{\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_k} = \sigma^2_{\hat{\beta}_j} + \sigma^2_{\hat{\beta}_k} - 2\cdot Cov\left(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_k\right),$$

a następnie odchylenie standardowe

$$\sigma_{\log\hat{\psi}_{jk}} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{\beta}_j} + \sigma^2_{\hat{\beta}_k} - 2\cdot Cov\left(\hat{\beta}_j,\hat{\beta}_k\right)}.$$

Postać $100(1-\alpha)\%$ przedziału ufności dla $\log\psi$ jest następująca:

$$\left[\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_k - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\log\hat{\psi}_{j/k}},\ \hat{\beta}_j - \hat{\beta}_k + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\log\hat{\psi}_{j/k}}\right],$$

zaś dla współczynnika ψ wyraża się wzorem:

$$\left[\exp\left(\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_k - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\log\hat{\psi}_{j/k}}\right),\ \exp\left(\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_k + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_{\log\hat{\psi}_{j/k}}\right)\right].$$

Możliwa jest zatem estymacja zarówno punktowa jak i przedziałowa szansy znalezienia zatrudnienia w badanych grupach.

1.5.4 Zależność szansy zatrudnienia od zmiennej ciągłej

Przypuśćmy, że szansa znalezienia pracy zależy od ciągłej zmiennej objaśniającej, przyjmującej określone wartości rzeczywiste. Niech x_i, $i = 1,...,n$, oznacza wartość zmiennej ciągłej jaka została zaobserwowana dla i-tej osoby poszukującej zatrudnienia. Logitowy model liniowy dla prawdopodobieństwa p_i znalezienia pracy przez osobę, dla której zaobserwowano wartość x_i ma postać:

$$\operatorname{logit}(p_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \tag{1.28}$$

Przyjmując model (1.28) można porównać prawdopodobieństwo znalezienia zatrudnienia przez osobę o zaobserwowanej wartości x zmiennej objaśniającej z prawdopodobieństwem znalezienia zatrudnienia przez osobę, dla której wartość ta jest o r większa. Przy powyższych założeniach wartość współczynnika ψ wyraża się następującym wzorem:

$$\psi_{x+r/x} = \frac{\exp[\beta_0 + \beta_1(x+r)]}{\exp[\beta_0 + \beta_1 x]} = e^{r \cdot \beta_1},$$

czyli $\log \psi_{x+r/x} = r \cdot \beta_1$.

Analogicznie estymator parametru $\hat{\beta}_1$ może służyć do oszacowania współczynnika $\psi_{x+r/x}$. Ściślej mówiąc, estymowana zmiana szansy $\frac{p}{1-p}$ przy zmianie wartości zmiennej x o r jest równa $r \cdot \hat{\beta}_1$. Zauważmy, że dzięki założeniu liniowej zależności logitu prawdopodobieństwa od rozważanej zmiennej, szansa ta nie zależy od początkowej wartości x.

Błąd standardowy logarytmu $\hat{\psi}_{x+r/x}$ przy założeniu, że $r > 0$ jest równy

$$\sigma_{\log \hat{\psi}_{x+r/x}} = \sqrt{\sigma^2_{r \cdot \hat{\beta}_1}} = r \cdot \sigma_{\hat{\beta}_1}$$

i można go wykorzystać do wyznaczenia przedziału ufności dla $\hat{\psi}_{x+r/x}$. Przedział ten na poziomie ufności $1-\alpha$ przyjmuje następującą postać:

$$\left[\exp\left(r\cdot\hat{\beta}_1 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\, r\cdot\sigma_{\hat{\beta}_1}\right), \exp\left(r\cdot\hat{\beta}_1 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\, r\cdot\sigma_{\hat{\beta}_1}\right)\right].$$

W praktycznych zastosowaniach do analizy bezrobocia modele liniowe zawierają najczęściej więcej niż jedną zmienną objaśniającą. W takich modelach parametry opisujące wpływ poszczególnych zmiennych również należy interpretować jako logarytmy odpowiednio zdefiniowanych współczynników ψ.

ROZDZIAŁ 2

Analiza trwania bezrobocia w powiecie wrocławskim

2.1 Opis danych

Metody przedstawione w rozdziale pierwszym wykorzystane będą do analizy długości czasu poszukiwania zatrudnienia w powiecie wrocławskim łącznie z powiatem grodzkim – Wrocławiem. Analiza zostanie wykonana przy wykorzystaniu pakietu statystycznego STATISTICA PL (por. [47]). Zastosowanie standardowego pakietu wskazuje na możliwość prowadzenia podobnych analiz bez konstruowania specjalistycznego oprogramowania.

Dane, na podstawie których będzie przeprowadzona analiza pochodzą z bazy danych Powiatowego Urzędu Pracy we Wrocławiu. Zostały one udostępnione dzięki życzliwości i uprzejmości pracowników tego urzędu respektując ustawę o ochronie danych osobowych.

Analizie została poddana grupa liczącą 1119 osób zarejestrowanych jako bezrobotne i zamieszkujących powiat wrocławski oraz miasto Wrocław, która nazywana będzie kohortą. Wszystkie osoby uwzględnione w kohorcie zostały zarejestrowane jako bezrobotne w lipcu 1997 roku i obserwowane przez okres 14 miesięcy.

Status bezrobotnego został określony odpowiednimi aktami prawnymi. W myśl wspomnianych aktów (por. [49]) za bezrobotną uznaje się osobę nie zatrudnioną i nie wykonującą innej pracy zarobkowej, zdolną i gotową do podjęcia zatrudnienia w pełnym wymiarze czasu pracy, nie uczącą się w szkole w systemie dziennym, zarejestrowaną we właściwym dla miejsca zameldowania (stałego lub czasowego) rejonowym urzędzie pracy, jeżeli:

a) ukończyła 18 lat (z wyjątkiem młodocianych absolwentów),

b) kobieta nie ukończyła 60 lat a mężczyzna 65 lat,

c) nie nabyła prawa do emerytury lub renty inwalidzkiej albo po ustaniu zatrudnienia nie pobiera świadczenia rehabilitacyjnego, zasiłku chorobowego, macierzyńskiego lub wychowawczego,

d) nie jest właścicielem lub posiadaczem (samoistnym lub zależnym) nieruchomości rolnej o powierzchni użytków rolnych powyżej 2 ha przeliczeniowych,

e) nie podlega ubezpieczeniu emerytalno-rentowemu z tytułu stałej pracy jako domownik w gospodarstwie rolnym o powierzchni użytków rolnych przekraczającej 2 ha przeliczeniowe,

f) nie podjęła pozarolniczej działalności gospodarczej lub nie podlega – na podstawie odrębnych przepisów – obowiązkowi ubezpieczenia społecznego, lub zaopatrzenia emerytalnego,

g) jest osobą niepełnosprawną, której stan zdrowia pozwala na podjęcie zatrudnienia co najmniej w połowie wymiaru czasu pracy obowiązującego w danym zawodzie lub służbie,

h) nie jest osobą tymczasowo aresztowaną lub nie odbywa kary pozbawienia wolności.

Po upływie okresu obserwacji dla każdej osoby z kohorty zaobserwowany został czas poszukiwania zatrudnienia wraz z informacją dotyczącą istnienia obserwacji uciętych. Ponadto obserwowano następujące cechy charakteryzujące badane osoby bezrobotne:

- płeć,
- wiek,
- wykształcenie,
- miejsce zamieszkania,
- posiadanie prawa do zasiłku,
- znajomość języków obcych,
- istnienie osób pozostających na utrzymaniu osoby bezrobotnej,
- posiadanie statusu bezrobotnego absolwenta,
- staż pracy,

- jedyny żywiciel rodziny,
- posiadanie gospodarstwa rolnego,
- inwalidztwo,
- posiadanie uprawnień zawodowych.

Po wstępnej analizie danych okazało się jednak, że cztery ostanie wymienione zmienne nie różnicują badanej próby, dlatego też nie zostały one uwzględnione w późniejszej analizie. Tylko jedna spośród osób bezrobotnych była jedynym żywicielem rodziny, żadna z badanych osób natomiast nie posiadała gospodarstwa rolnego. Ponadto zaledwie 3,49 % badanej próby stanowili inwalidzi oraz 0,18 %, to osoby posiadające uprawnienie zawodowe jakim była znajomość obsługi komputera. Pozostałe cechy zostały zakodowane za pomocą następująco zdefiniowanych zmiennych:

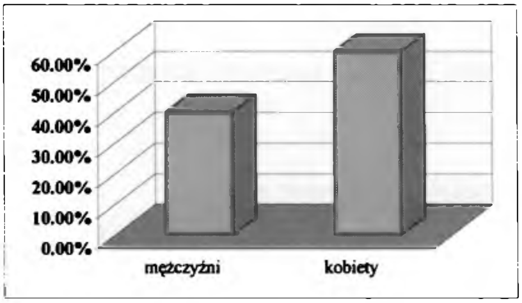
$$\text{PŁEĆ} = \begin{cases} 1 & \text{dla mężczyzn,} \\ 0 & \text{dla kobiet,} \end{cases}$$

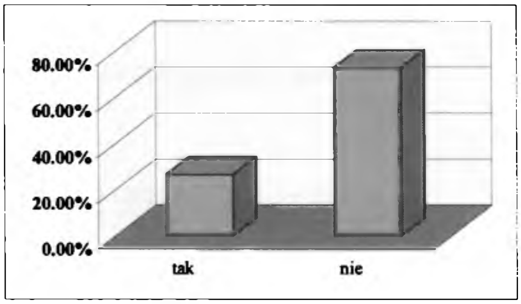
$$\text{ZASIEK} = \begin{cases} 1 & \text{dla osób z prawem do zasiłku,} \\ 0 & \text{dla osób bez prawa do zasiłku,} \end{cases}$$

$$\text{ABSOLWENT} = \begin{cases} 1 & \text{dla bezrobotnych absolwentów,} \\ 0 & \text{dla bezrobotnych nie będących absolwentami,} \end{cases}$$

$$\text{MIEJSCE} = \begin{cases} 1 & \text{dla bezrobotnych mieszkajacych w mieście,} \\ 0 & \text{dla bezrobotnych mieszkajacych na wsi.} \end{cases}$$

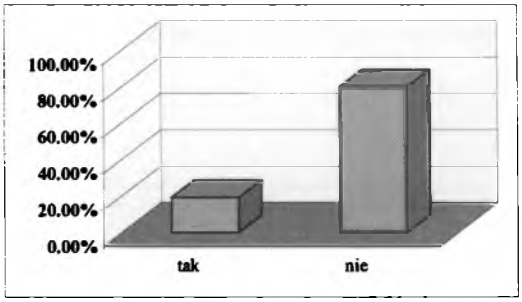
Dla każdej zdefiniowanej zmiennej rysunki 2.1 oraz 2.2 prezentują wykresy słupkowe rozkładu odpowiedniej cechy w badanej próbie.

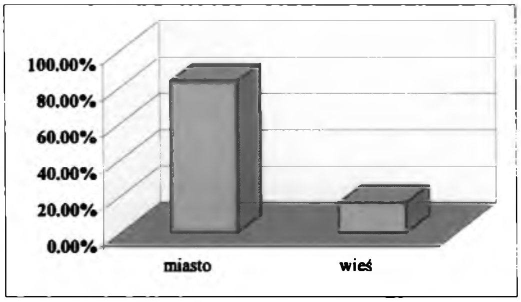




a) b)

Rysunek 2.1. Wykres słupkowy dla zmiennej a) PŁEĆ, b) ZASIŁEK





a) b)

Rysunek 2.2. Wykres słupkowy dla zmiennej a) ABSOLWENT, b) MIEJSCE

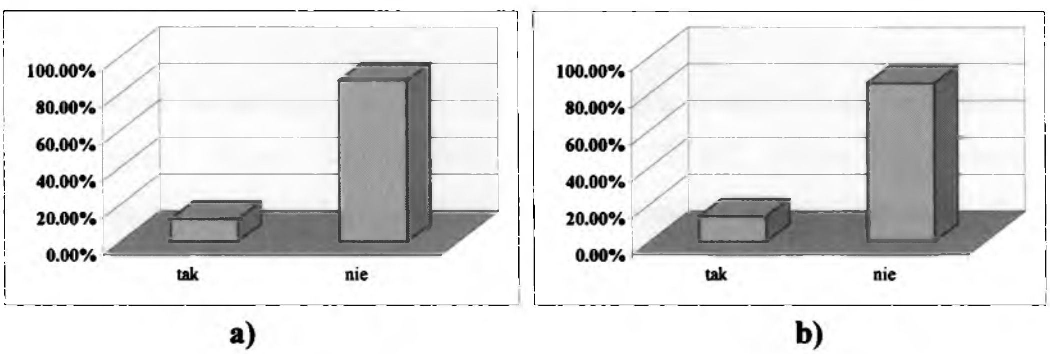
Wśród języków obcych jakie znały badane osoby można było wyróżnić język angielski, którego znajomość deklarowało 4,38 % ogółu badanych, język rosyjski – 3,93 % badanych, język niemiecki – 3,66 % badanych, język francuski – 0,27 % badanych oraz język włoski – 0,18 % badanych. Ze względu na to, że wśród niespełna trzynastu procent badanych znających język obcy występowała taka różnorodność języków w badaniu uwzględniono jedynie informację o tym, czy bezrobotny zna jakikolwiek język obcy za pomocą następująco zdefiniowanej zmiennej:

$$\text{JĘZYK} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli bezrobotny zna język obcy,} \\ 0 & \text{jeśli bezrobotny nie zna języka obcego.} \end{cases}$$

Istnienie innych osób pozostających na utrzymaniu osoby bezrobotnej uwzględnione zostało za pomocą zmiennej OSOBY zdefiniowanej w następujący sposób:

$$\text{OSOBY} = \begin{cases} 1 & \text{dla bezrobotnych utrzymujących inne osoby,} \\ 0 & \text{dla bezrobotnych nie posiadających na utrzymaniu innych osób.} \end{cases}$$

Liczba osób pozostających na utrzymaniu bezrobotnych kształtuje się od 1 osoby (7,06 % ogółu badanych bezrobotnych) do sześciu osób (0,09 % ogółu badanych bezrobotnych). Rysunek 2.3 prezentuje rozkład znajomości języków obcych oraz posiadania osób na utrzymaniu w badanej grupie bezrobotnych.

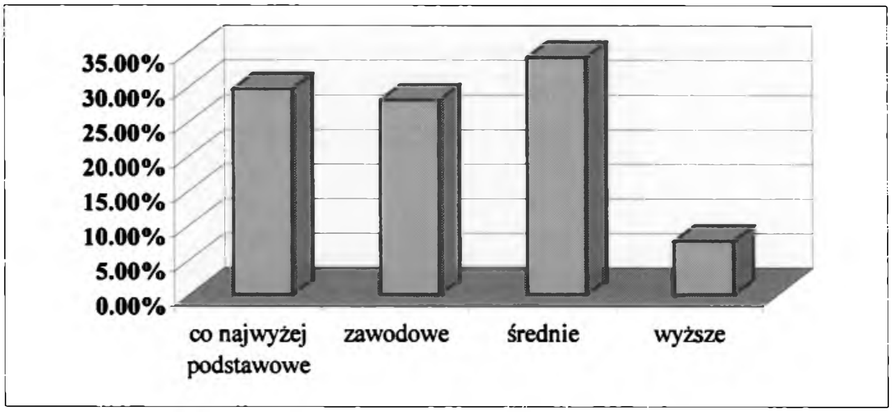


Rysunek 2.3. Wykres słupkowy dla zmiennej a) JĘZYK, b) OSOBY

Wykształcenie bezrobotnych zostało uwzględnione w analizie poprzez wprowadzenie czterech następujących poziomów:

1) wykształcenie co najwyżej podstawowe, do którego zostało zaliczone wykształcenie niepełne podstawowe i podstawowe,
2) wykształcenie zawodowe,
3) wykształcenie średnie, do którego zostało zaliczone wykształcenie średnie ogólne, niepełne średnie zawodowe, średnie zawodowe, policealne,
4) wykształcenie wyższe, do którego zostało zaliczone wykształcenie wyższe zawodowe oraz wyższe magisterskie.

Rozkład wykształcenia w próbie przedstawia rysunek 2.4.



Rysunek 2.4. Wykres słupkowy dla wykształcenia bezrobotnych

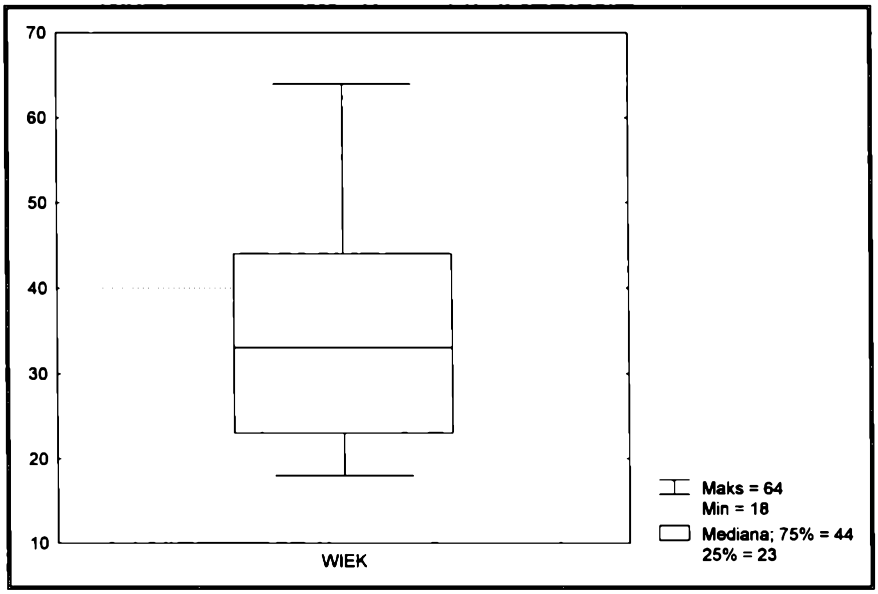
Zmienne oznaczające wiek i staż pracy będą uwzględniane w analizie jako zmienne ciągłe o nazwie odpowiednio WIEK i STAŻ. Można przypuszczać, że zmienne te są ze sobą skorelowane, starsze osoby posiadają dłuższy staż pracy. Z uwagi na brak gaussowskiego charakteru cech do oceny korelacji został wykorzystany współczynnik korelacji rang Spearmana. Obliczony współczynnik korelacji równy 0,73 wskazuje na znaczącą zgodną z oczekiwaniami współzależność stażu pracy i wieku. W stosowanych modelach jako zmienna objaśniająca zostanie wykorzystana więc tylko jedna z tych zmiennych, mianowicie zmienna WIEK, dla której tabela 2.1 prezentuje obliczone podstawowe parametry opisowe.

Tabela 2.1. Statystyki opisowe dla zmiennej WIEK

	Średnia	Mediana	Minimum	Maksimum	Dolny kwartyl	Górny kwartyl	Odchylenie standardowe	Skośność
WIEK	34,34	33	18	64	23	44	11,91	0,34

Źródło: obliczenia własne

Średni wiek osoby bezrobotnej to 34 lata, jednak dodatni współczynnik skośności odzwierciedla niekorzystną sytuację dla zjawiska bezrobocia oznaczającą, że większość osób bezrobotnych to ludzie młodzi poniżej średniego wieku bezrobotnych. Parametry pozycyjne oraz zakres zmiennej wiek graficznie prezentuje wykres ramkowy przedstawiony na rysunku 2.5.



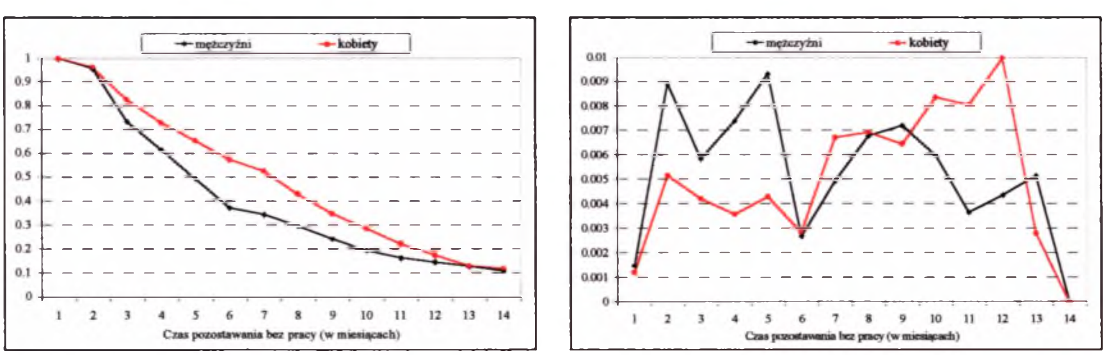
Rysunek 2.5. Wykres ramkowy dla zmiennej WIEK

Wykorzystując zdefiniowane zmienne w kolejnych paragrafach dokonana zostanie analiza procesu poszukiwania zatrudnienia w powiecie wrocławskim i mieście Wrocławiu.

2.2 Tablice bezczynności

Najprostszym sposobem opisu czasu poszukiwania pracy są tablice bezczynności. Nadają się one również do analizy zależności rozkładu czasu poszukiwania zatrudnienia od cech charakteryzujących osoby bezrobotne. Osoby bezrobotne stanowią zwykle grupę ludzi bardzo zróżnicowaną społecznie. Na polskim rynku pracy obok zrównoważenia popytu i podaży na siłę roboczą zaczyna coraz częściej odgrywać rolę jakość rozumiana jako wiek oraz szeroko pojęte kwalifikacje. Znaczenie owych kwalifikacji zostanie ocenione na podstawie tablic bezczynności, które będą konstruowane oddzielnie dla każdej z kategorii zmiennych: PŁEĆ, ZASIŁEK, ABSOLWENT, MIEJSCE, JĘZYK, OSOBY, WYKSZTAŁCENIE. Do weryfikacji istotności różnic pomiędzy funkcjami bezczynności zastosowano opisane wcześniej w punkcie 1.2.3 testy statystyczne.

Podstawą tworzenia tablic bezczynności jest podział osi czasu na przedziały klasowe o równej rozpiętości. W pracy jako rozpiętość przedziału przyjęto okres 30 dni (jednego miesiąca) tworząc tym samym 14 przedziałów czasowych. Tablicę bezczynności można porównać do rozbudowanej tablicy rozkładu liczebności zmniejszającej się kohorty. Skonstruowane tablice bezczynności dla bezrobotnych mężczyzn oraz kobiet prezentują odpowiednio tabela 2.2 oraz 2.3. Dodatkowo funkcję intensywności oraz bezczynności dla powyższych tablic przedstawiono graficznie na rysunku 2.6.



a) b)

Rysunek 2.6. Wykres a) funkcji bezczynności, b) funkcji intensywności dla zmiennej PŁEĆ

Tabela 2.2. Tablica bezczynności dla bezrobotnych mężczyzn

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodo-bieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności
i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	448	22	437.0000	0.956522	1.000000	0.001481
2	407	0	407.0000	0.764128	0.956522	0.008914
3	311	0	311.0000	0.839228	0.730905	0.005828
4	261	0	261.0000	0.800766	0.613396	0.007376
5	209	2	208.0000	0.754808	0.491187	0.009315
6	156	0	156.0000	0.923077	0.370752	0.002667
7	144	11	138.5000	0.862816	0.342232	0.004910
8	114	0	114.0000	0.815789	0.295283	0.006763
9	93	1	92.5000	0.805405	0.240889	0.007186
10	74	2	73.0000	0.835616	0.194013	0.005970
11	60	4	58.0000	0.896552	0.162121	0.003636
12	50	2	49.0000	0.877551	0.145350	0.004348
13	42	14	35.0000	0.857143	0.127552	0.005128
14	23	23	11.5000	0.956522	0.109330	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela 2.3. Tablica bezczynności dla bezrobotnych kobiet

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodo-bieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności
i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	671	48	647.0000	0.964451	1.000000	0.001206
2	600	1	599.5000	0.856547	0.964451	0.005151
3	513	0	513.0000	0.881092	0.826098	0.004214
4	452	2	451.0000	0.898004	0.727868	0.003583
5	404	0	404.0000	0.878713	0.653629	0.004304
6	355	3	353.5000	0.917963	0.574352	0.002852
7	323	45	300.5000	0.816972	0.527234	0.006716
8	223	0	223.0000	0.811659	0.430735	0.006931
9	181	0	181.0000	0.823204	0.349610	0.006465
10	149	2	148.0000	0.777027	0.287801	0.008365
11	114	5	111.5000	0.784753	0.223629	0.008040
12	85	9	80.5000	0.739130	0.175494	0.010000
13	55	11	49.5000	0.919192	0.129713	0.002807
14	40	40	20.0000	0.975000	0.119231	--

Źródło: obliczenia własne

Rozkłady te różnią się o czym świadczą wyniki zastosowanych testów statystycznych. Wartość empiryczna statystyki testowej określonej ogólnym wzorem (1.7) dla testu log-rank (przyjmując $w_i = 1$) jest równa -3,84 , natomiast dla testu Peto (przyjmując $w_i = b_i$) -5,25. Wartość-p, oznaczająca największy poziom istotności, przy którym nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy orzekającej o równości funkcji bezczynności w badanych grupach dla zastosowanych testów, jest równa odpowiednio 0,00012 oraz 0,0. Dla każdego testu wartość ta jest nie większa od 0,0012 co wskazuje, że rozkład czasu poszukiwania zatrudnienia zależy od płci. Wyniki stosowanych testów będą prezentowane w formie tabeli (por. tabela 2.4).

Tabela 2.4. Wyniki porównania funkcji bezczynności dla mężczyzn i kobiet

Test	Wartość statystyki	wartość-p
log-rank	-3,84	0,00012
Peto	-5,25	0,00000

Źródło: obliczenia własne

Proces znajdowania pracy w kohorcie mężczyzn przebiega szybciej. W każdym miesiącu trwania bezrobocia ryzyko pozostania w dalszym ciągu osobą bezrobotną dla kobiet jest większe niż dla mężczyzn (por rysunek 2.6 a). Na przykład po upływie jednego kwartału poszukiwania pracy 61,34 % bezrobotnych mężczyzn i aż 72,79 % bezrobotnych kobiet w dalszym ciągu poszukiwało zatrudnienia pozostając w stanie bezrobocia (por. kolumna 6 tabeli 2.2 i 2.3).

Z punktu widzenia charakterystyki rozkładu interesujący może być także czas poszukiwania zatrudnienia potrzebny na znalezienie pracy przez określony odsetek bezrobotnych należących do kohorty. W tym celu należy obliczyć odpowiedni kwantyl rozkładu. Mediana w szczególności określa *półtrwanie kohorty* (por. [2]). Jest to czas niezbędny na to, aby połowa badanej grupy znalazła zatrudnienie. W analizowanej kohorcie bezrobotnych mężczyzn mediana wnosi 4,1 miesiąca. Dla bezrobotnych kobiet czas ten jest znacznie dłuższy i wynosi aż 6,5 miesiąca. Wszystkie otrzymane wyniki wskazują na znacznie lepszą z punktu widzenia poszukiwania pracy sytuację bezrobotnych mężczyzn w porównaniu z sytuacją bezrobotnych kobiet.

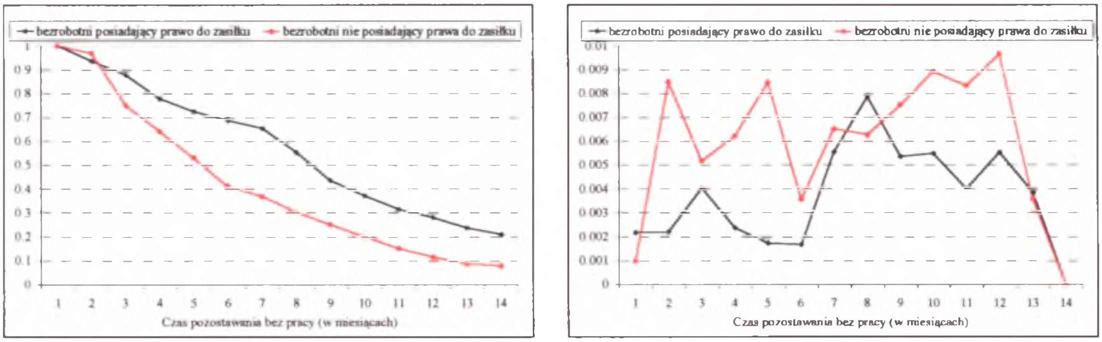
Kolejną analizowaną zmienną jest zmienna ZASIŁEK. Analiza rozkładu czasu poszukiwania pracy ponownie wykazuje istotność zmiennej ZASIŁEK w procesie poszukiwania zatrudnienia. Uzyskane wyniki obu testów przedstawionych w tabeli 2.5 wskazują na odrzucenie hipotezy o równości funkcji bezczynności w grupach wyznaczonych przez badaną zmienną. Skonstruowane tablice bezczynności dla bezrobotnych posiadających prawo do zasiłku oraz dla bezrobotnych, którzy nie pobierali takiej zapomogi umieszczono w tabelach A.15 i A.16 załącznika A. Załącznik A zawiera wszystkie skonstruowane w pracy tablice bezczynności. W kolumnach (8) oraz (9) tabel dodatkowo umieszczone zostały błędy standardowe dla estymatorów odpowiednio funkcji bezczynności i intensywności.

Tabela 2.5. Wyniki porównania funkcji bezczynności dla zmiennej ZASIŁEK

Test	Wartość statystyki	wartość-p
log-rank	7,87	0,000
Peto	7,45	0,000

Źródło: obliczenia własne

Na podstawie skonstruowanych tablic bezczynności, których wybrane charakterystyki zilustrowano graficznie na rysunku 2.7 można stwierdzić negatywny wpływ zasiłku. Efektywniej zatrudnienia poszukują osoby nie posiadające prawa do zapomogi w postaci zasiłku. Dla tej grupy półtrwanie kohorty wynosi 4,7 miesiąca. Natomiast dla bezrobotnych posiadających prawo do zasiłku czas ten jest znacznie dłuższy i wynosi aż 7,7 miesiąca. Po upływie kwartału od momentu zarejestrowania w urzędzie pracy aż 77,67 % bezrobotnych posiadających prawo do zasiłku w dalszym ciągu poszukiwało zatrudnienia, podczas gdy spośród osób nie posiadających prawa do zasiłku w stanie bezrobocia pozostało 64,28 % badanej kohorty.



a) **b)**

Rysunek 2.7. Wykres a) funkcji bezczynności, b) funkcji intensywności dla zmiennej ZASIŁEK

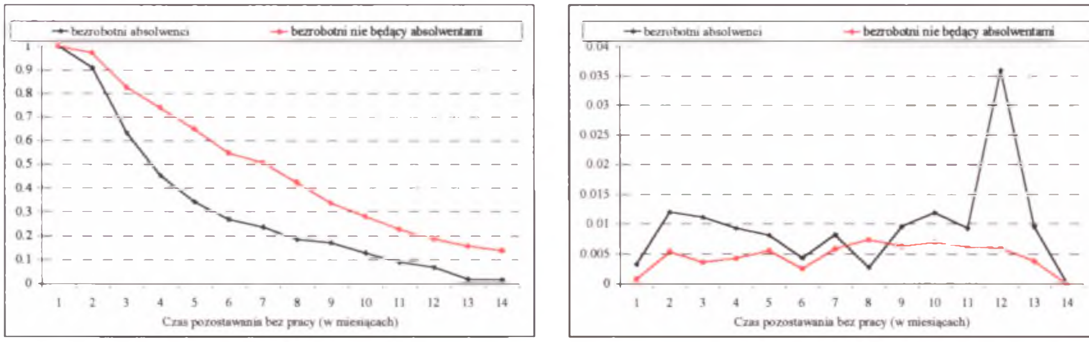
Dla badanej grupy osób bezrobotnych na podstawie wyników zastosowanych testów statystycznych należy również odrzucić hipotezę o równości funkcji bezczynności dla bezrobotnych zarejestrowanych jako absolwenci i bezrobotnych nie będących absolwentami (por. wartość-p w tabeli 2.6). Rozkład czasu poszukiwania zależy więc także od zmiennej ABSOLWENT.

Tabela 2.6. Wyniki porównania funkcji bezczynności dla zmiennej ABSOLWENT

Test	Wartość statystyki	wartość-p
log-rank	-7,51	0,000
Peto	-8,44	0,000

Źródło: obliczenia własne

Bezrobotni absolwenci znajdują szybciej zatrudnienie w porównaniu z bezrobotnymi, którzy nie byli zarejestrowani jako absolwenci. Dla każdego miesiąca trwania bezrobocia prawdopodobieństwo pozostania w dalszym ciągu osobą bezrobotną dla absolwentów jest mniejsze niż dla pozostałych bezrobotnych (por. rysunek 2.8 a). Ponadto efektywność znajdowania zatrudnienia dla absolwentów w każdym miesiącu z wyjątkiem ósmego jest większa. Po upływie kwartału 45,18 % bezrobotnych absolwentów i aż 74,10 % bezrobotnych nie zarejestrowanych jako absolwenci w dalszym ciągu poszukiwało zatrudnienia pozostając w stanie bezczynności (por. kolumna (6) tabeli A.11 i A.12 zamieszczonych w dodatku A).



a) b)

Rysunek 2.8. Wykres a) funkcji bezczynności, b) funkcji intensywności dla zmiennej ABSOLWENT

Porównanie półtrwania kohort również wskazuje na lepszą sytuację absolwentów w procesie poszukiwania pracy. Absolwenci potrzebują zaledwie 2,8 miesiąca, aby połowa z nich znalazła zatrudnienie, podczas gdy dla bezrobotnych nie zarejestrowanych jako absolwenci czas ten wynosi aż 6,7 miesiąca.

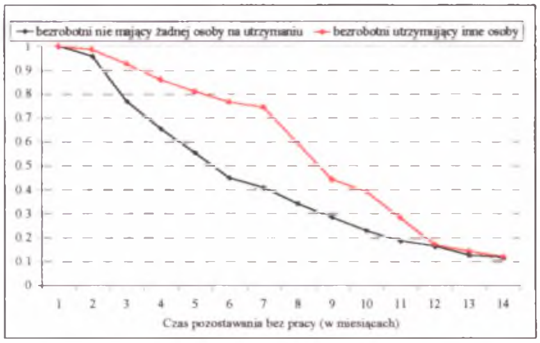
Tabela 2.7. Wyniki porównania funkcji bezczynności dla zmiennej OSOBY

Test	Wartość statystyki	wartość-p
log-rank	4,25	0,00002
Peto	5,85	0,00000

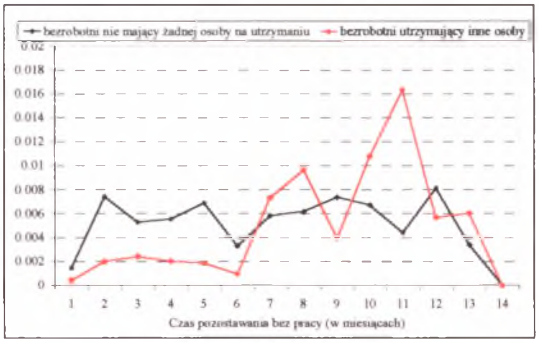
Źródło: obliczenia własne

Kolejną istotną zmienną w procesie poszukiwania zatrudnienia okazała się zmienna OSOBY (por. wartość-p w tabeli 2.8). W korzystniejszej sytuacji z badanego punktu widzenia są bezrobotni nie mający innych osób na utrzymaniu. Po upływie kwartału 65,40 % z nich w dalszym ciągu poszukiwało zatrudnienia (por. kolumna (6) tabeli A.9 zamieszczonej w dodatku A). Natomiast aż 86,24 % bezrobotnych posiadających inne osoby na utrzymaniu po upływie kwartału od momentu rozpoczęcia poszukiwania zatrudnienia w dalszym ciągu pozostawało w stanie bezczynności (por. kolumna (6) tabeli A.10 zamieszczonej w dodatku A).

Półtrwanie kohorty bezrobotnych, którzy nikogo nie utrzymują wynosi 3,8 miesiąca. Czas ten jest znacznie krótszy od czasu jaki potrzebuje kohorta osób bezrobotnych utrzymujących inne osoby na zmniejszenie swej liczebności o połowę i wynosi 9 miesięcy. Analizując wykres funkcji intensywności (rysunek 2.9 b) można zauważyć, że szansa znalezienia zatrudnienia w danym miesiącu trwania bezrobocia, pod warunkiem, że znalezienie pracy nie nastąpiło wcześniej, jest dla pierwszych sześciu miesięcy większa dla grupy nie posiadającej innych osób na utrzymaniu w porównaniu z analogiczną szansą dla osób bezrobotnych utrzymujących inne osoby.



a)



b)

Rysunek 2.9. Wykres a) funkcji bezczynności, b) funkcji intensywności dla zmiennej OSOBY

Sytuacja taka może być spowodowana faktem, iż osoby nie posiadające żadnych osób na swoim utrzymaniu, to przeważnie ludzie młodzi, którzy bardziej elastycznie dostosowują się do pojawiających się ofert pracy. Są też oni chętniej akceptowani przez pracodawców i mają też większe możliwości zdobycia zatrudnienia ze względu na to, że łatwiej przyjmują ewentualną konieczność zmiany miejsca zamieszkania niż osoby starsze.

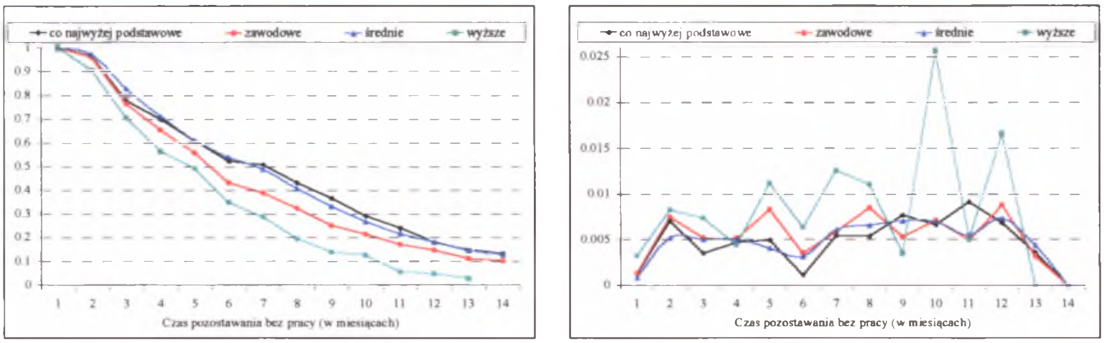
Ostatnią istotną cechą, charakteryzującą osoby bezrobotne w procesie poszukiwania, okazało się wykształcenie. Wyniki zastosowanych testów statystycznych, porównujących funkcje bezczynności dla grup z różnym poziomem wykształcenia, nie dały podstaw do odrzucenia hipotezy orzekającej o równości tych funkcji dla grupy bezrobotnych z wykształceniem co najwyżej podstawowym i grupy bezrobotnych z wykształceniem średnim. (por. wartość-p w tabeli 2.8). Dla pozostałych grup wykształcenia funkcje bezczynności nie są jednakowe.

Tabela 2.8. Wyniki porównania funkcji bezczynności dla wykształcenia podstawowego i średniego

Test	Wartość statystyki	wartość-p
log-rank	-0,826550	0,93413
Peto	-0,250451	0,80224

Źródło: obliczenia własne

Podczas poszukiwania pracy bez znaczenia jest zatem czy bezrobotni posiadają wykształcenie co najwyżej podstawowe czy też średnie. Może to być oznaką niedostosowania szkolnictwa na poziomie średnim do potrzeb kadrowych powiatu wrocławskiego. Dla tych dwóch grup osób bezrobotnych półtrwanie kohorty jest podobne i wynosi odpowiednio 6,9 miesiąca i 6,2 miesiąca.



a) **b)**

Rysunek 2.10. Wykres a) funkcji bezczynności, b) funkcji intensywności dla wykształcenia

Po upływie pierwszego kwartału poszukiwania pracy 69,99 % bezrobotnych z wykształceniem co najwyżej podstawowym i 71,43 % bezrobotnych z wykształceniem średnim w dalszym ciągu pozostawało bez pracy (por. kolumna (6) tabel A.3 i A.5 zamieszczonych w dodatku A). Różnice funkcji bezczynności dla pozostałych grup wyróżnionych ze względu na poziom wykształcenia są statystycznie istotne. Wartości-p we wszystkich przypadkach okazały się mniejsze od 0,04. W najkorzystniejszej sytuacji w czasie poszukiwania pracy są bezrobotni z wykształceniem wyższym. Półtrwanie kohorty tej grupy bezrobotnych wynosi zaledwie 4 miesiące, a po upływie kwartału tylko 56,54 % spośród nich dalej poszukiwało pracy (por. kolumna (6) tabeli A.6 zamieszczonej w dodatku A). Osobom bezrobotnym z wykształceniem zawodowym jest trudniej znaleźć pracę niż bezrobotnym z wykształceniem wyższym, ale z kolei łatwiej niż bezrobotnym z wykształceniem co najwyżej podstawowym, czy też średnim.

Tabela 2.9. Wyniki porównania funkcji bezczynności dla zmiennej MIEJSCE

Test	Wartość statystyki	wartość-p
log-rank	2,02	0,044
Peto	1,05	0,294

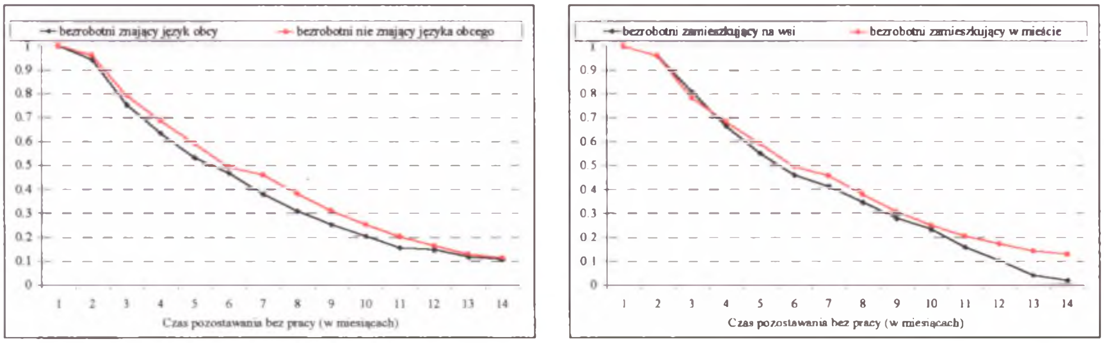
Źródło: obliczenia własne

Proces poszukiwania zatrudnienia w badanej kohorcie nie zależy od miejsca zamieszkania oraz od znajomości przez bezrobotnego języków obcych. Wartości-p dla zastosowanych testów statystycznych porównujących funkcje bezczynności w grupach wyznaczonych przez kategorie zarówno zmiennej MIEJSCE jak i JĘZYK prezentują odpowiednio tabele 2.9 oraz 2.10.

Tabela 2.10. Wyniki porównania funkcji bezczynności dla zmiennej JĘZYK

Test	Wartość statystyki	wartość-p
log-rank	-1,23	0,218
Peto	-1,47	0,142

Źródło: obliczenia własne



a) **b)**

Rysunek 2.11. Wykres funkcji bezczynności dla zmiennej a) JĘZYK, b) MIEJSCE

Dla badanej kohorty nie ma więc znaczenia czy bezrobotny mieszka na wsi czy też w mieście. Taki wniosek wydaje się uzasadniony ze względu na to, że kohorta pochodzi z regionu skupionego wokół Wrocławia. Dojazd do centrum regionu, miejsca w którym przede wszystkim znajdowane jest zatrudnienie, nie nastręcza większych trudności. Okazuje się również, że w badanej kohorcie w znalezieniu pracy nie pomaga znajomość języków obcych.

2.3 Modele regresyjne

W celu uzyskania informacji o tym jakie cechy i w jaki sposób wpływają na szansę znalezienia zatrudnienia w powiecie wrocławskim oraz w samym mieście Wrocławiu, zastosowane zostanie tzw. podejście ekonometryczne wykorzystujące modele regresyjne. W analizie zostaną uwzględnione następujące cechy charakteryzujące osoby bezrobotne:

- płeć,
- wiek,
- wykształcenie,
- posiadanie prawa do zasiłku,
- miejsce zamieszkania,
- znajomość języków obcych,
- posiadanie na utrzymaniu innych osób,
- czy bezrobotny jest zarejestrowany jako absolwent czy nie.

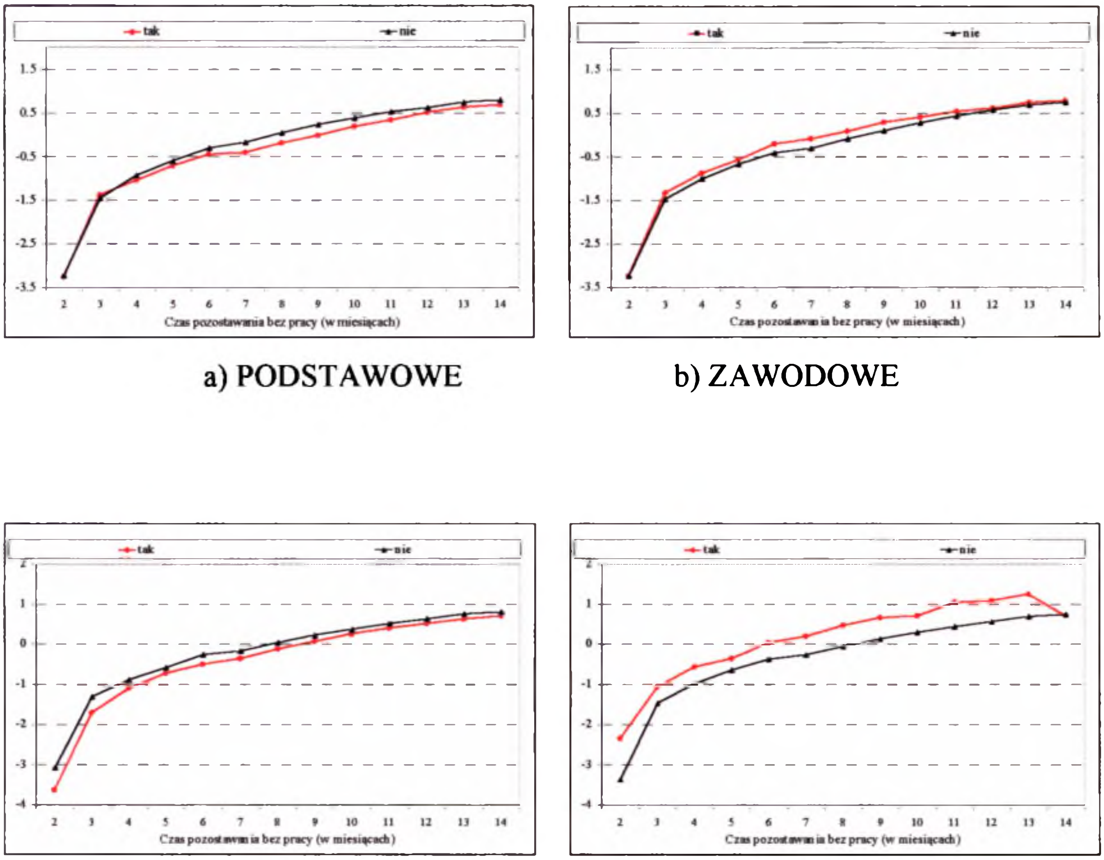
Zmienne uwzględniające powyższe cechy zostały zdefiniowane w paragrafie 2.1. W celu zbadania zależności każdego poziomu wykształcenia oddzielnie na poszukiwanie pracy zostały wprowadzone 4 zmienne wskaźnikowe: PODSTAWOWE, ŚREDNIE, ZAWODOWE, WYŻSZE. Definicje tych zmiennych podano w tabeli 2.11.

Tabela 2.11. Definicja zmiennych wskaźnikowych dla wykształcenia

Poziom wykształcenia	Zmienne uwzględniane w analizie			
	PODSTAWOWE	**ZAWODOWE**	**ŚREDNIE**	**WYŻSZE**
co najwyżej podstawowe	1	0	0	0
zawodowe	0	1	0	0
średnie	0	0	1	0
zawodowe	0	0	0	1

Każda z tych zmiennych przyjmuje wartość równą 1 dla bezrobotnego z wykształceniem określonym przez nazwę zmiennej i 0 dla pozostałych bezrobotnych.

Należy pamiętać, że w analizie regresji nie jest możliwe zastosowanie wszystkich tak zdefiniowanych zmiennych wskaźnikowych ze względu na wstąpienie pełnej współliniowości, która uniemożliwia estymację wszystkich parametrów regresji. Należy dokonać eliminacji jednej ze zdefiniowanych zmiennych wskaźnikowych. Nie traci się jednak przy tym informacji jaką niesie wyeliminowana zmienna lecz staje się ona punktem odniesienia dla pozostałych zmiennych pomocniczych uwzględnionych w modelu. Parametry modelu odzwierciedlają wówczas wpływ poziomów wykształcenia uwzględnionych w modelu w odniesieniu do wpływu poziomu wykształcenia, który został wyeliminowany. W przeprowadzonej analizie wyeliminowana została zmienna pomocnicza oznaczająca wykształcenie co najwyżej podstawowe, które będzie punktem odniesienia podczas interpretacji współczynników modeli regresji. Analizę rozpoczęto od zastosowania najbardziej ogólnego modelu regresji jakim jest model proporcjonalnej intensywności Coxa. Ponieważ w modelu Coxa wymagane jest założenie proporcjonalności, to analizę należy rozpocząć od sprawdzenia tego założenia. Graficznie założenie proporcjonalności można zweryfikować wykreślając w układzie współrzędnych przekształconą funkcję bezczynności $\ln(-\ln S(t))$. Jeżeli dana zmienna jakościowa spełnia założenie proporcjonalności, to różnice w wartościach funkcji $\ln(-\ln S(t))$ dla różnych grup wyznaczonych ze względu na kategorie zmiennej są stałe w czasie. Dla zmiennych jakościowych wizualną ocenę założenia proporcjonalności prezentują rysunki 2.12 oraz 2.13. Ocena wizualna założenia proporcjonalności pozwala zastosować model proporcjonalnej intensywności Coxa dla wszystkich opisanych zmiennych z wyjątkiem zmiennej MIEJSCE. Dla tej zmiennej przekształcone funkcje bezczynności przecinają się, co oznacza że założenie proporcjonalności nie jest spełnione. Zastosowanie modelu nieproporcjonalnej intensywności Coxa do weryfikacji założenia proporcjonalności potwierdziło otrzymane wyniki.

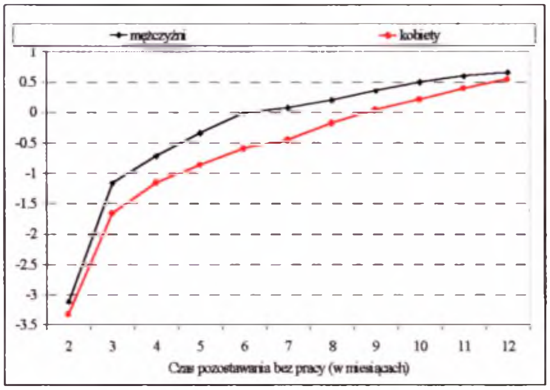


a) PODSTAWOWE b) ZAWODOWE

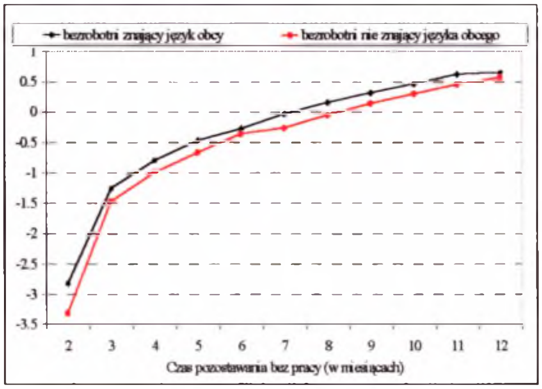
c) ŚREDNIE d) WYŻSZE

Rysunek 2.12. Wykresy funkcji $\ln(-\ln S(t))$ dla zmiennych związanych z wykształceniem

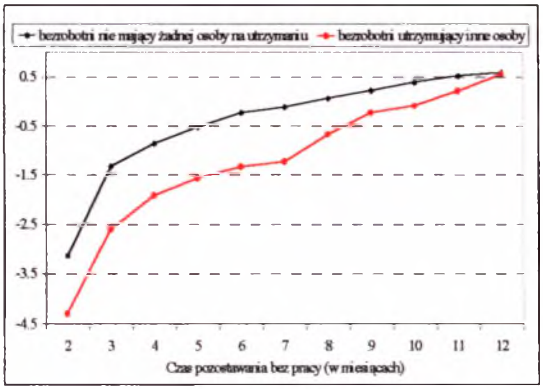
Możliwa jest jednak pewna modyfikacja zmiennej MIEJSCE zgodnie z teorią przedstawioną w rozdziale pierwszym i zastosowanie rozszerzonego modelu Coxa. Rysunek 2.14 prezentuje wizualną ocenę założenia proporcjonalności dla zmiennej MIEJSCE z dokładniejszą skalą czasu.



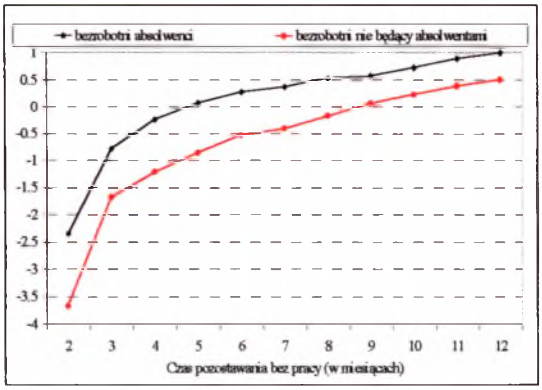
a) PŁEĆ



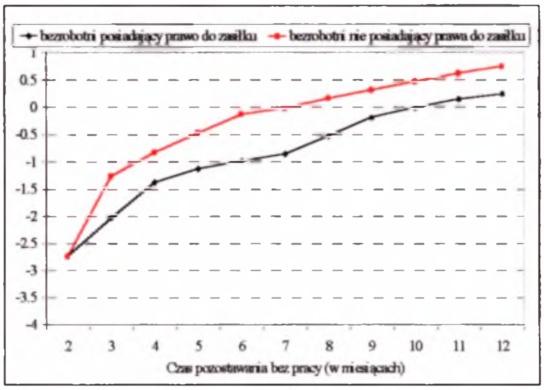
b) JĘZYK



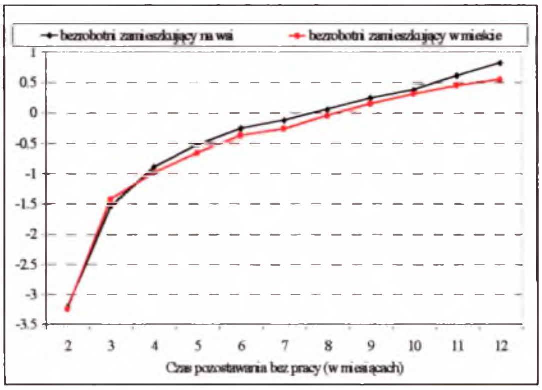
c) OSOBY



d) ABSOLWENT

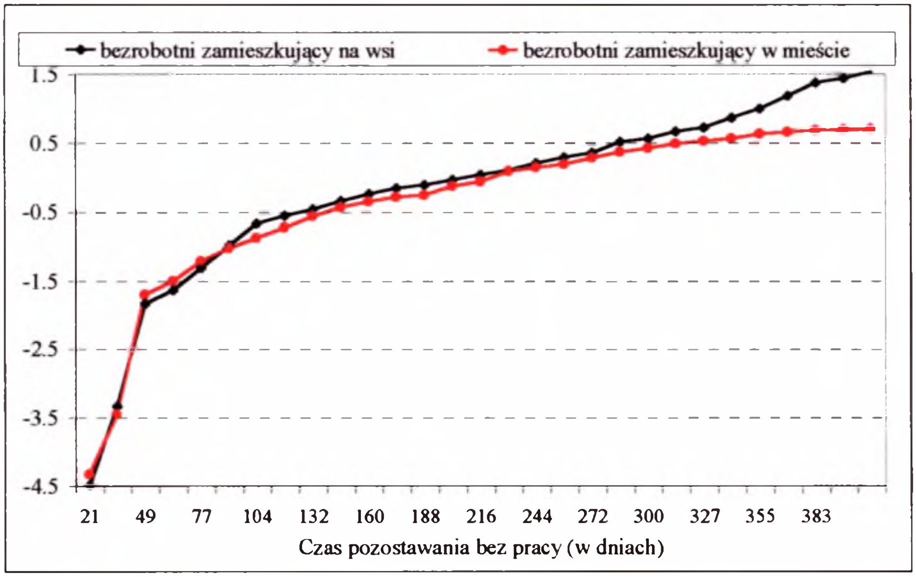


e) ZASIŁEK



f) MIEJSCE

Rysunek 2.13. Wykresy funkcji $\ln(-\ln S(t))$ dla różnych poziomów odpowiednich zmiennych objaśniających



Rysunek 2.14. Wykresy funkcji $\ln(-\ln S(t))$ dla zmiennej MIEJSCE

Dla czasu $t \leq 270$ dni wykresy funkcji prawie się pokrywają, natomiast po upływie tego okresu widoczne są wyraźne różnice. Takie zachwiane funkcji może świadczyć o różnym znaczeniu miejsca zamieszkania w poszukiwania zatrudnienia w zależności od tego czy czas pozostawania bez pracy jest krótszy czy dłuższy niż 270 dni. Dlatego też

w analizie zamiast zmiennej MIEJSCE uwzględnione zostaną dwie zmienne $\text{MIEJSCE} \cdot g_1(t)$ oraz $\text{MIEJSCE} \cdot g_2(t)$, gdzie funkcje czasu $g_1(t)$ i $g_2(t)$ są zdefiniowane w następujący sposób:

$$g_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } t \leq 270, \\ 0 & \text{jeśli } t > 270, \end{cases}$$

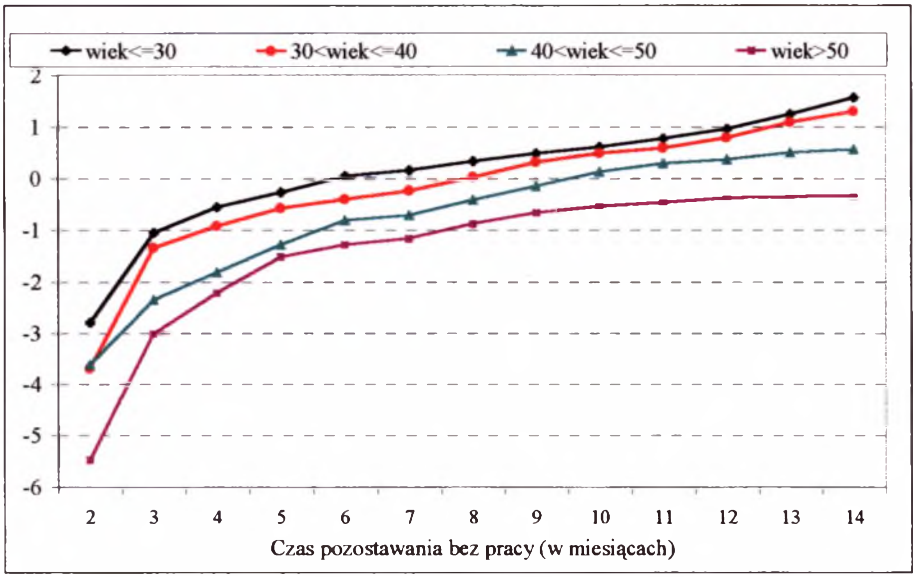
$$g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t \leq 270, \\ 1 & \text{jeśli } t > 270. \end{cases}$$

Różne współczynniki przy nowych zmiennych w modelu Coxa oznaczać będą, że rzeczywiście założenie proporcjonalności dla zmiennej MIEJSCE nie było spełnione i zasadne jest zastosowanie modelu nieproporcjonalnej intensywności Coxa.

Założenie proporcjonalności dla ciągłej zmiennej WIEK zostało sprawdzone poprzez ustalenie czterech przedziałów wiekowych, traktując wiek jako zmienną jakościową. Przyjęto w tym celu następujące grupy wiekowe:

- bezrobotni w wieku do 30 lat włącznie,
- bezrobotni w wieku od 30 do 40 lat włącznie,
- bezrobotni w wieku od 40 do 50 lat włącznie,
- bezrobotni w wieku powyżej 50 lat.

Wizualna ocena założenia proporcjonalności dla jakościowej zmiennej wiek przedstawiona na rysunku 2.15 pozwala na uwzględnienie tej zmiennej w modelu Coxa.



Rysunek 2.15. Wykresy funkcji $\ln(-\ln S(t))$ dla skategoryzowanej zmiennej WIEK

Po dokładnej analizie mającej na celu estymację modelu Coxa biorąc pod uwagę wszystkie zmienne objaśniające spełniające założenie proporcjonalności można stwierdzić, że funkcja intensywności w modelu Coxa zależy od następujących zmiennych: PŁEĆ, ABSOLWENT, WIEK, ZASIŁEK, WYŻSZE, MIEJSCE $\cdot g_1(t)$

oraz $\text{MIEJSCE} \cdot g_2(t)$. Wyniki estymacji modelu Coxa uwzględniającego powyższe zmienne prezentuje tabela 2.12.

Tabela 2.12. Wyniki estymacji modelu Coxa

Zmienna	Parametr	Błąd standardowy	Wartość statystyki t	Exp(parametr)	Wartość statystyki Walda	Wartość-p dla testu Walda
PŁEĆ	0,320	0,0704	4,545	1,377	20,654	0,00000
ABSOLWENT	0,220	0,0955	2,307	1,247	5,324	0,02103
WIEK	-0,023	0,0037	-6,226	0,977	38,764	0,00000
ZASIŁEK	-0,283	0,0862	-3,287	0,753	10,803	0,00101
WYŻSZE	0,325	0,1205	2,695	1,383	7,260	0,00705
$\text{MIEJSCE} \cdot g_1(t)$	-2,003	0,1462	-13,699	0,135	187,664	0,00000
$\text{MIEJSCE} \cdot g_2(t)$	0,937	0,1094	8,565	2,553	73,354	0,00000

Źródło: obliczenia własne

Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 2.12 widać, że wszystkie zmienne uwzględnione w modelu są istotne przy dowolnym poziomie istotności większym od 0,02103. Ponadto różne współczynniki modelu dla zmiennych $\text{MIEJSCE} \cdot g_1(t)$ oraz $\text{MIEJSCE} \cdot g_2(t)$ potwierdzają słuszność zastosowania rozszerzonego modelu Coxa ze względu na niespełnione założenie proporcjonalności dla zmiennej MIEJSCE. Na podstawie otrzymanych wyników model Coxa można zapisać następująco:

$$\lambda(t \mid \mathbf{X}) = \lambda_0(t) \cdot \exp(0{,}32 \cdot \text{PŁEĆ} - 0{,}02 \cdot \text{WIEK} + 0{,}22 \cdot \text{ABSOLWENT} +$$

$$- 0{,}28 \cdot \text{ZASIEK} + 0{,}33 \cdot \text{WYŻSZE} +$$

$$- 2{,}00 \cdot \text{MIEJSCE} \cdot g_1(t) + 0{,}94 \cdot \text{MIEJSCE} \cdot g_2(t)\ ).$$

Ze względu na niewyspecyfikowaną parametrycznie postać funkcji $\lambda_0(t)$ zależnej od czasu, na podstawie modelu Coxa nie można dla ustalonych wartości zmiennych objaśniających oszacować funkcji intensywności, czyli prawdopodobieństwa natychmiastowego znalezienia pracy. Można jednak na podstawie powyższego modelu porównywać szansę znalezienia pracy w czasie całego okresu trwania obserwacji kohorty dla wybranych grup bezrobotnych poprzez interpretację parametrów modelu.

Porównując prawdopodobieństwo natychmiastowego znalezienia pracy przez bezrobotnych mężczyzn i kobiet otrzymujemy:

$$\frac{\lambda(t \mid \text{PŁEĆ} = 1)}{\lambda(t \mid \text{PŁEĆ} = 0)} = \exp(0{,}32) = 1{,}38\,.$$

Efekt wpływu zmiennej PŁEĆ na szansę znalezienia pracy jest równy 1,38 co oznacza, że szansa znalezienia pracy przez mężczyzn jest 1,38 razy większa w porównaniu z szansą natychmiastowego znalezienia zatrudnienia przez kobiety. Biorąc pod uwagę cały okres obserwacji mężczyźni efektywniej poszukują zatrudnienia.

Intuicyjne przypuszczenie, że szansa znalezienia pracy zależy także od wieku osoby bezrobotnej znalazło potwierdzenie. Ujemny współczynnik przy zmiennej WIEK oznacza, że im bezrobotny jest starszy tym szansa znalezienia przez niego zatrudnienia jest mniejsza. Na podstawie następujących obliczeń:

$$\frac{\lambda(t \mid \text{WIEK} = r\ lat)}{\lambda(t \mid \text{WIEK} = (r+10)\ lat)} = \frac{\exp(-0{,}02 \cdot r)}{\exp(-0{,}02 \cdot (r+10))} \exp(0{,}2) = 1{,}22$$

można stwierdzić, że 10-cio letnia różnica wieku między bezrobotnymi 1,22 razy zwiększa prawdopodobieństwo znalezienia pracy przez osobę młodszą.

Porównując z kolei prawdopodobieństwo natychmiastowego znalezienia pracy przez bezrobotnych posiadających lub nie posiadających statusu bezrobotnego absolwenta otrzymujemy:

$$\frac{\lambda(t \mid \text{ABSOLWENT} = 1)}{\lambda(t \mid \text{ABSOLWENT} = 0)} = \exp(0{,}22) = 1{,}25\,.$$

Efekt wpływu zmiennej ABSOLWENT na szansę znalezienia zatrudnienia jest równy 1,25 co oznacza, że szansa znalezienia pracy przez bezrobotnych absolwentów jest 1,25 razy większa w porównaniu z szansą natychmiastowego znalezienia zatrudnienia przez bezrobotnych, którzy nie są absolwentami.

Posiadanie prawa do zasiłku negatywnie wpływa na szansę natychmiastowego zatrudnienia. Bezrobotni bez prawa do zasiłku mają 1,32 razy większą szansę na znalezienie zatrudnienia w analizowanym czasie aniżeli bezrobotni pobierający zasiłek na co wskazują następujące obliczenia:

$$\frac{\lambda(t \mid \text{ZASIŁEK} = 1)}{\lambda(t \mid \text{ZASIŁEK} = 0)} = \exp(0{,}28) = 1{,}32\,.$$

Zasiłek jest więc czynnikiem powodującym spowolnienie procesu poszukiwania pracy, czyli wydłużenie okresu bezczynności.

Spośród czterech uwzględnionych w modelu zmiennych pomocniczych dla wykształcenia ze względu na występowanie współliniowości wyeliminowana została zmienna PODSTAWOWE. Jednak współczynniki przy zmiennych ZAWODWOWE oraz ŚREDNIE okazały się równe zeru, dlatego też bezrobotni z wykształceniem zawodowym lub średnim mają taką samą szansę na znalezienie pracy jak bezrobotni z wykształceniem co najwyżej podstawowym. Istotne jest jednak wykształcenie wyższe w poszukiwaniu pracy. Osoby z wykształceniem wyższym 1,39 razy zwiększają swoją szansę na znalezienie pracy, ponieważ

$$\frac{\lambda(t \mid \text{WYŻSZE} = 1)}{\lambda(t \mid \text{WYŻSZE} = 0)} = \exp(0{,}33) = 1{,}39\,.$$

Poza rozpatrzonymi zmiennymi wpływ na szansę natychmiastowego zatrudnienia ma również miejsce zamieszkania osób bezrobotnych. Ma ono jednak różne znaczenie w czasie poszukiwania pracy w zależności od długości czasu poszukiwania zatrudnienia. Do dziewiątego miesiąca trwania bezrobocia znacznie większą szansę na znalezienie pracy mają osoby mieszkające na wsi, natomiast po upływie tego okresu sytuacja ulega zmianie i większą szansę na znalezienie pracy mają bezrobotni mieszkający w mieście.

Do analizy wpływu poszczególnych zmiennych na szansę znalezienia pracy można również wykorzystać model Coxa dokonując tzw. analizy warstwowej (por. [18], [46]). Modele warstwowe umożliwiają dopasowania modelu Coxa do danych oddzielnie dla każdej z grup (warstw) wyznaczonych ze względu na różne kategorie zmiennej grupującej. Możliwe są wówczas różne funkcje intensywności w każdej warstwie. W przeprowadzanej analizie dokonana zostanie analiza warstwowa ze względu na przykładowo wybraną zmienną objaśniającą WYŻSZE. Stosując modele warstwowe dokonane zostanie jednocześnie testowanie hipotezy, czy zależność między zmiennymi objaśniającymi a czasem poszukiwania zatrudnienia jest identyczna dla bezrobotnych posiadających wykształcenie wyższe i bezrobotnych z wykształceniem co najwyżej średnim. Wyniki estymacji modelu Coxa oddzielnie dla każdej grupy bezrobotnych podzielonych ze względu na zmienną WYŻSZE zebrane zostały w tabeli 2.13 oraz 2.14.

Tabela 2.13. Wyniki estymacji modelu Coxa dla bezrobotnych z wykształceniem wyższym

Zmienna	Parametr	Błąd standardowy	Wartość statystyki t	Exp(parametr)	Wartość statystyki Walda	Wartość-p dla testu Walda
ABSOLWENT	0,998	0,24609	4,055	2,713	16,445	0,00005

Źródło: obliczenia własne

Otrzymane wyniki wskazują na różną zależność między zmiennymi objaśniającymi a czasem poszukiwania pracy w badanych grupach.

Tabela 2.14. Wynik estymacji modelu Coxa dla bezrobotnych bez wykształcenia wyższego

Zmienna	Parametr	Błąd standardowy	Wartość statystyki t	Exp(parametr)	Wartość statystyki Walda	Wartość-p dla testu Walda
PŁEĆ	0,318	0,0728	4,365	1,374	19,052	0,00001
WIEK	-0,026	0,0034	-7,652	0,974	58,552	0,00000
ZASIŁEK	-0,299	0,0881	-3,394	0,741	11,518	0,00069
MIEJSCE $\cdot g_1(t)$	-1,999	0,1505	-13,285	0,135	176,483	0,00000
MIEJSCE $\cdot g_2(t)$	0,934	0,1106	8,444	2,544	71,306	0,00000

Źródło: obliczenia własne

Czas poszukiwania pracy dla bezrobotnych posiadających wykształcenie wyższe zależy jedynie od tego czy bezrobotny jest czy nie jest absolwentem. Obliczając efekt wpływu zmiennej ABSOLWENT:

$$\frac{\lambda(t \mid \text{ABSOLWENT} = 1)}{\lambda(t \mid \text{ABSOLWENT} = 0)} = \exp(1) = 2,72$$

można stwierdzić, że bezrobotni posiadający wykształcenie wyższe i będący dodatkowo absolwentami mają ponad dwukrotnie większą szansę natychmiastowego znalezienia pracy w porównaniu z bezrobotnymi także posiadającymi wykształcenie wyższe, lecz nie będącymi już absolwentami. Dla grupy osób bezrobotnych nie posiadających wykształcenia wyższego czas poszukiwania pracy zależy od płci, wieku, posiadania prawa do zasiłku i miejsca zamieszkania. Efekty zmiennych są podobne do efektów obliczonych w modelu Coxa dopasowanym dla całej kohorty bezrobotnych.

Na podstawie modelu Coxa możliwe było porównywanie szansy znalezienia zatrudnienia biorąc pod uwagę cały okres obserwacji.

Natomiast w celu porównywania szans znalezienia zatrudnienia w ustalonych przez badacza okresach zastosować można modele logitowe. Aby dokonać takiej analizy czas poszukiwania zatrudnienia został podzielony na pięć okresów:

1) do 1 miesiąca włącznie,

2) od 1 do 3 miesięcy włącznie,
3) od 3 do 6 miesięcy włącznie,
4) od 6 do 9 miesięcy włącznie,
5) powyżej 9 miesięcy.

Podział czasu poszukiwania pracy został ustalony na podstawie często stosowanego przez GUS podziału długości okresu trwania bezrobocia. Wykorzystując modele logitowe zostanie zbadana zależność prawdopodobieństw znalezienia zatrudnienia w ustalonych okresach trwania bezrobocia p_i, $i = 1,2,3,4,5$ od zmiennych objaśniających charakteryzujących osoby bezrobotne, gdzie:

- p_1 oznacza prawdopodobieństwo znalezienia pracy w pierwszym ustalonym okresie, czyli w ciągu pierwszego miesiąca trwania bezrobocia,
- p_2 – prawdopodobieństwo znalezienia pracy w drugim ustalonym okresie, czyli w trakcie od pierwszego do trzeciego miesiąca trwania bezrobocia pod warunkiem, że znalezienie pracy nie nastąpiło wcześniej,
- p_3 – prawdopodobieństwo znalezienia zatrudnienia w czasie od trzeciego do szóstego miesiąca trwania bezrobocia pod warunkiem, że znalezienie pracy nie nastąpiło wcześniej,
- p_4 – prawdopodobieństwo znalezienia pracy w okresie od szóstego do dziewiątego miesiąca trwania bezrobocia pod warunkiem, że nie nastąpiło wcześniej,
- p_5 – prawdopodobieństwo znalezienia zatrudnienia w okresie powyżej dziewiątego miesiąca trwania bezrobocia pod warunkiem, że nie nastąpiło wcześniej.

Modele te mają ogólną postać:

$$\mathrm{logit}(p_i) = \log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki}, \quad i = 1,2,3,4,5$$

Wyniki estymacji modeli logitowych dla poszczególnych prawdopodobieństw prezentują tabele 2.15 – 2.19.

Tabela 2.15. Wyniki estymacji modelu logitowego dla prawdopodobieństwa p_1

Zmienna	Parametr (błąd standardowy)	Wartość statystyki t (wartość-p)	Wartość statystyki Walda (wartość-p)	Iloraz szans	95 % przedział ufności dla ilorazu szans
STAŁA	-1,78 (0,6228)	-2,856 (0,0044)	8,159 (0,0043)	-	-
ABSOLWENT	0,50 (0,4400)	1,144 (0,2528)	1,309 (0,2526)	1,65	(0,70 ; 3,92)
WIEK	-0,05 (0,0188)	-2,687 (0,0073)	7,222 (0,0072)	0,95	(0,92 ; 0,99)
ZASIŁEK	0,48 (0,4372)	1,102 (0,2706)	1,215 (0,2703)	1,62	(0,69 ; 3,82)
ŚREDNIE	-0,88 (0,4032)	-2,173 (0,0300)	4,721 (0,0298)	0,42	(0,19 ; 0,92)
INTERAKCJA ABSOLWENT*ZASIŁEK	3,91 (0,8887)	4,394 (0,0000)	19,305 (0,0000)	49,63	(8,68 ; 283,77)

Źródło: obliczenia własne

Tabela 2.16. Wyniki estymacji modelu logitowego dla prawdopodobieństwa p_2

Zmienna	Parametr (błąd standardowy)	Wartość statystyki t (wartość-p)	Wartość statystyki Walda (wartość-p)	Iloraz szans	95 % przedział ufności dla ilorazu szans
STAŁA	0,27 (0,2938)	0,930 (0,3528)	8,864 (0,3526)	-	-
ABSOLWENT	0,71 (0,2089)	3,420 (0,0007)	11,695 (0,0006)	2,04	(1,36 ; 3,08)
WIEK	-0,04 (0,0077)	-5,539 (0,0000)	30,679 (0,0000)	0,96	(0,94 ; 0,97)
PŁEĆ	0,63 (0,1598)	3,950 (0,0001)	15,604 (0,0001)	1,88	(1,37 ; 2,57)
ŚREDNIE	-0,39 (0,1701)	-2,310 (0,0211)	5,338 (0,0209)	0,68	(0,48 ; 0,94)
OSOBY	-0,77 (0,2839)	-2,718 (0,0067)	7,389 (0,0066)	0,46	(0,26 ; 0,81)

Źródło: obliczenia własne

Tabela 2.17. Wyniki estymacji modelu logitowego dla prawdopodobieństwa p_3

Zmienna	Parametr (błąd standardowy)	Wartość statystyki t (wartość-p)	Wartość statystyki Walda (wartość-p)	Iloraz szans	95 % przedział ufności dla ilorazu szans
STAŁA	0,87 (0,2768)	3,153 (0,00178)	9,939 (0,0016)	-	-
PŁEĆ	0,79 (0,1904)	4,158 (0,0000)	17,285 (0,0000)	2,21	(1,52 ; 3,21)
OSOBY	-1,08 (0,2986)	-3,329 (0,0003)	13,171 (0,0003)	0,34	(0,19 ; 0,61)
WIEK	-0,05 (0,0079)	-5,768 (0,0000)	33,275 (0,0000)	0,96	(0,94 ; 0,97)
ZASIŁEK	-1,05 (0,2160)	-4,868 (0,0000)	23,695 (0,0000)	0,35	(0,23 ; 0,53)
WYŻSZE	0,77 (0,3292)	2,327 (0,0202)	5,417 (0,0199)	2,15	(1,13 ; 4,11)
ZAWODOWE	0,39 (0,1984)	1,981 (0,0479)	3,926 (0,0476)	1,48	(1,00 ; 2,19)

Źródło: obliczenia własne

Iloraz szans $\hat{\psi}_{1/0}$ umieszczony w piątej kolumnie tabel prezentujących wyniki dla zmiennych jakościowych porównuje szansę znalezienia zatrudnienia w badanym okresie przez bezrobotnych, dla których wartość zmiennej jest równa 1 w porównaniu z bezrobotnymi, dla których dana zmienna przyjmuje wartość równą 0.

Tabela 2.18. Wyniki estymacji modelu logitowego dla prawdopodobieństwa p_4

Zmienna	Parametr (błąd standardowy)	Wartość statystyki t (wartość-p)	Wartość statystyki Walda (wartość-p)	Iloraz szans	95 % przedział ufności dla ilorazu szans
STAŁA	0,507 (0,3209)	1,571 (0,1168)	2,4691 (0,1161)	-	-
WIEK	-0,02 (0,0081)	-2,957 (0,0033)	8,741 (0,0031)	0,98	(0,96 ; 0,99)

Źródło: obliczenia własne

Dla zmiennej ciągłej WIEK iloraz szans $\hat{\psi}_{r+1/r}$ porównuje szansę znalezienia zatrudnienia przez osoby bezrobotne, dla których różnica wieku jest równa jeden rok.

Tabela 2.19. Wyniki estymacji modelu logitowego dla prawdopodobieństwa p_5

Zmienna	Parametr (błąd standardowy)	Wartość statystyki t (wartość-p)	Wartość statystyki Walda (wartość-p)	Iloraz szans	95 % przedział ufności dla ilorazu szans
STAŁA	4,90 (0,7693)	6,375 (0,0000)	40,635 (0,0000)	-	-
WIEK	-0,09 (0,0137)	-6,485 (0,0000)	42,057 (0,0000)	0,91	(0,89 ; 0,94)
MIEJSCE	-0,02 (0,0081)	-2,957 (0,0033)	8,741 (0,0031)	0,23	(0,08 ; 0,69)

Źródło: obliczenia własne

Otrzymane wyniki wskazują na różną zależność czasu poszukiwania zatrudnienia od zmiennych objaśniających w różnych okresach trwania bezrobocia. Szansa znalezienia zatrudnienia w pierwszym miesiącu trwania bezrobocia zależy od wieku, wykształcenia średniego oraz interakcji między zmiennymi ABSOLWENT i ZASIŁEK. Zmienne ABSOLWENT i ZASIŁEK pozostały w modelu mimo, że wyniki testów statystycznych nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy o zerowych współczynnikach przy tych zmiennych (por. kolumna 3 i 4 wiersz 3 i 5 tabeli 2.15), ze względu na istotną interakcję między tymi zmiennymi. Prawdopodobieństwo znalezienia pracy w pierwszym miesiącu trwania bezrobocia dla bezrobotnych absolwentów pobierających zasiłek jest prawie 50-cio krotnie większe w porównaniu z pozostałymi bezrobotnymi. W przypadku absolwentów zasiłek nie wstrzymuje procesu poszukiwania pracy, nie wydłuża dla absolwentów okresu bezczynności. Współczynnik $\hat{\psi}_{1/0}$ dla osób z wykształceniem średnim (ŚREDNIE=1) w porównaniu z pozostałymi bezrobotnymi jest mniejszy od 0,5 co oznacza, że osoby nie posiadające wykształcenia średniego mają ponad dwa razy większą szansę na znalezienie zatrudnienia w pierwszym miesiącu trwania bezrobocia. Otrzymujemy mianowicie:

$$\hat{\psi}_{0/1} = \frac{1}{\hat{\psi}_{1/0}} = \frac{1}{0,42} = 2,38 .$$

W oparciu o iloraz szans dla wieku można obliczyć, że osoby w wieku 30 lat mają w stosunku do osób 40- letnich ponad 1,5 razy większą szansę znalezienia pracy:

$$\hat{\psi}_{30/40} = \frac{1}{\hat{\psi}_{40/30}} = \frac{1}{(0,95)^{10}} = 1,67 .$$

Obliczony iloraz szans dotyczy osób bezrobotnych, dla których różnica wieku wynosi 10 lat.

Szansa znalezienia pracy w okresie od 1 do 3 miesiąca trwania bezrobocia pod warunkiem, że znalezienie pracy nie nastąpiło wcześniej zależy od wieku, płci, wykształcenia średniego, utrzymywania przez bezrobotnych innych osób oraz od tego czy bezrobotny jest zarejestrowany jako absolwent. W tym okresie ponad 2 krotnie większą szansę na znalezienie pracy mają absolwenci. Ujemne szacunki parametrów odpowiadające zmiennym WIEK, ŚREDNIE i OSOBY wskazują, że wzrost wieku i posiadanie wykształcenia średniego oraz utrzymywanie innych osób zmniejszają prawdopodobieństwo znalezienia pracy w badanym okresie. W tym też okresie bezrobotni mężczyźni mają prawie 2 krotnie większą w porównaniu z kobietami szansę znalezienia pracy. Znalezienie pracy po 6 miesiącu trwania bezrobocia zależy już jedynie od wieku i miejsca zamieszkania (por. tabela 2.18 i 2.19). Zmienną, która okazała się istotna w procesie poszukiwania pracy niezależnie od długości okresu trwania bezrobocia jest WIEK. Ponadto mężczyźni mają większą szansę na znalezienia pracy w ciągu pół roku niż kobiety. Absolwenci mają ponad 2 krotnie większą szansę na prawie natychmiastowe, bo w ciągu pierwszego miesiąca trwania bezrobocia znalezienie pracy. Analizując wpływ wykształcenia osób bezrobotnych na poszukiwanie pracy potwierdza się wniosek otrzymany na podstawie skonstruowanych w pracy odpowiednich tablic długości trwania bezrobocia. W najmniej korzystnej sytuacji podczas poszukiwania pracy są osoby z wykształceniem średnim, natomiast dużą szansę w porównaniu z pozostałymi poszukującymi zatrudnienia mają bezrobotni posiadający wykształcenie wyższe.

ROZDZIAŁ 3

Modele poszukiwania pracy

3.1 Uwagi wstępne

Osoba bezrobotna znajduje się w wyjątkowej sytuacji. W zdecydowanej większości przypadków stan niezatrudnienia został wymuszony przez czynniki zewnętrzne takie jak konieczność ograniczenia zatrudnienia w wyniku restrukturyzacji przedsiębiorstw w celu przystosowania ich do działalności w gospodarce rynkowej. Nierzadko osoby bezrobotne należą do niezamożnej części społeczeństwa co sprawia, że ich sytuacja jest wyjątkowo trudna. Jednocześnie utrzymująca się wysoka stopa bezrobocia rodzi dodatkową presję szybkiego zdobycia i utrzymania posady. Wszystkie te czynniki powodują, że osoba poszukująca zatrudnienia ulegając wspomnianej presji wykorzystuje pierwszą nadarzającą się okazję do zdobycia zatrudnienia. Może prowadzić to do sytuacji, w której pracownik jest niezadowolony z pracy z różnych względów czy to płacowych, czy wykorzystania jego kwalifikacji i będzie przejawiał chęć jej zmiany. Z drugiej strony jeżeli bezrobotny zdecyduje się oczekiwać na właściwą ofertę staje przed problemem przedłużającego się okresu bezczynności, a co za tym idzie braku przychodu i nie rzadko środków utrzymania. W rozdziale tym zostanie zaproponowana metoda, która może wspierać decyzję osoby poszukującej zatrudnienia, polegającą na określeniu, w którym momencie należy przerwać poszukiwania i przyjąć pracę, przy czym podstawowym kryterium dla poszukującego będzie kryterium płacowe. Należy zwrócić uwagę, że zaproponowane metody są kierowane nie tylko do osób zwolnionych z przyczyn dotyczących zakładu pracy, ale również do tych osób, które dobrowolnie zrezygnowały z pracy np. w celu uzyskania pracy na lepszych warunkach lub pracując jednocześnie poszukują nowego zatrudnienia.

Najprostszym sposobem poszukiwania posady jest śledzenie różnego rodzaju anonsów. Wyróżnia się następujące główne źródła informacji o ofertach pracy:

- Urzędy Pracy,
- prasa,
- internet,
- radio,
- telewizja,
- kontakty prywatne,
- prywatne biura pracy.

Przykładowe oferty pracy zamieszczono w tabelach 3.1, 3.2, 3.3. Każda z zaprezentowanych ofert pracy pochodzi z innego źródła.

Tabela 3.1. Internetowa oferta pracy

OFERTY PRACY – Programowanie	
STANOWISKO: Programista PowerBuilder	**(REF: C/PB/01/02/99)**

Naszym Klientem jest jeden z wiodących producentów oprogramowania wspomagającego zarządzanie przedsiębiorstwem. Ta kilkudziesięcioosobowa firma szczyci się wysokiej klasy produktami oraz pokaźną bazą użytkowników.

Stanowisko programisty jest przeznaczone dla osób, które CO NAJMNIEJ 1 ROK uczestniczyły w tworzeniu oprogramowania wspomagającego zarządzania przedsiębiorstwem przy użyciu narzędzia PowerBuilder. Istotna jest zarówno biegłość w posługiwaniu się narzędziem, jak też znajomość zagadnień związanych ze strukturą funkcjonalną przedsiębiorstw, obiegiem dokumentów, finansami i logistyką. Praca w godzinach 9.00 - 17.00.

Nasz Klient zapewnia dostęp do najnowszej technologii z dziedziny systemów wspomagających zarządzanie, samodzielność oraz wysokie wynagrodzenie.

Tabela 3.1 prezentuje ofertę dostępną w internecie, tabela 3.2 jest ofertą prasową, natomiast tabela 3.3 zawiera ofertę dostępną w Urzędzie Pracy.

Zaprezentowane oferty zawierają różne rodzaje informacji. Oferta internetowa jest treściowo najbogatsza. Informuje ona o:

- pracodawcy,
- stawianych wymaganiach,
- godzinach pracy,
- preferowanych umiejętnościach,
- zaletach pracy.

Tabela 3.2. Prasowa oferta pracy

Duża firma budowlana zatrudni kierownika budowy oraz majstra budowy z uprawnieniami. Oferty pisemne: Hardbud Sp. Z o.o. 02-822 Warszawa ul. Poleczki 24

Oferta prasowa zawiera informację jedynie na temat podstawowych wymagań stawianych poszukiwanemu pracownikowi. Żadna z przedstawionych ofert nie zawiera informacji na temat wynagrodzenia za proponowaną pracę. Poszukujący po wstępnym zapoznaniu się z konkretną ofertą może jedynie ocenić, czy jest ona dla niego dostępna. *Dostępne oferty* pracy będą rozumiane jako takie, dla których poszukujący spełnia stawiane wymagania i mógłby z nich skorzystać przyjmując proponowane zatrudnienie. Każdą dostępną ofertę poszukujący może szczegółowo rozpatrzyć odbywając spotkanie z pracodawcą lub osobą przez niego upoważnioną, w celu uzyskania wszystkich interesujących go informacji na temat warunków zatrudnienia. Każdy poszukujący może wybierać tylko spośród tych ofert, dla których spełnia oczekiwania pracodawcy takie jak: wykształcenie, praktyka, wiek, posiadane umiejętności, itd. Bardziej szczegółowo problem umiejętności poszukującego i jego kompetencji do odpowiednich ofert przedstawiony jest w pracy [38].

Tabela 3.3. Oferta Powiatowego Urzędu Pracy

OFERTA ZAKŁADU PRACY			
M.-ce pracy	W-W+KONTAKT, RYNEK 5 DWÓR POLSK		
Zasięg	REJON	Typ pracy	PRACA STAŁA
Zmianowość	JEDNA ZM.	Data rozp.	2000-01-11
Rodz. wynag.	WYNAGRODZENIE M.		
Zarobki	800,00	950,00 brutto	
Uwagi	OBSŁUGA SEKRETARIATU. BIEGŁA ZNAJOMOŚĆ JĘZ. NIEMIECKIEGO. MOŻE BYĆ CZĘŚĆ ETATU. MOŻE BYĆ ABSOLWENT.		
Sposób przyjęcia	INNE	Pośrednik	604/A
POŚREDNICTWO OTWARTE			
Nr data zgł.	110/2000-01-11	Data wycofania oferty	
Zakład pracy	„ADMI" SP. Z.O.O.		
Adres	50-062 WROCŁAW, PL. SOLNY 16 TEL. 372-48-97		
Osoba do kontaktu	MARIA GODLEWSKA		
Zawód	4110101 SEKRETARKA	Stanow.	SKRETARKA
L. miejsc	1	L. kandyd. 10	L. skier. 0
OCZEKIWANIA ZAKŁADU PRACY			
Wiek	0	Płeć 0	Wykształcenie ŚR.OGÓLN.
Staż	0	Jęz. obce	NIEMIECKI
Dod. kwalif.	OBSŁUGA KOMPUTERA		

Po wyrażeniu chęci zatrudnienia przez pracodawcę poszukujący pracy może podjąć jedną z dwóch możliwych decyzji:

1) przyjąć daną pracę zgadzając się na wszystkie proponowane warunki pracy lub
2) odrzucić daną ofertę i kontynuować proces poszukiwania zatrudnienia.

Wybór odpowiedniej decyzji odnośnie przyjęcia bądź odrzucenia rozpatrywanej oferty powinien być dokonany w taki sposób, aby maksymalizować korzyści wynikające z podjęcia pracy, lub rezygnacji z oferty. Podstawowym miernikiem atrakcyjności oferowanego zatrudnienia są oczywiście dochody. Im pracodawca oferuje większe zarobki, tym oferta jest atrakcyjniejsza. Nie jest to jedyny czynnik, który poszukujący brać będzie pod uwagę. Ważne jest także umiejscowienie zakładu pracy, które ma wpływ na codzienne koszty dojazdu do pracy, koszt poszukiwania pracy, stopień dopasowania posady do kwalifikacji itp. Wszystkie te czynniki należy wziąć pod uwagę dokonując wyboru pomiędzy zaakceptowaniem danej oferty pracy, a kontynuowaniem poszukiwania zatrudnienia.

Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczają dochody proponowane w kolejno rozpatrywanych ofertach pracy. Podczas analizy problemu podjęcia decyzji uwzględnione zostaną trzy czynniki:

1) x_i - proponowane dochody *i*-tej oferty pracy,
2) κ - koszt poszukiwania oferty,
3) $d_{\min}$ - minimalne wynagrodzenie deklarowane przez poszukującego.

Osoba pozostająca bez pracy mimo ograniczonych lub nawet często w ogóle braku dochodów jest zmuszona mimo wszystko do pewnych wydatków. Takimi wydatkami są na przykład koszty utrzymania, to znaczy wydatki poniesione na potrzebne artykuły spożywcze, opłaty związane z mieszkaniem, dojazd do aktualnie rozpatrywanego zakładu pracy w celu przeprowadzenia rozmowy wstępnej z pracodawcą, reklamę własnej osoby.

Kosztem poszukiwania pracy będą nazywane wszystkie wydatki jakie musi ponieść osoba chcąca znaleźć zatrudnienie w okresie rozpatrywania jednej oferty. Przedział czasowy w jakim może być rozpatrywana jedna oferta nazywany będzie *okresem analizy oferty*. Jeżeli okres analizy oferty wynosi jeden tydzień (poszukujący rozpatruje jedną ofertę tygodniowo), to kosztem poszukiwania pracy będą wszystkie poniesione w ciągu tego tygodnia wydatki.

W analizie zostaną omówione następujące *modele poszukiwania pracy*:

- model z ustaloną liczbą ofert,
- model z nieograniczoną liczbą ofert,
- model z nieograniczoną liczbą ofert i współczynnikiem dyskontowania.

W każdym modelu analizowane będą dwa przypadki. Pierwszy z nich zakłada, że poszukujący nie ma możliwości powrotu, czyli ponownego rozpatrywania oferty, którą już wcześniej odrzucił. Każda nie przyjęta oferta pracy przestaje być aktualna dla poszukującego, gdyż zakłada się, że zaraz po odrzuceniu skorzystała z niej inna osoba. W drugim przypadku poszukujący ma możliwość przeprowadzenia ponownej analizy odrzuconej oferty pracy, może każdą ofertę rozpatrywać wielokrotnie. Reguły postępowania dla poszukujących zatrudnienia będą definiowane ogólnie dla dowolnego rozkładu dochodów. Niezależnie od tego będą one wyznaczone dla rozkładu logarytmiczno-normalnego, rozkład ten bowiem uważa się jako odpowiedni do opisu rozkładu dochodów w Polsce (por. paragraf 3.4).

W analizowanych modelach przyjęto dwa podstawowe założenia:

1) znany jest rozkład dochodów proponowanych za pracę w dostępnych ofertach,
2) poszukujący może rozpatrywać co najwyżej jedną ofertę w ściśle określonym czasie.

Zakłada się ponadto, że pojawiające się oferty pracy a ściślej proponowane w nich wynagrodzenia stanowią ściśle stacjonarny proces stochastyczny.

Ponieważ przyjmuje się, że oferty będą rozpatrywane przez zainteresowaną osobę jedna po drugiej, wygodniej będzie traktować wynagrodzenia w nich proponowane jako ciąg zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i oznaczać $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Dodatkowo zakłada się, że zmienne te są niezależne a ich rozkład określony jest za pomocą dystrybuanty $F_{X_i}(x)$ lub po prostu $F(x)$ i ma skończoną wariancję.

Wysokość wynagrodzenia za określony rodzaj pracy jest ustalana przez pracodawców na podstawie aktualnych warunków panujących na rynku. Jeśli zatem rozpatrywany będzie niezbyt długi okres (i nie jest to okres drastycznych zmian w gospodarce) to można przyjąć, że warunki wpływające na ustalenie przez pracodawcę wysokości płacy pozostają nie zmienione. Tak więc każda kolejna oferta traktowana jako pochodna warunków rynkowych jest niezależna od innych ofert.

Problem poszukiwania pracy w przypadku, kiedy rozkład dochodów nie jest stały, lecz zależny od koniunktury gospodarczej rozpatrywany jest w pracy [27].

Założenie stałego okresu analizy oferty oznacza, że poszukujący do czasu znalezienia zatrudnienia zawsze rozpatruje jedną ofertę pracy w ustalonym okresie analizy. Na przykład dla rozpatrzenia czterech ofert pracy poszukujący, przy jednotygodniowym okresie analizy ofert, potrzebuje miesiąc czasu (dokładnie cztery tygodnie).

3.2 Modele z ustaloną liczbą ofert pracy

3.2.1 Wstęp

Najprostszym modelem poszukiwania pracy jest model, w którym liczba dostępnych ofert zatrudnienia jest ustalona. Zakłada się, że poszukujący będzie miał możliwość rozpatrzenia co najmniej 2, ale nie więcej niż n ofert pracy. Ograniczenie oznacza ustalenie górnej granicy liczby dostępnych ofert, zatem poszukujący nie ma możliwości rozpatrywania jej nieskończonej liczby. Zakładając jednak, że zależy mu na znalezieniu zatrudnienia powinien zdecydować się na jedną spośród n dostępnych ofert pracy. W trakcie rozpatrywania i-tej oferty pracy poszukujący ma pełną informację na temat pierwszych i ofert, które były poddane analizie, nie posiada natomiast żadnych informacji na temat następnych $n-i$ ofert. Zapozna się z nim dopiero w przypadku, gdy zrezygnuje z aktualnie rozpatrywanej i-tej oferty, czyli nie przyjmie proponowanej pracy.

3.2.2 Model bez możliwości powrotu do odrzuconej oferty pracy

Jako pierwszy rozważony zostanie schemat poszukiwania zatrudnienia, gdy poszukujący nie ma możliwości powrotu, czyli ponownego rozpatrywania oferty pracy, której wcześniej nie przyjął. Każda nie przyjęta oferta pracy przestaje być aktualna dla poszukującego w chwili jej odrzucenia. W tej sytuacji poszukujący analizując i-tą ofertę powinien podjąć decyzję, czy przyjmuje daną pracę akceptując proponowane wynagrodzenie, czy też będzie kontynuował poszukiwanie rozpatrując kolejne oferty, jednocześnie odrzucając możliwość powrotu do aktualnie rozpatrywanej. Ponadto poszukujący może otrzymać co najwyżej n ofert pracy. W przypadku, kiedy nie przyjmie żadnej z $n-1$ kolejno rozpatrywanych ofert, a zależy mu na znalezieniu pracy, to powinien zaakceptować ostatnią ofertę.

Przy założeniu znajomości rozkładu dochodów $F(x)$ dostępnych ofert pracy, wyznaczona zostanie reguła postępowania pozwalająca poszukującemu zdecydować, którą ofertę pracy powinien zaakceptować, inaczej mówiąc, w którym momencie poszukujący powinien przerwać proces poszukiwania podejmując pracę.

Załóżmy, że mamy n ofert pracy, w każdej z nich proponowane są poszukującemu wynagrodzenia $x_1, x_2, \ldots, x_n$, traktowane jako realizacje zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Rozpatrując i-tą ofertę pracy z propozycją wynagrodzenia x_i poszukujący staje przed problemem czy przyjąć proponowaną pracę, czy może warto poczekać na inne propozycje, w których być może będzie oferowane większe wynagrodzenie.

Załóżmy, że poszukujący rozważył do chwili obecnej $i-1$ ofert pracy, które zostały odrzucone. Obecnie analizuje i-tą ofertę, $i = 1,2,\ldots,n$. Oznaczmy przez z_{n-i} oczekiwane wynagrodzenie jakie można otrzymać rezygnując z i-tej oferty i przechodząc do analizy następnej oferty. Poszukiwania należy przerwać w chwili, gdy wynagrodzenie proponowane w ofercie jest nie mniejsze od oczekiwanego wynagrodzenia jakie można osiągnąć z ofert jeszcze nie rozpatrzonych. Jeśli przez x_i oznaczymy proponowane wynagrodzenie i-tej oferty, to gdy $x_i \geq z_{n-i}$ przeglądanie ofert należy przerwać i przyjąć proponowaną pracę. Optymalną regułę postępowania podczas wyboru jednej spośród pierwszych $n-1$ ofert można zapisać następująco:

Reguła 1

Jeśli $x_i < z_{n-i}$, *to należy odrzucić i-tą ofertę i kontynuować poszukiwanie,*

jeśli $x_i \geq z_{n-i}$, *to należy przyjąć i-tą ofertę, przerywając dalsze poszukiwania,*

$$i = 1,2,\ldots,n-1.$$

Aby zastosować w praktyce regułę postępowania należy wyznaczyć ciąg liczb $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Niech $Z_j(X)$ oznacza wynagrodzenie otrzymane z optymalnie wybranej oferty pracy, gdzie j ($j = 0,1,\ldots,n-1$) jest liczbą jeszcze nie rozpatrzonych ofert, natomiast X oznacza dochody proponowane w aktualnej ofercie. Na przykład po rozpatrzeniu pierwszej oferty pracy i otrzymaniu propozycji wynagrodzenia za pracę w wysokości x_1, będącej realizacją zmiennej losowej X_1, spodziewane wynagrodzenie przy optymalnej procedurze wynosi $Z_{n-1}(X_1)$. Jeżeli poszukujący nie dokona wyboru pracy przed pojawieniem się ostatniej oferty, wówczas postępując racjonalnie (tzn. chcąc zdobyć zatrudnienie) powinien zaakceptować dochody oferowane w ostatniej n-tej ofercie, a zatem $Z_0(X_n) = X_n$. Optymalnie wybrana oferta pracy maksymalizuje oczekiwane wynagrodzenie za pracę, co można zapisać następująco:

$$Z_j(x) = \max\{X, z_j\}, \tag{3.1}$$

gdzie z_j oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Z_{j-1}(X)$ czyli

$$z_j = E(Z_{j-1}(X)). \tag{3.2}$$

Wprowadzając statystykę

$$Y = \max\{X, z_j\}$$

oraz obliczając jej wartość oczekiwaną otrzymujemy:

$$E(Y) = E(\max\{X, z_j\}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x, z_j\} dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{z_j} z_j \, dF(x) + \int_{z_j}^{+\infty} x \, dF(x) =$$

$$= z_j \int_{-\infty}^{z_j} dF(x) + z_j \int_{z_j}^{+\infty} dF(x) - z_j \int_{z_j}^{+\infty} dF(x) + \int_{z_j}^{+\infty} x \, dF(x) =$$

$$= z_j + \int_{z_j}^{+\infty} x \, dF(x) - \int_{z_j}^{+\infty} z_j \, dF(x).$$

Ostatecznie

$$E(Y) = z_j + \int_{z_j}^{+\infty} (x - z_j) dF(x). \tag{3.3}$$

Wykorzystując zależność (3.1) wyrażenie (3.2) można zapisać rekurencyjnie w następujący sposób:

$$z_{j+1} = E(\max\{X, z_j\}) \qquad \text{dla} \qquad j = 1,2,\ldots,n-1,$$

przyjmując, że

$$z_1 = E(X).$$

Następnie podstawiając równanie (3.3) uzyskujemy:

$$z_{j+1} = z_j + \int_{z_j}^{\infty} (x - z_j) dF(x), \quad j = 1,2,\ldots,n-1, \tag{3.4}$$

gdzie

$$z_1 = E(X).$$

Zakładając, że w Polsce rozkład dochodów opisany jest przez rozkład logarytmiczno-normalny wzór (3.4) przyjmuje postać:

$$z_{j+1} = z_j + \int_{z_j}^{+\infty} (x - z_j) \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx. \tag{3.5}$$

Korzystając z faktu, że jeżeli zmienna losowa Y ma rozkład normalny o parametrach μ oraz σ, to zmienna losowa X określona wzorem $X = \exp(Y)$ ma rozkład logarytmiczno-normalny o tych samych parametrach, dystrybuantę tego rozkładu $F(x)$ można wyrazić za pomocą dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego $\Phi(x)$ w następujący sposób:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right). \tag{3.6}$$

Wykorzystując zależność (3.6) wzór (3.5) można zapisać w następujący sposób:

$$z_{j+1} = z_j + \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln z_j - \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right)\right] - z_j \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln z_j - \mu}{\sigma}\right)\right], \quad (3.7)$$

dla $j = 1,2,\ldots,n-1$,

natomiast dla $j = 0$ przyjmuje się, że

$$z_1 = E(X).$$

Znając parametry rozkładu oferowanych dochodów można wyznaczyć rekurencyjnie na mocy równania (3.7) ciąg liczb pozwalający zastosować *regułę 1* optymalnego wyboru oferty pracy. Równanie (3.7) ze względu na obecność dystrybuanty rozkładu normalnego, która jak wiadomo nie posiada analitycznej postaci, ma jedynie numeryczne rozwiązanie.

Każda osoba pozostająca bez pracy może określić swoje miesięczne potrzeby finansowe niezbędne do zapewnienia bytu rodzinie. W związku z tym poszukujący często określa minimalne miesięczne wynagrodzenie, które powinien otrzymać za wykonywaną pracę. Oznaczmy określone przez poszukującego minimalne wynagrodzenie przez $d_{\min}$. Wówczas poszukujący zatrudnienia, chcąc zaspokoić swoje wymagania nie powinien przyjąć oferty pracy o wynagrodzeniu mniejszym niż $d_{\min}$. *Reguła 1* nie zapewnia jednak spełnienia tego warunku. Aby zagwarantować poszukującemu przyjęcie pracy o wynagrodzeniu nie mniejszym niż określone przez niego minimum, można zaproponować modyfikację *reguły 1* wprowadzoną w określeniu *reguły 2*.

Zdefiniujmy ciąg $z_1^{'}, z_2^{'}, \ldots z_n^{'}$ w następujący sposób:

$$z_i^{'} = \begin{cases} z_i & \text{gdy} \quad z_i \geq d_{\min}, \\ d_{\min} & \text{gdy} \quad z_i < d_{\min}. \end{cases}$$

Wówczas reguła gwarantująca nie przyjęcie spośród pierwszych $n-1$ ofert, pracy o dochodach mniejszych od $d_{\min}$ przyjmuje postać:

<u>*Reguła 2*</u>

Jeśli $x_i < z'_{n-i}$, *to należy odrzucić i-tą ofertę i kontynuować poszukiwanie,*

jeśli $x_i \geq z'_{n-i}$, *to należy przyjąć i-tą ofertę i przerwać poszukiwania pracy,*

$i = 1,2,\ldots,n-1$.

Zarówno *reguła 1*, jak i *reguła 2* stanowią schemat postępowania dla poszukującego zatrudnienia przy założeniu, że liczba dostępnych ofert jest ustalona. Można przypuszczać, że liczba dostępnych ofert n jest zależna od długości okresu bezrobocia, na który może sobie pozwolić osoba poszukująca zatrudnienia. Im dłużej może trwać poszukiwanie pracy, tym większa jest liczba ofert możliwa do rozpatrzenia. Z kolei długość okresu poszukiwania pracy, na którą może pozwolić sobie poszukujący zależy od jego sytuacji materialnej. W przypadku osoby, która utraciła zatrudnienie w wyniku zmian w gospodarce jej sytuacja materialna jest raczej zła i z pewnością osoba taka znajduje się pod o wiele większą presją zdobycia zatrudnienia niż osoba, która samodzielnie decyduje się na zmianę posady. Reguły postępowania prezentowane w pracy skierowane są nie tylko do osób, które utraciły pracę wbrew własnej woli ale również dla osób, które dobrowolnie poszukują zatrudnienia. Osobą poszukującą może być również osoba aktywna zawodowo (zatrudniona) pragnąca zmienić swoją pracę. W analizie przyjęto, że liczba ofert wyznaczana będzie w zależności od posiadanego (zaoszczędzonego) przez poszukującego kapitału w sposób następujący:

$$n = \left\lceil \frac{\tau}{\kappa} \right\rceil \tag{3.8}$$

gdzie τ oznacza wielkość zgromadzonych przez poszukującego oszczędności,

κ oznacza koszt poszukiwania oferty, natomiast

$\lceil \bullet \rceil$ oznacza zaokrąglenie w górę do liczby całkowitej.

Im zgromadzone przez poszukującego oszczędności są większe, tym więcej ofert może on analizować, więc wydłuża się dla niego okres, w którym może sobie pozwolić na brak zatrudnienia oraz poszukiwanie pracy.

Ocena skuteczności przedstawionych reguł postępowania zostanie zaproponowana w paragrafie 3.6, w którym dokonane zostanie również porównanie *reguły 1* z *regułą 2* dla różnych wielkości zaoszczędzonego kapitału τ

3.2.3 Model z możliwością powrotu do odrzuconej oferty pracy

W przypadku, kiedy liczba ofert pracy jest ograniczona i poszukujący ma możliwość powrotu do poprzednio już rozpatrywanych i w dalszym ciągu aktualnych ofert pracy, to optymalny wybór pracy jest trywialny. Każdą ofertę poszukujący może wówczas rozpatrywać kilka razy. Optymalny wybór oferty pracy przy takich założeniach sprowadza się do przeglądnięcia wszystkich n ofert pracy i wybrania najkorzystniejszej. W rzeczywistości jednak taka sytuacja prawie się nie zdarza. Bardzo często oferty mają po pierwsze z góry określony czas swojej aktualności, po drugie przestają być dostępne na skutek zaakceptowania ich przez innych poszukujących.

Załóżmy więc, że poszukujący ma możliwość powrotu tylko do tych ofert, które są w dalszym ciągu aktualne. Proponuje się wówczas, aby poszukujący dokonał wyboru oferty zgodnie z następującym schematem:

1) wybrać ofertę zgodnie z *regułą 1* lub *regułą 2* w zależności od tego, czy jest określone wynagrodzenie minimalne,
2) porównać wynagrodzenie proponowane w wybranej przez regułę ofercie z wynagrodzeniami proponowanym we wszystkich wciąż dostępnych ofertach,
3) wybrać tę ofertę, która proponuje największe wynagrodzenie.

3.3 Modele z nieograniczoną liczbą ofert pracy

3.3.1 Wstęp

W sytuacji, kiedy osoba nie jest zmuszona do podjęcia pracy w ściśle określonym czasie, zbyteczne jest ograniczenie liczby dostępnych ofert. Dotyczy to osób, które mają zapewniony przez określony czas byt dla siebie i całej rodziny. Taką osobą może być na przykład absolwent, który dotychczas pozostawał na utrzymaniu swoich bliskich, sam zaś nie ma zobowiązań wobec własnej rodziny i zazwyczaj do znalezienia zatrudnienia wciąż pozostaje na utrzymaniu rodziny. Poszukujący może wówczas czekać nawet przez długi okres na najkorzystniejszą ofertę w swoim zawodzie. Z tego też powodu rozważony zostanie model poszukiwania pracy, kiedy nie jest ustalona liczba dostępnych ofert dla poszukującego. Będą rozpatrywane przez niego wszystkie dostępne oferty pracy, do momentu znalezienia zatrudnienia.

Załóżmy, że poszukujący otrzymuje jedną ofertę w określonym czasie – okresie poszukiwania oferty, na przykład w ciągu tygodnia. W przypadku, kiedy osoba w ustalonym okresie czasu pomimo starań nie otrzyma żadnej oferty, to fakt ten może być interpretowany jako otrzymanie oferty pracy o zerowych dochodach. Wprowadzone założenie pozwoli ustalić koszt poszukiwania zatrudnienia. Ponieważ liczba ofert pracy jest nieograniczona, więc wydawałoby się, że należy czekać na ofertę, która będzie najbardziej satysfakcjonująca (wynagrodzenie za pracę będzie odpowiadało umiejętnościom poszukującego). Z drugiej jednak strony, ze względu na pogarszającą się często sytuację finansową oraz także psychiczną poszukującego, będzie on poszukiwał pracy do pewnego granicznego momentu. Zatem i w tym przypadku optymalny wybór oferty pracy nie jest oczywisty. W dalszej części paragrafu 3.3 zajmiemy się więc formułowaniem reguł postępowania, według których poszukujący może dokonać wyboru jednej spośród wielu kolejno przeglądanych ofert. Wyznaczane reguły w przypadku, kiedy liczba ofert jest nieograniczona sprowadzają się do wyznaczenia wartości progowej dochodów. Wartość progowa określa minimalne wynagrodzenia za pracę proponowane w ofercie, którą można zaakceptować podejmując zatrudnienie.

3.3.2 Model podstawowy

Poszukujący przegląda kolejne oferty analizując oferowane w nich dochody pamiętając, że z każdą dodatkową ofertą wzrasta łączny koszt poszukiwania pracy o κ złotych. W trakcie analizowania oferty poszukujący może ją zaakceptować podejmując pracę, lub zrezygnować z niej kontynuując poszukiwanie. Reguła poszukiwania pracy wskazuje moment, w którym należy przerwać proces poszukiwania podejmując zatrudnienie, jeżeli proponowane wynagrodzenie za pracę jest nie mniejsze od $d_r = E(r(X))$, gdzie $r(X)$ oznacza maksymalne osiągalne wynagrodzenie w momencie analizowania oferty o proponowanym wynagrodzeniu x, będącym realizacją zmiennej losowej X. Wartość d_r nazywana będzie wartością progową dochodów lub po porostu wartością progową (*ang. reservation wage*). Wówczas ogólną optymalną regułę postępowania można sformułować następująco:

<u>*Reguła 3*</u>

Jeśli $x < d_r$, *to należy nie przyjmować danej oferty kontynuując poszukiwanie,*

jeśli $x \geq d_r$, *to należy przyjąć tę ofertę i przerwać poszukiwania pracy.*

Załóżmy, że poszukujący nie ma możliwości powrotu do raz odrzuconej oferty. Jeżeli rozpatrywana oferta została uznana za nieatrakcyjną (niemożliwą do przyjęcia), to pozostaje ona właśnie taką przez cały okres poszukiwania.

Przyjmijmy najprostszą definicję funkcji $r(X)$ w momencie przeglądania n-tej oferty jako

$$r(X_n) = X_n - \kappa \cdot n, \tag{3.9}$$

oferowane dochody pomniejszone o łączny koszt przeglądnięcia wszystkich (łącznie z aktualnie przeglądaną *n-tą*) ofert pracy (por. [29], [36]).

Problem polega więc na znalezieniu takiej reguły postępowania, która maksymalizuje oczekiwane korzyści finansowe $E(r(X_n))$, gdzie n oznacza liczbę rozpatrzonych ofert pracy. Istnienie reguły stopu sprowadza się do istnienia wartości progowej, takiej że:

$$d_r = \sup_{N \in \Delta} E(r(X_N)),$$

gdzie Δ oznacza zbiór reguł postępowania podczas poszukiwania pracy.

Jeśli rozkład oferowanych dochodów $F(x)$ ma skończoną wariancję, to mimo iż liczba ofert jest nieograniczona istnieje reguła stopu. Istnienie takiej reguły gwarantują następujące warunki (por. [10]):

1) $$\lim_{n \to \infty} r(X_n) = -\infty$$

oraz

2) $$E\left(\left|\sup_{N \in \Delta} E(r(X_N))\right|\right) < \infty,$$

Dowód istnienia reguły stopu definiując funkcję $r(X_n)$ zgodnie ze wzorem (3.9) zamieszczony jest w pracy [10]. Z dowodu wynika, że liczba d_r istnieje i jest skończona oraz

$$d_r = \sup_{N \in \Delta} E(r(X_N)).$$

Po przeglądnięciu pierwszej oferty o wynagrodzeniu X optymalna reguła postępowania nakazuje kontynuować poszukiwanie zatrudnienia, jeśli $X < d_r$ i przyjąć daną ofertę jeśli $X \geq d_r$. Ponadto oczekiwane wynagrodzenie przy tak sformułowanej regule jest równe $E(\max\{X, d_r\} - \kappa)$. Z drugiej strony oczekiwane wynagrodzenie za pracę poszukiwaną zgodnie z optymalną regułą z założenia jest równe d_r. Otrzymujemy zatem

$$d_r = E(\max\{X, d_r\} - \kappa). \tag{3.10}$$

Równanie (3.10) można zapisać następująco:

$$d_r = E(\max\{X, d_r\}) - \kappa \tag{3.11}$$

Obliczając wartość oczekiwaną statystyki $\max\{X, d_r\}$ zgodnie ze wzorem (3.3) i podstawiając do równania (3.11) otrzymujemy równanie:

$$d_r + \int_{d_r}^{+\infty} (x - d_r)\, dF(x) - \kappa = d_r,$$

$$\kappa = \int_{d_r}^{+\infty} (x - d_r)\, dF(x). \tag{3.12}$$

Rozwiązaniem tego równania względem niewiadomej d_r jest wartość progowa dochodów, która jest dobrana tak, aby koszty wynikające z przeglądnięcia jeszcze jednej dodatkowej oferty pracy były równe spodziewanemu wzrostowi dochodów, wynikającemu z przyjęcia tej następnej oferty.

Jeżeli rozważony zostanie przypadek, kiedy poszukujący ma możliwość powrotu do raz odrzuconej ale w dalszym ciągu aktualnej oferty pracy, to wówczas każda aktualna oferta, może być analizowana przez poszukującego wielokrotnie. Zainteresowana osoba przegląda kolejne oferty pracy analizując oferowane dochody, które są realizacjami niezależnych zmiennych losowych: $X_1, X_2, \ldots$ o tym samym rozkładzie. W tym przypadku wzór (3.9) określający dla poszukującego maksymalne wynagrodzenie w momencie analizowania n-tej oferty przyjmuje postać:

$$r(X_n) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} - \kappa \cdot n.$$

Załóżmy, że osoba rozpatruje pierwszą ofertę, wówczas zostanie ona zaakceptowana jeśli proponowane w niej wynagrodzenie będzie nie mniejsze niż wartość progowa wyznaczona w następujący sposób:

$$d_r = E(\max\{X_1, d_r\} - \kappa).$$

Ponieważ jednak zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są zmiennymi niezależnymi o tym samym znanym poszukującemu rozkładzie wartość progowa wyznaczona w przypadku możliwości powrotu do wcześniejszych ofert pracy jest identyczna z wartością progową wyznaczoną zgodnie ze wzorem (3.10). Optymalne reguły postępowania przy wyborze pracy z możliwością bądź nie powrotu do wcześniej rozpatrywanych ofert wyznaczają więc identyczne wartości progowe.

W ogólnym zagadnieniu optymalnego zatrzymania prawdziwe jest twierdzenie, że jeżeli dla każdych zaobserwowanych wartości $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ spełniających warunek

$$E(Y_{n+1} \mid x_1, \ldots, x_n) \le y_n, \tag{3.13}$$

gdzie $Y_n = y_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dla $n = 1,2,\ldots$ określa korzyść po zaobserwowaniu n obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ciąg $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$ jest supermartyngałem regularnym względem ciągów odpowiednio $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$, to optymalna reguła nakazuje przerwanie procesu losowania jeśli spełniony jest warunek (3.13) i kontynuowanie losowania w przeciwnym wypadku.

W problemie poszukiwania pracy założenie skończonej wariancji dochodów jakie zostało przyjęte gwarantuje, że ciąg optymalnych oczekiwanych wygranych $r(X_1)$, $r(X_2)$,... jest jednostajnie całkowalny (por. [10]). Ponieważ jednostajnie całkowalny supermartyngał jest regularny (por. [29]) to wystarczy pokazać, że ciąg $r(X_1)$, $r(X_2)$,... spełniający warunek (3.13) jest supermartyngałem, co zostało pokazane w pracy [29].

Wyznaczone zatem reguły postępowania podczas poszukiwania pracy są optymalne. Optymalność gwarantuje, że jeśli rozpatrywaną ofertę reguła nakaże zaakceptować, ze względu na to, że przeglądnięcie jeszcze jednej propozycji pracy będzie niekorzystne finansowo, to przy każdej następnej ofercie dalsze poszukiwania zatrudnienia również byłoby niekorzystne. Ponadto oczekiwane wynagrodzenie związane z dowolnym wydłużeniem procesu poszukiwania pracy jest nie większe od aktualnie proponowanego wynagrodzenia.

Rozwiązanie równania (3.12) w przypadku kiedy oferowane dochody są realizacją zmiennej losowej o rozkładzie normalnym przedstawione zostało w pracach [10], [11]. Zakładając, że w Polsce rozkład dochodów opisany jest przez rozkład logarytmiczno-normalny równanie (3.12) przyjmuje postać:

$$\kappa = \int_{d_r}^{+\infty} (x - d_r) \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx . \qquad (3.14)$$

Następnie wykorzystując zależność (3.6) równanie (3.14) można zapisać w sposób następujący:

$$\kappa = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu \right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_r - \sigma^2 - \mu}{\sigma} \right) \right] - d_r \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_r - \mu}{\sigma} \right) \right] \qquad (3.15)$$

Po rozwiązaniu równania (3.15) ze względu na niewiadomą d_r otrzymamy wartość progową dochodów dla *reguły 3* poszukiwania pracy.

3.3.3 Model uwzględniający ustalone minimalne wynagrodzenie

Podobnie jak model poszukiwania zatrudnienia z ograniczoną liczbą ofert pracy, rozpatrzony zostanie model poszukiwania pracy w przypadku, kiedy osoba zainteresowana pracą określi swoje minimalne wynagrodzenie $d_{\min}$, jakie powinna otrzymywać za podjętą pracę. Ze względu na to, że liczba ofert jest nieograniczona, to poszukujący będzie czekał na ofertę, w której proponowane dochody będą przewyższały wartość $d_{\min}$. Koszt poszukiwania pracy nie może odgrywać roli, aby nie ograniczać czasu oczekiwania na odpowiednią propozycję pracy. Przy tak przyjętych założeniach regułę postępowania można zapisać następująco:

Reguła 4

Jeśli oferowane dochody $x < d_{\min}$, to należy kontynuować poszukiwanie nie przyjmując danej oferty,
jeśli oferowane dochody $x \geq d_{\min}$, to należy przerwać poszukiwania pracy przyjmując bieżącą ofertę.

Wartością progową dochodów przy stosowaniu *reguły 4*, przy nieograniczonej liczbie ofert, są wówczas minimalne dochody $d_{\min}$ pożądane przez poszukującego. Uwzględniając przyjęte w pracy założenie o znajomości rozkładu oferowanych dochodów *regułę 4* można zmodyfikować. Modyfikacja ta polegałaby na wyznaczeniu takiej wartości progowej d_s, aby wartość oczekiwana osiągalnego wynagrodzenia była nie mniejsza od określonych przez poszukującego minimalnych dochodów $d_{\min}$, co można zapisać w następujący sposób:

$$E(\max\{X, d_s\}) \geq d_{\min}. \tag{3.16}$$

Korzystając ze wzoru (3.3) otrzymuje się nierówność:

$$d_s + \int_{d_s}^{+\infty} (x - d_s) dF(x) \geq d_{\min}, \tag{3.17}$$

którą dla rozkładu logarytmiczno-normalnego dochodów, wykorzystując zależność między dystrybuantami rozkładu logarytmiczno-normalnego i normalnego, można zapisać następująco:

$$\exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_s - \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right)\right] + d_s \cdot \Phi\left(\frac{\ln d_s - \mu}{\sigma}\right) \geq d_{\min}. \tag{3.18}$$

Rozwiązując nierówność (3.18) ze względu na niewiadomą d_s i wybierając wartość najmniejszą ze zbioru rozwiązań otrzymuje się wartość progową d_s dla *reguły 5* postępowania podczas znajdowania zatrudnienia dla nieograniczonej liczby ofert pracy przy ustalonych przez poszukującego dochodach minimalnych zakładając znajomość rozkładu oferowanych wynagrodzeń.

Reguła 5

Jeśli oferowane dochody $x < d_s$, *to należy kontynuować poszukiwanie nie przyjmując danej oferty,*
jeśli oferowane dochody $x \geq d_s$, *to należy przerwać poszukiwania pracy przyjmując bieżącą ofertę.*

Reguła powyższa gwarantuje zakończenie poszukiwania zatrudnienia i przyjęcie pracy w momencie, kiedy wartość oczekiwana osiągalnych dochodów będzie nie mniejsza od opłacalnego wynagrodzenia $d_{\min}$.

3.3.4 Model uwzględniający współczynnik dyskontowania

W punkcie 3.3.2 wyznaczona została optymalna reguła postępowania dla poszukującego pracy w przypadku, kiedy liczba ofert była nieograniczona a poszukujący zatrudnienia ponosił pewne koszty wynikające z poszukiwania pracy (rozpatrzenia każdej, możliwej do przyjęcia pod względem wymagań, oferty pracy). Wówczas poprzez porównanie kosztów poszukiwania kolejnej oferty ze spodziewanym wzrostem wynagrodzenia wynikającym z przyjęcia następnej propozycji pracy została wyznaczona wartość progową dochodów (opłacalnych dochodów), którą poszukujący może zaakceptować wybierając ofertę pracy zgodnie z *regułą 3*. Równanie (3.12) nie uwzględnia natomiast *uaktualniania wartości*. Przy założeniu, że dana oferta jest niekorzystna, dalsze poszukiwanie zatrudnienia ma sens tylko wówczas, gdy korzyści wynikające z przeanalizowania kolejnej pracy nie będą niższe od kosztów związanych z poszukiwaniem tej posady. Problem polega na tym, że korzyści są „odłożone" w czasie. Każdy woli mieć np. 1000 złotych dzisiaj niż obietnicę posiadania tych 1000 złotych za kilka miesięcy. Aby zapewnić poprawność porównań w różnych okresach czasu niezbędna jest operacja *dyskontowania*, czyli zmniejszenia wartości przyszłych korzyści dla zapewnienia ich porównywalności z korzyściami uzyskanymi dzisiaj.

Idea wyznaczania reguły postępowania pomagającej wybrać najlepszą dla poszukującego ofertę pracy uwzględniającą współczynnik dyskontowania jest taka sama jak w przypadku wyznaczania optymalnej reguły postępowania dla nieograniczonej liczby ofert pracy. Przyjmowane są takie same założenia. Dodatkowo zakłada się uaktualnianie wartości kosztów i korzyści, dlatego też ulega zmianie jedynie postać równania (3.10) wyznaczającego optymalną wartość dochodów.
Przypomnijmy, że poszukujący zatrudnienia z ustaloną częstotliwością otrzymuje oferty, na przykład jeśli poszukujący rozpatruje jedną ofertę w ciągu jednego tygodnia, to wówczas ustalonym przedziałem czasu poszukiwania oferty jest tydzień.

Ze względu na to, że w rozpatrywanym modelu poszukiwania pracy uwzględnia się uaktualnianie pewnych wartości należy ustalić, w którym momencie przedziału czasowego poszukujący ponosi koszty i ewentualne korzyści oraz, które z tych wartości należy aktualizować w celu poprawnego porównywania.

Załóżmy, że oferta pracy i związane z nią ewentualne korzyści zawsze otrzymywane są na koniec ustalonego przedziału czasu poszukiwania oferty. Zatem uaktualniona wartość otrzymanych dochodów x jest równa $W_d \cdot x$. W_d jest współczynnikiem dyskontowania obliczonym zgodnie ze wzorem:

$$W_d = \frac{1}{1+r},$$

gdzie r oznacza stopę procentową dla okresu poszukiwania oferty.
Jeżeli przyjmiemy, że również koszty poszukiwania pracy ponoszone są na końcu ustalonego przedziału czasu, to równanie (3.10) uwzględniając uaktualnione wartości przyjmie postać (por. [29]):

$$W_d \cdot E\left(\max\{X, d_t\} - \kappa\right) = d_t, \tag{3.19}$$

gdzie d_t będzie wartością progową reguły postępowania w rozpatrywanym modelu poszukiwania pracy.

W równaniu (3.19) zdyskontowano w taki sam sposób (za pomocą jednego współczynnika dyskontowania) koszty i spodziewane dochody uzyskane przy optymalnej regule postępowania. Równanie (3.19) można zapisać w sposób następujący:

$$W_d \cdot E\left(\max\{X, d_t\}\right) - W_d \cdot \kappa = d_t.$$

Korzystając z odpowiednich obliczeń przeprowadzonych w poprzednim punkcie można dokonać następujących przekształceń tego równania:

$$W_d \cdot d_t + W_d \cdot \int_{d_t}^{+\infty} (x - d_t)\, dF(x) - W_d \cdot \kappa = d_t,$$

$$W_d \cdot \kappa = W_d \cdot d_t + W_d \cdot \int_{d_t}^{+\infty} (x - d_t)\, dF(x) - d_t,$$

$$\kappa = d_t - \frac{d_t}{W_d} + \int_{d_t}^{+\infty} (x - d_t) dF(x).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\kappa = \int_{d_t}^{+\infty} (x - d_t) dF(x) - r \cdot d_t. \tag{3.20}$$

W przypadku rozkładu logarytmiczno-normalnego dochodów równanie (3.20) przyjmuje następującą postać:

$$\kappa = g(d_t) + d_t \cdot \left[\Phi\left(\frac{\ln d_t - \mu}{\sigma} \right) - r - 1 \right], \tag{3.21}$$

gdzie

$$g(d_t) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu \right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_t - \sigma^2 - \mu}{\sigma} \right) \right].$$

Rozwiązaniem równania (3.21) jest wartość progowa dochodów dla reguły postępowania przy optymalnym wyborze oferty pracy uwzględniającym uaktualnianie wartości kosztów i korzyści poszukiwania pracy. Reguła postępowania jest analogiczna do omawianej w poprzednim modelu:

Reguła 6

Jeśli $x < d_t$, *to należy kontynuować poszukiwanie nie przyjmując danej oferty,*

jeśli $x \geq d_t$, *to należy przerwać poszukiwania pracy przyjmując tę ofertę,*

gdzie x oznacza oferowane wynagrodzenie, a d_t jest rozwiązaniem równania (3.21).

Kolejny rozpatrzony model poszukiwania pracy uwzględnia dyskontowanie odpowiednich wartości oraz ponoszenie kosztów poszukiwania pracy na początku okresu poszukiwania oferty pracy, a nie jak poprzednio na końcu tego okresu. Dyskontowaniu w równaniu (3.10) dla tego modelu, podlegają jedynie korzyści wynikające z poszukiwania pracy, które poszukujący osiąga dopiero na końcu okresu poszukiwania. Równanie (3.10) przyjmuje wówczas postać:

$$W_d \cdot E(\max\{X, d_w\}) - \kappa = d_w, \tag{3.22}$$

które po kolejnych przekształceniach

$$\frac{1}{1+r} \cdot \left(d_w + \int_{d_w}^{\infty} (x - d_w) dF(x) \right) - \kappa = d_w,$$

$$\kappa = \frac{1}{1+r} \cdot d_w - d_w + \frac{1}{1+r} \cdot \left(\int_{d_w}^{\infty} (x - d_w) dF(x) \right)$$

sprowadza się do równania

$$\kappa = -\frac{r}{1+r} \cdot d_w + \frac{1}{1+r} \cdot \left(\int_{d_w}^{\infty} (x - d_w) dF(x) \right).$$

Dla rozkładu logarytmiczno-normalnego dochodów powyższe równanie przyjmuje postać:

$$\kappa = -\frac{r \cdot d_w}{1+r} + \frac{1}{1+r} \cdot g(d_w) - d_w \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_w - \mu}{\sigma} \right) \right], \tag{3.23}$$

gdzie

$$g(d_w) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} + \mu \right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_w - \sigma^2 - \mu}{\sigma} \right) \right].$$

Po wyznaczeniu wartości progowej dochodów d_w jako rozwiązania równania (3.23) można wyznaczyć regułę postępowania zgodnie z zasadą:

Reguła 7

Jeśli $x < d_w$*, to należy kontynuować poszukiwanie nie przyjmując danej oferty,*

jeśli $x \geq d_w$*, to należy przerwać poszukiwania pracy przyjmując tę ofertę.*

Wybór jednej spośród dwu ostatnio przedstawionych reguł (*reguły 6 oraz reguły 7*) zależy od warunków poszukiwania pracy i momentów czasowych, w których ponoszone są odpowiednie koszty.

3.4 Rozkład dochodów

Wspólnym założeniem każdego omawianego wcześniej modelu poszukiwania pracy była znajomość rozkładu oferowanych płac. Załóżmy, że wynagrodzenie x proponowane w ofercie jest realizacją zmiennej losowej X, scharakteryzowanej za pomocą dystrybuanty $F_X(x)$ krótko oznaczanej jako $F(x)$. Zakładana jest zatem znajomość dystrybuanty $F(x)$.

Rozkład miesięcznych wynagrodzeń jest zależny przede wszystkim od rodzaju pracy, który utożsamiany jest z odpowiednią sekcją działalności. Zgodnie z Europejską Klasyfikacją Działalności (EKD) gospodarka narodowa podzielona jest na 15 sekcji gospodarki. Sekcje te w dalszej części pracy będą oznaczane następująco:

- A – rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo,
- B – rybołówstwo i rybactwo,
- C – górnictwo i kopalnictwo,
- D – działalność produkcyjna,
- E – zaopatrzenie w energię elektryczną, gaz i wodę,
- F – budownictwo,
- G – handel hurtowy i detaliczny; naprawy pojazdów mechanicznych, motocykli oraz artykułów przeznaczenia osobistego i użytku domowego,
- H – hotele i restauracje,
- I – transport, gospodarka magazynowa i łączność,
- J – pośrednictwo finansowe,
- K – obsługa nieruchomości, wynajem i działalność związana z prowadzeniem interesów,
- L – administracja publiczna i obrona narodowa, gwarantowana prawnie opieka socjalna,
- M – edukacja,
- N – ochrona zdrowia i opieka społeczna,
- O – pozostała działalność usługowa, komunalna, socjalna i indywidualna.

Jeżeli poszukujemy zatrudnienia np. w sekcji edukacji, to warunkiem koniecznym zastosowania omówionych metod jest znajomość rozkładu miesięcznych wynagrodzeń w gospodarce narodowej w sekcji edukacji.

Do modelowania rozkładów płac wykorzystywane są głównie rozkłady (por. [24]):

- Pareto,
- logarytmiczno normalny,
- Burra,
- gamma,
- Champernowne'a.

Z badań przeprowadzonych w Polsce (por. [24]) wynika, że rozkład Burra typu 12 (por. [4]) najlepiej spośród wszystkich opisuje rozkład płac w Polsce. Mimo, iż w pracy [24] uważa się, że rozkład logarytmiczno - normalny mniej dokładnie niż rozkładu Burra opisuje rozkład płac w Polsce, to w dalszej części pracy przyjęte zostało założenie o logarytmiczno - normalnym rozkładzie oferowanych dochodów. Wybór ten podyktowany był faktem, iż rozkład Burra typu 12 jest rozkładem 4 parametrowym i trudno uzyskać dane, na podstawie których możliwa byłaby estymacja tych parametrów. Ponadto rozkład Burra dokładniej odzwierciedla rozkład wysokich płac a można przypuszczać, że w przypadku dostępnych przez Urząd Pracy ofertach zatrudnienia mało prawdopodobne jest spotkanie ofert pracy o bardzo wysokich wynagrodzeniach.

Funkcja gęstości dla zmiennej losowej X o rozkładzie logarytmiczno–normalnym wyraża się (por. [21]):

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0, \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{[\ln x-\mu]^2}{2\sigma^2}\right) & x>0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Wartość przeciętna – $E(X)$, mediana – Me oraz modalna – Mo dla powyższego rozkładu wynoszą odpowiednio:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \tag{3.25}$$

$$Me = \exp(\mu), \tag{3.26}$$

$$Mo = \exp\left(\mu - \sigma^2\right). \tag{3.27}$$

Nieznane parametry μ oraz σ będą estymowane oddzielnie dla poszczególnych sekcji gospodarki. Korzystając z dwóch spośród trzech estymatorów: wartości oczekiwanej, mediany lub mody, można wyznaczyć dokładny rozkład płac w Polsce. W pracy wykorzystano ze względu na własności estymatorów równanie (3.25) oraz (3.26). Wartość średnia z próby jest estymatorem zgodnym i nieobciążonym, natomiast mediana z próby jest estymatorem zgodnym i asymptotycznie nieobciążonym. Estymatory tych parametrów dla wynagrodzeń za wrzesień 1997 zaczerpnięto z raportu GUS-u (por. [50]). Podane w tej publikacji estymatory obliczone zostały oddzielnie dla pracowników na stanowiskach robotniczych i pokrewnych oraz pracowników na stanowiskach nierobotniczych, co przyczyni się do dokładniejszej estymacji rozkładu dochodów. Przykładowo dla pracowników na stanowiskach robotniczych i pokrewnych w sekcji A estymatory mediany i wartości przeciętnej wynagrodzeń za wrzesień 1997 wynoszą odpowiednio:

$$\hat{Me} = 769{,}71,$$

$$\hat{E}(X) = \bar{X} = 844{,}55.$$

Korzystając z równania (3.25) oraz (3.26) otrzymuje się układ równań

$$\begin{cases} \exp(\hat{\mu}) = 769{,}71 \\ \exp\left(\hat{\mu} + \dfrac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) = 844{,}55 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem są nieznane parametry rozkładu dochodów

$$\begin{cases} \hat{\mu} = 6{,}646, \\ \hat{\sigma} = 0{,}431. \end{cases}$$

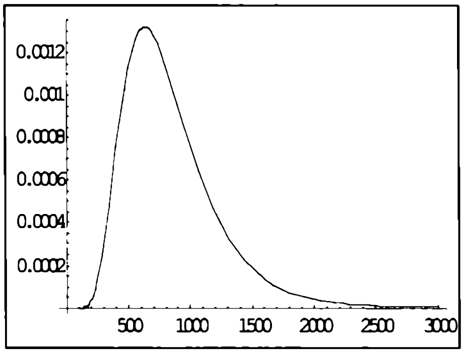
Obliczone w analogiczny sposób parametry rozkładu logarytmiczno-normalnego dla pracowników na stanowiskach robotniczych i pokrewnych dla wszystkich sekcji gospodarki przedstawia tabela 3.4.

Tabela 3.4. Estymatory parametrów rozkładu wynagrodzeń za IX 1997 r.

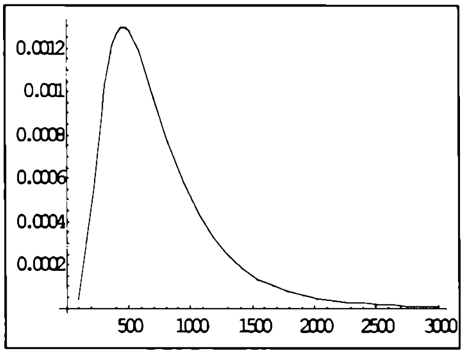
Symbol sekcji EKD	Parametr $\hat{\mu}$	Parametr $\hat{\sigma}$
A	6,646	0,431
B	6,457	0,567
C	7,543	0,136
D	6,771	0,445
E	7,132	0,327
F	6,789	0,461
G	6,524	0,536
H	6,397	0,574
I	6,852	0,349
J	6,841	0,448
K	6,650	0,466
L	6,319	0,548
M	6,413	0,354
N	6,478	0,319
O	6,593	0,452

Źródło: obliczenia własne.

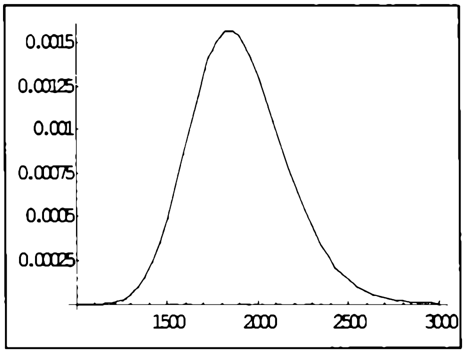
Po przeprowadzonych obliczeniach znane są rozkłady dochodów dla wszystkich sekcji EKD. Wykresy funkcji gęstości tych rozkładów prezentują rysunki 3.1 – 3.15.



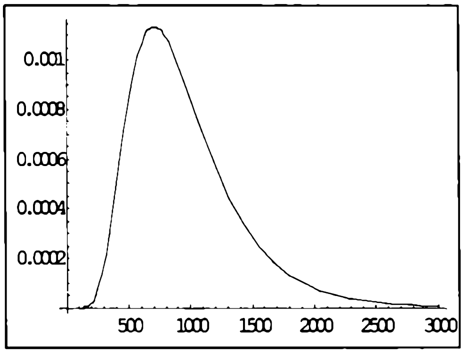
Rysunek 3.1. Funkcja gęstości dochodów w sekcji A



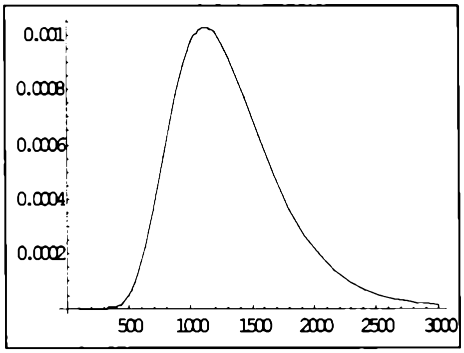
Rysunek 3.2. Funkcja gęstości dochodów w sekcji B



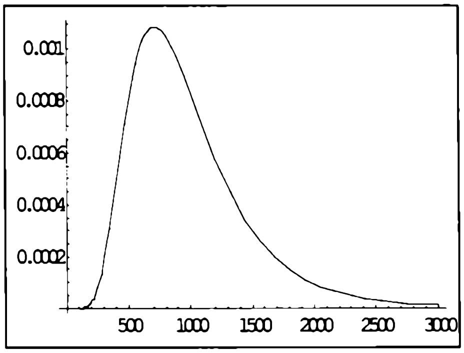
Rysunek 3.3. Funkcja gęstości dochodów w sekcji C



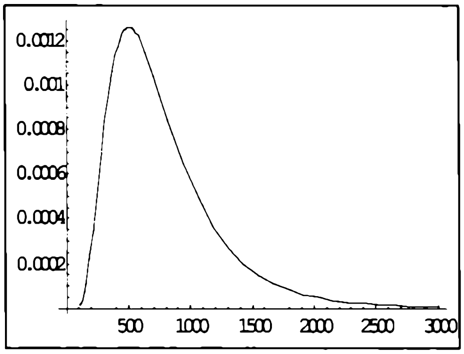
Rysunek 3.4. Funkcja gęstości dochodów w sekcji D



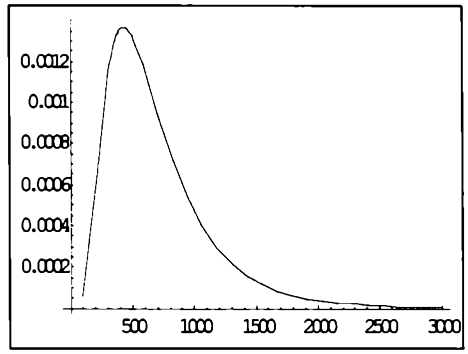
Rysunek 3.5. Funkcja gęstości dochodów w sekcji E



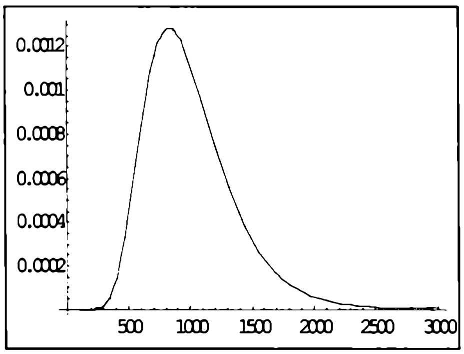
Rysunek 3.6. Funkcja gęstości dochodów w sekcji F



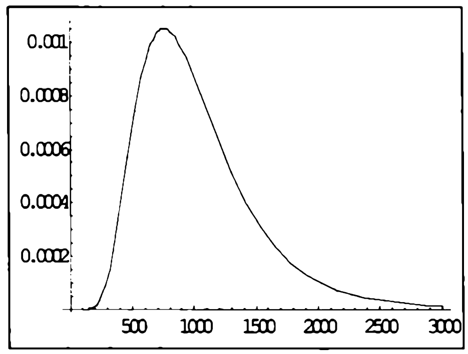
Rysunek 3.7. Funkcja gęstości dochodów w sekcji G



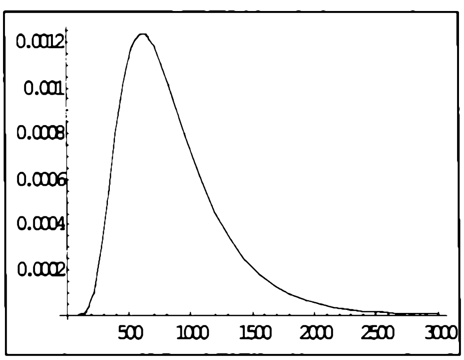
Rysunek 3.8. Funkcja gęstości dochodów w sekcji H



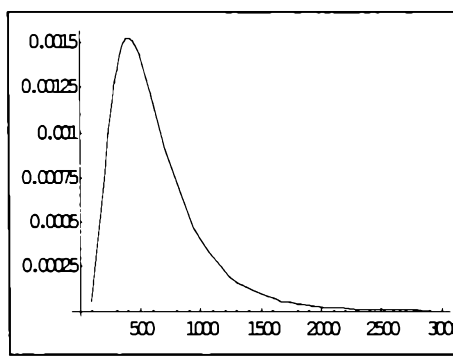
Rysunek 3.9. Funkcja gęstości dochodów w sekcji I



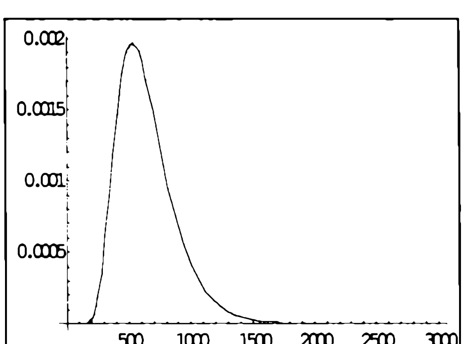
Rysunek 3.10. Funkcja gęstości dochodów w sekcji J



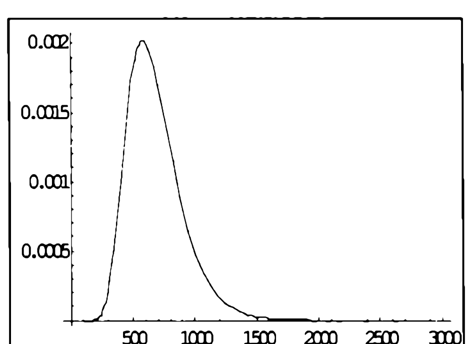
Rysunek 3.11. Funkcja gęstości dochodów w sekcji K



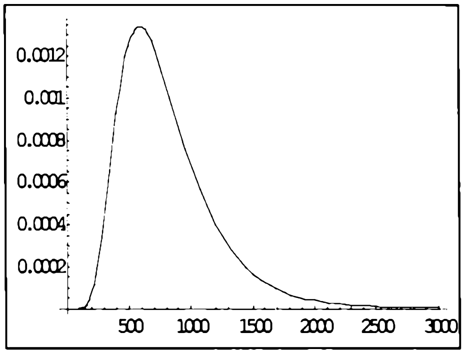
Rysunek 3.12. Funkcja gęstości dochodów w sekcji L



Rysunek 3.13. Funkcja gęstości dochodów w sekcji M



Rysunek 3.14. Funkcja gęstości dochodów w sekcji N



Rysunek 3.15. Funkcja gęstości dochodów w sekcji O

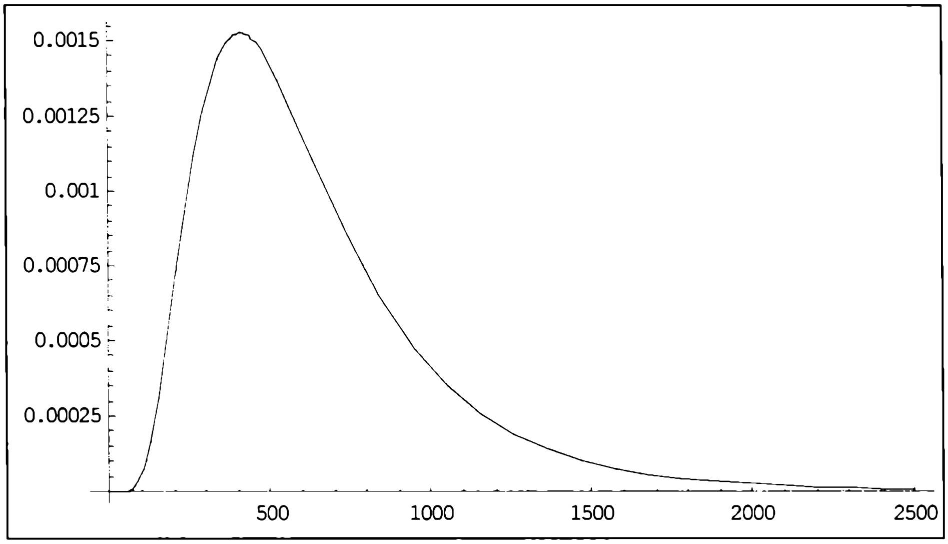
Powyższe rozkłady mogą być wykorzystywane w celu formułowania reguł postępowania w różnych modelach poszukiwania pracy.

3.5 Optymalne reguły poszukiwania pracy

3.5.1 Wstęp

Teoria przedstawiona w paragrafach 3.2 – 3.4 zostanie teraz zweryfikowana poprzez wyznaczenie optymalnej reguły postępowania dla poszukującego zatrudnienia przykładowo na stanowisku robotniczym, w sekcji administracji publicznej i obronie narodowej oznaczonej w paragrafie 3.4 literą L.

Rozkład dochodów dla poszczególnych sekcji EKD przedstawiono w paragrafie 3.4. Zgodnie z przyjętym założeniem wynagrodzenie w sekcji L (administracji publicznej i obrony narodowej oraz gwarantowanej prawnie opieki socjalnej) kształtuje się zgodnie z rozkładem logarytmiczno-normalnym o parametrach: $\mu = 6{,}319$ oraz $\sigma = 0{,}548$ przedstawionym na rysunku 3.16.



Rysunek 3.16. Funkcja gęstości dla rozkładu dochodów w sekcji L

Zakłada się więc, że wiadomo jak kształtują się wynagrodzenia otrzymywane przez zatrudnionych w sekcji, w której poszukiwana jest praca.

3.5.2 Model z ustaloną liczbą ofert

Omówiony w paragrafie 3.2 schemat poszukiwania pracy oparty na modelu z ustaloną liczbą ofert pracy dodatkowo wymaga od poszukującego znajomości górnej granicy liczby możliwych do rozpatrzenia przez poszukującego ofert. W pracy zaproponowano, aby tę liczbę ustalać na podstawie wzoru (3.8):

$$n = \left\lceil \frac{\tau}{\kappa} \right\rceil,$$

gdzie

τ oznacza wielkość zgromadzonych przez poszukującego oszczędności, natomiast
κ oznacza koszt poszukiwania oferty.

Koszty poszukiwania pracy są bezpośrednio związane z okresem poszukiwania. Im dłuższy okres, tym koszty dla poszukującego są większe. Do kosztów poszukiwania zaliczane są między innymi wydatki związane z codzienną egzystencją. Koszt κ zależny jest więc od wielkości gospodarstwa domowego poszukującego, od tego czy poszukujący zatrudnienia jest jedynym żywicielem rodziny, czy jest zarejestrowany jako bezrobotny i przysługuje mu prawo do pobierania odpowiedniego zasiłku. Koszty te zatem nie są jednakowe dla wszystkich poszukujących. W pracy do analizowanych przykładów powyższe koszty zostały ustalone na podstawie przeciętnych miesięcznych wydatków w gospodarstwie domowym w 1997 roku zaczerpniętych z rocznika statystycznego (por. [44]).

Załóżmy jednotygodniowy okres poszukiwania oferty co oznacza, iż poszukujący będzie rozpatrywał jedną ofertę pracy tygodniowo. Następnie koszty poszukiwania oferty zostaną ustalone dla osoby pochodzącej z najczęściej spotykanego gospodarstwa domowego, na podstawie rocznika statystycznego (por. [44], str. 173). Przyjmujemy, że poszukujący pochodzi z czteroosobowego gospodarstwa pracowników na stanowiskach robotniczych. W rozpatrywanym gospodarstwie domowym znajduje się średnio 1,68 osób pracujących i 0,17 osoby pobierającej emeryturę lub rentę. Dochody w takim gospodarstwie przynosi więc średnio 1,68+0,17=1,85 osoby. Następnie analizując średnie niezbędne wydatki miesięczne całego gospodarstwa domowego można obliczyć minimalne dzienne dochody potrzebne na utrzymanie gospodarstwa przypadające na jedną osobę pracującą. Na podstawie przeciętnych miesięcznych wydatków na towary i usługi konsumpcyjne w gospodarstwach domowych (por. [44], str. 179)[1] analizowane w przykładzie gospodarstwo domowe wydaje miesięcznie na 1 osobę 274,97 zł. Wydatki całego gospodarstwa domowego wynoszą więc $4 \cdot 274{,}97 = 1099{,}88$ zł. Uwzględniając 1,85 osoby przynoszącej dochód na jedną osobę przypada miesięcznie $\frac{1099{,}88}{1{,}85} = 594{,}53$ zł. dochodu potrzebnego na zaspokojenie potrzeb gospodarstwa domowego. Jeżeli dana osoba była w gospodarstwie domowym jedną z osób pracujących, to wówczas brakujący dochód w wysokości 594,53 zł. jest kosztem miesięcznym (30 dni) poszukiwania pracy. Zakładając, że bezrobotny będzie przeglądał jedną ofertę w ciągu tygodnia (7 dni), koszt poszukiwania oferty dla niego wynosi

$$\kappa = \frac{594{,}53 \cdot 7}{30} = 138{,}72 \text{ zł.}$$

Optymalna reguła postępowania zostanie wyznaczona dla dwóch różnych wielkości zgromadzonych oszczędności przez poszukującego: $\tau_1 = 5000$ zł. oraz $\tau_2 = 4000$ zł., Różnica między regułami będzie wynikała z różnej liczby dostępnych ofert pracy. Na podstawie wzoru (3.8) liczba możliwych do rozpatrzenia ofert pracy przez poszukującego mającego większe oszczędności wynosi: $n_1 = \left\lceil \frac{5000}{138{,}72} \right\rceil = 37$. Natomiast dla poszukującego z kapitałem $\tau_2 = 4000$ zł liczba ofert jest równa $n_2 = 29$. Sformułowana w paragrafie 3.2 *reguła 1* postępowania dla poszukującego posiadającego większy zaoszczędzony kapitał wymaga znajomości ciągu liczb $z_1, z_2, \ldots, z_{36}$ wyznaczonych zgodnie ze wzorem (3.7). Dla poszukujących pracy posiadających mniejsze oszczędności wymagana jest znajomość tylko pierwszych 28 elementów tego ciągu. Wystarczy zatem wyznaczyć tylko jeden dłuższy ciąg trzydziestu sześciu liczb, aby sformułować reguły postępowania dla poszukujących posiadających różne rozpatrywane wielkości zaoszczędzonego kapitału. Różnica w tym przypadku polega na tym, że poszukujący z mniejszym kapitałem przyjmuje 29 ofertę

[1] Wyłączając wydatki ponoszone na napoje alkoholowe, wyroby tytoniowe, wyposażenie mieszkania, kulturę, sport i wypoczynek oraz na „inne wydatki" na towary nie żywnościowe.

jeśli wcześniejsze oferty odrzucił zaś poszukujący z kapitałem τ_1 może kontynuować przeglądanie ofert aż do 37-tej. Zatem dla $j = 1,2,\ldots,35$ otrzymujemy:

$$z_{j+1} = z_j + \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln z_j - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] +$$

$$- z_j \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln z_j - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right],$$

gdzie

$$z_1 = \exp\left(6{,}319 + \frac{(0{,}548)^2}{2}\right),$$

a $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Pierwsza wartość ciągu jest równa

$$z_1 = 644{,}94\,.$$

Następną wartość ciągu otrzymujemy obliczając wyrażenie

$$z_2 = 644{,}94 + \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln 644{,}94 - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] -$$

$$+ 644{,}94 \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln 644{,}94 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] = 784{,}19$$

Wykonując kolejne obliczenia zgodnie ze wzorem rekurencyjnym (3.7) otrzymujemy pozostałe wartości ciągu, które zostały zebrane w tabeli 3.5.

Tabela 3.5. Wartości ciągu liczb $z_1, z_2, \ldots, z_{36}$

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9
644,94	784,19	878,28	950,62	1009,84	1060,18	1104,08	1143,08	1178,22

z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	z_{16}	z_{17}	z_{18}
1210,23	1239,64	1266,87	1292,23	1315,97	1338,30	1359,38	1379,35	1398,34

z_{19}	z_{20}	z_{21}	z_{22}	z_{23}	z_{24}	z_{25}	z_{26}	z_{27}
1416,42	1433,7	1450,24	1466,11	1481,36	1496,04	1510,19	1523,85	1537,06

z_{28}	z_{29}	z_{30}	z_{31}	z_{32}	z_{33}	z_{34}	z_{35}	z_{36}
1549,85	1526,23	1574,25	1585,92	1597,26	1608,29	1619,03	1629,49	1639,69

Po obliczeniu wszystkich wartości $z_1, z_2, \ldots, z_{36}$ można określić optymalną regułę wyboru oferty pracy w sekcji administracji publicznej i obronie narodowej. Regułę ta jest następująca. Dokonujemy przeglądu kolejno pojawiających się ofert ($i = 1,2,\ldots,36$ dla $\tau_1 = 5000$ oraz $i = 1,2,\ldots,28$ dla $\tau_2 = 4000$). Analizując i-tą ofertę, $i < n$ z proponowanym wynagrodzeniem x_i należy podjąć decyzję według następującego schematu:

jeśli $x_i \geq z_{n-i}$, to należy przyjąć ofertę i podjąć pracę,

jeśli natomiast $x_i < z_{n-i}$, to należy kontynuować poszukiwanie pracy przeglądając kolejną ofertę.

Stosując ten schemat postępowania osoba poszukująca pracy w sekcji administracji publicznej i obronie narodowej z zaoszczędzonym kapitałem $\tau_1 = 5000$ zł. powinna przyjąć pierwszą ofertę pracy, jeżeli oferowane w niej dochody będą nie mniejsze niż 1639,69 złotego, w przeciwnym wypadku powinna kontynuować poszukiwania rozpatrując drugą ofertę. Tę z kolei przyjmuje, jeśli przyniesie ona dochód co najmniej równy 1629,49 złotego. Jeżeli oferowany dochód będzie niższy należy w dalszym ciągu kontynuować poszukiwanie. Kolejne oferty, trzecia, czwarta,..., trzydziesta szósta będą akceptowane, jeżeli oferowane dochody będą co najmniej równe odpowiednio zgodnie z wartościami podanymi w tabeli 3.5 : 1619,03 zł., 1608,29 zł., 1597,26 zł., 1585,92 zł., 1574,25 zł., ..., 644,94 zł. Jeżeli żaden z powyższych warunków nie zostanie spełniony, wówczas poszukujący chcąc się zatrudnić powinien przyjąć ostatnią trzydziestą siódmą ofertę pracy już niezależnie od proponowanego w niej wynagrodzenia.

Natomiast dla poszukującego posiadającego oszczędności w wysokości $\tau_2 = 4000$ zł. dostępnych jest tylko 29 ofert pracy. Zgodnie z *regułą 1* ofertę pracy powinien więc przyjąć akceptując pracę, jeżeli oferowane w niej wynagrodzenie będzie nie mniejsze niż 1549,85 złotego. W przypadku odrzucenia pierwszej oferty pracy druga powinna być zaakceptowana jeżeli wynagrodzenie za proponowaną pracę będzie z kolei nie mniejsze niż 1537,06 złotego. Podobnie jak poprzednio, przedostatnia oferta pracy będzie przyjęta jeżeli dochody będą wynosiły co najmniej 644,94 złotego. Jeżeli nie zostanie przyjęta żadna spośród 28 pierwszych ofert pracy (wszystkie rozpatrywane oferty zostaną odrzucone), wówczas poszukujący chcąc się zatrudnić powinien przyjąć ostatnią dwudziestą dziewiątą ofertę.

Rozważmy teraz sytuację, w której poszukujący pracy z zaoszczędzonym kapitałem $\tau_2 = 4000$ złotych ma ustaloną wartość minimalnego wynagrodzenia równą 1000 złotych, które powinien otrzymywać za podjętą pracę, aby zapewnić byt sobie i swojej rodzinie. Wówczas do poszukiwania pracy zostanie zastosowana *reguła 2* (por. paragraf 3.2). Wymagany ciąg liczb $z_1^{'}, z_2^{'}, ... z_{28}^{'}$ dla tej reguły otrzymujemy z ciągu $z_1, z_2, \ldots, z_{28}$, zastępując w nim wyrazy mniejsze od 1000 wartością równą 1000. Wyznaczony ciąg $z_1^{'}, z_2^{'}, ... z_{28}^{'}$ prezentuje tabela 3.6. Następnie postępując zgodnie z *regułą 2* poszukujący pierwszą ofertę pracy powinien zaakceptować, jeżeli oferowane w niej wynagrodzenie będzie nie mniejsze niż 1549,85 złotego. W przypadku odrzucenia pierwszej oferty pracy druga powinna być zaakceptowana jeżeli wynagrodzenie za proponowaną pracę będzie z kolei nie mniejsze niż 1537,06 złotego.

Jeżeli pierwsze dwadzieścia cztery oferty zostaną przez poszukującego odrzucone, to kolejne oferty, począwszy od dwudziestej piątej, powinny być akceptowane jeżeli proponowane dochody będą wynosiły co najmniej 1000 złotych.

Tabela 3.6. Wartości ciągu liczb $z_1^{'}, z_2^{'}, ...z_{28}^{'}$

$z_1^{'}$	$z_2^{'}$	$z_3^{'}$	$z_4^{'}$	$z_5^{'}$	$z_6^{'}$	$z_7^{'}$
1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	1009,84	1060,18	1104,08
$z_8^{'}$	$z_9^{'}$	$z_{10}^{'}$	$z_{11}^{'}$	$z_{12}^{'}$	$z_{13}^{'}$	$z_{14}^{'}$
1143,08	1178,22	1210,23	1239,64	1266,87	1292,23	1315,97
$z_{15}^{'}$	$z_{16}^{'}$	$z_{17}^{'}$	$z_{18}^{'}$	$z_{19}^{'}$	$z_{20}^{'}$	$z_{21}^{'}$
1338,30	1359,38	1379,35	1398,34	1416,42	1433,7	1450,24
$z_{22}^{'}$	$z_{23}^{'}$	$z_{24}^{'}$	$z_{25}^{'}$	$z_{26}^{'}$	$z_{27}^{'}$	$z_{28}^{'}$
1466,11	1481,36	1496,04	1510,19	1523,85	1537,06	1549,85

Poszukujący więc nie przyjmie żadnej spośród pierwszych 28 ofert, która nie zapewni mu minimalnego wynagrodzenia 1000 złotych.

Problem polegający na tym, czy rzeczywiście postępowanie według wyznaczonych reguł pozwala wybrać najlepszą spośród wszystkich przeglądanych ofert pracy zostanie zbadany w następnym rozdziale.

W analogiczny sposób można sformułować regułę postępowania przy wyborze oferty pracy zarówno dla poszukujących zatrudnienia posiadających dowolny inny zgromadzony kapitał jak i dla tych, którzy chcą znaleźć zatrudnienie w pozostałych sekcjach EKD.

3.5.3 Model z nieograniczoną liczbą ofert

Optymalną regułę postępowania dla modelu poszukiwania pracy omawianym w niniejszym rozdziale należy wyznaczać oddzielnie dla każdej sekcji EKD ze względu na różne parametry rozkładu dochodów. Analogicznie do modelu poszukiwania pracy z ograniczoną liczbą ofert zostaną wyznaczone reguły postępowania przy wyborze optymalnej oferty pracy w sekcji administracji publicznej i obronie narodowej, lecz tym razem dla modelu poszukiwania pracy z nieograniczoną liczbą ofert. Reguły dla tego modelu zostały sformułowane w paragrafie 3.3. Wyznaczona zostanie wartość progowa dla *reguły 3* uwzględniająca koszty poszukiwania pracy oraz wartość progowa dla *reguły 5*, która zakłada, iż bezrobotny może przyjąć tylko taką pracę, za którą wynagrodzenie będzie nie mniejsze do minimalnych opłacalnych dochodów określonych przez poszukującego. Dla powyższej grupy, zgodnie z przeprowadzonymi wcześniej obliczeniami, dochody kształtują się zgodnie z rozkładem logarytmiczno-normalnym o parametrach: $\mu = 6{,}319$ i $\sigma = 0{,}548$ przedstawionym na rysunku 3.16. Rozpatrzmy na początek pierwszą z wymienionych reguł - *regułę 3*. Aby wyznaczyć wartość progową dochodów d_r dla tej reguły należy rozwiązać równanie (3.15) względem niewiadomej d_r, które w analizowanym przypadku przyjmuje postać:

$$\kappa = \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_r - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] -$$

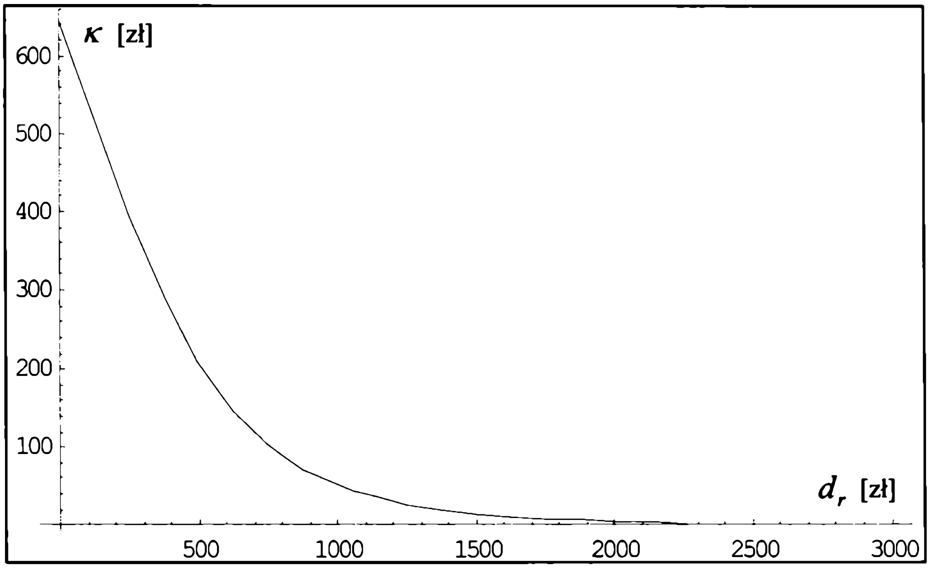
$$+ d_r \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_r - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right].$$

Przed rozwiązaniem tego równania zbadajmy w jaki sposób wartość progowa dochodów d_r zależy od kosztów poszukiwania pracy. Zauważmy, że funkcja $G(d_r)$ zdefiniowana następująco:

$$G(d_r)=\exp\left(\frac{0{,}548^2}{2}+6{,}319\right)\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d_r-0{,}548^2-6{,}319}{0{,}548}\right)\right]-$$

$$+d_r\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\ln d_r-6{,}319}{0{,}548}\right)\right]$$

wyraża zależność kosztów poszukiwania pracy κ od dochodów progowych d_r. Wykres funkcji $G(d_r)$ prezentuje rysunek 3.17. Na osi odciętych zaznaczone są wartości dochodu progowego, natomiast oś rzędnych prezentuje koszty poszukiwania pracy κ.



Rysunek 3.17. Zależność kosztów poszukiwania pracy od dochodów progowych d_r dla *reguły 3*

Funkcja $G(d_r)$ jest funkcją wypukłą, nieujemną i ściśle malejącą. Ponadto

$$\lim_{d_r\to 0} G(d_r)=EX=644{,}94$$

oraz

$$\lim_{d_r\to\infty} G(d_r)=0.$$

Z własności funkcji $G(d_r)$ wynika, że wraz ze zmniejszającymi się kosztami poszukiwania pracy rośnie wartość progowa dochodów. Z kolei wraz ze wzrostem wartości progowej dochodów w optymalnej regule postępowania przy wyborze właściwej oferty pracy wydłuża się czas trwania bezrobocia. Okres czasu poszukiwania pracy o wysokich dochodach jest z pewnością dłuższy w porównaniu z poszukiwaniem pracy o niskich dochodach.

Przedstawione powyżej zależności pomiędzy kosztami poszukiwania pracy, dochodami progowymi i czasem trwania bezrobocia są również prawdziwe dla ogólnego przypadku, kiedy oferowane dochody są realizacją zmiennej losowej o dowolnym rozkładzie, a w szczególności o rozkładzie logarytmiczno-normalnym.

Do wyznaczenia wartości progowej dla *reguły 3* wymagana jest także znajomość wielkości kosztów poszukiwania pracy. W analizowanym przypadku reguły postępowania zostaną wyznaczone dla tego samego poszukującego, dla którego zostały wyznaczone reguły przy założeniu ustalonej liczby ofert. Koszty poszukiwania, które zostały wyznaczone w poprzednim rozdziale wynoszą 138,72 zł. Rozwiązując zatem równanie:

$$138{,}72 = \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319\right)\cdot\left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_r - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] -$$

$$+ d_r \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_r - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right]$$

ze względu na niewiadomą d_r otrzymuje się wartość progową dochodów

$$d_r = 646{,}29 \text{ zł.}$$

Poszukujący zatrudnienia w sekcji administracji publicznej i obronie narodowej zgodnie z *regułą 3* powinien podejmować decyzję według następującego schematu:

jeżeli oferowane dochody $x \geq 646{,}29$ *zł. ,to ofertę przyjmuje,*

jeżeli oferowane dochody $x < 646{,}29$ *zł. , to ofertę odrzuca kontynuując poszukiwanie.*

Na podstawie optymalnych reguł postępowania można wyznaczyć oczekiwany czas poszukiwania pracy (trwania bezrobocia). Niech N oznacza losową liczbę ofert pracy, które poszukujący musiał przeglądnąć zanim znalazł zatrudnienie. Zmienna losowa N ma zatem rozkład geometryczny z parametrem równym

$$p = P(X > d_r).$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej N jest równa

$$E(N) = \frac{1}{p} = \frac{1}{P(X > d_r)}.$$

Dla poszukującego w analizowanej sekcji EKD postępującego zgodnie z *regułą 3* prawdopodobieństwo otrzymania oferty możliwej do przyjęcia jest równe

$$P(X > 646{,}29) = \int_{646{,}29}^{\infty} \frac{1}{x \cdot 0{,}548 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - 6{,}319)^2}{2 \cdot (0{,}548)^2} \right) dx = 0{,}39.$$

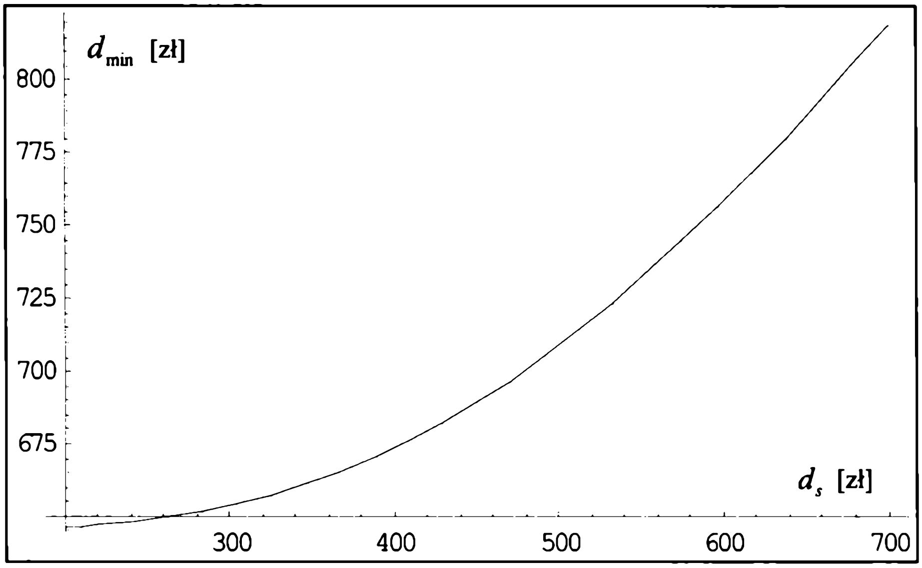
Poszukujący w celu znalezienia pracy musi więc przeglądnąć średnio $\frac{1}{0{,}39} \approx 3$ oferty. Pamiętając, że w ciągu tygodnia przeglądana jest jedna oferta oczekiwany czas poszukiwania pracy wynosi 21 dni.

Załóżmy teraz, że poszukujący ustala minimalne wynagrodzenie jakie powinien otrzymywać za podjętą pracę aby zapewnić byt sobie i swojej rodzinie. Wówczas osoba poszukująca może zastosować *regułę 4*, której wartością progową dochodów będą wyznaczone przez nią minimalne dochody, lub *regułę 5*, dla której z kolei wartość progową należy wyznaczyć na podstawie nierówności (3.18). Nierówność (3.18) dla analizowanej sekcji przyjmuje postać:

$$d_{\min} \le \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319 \right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_s - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548} \right) \right] +$$

$$+d_s\cdot\Phi\left(\frac{\ln d_s-6{,}319}{0{,}548}\right).$$

Rysunek 3.18 prezentuje zależność wartości progowej reguły d_s, (oś odciętych) od wartości minimalnej dochodów $d_{\min}$ (oś rzędnych) dla *reguły 5*.



Rysunek 3.18. Zależność wartości progowej d_s od wartości minimalnej dochodów $d_{\min}$ dla *reguły 5*

Wzrost wartości minimalnych dochodów pociąga za sobą wzrost wartości progowej dla *reguły 5*. Jeżeli założymy, że wartość minimalnych dochodów dla poszukującego pracy wynosi 1500 złotych, to wówczas rozwiązaniem nierówności (3.18) ze względu na niewiadomą d_s będzie każda wartość większa od 1485,51. Wówczas regułę postępowania można zapisać następująco:

jeżeli oferowane dochody $x\geq 1485{,}51$ *zł. ,to ofertę przyjmuje,*

jeżeli oferowane dochody $x<1485{,}51$ *zł. , to ofertę odrzuca kontynuując poszukiwanie.*

Na podstawie tak sformułowanej reguły, widać że mimo tego, iż poszukujący ustalił minimalne dochody na poziomie 1500 złotych, to jednak reguła nakazuje zaakceptować ofertę o nieznacznie niższym pułapie płacowym. Jest tak dlatego, że reguła ta nie zapewnia każdemu poszukującemu wynagrodzenia nie mniejszego od $d_{\min}$, lecz to, iż średnia wartość osiągniętych dochodów dla poszukujących postępujących według tej reguły będzie nie mniejsza od $d_{\min}$. Wartość dochodów nie mniejszych od $d_{\min}$ dla każdego poszukującego zapewni jedynie *reguła 4*.

Dla poszukującego postępującego zgodnie z *regułą 5* prawdopodobieństwo przyjęcia oferty jest równe

$$P(X > 1485{,}51) = \int_{1485{,}51}^{\infty} \frac{1}{x \cdot 0{,}548 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln x - 6{,}319)^2}{2 \cdot (0{,}548)^2} \right) dx = 0{,}04 .$$

Poszukujący w celu znalezienia pracy musi przeglądnąć średnio $\frac{1}{0{,}04} = 25$ ofert i oczekiwany czas poszukiwania pracy dla niego wynosi 175 dni. Można zauważyć, że ustalenie minimalnych opłacalnych dochodów przez poszukującego na poziomie wyższym od średnich oferowane wynagrodzeń znacznie wydłuża czas poszukiwania pracy.

Reguła 5 dla analizowanej sekcji będzie identyczna jak *reguła 3*, to znaczy wartości progowe dochodów dla tych reguł będą takie same, równe 646,29 złotych, jeżeli wartość dochodów minimalnych zostanie ustalona na poziomie 787,01 złotych.

3.5.4 Model z nieograniczoną liczbą ofert uwzględniający współczynnik dyskontowania

Wyznaczone zostaną teraz dwie reguły postępowania dla poszukujących pracy, które dodatkowo oprócz kosztów poszukiwania będą uwzględniać współczynnik dyskontowania. Obliczenia zostaną przeprowadzone tak jak dla poprzednich reguł dla osoby szukającej zatrudnienia w sekcji L EKD.

Reguła 6 postępowania uwzględnia koszty poszukiwania pracy ponoszone na końcu przedziału poszukiwania oferty. Uwzględniając parametry i rozkład dochodów dla pracujących w sekcji L EKD równanie (3.21) wyznaczające wartość progową dochodów dla tej reguły przyjmuje postać:

$$\kappa = \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_t - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] +$$

$$+ d_t \cdot \left[\Phi\left(\frac{\ln d_t - 6{,}319}{0{,}548}\right) - r - 1\right].$$

Przy założeniu otrzymywania jednej oferty pracy w ciągu tygodnia i rocznej stopie procentowej wynoszącej 10 % obliczona tygodniowa stopa procentowa r wynosi 0,183 %. Aby wyznaczyć wartość progową dochodów d_r należy rozwiązać następujące równanie:

$$\kappa = \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_t - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] +$$

$$+ d_t \cdot \left[\Phi\left(\frac{\ln d_t - 6{,}319}{0{,}548}\right) - 0{,}00183 - 1\right]$$

względem niewiadomej d_t. Wprowadzając funkcję

$$H(d_t) = \exp\left(\frac{0{,}548^2}{2} + 6{,}319\right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_t - 0{,}548^2 - 6{,}319}{0{,}548}\right)\right] +$$

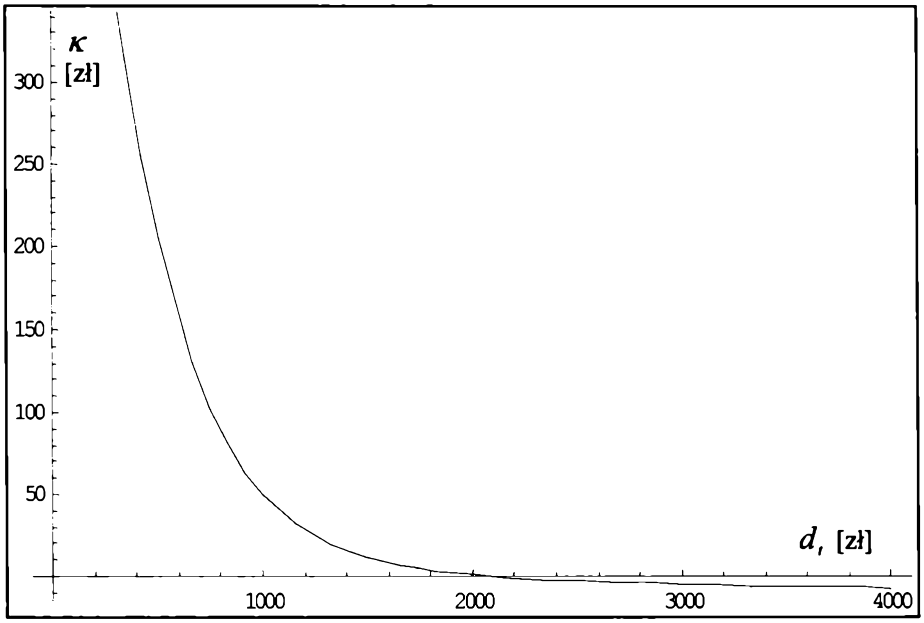
$$+ d_t \cdot \left[\Phi\left(\frac{\ln d_t - 6{,}319}{0{,}548}\right) - 0{,}00183 - 1\right].$$

Można przeanalizować zależność kosztów poszukiwania pracy κ od dochodów progowych d_t dla modelu uwzględniającego współczynnik dyskontowania. Wykres funkcji $H(d_t)$ przedstawiony jest na rysunku 3.19. Na osi odciętych zaznaczone są wartości dochodu progowego, natomiast oś rzędnych prezentuje koszty poszukiwania pracy κ. Funkcja $H(d_t)$ podobnie jak funkcja $G(d_r)$ jest funkcją wypukłą i ściśle malejącą. Oznacza to, że wraz ze zmniejszającymi się kosztami poszukiwania pracy rośnie wartość progowa dochodów.

Funkcja $H(d_t)$ nie jest jednak funkcją nieujemną i dla kosztów poszukiwania pracy równych zero wartość progowa dochodów równa jest

$$d_t = 2059{,}03\,.$$

Dla modelu poszukiwania pracy nie uwzględniającego współczynnika dyskontowania dla kosztów poszukiwania zbiegających do zera wartość progowa dochodów dążyła do nieskończoności.



Rysunek 3.19 Zależność kosztów poszukiwania pracy od dochodów progowych d_t dla *reguły 6*

Dla tygodniowych kosztów poszukiwania pracy, ustalonych w punkcie 3.5.2 w wysokości 138,72 złotych opłacalny dochód dla reguły uwzględniającej współczynnik dyskontowania wynosi

$$d_t = 643{,}29\,.$$

Wartość ta jest o trzy złote niższa od wartości progowej wyznaczonej dla *reguły 4* w analogicznym modelu nie uwzględniającym uaktualniania wartości. Wprowadzenie współczynnika dyskontowania spowodowało minimalne obniżenie wartości progowej dochodów, co nie zmieniło oczekiwanego czasu poszukiwania zatrudnienia. Poszukujący zatrudnienia w sekcji administracji publicznej i obronie narodowej zgodnie z warunkami określonymi w modelu uwzględniającym dyskontowanie kosztów i korzyści poszukiwania pracy w celu wybrania najkorzystniejszej dla niego oferty pracy powinien przyjąć pierwszą ofertę, w której pracodawca proponuje wynagrodzenie nie mniejsze niż 643,29 złotych.

Druga wyznaczana w tym punkcie *reguła 7* postępowania uwzględnia koszty poszukiwania pracy ponoszone na początku przedziału poszukiwania oferty. Uwzględniając parametry i rozkład dochodów dla pracujących w sekcji L EKD równanie (3.23) przyjmuje postać:

$$\kappa = -\frac{r \cdot d_w}{1+r} + \frac{1}{1+r} \cdot \left[\exp\left(\frac{0,548^2}{2} + 6,319 \right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_w - 0,548^2 - 6,319}{0,548} \right) \right] + - d_w \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_w - 6,319}{0,548} \right) \right] \right].$$

Aby wyznaczyć wartość progową dochodów d_w dla *reguły 7*, rozpatrując taki sam jednotygodniowy okres poszukiwania oferty, należy rozwiązać następujące równanie

$$\kappa = I(d_w)$$

względem niewiadomej d_w, gdzie

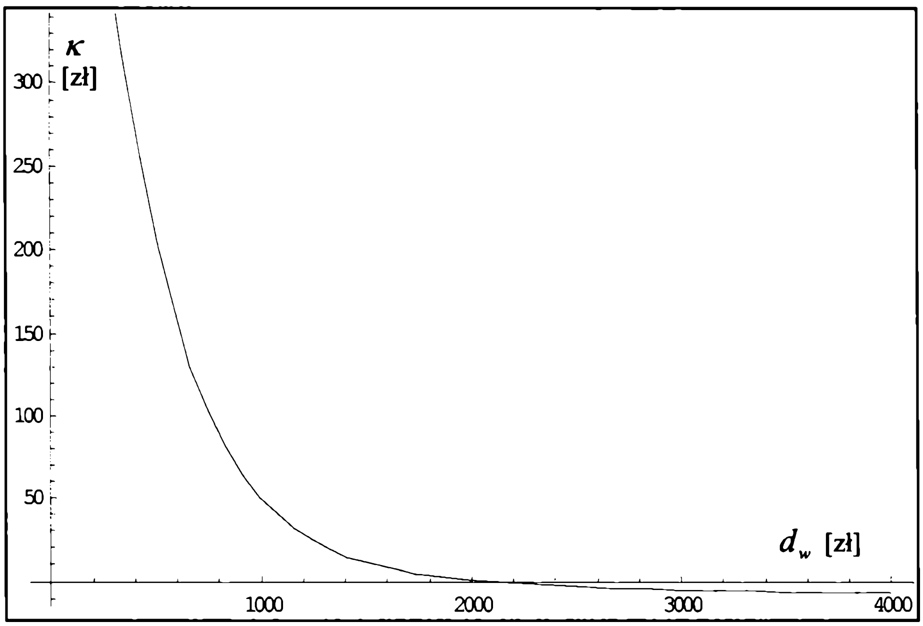
$$I(d_w) = -\frac{0,00183 \cdot d_w}{1,00183} + \frac{1}{1,00183} \cdot \left[\exp\left(\frac{0,548^2}{2} + 6,319 \right) \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_w - 0,548^2 - 6,319}{0,548} \right) \right] + - d_w \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln d_w - 6,319}{0,548} \right) \right] \right].$$

Zależność dochodów progowych d_w od kosztów poszukiwania pracy dla *reguły* 7 przedstawiona jest na rysunku 3.20. Na osi odciętych zaznaczone są wartości dochodu progowego, natomiast oś rzędnych prezentuje koszty poszukiwania pracy κ. Funkcja $I(d_w)$ posiada ogólne własności funkcji $H(d_t)$, dla kosztów poszukiwania pracy równych zero wartość progowa dochodów jest równa

$$d_w = 2059{,}03.$$

Dla przyjętych kosztów poszukiwania pracy równych 138,72 złote wartość progowa dochodów wynosi

$$d_w = 642{,}65.$$



Rysunek 3.20. Zależność kosztów poszukiwania pracy od dochodów progowych d_w dla *reguły* 7

W przypadku, gdy koszty poszukiwania pracy ponoszone są na początku przedziału poszukiwania wartość progowa dochodów jest nieco niższa od wartości progowej wyznaczonej dla modelu, w którym koszty poszukiwania pracy ponoszone są na końcu

przedziału. Różnica tych wartości progowych wynika z faktu, że modele, dla których są one wyznaczane, poprzez dyskontowanie uaktualniają odpowiednie wartości.
Postępując zgodnie z *regułą 7* poszukujący będzie czekał na ofertę tak długo, aż zaproponowane w niej wynagrodzenie będzie nie niższe niż 642,65 zł.

W pracy wyznaczone zostały różne reguły postępowania tylko dla jednej z wielu grup poszukujących zatrudnienia w wybranej sekcji według Europejskiej Klasyfikacji Działalności. Rozpatrując różne gospodarstwa domowe, minimalne dochody, oraz sekcje EKD można stworzyć zbiór wszelkich możliwych reguł postępowania podczas poszukiwania zatrudnienia, który mógłby być wykorzystywany przez instytucje pomagające w optymalnym wyborze oferty pracy.

3.6 Analiza skuteczności reguł

Aby wyznaczoną regułę postępowania podczas znajdowania zatrudnienia w odpowiednim modelu poszukiwania pracy można było stosować w praktyce, powinniśmy się przekonać, że skuteczność reguł dla odpowiedniego modelu jest dostatecznie wysoka. Przez skuteczność modelu będziemy rozumieli częstość wyboru przez odpowiednią regułę postępowania, kolejno najlepszych ofert pracy. Ze względu na to, że w modelu poszukiwania pracy z ustaloną liczbą ofert pracy nie zakładano żadnych skutków ubocznych wynikających z przedłużającego się czasu poszukiwania zatrudnienia, najlepszą ofertą pracy będzie ta, która proponuje najwyższe wynagrodzenie. Dla modeli z nieograniczoną liczbą ofert nie jesteśmy w stanie określić oferty najlepszej ze względu na to, że nie ma możliwości poznania wszystkich ofert, dla tego też zostanie przeprowadzona analiza skuteczności reguł wyznaczonych w poprzednim paragrafie tylko dla modeli ze skończoną liczbą ofert.

Aby zbadać skuteczność reguł rozpatrywanych w pracy, należałoby obserwować grupę ludzi postępujących zgodnie ze wspomnianym regułami i na podstawie odpowiedniego kryterium ocenić przydatność omawianych metod. Ze względu na brak rzeczywistych obserwacji skuteczność proponowanych reguł zbadana zostanie przy pomocy symulacji procesu poszukiwania pracy (przeglądania ofert).

W pierwszej kolejności należy przede wygenerować wysokości proponowanego wynagrodzenia za pracę, znając rozkład oferowanych wynagrodzeń X, w kolejno pojawiających się ofertach. Uprzednio przyjęte zostało założenie, że rozkład wynagrodzeń dla analizowanej sekcji jest rozkładem logarytmiczno-normalnym o parametrach: $\mu = 6{,}319$ oraz $\sigma = 0{,}548$. Korzystając z faktu, że jeśli zmienna losowa Y ma rozkład normalny o parametrach μ, σ, to zmienna losowa X określona wzorem

$$X = \exp(Y) \tag{3.28}$$

ma rozkład logarytmiczno normalny o tych samych parametrach, wygenerowano po jednej wartości dla n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym i parametrach: $\mu = 6{,}319$ oraz $\sigma = 0{,}548$, a następnie wartości te przekształcono zgodnie ze wzorem (3.28).

Na początek zbadana zostanie efektywność *reguły 1* dla poszukującego posiadającego kapitał początkowy $\tau_2 = 4000$. Wówczas ze względów finansowych osoba pragnąca podjąć pracę może rozpatrzyć maksymalnie 29 ofert. Tabela 3.7 zawiera symulację pojedynczej próby dwudziestu dziewięciu wynagrodzeń za pracę w analizowanej sekcji.

Tabela 3.7. Generowane wynagrodzenia za pracę w proponowanych ofertach

Kolejne oferty	Proponowane wynagrodzenie	Kolejne oferty	Proponowane wynagrodzenie
i	x_i	i	x_i
1	438,44	16	387,43
2	394,79	17	465,46
3	598,17	18	395,09
4	632,49	19	1062,03
5	837,19	20	585,68
6	934,48	21	493,05
7	1168,69	22	746,11
8	427,19	23	354,01
9	495,61	24	752,79
10	969,05	25	413,94
11	997,91	26	467,71
12	**1478,17**	27	749,57
13	680,84	28	374,75
14	933,07	29	995,17
15	494,72		

Następnie znając pod względem proponowanego wynagrodzenia wszystkie możliwe do rozpatrzenia przez poszukującego oferty można sprawdzić, którą ofertę wybrałby poszukujący postępując z godnie z regułą, a która proponuje najwyższe spośród wszystkich generowanych w danej próbie wynagrodzeń. Poszukujący rozpatrując *i*-tą ofertę pracy nie zna (nie ma żadnej informacji) na temat następnych ofert. Wybór jednej spośród kolejno rozpatrywanych ofert pracy odbywa się na podstawie wyznaczonej *reguły 1.* Zgodnie z regułą postępowania, wyznaczoną w poprzednim rozdziale, poszukujący pierwszą ofertę pracy przyjąłby jeśli proponowane wynagrodzenie byłoby nie mniejsze niż 1549,85 zł., ale ze względu na to iż w naszym przypadku warunek ten nie jest spełniony gdyż $438{,}44 < 1549{,}85$ poszukujący rozpatruje drugą ofertę. Zostaje ona również odrzucona ponieważ proponowane w niej dochody w wysokości 394,79 zł. są mniejsze od 1537,06 zł. Okazuje się, że dopiero dwunasta oferta spełnia warunek

$$x_{12} = 1478{,}17 \geq 1379{,}35 = z_{29-12},$$

który nakazuje zaakceptować rozpatrywaną ofertę. Oznacza to, iż na podstawie *reguły 1* poszukujący powinien przyjąć dwunastą kolejno proponowaną pracę. Okazuje się, że ta oferta jest jednocześnie ofertą o maksymalnych dochodach proponowanych w generowanych ofertach. Zatem w tym przypadku wyznaczona reguła postępowania okazała się skuteczna, gdyż wybrała rzeczywiście najlepszą spośród generowanych dwudziestu dziewięciu ofert pracy. W taki sam sposób rozpatrzono 10000 prób, dokonując porównania maksymalnych spośród generowanych wynagrodzeń w proponowanych ofertach, oraz wynagrodzeń ofert wybranych na podstawie wyznaczonej *reguły 1* postępowania. W tabeli 3.8 oraz na rysunku 3.21 zebrano wyniki symulacji skuteczności *reguły 1* dla poszukującego zatrudnienia w sekcji L EKD posiadającego kapitał początkowy $\tau_2 = 4000$ złotych. Wyniki pogrupowane zostały w szereg rozdzielczy ze względu na rangę wybranej przez regułę oferty pracy. Ranga numer 1 została nadana najlepszej pod względem wysokości wynagrodzenia w danej próbie ofercie, ranga numer 2 została przypisana drugiej pod względem wysokości wynagrodzenia w danej próbie ofercie, itd.

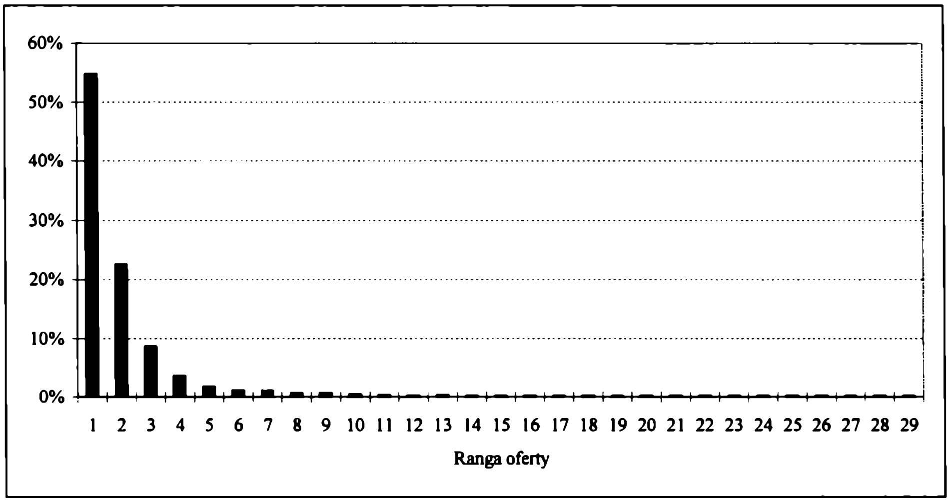
Analizując skuteczność reguły okazuje się, że w przeprowadzonych 10000 próbach poszukujący 5474 razy wybierając ofertę zgodnie z wyznaczoną regułą postępowania, wybiera jednocześnie ofertę o maksymalnych dochodach spośród dwudziestu dziewięciu ofert. Oznacza to, iż skuteczność wyznaczonej reguły postępowania dla wyboru najlepszej oferty wynosi 54,74 %. Analizując wybór oferty pracy w pozostałych próbach, okazuje się, że 22,6 % przeprowadzonych prób, to takie w których poszukujący wybrał zgodnie z reguła drugą pod względem wysokości wynagrodzenia pracę, a w 8,68% - trzecią. Skuteczność wyboru pierwszych pięciu najlepszych pod względem wynagrodzenia ofert przekracza 90 procent (91,46 %), co wskazuje na wysoką efektywność sformułowanej reguły.

Tabela 3.8. Skuteczność *reguły 1* dla poszukującego z kapitałem $\tau_2 = 4000$ zł

Ranga oferty	Skuteczność [%]	Skuteczność skumulowana [%]
1	54,74	54,74
2	22, 60	77,34
3	8,68	86,02
4	3,68	89,70
5	1,76	91,46
6	1,15	92,61
7	1,08	93,69
8	0,63	94,32
9	0,68	95,00
10	0,53	95,53
11	0,38	95,91
12	0,31	96,22
13	0,34	96,56
14	0,23	96,79
15	0,19	96,98
16	0,27	97,25
17	0,19	97,44
18	0,28	97,72
19	0,14	97,86
20	0,21	98,07
21	0,29	98,36
22	0,25	98,61
23	0,21	98,82
24	0,18	99,00
25	0,29	99,29
26	0,20	99,49
27	0,15	99,64
28	0,20	99,84
29	0,16	100

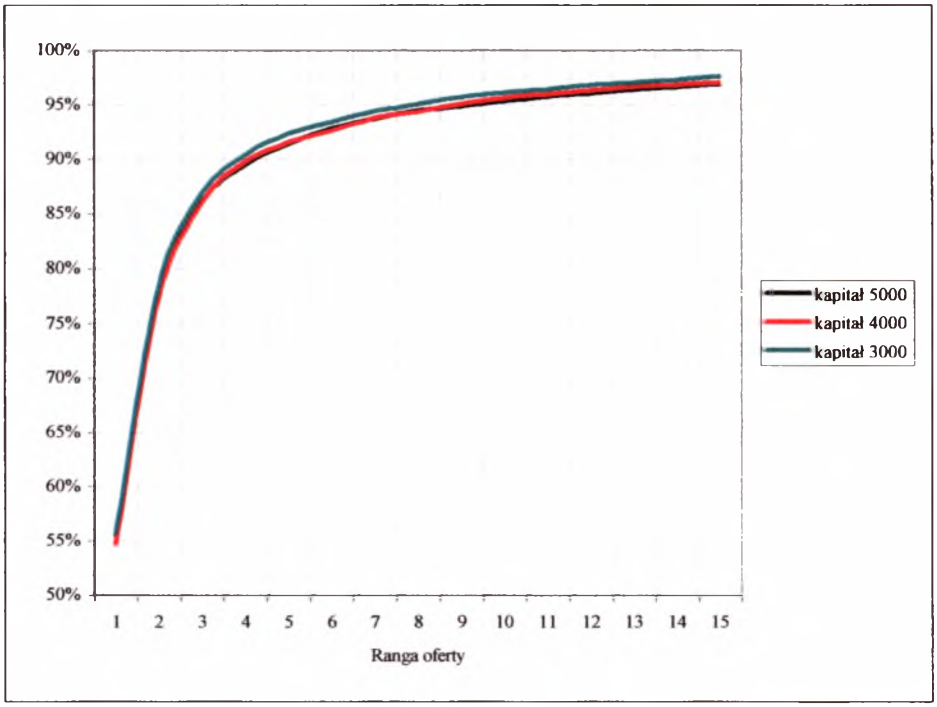
Źródło: obliczenia własne

Aby przekonać się, że skuteczność *reguły 1* jest wysoka bez względu na wielkość zaoszczędzonego kapitału, w pracy dokonano symulacji skuteczności tej reguły dodatkowo dla kapitału początkowego $\tau_1 = 5000$ zł. oraz $\tau_3 = 3000$ zł. Wszystkie omawiane w tym rozdziale symulacje skuteczności reguł postępowania przy poszukiwaniu pracy dokonano na podstawie 10000 prób.



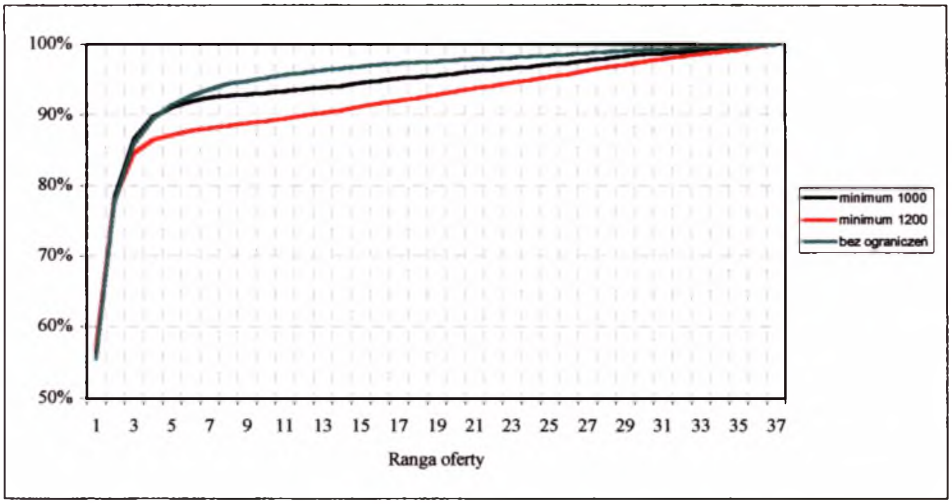
Rysunek 3.21. Skuteczność *reguły 1* dla poszukującego z kapitałem $\tau_2 = 4000$

Ze względu na rożną wielkość zgromadzonego kapitału dla poszczególnych poszukujących dostępna była różna liczba możliwych do rozpatrzenia ofert. Wyniki skuteczności reguły dla pierwszych 15 pod względem wynagrodzenia ofert pracy przedstawiono na rysunku 3.22. Dokładne wyniki wszystkich przeprowadzanych w tym rozdziale symulacji skuteczności zawierają tabele B.1-B.3 umieszczone w dodatku B. We wszystkich trzech przypadkach skuteczność reguły dla pierwszych czterech najlepszych ofert przekracza 90 %.



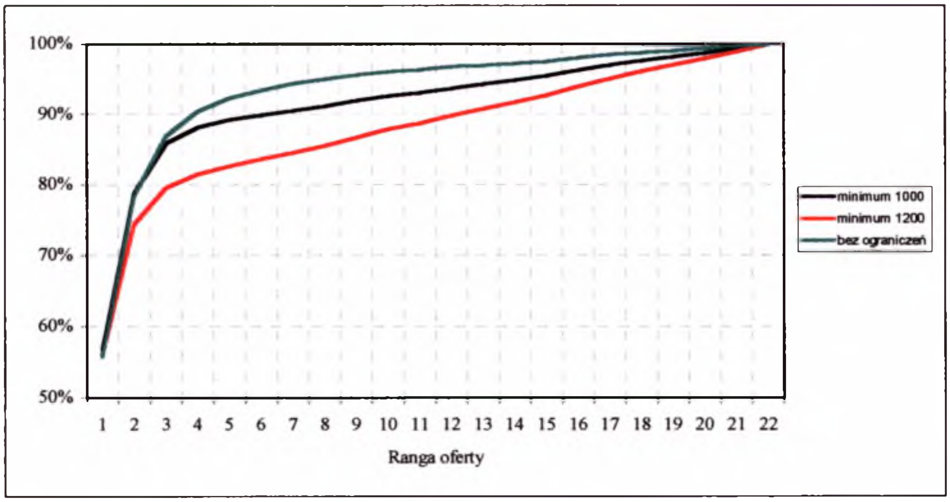
Rysunek 3.22. Skuteczność skumulowana *reguły 1* dla poszukującego z kapitałem równym $\tau_1 = 5000$ zł., $\tau_2 = 4000$ zł., $\tau_3 = 3000$ zł.

W kolejnym etapie analizy skuteczności reguł poszukiwania zatrudnienia opartych na modelu z ustaloną liczbą ofert pracy zostanie porównana skuteczność *reguły 1* oraz *reguły 2* dla ustalonego kapitału początkowego. Przypomnijmy, że *reguła 2* poszukiwania pracy uwzględnia minimalne dochody ustalone przez poszukującego jakie powinien otrzymywać za podjętą pracę aby zapewnić byt sobie i swojej rodzinie. *Reguła 2* była definiowana dla dwóch minimalnych wynagrodzeń równych 1000 złotych oraz 1200 złotych. Skuteczność definiowanych reguł dla różnych wielkości zaoszczędzonego kapitału była porównywalna, dlatego też w pracy przykładowo zamieszczono wyniki symulacji dla kapitału początkowego $\tau_1 = 5000$ złotych oraz $\tau_3 = 3000$ złotych odpowiednio na rysunku 3.23 i 3.24. Kolorem zielonym oznaczono skuteczność *reguły 1*, to znaczy reguły bez ograniczeń ze względu na wysokość wynagrodzenia jakie powinien otrzymywać poszukujący. Skuteczność *reguły 2* uwzględniającej minimalne wynagrodzenie jakie powinien otrzymać poszukujący, aby zapewnić byt sobie i swojej rodzinie oznaczono kolorem czarnym oraz czerwonym odpowiednio dla $d_{\min} = 1000$ złotych i $d_{\min} = 1200$ złotych. Dla ustalonego kapitału początkowo największą skutecznością charakteryzuje się *reguła 1*. Natomiast skuteczność *reguły 2* jest tym większa, im mniejsza jest wartość wymaganego minimalnego dochodu dla poszukującego pracy. Różnice pomiędzy rozkładami skuteczności *reguł 2* dla analizowanych wartości minimalnych oraz *regułą 1* a *regułą 2* dla każdego rozpatrywanego kapitału początkowego, na podstawie testu chi-kwadrat (por. [13]) są statystycznie istotne. W każdym przypadku wartość najmniejszego poziomu istotności przy którym nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o identycznych rozkładach skuteczności badanych reguł jest mniejszy od wartości 0,0001.



Rysunek 3.23. Skuteczność skumulowana *reguły 1* oraz *reguły 2* dla poszukującego z kapitałem $\tau_1 = 5000$ zł.

Stworzenie *reguły 2* miało na celu zapewnienie poszukującemu dochodów nie mniejszych niż określone przez niego minimalne wynagrodzenie. Skonstruowana w paragrafie 3.2 reguła spełnia to założenie o ile wskaże jedną spośród $n-1$ kolejno analizowanych ofert pracy. Ostatnia n-ta oferta pracy powinna być akceptowana przez poszukującego niezależnie od proponowanego w niej wynagrodzenia. Dokonajmy zatem analizy *reguły 2* ze względu na założenie jakie powinna spełniać dla ustalonego kapitału początkowego. *Reguła 2* została dodatkowo porównana z *regułą 1* ze względu na wynagrodzenie wybranej oferty.



Rysunek 3.24. Skuteczność skumulowana *reguły 1*, oraz *reguły 2* dla poszukującego z kapitałem $\tau_3 = 3000$ zł.

Wprowadźmy następujące oznaczenia w celu jaśniejszej prezentacji wyników porównania:

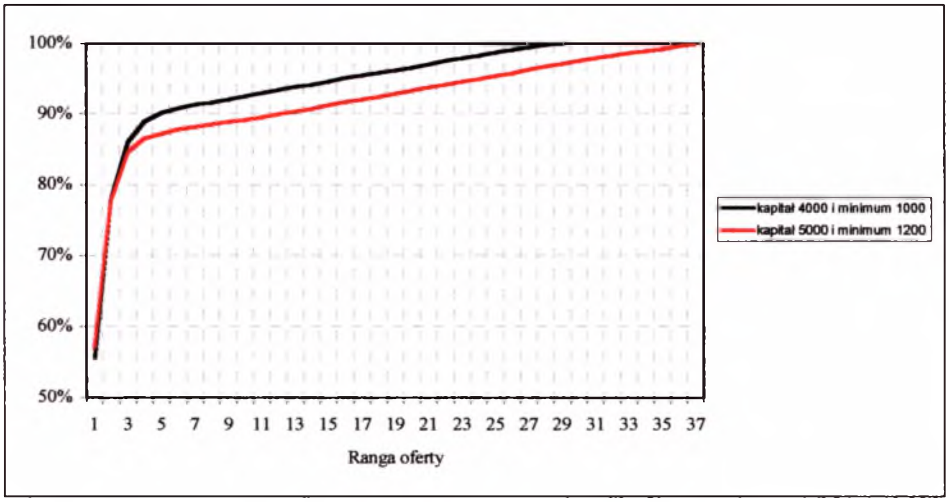
- $x_{\text{reguła 1}}$ - wynagrodzenie za pracę wybraną przez poszukującego na podstawie *reguły 1* ,
- $x_{\text{reguła 2\_d}_{\min}}$ - wynagrodzenie za pracę wybraną przez poszukującego na podstawie *reguły 2* dla określonej wartości minimalnego wynagrodzenia $d_{\min}$

Wykorzystując powyższe oznaczenia wyniki analizy zostały zebrane w tabeli 3.9. Dla obydwu wartości rozpatrywanego kapitału początkowego *reguła 1* częściej wybiera lepszą ofertę aniżeli *reguła 2* bez względu na minimalną wartość wynagrodzenia. Różnice te na podstawie testu porównującego wskaźniki struktury dla dwóch populacji (por. [13]) są istotne dla każdego rozsądnego poziomu istotności. Jednocześnie *reguła 1* częściej dokonuje wyboru oferty o dochodach mniejszych niż określone minimalne wynagrodzenie dla *reguły 2*. Zastosowanie również w tym przypadku testu statystycznego do weryfikacji hipotezy o równości wskaźników struktury pokazało, iż różnice te są istotne dla każdego poziomu istotności. Zatem poszukujący decydując się na postępowanie zgodne z *regułą 2* ustalając minimalne dla siebie opłacalne wynagrodzenie, rzeczywiście zyskuje większą szansę zdobycia pracy o dochodach nie mniejszych niż ustalone minimalne wynagrodzenie w porównaniu z wyborem zgodnym z *regułą 1*.

Tabela 3.9. Porównanie skuteczności wybranych reguł poszukiwania

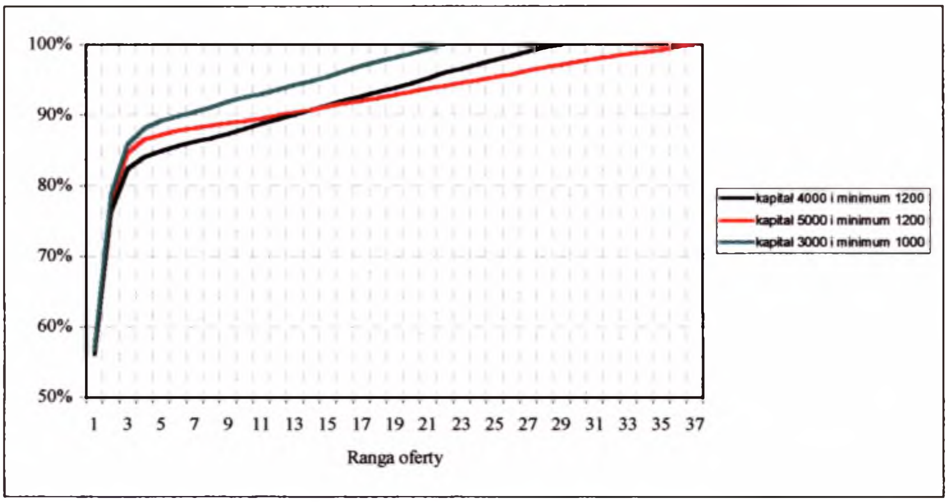
Kapitał początkowy $\tau_1 = 5000$ złotych			
	Częstość wybranych ofert		**Częstość wybranych ofert**
$x_{\text{regula 1}} > x_{\text{regula 2\_1000}}$	0,0328	$x_{\text{regula 1}} > x_{\text{regula 2\_1200}}$	0,0816
$x_{\text{regula 1}} < x_{\text{regula 2\_1000}}$	0,0157	$x_{\text{regula 1}} < x_{\text{regula 2\_1200}}$	0,0353
$x_{\text{regula 1}} = x_{\text{regula 2\_1000}}$	0,9515	$x_{\text{regula 1}} = x_{\text{regula 2\_1200}}$	0,8831
$x_{\text{regula 1}} < 1000$	0,0962	$x_{\text{regula 1}} < 1200$	0,1677
$x_{\text{regula 2\_1000}} < 1000$	0,0847	$x_{\text{regula 2\_1200}} < 1200$	0,1406
Kapitał początkowy $\tau_3 = 3000$ złotych			
	Częstość wybranych ofert		**Częstość wybranych ofert**
$x_{\text{regula 1}} > x_{\text{regula 2\_1000}}$	0,0550	$x_{\text{regula 1}} > x_{\text{regula 2\_1200}}$	0,1330
$x_{\text{regula 1}} < x_{\text{regula 2\_1000}}$	0,0260	$x_{\text{regula 1}} < x_{\text{regula 2\_1200}}$	0,0571
$x_{\text{regula 1}} = x_{\text{regula 2\_1000}}$	0,9190	$x_{\text{regula 1}} = x_{\text{regula 2\_1200}}$	0,8099
$x_{\text{regula 1}} < 1000$	0,1533	$x_{\text{regula 1}} < 1200$	0,2677
$x_{\text{regula 2\_1000}} < 1000$	0,1333	$x_{\text{regula 2\_1200}} < 1200$	0,2236

Wykorzystując metodę analizy skuteczności reguł postępowania zostanie zbadana zależność pomiędzy wysokością zgromadzonego przez poszukującego kapitału, a skutecznością a skutecznością odpowiednich reguł. Na podstawie otrzymanych wyników będzie można stwierdzić czy zwiększenie kapitału początkowego poszukującego poprzez zdobycie kredytu zaciągniętego w banku bądź u rodziny zwiększy jego szansę powodzenia podczas poszukiwania pracy. Większy kapitał początkowy oznacza, iż poszukujący może dłużej poszukiwać zatrudnienia i jest w stanie przeglądnąć większą liczbę ofert pracy. Z drugiej strony, ze względu na zaciągnięty kredyt, poszukujący musi jednocześnie powiększyć swoje minimalne określone wynagrodzenie o miesięczną wielkość spłaty kredytu. Załóżmy na przykład, że poszukujący dysponuje kapitałem początkowym w wysokości 4000 złotych, oraz ma ustalone minimalne wynagrodzenie na poziomie 1000 złotych. Wówczas taki poszukujący zaciągając kredyt w wysokości 1000 złotych może powiększyć swój kapitał początkowy do 5000 złotych, zwiększając jednocześnie liczbę dostępnych dla niego oferty pracy. Następnie uwzględniając spłatę kredytu wraz z odsetkami załóżmy, że poszukujący był wówczas zmuszony do podwyższenia minimalnego wynagrodzenia do 1200 złotych. Wyniki symulacji skuteczności *reguły 2* dla kapitału początkowego 4000 złotych i minimalnego wynagrodzenia 1000 złotych, oraz *reguły 2* dla kapitału początkowego 5000 złotych i minimalnego wynagrodzenia 1200 złotych prezentuje rysunek 3.25.



Rysunek 3.25. Skuteczność skumulowana *reguły 2* dla poszukującego z kapitałem $\tau_1 = 5000$ zł i $d_{\min} = 1200$ zł. oraz $\tau_2 = 4000$ zł i $d_{\min} = 1000$ zł.

Podwyższenie kapitału początkowego i jednoczesne zwiększenie minimalnego wynagrodzenia nie spowodowało podwyższenia skuteczności dla stosowanej reguły, zatem nieopłacalne jest sztuczne powiększanie kapitału początkowego, które pociąga za sobą konieczność zwiększenia minimalnego wynagrodzenia, jakie powinien otrzymywać poszukujący.



Rysunek 3.26. Skuteczność *reguły 2* poszukiwania pracy

Rysunek 3.26 prezentuje podobną analizę porównawczą dla *reguły 2*, na podstawie której można wyciągnąć analogiczny wniosek. Na skuteczność *reguły 2* nie ma pozytywnego wpływu zwiększenie kapitału o 1000 lub nawet 2000 złotych przy jednoczesnym zwiększeniu minimalnego wynagrodzenia dla obydwóch o 200 złotych.

W pracy zaprezentowano tylko wybrane przykłady wartości początkowych kapitału i minimalnych wynagrodzeń w analizie skuteczności omówionych reguł postępowania podczas poszukiwania zatrudnienia. Analiza innych przypadków nie dawała podstaw do wysnucia odmiennych wniosków.

ZAŁĄCZNIK A

Tablice bezczynności dla powiatu wrocławskiego

Załącznik A zawiera wszystkie skonstruowane w pracy tablice bezczynności dla wybranej grupy bezrobotnych powiatu wrocławskiego ze względu na następujące cechy charakteryzujące te osoby:

- płeć,
- wykształcenie,
- znajomość języków obcych,
- istnienie osób pozostających na utrzymaniu osoby bezrobotnej,
- posiadanie statusu bezrobotnego absolwenta,
- miejsce zamieszkania,
- posiadanie prawa do zasiłku.

Tabela A.1. Tablica bezczynności dla bezrobotnych mężczyzn

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	448	22	437.0	0.956522	1.000000	0.001481	0.000000	0.000340
2	407	0	407.0	0.764128	0.956522	0.008914	0.009755	0.000902
3	311	0	311.0	0.839228	0.730905	0.005828	0.021465	0.000821
4	261	0	261.0	0.800766	0.613396	0.007376	0.023585	0.001017
5	209	2	208.0	0.754808	0.491187	0.009315	0.024222	0.001292
6	156	0	156.0	0.923077	0.370752	0.002667	0.023429	0.000769
7	144	11	138.5	0.862816	0.342232	0.004910	0.023028	0.001123
8	114	0	114.0	0.815789	0.295283	0.006763	0.022246	0.001468
9	93	1	92.5	0.805405	0.240889	0.007186	0.021078	0.001684
10	74	2	73.0	0.835616	0.194013	0.005970	0.019660	0.001717
11	60	4	58.0	0.896552	0.162121	0.003636	0.018458	0.001482
12	50	2	49.0	0.877551	0.145350	0.004348	0.017773	0.001771
13	42	14	35.0	0.857143	0.127552	0.005128	0.017018	00.002287
14	23	23	11.5	0.956522	0.109330	--	0.016422	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.2. Tablica bezczynności dla bezrobotnych kobiet

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	671	48	647.0	0.964451	1.000000	0.001206	0.000000	0.000252
2	600	1	599.5	0.856547	0.964451	0.005151	0.007279	0.000554
3	513	0	513.0	0.881092	0.826098	0.004214	0.015150	0.000538
4	452	2	451.0	0.898004	0.727868	0.003583	0.017820	0.000527
5	404	0	404.0	0.878713	0.653629	0.004304	0.019070	0.000614
6	355	3	353.5	0.917963	0.574352	0.002852	0.019837	0.000529
7	323	45	300.5	0.816972	0.527234	0.006716	0.020047	0.000901
8	223	0	223.0	0.811659	0.430735	0.006931	0.020163	0.001064
9	181	0	181.0	0.823204	0.349610	0.006465	0.019875	0.001137
10	149	2	148.0	0.777027	0.287801	0.008365	0.019130	0.001445
11	114	5	111.5	0.784753	0.223629	0.008040	0.017830	0.001629
12	85	9	80.5	0.739130	0.175494	0.010000	0.016479	0.002157
13	55	11	49.5	0.919192	0.129713	0.002807	0.014904	0.001402
14	40	40	20.0	0.975000	0.119231	--	0.014592	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.3. Tablica bezczynności dla bezrobotnych z wykształceniem co najwyżej podstawowe

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	333	34	316.0	0.962025	1.000000	0.001290	0.000000	0.000372
2	287	1	286.5	0.808028	0.962025	0.007079	0.010752	0.000949
3	231	0	231.0	0.900433	0.777343	0.003493	0.024012	0.000727
4	208	0	208.0	0.870192	0.699946	0.004627	0.026495	0.000888
5	181	0	181.0	0.861878	0.609087	0.004946	0.028242	0.000986
6	156	0	156.0	0.967949	0.524959	0.001086	0.028922	0.000486
7	151	22	140.0	0.850000	0.508134	0.005405	0.028958	0.001176
8	108	0	108.0	0.851852	0.431913	0.005333	0.029000	0.001329
9	92	0	92.0	0.793478	0.367926	0.007677	0.028779	0.001749
10	73	2	72.0	0.819444	0.291942	0.006616	0.027615	0.001826
11	58	0	58.0	0.758621	0.239230	0.009150	0.026215	0.002422
12	44	2	43.0	0.813953	0.181485	0.006838	0.024004	0.002405
13	34	8	30.0	0.900000	0.147720	0.003509	0.022310	0.002023
14	23	23	11.5	0.956522	0.132948	--	0.021648	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.4. Tablica bezczynności dla bezrobotnych z wykształceniem zawodowe

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	315	17	306.5	0.960848	1.000000	0.001331	0.000000	0.000384
2	286	0	286.0	0.797203	0.960848	0.007523	0.011079	0.000981
3	228	0	228.0	0.855263	0.765991	0.005201	0.024493	0.000903
4	195	1	194.5	0.856041	0.655124	0.005171	0.027520	0.000974
5	166	1	165.5	0.776435	0.560813	0.008390	0.028756	0.001368
6	128	0	128.0	0.898438	0.435435	0.003567	0.028782	0.000988
7	115	9	110.5	0.837104	0.391211	0.005911	0.028352	0.001388
8	88	0	88.0	0.772727	0.327484	0.008547	0.027425	0.001895
9	68	1	67.5	0.851852	0.253056	0.005333	0.025751	0.001681
10	57	1	56.5	0.805310	0.215566	0.007190	0.024514	0.002155
11	45	4	43.0	0.860465	0.173598	0.005000	0.022774	0.002035
12	35	2	34.0	0.764706	0.149375	0.008889	0.021637	0.003115
13	25	6	22.0	0.909091	0.114228	0.003175	0.019795	0.002242
14	17	17	8.5	0.941176	0.103843	--	0.019310	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.5. Tablica bezczynności dla bezrobotnych z wykształceniem średnim

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	384	17	375.5	0.973369	1.000000	0.000900	0.000000	0.000284
2	357	0	357.0	0.854342	0.973369	0.005237	0.008309	0.000724
3	305	0	305.0	0.859016	0.831590	0.005056	0.019510	0.000769
4	262	1	261.5	0.858509	0.714349	0.005075	0.023568	0.000832
5	224	0	224.0	0.883929	0.613275	0.004107	0.025425	0.000804
6	198	2	197.0	0.908629	0.542091	0.003191	0.026026	0.000751
7	178	23	166.5	0.831832	0.492560	0.006120	0.026136	0.001152
8	127	0	127.0	0.818898	0.409727	0.006638	0.026009	0.001377
9	104	0	104.0	0.807692	0.335525	0.007092	0.025489	0.001577
10	84	1	83.5	0.808383	0.271001	0.007064	0.024330	0.001756
11	67	4	65.0	0.846154	0.219072	0.005556	0.022871	0.001751
12	53	6	50.0	0.800000	0.185369	0.007407	0.021694	0.002328
13	37	10	32.0	0.875000	0.148295	0.004444	0.020277	0.002217
14	23	23	11.5	0.956522	0.129758	--	0.019747	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.6. Tablica bezczynności dla bezrobotnych z wykształceniem wyższym

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	87	2	86.0	0.906977	1.000000	0.003252	0.000000	0.001148
2	77	0	77.0	0.779221	0.906977	0.008273	0.031322	0.001991
3	60	0	60.0	0.800000	0.706735	0.007407	0.049331	0.002125
4	48	0	48.0	0.875000	0.565388	0.004444	0.053753	0.001810
5	42	1	41.5	0.710843	0.494715	0.011268	0.054227	0.003206
6	29	1	28.5	0.824561	0.351665	0.006410	0.051943	0.002853
7	23	2	22.0	0.681818	0.289969	0.012613	0.049620	0.004681
8	14	0	14.0	0.714286	0.197706	0.011111	0.044427	0.005478
9	10	0	10.0	0.900000	0.141219	0.003509	0.039709	0.003504
10	9	0	9.0	0.444444	0.127097	0.025641	0.038167	0.010585
11	4	1	3.5	0.857143	0.056487	0.005128	0.027035	0.007231
12	3	1	2.5	0.600000	0.048418	0.016667	0.025468	0.016137
13	1	1	0.5	0.000000	0.029051	--	0.021414	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.7. Tablica bezczynności dla bezrobotnych nie znających żadnych języków obcych

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	980	68	946.0	0.964059	1.000000	0.001220	0.000000	0.000209
2	878	1	877.5	0.822222	0.964059	0.006504	0.006052	0.000518
3	721	0	721.0	0.868239	0.792671	0.004702	0.013401	0.000481
4	626	2	625.0	0.865600	0.688227	0.004803	0.015332	0.000523
5	540	2	539.0	0.831169	0.595730	0.006147	0.016257	0.000642
6	447	3	445.5	0.934905	0.495152	0.002243	0.016583	0.000416
7	415	51	389.5	0.833119	0.462920	0.006069	0.016548	0.000750
8	299	0	299.0	0.812709	0.385667	0.006888	0.016327	0.000916
9	243	1	242.5	0.818557	0.313435	0.006652	0.015868	0.000998
10	198	4	196.0	0.801020	0.256565	0.007365	0.015129	0.001172
11	155	8	151.0	0.807947	0.205514	0.007082	0.014156	0.001308
12	118	9	113.5	0.788546	0.166044	0.007882	0.013199	0.001598
13	85	22	74.0	0.891892	0.130933	0.003810	0.012199	0.001345
14	55	55	27.5	0.981818	0.116778	--	0.011863	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.8. Tablica bezczynności dla bezrobotnych znających język obcy

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	139	2	138.0	0.942029	1.000000	0.001990	0.000000	0.000703
2	129	0	129.0	0.798450	0.942029	0.007471	0.019893	0.001456
3	103	0	103.0	0.844660	0.752163	0.005614	0.036869	0.001399
4	87	0	87.0	0.839080	0.635322	0.005833	0.041116	0.001553
5	73	0	73.0	0.876712	0.533086	0.004380	0.042622	0.001457
6	64	0	64.0	0.812500	0.467363	0.006897	0.042628	0.001980
7	52	5	49.5	0.818182	0.379733	0.006667	0.041467	0.002211
8	38	0	38.0	0.815789	0.310690	0.006763	0.039805	0.002543
9	31	0	31.0	0.806452	0.253458	0.007143	0.037897	0.002899
10	25	0	25.0	0.760000	0.204402	0.009091	0.035461	0.003677
11	19	1	18.5	0.945946	0.155345	0.001852	0.032112	0.001851
12	17	2	16.0	0.812500	0.146948	0.006897	0.031455	0.003960
13	12	3	10.5	0.904762	0.119395	0.003333	0.029305	0.003329
14	8	8	4.0	0.875000	0.108024	--	0.028635	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.9. Tablica bezczynności dla bezrobotnych nie mających żadnych osób na utrzymaniu

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	963	52	937.0	0.957311	1.000000	0.001454	0.000000	0.000230
2	871	0	871.0	0.800230	0.957311	0.007398	0.006604	0.000557
3	697	0	697.0	0.853659	0.766068	0.005263	0.014005	0.000520
4	595	1	594.5	0.846930	0.653961	0.005525	0.015752	0.000577
5	503	2	502.0	0.812749	0.553859	0.006886	0.016469	0.000706
6	407	3	405.5	0.906289	0.450148	0.003277	0.016497	0.000531
7	366	45	343.5	0.839884	0.407964	0.005802	0.016309	0.000779
8	266	0	266.0	0.830827	0.342643	0.006160	0.015899	0.000914
9	221	1	220.5	0.800454	0.284677	0.007389	0.015379	0.001107
10	176	3	174.5	0.816619	0.227870	0.006730	0.014500	0.001184
11	141	9	136.5	0.875458	0.186083	0.004427	0.013593	0.001071
12	115	9	110.5	0.782805	0.162908	0.008122	0.013010	0.001646
13	82	19	72.5	0.903448	0.127525	0.003382	0.012023	0.001276
14	56	56	28.0	0.982143	0.115213	--	0.011729	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.10. Tablica bezczynności dla bezrobotnych utrzymujących inne osoby

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	156	18	147.0	0.986395	1.000000	0.000457	0.000000	0.000323
2	136	1	135.5	0.940959	0.986395	0.002028	0.009555	0.000717
3	127	0	127.0	0.929134	0.928157	0.002449	0.021903	0.000816
4	118	1	117.5	0.940426	0.862382	0.002047	0.029339	0.000773
5	110	0	110.0	0.945455	0.811006	0.001869	0.033405	0.000763
6	104	0	104.0	0.971154	0.766770	0.000976	0.036136	0.000563
7	101	11	95.5	0.801047	0.744651	0.007364	0.037282	0.001679
8	71	0	71.0	0.746479	0.596501	0.009677	0.042629	0.002257
9	53	0	53.0	0.886792	0.445275	0.004000	0.044284	0.001630
10	47	1	46.5	0.720430	0.394867	0.010833	0.043792	0.002965
11	33	0	33.0	0.606061	0.284474	0.016352	0.040874	0.004397
12	20	2	19.0	0.842105	0.172408	0.005714	0.034629	0.003287
13	15	6	12.0	0.833333	0.145186	0.006061	0.032533	0.004268
14	7	7	3.5	0.857143	0.120988	--	0.031288	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.11. Tablica bezczynności dla bezrobotnych nie będących absolwentami

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	900	68	866.0	0.974596	1.000000	0.000858	0.000000	0.000183
2	810	1	809.5	0.849290	0.974596	0.005433	0.005347	0.000490
3	687	0	687.0	0.895196	0.827714	0.003687	0.013069	0.000434
4	615	2	614.0	0.879479	0.740967	0.004275	0.015180	0.000496
5	539	2	538.0	0.843866	0.651665	0.005645	0.016523	0.000614
6	453	3	451.5	0.924695	0.549918	0.002608	0.017275	0.000447
7	416	55	388.5	0.837838	0.508506	0.005882	0.017373	0.000738
8	298	0	298.0	0.798658	0.426046	0.007463	0.017387	0.000957
9	238	1	237.5	0.827368	0.340265	0.006298	0.017052	0.000979
10	196	3	194.5	0.809769	0.281524	0.007008	0.016391	0.001146
11	156	6	153.0	0.830065	0.227970	0.006190	0.015458	0.001209
12	124	9	119.5	0.832636	0.189230	0.006088	0.014579	0.001356
13	95	25	82.5	0.890909	0.157559	0.003846	0.013752	0.001280
14	61	61	30.5	0.983607	0.140371	--	0.013392	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.12. Tablica bezczynności dla bezrobotnych absolwentów

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	219	2	218.0	0.908257	1.000000	0.003205	0.000000	0.000716
2	197	0	197.0	0.695431	0.908257	0.011976	0.019551	0.001521
3	137	0	137.0	0.715328	0.631630	0.011064	0.032738	0.001747
4	98	0	98.0	0.755102	0.451823	0.009302	0.033785	0.001880
5	74	0	74.0	0.783784	0.341173	0.008081	0.032187	0.002005
6	58	0	58.0	0.879310	0.267406	0.004281	0.030050	0.001615
7	51	1	50.5	0.782178	0.235132	0.008148	0.028793	0.002438
8	39	0	39.0	0.923077	0.183916	0.002667	0.026339	0.001538
9	36	0	36.0	0.750000	0.169768	0.009524	0.025548	0.003142
10	27	1	26.5	0.698113	0.127326	0.011852	0.022743	0.004124
11	18	3	16.5	0.757576	0.088888	0.009195	0.019520	0.004554
12	11	2	10.0	0.300000	0.067339	0.035897	0.017511	0.011433
13	2	0	2.0	0.750000	0.020202	0.009524	0.011083	0.013331
14	2	2	1.0	0.500000	0.015151	--	0.010361	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.13. Tablica bezczynności dla bezrobotnych mieszkających na wsi

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	184	15	176.5	0.960340	1.000000	0.001349	0.000000	0.000510
2	162	0	162.0	0.839506	0.960340	0.005817	0.014690	0.001136
3	136	0	136.0	0.823529	0.806211	0.006452	0.030317	0.001311
4	112	1	111.5	0.829596	0.663939	0.006209	0.036303	0.001418
5	92	0	92.0	0.836957	0.550801	0.005917	0.038287	0.001522
6	77	1	76.5	0.895425	0.460997	0.003678	0.038430	0.001298
7	68	12	62.0	0.838710	0.412788	0.005848	0.038003	0.001842
8	46	0	46.0	0.804348	0.346209	0.007229	0.037252	0.002395
9	37	0	37.0	0.837838	0.278473	0.005882	0.036165	0.002392
10	31	0	31.0	0.677419	0.233315	0.012821	0.034682	0.003979
11	21	2	20.0	0.650000	0.158052	0.014141	0.030589	0.005223
12	12	1	11.8	0.391304	0.102734	0.029167	0.026067	0.009913
13	4	0	4.0	0.500000	0.040200	0.022222	0.017962	0.014815
14	2	2	1.0	0.500000	0.020100	--	0.013478	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.14. Tablica bezczynności dla bezrobotnych mieszkających w mieście

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	935	55	907.5	0.961433	1.000000	0.001311	0.000000	0.000222
2	845	1	844.5	0.815275	0.961433	0.006784	0.006392	0.000540
3	688	0	688.0	0.873547	0.783832	0.004500	0.013856	0.000481
4	601	1	600.5	0.868443	0.684714	0.004694	0.015657	0.000527
5	521	2	520.0	0.836538	0.594635	0.005934	0.016556	0.000641
6	434	2	433.0	0.923788	0.497435	0.002641	0.016876	0.000459
7	399	44	377.0	0.830239	0.459524	0.006184	0.016831	0.000770
8	291	0	291.0	0.814433	0.381515	0.006818	0.016559	0.000923
9	237	1	236.5	0.813953	0.310718	0.006838	0.016046	0.001025
10	192	4	190.0	0.815789	0.252910	0.006763	0.015245	0.001137
11	153	7	149.5	0.846154	0.206321	0.005556	0.014327	0.001154
12	123	10	118.0	0.830508	0.174580	0.006173	0.013566	0.001374
13	93	25	80.5	0.913043	0.144990	0.003030	0.012778	0.001144
14	61	61	30.5	0.983607	0.132382	--	.012524	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.15. Tablica bezczynności dla bezrobotnych pobierających zasiłek

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	300	0	300.0	0.936667	1.000000	0.002180	0.000000	0.000500
2	281	0	281.0	0.935943	0.936667	0.002206	0.014062	0.000520
3	263	0	263.0	0.885932	0.876667	0.004032	0.018984	0.000735
4	233	0	233.0	0.931330	0.776667	0.002370	0.024045	0.000592
5	217	0	217.0	0.949309	0.723333	0.001734	0.025828	0.000523
6	206	0	206.0	0.951456	0.686667	0.001658	0.026780	0.000524
7	196	41	175.5	0.846154	0.653333	0.005556	0.027477	0.001065
8	128	0	128.0	0.789063	0.552821	0.007860	0.029277	0.001502
9	101	0	101.0	0.851485	0.436210	0.005348	0.030513	0.001376
10	86	1	85.5	0.847953	0.371426	0.005485	0.030221	0.001516
11	72	3	70.5	0.886525	0.314952	0.004010	0.029406	0.001415
12	61	5	58.5	0.846154	0.279213	0.005556	0.028656	0.001845
13	47	3	45.5	0.890110	0.236257	0.003876	0.027593	0.001730
14	39	39	19.5	0.974359	0.210295	--	0.026893	--

Źródło: obliczenia własne

Tabela A.16. Tablica bezczynności dla bezrobotnych bez prawa do zasiłku

Czas pozostawania bez pracy (w miesiącach)	Liczebność kohorty	Liczba obserwacji uciętych	Liczba osób mających szansę na znalezienie pracy	Prawdopodobieństwo pozostania bezrobotnym	Funkcja bezczynności	Funkcja intensywności	Błąd standardowy funkcji bezczynności	Błąd standardowy funkcji intensywności
t_i	n_i	u_i	b_i	$\hat{q}_i$	$\hat{S}(t_i)$	$\hat{\lambda}(t_i)$	$\sqrt{Var(\hat{S}(t_i))}$	$\sqrt{Var(\hat{\lambda}(t_i))}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	819	70	784.0	0.970663	1.000000	0.000992	0.000000	0.000207
2	726	1	725.5	0.773949	0.970663	0.008495	0.006027	0.000658
3	561	0	561.0	0.855615	0.751244	0.005187	0.015779	0.000575
4	480	2	479.0	0.828810	0.642775	0.006240	0.017508	0.000686
5	396	2	395.0	0.774684	0.532739	0.008464	0.018247	0.000890
6	305	3	303.5	0.897858	0.412704	0.003588	0.018034	0.000643
7	271	15	263.5	0.821632	0.370550	0.006528	0.017710	0.000948
8	209	0	209.0	0.827751	0.304455	0.006283	0.016974	0.001042
9	173	1	172.5	0.797101	0.252013	0.007527	0.016144	0.001264
10	137	3	135.5	0.763838	0.200880	0.008926	0.015005	0.001564
11	102	6	99.0	0.777778	0.153440	0.008333	0.013605	0.001763
12	74	6	71.0	0.746479	0.119342	0.009677	0.012372	0.002257
13	50	22	39.0	0.897436	0.089086	0.003604	0.011102	0.001799
14	24	24	12.0	0.958333	0.079949	--	0.010863	--

Źródło: obliczenia własne

ZAŁĄCZNIK B

Skuteczność reguł postępowania

Załącznik B zawiera wszystkie przeprowadzone w pracy symulacje skuteczności reguł postępowania podczas poszukiwania pracy dla modelu z ograniczoną liczbą ofert pracy.

Tabela B.1 Skuteczność *reguły 1* oraz *reguły 2* dla poszukującego z kapitałem początkowym 5000 zł.

Ranga oferty	*Reguła 1*		*Reguła 2*			
	bez ograniczeń		$d_{min} = 1000$ zł.		$d_{min} = 1200$ zł.	
	skuteczność	skuteczność skumulowana	skuteczność	skuteczność skumulowana	skuteczność	skuteczność skumulowana
1	0.5556	0.5556	0.5612	0.5612	0.5701	0.5701
2	0.2201	0.7757	0.2212	0.7824	0.2093	0.7794
3	0.0847	0.8604	0.0833	0.8657	0.0668	0.8462
4	0.0346	0.895	0.0313	0.8970	0.0194	0.8656
5	0.0183	0.9133	0.0139	0.9109	0.0067	0.8723
6	0.0143	0.9276	0.0083	0.9192	0.0058	0.8781
7	0.0087	0.9363	0.0049	0.9241	0.0037	0.8818
8	0.0076	0.9439	0.0027	0.9268	0.0041	0.8859
9	0.0043	0.9482	0.0018	0.9286	0.0032	0.8891
10	0.0047	0.9529	0.0017	0.9303	0.0029	0.892
11	0.0043	0.9572	0.0030	0.9333	0.0040	0.8960
12	0.0029	0.9601	0.0026	0.9359	0.0036	0.8996
13	0.0031	0.9632	0.0026	0.9385	0.0036	0.9032
14	0.0024	0.9656	0.0029	0.9414	0.0040	0.9072
15	0.0032	0.9688	0.0037	0.9451	0.0050	0.9122
16	0.0025	0.9713	0.0033	0.9484	0.0048	0.9170
17	0.0019	0.9732	0.0025	0.9509	0.0039	0.9209
18	0.0017	0.9749	0.0024	0.9533	0.0037	0.9246
19	0.0009	0.9758	0.0021	0.9554	0.0040	0.9286
20	0.0019	0.9777	0.0029	0.9583	0.005	0.9336
21	0.0017	0.9794	0.0030	0.9613	0.0042	0.9378
22	0.0010	0.9804	0.0024	0.9637	0.0039	0.9417
23	0.0014	0.9818	0.0023	0.9660	0.0041	0.9458
24	0.0010	0.9828	0.0021	0.9681	0.0042	0.9500
25	0.0014	0.9842	0.0029	0.9710	0.0044	0.9544
26	0.0016	0.9858	0.0027	0.9737	0.0037	0.9581
27	0.0016	0.9874	0.0033	0.9770	0.0048	0.9629
28	0.0020	0.9894	0.0030	0.9800	0.0049	0.9678
29	0.0016	0.9910	0.0028	0.9828	0.0042	0.9720
30	0.0011	0.9921	0.0030	0.9858	0.0044	0.9764
31	0.0004	0.9925	0.0012	0.9870	0.0031	0.9795
32	0.0010	0.9935	0.0018	0.9888	0.0034	0.9829
33	0.0012	0.9947	0.0026	0.9914	0.0036	0.9865
34	0.0009	0.9956	0.0016	0.9930	0.0027	0.9892
35	0.0015	0.9971	0.0024	0.9954	0.0034	0.9926
36	0.0016	0.9987	0.0023	0.9977	0.0036	0.9962
37	0.0013	1	0.0023	1	0.0038	1

Źródło: obliczenia własne

Tabela B.2 Skuteczność *reguły 1* oraz *reguły 2* dla poszukującego z kapitałem początkowym 4000 zł.

Ranga oferty	*Reguła 1*		*Reguła 2*			
	bez ograniczeń		$d_{min} = 1000$ zł.		$d_{min} = 1200$ zł.	
	skuteczność	skuteczność skumulowana	skuteczność	skuteczność skumulowana	skuteczność	skuteczność skumulowana
1	0.5474	0.5474	0.5558	0.5558	0.5612	0.5612
2	0.2260	0.7734	0.2245	0.7803	0.2035	0.7647
3	0.0868	0.8602	0.0799	0.8602	0.0593	0.8240
4	0.0368	0.8970	0.0289	0.8891	0.0166	0.8406
5	0.0176	0.9146	0.0116	0.9007	0.0080	0.8486
6	0.0115	0.9261	0.0061	0.9068	0.0069	0.8555
7	0.0108	0.9369	0.0052	0.9120	0.0061	0.8616
8	0.0063	0.9432	0.0029	0.9149	0.0050	0.8666
9	0.0068	0.9500	0.0048	0.9197	0.0062	0.8728
10	0.0053	0.9553	0.0048	0.9245	0.0075	0.8803
11	0.0038	0.9591	0.0048	0.9293	0.0066	0.8869
12	0.0031	0.9622	0.0041	0.9334	0.0065	0.8934
13	0.0034	0.9656	0.0043	0.9377	0.0067	0.9001
14	0.0023	0.9679	0.0037	0.9414	0.0067	0.9068
15	0.0019	0.9698	0.0041	0.9455	0.0064	0.9132
16	0.0027	0.9725	0.0049	0.9504	0.0073	0.9205
17	0.0019	0.9744	0.0035	0.9539	0.0056	0.9261
18	0.0028	0.9772	0.0043	0.9582	0.0061	0.9322
19	0.0014	0.9786	0.0033	0.9615	0.0055	0.9377
20	0.0021	0.9807	0.0040	0.9655	0.0070	0.9447
21	0.0029	0.9836	0.0044	0.9699	0.0073	0.9520
22	0.0025	0.9861	0.0051	0.9750	0.0072	0.9592
23	0.0021	0.9882	0.0037	0.9787	0.0059	0.9651
24	0.0018	0.9900	0.0037	0.9824	0.0061	0.9712
25	0.0029	0.9929	0.0040	0.9864	0.0064	0.9776
26	0.0020	0.9949	0.0040	0.9904	0.0060	0.9836
27	0.0015	0.9964	0.0039	0.9943	0.0064	0.9900
28	0.0020	0.9984	0.0033	0.9976	0.0056	0.9956
29	0.0016	1	0.0024	1	0.0044	1

Źródło: obliczenia własne

Tabela B.3 Skuteczność *reguły 1* oraz *reguły 2* dla poszukującego z kapitałem początkowym 3000 zł.

Ranga oferty	*Reguła 1*		*Reguła 2*			
	bez ograniczeń		$d_{\min} = 1000$ zł.		$d_{\min} = 1200$ zł.	
	skuteczność	skuteczność skumulowana	skuteczność	skuteczność skumulowana	skuteczność	skuteczność skumulowana
1	0.5577	0.5577	0.5676	0.5676	0.5598	0.5598
2	0.2265	0.7842	0.2197	0.7873	0.1838	0.7436
3	0.0848	0.8690	0.0714	0.8587	0.0524	0.7960
4	0.0346	0.9036	0.0223	0.8810	0.0185	0.8145
5	0.0194	0.9230	0.0107	0.8917	0.0125	0.8270
6	0.0105	0.9335	0.0066	0.8983	0.0098	0.8368
7	0.0101	0.9436	0.0064	0.9047	0.0091	0.8459
8	0.0064	0.9500	0.0066	0.9113	0.0100	0.8559
9	0.0063	0.9563	0.0076	0.9189	0.0116	0.8675
10	0.0043	0.9606	0.0061	0.9250	0.0110	0.8785
11	0.0031	0.9637	0.0049	0.9299	0.0091	0.8876
12	0.0037	0.9674	0.0062	0.9361	0.0103	0.8979
13	0.0025	0.9699	0.0063	0.9424	0.0103	0.9082
14	0.0025	0.9724	0.0051	0.9475	0.0085	0.9167
15	0.0031	0.9755	0.0067	0.9542	0.0100	0.9267
16	0.0052	0.9807	0.0079	0.9621	0.0124	0.9391
17	0.0041	0.9848	0.0080	0.9701	0.0116	0.9507
18	0.0028	0.9876	0.0062	0.9763	0.0111	0.9618
19	0.0031	0.9907	0.0057	0.9820	0.0086	0.9704
20	0.0034	0.9941	0.0052	0.9872	0.0088	0.9792
21	0.0030	0.9971	0.0062	0.9934	0.0101	0.9893
22	0.0029	1	0.0066	1	0.0107	1

Źródło: obliczenia własne

Literatura

[1] Andersen P. K., Borgan O., Gill R. D., Keiding N., *Statistical models Based on Counting Processes.* Springer-Verlag, 1993.

[2] Balicki A., Zastosowanie metod analizy kohortowej do badania czasu pozostawania bez pracy. *Wiadomości statystyczne,* 7, VII'1997, str. 53-62.

[3] Bolesławski L., *Budowa tablic trwania życia, teoria i praktyka.* GUS Warszawa 1973.

[4] Burr I. W., Cumulative Frequency Functions. *Annals of Mathematical statistics,* 13, 1942, str. 215-232.

[5] Chapt T. Le., *Applied Survival Analysis.* John Wiley & Sons, Inc. 1997.

[6] Collett D., *Modelling Binary Data.* Champan & Hall, London 1991.

[7] Cox, D. R., Regression Models and Life-Tables. *Journal of the Royal Statistical Society*, 34, 1972, str. 187-220.

[8] Cox, D. R., Some Applications of Exponential Ordered Scores. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 26, 1964, str. 103-110.

[9] Cox, D. R., The Analysis of Exponentially Distributed Life-Times With Two Types of Failure. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 21, 1959, str. 411-421.

[10] DeGroot M. H., *Optymalne decyzje statystyczne.* Warszawa, PWN, 1981.

[11] DeGroot M. H., *Some Problems of Optimal Stopping.* Royal Statistical Society Bulletin 30, 1968, str. 108-122.

[12] Dębicka J., Jasiulewicz H., Mazurek E., Ostasiewicz S., Ostasiewicz W., *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych.* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 1999.

[13] Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna.* Warszawa, PWN, 1969.

[14] Fleming T. R., Harrington D. P., *Counting Processes and Survival Analysis.* John Wiley & Sons, Inc. 1991.

[15] Flin C., Heckman J. New Methods for analyzing Structural Models of Labor Force Dynamics. *Journal of Econometrics,* 18, 1982, str. 115-168.

[16] Frątczak E., *Analiza historii zdarzeń. Elementy teorii, wybrane przykłady zastosowań z wykorzystaniem pakietu TDA*. Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 1997.

[17] Frątczak E., *Zastosowania Analizy historii zdarzeń w demografii*. Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 1996.

[18] Frątczak E., *Modelowanie cyklu życia jednostki i rodziny teoria i praktyka*. Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 1999.

[19] Haus B., Gabletra M., Hasińska Z., Budka J., Wańężak L., Bodak A. Niebieszczańska-Zych M., *Społeczne skutki bezrobocia i sposoby przeciwdziałania im w świetle opinii bezrobotnych w województwie wrocławskim* (raport z badań prowadzonych w Katedrze Ekonomiki i Organizacji Przedsiębiorstwa). Wrocław luty 1992.

[20] Hosmer D. W., Lemeshow S., *Applied Survival Analysis, Regression Modelind of Time to event Data.* John Wiley & Sons, Inc. 1999.

[21] Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N., *Continuous Univariate Distribution, Volume 1.* JOHN WILEY & SONS, INC. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994.

[22] Kiefer N. M., Economic Duration Data and Hazard Function. *Journal of Economic Literature*, XXVI, 1988, str. 646-679.

[23] Kleinbaum D. G., *Survival Analysis.* Springer-Verlang, New York 1996.

[24] Kot S. M., *Analiza ekonometryczna kształtowania się płac w Polsce w okresie transformacji*. Warszawa-Kraków, Wydawnictwo Naukowe PWN S.A, 1999.

[25] Kruszewski R., Rola polityki monetarnej w modelu inflacji i bezrobocia. Nieliniowa dynamika w ekonomii. *Kolegium Analiz Ekonometrycznych,* 6/1998, str. 27-32.

[26] Kryńska E., Suchecka J., Suchecji B., *Prognoza podaży i popytu na pracę w Polsce do roku 2010.* Instytutu Pracy i Spraw Socjalnych, Warszawa 1998.

[27] Lippman S. A., McCall J. J., Job Search in a Dynamic Economy. *Journal of Economic Theory,* 12, 1976, str. 365-390.

[28] Lippman S. A., McCall J. J., *Studies in the economics of search.* North-Holland Publishing Company, 1979.

[29] Lippman S. A., McCall J. J., The Economics of Job Search: A Survey, Part I: Optimal Job Search Policies. *Economics Inquiry,* Vol. XIV, June 1976, str. 155-189.

[30] Lippman S. A., McCall J. J., The Economics of Job Search: A Survey, Part II: Empirical and Policy Implications of Job Search. *Economics Inquiry,* Vol. XIV, September 1976, str. 347-368.

[31] Makać W., *Podstawowe metody statystyczne w analizie rynku pracy*. Krajowy Urząd Pracy, Warszawa 1996.

[32] Manek A. M., *Wartościowanie własnej sytuacji życiowej przez bezrobotnych.* Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 1998.

[33] Mariański J., *Etos pracy bezrobotnych (raport z badań empirycznych).* Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 1994.

[34] Mazurek E., *Analiza czasu trwania bezrobocia,* XVII Seminarium Ekonometryczne im. Profesora Zbigniewa Pawłowskiego, materiały z XXXV Konferencji Statystyków, Ekonometryków i Matematyków Akademii Ekonomicznych Polski Południowej, Osieczany 23-25 III 1999, przyjęto do druku.

[35] Mazurek E., Modelling and Analysing the Probability of Re-employment. *The Application of Statistical and Econometric Methods for Modelling of Economic Processes*. Vysoka skola ekonomicka v Praze, Cislo 4, Rocnik 7, 1999, str. 125-139.

[36] McCall J. J., Economics of Information and Job Search. *Quarterly Journal of Economics, February* 1970, str. 113-126.

[37] McCullagh P., Nelder J. A., *Ganeralized linear Models.* Champan & Hall, Londyn 1989.

[38] Mortensen D. T., Job Search, the Duration of Unemployment, and the Philips Curve. *The American Economic Reviev*, LX, Dec. 1970, str. 847-864.

[39] Namboodiri K., Suchindran C. M., *Life Table Techniques and Their Applications.* Academic Press, INC, 1987.

[40] Ostasiewicz W. (redaktor), *Statystyczne metody analizy danych*, wyd. II rozszerzone. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 1999.

[41] Ostasiewicz W., *Propedeutyka probabilistyki.* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2000.

[42] Peto R., Peto J., Asymtotically Efficient Rank Invariant Test Procedures. *Journal of the Royal Statistical Society A*, 135, 1972, str. 185-207.

[43] *Polski rynek pracy w latach 1990-1996. Wybrane zagadnienia*. Instytut Spraw Publicznych, Warszawa 1997.

[44] *Rocznik statystyczny 1998.* Zakład Wydawnictw Statystycznych, GUS Warszawa 1999, CD-ROM.

[45] Santner T. J., Duffy D. E., *The Statistical Analysis of Discrete Data.* Springer 1986.

[46] Stanisz A., *Przystepny kurs statystyki z wykorzystaniem programu STATISTICA PL na przykładach z medycyny. Tom II.* StatSoft Polska Sp. zo.o. Kraków 2000.

[47] STATISTICA PL. Dla Windows (Tom III): STATYSTYKI II. StatSoft Sp. zo.o. Kraków 1997.

[48] Szapiro T., Ruzik A., O przepływach na rynku pracy przy bezrobociu strukturalnym, *Rocznik Kolegium Analiz Ekonomicznych.* Szkoła Główna Handlowa, Zeszyt 5/1997, str.137-156.

[49] *Ustawa o zatrudnieniu i przeciwdziałaniu bezrobociu z dn. 12.12.1994 r.* Dziennik Ustaw Nr 1, poz. 1 z 1995 r.

[50] *Zatrudnienie w gospodarce narodowej według wysokości wynagrodzenia za wrzesień 1997.* Informacje i Opracowania Statystyczne. GUS Warszawa 1998.