

DARIUSZ ŁYDŹBA

**ZASTOSOWANIA METODY
ASYMPTOTYCZNEJ HOMOGENIZACJI
W MECHANICE GRUNTÓW I SKAŁ**

Wrocław 2002

Dariusz Łydźba

Applications of asymptotic homogenisation method in soil and rock mechanics

Contents

1. Introduction.....	4
2. Homogenisation method – principles and techniques.....	16
3. Biot’s theory of poroelasticity. Influence of medium microstructure on values of material constants.....	94
4. Plastic deformation of porous media saturated with fluid: theory of poroplasticity	138
5. Sorption and sorption swelling in saturated porous media.....	179
6. Homogenisation method in engineering practice.....	204
7. Final comments.....	258
Appendix.....	261
References.....	265

Prace Naukowe Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej	74
<hr/>	
Seria: Monografie	23

Dariusz Łydźba

Zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji
w mechanice gruntów i skał



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 2002

Recenzenci:

Opracowanie redakcyjne
Alicja KORDAS

Korekta
Maria IZBICKA

Projekt okładki
Krzysztof DAWIDOWICZ

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2002

ISSN

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Ark. wyd. 20,25. Ark. druk. 17 ¹/₈. Papier offset kl. III, 80 g, B1.
Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr /2002.

Mechanika skal i gruntów, mechanika ośrodków wielofazowych, mikromechanika, reprezentatywna elementarna objętość, proces uśredniania, proces lokalizacji, metoda homogenizacji, równania konstytutywne, parametry efektywne, konsolidacja, pęcznienie, sorpcja, filtracja, naprężenie efektywne

Dariusz ŁYDŹBA*

ZASTOSOWANIA METODY ASYMPTOTYCZNEJ HOMOGENIZACJI W MECHANICE GRUNTÓW I SKAŁ

Omówiono, zilustrowane konkretnymi przykładami, zastosowania metody asymptotycznej homogenizacji do modelowania procesów fizycznych zachodzących w ośrodkach gruntowych i skalnych. Metoda homogenizacji polega na przejściu z opisem matematycznym rozważanego procesu fizycznego ze skali niejednorodności (skala porów), gdzie rozważane pola fizyczne charakteryzują się dużymi nieciągłościami, do skali nas interesującej – makroskopowej. W wyniku tej procedury opis rozważanego zjawiska jest charakteryzowany uśrednionymi, lecz ciągłymi już, polami fizycznymi, a zatem może być zastosowany do konkretnych obliczeń inżynierskich. Metoda ta ponadto jednoznacznie definiuje parametry efektywne otrzymanego opisu matematycznego w funkcji lokalnych parametrów analizowanego procesu fizycznego oraz geometrii wewnętrznej ośrodka. Umożliwia to między innymi analizę wpływu struktury wewnętrznej ośrodka na wartości parametrów efektywnych otrzymanego makroskopowego opisu procesu.

Z wielu możliwych zastosowań metody homogenizacji związanych z mechaniką ośrodków gruntowych i skalnych omówiono niektóre, dotyczące modelowania i analizy procesów zachodzących w tych ośrodkach, przede wszystkim wtedy, gdy są one nasycone cieczą lub gazem, tzn.: procesów filtracji, konsolidacji, sorpcji oraz pęcznienia, podając oryginalne rozwiązania. Przedstawiono zwłaszcza wpływ mikrostruktury ośrodków porowatych na wartości stałych materiałowych teorii porospężystości Biota. Zweryfikowano tzw. koncepcję naprężenia efektywnego w zakresie zachowania niesprężystego nasyconego ośrodka porowatego, podając równocześnie metody przybliżone konstrukcji powierzchni plastyczności dla tych ośrodków. Sformułowano ogólną strukturę opisu matematycznego nasyconych ośrodków porowatych w przypadku deformacji plastycznych. Zaproponowano model matematyczny mechanicznego zachowania się ośrodków porowatych nasyconych płynem, w których proces pęcznienia ciała stałego jest wynikiem sorpcji. Pracę kończą przykłady zastosowania metody homogenizacji jako narzędzia obliczeniowego użytecznego w praktyce inżynierskiej.

* Instytut Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

1. Wprowadzenie

1.1. WSTĘP

Oczywiste jest stwierdzenie, że opis matematyczny procesów fizycznych zachodzących w rzeczywistym materiale zależy od skali obserwacji. I tak, jeśli próbka danego materiału w naturalnej skali obserwacji może być traktowana jako jednorodna, to mikroskopowo jest ona wyraźnie niejednorodna. Opis takiego materiału w naturalnej skali obserwacji w ramach mechaniki ośrodka ciągłego jest zatem pewną aproksymacją, jak również każde przeprowadzone w tej skali eksperymentalne badanie konstytutywnego zachowania się ośrodka w rzeczywistości jest związkiem między uśrednionymi polami fizycznymi mierzonymi w czasie eksperymentu.

W przypadku ośrodków gruntowych lub skalnych te dwie skale ujawniają się w naturalny sposób: na poziomie grupy ziaren czy spękań widoczna jest silna niejednorodność spowodowana geometrią wewnętrzną ośrodka (różne wymiary ziaren, ich kształt, układ spękań, powierzchnie rozdziału faz), podczas gdy w naturalnej skali obserwacji, w tym sensie, że statystycznie powtarzają się w przestrzeni, mogą być traktowane jako (prawie) jednorodne (100 g piasku zawiera około 10^7 ziaren, 100 g gliny – 10^{15} cząstek [69]).

W praktyce inżynierskiej własność makroskopowej jednorodności ośrodka jest podstawą wszystkich stosowanych, przynajmniej dotychczas, metod projektowania. Głównymi więc założeniami mechaniki gruntów i skał są według Kisiela [82]: *założenie o ciągłości ośrodka skalnego lub gruntowego (...), założenie o wieloskładnikowej budowie ośrodka ciągłego, co oznacza, że rozważany ośrodek składa się z dwu lub trzech wzajemnie się przenikających i znajdujących się w różnych stanach skupienia materiałów: stałego, ciekłego i gazowego. Wszystkie materiały jednocześnie wypełniają tę samą objętość.*

Informacje o dyskretnej strukturze ośrodków gruntowych i skalnych wykorzystywane są jedynie poprzez związki korelacyjne między np. krzywą uziarnienia, stopniem zagęszczenia a kątem tarcia wewnętrznego, między gęstością spękań skały a jej parametrami sprężystości oraz wytrzymałości. I mimo że coraz częściej, stosując np. wysoce specjalistyczne techniki adsorpcyjne [8], określa się wartość powierzchni wła-

ściwej, jak również rozkład oraz wielkość średnicy porów, nawet do wartości 30 Å, to wykorzystywanie ich w praktyce jest znikome, choć są to parametry strukturalne czasami determinujące własności mechaniczno-wytrzymałościowe, jak i filtracyjno-dyfuzyjne ośrodków skalnych i gruntowych.

W mechanice ośrodka porowatego stosowane są dwa odmienne podejścia modelowania matematycznego, tzw. makroskopowy i mikroskopowy. W pierwszym, nazywanym również fenomenologicznym, odległości rzędu średnicy porów są ignorowane, a uwzględnia się tylko odległości makroskopowe. Z założenia więc dyskretna struktura mikroniejednorodnego ośrodka jest zastępowana przez ekwiwalentny ośrodek ciągły reprezentowany, w przypadku ośrodków wielofazowych, przez „nakładające się kontinua” [157]. Współobecność faz modelowana jest w mechanicznym zachowaniu się ośrodka przez tzw. pola sprzężone, reprezentujące oddziaływanie jednej fazy na drugą. Równania konstytutywne są postulowane na podstawie odpowiednio sformułowanych potencjałów termodynamicznych i warunku dodatniego przyrostu entropii układu (drugie prawo termodynamiki).

W ramach tego sposobu modelowania zaproponowano wiele opisów matematycznych mechanicznego zachowania się ośrodków porowatych w pełni lub częściowo nasyconych płynem. Bogaty przegląd rezultatów otrzymanych do 1982 roku, zarówno w ramach teorii mieszanin, jak i teorii mieszanin ośrodków ze strukturą, omówiony jest w publikacji [26], w której przytoczono prawie 300 prac. W celu zilustrowania tendencji poszukiwania nowych opisów wymienimy niektóre, tj.: teorię ośrodków wielofazowych z porowatością jako dodatkową zmienną kinematyczną [41], teorię konsolidacji przy dużych odkształceniach ośrodka gruntowego zaproponowaną przez Szefera [153]. Duże odkształcenia uwzględnione zostały również w teorii przedstawionej przez Wilmańskiego [162], w której sformułowano dodatkowe równanie równowagi dla zmian porowatości ośrodka. Dodatkowy parametr charakteryzujący dyskretną strukturę ośrodka porowatego i nazwany przepuszczalnością strukturalną wprowadził również do opisu dynamicznego zachowania się nasyconego ośrodka porowatego Kubik [86], [87].

Coussy zaproponował, w ramach podejścia fenomenologicznego, jeszcze inny sposób modelowania [47]. Tym razem ośrodek porowaty potraktowany został jako termodynamiczny układ otwarty, w którym zmiennymi kinematycznymi, np. dla ośrodka w pełni nasyconego płynem, są tensor odkształcenia ośrodka oraz zmiana porowatości. Przedstawiono opis matematyczny zarówno dla ośrodka w pełni, jak

i częściowo nasyconego płynem, przy małych i dużych odkształceniach szkieletu, a także dla procesów odkształceń sprężystych oraz plastycznych. Znaczenie niektórych wyników zaproponowanych w tej pracy omówiono w następnych rozdziałach niniejszej monografii.

Należy wspomnieć o jeszcze jednym sposobie modelowania, tym razem już łączącym podejście fenomenologiczne z podejściem mikroskopowym, tzw. hybrydowej teorii mieszanin zaproponowanej przez Hassanizadeha i Graya [72]. Metoda ta, w największym skrócie, polega na objętościowym uśrednianiu równań zachowania zapisanych na poziomie niejednorodności, a następnie analizie tych uśrednionych równań, już na poziomie makroskopowym, na podstawie drugiej zasady termodynamiki. Podstawową zaletą tej metody jest możliwość uwzględnienia, w makroskopowym opisie matematycznym przepływów wielofazowych, własności termodynamicznych powierzchni rozdziału faz. Właśnie ta metoda zastosowana została przez Achantę, Cushmana i Okosa [4] oraz Achantę i Cushmana [5] do sformułowania opisu termomechanicznego pęczniejących układów koloidalnych, jak również do opisu procesu pęcznienia nasyconych gruntów ilowych (Murad, Bennethum i Cushmann [113]).

Jak już wcześniej wspomniano, drugim sposobem modelowania procesów zachodzących w makroskopowo jednorodnych ośrodkach porowatych jest podejście mikroskopowe. Tym razem punktem startowym modelowania jest opis matematyczny zapisany na poziomie niejednorodności, a zatem dyskretna struktura ośrodka porowatego jest w procesie modelowania matematycznego jawnie uwzględniana. Każdy osobny składnik mieszaniny, na poziomie mikro, jest traktowany jako ośrodek ciągły z jego własnym równaniem konstytutywnym, prawami zachowania oraz warunkami brzegowymi na granicy rozdziału faz. Taki sposób modelowania jest oczywiście możliwy tylko wtedy, gdy charakterystyczny wymiar poszczególnego składnika spełnia podstawową hipotezę mechaniki kontinuum, tzn. jest dużo większy niż odległości molekularne. Równania na poziomie mikroskopowym są następnie – mówiąc w dużym uproszczeniu – uśredniane w celu otrzymania równań makroskopowych. Efektem tej procedury, tzn. przejścia z opisem matematycznym ze skali porów (niejednorodności) do skali makro jest ekwiwalentny opis makroskopowy dla zastępczego „hipotetycznego jednorodnego ośrodka ciągłego”. Zależnie od użytej techniki „przejścia” z poziomu niejednorodności do poziomu makroskopowego wyróżnia się metody, np.: uśredniania przestrzennego (omówione przez Nigmatulina [115], Rutha i Huipinga [129], Slattey’ego [142]), uśredniania wagowego (np. Gilbert [65], Ene i Polisewski [59]), meto-

dy homogenizacji dla struktur periodycznych (np. Auriault [16], Bensoussan, Lions, Papanicolau [27], Sanchez-Palencia [137]), metody statystyczne (m.in. Emeriault et.al. [58], Kroner [85], Rubinstein i Torquato [128], Willis [160]) oraz tzw. ciągła mikro-mechanika (np. Hill [73], Hashin [71]). W niniejszym opracowaniu wszystkie te metody będziemy określać, podobnie jak między innymi Sanchez-Palencia [136], jednym mianem – metodami homogenizacji (są również przeciwne opinie, np. Hornunga [74]). Szczegółowe omówienie podstawowych własności, zasad jak również różnic między poszczególnymi metodami homogenizacji przedstawiono w następnym rozdziale.

Wśród całej grupy wyników otrzymanych metodą homogenizacji wymieńmy tylko kilka z nich, podobnie jak w przypadku omawiania modelowania fenomenologicznego, reprezentujących obecne kierunki badawcze, tj.: wpływ spękań na mechaniczne zachowanie się ośrodków sprężystych (np. Budiansky i O’Connell [42], Hashin [70], Kachanov [78], Ponte Castañeda i Willis [124]), efektywne własności mikroniejednorodnych ośrodków sprężystych i plastycznych (np. Lorenci [95], Mojia i Bufler [111], Ponte Castañeda [121], [122], Ponte Castañeda i Suquet [123], Pruchnicki i Shahrour [125], Sab [132], Suquet [150], [151], [152], Zaoui [165]), graniczna powierzchnia plastyczności ośrodków kompozytowych (np. Bouchitte [37], de Buhan i Taliere [50], de Buhan et. al. [51], Suquet [149]) oraz – w przypadku procesów przepływu cieczy – ściśle wyprowadzenie z równań przepływu dla nieściśliwej lepkiej cieczy Newtona prawa filtracji Darcy’ego (np. Keller [80], Sanchez-Palencia [136]) oraz nieliniowych praw filtracji (np. Mei i Auriault [108], Allaire [74]).

Wyników przedstawiających opisy makroskopowe uwzględniające sprzężenie mechaniczne między ciałem stałym a cieczą jest, niestety, niewiele. Wyjątkiem są prace, których autorami są Auriault [13], Auriault i Sanchez-Palencia [18], Auriault et.al. [19], jak również Rice i Cleary [126] oraz Thompson i Willis [156]; wyprowadzono w nich związki teorii porospężystości Biot’a. Modyfikację tej teorii dla ośrodków charakteryzujących się tzw. podwójną porowatością zaproponowali Auriault i Boutin [14], [15], a dla szczególnego przypadku ośrodka częściowo nasyconego cieczą, tj. przy braku kontaktu fazy gazowej z ciałem stałym – Auriault [21]. We wszystkich tych wyprowadzeniach ośrodek porowaty przyjmowany był więc zawsze jako sprężysty. Brak wyników oraz teorii uwzględniających plastyczne zachowanie się nasyconych ośrodków porowatych, jak i opisujących sprzężenie mechaniczne w ośrodkach porowatych częściowo nasyconych cieczą jest skutkiem trudności, jakie występują już

przy modelowaniu metodą homogenizacji, zarówno jednofazowego, ale wieloskładnikowego ciała stałego w zakresie deformacji plastycznych (konieczna znajomość rozkładu na poziomie niejednorodności naprężeń resztkowych [150]), jak i przepływów wielofazowych przez nieodkształcalny ośrodek porowaty (niestabilność powierzchni rozdziału faz, przepływy pulsujące [79]).

Podsumowując tę krótką prezentację metody homogenizacji, należy podkreślić jej podstawową właściwość – metoda ta buduje opis matematyczny rozważanego procesu przez „przeniesienie” do skali makroskopowej informacji dostępnej na poziomie niejednorodności. Jeśli zatem udaje się dokonać takiego przejścia, możemy być pewni, że opis makroskopowy przedstawia model matematyczny procesu fizycznego, dokładnie tego, który analizujemy. Jeśli znana jest geometria wewnętrzna ośrodka oraz parametry lokalne procesu, metoda umożliwia jednoznaczne określenie wartości parametrów efektywnych procesu, tj. parametrów opisu makroskopowego. Ma to szczególne znaczenie w analizie własności sprężystych oraz plastycznych, jak również w projektowaniu ośrodków kompozytowych. W przypadku ośrodków gruntowych lub skalnych geometria mikrostruktury nie jest, oczywiście, dokładnie znana. W tym przypadku metoda daje możliwość analizy wpływu poszczególnych elementów mikrostruktury (kształt porów, spękania, rozkład spękań, własności mechaniczne poszczególnych składników) na własności i zachowanie makroskopowe ośrodka.

Powyższa prezentacja sposobów modelowania procesów zachodzących w ośrodkach gruntowych i skalnych nie może być oczywiście traktowana, w żadnym sensie, jako przedstawiająca jedyne kierunki badawcze rozwijane w mechanice gruntów i skał. Ma raczej zwrócić uwagę na fakt, że coraz częściej w opisach matematycznych uwzględnia się lub próbuje się uwzględnić dyskretną strukturę omawianych ośrodków oraz ich wielofazowy charakter. Ogólne teorie, takie jak: reologia, teoria idealnej plastyczności, plastyczności ze wzmocnieniem–osłabieniem, teoria stanów granicznych, ciągła mechanika rozwoju uszkodzeń omawiane są już w wielu pozycjach książkowych i monografiach ([45], [76], [77], [82], [90], [91], [130], [148], [159]) i dlatego nie są tutaj szczegółowo przedstawiane.

W praktyce stosuje się modele najprostsze, a zarazem dające – z pewną dopuszczalną tolerancją oczywiście – poprawne wyniki (oszacowania). Stosowanie więc konkretnych modeli matematycznych ośrodków gruntowych czy skalnych zależy od rodzaju problemu, który chcemy rozwiązać. W przypadku np. prognozowania wielkości osiadania fundamentu przyjmowany jest najczęściej model liniowej sprężystości

ośrodka gruntowego [163], do określenia jego nośności lub stateczności nasypu korzysta się natomiast z rozwiązania opartego na modelu sztywno-plastycznym [76], [77]. Jeśli natomiast konstrukcja ma być posadowiona na podłożu gruntowym w pełni nasyconym cieczą, konieczne może być określenie prędkości osiadań, jak również prognozy wielkości osiadań w funkcji czasu. W tym przypadku klasyczny model liniowej sprężystości jest już niewystarczający i musi być użyty przynajmniej model porosprężystości Biot. Sytuacja jest podobna w przypadku stateczności nasyconego nasypu. Tutaj najczęściej korzysta się z tzw. koncepcji naprężenia efektywnego zaproponowanej przez Terzagiego [35], tzn. procedura jest podobna jak dla gruntu suchego¹, z tym że tensor naprężenia całkowitego zastąpiony jest przez tensor naprężenia efektywnego.

Wszystkie tego typu uproszczenia są oczywiście dozwolone, jeśli rzeczywiście z dopuszczalną tolerancją dają wyniki poprawne. Muszą być więc one weryfikowane według tzw. „testowych rozwiązań ścisłych” lub – w razie ich braku – na podstawie danych eksperymentalnych. Jest zatem uzasadnione doskonalenie zarówno metod opisu rzeczywistych właściwości mechanicznych ośrodków gruntowych i skalnych, jak i metod poszukiwania rozwiązań problemów praktycznych.

Powróćmy obecnie do wspomnianej powyżej koncepcji naprężenia efektywnego, tym razem już jako powszechnie stosowanego w praktyce, jak również przy tworzeniu nowych modeli matematycznych (np. Coussy [47], Pietruszczak i Pande [119], [120], Schrefler i Gawin [139]), narzędzia pozwalającego uwzględnić hydromechaniczne sprzężenie w układach: porowate ciało stałe–ciecz. Koncepcja ta zakłada możliwość zdefiniowania dla dowolnego ośrodka porowatego tzw. tensora efektywnego naprężenia, tj. takiego hipotetycznego tensora naprężenia, który spełnia następujące dwie zasady równoważności (np. Bishop i Blight [34], de Boer i Lade [36], Coussy [47]):

➤ *zasada równoważności odkształcenia*: jeśli w makroskopowym związku naprężenie–odkształcenia dla ośrodka suchego tensor naprężenia całkowitego zostanie zastąpiony przez tensor naprężenia efektywnego, to związek staje się zależnością dla ośrodka częściowo lub w pełni nasyconego płynem;

➤ *zasada równoważności naprężenia*: makroskopowy warunek wytrzymałościowy (funkcja plastyczności) dla ośrodka w pełni lub częściowo nasyconego płynem można otrzymać z makroskopowego warunku wytrzymałościowego dla ośrodka suchego, gdy tensor naprężenia całkowitego w związku dla ośrodka suchego zastąpiony zostanie przez tensor naprężenia efektywnego.

¹ Grunt bez cieczy będzie określany mianem grunt suchy, gdyż nienasycony grunt w literaturze przedmiotu (np. [11]) jest utożsamiany z gruntem częściowo nasyconym, tj. ośrodkiem trójfazowym: szkielet gruntowy–woda–powietrze.

Jak łatwo zauważyć z powyższego sformułowania, koncepcja naprężenia efektywnego *pozwała* w prosty sposób uwzględnić hydromechaniczne sprzężenie w ośrodkach porowatych przez stosowanie odpowiednich modeli matematycznych oraz metod obliczeń stosowanych dla „ośrodków suchych” i zastąpienie tensora naprężenia całkowitego przez tensor naprężenia efektywnego, jeśli koncepcja ta jest prawdziwa.

W przypadku ośrodków gruntowych w pełni nasyconych cieczą, niezależnie od tego, czy deformacja ośrodka jest sprężysta czy plastyczna, jako tensor naprężenia efektywnego przyjmuje się związek zaproponowany przez Terzagiego²

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^c + p\delta_{ij}, \quad (1.1)$$

gdzie:

σ'_{ij} – tensor efektywnego naprężenia,

σ_{ij}^c – tensor naprężenia całkowitego,

p – ciśnienie porowe cieczy,

δ_{ij} – delta Kroneckera.

W przypadku ośrodków skalnych stosuje się związek zaproponowany przez Biota

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^c + p\alpha_{ij}, \quad (1.2)$$

gdzie α_{ij} jest nazywany tensorem współczynników efektywnego naprężenia według Biota.

Należy jednak podkreślić, że stosowanie związku (1.2) jest umotywowane tylko w zakresie odkształceń sprężystych, gdyż jest on bezpośrednią konsekwencją teorii porospężystości Biota [31]–[33], a zatem spełnia tylko zasadę równoważności odkształcenia w zakresie deformacji sprężystych. Nie ma natomiast właściwie żadnych dowodów, że ten związek spełnia zasady: równoważności naprężenia oraz równoważności odkształcenia w zakresie deformacji niesprężystych. Większość autorów prac związanych z analizą powyższego związku oraz jego ważnością (m.in. Auriault i Sanchez-Palencia [18], de Boer i Lade [36], Oka [118]) ogranicza rozważania tylko do procesu odkształceń sprężystych.

W przypadku więc na przykład zasady równoważności naprężenia, dla ośrodków skalnych proponuje się również stosowanie naprężenia efektywnego według Terzagiego [82], bądź ostatnio – naprężenia zdefiniowanego podobnie jak (1.2), z tym że z nowym tensorem materiałowym uwzględniającym plastyczne własności ośrodka porowatego [47]

² Rozciąganie oznaczono jako dodatnie (przeciwnie do stosowanej konwencji w mechanice gruntów i skał).

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^c + pb_{ij}. \quad (1.3)$$

Innymi słowy – przyjmuje się, że naprężenie efektywne jest różne w zakresie odkształceń sprężystych oraz odkształceń plastycznych.

Podobnie jest (tzn. budzi wiele wątpliwości) z koncepcją naprężenia efektywnego dla ośrodków częściowo nasyconych cieczą. Najczęściej stosowanym związkiem dla ośrodków gruntowych jest propozycja Bishopa [34]

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^c + p_a \delta_{ij} - \chi(S_r)(p_a - p_w), \quad (1.4)$$

gdzie:

p_a i p_w – odpowiednio ciśnienie porowe powietrza i wody,

$\chi(S_r)$ – współczynnik funkcyjny zależny od stopnia wilgotności ośrodka gruntowego,

S_r – stopień wilgotności.

Bardzo często przyjmuje się również, że

$$\chi(S_r) = S_r \quad (1.5)$$

i rozszerza się na dowolne ośrodki porowate (również skały), w postaci połączenia definicji (1.2) z (1.4), nazywając uogólnionym tensorem efektywnego naprężenia (np. [139])

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^c + \alpha [(1 - S_r)p_a + S_r p_w]. \quad (1.6)$$

Są oczywiście jeszcze inne propozycje uwzględniania współobecności fazy gazowej i cieczy na postać warunku plastyczności ośrodka porowatego. Przyjmuje się na przykład, że powierzchnia plastyczności ośrodka częściowo nasyconego cieczą może być określona tą samą zależnością jak powierzchnia plastyczności dla ośrodka całkowicie nasyconego, z tym że z dodatkowym parametrem zwanym ssaniem macierzystym ($p_a - p_w$) będącym parametrem wzmocnienia izotropowego [9], [11]

$$f(\sigma_{ij}^c + p_a \delta_{ij}, p_a - p_w) \leq 0. \quad (1.7)$$

Jeśli powierzchnia plastyczności w warunku (1.7) jest reprezentowana przez warunek Coulomba–Mohra, to wzmocnienie izotropowe może być również zinterpretowane matematycznie jako wzmocnienie kinematyczne, a wobec tego, w takim przypadku związek (1.7) jest równoważny koncepcji naprężenia efektywnego w postaci

(1.4). Jeśli jednak warunek (1.7) wykorzystuje, coraz częściej stosowany (np. [9], [45], [82]), model zamkniętej powierzchni plastyczności, to sformułowania (1.4) i (1.7) nie są sobie równoważne.

Przedstawione różne sformułowania matematyczne tensora naprężenia efektywnego wskazują jednoznacznie, że pojęcie tensora naprężenia efektywnego musi być rozumiane tylko jako koncepcja, a nie prawo fizyczne. Należy podkreślić, że koncepcję naprężenia efektywnego Terzaghi zaproponował pierwotnie tylko dla ośrodków gruntowych w pełni nasyconych wodą. Obecnie, jak bezpośrednio wynika z powyższego przedstawienia, jest również stosowana zarówno dla ośrodków gruntowych częściowo nasyconych cieczą, jak i dla ośrodków skalnych w pełni i częściowo nasyconych cieczą, oczywiście z pewnymi modyfikacjami. Wykorzystywanie więc konkretnego sformułowania matematycznego naprężenia efektywnego, zarówno w projektowaniu, jak i modelowaniu matematycznym wymaga udowodnienia, że dany związek rzeczywiście spełnia omówione powyżej zasady równoważności naprężenia i odkształcenia.

Jak dotychczas takich jednoznacznych dowodów, zarówno na podstawie rozważań teoretycznych, jak i wyników badań eksperymentalnych, nie ma. Wyjątkiem jest naprężenie efektywne według Terzaghiego dla ośrodków gruntowych w pełni nasyconych cieczą, gdzie wyniki badań laboratoryjnych jednoznacznie potwierdzają możliwość jego stosowania. W przypadku natomiast ośrodków porowatych częściowo nasyconych cieczą, jak i w pełni nasyconych płynem ośrodków skalnych, zagadnienie naprężenia efektywnego jest sprawą otwartą, zwłaszcza zasada równoważności naprężenia.

Również w zakresie deformacji sprężystych nasyconych ośrodków skalnych jest wiele kontrowersji odnośnie chociażby wartości tensora współczynników efektywnego naprężenia według Biot'a lub bardziej dokładnie – jakie cechy ośrodka skalnego determinują określone wartości składowych tego tensora (np. de Boer i Lade [36], Oka [118]).

Prawdopodobnie pierwszym właśnie był Biot [32], który – w celu pokazania „przejścia” od jego opisu matematycznego procesu konsolidacji (deformacje sprężyste) do opisu konsolidacji według Terzaghiego – przyjął, że cząstki ośrodka gruntowego można traktować jako nieściśliwe. Rzeczywiście, przy takim założeniu wartość wprowadzonego przez Biot'a współczynnika naprężenia efektywnego jest równa jedności i forma naprężenia efektywnego (1.2) redukuje się do naprężenia efektywnego według Terzaghiego (1.1). Takie założenie, z punktu widzenia własności sprężystych materiału tworzącego szkielet gruntowy, może być jednak akceptowalne tylko dla

minerału kaolinitu (współczynnik Poissona $\nu = 0,45$ [131]). Większość ośrodków gruntowych charakteryzuje się jednak współczynnikiem naprężenia efektywnego bliskim wartości jeden (np. dla piasku luźnego $\alpha = 0,9987$ [131]). Z drugiej strony, wiele skał o prawie identycznym składzie mineralnym jak odpowiadające im ośrodki gruntowe charakteryzuje się wartością omawianego współczynnika dużo mniejszą od jedności (np. dla kwarcytu $\alpha = 0,08$ [131]). Podstawową różnicę między tymi ośrodkami stanowi przede wszystkim – w szerokim rozumieniu – ich mikrostruktura.

W opisie makroskopowym mikrostruktura najczęściej jawnie nie występuje, jest natomiast „ukryta” pod wartościami parametrów efektywnych opisu makroskopowego procesu. Wobec tego, aby analizować konkretne wartości parametrów efektywnych oraz ich zmienność, należy analizować wpływ mikrostruktury na ich wartości. Wydaje się więc, że prawidłowe przejście od opisu Biota do opisu Terzaghiego jest właśnie przez uwzględnienie mikrostruktury tych ośrodków. Analiza taka może dać również odpowiedź, dlaczego związek (1.1) dla ośrodków gruntowych sprawdza się również w zakresie deformacji plastycznych, natomiast związek (1.2) dla skał – nie.

Ponadto, w przypadku ośrodków gruntowych czy skalnych, wyniki badań laboratoryjnych konkretnych cech mechanicznych tych ośrodków otrzymywane są najczęściej jako wyniki makroskopowe, gdyż wymiar użytej do badań próbki jest zdecydowanie większy od wymiaru pojedynczej niejednorodności. Równocześnie wiele cech mechanicznych ośrodków gruntowych i skalnych oraz procesów fizycznych w nich zachodzących jest dobrze znanych i opisanych na poziomie niejednorodności, np. cechy sprężysto-plastyczne poszczególnych składników tych ośrodków, proces przepływu płynu, procesy sorpcji i pęcznienia, jak również prawa na powierzchniach: rozdziału faz, kontaktów międzyziarnowych, kontaktów międzyblokowych (w przypadku masywów spękanych blokowo). Jest więc ważne, aby posiadać narzędzie umożliwiające dedukcję makroskopowych własności analizowanych ośrodków z ich opisu mikroskopowego.

Możliwość takich analiz teoretycznych daje, jak sygnalizowano już wcześniej, metoda homogenizacji. Dlatego wydaje się nie tylko uzasadnione, ale również wskazane wprowadzanie tego narzędzia modelowania matematycznego do mechaniki gruntów i skał.

1.2. Cel i zakres pracy

Przedstawione w poprzednim podrozdziale rozważania miały zwrócić z jednej strony uwagę na istniejące różne sposoby modelowania matematycznego procesów fizycznych zachodzących w ośrodkach porowatych, z drugiej zaś – na coraz częściej pojawiającą się konieczność uwzględniania w opisie matematycznym procesów zachodzących w ośrodkach gruntowych i skalnych ich dyskretnej struktury wewnętrznej. Stwierdzono, że metoda homogenizacji daje taką możliwość. Ponadto, ponieważ metoda homogenizacji polega na matematycznie uzasadnionym przenoszeniu informacji dostępnej na poziomie niejednorodności do skali zastosowań inżynierskich, pozwala ona również na dedukcję ekwiwalentnego opisu makroskopowego (przybliżonego) rozważanego procesu z jego odpowiedniego opisu mikroskopowego. Umożliwia to bardziej szczegółowe badanie, interpretację oraz wnioskowanie o naturze i przebiegu procesów zachodzących w materiale.

Celem niniejszej pracy jest więc:

- przedstawienie praktycznych zasad stosowania, właściwości oraz zalet (również słabości) metody homogenizacji w zastosowaniu do mechaniki gruntów i skał, przez analizę wybranych zagadnień geotechnicznych,
- na podstawie metody homogenizacji, dokonanie pogłębionej (niejednokrotnie nowej) analizy znanych procesów fizycznych zachodzących w ośrodkach gruntowych i skalnych mających fundamentalne znaczenie w praktyce inżynierskiej.

W szczególności:

1. Identyfikuje się parametry mikrostruktury ośrodka porowatego wpływające na wartości stałych materiałowych teorii porosprężystości Biota. Stałe te, w wyniku zastosowania procedury homogenizacji, są zdefiniowane jako uśrednione wartości rozwiązań odpowiednich zagadnień brzegowych sformułowanych na poziomie niejednorodności. Umożliwia to analizę wpływu geometrii przestrzeni porowej oraz parametrów sprężystości materiału szkieletu na wartości stałych materiałowych teorii Biota. Okazuje się, między innymi, że „przejście” od opisu porosprężystości Biota do opisu konsolidacji według Terzagiego zachodzi nie tylko wtedy, gdy szkielet jest nieściśliwy, ale jest możliwe przy odpowiednio rozbudowanej przestrzeni porowej i równocześnie ściśliwym szkielecie.

2. Analizuje się ważność oraz zakres stosowalności koncepcji naprężenia efektywnego w zakresie deformacji niesprężystych. W tym przypadku nasycony ośrodek

porowaty traktuje się jako układ: szkielet zbudowany z materiału sprężysto-plastycznego oraz nieściśliwa lepka ciecz Newtona wypełniająca przestrzeń porową. Koncepcję naprężenia efektywnego weryfikuje się przez procedurę porównawczą tzw. związków lokalizacyjnych naprężenia zapisanych dla ciała suchego oraz dla ciała nasyconego płynem. W wyniku analizy stwierdza się, że dla dowolnego ośrodka porowatego oraz dowolnej historii obciążenia koncepcja naprężenia efektywnego nie jest prawdziwa. Formułuje się ogólną strukturę opisu matematycznego deformacji plastycznych nasyconych ośrodków porowatych.

3. Rozpatruje się deformacje sprężyste nasyconego płynem ośrodka porowatego, którym towarzyszą zjawiska sorpcji oraz pęcznienia sorpcyjnego. Nasycony płynem ośrodek porowaty traktuje się jako ośrodek o tzw. hierarchicznej strukturze, tzn. wyróżnia się w nim dwa zakresy porów, determinujące różne opisy matematyczne przepływu przez nie płynu. Dla małych średnic porów (mikroporów) przyjmuje się, że ruch płynu w przestrzeni porowej jest opisany prawem dyfuzji molekularnej Ficka, natomiast dla porów o stosunkowo dużych średnicach – równaniami Stokesa dla cieczy lepkiej. W efekcie, na poziomie niejednorodności, szkielet wraz z mikroporami traktuje się jako ośrodek ciągły opisany równaniami dyfuzosprężystości oraz płyn w makroporach jako lepka ciecz Newtona. Opis ten uzupełniają prawa na powierzchni rozdziału faz, tj. warunki ciągłości oraz warunek równowagowy w postaci izotermy sorpcji. Zastosowanie procedury homogenizacji prowadzi do ekwiwalentnego makroskopowego opisu procesu.

4. Przedstawia się przykłady zastosowania metody homogenizacji jako narzędzia obliczeniowego użytecznego w bezpośredniej praktyce inżynierskiej. Omawia się, między innymi, określanie parametrów efektywnych deformacji sprężystych oraz plastycznych (nośność graniczną) spękanego blokowo masywu skalnego oraz masywu skalnego o strukturze warstewkowej. Ponadto omawia się metodę określania granicznej powierzchni plastyczności (nośności granicznej) dla gruntu zbrojonego.

Materiał zawarty w pracy podzielono na siedem rozdziałów. Rozdział 2. poświęcono omówieniu podstawowych: zasad, właściwości oraz technik homogenizacji. Omawia się, między innymi, matematyczne sformułowanie metody homogenizacji, jak również przedstawia się jej sformułowanie, określane jako metoda wygładzania. Szczególną uwagę poświęcono metodzie asymptotycznej homogenizacji dla ośrodków periodycznych. Przedstawia się również niektóre metody szacowania wartości para-

metrów efektywnych dla losowych ośrodków liniowych oraz nieliniowych.

W rozdziale 3. zanalizowano nasycony nieściśliwym płynem liniowo-sprężysty ośrodek porowaty. Jak powszechnie wiadomo, w skali zastosowań inżynierskich proces deformacji takiego ośrodka jest określony równaniami teorii porosprężystości Biota. W rozdziale tym, korzystając z metody asymptotycznej homogenizacji, „odtworza” się najpierw związki teorii Biota z opisu matematycznego zapisanego na poziomie niejednorodności. Następnie, na podstawie otrzymanych z teorii homogenizacji definicji stałych materiałowych teorii Biota, identyfikuje się parametry mikrostruktury determinujące wartości tych stałych. Prezentowane w tym rozdziale stwierdzenia ilustruje się przykładami obliczeń numerycznych.

Fundamentalne wyniki dla praktyki inżynierskiej, jak również do dalszych badań naukowych związanych z nasyconymi ośrodkami porowatymi, przedstawiono w rozdziale 4., gdzie analizowany jest nasycony ośrodek sprężysto-plastyczny. W rozdziale tym sprawdza się przede wszystkim ważność oraz zakres stosowalności omówionej już wcześniej koncepcji naprężenia efektywnego. W tym celu formułuje się dla nasyconych ośrodków porowatych energetyczną zasadę makrojednorodności, będącą odpowiednikiem zasady makrojednorodności Hilla, stosowaną dla wieloskładnikowych (ale jednofazowych) ciał stałych. Wykorzystanie tej zasady prowadzi do prawa lokalizacji naprężenia dla nasyconego ośrodka porowatego. Dzięki analizie porównawczej praw lokalizacji naprężenia dla ośrodka suchego oraz nasyconego sprawdza się zakres ważności i stosowalności koncepcji naprężenia efektywnego. W ogólności udowadnia się, że dla dowolnego ośrodka porowatego hipotetyczny tensor naprężenia efektywnego nie może być zdefiniowany. Zakładając stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia dla materiału tworzącego szkielet ośrodka porowatego, wyprowadza się ogólną strukturę opisu matematycznego deformacji plastycznych nasyconych ośrodków porowatych. Analizowane są również, ważne dla praktyki inżynierskiej, możliwe uproszczenia proponowanego opisu matematycznego.

Rozdział 5. to analiza nasyconych płynem ośrodków skalnych, w których procesowi przepływu płynu towarzyszy zjawisko sorpcji oraz pęcznienia sorpcyjnego. Na poziomie niejednorodności szkielet ośrodka porowatego wraz z zasorbowanym w mikroporach płynem modeluje się związkami dyfuzosprężystości, natomiast płyn w makroporach – jako lepką ciecz Newtona. W wyniku, po zastosowaniu procedury homogenizacji, otrzymuje się komplet równań opisu makroskopowego, będący sprzężeniem równań dyfuzosprężystości i porosprężystości Biota, z dodatkowym efektem

pamięci. Otrzymany model matematyczny zweryfikowano na podstawie wyników badań laboratoryjnych prezentowanych w literaturze przedmiotu.

Zastosowania metody homogenizacji w bezpośredniej praktyce inżynierskiej przedstawia się w rozdziale 6. Rozpatruje się między innymi deformacje sprężyste spękanego blokowo masywu skalnego oraz masywu skalnego o strukturze warstewkowej. W przypadku spękanego blokowo masywu skalnego przyjmuje się, że odkształca się on tylko na skutek deformacji występujących na powierzchniach kontaktu między blokami, same bloki traktuje się natomiast jako nieodkształcalne. Pozwala to na sformułowanie prostej metody obliczeniowej określania parametrów efektywnych takiego ośrodka. Skały o strukturze warstewkowej analizuje się pod kątem ich efektywnych własności sprężystych, jak i plastycznych (nośność graniczna). Ilustracją przeprowadzonych rozważań dla skał warstewkowych są, określone metodą homogenizacji, właściwości efektywne skał fliszu karpackiego, tj.: parametry sprężystości oraz graniczna powierzchnia plastyczności (nośność graniczna). Rozdział ten kończy analiza nośności granicznej gruntu zbrojonego. Efektywność proponowanych metod ilustruje się przykładami obliczeniowymi.

Wnioski i uwagi końcowe, wynikające z przedstawionych w pracy rozważań teoretycznych, stanowią rozdział 7.

W pracy przyjęto konwencję znakowania zgodną z klasyczną mechaniką ośrodka ciągłego, tj. rozciąganie jako dodatnie. Wektory, tensory są wyróżniane przez wprowadzenie odpowiedniej liczby wskaźników:

u_i – składowa wektora,

u_{ij} – składowa tensora drugiego rzędu,

u_{ijkl} – składowa tensora czwartego rzędu.

Stosowana jest również umowa sumacyjna Einsteina, tzn. powtarzające się wskaźniki (tzw. nieme) oznaczają sumowanie, np.

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ik} = \sigma_{1j} \varepsilon_{1k} + \sigma_{2j} \varepsilon_{2k} + \sigma_{3j} \varepsilon_{3k}.$$

W całej pracy zakłada się ponadto, że do opisu deformacji ciała stałego ma zastosowanie teoria małych odkształceń (liniowość geometryczna).

2. Metoda homogenizacji – podstawowe zasady i techniki

Przed przystąpieniem do szczegółowego omówienia metody homogenizacji rozpatrzmy najpierw pewne abstrakcyjne zagadnienie. Załóżmy, że interesuje nas znalezienie rozwiązania zagadnienia brzegowego sformułowanego dla pewnego niejednorodnego ośrodka, w którym warunki brzegowe zadane są np. w postaci przemieszczeń. Przyjmijmy również, że równania konstytutywne określające zachowanie się poszczególnych składników tego ośrodka są takie, że wraz z warunkami ciągłości na powierzchniach kontaktu między tymi składnikami implikują istnienie i jednoznaczność rozwiązania analizowanego zagadnienia brzegowego. Jeśli liczba niejednorodności w rozważanym ośrodku jest niewielka, to znalezienie rozwiązania tego zagadnienia jest, oczywiście, możliwe bądź analitycznie, bądź numerycznie. Jeśli jednak liczba niejednorodności jest bardzo duża, to rozwiązanie analityczne jest najczęściej niemożliwe, a rozwiązanie numeryczne coraz bardziej czasochłonne i wraz ze wzrostem liczby niejednorodności – coraz bardziej niestabilne.

Obserwacja ciał rzeczywistych wskazuje, że reakcja materiału niejednorodnego (o bardzo dużej liczbie niejednorodności) jako całości, po odpowiednim uśrednieniu jest taka, jak gdyby materiał był jednorodny. Wobec tego, w celu określenia rozwiązania zagadnienia brzegowego sformułowanego dla ośrodka niejednorodnego o dużej liczbie niejednorodności, zastępuje się ten ośrodek hipotetycznym ośrodkiem jednorodnym, którego zachowanie pod wpływem zadanych wymuszeń jest równoważne odpowiednio uśrednionemu zachowaniu rozważanego ośrodka niejednorodnego.

W praktyce oznacza to założenie o tzw. makrojednorodności ośrodka, tzn. że z punktu widzenia obliczeń inżynierskich ośrodek taki może być traktowany jako jednorodny. W przypadku ośrodków gruntowych i skalnych hipoteza ta jest podstawą, w zasadzie wszystkich stosowanych w geotechnice metod obliczeniowych.

Celem metody homogenizacji jest sformułowanie dla zadanego ośrodka niejednorodnego równoważnego mu w sensie „średniego zachowania” ośrodka jednorodnego. Innymi słowy, metoda homogenizacji poszukuje ekwiwalentnego opisu makroskopowego rozważanego procesu, gdy znany jest całkowicie opis tego procesu w ośrodku mikroniejednorodnym¹. W skali mikro muszą zatem być dane:

- równania równowagi dla każdej fazy (każdego składnika) układu,
- warunki brzegowe na granicy rozdziału faz,

¹ W celu wyróżnienia opisów: matematycznego, uwzględniającego niejednorodny charakter ośrodka, od matematycznego dla ekwiwalentnego ośrodka jednorodnego, opisy te są określane odpowiednio terminami: mikroskopowy i makroskopowy. Ponadto, ponieważ analizuje się ośrodki niejednorodne, dla których zakłada się możliwość zdefiniowania odpowiedniego ośrodka makroskopowo jednorodnego, wobec tego nazywa się je mikroniejednorodnymi, aby podkreślić ich dyskretny charakter, a zarazem makroskopową jednorodność.

- związki konstytutywne wraz z parametrami,
- geometria.

Proces homogenizacji musi dać w skali makroskopowej [13]:

- równania równowagi,
- związki konstytutywne wraz z parametrami efektywnymi,
- prawo lokalizacji, tzn. związek pozwalający określić wszystkie pola fizyczne na poziomie mikroskopowym, gdy znane są makroskopowe pola fizyczne.

W przypadku rzeczywistych ośrodków (np.: grunty, skały) geometria mikrostruktury, ze względu na losowy charakter tych ośrodków, nie jest dokładnie znana. Zagadnienie wyznaczenia (tj. wyczerpująca charakterystyka) parametrów efektywnych, w takim przypadku, prowadzi do nieskończonej hierarchii równań dla funkcji momentowych charakteryzujących własności ośrodka [145], których dokładne wyznaczenie jest bardzo trudne lub wręcz niemożliwe. W przypadku ośrodków losowych, ze względu na brak pełnej informacji statystycznej o ośrodku, pojęcie określania wartości parametrów efektywnych rozumiane jest zatem w sensie oszacowań tych wartości w terminach najprostszych charakterystyk pól losowych – wartość przeciętna, objętość frakcyjna poszczególnych składników ośrodka itp.

Metodologicznie proces homogenizacji formułowany jest w literaturze przedmiotu na dwa sposoby (np.: Hornung [74], Auriault i Caillerie [17], Bielski i Telega [30]). Pierwsze sformułowanie opiera się na pojęciu tzw. reprezentatywnej elementarnej objętości (REO) i polega na objętościowym uśrednieniu, w obrębie tej elementarnej objętości, analizowanych pól fizycznych. W rezultacie silnie nieciągłe pola fizyczne opisu mikroskopowego, poprzez proces uśrednienia ulegają wygładzeniu, stąd nazwa – metoda wygładzania. Drugie sformułowanie jest określane jako matematyczna teoria homogenizacji. Tym razem, w przeciwieństwie do metody wygładzania, proces przejścia z opisem matematycznym ze skali mikroskopowej do makroskopowej dokonuje się poprzez parametryzację opisu matematycznego parametrem $\varepsilon > 0$, będącym parametrem skali (np. reprezentującym typowy wymiar porów), a następnie poprzez żądanie, aby $\varepsilon \rightarrow 0$.

W niniejszym rozdziale przedstawiono i omówiono: zasady, własności oraz różne techniki homogenizacji, ze szczególnym uwzględnieniem przydatności ich do analizy procesów zachodzących w ośrodkach gruntowych i skalnych.

2.1. Metoda wygładzania

Podstawowym założeniem teorii homogenizacji, interpretowanej w sensie metody wygładzania, jest postulat o możliwości zdefiniowania w rozważanym ośrodku mikroniejednorodnym tzw. *reprezentatywnej elementarnej objętości* (REO). Przez pojęcie to rozumie się najmniejszą objętość rozważanego ośrodka, która zawiera wszystkie informacje potrzebne do kompletnego opisu struktury i własności całego materiału [50].

Do uwzględnienia statystycznej natury mikrostruktury ośrodków losowych REO musi być odpowiednio duży, aby być statystycznie reprezentatywnym, tzn. musi zawierać wszystkie elementy możliwych mikrostrukturalnych konfiguracji ośrodka. Oznacza to, że REO powinien zawierać bardzo dużą liczbę występujących w ośrodku niejednorodności, takich jak ziarna, wtrącenia, pory, spękania itp. [55]. Równocześnie REO musi być odpowiednio mały w stosunku do całej objętości ośrodka, aby można było zdefiniować ekwiwalentny ośrodek makroskopowo jednorodny.

Proces przejścia „mikro–makro” jest oparty na operacji uśredniania, tzn. jeśli $u(y)$ jest rozważanym polem fizycznym opisu mikroskopowego, to zakłada się, że stowarzyszona z nią wielkością opisującą to pole w skali makroskopowej jest jego uśredniona wartość, tj.

$$\langle u \rangle(x) = \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|_{V_{\text{REO}}}} \int u(y) m(x-y) dV, \quad (2.1)$$

gdzie:

$\|V_{\text{REO}}\|$ – miara objętości REO,

$m(y)$ – pewna funkcja wagi.

W wyniku procesu uśrednienia, reprezentatywnej objętości ośrodka, cechującej się wielofazowym składem i niejednorodną strukturą, przypisuje się w hipotetycznym ekwiwalentnym ośrodku jednorodną strukturę, w której każdy punkt przestrzeni jest zajmowany przez wszystkie fazy równocześnie (rys. 2.1). Ponadto, jak łatwo zauważyć ze związku (2.1), w procesie wygładzania wyróżnia się dwie rodziny zmiennych fizycznych, tzn.: zmienne makroskopowe opisujące stan ośrodka jednorodnego, którego właściwości poszukujemy, oraz zmienne mikroskopowe – opisujące stan ośrodka w obrębie REO (rys. 2.2).

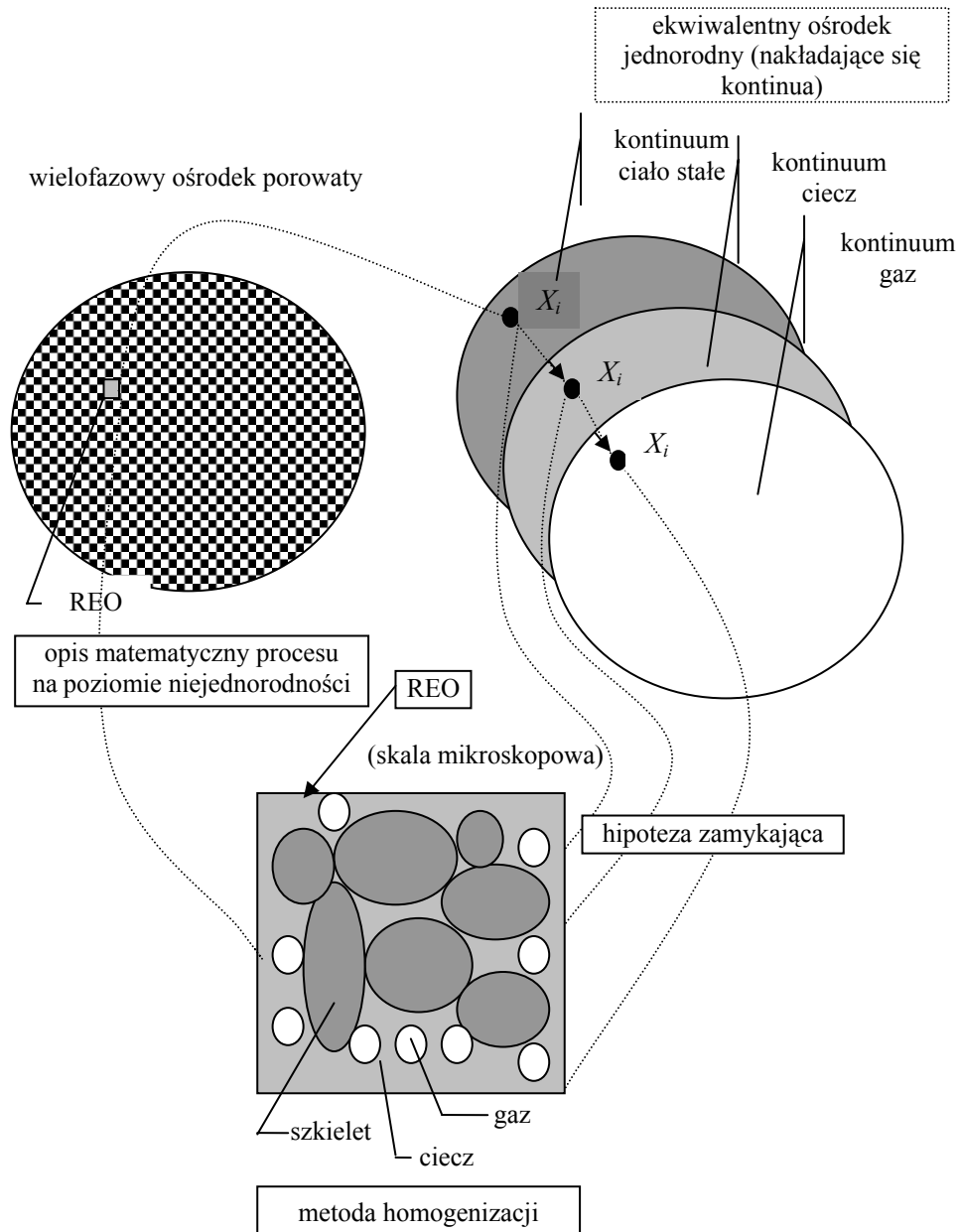
Najczęściej zmienne makroskopowe są reprezentowane przez średnie objętościowe odpowiadających im zmiennych mikroskopowych. W przypadku gęstości średnia ta poprawnie definiuje, w sensie fizyki, zmienną makroskopową. W przypadku jednak pola naprężenia zmienna makroskopowa powinna reprezentować wartość siły przypadającej na jednostkę powierzchni, a wobec tego powinna być wartością średnią naprężenia w skali mikro przypadającą na jednostkę powierzchni. Podobnie jest, gdy rozpatrujemy prędkość filtracji cieczy przez ośrodek porowaty. Wielkość makroskopowa powinna reprezentować strumień, a więc powinna być średnią po powierzchni.

Poprawny proces wygładzania musi prowadzić do opisu makroskopowego wyrażonego przez właściwe, z punktu widzenia fizyki, zmienne.

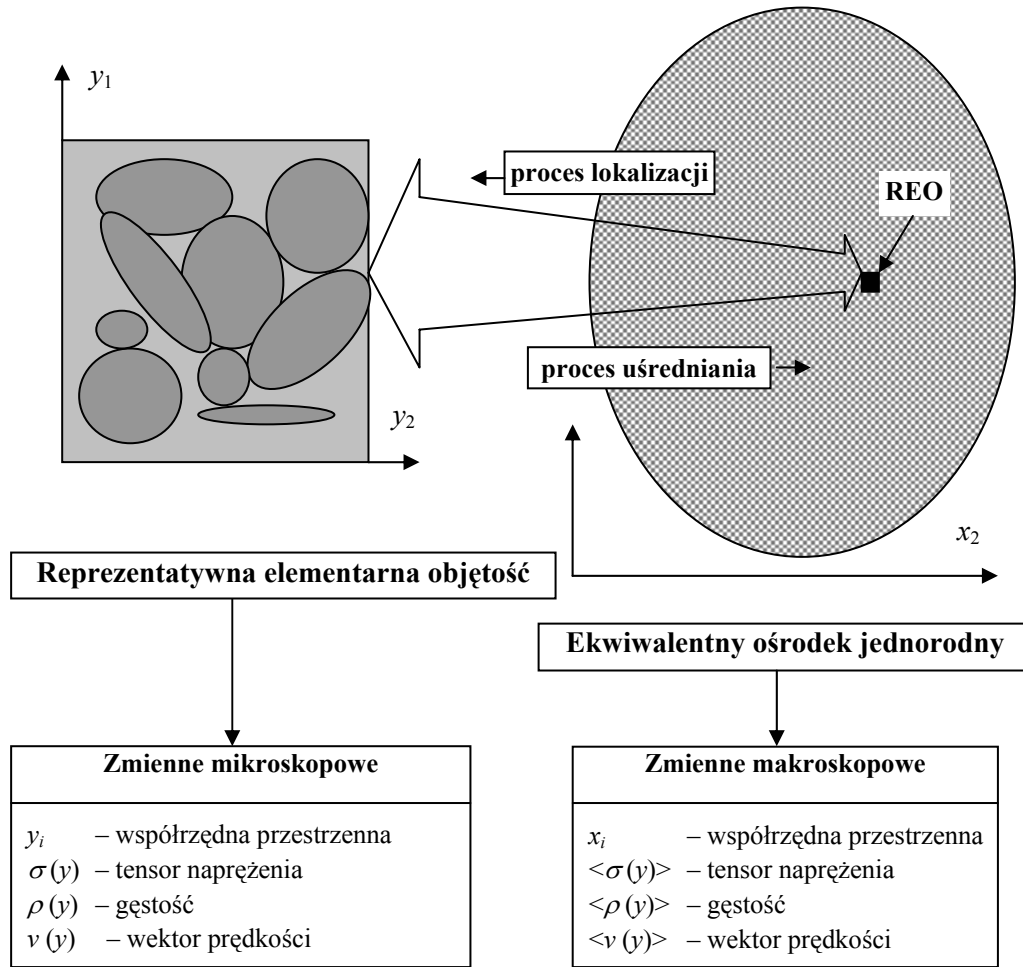
W celu pełnego przejścia z jednej skali obserwacji do drugiej, w większości przypadków, opis mikroskopowy musi być uzupełniony o warunki brzegowe na granicy REO – reszta materiału. *Warunki te muszą odzwierciedlać, najwierniej jak to możliwe, rzeczywisty stan REO wewnątrz rozważanego materiału* – pisze Suquet [150].

Wprowadzenie konkretnej formy warunków brzegowych do opisu lokalnego można również interpretować jako nałożenie ograniczenia na klasę możliwych oddziały-

wań między REO a resztą materiału. Z tego względu ograniczenie to jest często nazywane hipotezą zamykającą, gdyż umożliwia ono wydzielenie REO od reszty rozważanego materiału i zawężenie analizy zachowania się materiału do analizy tylko REO.



Rys. 2.1. Schemat metody wygładzania
Fig. 2.1. Schematic of a smoothing method



Rys. 2.2. Dwie rodziny zmiennych fizycznych definiowane w metodzie wygładzania
 Fig. 2.2. Two families of physical variables defined in a smoothing method

Uzupełnienie opisu lokalnego o warunki brzegowe na granicy REO umożliwia również określenie prawa lokalizacji, tj. zależności pozwalającej na obliczanie wartości i rozkładów mikroskopowych pól fizycznych, gdy dane są wartości makroskopowych zmiennych fizycznych i – oczywiście – pełna informacja o mikrostrukturze.

Najczęściej stosowaną hipotezą zamykającą w analizie kompozytowych ciał stałych jest warunek jednorodnego stanu naprężenia lub odkształcenia [56], [72], [152]. Wprowadzenie takiej formy hipotezy zamykającej jest jednak zasadne tylko wtedy, gdy rozmiar pojedynczej niejednorodności jest dużo mniejszy od rozmiarów REO [132]. W przypadku ośrodków periodycznych, tzn. o strukturze wygenerowanej przez

warunek periodyczności z pojedynczej komórki (REO), jako warunek brzegowy wykorzystywana jest lokalna periodyczność rozważanych pól fizycznych [23], [137].

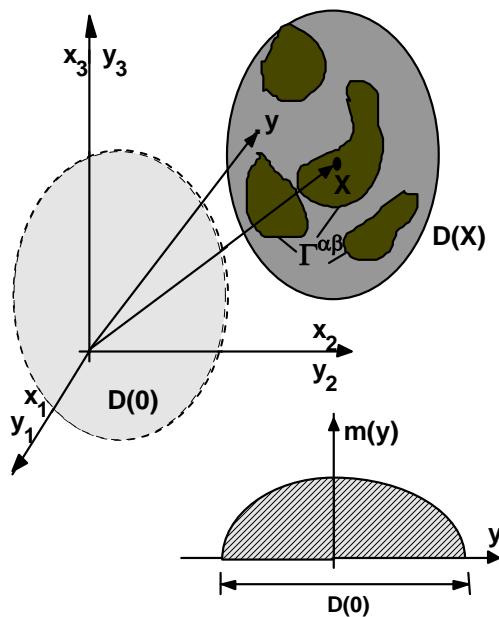
Poniżej przedstawiono dwie podstawowe techniki metody wygładzania. Pierwsza z nich jest stosowana do analizy procesów przepływu przez ośrodki porowate, druga natomiast – do analizy własności zastępczych (efektywnych) kompozytowych ciał stałych.

2.1.1. Metody objętościowego i wagowego uśredniania

Jednymi z powszechniej stosowanych metod w mechanice ośrodków wielofazowych są metody wagowego i objętościowego uśredniania (np. Cushman [48], Ene i Polisevski [59], Gilbert [65], Nigmatulin [115]). Omówienie tych technik rozpoczniemy od przedstawienia metody wagowego uśredniania, gdyż druga metoda jest jej szczególnym przypadkiem.

Niech $m(y)$ jest funkcją parzystą, dodatnią, z nośnikiem zwartym w $D(0)$, taką że (rys. 2.3)

$$\int_{D(0)} m(y) dV = 0. \quad (2.2)$$



Rys. 2.3. Zmiana skali obserwacji przez splot względem zmiennej przestrzennej z funkcją wagi $m(y)$
 Fig. 2.3. Change of the observation scale by the spatial convolution with a weight function $m(y)$

Z definicji wielkością makroskopową stowarzyszoną z daną wielkością mikroskopową $g^\alpha(y)$ jest splot ze względu na zmienną przestrzenną

$$m * (g^\alpha(y)h^\alpha(y)) = \langle g^\alpha \rangle(x) = \int_{D(x)} h^\alpha(y)g^\alpha(y)m(x-y)dV, \quad (2.3)$$

gdzie $h^\alpha(y)$ – funkcja charakterystyczna dla fazy α zajmującej objętość $V_\alpha \subset V_{\text{REO}}$, zdefiniowana następująco

$$h^\alpha(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y \in V_\alpha, \\ 0 & \text{dla } y \notin V_\alpha. \end{cases} \quad (2.4)$$

Prawa transformacji „mikro–makro” w metodzie wagowego uśredniania są bezpośrednią konsekwencją definicji (2.3) oraz reguł różniczkowania. Wyprowadzenie ich, dla przypadku ośrodka dwufazowego, przedstawiono poniżej.

Rozważamy ośrodek dwufazowy zbudowany z fazy α oraz fazy β . Rozkład faz w ośrodku określają funkcje charakterystyczne $h^\alpha(y)$ i $h^\beta(y)$. Zmienną mikroskopową transformowaną do skali „makro” jest $\psi(y)$, która dla różnych faz występujących w ośrodku ma wartości

$$\psi(y) = \begin{cases} h^\alpha(y)\psi(y) = \psi^\alpha & \text{w fazie } \alpha, \\ h^\beta(y)\psi(y) = \psi^\beta & \text{w fazie } \beta. \end{cases} \quad (2.5)$$

Zgodnie z definicją (2.3)

$$m * \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right) = \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial y_i} + h^\beta(y) \frac{\partial \psi^\beta}{\partial y_i} \right\} m(x-y) dV. \quad (2.6)$$

Prawą stronę powyższej równości można również przedstawić następująco

$$\begin{aligned} & \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial \psi^\alpha(y)}{\partial y_i} + h^\beta(y) \frac{\partial \psi^\beta(y)}{\partial y_i} \right\} m(x-y) dV \\ &= \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial \psi^\alpha(y) m(x-y)}{\partial y_i} + h^\beta(y) \frac{\partial \psi^\beta(y) m(x-y)}{\partial y_i} \right\} \\ & - \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} \frac{\partial m(x-y)}{\partial y_i} dV, \end{aligned} \quad (2.7)$$

co – po zastosowaniu twierdzenia Greena do pierwszej całki po prawej stronie – prowadzi do

$$\begin{aligned}
& \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial \psi^\alpha(y)}{\partial y_i} + h^\beta(y) \frac{\partial \psi^\beta(y)}{\partial y_i} \right\} m(x-y) dV \\
&= \int_{A^\alpha} \psi^\alpha(y) m(x-y) n_i^\alpha dS + \int_{A^\beta} \psi^\beta(y) m(x-y) n_i^\beta dS + \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} \{ \psi^\alpha - \psi^\beta \} m(x-y) n_i^{\alpha\beta} dS \\
&\quad - \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} \frac{\partial m(x-y)}{\partial y_i} dV. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

W związkach tych wykorzystano oznaczenia (rys. 2.4a):

A^α – brzeg obszaru $D(x)$ należący do fazy α ,

A^β – brzeg obszaru $D(x)$ należący do fazy β ,

$\Gamma^{\alpha\beta}$ – powierzchnia rozdziału faz,

n^α – jednostkowy wektor normalny do powierzchni A^α ,

n^β – jednostkowy wektor normalny do powierzchni A^β ,

$n^{\alpha\beta}$ – jednostkowy wektor normalny do powierzchni rozdziału faz $\Gamma^{\alpha\beta}$ skierowany od fazy α w kierunku fazy β .

Całki po brzegach: A^α i A^β są równe tożsamościowo zeru (funkcja wagi $m(x-y)$ jest z nośnikiem zwartym w $D(0)$, czyli $m(x-y) = 0$ dla punktów należących do A^α i A^β). Wobec tego, wykorzystując (2.6) oraz (2.8), możemy zapisać

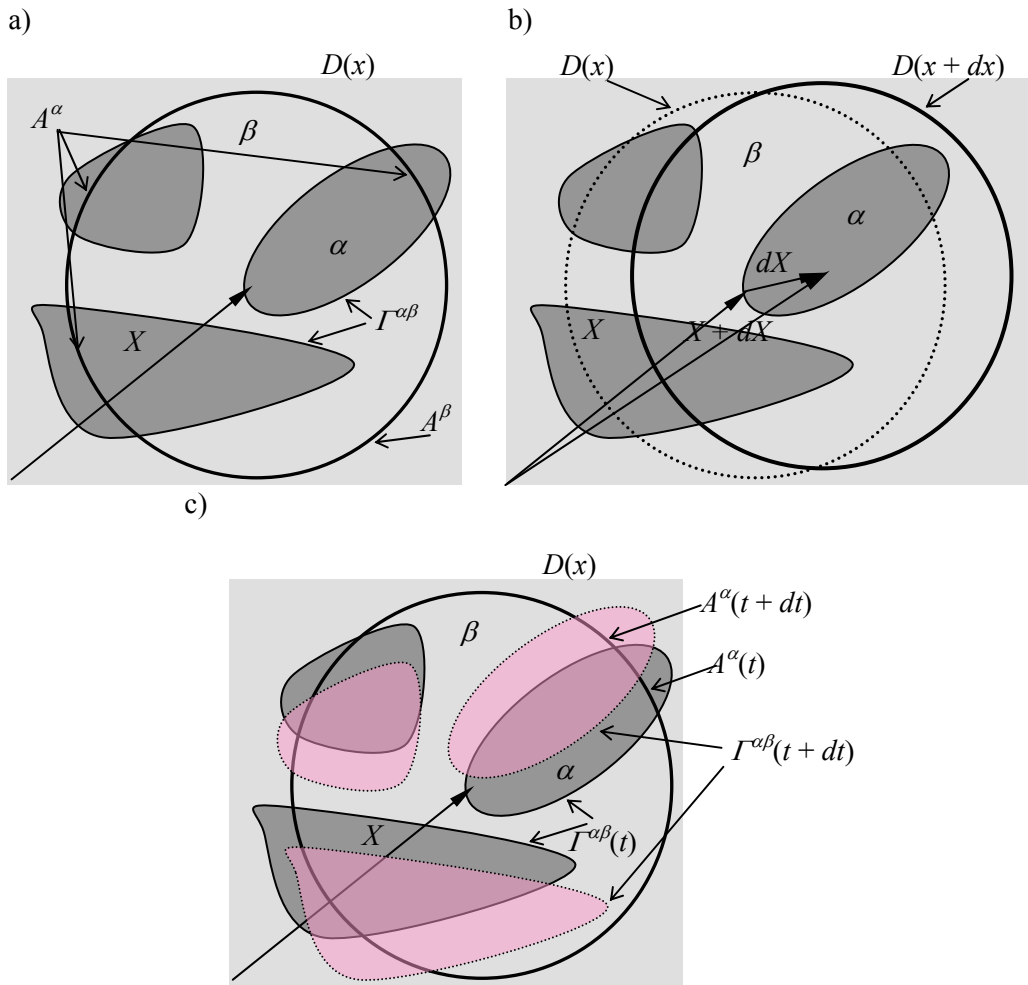
$$\begin{aligned}
m^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right) &= \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} \{ \psi^\alpha - \psi^\beta \} m(x-y) n_i^{\alpha\beta} dS \\
&\quad - \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} \frac{\partial m(x-y)}{\partial y_i} dV. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Obliczmy teraz pochodną cząstkową po makroskopowej zmiennej przestrzennej x z makroskopowej wielkości $m^* \psi$. Ponownie, zgodnie z definicją (2.3), mamy

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (m^* \psi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} m(x-y) dV. \tag{2.10}$$

Tym razem jest to pochodna cząstkowa z całki po zmiennym obszarze całkowania, gdyż przy zmianie $x \rightarrow x + dx$ uległ również przesunięciu obszar całkowania z $D(x)$ na $D(x + dx)$ (rys. 2.4b). Jest to więc tzw. „pochodna śledząca” [61], z tym że „śledzone” są nie cząsteczki materialne, ale obszar całkowania. Pochodna ta jest więc zdefiniowana jako następująca granica

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(m * \psi) = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{1}{dx_1} \left\{ \int_{D(x+dx)} \{h^\alpha(y)\psi^\alpha(y) + h^\beta(y)\psi^\beta(y)\} m(x-y) dV - \int_{D(x)} \{h^\alpha(y)\psi^\alpha(y) + h^\beta(y)\psi^\beta(y)\} m(x-y) dV \right\}. \quad (2.11)$$



Rys. 2.4. Reprezentatywna elementarna objętość rozważanego ośrodka dwufazowego (a), geometryczna interpretacja pochodnej cząstkowej po makroskopowej zmiennej przestrzennej (b), geometryczna interpretacja pochodnej cząstkowej po czasie (c)

Fig. 2.4. Representative elementary volume of two-phase medium considered (a), geometrical interpretation of partial macroscopic space derivative (b), geometrical interpretation of partial time derivative (c)

W różnicy w nawiasie ma udział obszar będący obszarem wspólnym $D(x)$ i $D(x + dx)$ oraz obszar, gdzie $D(x)$ i $D(x + dx)$ są odmienne [61]. Udział obszaru wspólnego w pochodnej jest równy

$$\int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} \frac{\partial m(x-y)}{\partial x_i} dV, \quad (2.12)$$

udział drugiego obszaru pochodzi natomiast z wartości $\psi(y)m(x-y)$ na brzegu pomnożonej przez objętość, przez którą przeszły cząsteczki brzegu przy przesunięciu o dx . Przesunięcie punktu brzegu obszaru $D(x)$ wynosi dx , a więc objętość, przez którą przeszły cząsteczki elementu powierzchniowego dS , jest równa $dx_i n_i$. Udział obszaru $D(x) \cup D(x + dx) - D(x) \cap D(x + dx)$ w pochodnej jest zatem równy

$$\int_{A^\alpha} \psi^\alpha(y) m(x-y) n_i^\alpha dS + \int_{A^\beta} \psi^\beta(y) m(x-y) n_i^\beta dS. \quad (2.13)$$

Ostatecznie więc uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (m * \psi) &= \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} \frac{\partial m(x-y)}{\partial x_i} dV \\ &+ \int_{A^\alpha} \psi^\alpha(y) m(x-y) n_i^\alpha dS + \int_{A^\beta} \psi^\beta(y) m(x-y) n_i^\beta dS. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Całki po brzegach A^α i A^β są równe zeru ($m(x-y)$ jest z nośnikiem zwartym w $D(0)$). Dodatkowo

$$\frac{\partial m(x-y)}{\partial x_i} = - \frac{\partial m(x-y)}{\partial y_i}, \quad (2.15)$$

co w konsekwencji pozwala zależność (2.14) przedstawić w następującej równoważnej postaci

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (m * \psi) = - \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} \frac{\partial m(x-y)}{\partial y_i} dV. \quad (2.16)$$

Po porównaniu związków (2.16) i (2.9) otrzymujemy pierwsze prawo transformacji „mikro–makro” w metodzie wagowego uśredniania, tzn.

$$m * \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (m * \psi) + \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} \left[\psi^\alpha - \psi^\beta \right] n_i^{\alpha\beta} m(x-y) dS. \quad (2.17)$$

Drugie prawo transformacji jest zależnością między uśrednioną wartością pochodnej cząstkowej po czasie a pochodną cząstkową po czasie z wartości średniej. Zauważmy, że

$$m * \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial \psi^\alpha(y)}{\partial t} + h^\beta(y) \frac{\partial \psi^\beta(y)}{\partial t} \right\} m(x-y) dV, \quad (2.18)$$

natomiast

$$\frac{\partial}{\partial t} (m * \psi) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \psi^\beta(y) \right\} m(x-y) dV. \quad (2.19)$$

Tym razem, w przeciwieństwie do pochodnej (2.10), obszar całkowania $D(x)$ nie ulega zmianie, zmienia się natomiast rozkład faz w $D(x)$ opisany przez funkcje charakterystyczne h^α i h^β (rys. 2.4c). Rozumując podobnie jak przy pochodnej „śledzącej” (2.11), wyróżniamy dwa różne udziały w pochodnej (2.19). Pierwszy to udział w pochodnej obszaru wspólnego dla każdej z faz

$$\int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial}{\partial t} [\psi^\alpha(y) m(x-y)] + h^\beta(y) \frac{\partial}{\partial t} [\psi^\beta(y) m(x-y)] \right\} dV, \quad (2.20)$$

drugi – to udział poruszających się brzegów faz, tzn.

$$\begin{aligned} & \int_{A^\alpha} \psi^\alpha(y) m(x-y) v_i^\alpha n_i^\alpha dS + \int_{A^\beta} \psi^\beta(y) m(x-y) v_i^\beta n_i^\beta dS \\ & + \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} [\psi^\alpha(y) - \psi^\beta(y)] m(x-y) v_i^{\alpha\beta} n_i^{\alpha\beta} dS, \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdzie:

v_i^α – składowa wektora prędkości powierzchni A^α ,

v_i^β – składowa wektora prędkości powierzchni A^β ,

$v_i^{\alpha\beta}$ – składowa wektora prędkości powierzchni rozdziału faz $\Gamma^{\alpha\beta}$.

Brzeg obszaru $D(x) = A^\alpha(t) \cup A^\beta(t) = A^\alpha(t+dt) \cup A^\beta(t+dt)$ jest jednak stały (rys. 2.4c), a wobec tego objętość, przez którą przeszły jego cząsteczki w czasie dt , jest równa zero, czyli $v_i^\alpha n_i^\alpha = 0$ i $v_i^\beta n_i^\beta = 0$. Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (m * \psi) &= \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial}{\partial t} [\psi^\alpha(y) m(x-y)] + h^\beta(y) \frac{\partial}{\partial t} [\psi^\beta(y) m(x-y)] \right\} dV \\ &+ \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} [\psi^\alpha(y) - \psi^\beta(y)] m(x-y) v_i^{\alpha\beta} n_i^{\alpha\beta} dS. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Funkcja wagi $m(x-y)$ nie zależy od czasu, wobec tego powyższy związek można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m * \psi) = & \int_{D(x)} \left\{ h^\alpha(y) \frac{\partial}{\partial t} \psi^\alpha(y) + h^\beta(y) \frac{\partial}{\partial t} \psi^\beta(y) \right\} m(x-y) dV \\ & + \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} [\psi^\alpha(y) - \psi^\beta(y)] m(x-y) v_i^{\alpha\beta} n_i^{\alpha\beta} dS. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Po porównaniu teraz zależności (2.23) i (2.18) otrzymujemy drugie prawo transformacji „mikro–makro” w metodzie wagowego uśredniania, tzn.

$$m * \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (m * \psi) - \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} [\psi^\alpha - \psi^\beta] n_i^{\alpha\beta} v_i^{\alpha\beta} m(x-y) dS. \quad (2.24)$$

Przyjmując, że funkcja wagi $m(y)$ jest równa $1/V$ w kuli o objętości V ze środkiem w początku układu współrzędnych i tożsamościowo równa zero na zewnątrz kuli, prawa transformacji (2.17) i (2.24) transformują się do praw uśredniania przestrzennego [142]²

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \psi \rangle + \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} (\psi^\alpha - \psi^\beta) n_i^{\alpha\beta} dS, \\ \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi \rangle - \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \int_{\Gamma^{\alpha\beta}} (\psi^\alpha - \psi^\beta) n_i^{\alpha\beta} v_i^{\alpha\beta} dS. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Równania (2.17) i (2.24) są podstawą przejścia z opisem matematycznym ze skali mikro do skali makro w metodzie wagowego uśredniania przestrzennego, podczas gdy zależności (2.25) są podstawowymi prawami metody uśredniania objętościowego.

Jak wynika z przedstawionego powyżej opisu, metody objętościowego i wagowego uśredniania nie wprowadzają hipotezy zamykającej. Powoduje to, najczęściej, „zatrzymanie” się procesu przejścia „mikro–makro”. Ilustruje to poniższy przykład, w którym za pomocą praw transformacji (2.25) próbuje się „przenieść” do skali ma-

² Tym razem funkcja wagi jest nieciągła na brzegu obszaru $D(x)$. Prawo transformacji pochodnej czasowej uzyskane zostało jednak, w metodzie uśredniania wagowego, bez korzystania z warunku zerowania się na brzegu obszaru funkcji wagi, a więc jego ważność przy uśrednianiu przestrzennym jest oczywista. Podczas wyprowadzania jednak prawa transformacji pochodnej przestrzennej warunek zerowania się funkcji wagi na brzegu obszaru $D(x)$ zastosowany został przy przekształceniu od (2.8) do (2.9) oraz od (2.14) do (2.16). Porównując jednak związek (2.8), w którym nie wykorzystano warunku zerowania się całek powierzchniowych, z odpowiadającym mu wzorem (2.14), natychmiast wnioskuje się prawdziwość prawa transformacji (2.17), bez korzystania z warunku zerowania się całek powierzchniowych. Tym samym nieciągłość funkcji wagi w metodzie uśredniania przestrzennego nie zaburza struktury praw transformacji „mikro–makro”.

kroskopowej opis mikroskopowy przepływu przez nieodkształcalny ośrodek porowaty lepkiej nieściśliwej cieczy Newtona.

Opis mikroskopowy przepływu cieczy tworzą:

➤ prawo nieściśliwości

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_i} = 0 \text{ w } V^l, \quad (2.26)$$

➤ warunek adhezji na powierzchni kontaktu z ciałem stałym

$$v_i = 0 \text{ na } \Gamma, \quad (2.27)$$

➤ warunki równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} = 0 \text{ w } V^l, \quad (2.28)$$

➤ równania konstytutywne

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) \text{ w } V^l, \quad (2.29)$$

gdzie:

v_i – składowa wektora prędkości cieczy,

p – ciśnienie cieczy,

μ – lepkość cieczy,

σ_{ij} – składowa tensora naprężenia cieczy,

V^l – objętość zajmowana przez ciecz w REO,

Γ – powierzchnia kontaktu cieczy z ciałem stałym.

Zastosowanie (2.25a) do (2.26) wraz z warunkiem (2.27) daje makroskopowe prawo nieściśliwości cieczy, tj.

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_i} = 0. \quad (2.30)$$

Równanie (2.30) jest oczywiście klasycznym warunkiem nieściśliwości dla ośrodka ciągłego. Uśrednienie równania równowagi prowadzi do

$$\frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_i dS = 0, \quad (2.31)$$

podczas gdy uśrednienie równań konstytutywnych

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = -\langle p \rangle \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right). \quad (2.32)$$

Ostatecznie, po podstawieniu zależności (2.32) i (2.29) do równania (2.31) oraz zastosowaniu makroskopowego warunku nieściśliwości (2.30) otrzymujemy

$$0 = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} + \mu \nabla_x^2 \langle v_j \rangle + \frac{1}{\|V_{\text{VER}}\|} \int_{\Gamma} \left[-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) \right] n_i d\Gamma. \quad (2.33)$$

Jak łatwo zauważyć, równanie (2.33) nie wyraża się, niestety, tylko przez zmienne makroskopowe. Bez wprowadzenia dodatkowych założeń upraszczających (postulaty natury fenomenologicznej lub analiza porównawcza rzędów wielkości) jest to ostateczna postać uśrednionego lokalnego równania równowagi, które – z powodu występowania w równaniu zmiennych mikroskopowych i makroskopowych – nie może być traktowane jako opis makroskopowy.

Jak już stwierdzono, przyczyną przedstawionego powyżej „zatrzymania się” procesu przejścia z jednej skali obserwacji do drugiej jest brak w metodach uśredniania przestrzennego hipotezy zamykającej. Jest to podstawowy mankament obu omówionych metod. Z tego powodu metody te są najczęściej używane do otrzymania makroskopowych równań równowagi z niezdefiniowanymi jednoznacznie członami oddziaływań między składnikami ośrodka wielofazowego, np. ostatni wyraz w równaniu (2.33) reprezentuje oddziaływanie szkieletu z przepływającą cieczą. Równania konstytutywne definiujące te oddziaływania otrzymywane są następnie przez analizę drugiego prawa termodynamiki, już na poziomie makroskopowym (por. np. Hassanizadeh i Gray [72], Achanta i Cushman [5], Cushman [48]). Taki sposób modelowania nazywany jest hybrydową teorią mieszanin (zob. Murad et.al. [113]).

Niektórzy autorzy w celu dokonania pełnego przejścia techniką uśredniania objętościowego stosują jako hipotezę zamykającą warunek periodyczności (zob. Barrere et.al. [23], Gilbert [65]).

2.1.2. Ciągła mikromechanika

Stosowanie aparatu mechaniki ośrodka ciągłego na poziomie mikroskopowym do analizy procesu deformacji ośrodka, jak również do prognozowania właściwości efektywnych kompozytowych ośrodków stałych, jest określane jako ciągła mikromechanika. Innymi słowy, ciągła mikromechanika – to poszukiwanie dla zadanej mikrostruktury ośrodka jej „mechanicznej odpowiedzi” od zadanych obciążeń makroskopowych (uśrednionych). Jest więc oczywiste, że w zależności od rodzaju analizowanego ośrodka, tzn. własności mechanicznych jego składników, procesów w nim zachodzących, np.: kruche pęknięcie, poślizgi międzyziarnowe, deformacje plastyczne, wykorzystywane są różne mikroskopowe opisy matematyczne oraz metody rozwiązywania. Z tego też względu prezentowane poniżej omówienie ograniczono do przedstawienia tylko podstawowych definicji i zasad ciągłej mikrome-

chaniki. Obszerne omówienie, wraz z uzyskanymi w ostatniej dekadzie wynikami dla konkretnych ośrodków kompozytowych, przedstawione jest w pracy zbiorowej pod redakcją P. Suqueta *Continuum Micromechanics* [152].

W przypadku analizy kompozytowego ośrodka stałego, opis mikroskopowy tworzą:

➤ równania równowagi statycznej

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} = 0, \quad (2.34)$$

➤ związki konstytutywne dla każdego składnika, np. zdefiniowane przez odpowiedni potencjał lub energię odkształcenia $w(e_{ij})$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w(e_{kh})}{\partial e_{ij}}, \quad (2.35)$$

➤ odpowiednie warunki ciągłości na powierzchniach kontaktu między składnikami ośrodka.

Jako hipotezę zamykającą, tzn. warunki brzegowe przyłożone na granicach REO, przyjmuje się:

a) dla ośrodków losowych – *warunek jednorodnego odkształcenia (liniowego przemieszczenia)*, tzn. $u_i = E_{ij}y_j$ na ∂V_{REO} lub warunek jednorodnego naprężenia $\sigma_{ij}n_i = T_{ij}n_i$ na ∂V_{REO} ;

b) dla ośrodków periodycznych – *warunki lokalnej periodyczności*, to znaczy $u_i = E_{ij}y_j + u_i^*(y)$ na ∂V_{REO} , gdzie $u_i^*(y)$ jest periodyczny, tzn. w odpowiadających sobie punktach na krańcach REO ma takie same wartości oraz $\sigma_{ij}n_i$ jest antyperiodyczny.

W powyższych warunkach brzegowych: E_{ij} jest pewnym zadanym tensorem odkształcenia, natomiast T_{ij} – zadanymi na brzegu naprężeniami, n_i jest składową wektora normalnego do brzegu. Przez e_{ij} oznaczono składową tensora odkształcenia wewnątrz REO, która dla małych odkształceń jest określona zależnością

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right). \quad (2.36)$$

Jeśli funkcja energii odkształcenia $w(e_{ij})$ jest ściśle wypukła ze względu na e_{ij} , to wszystkie wyszczególnione powyżej warunki brzegowe, przy wymiarze REO dużo większym od wymiarów poszczególnych niejednorodności, są równoważne (por. Ponte Castañeda i Suquet [123], Sab [132]). W przypadku jednak składników sztywno idealnie plastycznych funkcja dyssypacji plastycznej jest wypukła, lecz nie ściśle wypukła. Odpowiednią hipotezą zamykającą dla ośrodków losowych jest wtedy warunek jednorodnego odkształcenia (prędkości odkształcenia), natomiast dla ośrodków periodycznych – omówiony powyżej warunek periodyczności [149], [151], [152].

Przyjmijmy, do dalszej prezentacji metody, warunek jednorodnego odkształcenia oraz załóżmy, że kompozyt wewnątrz REO tworzy N jednorodnych składników stałych, zajmujących objętości V_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$, których rozkład określają funkcje charakterystyczne $h^\alpha(y)$ (definicja (2.4)).

Definiując wielkości makroskopowe jako średnie objętościowe po obszarze REO, otrzymujemy

$$\langle e_{ij} \rangle = \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \int_{V_{\text{REO}}} e_{ij}(y) dV = \frac{1}{2} (E_{ij} + E_{ji}), \quad (2.37)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \int_{V_{\text{REO}}} \sigma_{ij}(y) dV = \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \int_{\partial V_{\text{REO}}} \sigma_{ki} n_k y_j dS. \quad (2.38)$$

Powyższe związki wskazują, że wartość makroskopowego odkształcenia jest zdefiniowana przez wartość zadanych warunków brzegowych, makroskopowe naprężenie może natomiast być określone przez wartość obciążenia działającego na brzegu REO. Ponadto, jeśli REO jest prostopadłościanem, to średnia objętościowa tensora naprężenia jest również odpowiednią średnią po powierzchni [40].

Wprowadzone zmienne poprawnie więc definiują, z punktu widzenia fizyki, zmienne makroskopowe. Efektywne zachowanie kompozytu, tj. jako równoważnego ośrodka jednorodnego, to zależność między $\langle e_{ij} \rangle$ a $\langle \sigma_{ij} \rangle$, a więc zależność realizowana również w czasie eksperymentu laboratoryjnego.

Bardzo często przy poszukiwaniu makroskopowych zależności zamiast przedstawionych powyżej warunków brzegowych jako hipotezę zamykającą stosuje się tzw. warunek makrojednorodności Hilla, tzn.

$$\langle \sigma_{ij} e_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle e_{ij} \rangle. \quad (2.39)$$

Innymi słowy, podstawą definiowania ośrodka równoważnego jest równoważność energetyczna. Należy podkreślić, że żąda się spełnienia równania (2.39) dla dowolnych e_{ij} i σ_{ij} , nawet nie związanych żadnym równaniem konstytutywnym. Mikroskopowe tensorowe pole naprężenia musi być jedynie polem samozrównoważonym, tj. spełniać statyczne równania równowagi (2.34).

Omówione powyżej warunki brzegowe dla REO prowadzą również do zasady makrojednorodności Hilla (np. Suquet [150]).

Opis matematyczny (2.34), (2.35) wraz z przyjętym warunkiem brzegowym tworzą tzw. mikromechaniczne zagadnienie brzegowe, to jest zagadnienie sformułowane dla REO. Określanie właściwości efektywnych kompozytu to rozwiązywanie tego zagadnienia, a następnie odpowiednie uśrednianie otrzymanego rozwiązania.

Równoważnie zagadnienie to może być sformułowane, przy założeniu wypukłości $w(e_{ij})$, na podstawie zasady minimum energii potencjalnej³. Wtedy poszukiwane pole przemieszczenia wewnątrz REO jest polem minimalizującym uśrednioną energię odkształcenia, tzn.

$$\inf_{u \in K(E)} \langle w(y, e_{ij}(u)) \rangle = \inf_{u \in K(E)} \left\langle \sum_{\alpha=1}^N h^\alpha(y) w^\alpha(e_{ij}(u)) \right\rangle, \quad (2.40)$$

gdzie $w^\alpha(e_{ij}(u))$ jest energią odkształcenia składnika α , kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczenia określa zbiór

$$K(E) = \left\{ u_i = E_{ij} y_j \text{ na } \partial V_{\text{REO}} \right\}. \quad (2.41)$$

Po podstawieniu

$$u_i(y) = E_{ij} y_j + \tilde{u}_i(y) \quad (2.42)$$

oraz zastosowaniu definicji makroskopowego odkształcenia (2.37) zagadnienie (2.40) definiuje zastępczy (makroskopowy) potencjał energii odkształcenia

$$W(\langle e_{ij} \rangle) = \inf_{\tilde{u} \in K(0)} \langle w(y, \langle e_{ij} \rangle + e_{ij}(\tilde{u})) \rangle. \quad (2.43)$$

W analogiczny sposób otrzymuje się zastępczy potencjał energii naprężenia (energia dopełniająca), tj.

$$U(\langle \sigma_{ij} \rangle) = \inf_{\tau \in S(\langle \sigma \rangle)} \langle u(y, \tau_{ij}) \rangle = \inf_{\tau \in S(\langle \sigma \rangle)} \left\langle \sum_{\alpha=1}^N h^\alpha(y) u^\alpha(\tau_{ij}) \right\rangle, \quad (2.44)$$

gdzie: $u^\alpha(\tau_{ij})$ jest energią naprężenia składnika α , statycznie dopuszczalne pole naprężenia określa zbiór

$$S(\langle \sigma_{ij} \rangle) = \left\{ \tau_{ij}, \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_i} = 0 \text{ w } V_{\text{REO}}, \langle \tau_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \right\}. \quad (2.45)$$

Makroskopowe związki konstytutywne są zdefiniowane przez otrzymane powyżej potencjały zastępcze⁴, tzn.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{\partial W(\langle e_{kh} \rangle)}{\partial \langle e_{ij} \rangle}, \quad (2.46)$$

³ Wśród wszystkich odpowiednio gładkich pól przemieszczeń $u_i(y)$ spełniających kinematyczne warunki brzegowe, pole przemieszczeń rzeczywistych zapewnia minimalną wartość całkowitej energii potencjalnej ciała (np. Kleiber [83]).

⁴ Wyprowadzenie tych zależności jest oparte na odpowiednim wykorzystaniu hipotezy makrojednorodności Hilla i przedstawione jest np. w pracy [123].

$$\langle e_{ij} \rangle = \frac{\partial U(\langle \sigma_{kh} \rangle)}{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}. \quad (2.47)$$

Powyższe związki wskazują, że poszukiwanie zależności między zmiennymi makroskopowymi, tj. tensorem naprężenia a odkształcenia, sprowadza się do określenia potencjałów zastępczych. Jest to szczególnie dogodnie np. podczas formułowania ograniczeń dla możliwych wartości parametrów efektywnych ośrodków kompozytowych. Zauważmy, że znane ograniczenia Voigta i Reussa są bezpośrednią konsekwencją równań (2.40) i (2.44), tj.

$$W(\langle e_{kh} \rangle) \leq \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha w^\alpha(\langle e_{kh} \rangle), \quad (2.48)$$

$$U(\langle \sigma_{kh} \rangle) \leq \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha u^\alpha(\langle \sigma_{kh} \rangle), \quad (2.49)$$

gdzie

$$c^\alpha = \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \int_{V_{\text{REO}}} h^\alpha(y) dV \quad (2.50)$$

jest udziałem frakcyjnym składnika α w kompozycie.

Przypadek kompozytu sztywno idealnie plastycznego, ze względu na brak ścisłej wypukłości potencjału dyssypacji plastycznej, wymaga odrębnego traktowania (por. Bouchitte [37], Suquet [149, 150]). W efekcie otrzymuje się makroskopową funkcję plastyczności

$$\begin{aligned} F(\langle \sigma_{ij} \rangle) \leq 0 &\Leftrightarrow \langle \sigma_{ij} \rangle \in P^h \\ &= \left\{ \langle \tau_{ij} \rangle, \exists \tau_{ij}(y), \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_i} = 0, f^\alpha(\tau_{ij}) \leq 0 \quad \forall y \in V_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N \right\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

oraz makroskopowe prawo plastycznego płynięcia

$$\langle \dot{e}_{ij}^p \rangle = \lambda \frac{\partial F(\langle \sigma_{kh} \rangle)}{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}. \quad (2.52)$$

Podsumowując tę krótką prezentację ciągłej mikromechaniki można stwierdzić, że określanie efektywnego zachowania ośrodka kompozytowego polega na rozwiązaniu odpowiednio sformułowanego zagadnienia brzegowego dla REO i jego uśrednieniu.

W przypadku ośrodków deterministycznych, takich jak kompozytowe ośrodki periodyczne, ciągła mikromechanika pozwala na dokładne określenie ich zachowania

efektywnego. Jeśli jednak analizujemy kompozytowe ośrodki losowe, to dostępna jest tylko częściowa informacja statystyczna o mikrostrukturze ośrodka, a zatem – dokładne określenie właściwości efektywnych nie jest możliwe. W tym przypadku przedstawione potencjały zastępcze trzeba interpretować jako potencjały odpowiadające pewnej klasie kompozytów o określonej statystyce. Rozważania mikromechaniczne stosowane są wtedy do formułowania, w funkcji znanej informacji statystycznej, ograniczeń dla wartości efektywnych, jak również ich oszacowań odpowiadającym określonej klasie kompozytu (patrz np.: Berryman [29], Dvorak [57], Ponte Castañeda [121], [122], Ponte Castañeda i Willis [124], Suquet [151], Willis [160], [161]). Metody oszacowań wartości parametrów efektywnych omawiane są w p. 2.3.

Przez założenie pewnej realizacji ośrodka dokonuje się również identyfikacji parametrów mikrostrukturalnych, mających znaczący wpływ na jego makroskopowe zachowanie, np.: dla ośrodków granulowanych – liczba i rozkład kontaktów międzyziarnowych (Emeriault et al. [58], Rothenburg i Bathurst [127]), dla spękanego ciała stałego – zamykanie się szczelin i poślizgi na ich powierzchniach (Telega [154]).

2.2. Matematyczna teoria homogenizacji

Przypomnijmy, celem metody homogenizacji jest sformułowanie, dla zadanego ośrodka niejednorodnego (o bardzo dużej liczbie niejednorodności), równoważnego ośrodka makroskopowo jednorodnego. Równoważnego w tym sensie, że jeśli liczba niejednorodności jest bardzo duża (zdąży do nieskończoności), to rozwiązanie dla ośrodka niejednorodnego jest bliskie (zdąży) rozwiązaniu dla ośrodka makroskopowo jednorodnego. Przy ustalonej objętości ośrodka niejednorodnego wzrost liczby niejednorodności implikuje spadek wymiaru pojedynczej niejednorodności (rys. 2.5).

Niech, dla ustalonego wymiaru niejednorodności $\varepsilon > 0$, poszukiwane pole $u^\varepsilon(x)$ (np. pole przemieszczenia) dla ośrodka niejednorodnego jest rozwiązaniem następującego zagadnienia brzegowego

$$\begin{cases} L_\varepsilon(u^\varepsilon(x)) = 0 & \text{w } \Omega, \\ \text{warunki brzegowe} & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.53)$$

gdzie L_ε jest operatorem różniczkowym opisu mikroskopowego.

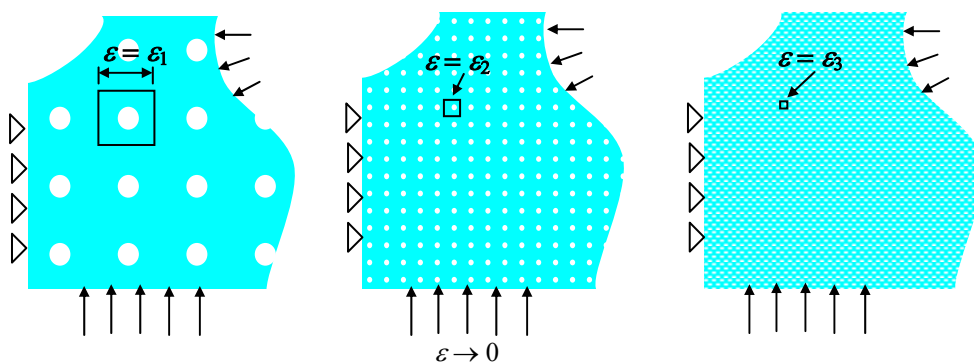
W matematycznym sformułowaniu teorii homogenizacji $u^\varepsilon(x)$ traktuje się jako ciąg rozwiązań powyższego zagadnienia brzegowego przy zmniejszających się wartościach parametru ε (rys. 2.5), a następnie przechodzi się przez żądanie, aby $\varepsilon \rightarrow 0$, do granicy $u^\varepsilon(x)$. Otrzymane w tym procesie

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x) \quad (2.54)$$

oraz opis matematyczny spełniony przez granicę $u(x)$, tj.

$$\begin{cases} L(u(x))=0 & \text{w } \Omega, \\ \text{warunki brzegowe} & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.55)$$

stanowią, odpowiednio, pole makroskopowe oraz opis makroskopowy dla równoważnego ośrodka jednorodnego, gdyż przy zmniejszającym się wymiarze niejednorodności (zwiększającej się liczbie niejednorodności) rozwiązanie dla ośrodka niejednorodnego spełniającego zależności (2.53) zdąży do rozwiązania zagadnienia (2.55).



Rys. 2.5. Schematyczny obraz matematycznej teorii homogenizacji
Fig. 2.5. Schematic of the mathematical homogenization theory

W matematycznym sformułowaniu metody homogenizacji, proces przejścia z jednej skali obserwacji do drugiej dokonuje się więc poprzez parametryzację mikroskopowego opisu matematycznego parametrem skali $\varepsilon > 0$ (np. wymiar niejednorodności), a następnie żądaniem, aby $\varepsilon \rightarrow 0$. Otrzymane przy żądaniu $\varepsilon \rightarrow 0$: granica rozwiązania oraz opis matematyczny spełniony przez tę granicę są poszukiwanymi: polem makroskopowym oraz opisem makroskopowym. Rozważa się więc cały zbiór zagadnień parametryzowanych przez ε , a nie jedną konkretną sytuację, jak w metodzie wygładzania.

Zależnie od rodzaju ośrodka, tj. czy jest to ośrodek periodyczny czy losowy, przy dowodzeniu zbieżności stosuje się, odpowiednio, twierdzenia o zbieżności ciągu funkcji okresowych (homogenizacja dla struktur periodycznych) lub twierdzenia ergodyczne (homogenizacja stochastyczna). Najczęściej są stosowane: twierdzenie ergodyczne Ackoglu–Krengela (np. Sab [132]) oraz twierdzenie Birkhoffa (np. Burgeat et.al. [39], Sab [135]).

Pod względem „narzędzia” oraz pojęć matematycznych stosowanych do opisu ośrodka losowego oraz dowodzenia zbieżności (2.54), homogenizacja stochastyczna

jest o wiele bardziej skomplikowana (pojęcia z teorii miary, ergodyczności, systemów dynamicznych etc.) niż homogenizacja struktur periodycznych. Świadczy o tym kolejność otrzymywanych wyników, tj.: najpierw ekwiwalentny opis matematyczny dla ośrodka o strukturze periodycznej, a następnie rozszerzenie ważności na ośrodki losowe (np.: Burgeat et.al. [38], [39]; Kröner [85]; Rubinstain i Torquato [128] oraz literatura cytowana w tych pracach). Jednocześnie wyniki te potwierdzają, intuicyjnie przewidywane stwierdzenie, że struktura opisu matematycznego dla równoważnego ośrodka jednorodnego powinna być taka sama, niezależnie od tego, czy mikrostruktura ośrodka jest losowa czy periodyczna, przynajmniej dla pewnych klas ośrodków i procesów. Stwierdza to rezultat otrzymany przez K. Saba [132], [133], [134], [135]: *każdy wynik homogenizacji, który jest prawdziwy dla ośrodków periodycznych, jest prawdziwy również dla statystycznie jednorodnych ergodycznych i statystycznie periodycznych ergodycznych ośrodków losowych, z wyłączeniem zjawisk perkolacji.*

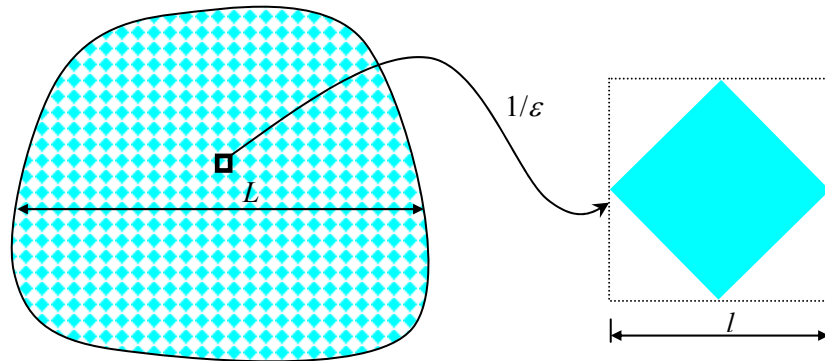
Celem niniejszej monografii jest podanie stosunkowo prostego narzędzia niematematykom, umożliwiającego dedukowanie z opisu mikroskopowego odpowiadającego mu opisu makroskopowego. Z tego względu, ponieważ periodyczność struktury zdecydowanie upraszcza analizę, w dalszej części pracy zakłada się, że analizowane ośrodki mają właśnie taką strukturę. Założenie to jednak, zgodnie z przedstawionymi wcześniej stwierdzeniami, należy traktować tylko jako „hipotezę roboczą”, zdecydowanie upraszczającą proces homogenizacji.

Zagadnienie określania parametrów efektywnych wymaga, oczywiście, innych metod dla ośrodków periodycznych i dla ośrodków losowych.

2.2.1. Metoda asymptotycznej homogenizacji

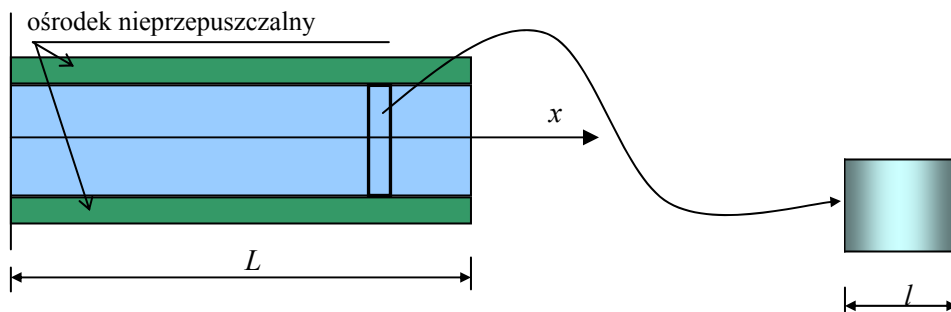
Jedną z najpowszechniej stosowanych technik poszukiwania opisu ekwiwalentnego dla ośrodka mikroniejednorodnego jest metoda asymptotycznej homogenizacji (zob.: Bensoussan et.al. [27], Sanchez-Palencia [137]). Podstawowym założeniem metody jest periodyczność struktury (rys. 2.6). Parametryzacji opisu mikroskopowego dokonuje się parametrem $\varepsilon = l/L$, reprezentującym stosunek wymiarów: pojedynczej komórki periodyczności l , z której wygenerowany jest przez periodyczność cały ośrodek, oraz L , będący jednym z wymiarów objętości rozważanego ośrodka (rys. 2.6).

Zanim jednak przejdziemy do szczegółowego omówienia metody asymptotycznej homogenizacji, w celu wyjaśnienia jej podstawowych „kroków” poszukiwania opisu makroskopowego, jak również w celu zilustrowania samego procesu matematycznej homogenizacji, przedstawiamy analizę prostego zagadnienia jednowymiarowej stacjonarnej dyfuzji substancji przez mikroniejednorodny ośrodek periodyczny. Parametry dyfuzyjne ośrodka, tzn. funkcja definiująca wartość współczynnika dyfuzji w dowolnym punkcie pojedynczej komórki periodyczności została tak przyjęta, aby było możliwe otrzymanie, dla ustalonego ε , prostej formy rozwiązania zagadnienia dyfuzji oraz granicy tego rozwiązania przy $\varepsilon \rightarrow 0$.



Rys. 2.6. Struktura periodyczna i podstawowa komórka periodyczności
Fig. 2.6. Periodic structure and base cell of periodicity

Przedstawiony poniżej proces nazywany jest również „bezpośrednią homogenizacją” [147].



Rys. 2.7. Zagadnienie jednowymiarowej dyfuzji
Fig. 2.7. Uni-axial diffusion problem

Przyjęto, że wartość współczynnika dyfuzji w dowolnym punkcie x pojedynczej komórki periodyczności określona jest następującą funkcją

$$D(x) = \frac{D_o}{1 + \cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)}, \quad (2.56)$$

gdzie D_o – stała rozkładu.

Utworzenie ośrodka z n komórek periodyczności, przy jednocześnie ustalonej długości ośrodka równej L (rys. 2.7), jest równoznaczne z przyjęciem długości pojedynczej komórki periodyczności równej $l = L/n$. Wartość współczynnika dyfuzji, w do-

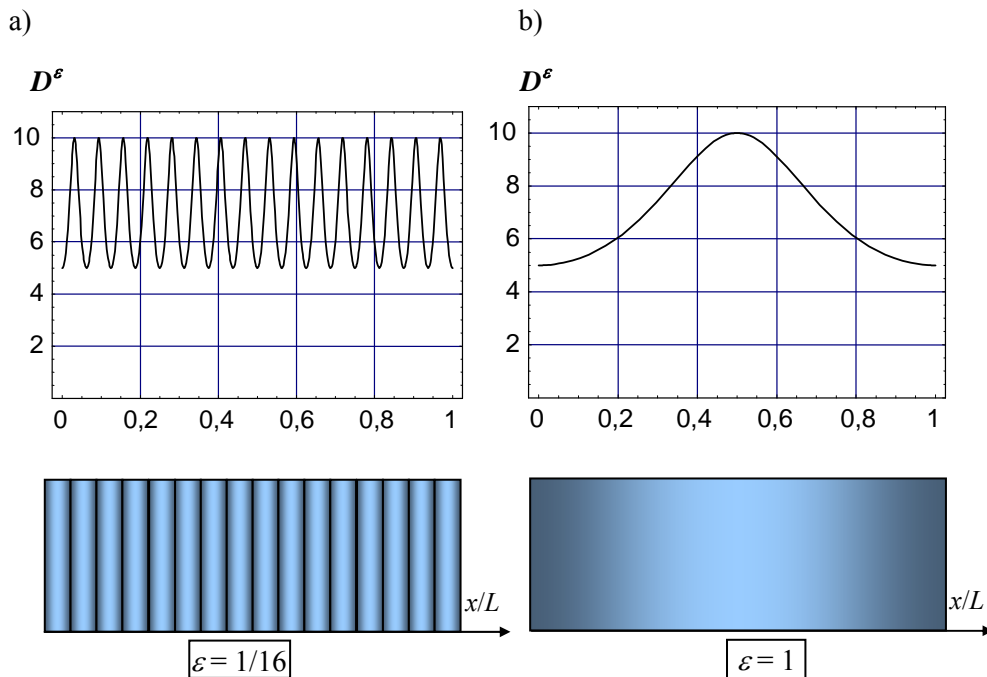
wolnym punkcie x ośrodka utworzonego z n komórek periodyczności, dana jest więc następującą funkcją

$$D_n(x) = \frac{D_o}{1 + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}. \quad (2.57)$$

Funkcja ta zależy od liczby komórek periodyczności, z których jest utworzony analizowany ośrodek, dlatego jest indeksowana przez n .

W metodzie homogenizacji do parametryzacji opisu stosowany jest jednak parametr skali: $\varepsilon = l/L$ ($= 1/n$). Po zastosowaniu tego parametru zależność (2.57) przyjmuje postać (rys. 2.8)

$$D^\varepsilon(x) = \frac{D_o}{1 + \cos^2\left(\frac{\pi x}{L\varepsilon}\right)}. \quad (2.58)$$



Rys. 2.8. Fluktuacje współczynnika przepuszczalności dyfuzyjnej materiału wzdłuż próbki (przyjęto $D_o = 10$): a) próbka zbudowana jest z 16 komórek periodyczności, b) próbka zbudowana z 1 komórki periodyczności

Fig. 2.8. Fluctuations of diffusion coefficient of material along sample ($D_o = 10$ is assumed): a) sample consists of 16 periodic unit cells, b) sample consists of 1 periodic unit cell

Proces jednowymiarowej stacjonarnej dyfuzji, parametryzowany przez ε , jest określony równaniem

$$\frac{d}{dx} \left(D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} \right) = 0, \quad (2.59)$$

gdzie $D^\varepsilon(x)$ dane jest przez równanie (2.58), natomiast $C^\varepsilon(x)$ oznacza, dla ustalonego ε (równoważnie: ustalonej liczby komórek periodyczności tworzących ośrodek), wartość stężenia substancji w punkcie x ośrodka.

Równanie (2.59) uzupełniają warunki brzegowe, które przyjęto w postaci zadanych wartości stężenia substancji na końcach próbki, tj.: $C^\varepsilon(0) = C_o$ i $C^\varepsilon(L) = 0$.

Rozwiązanie równania (2.59) otrzymuje się przez bezpośrednie całkowanie. Za-uważmy, (2.59) implikuje

$$D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} = A, \quad (2.60)$$

gdzie A jest stałą, której wartość determinują warunki brzegowe.

Wobec tego

$$C^\varepsilon(x) = A \int_0^x \frac{dx}{D^\varepsilon(x)} + C_o, \quad (2.61)$$

co – po uwzględnieniu zależności (2.58) definiującej $D^\varepsilon(x)$ oraz warunku brzegowego – $C^\varepsilon(L) = 0$, daje następującą ostateczną postać rozwiązania

$$C^\varepsilon(x) = C_o \left(1 - \frac{x}{L} \right) - \varepsilon \frac{2 C_o}{3 4\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{L} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right). \quad (2.62)$$

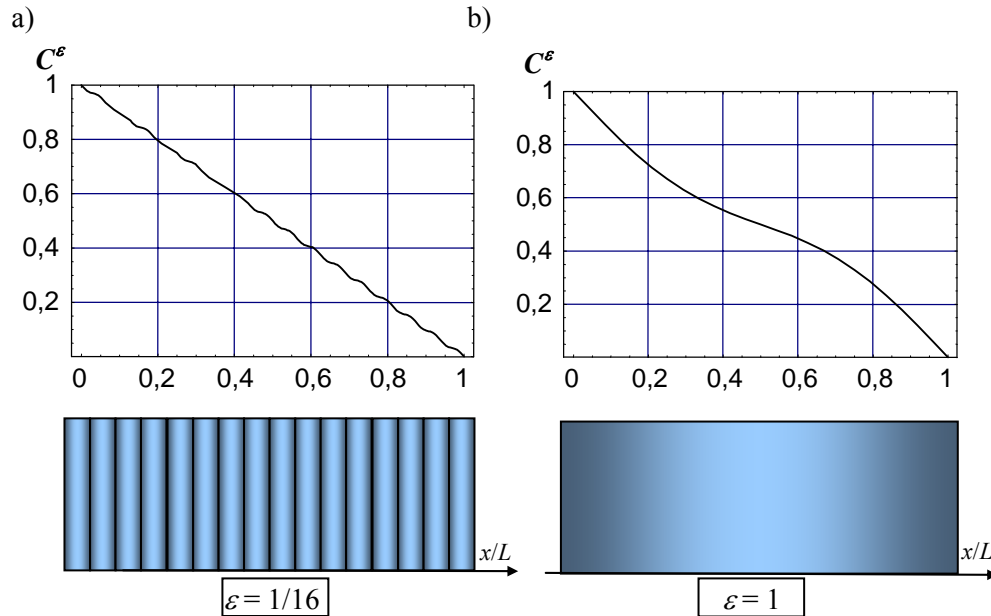
Po zastosowaniu (2.62) otrzymujemy również⁵

$$\frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} = -\frac{C_o}{L} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{L} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right\}, \quad (2.63)$$

$$Q^\varepsilon = -D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} = \frac{2}{3} D_o \frac{C_o}{L}, \quad (2.64)$$

gdzie Q^ε oznacza wartość strumienia dyfundującej substancji.

⁵ Wzór (2.64) jest konsekwencją tożsamości $\cos \left(\frac{2\pi}{L} \frac{x}{\varepsilon} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{L} \frac{x}{\varepsilon} \right) - 1$, która prowadzi wraz z (2.58) do $1 + \frac{1}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{L} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \frac{2}{3} \left(1 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{L} \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \frac{2}{3} \frac{D_o}{D^\varepsilon(x)}$.



Rys. 2.9. Stężenie substancji wzdłuż próbki (przyjęto $C_o = 1$):

a) próbka zbudowana z 16 komórek periodyczności,

b) próbka zbudowana z 1 komórki periodyczności

Fig. 2.9. Substance concentration along sample ($C_o = 1$ is assumed):

a) sample consists of 16 periodic unit cells, b) sample consists of 1 periodic unit cell

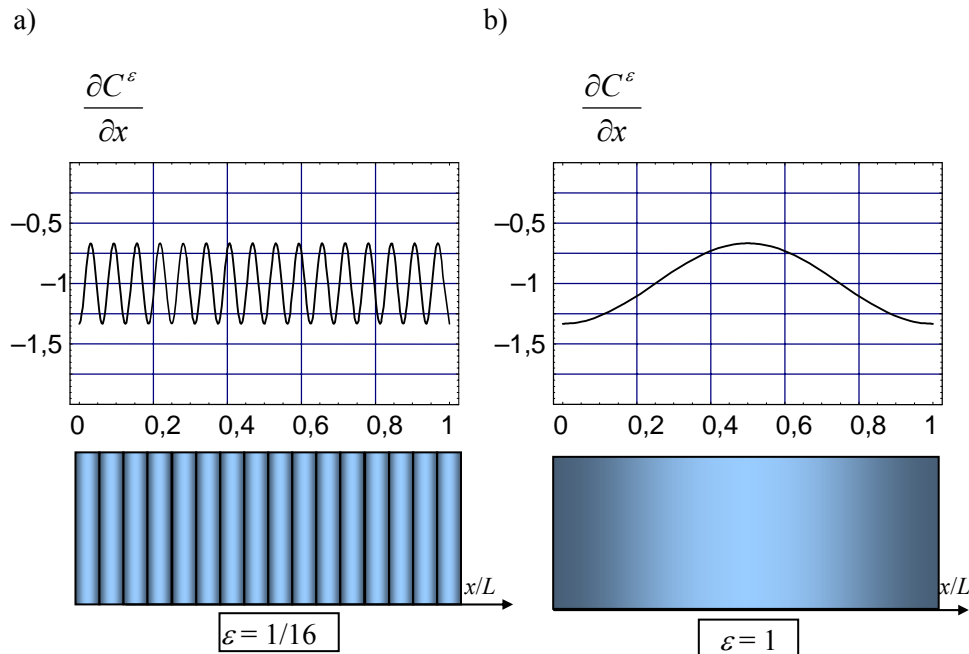
Trzy zależności, tj. (2.62), (2.63) i (2.64) wyznaczają dla niejednorodnej próbki szukane rozkłady: stężenia dyfundującej substancji, gradientu tego stężenia oraz strumienia.

Zależność (2.62) wskazuje, że wraz ze spadkiem wartości ε fluktuacje $C^\varepsilon(x)$, będące wynikiem niejednorodności materiału, są „tłumione”. Towarzyszy temu wzrost częstotliwości tych fluktuacji (rys. 2.9). W przypadku gradientu koncentracji wzrost liczby komórek periodyczności w materiale (spadek wartości ε) powoduje jedynie zwiększenie częstotliwości fluktuacji, natomiast amplituda tych fluktuacji jest stała (rys. 2.10).

Przechodząc do granicy, przy $\varepsilon \rightarrow 0$, otrzymujemy

$$C(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon(x) = C_o \left(1 - \frac{x}{L} \right), \quad (2.65)$$

$$Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^\varepsilon = - \left(\frac{2}{3} D_o \right) \frac{dC(x)}{dx}. \quad (2.66)$$



Rys. 2.10. Fluktuacje gradientu stężenia wzdłuż próbki (przyjęto $C_o = 1$):

- a) próbka zbudowana z 16 komórek periodyczności,
 b) próbka zbudowana z 1 komórki periodyczności

Fig. 2.10. Fluctuations of concentration gradient along sample ($C_o = 1$ is assumed):
 a) sample consists of 16 periodic unit cells, b) sample consists of 1 periodic unit cell

Granica gradientu stężenia oczywiście nie istnieje. Brak tej granicy nie przeszkadza jednak w sformułowaniu opisu makroskopowego, który ma być spełniony (wyrażony) tylko przez makroskopowe pole koncentracji, tj. $C(x)$.

Związek (2.66) jest makroskopowym równaniem konstytutywnym definiującym wartość strumienia dyfundującej substancji w funkcji wartości gradientu z makroskopowego pola $C(x)$. Ponieważ wartość strumienia jest stała wzdłuż całej próbki, wobec tego opis makroskopowy procesu dyfuzji stanowi następujące równanie

$$\frac{d}{dx} \left(\left(\frac{2}{3} D_o \right) \frac{dC(x)}{dx} \right) = 0. \quad (2.67)$$

Współczynnik $\frac{2}{3} D_o$ to efektywny opór dyfuzyjny ośrodka makroskopowo jednorodnego.

Otrzymany związek konstytutywny (2.66), jak również wartość efektywnego współczynnika oporu dyfuzyjnego ośrodka, nie mogą, oczywiście, zależeć od typu warunków brzegowych, jak i możliwych innych „wymuszeń” zewnętrznych, któremu poddany jest ośrodek. Otrzymane rozwiązanie nie rozstrzyga tej wątpliwości, dlatego poniżej przed-

stawiono rozwiązanie analogicznego zagadnienia, jednakże z dodatkowym „wymuszeniem” w postaci „źródeł” dostarczających substancję. Dla uproszczenia rachunków przyjęto, że rozkład tych źródeł jest stały wzdłuż całej próbki i równy $f(x) = f_o$.

Opis mikroskopowy tego zagadnienia, parametryzowany przez ε , ma postać

$$\frac{d}{dx} \left(D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} \right) + f_o = 0. \quad (2.68)$$

Warunki brzegowe przyjęto takie same jak w poprzednim przykładzie. Oczywiście $D^\varepsilon(x)$ opisuje równanie (2.58).

Równanie różniczkowe (2.68) implikuje

$$D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} = -f_o x + A_1, \quad (2.69)$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, stała A_1 jest określana z warunku brzegowego. Po ponownym scałkowaniu, tzn.

$$C^\varepsilon(x) = -f_o \int_0^x \frac{x dx}{D^\varepsilon(x)} + A_1 \int_0^x \frac{dx}{D^\varepsilon(x)} + C_o \quad (2.70)$$

i prostych, lecz żmudnych, obliczeniach oraz uwzględnieniu warunku brzegowego $C^\varepsilon(L) = 0$ otrzymujemy ostateczną postać rozwiązania, tj.

$$\begin{aligned} C^\varepsilon(x) = & \frac{3}{4} \frac{f_o}{D_o} x(L-x) + C_o \left(1 - \frac{x}{L} \right) \\ & + \varepsilon \left\{ -\frac{f_o}{D_o} \frac{L}{4\pi} x \sin \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) - \frac{1}{6\pi} \left(C_o - \frac{3}{4} \frac{f_o}{D_o} L^2 \right) \sin \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) \right\} \\ & - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{8} \frac{f_o}{D_o} \frac{L^2}{\pi^2} \left(\cos \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) - 1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Wartość strumienia dyfundującej substancji definiuje zależność

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon(x) = & -D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} \\ = & -\frac{D_o}{1 + \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L \varepsilon} \right)} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{f_o}{D_o} x + \frac{3}{4} \frac{f_o}{D_o} L - \frac{C_o}{L} - \frac{1}{2} \frac{f_o}{D_o} x \cos \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{3L} \left(C_o - \frac{3}{4} \frac{f_o}{D_o} L^2 \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon}{4} \left(\frac{f_o L}{D_o \pi} \sin \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) - \frac{f_o L}{D_o \pi} \sin \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

która po przekształceniach i zastosowaniu tej samej tożsamości, jak we wzorze (2.64), daje ostateczną postać funkcji opisującej wartość strumienia, tj.

$$Q^\varepsilon(x) = -D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} = -\left(\frac{2}{3}D_o\right) \left(-\frac{3}{2} \frac{f_o x}{D_o} + \frac{3}{4} \frac{f_o L}{D_o} - \frac{C_o}{L}\right). \quad (2.73)$$

Przechodząc do granicy, przy $\varepsilon \rightarrow 0$, uzyskujemy

$$C(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon(x) = \frac{3}{4} \frac{f_o}{D_o} x(L-x) + C_o \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (2.74)$$

$$Q(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q^\varepsilon(x) = -\left(\frac{2}{3}D_o\right) \frac{dC(x)}{dx}. \quad (2.75)$$

Równanie konstytutywne (2.75) jest dokładnie takie samo jak otrzymane wcześniej równanie (2.66). Efektywny współczynnik oporu dyfuzyjnego ma również dokładnie taką samą wartość. Opis makroskopowy dyfuzji substancji to równanie

$$\frac{d}{dx} \left(\left(\frac{2}{3} D_o \right) \frac{dC(x)}{dx} \right) + f_o = 0. \quad (2.76)$$

Przyjęcie $f_o = 0$ redukuje, oczywiście, równanie (2.76) do postaci (2.67).

Przedstawiona bezpośrednia homogenizacja zagadnienia jednowymiarowej dyfuzji miała z jednej strony zilustrować matematyczne sformułowanie metody homogenizacji, z drugiej zaś – stanowić wprowadzenie i wyjaśnienie podstawowych założeń stosowanych w metodzie asymptotycznej homogenizacji. W tym celu konieczne jest dodatkowe uwypuklenie właściwości otrzymanego powyżej rozwiązania. Otóż:

1. Parametryzowane pole $C^\varepsilon(x)$ wykazuje charakter asymptotyczny względem parametru ε (por. (2.71) i (2.62)), tj.

$$C^\varepsilon(x) = C^{(0)}(x) + \varepsilon C^{(1)}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 C^{(2)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.77)$$

gdzie: $C^{(0)}(x)$, $C^{(1)}(x)$ i $C^{(2)}(x)$ to, odpowiednio, wyrażenia przy ε^0 , ε^1 i ε^2 w zależności (2.71).

2. Wszystkie człony tego rozwinięcia zależne od zmiennej $y = x/\varepsilon$ są periodyczne względem tej zmiennej z okresem $Y = l/\varepsilon = L$ (por. (2.62), (2.71) i rys. 2.9), co oznacza, że periodyczność struktury indukują tylko periodyczne fluktuacje parametryzowanego pola. Amplituda tych fluktuacji może być funkcją również x (por. (2.71)), częstotliwość tych fluktuacji zależy jednak tylko od $y = x/\varepsilon$. Traktując więc zmienne x i $y = x/\varepsilon$ jako zmienne niezależne, parametryzowane pole można określić jako tzw. lokalnie periodyczne, tzn. periodyczne tylko względem y .

Otrzymane rozwiązanie $C^\varepsilon(x)$ może być wyrażone jak funkcja dwóch zmiennych niezależnych: x i $y = x/\varepsilon$, przy obliczaniu pochodnej przestrzennej należy jednak pamiętać, że $\frac{dy}{dx} = \varepsilon^{-1}$. Gradient parametryzowanego pola $C^\varepsilon(x)$ można zatem obliczać jako

$$\frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} = \frac{\partial C^\varepsilon(x, y)}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial C^\varepsilon(x, y)}{\partial y}. \quad (2.78)$$

3. Zmienna przestrzenna $y = x/\varepsilon$ występuje tylko w parametryzowanym polu $C^\varepsilon(x)$, będącym rozwiązaniem opisu mikroskopowego. Przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$, tzn. do $C(x)$, stanowiącym rozwiązaniem opisu makroskopowego, zmienna $y = x/\varepsilon$ „znika”. Zmienna $y = x/\varepsilon$ nazwana więc może być mikroskopową zmienną przestrzenną. Makroskopową zmienną przestrzenną jest x , gdyż w opisie makroskopowym występują operatory pochodnej przestrzennej względem tylko tej zmiennej.

4. Parametry mikrostruktury są tylko funkcją zmiennej $y = x/\varepsilon$ (zależność (2.58)). Efektywny współczynnik oporu dyfuzyjnego jest tylko funkcją parametrów mikrostruktury i wartość jego nie zależy od rodzaju „wymuszenia” zewnętrznego. W przedstawionym powyżej zagadnieniu mikrostruktura ośrodka była zdefiniowana zależnością (2.58). Proste całkowanie dowodzi, że wartość efektywnego współczynnika oporu dyfuzyjnego określa zależność

$$D^{\text{eff}} = \frac{2}{3} D_o = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon L} \int_0^{\varepsilon L} \frac{dx}{D^\varepsilon(x)}} = \frac{1}{\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{L} y\right)}{D_o} dy}. \quad (2.79)$$

Pierwsza całka po prawej stronie reprezentuje wartość średnią po długości pojedynczej komórki periodyczności. Druga całka to ponownie wartość średnia po długości pojedynczej komórki periodyczności, wymiar komórki periodyczności został jednak powiększony w jednokładności o skali ε^{-1} , a więc powiększona komórka periodyczności ma wymiar analogiczny do makroskopowego wymiaru całego ośrodka, tzn. L .

Przedstawione stwierdzenia dotyczące otrzymanego rozwiązania jednowymiarowej stacjonarnej dyfuzji są fundamentem metody asymptotycznej homogenizacji, zwanej również metodą rozwinięć dwuskalowych.

Metoda asymptotycznej homogenizacji poszukuje granicy parametryzowanego rozwiązania, zakładając, że parametryzowane pole opisu mikroskopowego wykazuje asymptotyczny charakter względem parametru ε i może być przedstawione w postaci rozwinięcia asymptotycznego zależnego od dwóch zmiennych przestrzennych x oraz $y = x/\varepsilon$

$$u^\varepsilon(x) = u^{(0)}(x, y) + \varepsilon u^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, y) + \dots + y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (2.80)$$

Każdy człon rozwinięcia asymptotycznego (2.80), tj. $u^{(i)}(x, y)$, przyjmuje się ponadto jako Y -periodyczny względem y , tzn. dla ustalonego x wartości $u^{(i)}$ w odpowiadających sobie punktach na krańcach pojedynczej komórki periodyczności (powiększonej w jednokładności o skali ε^{-1}) są takie same, tj.

$$u^{(i)}(x, y + Y) = u^{(i)}(x, y). \quad (2.81)$$

Zmienne x i y traktuje się więc jako dwie niezależne zmienne przestrzenne, modyfikując równocześnie operator pochodnej przestrzennej, tj.

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i}. \quad (2.82)$$

Poszukiwanie ekwiwalentnego opisu makroskopowego polega na wprowadzeniu rozwinięcia (2.80) do opisu mikroskopowego, z równoczesną zmianą operatorów pochodnej przestrzennej według (2.82), a następnie identyfikacji równań stojących przy odpowiednich potęgach parametru ε . W rezultacie prowadzi to do kaskady równań dla poszczególnych wyrazów rozwinięcia (2.80). Nałożony na poszczególne elementy rozwinięcia asymptotycznego $u^{(i)}(x, y)$ warunek lokalnej periodyczności (2.81) powoduje, że rozwiązania tak otrzymanych równań poszukuje się w obrębie pojedynczej komórki. Po dokonaniu uśrednienia po zmiennej y opisany proces prowadzi do równań spełnionych przez pierwszy człon rozwinięcia (2.80), które są niczym innym, jak poszukiwanym ekwiwalentnym opisem makroskopowym rozważanego zagadnienia.

W celu przybliżenia metody rozważamy, jako zagadnienie modelowe, ponownie proces stacjonarnej dyfuzji substancji przez mikroniejednorodny (periodyczny) ośrodek zajmujący obszar Ω .

Niech Ω jest obszarem ograniczonym w R^N z brzegiem $\partial\Omega$. Zgodnie z procedurą homogenizacji rozważamy rozwiązania zagadnienia brzegowego parametryzowanego przez ε

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D^\varepsilon \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial x_i} \right) + f(x) = 0 & \text{w } \Omega, \\ C^\varepsilon(x) = C_\partial(x) & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.83)$$

gdzie:

$C^\varepsilon(x)$ – wartość stężenia substancji w punkcie $x \in \Omega$, dla ustalonego ε ,

$C_\partial(x)$ – zadana wartość stężenia substancji na brzegu $\partial\Omega$,

$f(x)$ – dodatkowe źródła dopływu substancji,

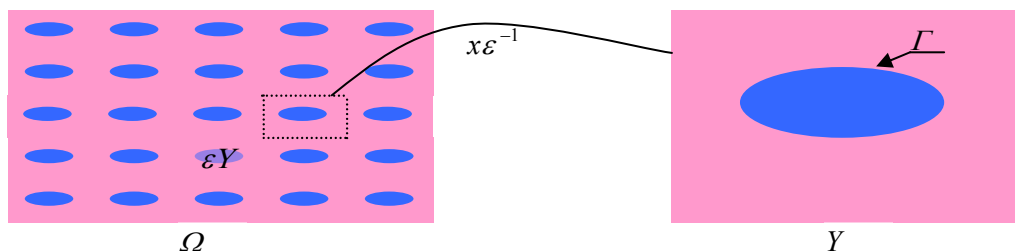
$D^\varepsilon(x)$ – współczynnik dyfuzji o wartościach charakterystycznych dla każdego składnika ośrodka (rys. 2.11).

Przy odpowiednich założeniach odnośnie $D^\varepsilon(x)$ i $f(x)$, których w celu niekomplikowania prezentacji metody nie precyzujemy, zagadnienie brzegowe (2.83) ma jednoznaczne rozwiązanie.

Ponieważ ośrodek jest periodyczny, wobec tego

$$D^\varepsilon = D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (2.84)$$

i ponadto $D(y)$ jest Y -periodyczny w R^N ($Y = [0, Y_i]^N$, rys. 2.11).



Rys. 2.11. Ośrodek periodyczny
Fig. 2.11. Periodic medium

Zgodnie z opisaną procedurą metody asymptotycznej homogenizacji zakładamy, że poszukiwane rozwiązanie $C^\varepsilon(x)$ wykazuje charakter asymptotyczny i podstawiamy

$$C^\varepsilon(x) = C^{(0)}(x, y) + \varepsilon C^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 C^{(2)}(x, y) + \dots + y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (2.85)$$

Następnie, po wprowadzeniu (2.85) do (2.83a), z równoczesnym uwzględnieniem prawa transformacji pochodnej (2.82), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(0)}}{\partial y_i} \right) \\ & + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i} + D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right] \\ & + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial x_i} + D(y) \frac{\partial C^{(2)}}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y_i} + D(y) \frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i} \right) + f(x) \right] \\ & + \varepsilon^1 [\dots] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Następny krok to selekcja wyrażen stojących przy kolejnych potęgach parametru ε i przyrównanie ich do zera. Przy ε^{-2} mamy

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(0)}(x, y)}{\partial y_i} \right) = 0 \quad \text{w } Y. \quad (2.87)$$

Ponieważ $C^{(0)}(x, y)$ jest Y -periodyczne ze względu na zmienną y , wobec tego⁶

$$C^{(0)}(x, y) = C^{(0)}(x).$$

Na podstawie otrzymanej własności, równanie przy ε^{-1} przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i} + D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y_i} \right) = 0 \quad \text{w } Y. \quad (2.88)$$

Pole $C^{(0)}(x)$ traktujemy teraz jako dane, gdyż jest y niezależne, a poszukujemy, w obrębie pojedynczej komórki periodyczności Y , rozkładu $C^{(1)}(x, y)$. Ze względu na liniowy charakter tego równania (obowiązuje zasada superpozycji), rozwiązanie ma postać

$$C^{(1)}(x, y) = \omega_i(y) \frac{\partial C^{(0)}(x)}{\partial x_i} + \bar{C}^{(1)}(x), \quad (2.89)$$

gdzie $\bar{C}^{(1)}(x)$ jest niezależne od zmiennej y (warunki brzegowe w postaci periodyczności pozwalają znaleźć rozwiązanie z dokładnością do stałej) oraz $\omega_i(y)$ jest rozwiązaniem zagadnienia lokalnego (2.88) przy $\frac{\partial C^{(0)}(x)}{\partial x_k} = \delta_{ik}$, tj.

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left(\delta_{ik} D(y) + D(y) \frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y_k} \right) = 0 \quad \text{w } Y. \quad (2.90)$$

$\omega_i(y)$ musi, oczywiście, być Y -periodyczne, δ_{ik} oznacza symbol Kroneckera.

Powyższe zagadnienie lokalne, jak się później okaże, jest kluczowym przy określaniu efektywnego współczynnika dyfuzji (tensora, jeśli rozkład składników jest anizotropowy), stąd dodatkowy komentarz.

Zakładamy, dla przejrzystości analizy, że rozważany ośrodek tworzą dwa składniki (rys. 2.11). Każdy z tych składników charakteryzuje się stałą wartością współczynnika dyfuzji, tj. D_1 oraz D_2 (indeks oznacza numer składnika). Składniki te zajmują w pojedynczej komórce periodyczności objętości Y_1 i Y_2 . Równanie (2.90) można więc, korzystając z funkcji charakterystycznych⁷, zapisać w postaci

$$h_1(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\delta_{ik} D_1 + D_1 \frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y_k} \right) + h_2(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\delta_{ik} D_2 + D_2 \frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y_k} \right) = 0 \quad \text{w } Y.$$

⁶ Istnienie i jednoznaczność rozwiązania słabego rozważanych zagadnień brzegowych sformułowanych dla pojedynczej komórki periodyczności zapewnia Lemat Laxa–Milgrama (omówiony np. w pracy [83]).

⁷ $h_1(y) = 1$, jeśli $y \in Y_1$, i $h_1(y) = 0$, jeśli $y \notin Y_1$, podobnie $h_2(y) = 1$, jeśli $y \in Y_2$ i $h_2(y) = 0$, jeśli $y \notin Y_2$.

Po scałkowaniu powyższego równania oraz skorzystaniu z twierdzenia Greena otrzymujemy

$$\int_Y \left\{ h_1(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(D_1 \frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y_k} \right) + h_2(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(D_2 \frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y_k} \right) \right\} dV = \int_{\Gamma} (D_2 - D_1) N_i dS,$$

Γ – powierzchnia kontaktu składników (rys. 2.12),

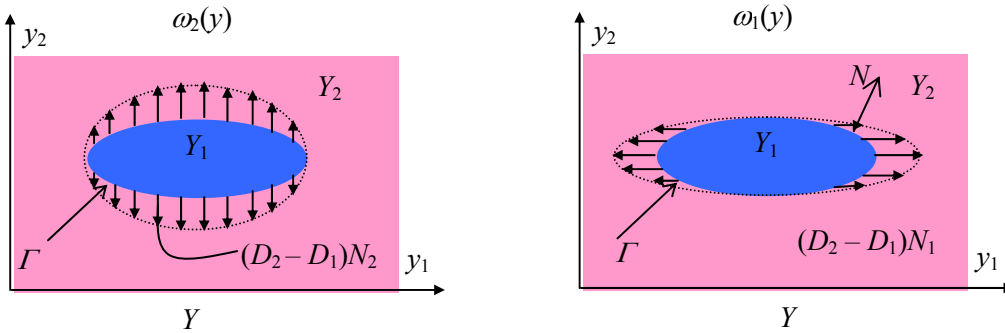
N_i – składowa wektora normalnego do powierzchni Γ skierowana od składnika Y_1 do Y_2 .

Powyższe równanie całkowe implikuje następujące sformułowanie lokalne, tj.

$$h_1(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(D_1 \frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y_k} \right) + h_2(y) \frac{\partial}{\partial y_k} \left(D_2 \frac{\partial \omega_i(y)}{\partial y_k} \right) = (D_2 - D_1) N_i \delta^{\Gamma},$$

gdzie δ^{Γ} – delta Diraca w przestrzeni trójwymiarowej w odniesieniu do powierzchni rozdziału składników Γ .

Równanie to oznacza, że pole $\omega_i(y)$ jest rozwiązaniem, w obrębie pojedynczej komórki periodyczności, równania dyfuzji z „wymuszeniem zewnętrznym” w postaci skupionych na powierzchni Γ źródeł strumienia masy o intensywności $(D_2 - D_1)N_i$ (rys. 2.12). Przy wyznaczaniu składowej $\omega_i(y)$ skupione na powierzchni Γ źródła strumienia masy mają zwrot w kierunku osi y_i (rys. 2.12). Rozwiązanie $\omega_i(y)$ jest więc funkcją tylko parametrów mikrostruktury, tzn. geometrii i wzajemnego ułożenia składników w pojedynczej komórce periodyczności oraz ich wartości współczynników oporu dyfuzyjnego.



Rys. 2.12. Graficzna interpretacja lokalnego zagadnienia brzegowego dla pola $\omega_i(y)$

Fig. 2.12. Graphical interpretation of local boundary value problem solved for $\omega_i(y)$

Ostatni krok procesu to uśrednienie po objętości Y równania przy ε^0 , tzn.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|Y\|} \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial x_i} + D(y) \frac{\partial C^{(2)}}{\partial y_i} \right) dy \\ & + \frac{1}{\|Y\|} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y_i} + D(y) \frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i} \right) dy + f(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Po dokonaniu w pierwszej całce całkowania przez części (twierdzenie Greena) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|Y\|} \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial x_i} + D(y) \frac{\partial C^{(2)}}{\partial y_i} \right) dy \\ &= \frac{1}{\|Y\|} \int_{\partial Y} \left(D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial x_i} + D(y) \frac{\partial C^{(2)}}{\partial y_i} \right) N_i dS, \end{aligned} \quad (2.92)$$

gdzie:

N_i – składowa wektora normalnego do powierzchni ∂Y ,

$\|Y\|$ – objętość komórki Y .

Warunek periodyczności implikuje zerowanie się całki po brzegu ∂Y w (2.92), a wobec tego równanie (2.91) upraszcza się do postaci

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\|Y\|} \int_Y \left(D(y) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y_i} + D(y) \frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i} \right) dy + f(x) = 0. \quad (2.93)$$

Po podstawieniu do równania (2.93) w miejsce $C^{(1)}(x, y)$ rozwiązania (2.89) otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\frac{1}{\|Y\|} \int_Y D(y) \left(\frac{\partial \omega_k(y)}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) dy \right] \frac{\partial C^{(0)}(x)}{\partial x_k} \right\} + f(x) = 0. \quad (2.94)$$

Po oznaczeniu

$$D_{ik}^{\text{eff}} = \frac{1}{\|Y\|} \int_Y D(y) \left(\frac{\partial \omega_k(y)}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) dy \quad (2.95)$$

równanie (2.94) można przedstawić w następującej postaci

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}^{\text{eff}} \frac{\partial C^{(0)}(x)}{\partial x_k} \right) + f(x) = 0. \quad (2.96)$$

Równanie (2.96) to opis makroskopowy dla zastępczego ośrodka jednorodnego, gdyż wyrażone jest tylko przez pierwszy człon rozwinięcia asymptotycznego (2.85) (jedyne, który nie „znika” podczas przejścia, przy $\varepsilon \rightarrow 0$, do granicy z parametryzowanym rozwiązaniem) oraz makroskopową zmienną przestrzenną x . Dalsza więc analiza zagadnień stojących przy kolejnych potęgach ε w równaniu (2.86) jest zbędna. Tensor D^{eff} to efektywny tensor dyfuzji dla ośrodka „ujednorodnionego”. Równanie (2.90) sformułowane dla pojedynczej komórki periodyczności wraz z (2.95) oraz wa-

runkami periodyczności umożliwiają jednoznaczne określenie wartości składowych tego tensora w funkcji wartości współczynników dyfuzji każdego składnika ośrodka oraz geometrii mikrostruktury.

Opisany proces, jak widać, jest skuteczny i równocześnie stosunkowo prosty. Łatwość dochodzenia do opisu makroskopowego jest wynikiem zastąpienia parametryzowanego pola szeregiem asymptotycznym (2.80), dlatego metoda jest nazywana metodą dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych. Stosowane są również wieloskalowe rozwinięcia asymptotyczne w modelowaniu procesów zachodzących w ośrodkach mikroniejednorodnych o tzw. hierarchicznej mikrostrukturze, tj. ośrodkach w których wyróżnia się wiele dyskretnych skal opisu matematycznego (np. [109]).

Z punktu widzenia matematycznego metoda asymptotycznej homogenizacji daje wynik ścisły, jeżeli parametryzowane pole rzeczywiście wykazuje charakter asymptotyczny w postaci (2.80). Aby więc wynik był matematycznie rygorystyczny, powinien być uzupełniony o dowód, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon(x) = C^{(0)}(x). \quad (2.97)$$

Brak dowodu (2.97) czyni wynik otrzymany metodą asymptotycznej homogenizacji wynikiem warunkowym, tj. opis makroskopowy jest poprawny, jeżeli parametryzowane pole może być zastąpione szeregiem asymptotycznym (2.80) lub równoważnie – jeśli (2.80) jest prawdziwe, to otrzymany wynik jest poprawny.

Zbieżność (2.97), w matematycznych opracowaniach poświęconych metodzie homogenizacji (np. [27], [137]), dowodzi się najczęściej za pomocą tzw. *metody energii* wprowadzonej przez Tartara. Metoda ta polega na poszukiwaniu granicy rozwiązania zagadnienia brzegowego (2.83) przez skorzystanie z jego sformułowania wariacyjnego oraz odpowiedni dobór funkcji testowej. W przypadku analizowanego zagadnienia dyfuzji, funkcja testowa stosowana w metodzie energii ma postać

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x) + \varepsilon \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \omega_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (2.98)$$

gdzie⁸: $\varphi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$ oraz $\omega_i(x/\varepsilon)$ jest rozwiązaniem zagadnienia lokalnego (2.90).

Metoda ta jest szczegółowo przedstawiona, w zastosowaniu do opisanego powyżej zagadnienia, między innymi w pracy [27].

Powróćmy ponownie do stosowanego w metodzie asymptotycznej homogenizacji rozwinięcia asymptotycznego (2.80) (w przypadku analizowanego zagadnienia dyfuzji rozwinięcie (2.85)). Zauważmy, że elementami faktycznie stosowanymi przy formułowaniu opisu makroskopowego są tylko pierwsze dwa człony rozwinięcia asymptotycznego, tj. $C^{(0)}$ i $C^{(1)}$. Dalsze elementy pojawiają się, gdy równania są już uśredniane i przez periodyczność znikają (równanie (2.92)). Łatwo wywnioskować zatem, że

⁸ Definicje i oznaczenia stosowanych przestrzeni funkcyjnych są przedstawione w Dodatku.

podstawą metody asymptotycznej homogenizacji jest przyjęcie, że przy odpowiednio małej wartości parametru ε , parametryzowane pole C^ε oraz gradient tego pola mogą być aproksymowane przez (bezpośrednia konsekwencja prawa transformacji pochodnej przestrzennej (2.82))

$$C^\varepsilon(x) \approx C^{(0)}(x); \quad \frac{\partial C^\varepsilon(x)}{\partial x} \approx \frac{\partial C^{(0)}(x)}{\partial x} + \frac{\partial C^{(1)}(x, y)}{\partial y}. \quad (2.99)$$

Wobec tego, sformułowane powyżej stwierdzenie – *wynik asymptotycznej homogenizacji jest poprawny, jeśli (2.80) jest prawdziwe* – może być zastąpione stwierdzeniem: *wynik jest poprawny, jeśli (2.99) jest prawdziwe*.

Matematycznie precyzyjny odpowiednik zależności (2.99), w którym stosuje się tzw. pojęcie zbieżności dwuskalowej, jest omówiony w następnym punkcie. Przedstawione tam twierdzenia dają ogólne matematyczne uzasadnienie poprawności wyników metody asymptotycznej homogenizacji, przynajmniej dla dużej klasy zagadnień.

2.2.2. Metoda zbieżności dwuskalowej

Odmianą omówionej wcześniej asymptotycznej homogenizacji jest, zaproponowana i rozwijana w ostatniej dekadzie, metoda zbieżności dwuskalowej (zob. Allaire [7], Nguetseng [114]).

Metoda ta wprowadza następujące nowe pojęcie zbieżności (zob. przypis 8.):

Definicja 2.1

Ciąg funkcji u^ε w $L^2(\Omega)$ jest zbieżny dwuskalowo do $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$, jeśli dla każdej funkcji testowej $\varphi(x, y) \in \mathbf{D}(\Omega; C^\infty_\#(Y))$ jest spełnione

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega \times Y} u_0(x, y) \varphi(x, y) dx dy, \quad (2.100)$$

gdzie $Y = [0, 1]^N$ jest przeskalowaną pojedynczą komórką periodyczności.

Bezpośredniej użyteczności powyższej definicji nadaje twierdzenie udowodnione po raz pierwszy przez Nguetsenga [114], tj.

Twierdzenie 2.2

Z każdego ograniczonego ciągu u^ε w $L^2(\Omega)$ można wybrać podciąg, który jest zbieżny dwuskalowo do $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$.

Definicja 2.1 wraz z twierdzeniem 2.2 implikują również tzw. zbieżność słabą ciągu w $L^2(\Omega)$. Zauważmy bowiem, że jeśli u^ε jest zbieżny dwuskalowo do $u_0(x, y)$, to – zgodnie z definicją 2.1 – równość (2.100) musi być spełniona dla dowolnej funkcji testowej $\varphi(x, y) \in \mathbf{D}(\Omega; C^\infty_\#(Y))$. Wobec tego, w szczególności, również dla $\varphi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \left[\int_Y u_0(x, y) dy \right] \varphi(x) dx, \quad (2.101)$$

co oznacza, że u^{ε} jest zbieżny w $L^2(\Omega)$ w sensie słabym do wartości średniej $u_0(x, y)$, obliczonej po objętości pojedynczej komórki periodyczności.

Twierdzenie 2.2 jest matematycznym uzasadnieniem pierwszego członu rozwinięcia asymptotycznego (2.80) dla wszystkich ciągów ograniczonych w $L^2(\Omega)$, w tym sensie, że zapewnia istnienie granicy $u_0(x, y)$, do której ciąg jest zbieżny dwuskalowo.

Praktyczne stosowanie metody zbieżności dwuskalowej polega na:

➤ sprawdzeniu ograniczoności ciągu będącego rozwiązaniem zagadnienia mikroskopowego,

➤ pomnożeniu równania spełnionego przez parametryzowany ciąg przez periodycznie oscylującą funkcję testową $\varphi(x, x/\varepsilon)$,

➤ przejściu do granicy, która w efekcie prowadzi do poszukiwanego opisu makroskopowego.

Przed omówieniem metody zbieżności dwuskalowej do zagadnienia modelowego, analizowanego w poprzednim punkcie (zagadnienie dyfuzji), podano dwa twierdzenia, udowodnione również przez Allaire'a w pracy [7], które będą sukcesywnie wykorzystywane. Inne twierdzenia, nie mniej ważne, czytelnik znajdzie również w pracy [7].

Twierdzenie 2.3

Niech u^{ε} jest ciągiem funkcji w $L^2(\Omega)$, który jest zbieżny dwuskalowo do $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$. Jeśli dodatkowo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}, \quad (2.102)$$

to dla każdego ciągu v^{ε} , który jest zbieżny dwuskalowo do $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ mamy

$$u^{\varepsilon}(x) v^{\varepsilon}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Y u_0(x, y) v_0(x, y) dy. \quad (2.103)$$

Ponadto, jeśli $u_0(x, y) \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$, to

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| u^{\varepsilon}(x) - u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (2.104)$$

Twierdzenie 2.4

Niech u^{ε} jest ciągiem ograniczonym w $H^1(\Omega)$. Wtedy, co do podciągu, u^{ε} jest zbieżny dwuskalowo do $u_0(x) \in H^1(\Omega)$ i ∇u^{ε} jest zbieżny dwuskalowo do $\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1$, gdzie $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H^1_{\#}(Y)/\mathbf{R})^9$.

⁹ $H^1_{\#}(Y)/\mathbf{R}$ jest tzw. przestrzenią ilorazową co oznacza, że $u_1(x, y)$ może być określony jedynie z dokładnością co do stałej niezależnej od y ; ∇_x i ∇_y oznaczają odpowiednio operatory gradientu względem współrzędnej x i y .

Zauważmy, że twierdzenie 2.3 rozszerza klasę dopuszczalnych funkcji testowych o wszystkie te funkcje, które są zbieżne dwuskalowo i spełniają (2.102). Twierdzenie 2.4 jest uzasadnieniem drugiego członu rozwinięcia asymptotycznego (2.80), w tym sensie, że zapewnia zbieżność dwuskalową gradientu parametryzowanego ciągu. Twierdzenie to potwierdza również prawdziwość, w sensie zbieżności dwuskalowej, związku (2.99).

Powróćmy teraz do zagadnienia dyfuzji opisanego w poprzednim punkcie. Dodatkowo przyjmujemy, w celu zapewnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązania słabego zagadnienia (2.83), że

$$0 < \alpha \leq D(y) \leq \beta; \quad f(x) \in L^2(\Omega), \quad (2.105)$$

gdzie α, β są odpowiednio współczynnikami dyfuzji dla każdego składnika ośrodka (rys. 2.11).

Można ponadto udowodnić (np. [27]), że ciąg rozwiązań spełnia następujące ograniczenie

$$\|C^\varepsilon(x)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq A \|f(x)\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.106)$$

gdzie stała A nie zależy od parametru ε . Oznacza to, że ciąg C^ε jest ograniczony w $H_0^1(\Omega)$.

Korzystając teraz z twierdzenia 2.4, oczekujemy, że poszukiwany ciąg będzie się „zachowywał” jak $C_0(x) + \varepsilon C_1(x, y)$ (podobnie jak pierwsze człony rozwinięcia asymptotycznego (2.85)). Wobec tego jako funkcję testową wybieramy

$$\varphi(x) + \varepsilon \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.107)$$

gdzie: $\varphi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$, $\varphi_1(x, y) \in \mathbf{D}(\Omega; C_\#^\infty)$.

Po pomnożeniu równania (2.83a) przez funkcję testową (2.107) oraz scałkowaniu po objętości obszaru uzyskujemy

$$\int_{\Omega} \left(\varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial x_i} \right) dx + \int_{\Omega} f(x) \left(\varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) dx = 0. \quad (2.108)$$

Całkowanie przez części i zastosowanie warunku zerowania się wartości funkcji testowych na brzegu obszaru transformuje równanie (2.108) do postaci

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial x_i} D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)}{\partial x_i} \right) dx \\ & + \int_{\Omega} f(x) \left(\varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Traktując teraz

$$D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)}{\partial y_i}\right) \quad (2.110)$$

jako funkcję testową, zgodnie z twierdzeniem 2.3, przechodzimy do granicy dwuskałowej dla sformułowania (2.109). Na podstawie twierdzenia 2.4 otrzymujemy

$$-\iint_{\Omega Y} \left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1}{\partial y_i}\right) D(y) \left(\frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi_1(x, y)}{\partial y_i}\right) dx dy + \int_{\Omega} f(x)\varphi_0(x) dx = 0. \quad (2.111)$$

Powyższe sformułowanie ma jedno rozwiązanie¹⁰: $(C_0, C_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega \times H^1(Y)/\mathbf{R})$, a wobec tego każdy podciąg jest zbieżny do tej samej granicy i w konsekwencji całe ciągi C^ε i ∇C^ε są zbieżne odpowiednio do $C_0(x)$ i $\nabla_x C_0 + \nabla_y C_1$. Zauważmy, że (2.111) jest prawdziwe dla każdej pary $(\varphi_0, \varphi_1) \in \mathbf{D}(\Omega) \times \mathbf{D}(\Omega; C_\#^\infty)$. Po podstawieniu $\varphi_1 = 0$ otrzymujemy

$$-\iint_{\Omega Y} \left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1}{\partial y_i}\right) D(y) \frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_i} dx dy + \int_{\Omega} f(x)\varphi_0(x) dx = 0, \quad (2.112)$$

które, po przekształceniu, prowadzi do

$$\int_{\Omega} \varphi_0(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1}{\partial y_i}\right) dy \right] dx + \int_{\Omega} f(x) \varphi_0(x) dx = 0. \quad (2.113)$$

Równanie (2.113) implikuje następujące sformułowanie lokalne

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1}{\partial y_i}\right) dy \right] + f(x) = 0. \quad (2.114)$$

Podobnie przy $\varphi_0 = 0$ i $\varphi_1 \neq 0$, tym razem z warunkiem periodyczności, równanie (2.111) prowadzi do zagadnienia lokalnego w postaci

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(D(y) \frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} + D(y) \frac{\partial C_1}{\partial y_i} \right) = 0. \quad (2.115)$$

Jest ono tym samym równaniem, co otrzymane równanie (2.88) przy zastosowaniu metody asymptotycznej homogenizacji. Wobec tego, po podstawieniu rozwiązania

¹⁰ Dowód istnienia i jednoznaczności rozwiązania przedstawił Allaire w pracach [7] i [74].

(2.89) do (2.114), otrzymujemy identyczny jak poprzednio, tzn. (2.96), makroskopowy opis analizowanego procesu. Udowodniliśmy ponadto równocześnie zbieżność (2.97), potwierdzając tym samym, że metoda asymptotycznej homogenizacji prowadzi do poprawnego rozwiązania.

2.2.3. Metoda Γ -zbieżności

Pojęcie Γ -zbieżności związane jest bezpośrednio ze zbieżnością funkcjonałów, a zdefiniowane jest następująco (dal Maso [54]):

Definicja 2.5

Niech (X, d) z elementami $u \in X$ jest przestrzenią metryczną z odległością d ($d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$) oraz I^ε jest ciągiem funkcjonałów zdefiniowanych na X ($I^\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$). Ciąg funkcjonałów jest Γ -zbieżny do $I^0 : X \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego $u \in X$:

$$\text{a) } \forall u_\varepsilon \rightarrow u \quad I^0(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon(u_\varepsilon),$$

$$\text{b) } \exists u_\varepsilon \rightarrow u \quad I^0(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I^\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Użyteczności tego abstrakcyjnego pojęcia nadaje twierdzenie o zbieżności wartości minimalnych funkcjonałów i elementów ich minimalizujących, a mianowicie:

Twierdzenie 2.6

Jeśli I^ε jest Γ -zbieżny do $I^0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ oraz istnieje zbiór zwarty $K \subset X$, taki że $\inf_{u \in X} I^\varepsilon(u) = \inf_{u \in K} I^\varepsilon(u)$, to:

$$\text{a) } \min_{u \in X} I^0(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\min_{u \in X} I^\varepsilon(u) \right),$$

$$\text{b) } \text{jeśli } u_\varepsilon \rightarrow u \text{ i } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\min_{u \in X} I^\varepsilon(u) \right) = \min_{u \in X} I^0(u), \text{ to } u \text{ minimalizuje } I^0.$$

Przedstawiona Γ -zbieżność (Γ -granica) jest terminem matematycznym stosunkowo „nowym”. W celu przybliżenia pojęcia Γ -granicy, jak również jego zastosowania w teorii homogenizacji, wykorzystamy ponownie otrzymane wcześniej rozwiązanie zagadnienia jednowymiarowej stacjonarnej dyfuzji opisanej równaniem (2.59). Rozwiązanie to ma postać (2.62), tj.

$$C^\varepsilon(x) = C_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) - \varepsilon \frac{2}{3} \frac{C_0}{4\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{L} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right), \quad (2.116)$$

przy czym

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon(x) = C(x) = C_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (2.117)$$

Zagadnienie (2.59) wraz z warunkami brzegowymi jest równoważne następującemu zagadnieniu minimalizacji funkcjonału (analogicznie do przedstawionej wcześniej minimalizacji energii potencjalnej p. 2.1.2), tj. znajdź $C^\varepsilon(x) \in K(C_0)$, dla którego funkcjonal

$$F^\varepsilon(U) = \frac{1}{2} \int_0^L D^\varepsilon(x) \frac{dU(x)}{dx} \frac{dU(x)}{dx} dx \quad (2.118)$$

osiąga swoje minimum, tzn.

$$\inf_{U \in K(C_0)} \left[F^\varepsilon(U) = \frac{1}{2} \int_0^L D^\varepsilon(x) \frac{dU(x)}{dx} \frac{dU(x)}{dx} dx \right] = \frac{1}{2} \int_0^L D^\varepsilon(x) \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} dx, \quad (2.119)$$

gdzie: $K(C_0) = \{U(x) \in H^1([0, L]) \mid U(x=0) = C_0 \wedge U(x=L) = 0\}$ oznacza zbiór wszystkich dopuszczalnych, ze względu na przyjęte warunki brzegowe, rozwiązań oraz $D^\varepsilon(x)$ określone jest równaniem (2.58)

W celu przybliżenia znaczenia Γ -granicy określimy ją dla funkcjonału (2.118). Skorzystamy z twierdzenia (2.6) oraz z faktu, że $C^\varepsilon(x)$ dane równaniem (2.116), jako rozwiązanie równoważnego sformułowania (2.59), minimalizuje funkcjonal (2.118). Zgodnie z twierdzeniem 2.6 mamy

$$\min_{U \in K(C_0)} F^0(U) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{U \in K(C_0)} F^\varepsilon(U) \right), \quad (2.120)$$

gdzie przez $F^0(U)$ oznaczono poszukiwaną Γ -granice funkcjonału $F^\varepsilon(U)$.

Za pomocą równania (2.116) możemy bezpośrednio obliczyć wartość wyrażenia po prawej stronie równości (2,120), mianowicie

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{U \in K(C_0)} F^\varepsilon(U) \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^L D^\varepsilon(x) \left\{ \frac{dC^\varepsilon(x)}{dx} \right\}^2 dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^L D^\varepsilon(x) \left\{ \frac{d}{dx} \left[C_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) - \varepsilon \frac{2}{3} \frac{C_0}{4\pi} \sin \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) \right] \right\}^2 dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} D_0 \left(\frac{C_0}{L} \right)^2 \int_0^L \frac{1}{1 + \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L \varepsilon} \right)} \left(1 + \frac{1}{3} \cos \left(\frac{2\pi x}{L \varepsilon} \right) \right)^2 dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} D_0 \left(\frac{2}{3} \frac{C_0}{L} \right)^2 \int_0^L \left(1 + \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L \varepsilon} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} D_0 \right) \left(\frac{C_0}{L} \right)^2 L. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Ponadto, korzystając z równania (2.117) określającego $C(x)$, równość (2.121) można przedstawić jako

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{U \in K(C_0)} F^\varepsilon(U) \right) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{2}{3} D_0 \right) \frac{dC(x)}{dx} \frac{dC(x)}{dx} dx. \quad (2.122)$$

Prawa strona (2.122) przedstawia wartość minimalną funkcjonału

$$F^0(U) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{2}{3} D_0 \right) \frac{dU(x)}{dx} \frac{dU(x)}{dx} dx, \quad (2.123)$$

gdyż funkcja $C(x)$, jako rozwiązanie zagadnienia makroskopowego (2.68), jest również rozwiązaniem równoważnego zagadnienia minimalizacji powyższego funkcjonału. Wobec tego, zgodnie z (2.120), funkcjonał (2.123) jest Γ -granicą funkcjonału $F^\varepsilon(U)$ (2.118).

Podsumujmy w punktach, w zastosowaniu do teorii homogenizacji, otrzymany wynik, tj.:

1. Praktyczne wykorzystanie Γ -zbieżności w teorii homogenizacji polega na:

a) przeformułowaniu opisu mikroskopowego na równoważne zagadnienie wariacyjne minimalizacji funkcjonału;

b) Γ -granica funkcjonału opisu mikroskopowego jest funkcjonałem, którego minimalizacja stanowi poszukiwany opis makroskopowy dla zastępczego ośrodka jednorodnego.

2. Przedstawione twierdzenie 2.6, w przeciwieństwie do metody asymptotycznej homogenizacji, jak i metody zbieżności dwuskalowej, nie daje jednak żadnej wskazówki, jak poszukiwać elementu minimalizującego funkcjonał mikroskopowy oraz Γ -granicę tego funkcjonału. W przedstawionym przykładzie jednowymiarowej stacjonarnej dyfuzji, twierdzenie 2.6 było użyteczne przy określaniu Γ -granicy tylko dlatego, że znana była postać funkcji (rozwiązanie (2.116)) minimalizującej funkcjonał opisu mikroskopowego oraz jej granica przy $\varepsilon \rightarrow 0$ (równanie (2.117)). Umożliwiło to kroki (2.121)–(2.123) prowadzące do Γ -granicy analizowanego funkcjonału.

Zatytułowanie niniejszego podrozdziału jako „metoda Γ -zbieżności” oznacza, że istnieją jednak wyniki, które pozwalają na bezpośrednie wykorzystanie pojęcia Γ -zbieżności do poszukiwania opisu makroskopowego. Pierwszy z przedstawionych dalej wyników (otrzymany przez Marcelliniego [106]) stwierdza:

Twierdzenie 2.7

Niech $W(y, E)$ jest funkcją wypukłą ze względu na drugi argument oraz periodyczną ze względu na pierwszy, wtedy, jeśli dla pewnego $p > 1$ istnieją dwie stałe $0 < \lambda \leq \Lambda$, takie że

$$0 \leq \lambda |E|^p \leq W(y, E) \leq \Lambda (1 + |E|^p), \quad (2.124)$$

to

$$I^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \left(W\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u(x)\right) - f(x)u(x) \right) dx \quad (2.125)$$

jest Γ -zbieżny do funkcjonału $I(u)$

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(W^h(\nabla u(x)) - f(x)u(x) \right) dx, \quad (2.126)$$

gdzie potencjał zastępczy W^h jest zdefiniowany

$$W^h(E) = \inf_{\xi \in W_{\#}^{1,p}(Y)} \frac{1}{\|Y\|_Y} \int_Y W(y, E + \nabla \xi(y)) dy. \quad (2.127)$$

Drugi wynik (otrzymany przez Müllera [107]) to rozszerzenie powyższego twierdzenia o przypadek, gdy $W(y, E)$ jest niewypukła, np. geometrycznie nieliniowa sprężystość. Γ -granica jest ponownie zdefiniowana równaniem (2.126), jednak potencjał zastępczy tym razem definiuje następujące zagadnienie minimalizacyjne, tj.

$$W^h(E) = \inf_{k \in N} \inf_{\xi \in W_{\#}^{1,p}(kY)} \frac{1}{k^N \|Y\|_{kY}} \int_{kY} W(y, E + \nabla \xi(y)) dy. \quad (2.128)$$

W powyższych związkach Y oznacza, tak jak dotychczas, przeskalowaną pojedynczą komórkę periodyczności.

Podstawowa różnica między równaniami (2.127) a (2.128) to obszar, w którym poszukujemy rozwiązania minimalizującego funkcjonał. Gdy potencjał jest niewypukły, wówczas poszukiwanie elementu minimalizującego jest nie tylko w obrębie pojedynczej komórki periodyczności (tak jak w (2.127)), ale ich kolekcji. Innymi słowy – obszar, w którym funkcjonał osiąga wartość minimalną, tworzy w ogólności k^N ($N = 1$ – zagadnienie jednowymiarowe, $N = 2$ – zagadnienie dwuwymiarowe, $N = 3$ – zagadnienie przestrzenne) pojedynczych komórek periodyczności i k należy wyznaczyć. Zatem a priori nie znamy, w terminologii metody wygładzania, rozmiaru REO. Ten efekt jest wynikiem utraty wypukłości potencjału. Wynik (2.128), poza metodą Γ -zbieżności, jest nieosiągalny metodami omówionymi wcześniej.

W celu ilustracji praktycznego stosowania twierdzenia 2.7 rozważamy ponownie zagadnienie homogenizacji procesu dyfuzji substancji opisanego układem (2.83) (to samo zagadnienie, które analizowane było: metodą asymptotycznej homogenizacji i metodą zbieżności dwuskalowej). Sformułowanie wariacyjne opisu mikroskopowego to minimalizacja następującego funkcjonału

$$F^\varepsilon(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} f(x) U(x) dx. \quad (2.129)$$

Oczywiście, poszukiwane parametryzowane pole $C^\varepsilon(x)$ to rozwiązanie równania

$$\min_{U \in H_0^1(\Omega)} F^\varepsilon(U) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial C^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \frac{\partial C^\varepsilon(x)}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} f(x) C^\varepsilon(x) dx. \quad (2.130)$$

Korzystając z twierdzenia 2.7, obliczamy – zgodnie ze wzorem (2.127) – potencjał zastępczy, tj.

$$W^h\left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i}\right) = \inf_{\bar{C}_1 \in H_{\#}^1(Y)} \frac{1}{\|Y\|} \frac{1}{2} \int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{C}_1(y)}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{C}_1(y)}{\partial y_i} \right) dy. \quad (2.131)$$

Niech $C_1(y)$ jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia, wtedy [83] $\forall V(y) \in H_{\#}^1(Y)$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{\|Y\|} \frac{1}{2} \int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial [C_1(y) + \lambda V(y)]}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial [C_1(y) + \lambda V(y)]}{\partial y_i} \right) dy \right]_{\lambda=0} = 0, \quad (2.132)$$

co prowadzi do następującego równania

$$\forall V(y) \in H_{\#}^1(Y) \quad \int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial V}{\partial y_i} dy = 0. \quad (2.133)$$

Dodatkowe całkowanie przez części i wykorzystanie warunku periodyczności daje

$$\forall V(y) \in H_{\#}^1(Y) \quad \int_Y \frac{\partial}{\partial y_i} \left[D(y) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y_i} \right) \right] V dy = 0. \quad (2.134)$$

Powyższe równanie implikuje zagadnienie lokalne otrzymane już wcześniej metodą asymptotycznej homogenizacji, tj. (2.88). Wobec tego, korzystając z rozwiązania zagadnienia (2.88), tj. równania (2.89), możemy zapisać

$$\frac{\partial C_1(y)}{\partial y_i} = \frac{\partial \omega_k(y)}{\partial y_i} \frac{\partial C_0(x)}{\partial x_k}. \quad (2.135)$$

Ponieważ $C_1(y)$ minimalizuje funkcjonal (2.131), wobec tego zależność (2.131) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} & W^h\left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{\|Y\|} \left(\frac{1}{2} \int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial C_0}{\partial x_i} dy + \frac{1}{2} \int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial C_1(y)}{\partial x_i} dy \right). \end{aligned} \quad (2.136)$$

Uwzględniając jednak, że (2.133) musi być spełnione $\forall V(y) \in H_{\#}^1(Y)$, więc również dla $V(y) = C_1(y)$, zależność (2.136) upraszcza się do

$$W^h \left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\|Y\|} \frac{1}{2} \int_Y D(y) \left(\frac{\partial C_0}{\partial x_i} + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial C_0}{\partial x_i} dy. \quad (2.137)$$

Po podstawieniu równania (2.135) do wzoru (2.137) otrzymujemy ostateczną postać potencjału zastępczego, tj.

$$W^h \left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\|Y\|} \int_Y D(y) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \omega_k(y)}{\partial y_i} \right) dy \right] \frac{\partial C_0}{\partial x_i} \frac{\partial C_0}{\partial x_k} \quad (2.138)$$

lub

$$W^h \left(\frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} D_{ik}^{\text{eff}} \frac{\partial C_0}{\partial x_i} \frac{\partial C_0}{\partial x_k}, \quad (2.139)$$

gdzie

$$D_{ik}^{\text{eff}} = \frac{1}{\|Y\|} \int_Y D(y) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial \omega_k(y)}{\partial y_i} \right) dy \quad (2.140)$$

jest efektywnym tensorem dyfuzji dla ośrodka ujednorodnionego. Związek ten jest dokładnie taki sam jak otrzymany metodą asymptotycznej homogenizacji (por. (2.95)).

Zgodnie z twierdzeniem (2.7) Γ -granica ma więc postać

$$F^{(0)}(C_0) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} D_{ik}^{\text{eff}} \frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial C_0(x)}{\partial x_k} - f(x) C_0(x) \right) dx. \quad (2.141)$$

Zagadnienie minimalizacji powyższego funkcjonału to opis makroskopowy dla ośrodka ujednorodnionego, tzn.

$$\min_{C_0 \in H_0^1(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} D_{ik}^{\text{eff}} \frac{\partial C_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial C_0(x)}{\partial x_k} - f(x) C_0(x) \right) dx. \quad (2.142)$$

Opis ten jest równoważny lokalnemu sformułowaniu opisu makroskopowego (2.96), otrzymanego metodą asymptotycznej homogenizacji.

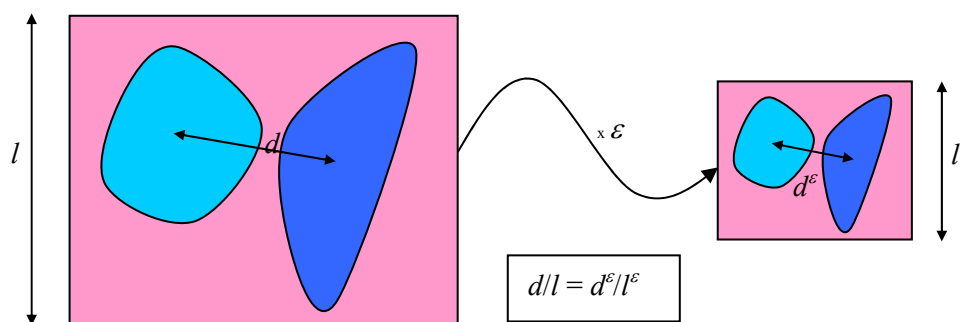
2.2.4. Skalowanie opisu mikroskopowego

Omówione wcześniej matematyczne sformułowanie teorii homogenizacji opisuje pewną wyidealizowaną sytuację, tj. żąda się, aby wymiar niejednorodności zdołał do zera. W rzeczywistych ośrodkach spotykamy się jednak z zagadnieniem odwrotnym,

tj. wymiar niejednorodności jest dany (określony), kontrolowana natomiast może być wielkość próbki branej do eksperymentu. Czy wobec tego przedstawiony wcześniej proces myślowy matematycznej teorii homogenizacji jest adekwatny do procesu poszukiwania ekwiwalentnego opisu dla ośrodków rzeczywistych? Odpowiedź jest pozytywna, pod warunkiem jednak, że opis mikroskopowy będzie przeskalowany odpowiednio do analizowanego procesu (np. Auriault [16], Hornung [74], Strzelecki [147]).

Przed zilustrowaniem tego stwierdzenia odpowiednimi przykładami, wyjaśnijmy najpierw, dlaczego w sformułowaniu matematycznym teorii homogenizacji wzrost liczby niejednorodności w próbce realizuje się przez sukcesywne pomniejszanie, przy jednocześnie ustalonym wymiarze próbki, wymiaru niejednorodności, a nie przez powiększanie wymiaru próbki przy ustalonym wymiarze niejednorodności. Powód jest, oczywiście, natury czysto matematycznej, tzn.: aby poszukiwać, przy $\varepsilon \rightarrow 0$, granicy parametryzowanego rozwiązania, musi być ono „rozpięte” na stałym obszarze. Po drugie, w celu udowodnienia, że z ciągu parametryzowanych rozwiązań można wybrać podciąg zbieżny, parametryzowane rozwiązanie musi być ograniczone, a to na ogół wymaga ograniczonego obszaru, nad którym są „rozpięte” te funkcje.

Sposób pomniejszania pojedynczej komórki periodyczności, w matematycznym sformułowaniu metody homogenizacji, nie jest dowolny. Dokonuje się tego w transformacji przez jednokładność o skali ε . Transformacja ta zachowuje, możliwie wierne, większość cech strukturalnych ośrodka. Na ogół wszystkie bezwymiarowe cechy geometryczne mikrostruktury, takie jak: udział frakcyjny składników ośrodka, względne odległości między składnikami ośrodka, kształt poszczególnych niejednorodności nie ulegają zmianie (rys. 2.13).



Rys. 2.13. Transformacja w jednokładności pojedynczej komórki periodyczności
Fig. 2.13. Homothetic transformation of periodic unit cell

Elementy charakteryzujące mikrostrukturę z mianami (jednostkami), na przykład: odległości, powierzchni, są wrażliwe na takie transformacje, tzn. wartości ich zależą od aktualnej skali jednokładności, w której przetransformowana została pojedyncza komórka periodyczności. W przypadku ośrodka porowatego na przykład drastycznej

zmianie ulega wartość powierzchni wewnętrznej na jednostkę objętości ośrodka (rys. 2.14).

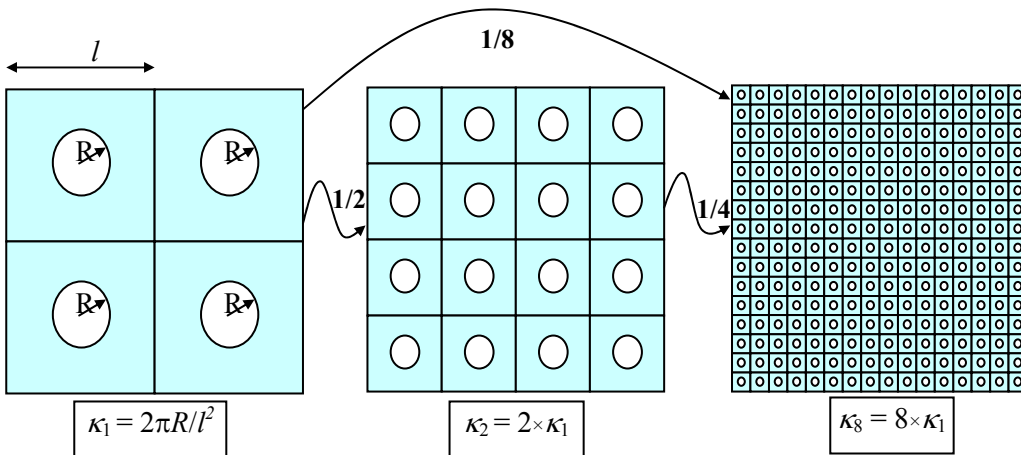
Jeśli V_1 oznacza miarę objętości pojedynczej komórki periodyczności (przed jej transformacją w jednokładności) oraz S_1 – miarę powierzchni wewnętrznej (powierzchnia między ciałem stałym a porami), to po transformacji w jednokładności o skali ε odpowiadające im wielkości to: $V_\varepsilon = \varepsilon^3 V_1$ i $S_\varepsilon = \varepsilon^2 S_1$. Wobec tego wartość powierzchni wewnętrznej w jednostkowej objętości ośrodka, po transformacji pojedynczej komórki periodyczności w jednokładności o skali ε , przyjmie wartość

$$\kappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2 S_1}{\varepsilon^3 V_1} = \varepsilon^{-1} \kappa_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty, \quad (2.143)$$

gdzie:

$\kappa_1 = S_1/V_1$ – powierzchnia właściwa ośrodka przed jego transformacją w jednokładności,

κ_ε – powierzchnia właściwa ośrodka po jego transformacji w jednokładności o skali ε .



Rys. 2.14. Zmiany wartości powierzchni właściwej spowodowanej transformacją jednokładną

Fig. 2.14. Variations of specific surface due to homothetic transformation

W przypadku więc analizy procesów, w których powierzchnia właściwa lub inny parametr mikrostruktury, wrażliwy na transformacje jednokładne, wpływa na własności efektywne ośrodka, wartości parametrów efektywnych zależą od wymiaru pojedynczej komórki periodyczności. Ponadto, przy przejściu do granicy z parametryzowanym polem, przy $\varepsilon \rightarrow 0$, otrzymamy wtedy zbieżności: do zera lub do nieskończoności. Z tego względu w takich przypadkach proces homogenizacji musi być rozumiany jako formułowanie opisu zastępczego dla ośrodka o określonym wymiarze niejednorodności i odpowiednio dużym wymiarze całej objętości, tzn. liczba komórek

generujących przez periodyczność rozważany ośrodek musi być bardzo duża. Takie sformułowanie implikuje konieczność przeskalowania opisu mikroskopowego.

Poniżej przedstawiamy skalowanie procesu przepływu nieściśliwej lepkiej cieczy Newtona przez ośrodek porowaty. W celu uproszczenia analizy zakładamy dodatkowo, że przestrzeń porową ośrodka tworzą „kanaliki” o stałym przekroju kołowym wzdłuż ich długości (rys. 2.15). Analizujemy wynik dwóch jakościowo różnych eksperymentów (rys. 2.15), tj. przy ustalonym wymiarze próbki L_0 żądamy, aby wymiar pojedynczej komórki periodyczności $l \rightarrow 0$ (sformułowanie matematyczne) oraz przy ustalonym wymiarze komórki periodyczności l_0 żądamy, aby $L \rightarrow \infty$ (ten eksperyment nazywamy sformulowaniem fizycznym).

Tworzenie ośrodka w tych dwóch sformulowaniach odbywa się następująco: w pierwszym kroku konstruowany jest ośrodek porowaty z N (niezdeformowanych) komórek periodyczności, tak aby otrzymać, żądany w sformulowaniu matematycznym, wymiar próbki L_0 . Obszar zajmowany przez ośrodek porowaty w sformulowaniu matematycznym, oznaczany przez Ω_1^m , jest więc w tym kroku analogiczny do obszaru Ω_1^f zajmowanego przez ośrodek w sformulowaniu fizycznym (rys. 2.15). Następnie realizowane jest sukcesywne zwiększanie liczby komórek periodyczności w tych dwóch sformulowaniach, tj.: w sformulowaniu matematycznym przez pomniejszanie wymiaru komórki periodyczności w jednokładności o skali $1/k$, natomiast w sformulowaniu fizycznym – przez sukcesywne, przy stałym wymiarze komórki periodyczności, zwiększanie obszaru. Obszary zajmowane przez te ośrodki w kroku k są więc oznaczane odpowiednio przez $\Omega_{1/k}^m$ oraz Ω_k^f (rys. 2.15), gdzie indeks dolny oznacza bądź skalę jednokładności, w której przetransformowana została komórka periodyczności (sformułowanie matematyczne), bądź stosunek aktualnego wymiaru próbki do wymiaru początkowego (sformułowanie fizyczne). Odpowiadające tym obszarom powierzchnie kontaktu płynu z ciałem stałym oznaczane są odpowiednio przez $\Gamma_{1/k}$ i Γ_k (rys. 2.15). Taki sposób tworzenia, w tych dwóch sformulowaniach, ośrodków pozwala na ciągłe zachowanie ich podobieństwa. Zauważmy, dla ustalonej wartości parametru k , obszar $\Omega_{1/k}^m$ jest odwzorowaniem obszaru Ω_k^f w jednokładności o skali $1/k$. Umożliwia to, w obu sformulowaniach, parametryzację analizowanego procesu tym samym parametrem k .

Równania konstytutywne nieściśliwej lepkiej cieczy Newtona mają postać [88]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.144)$$

gdzie:

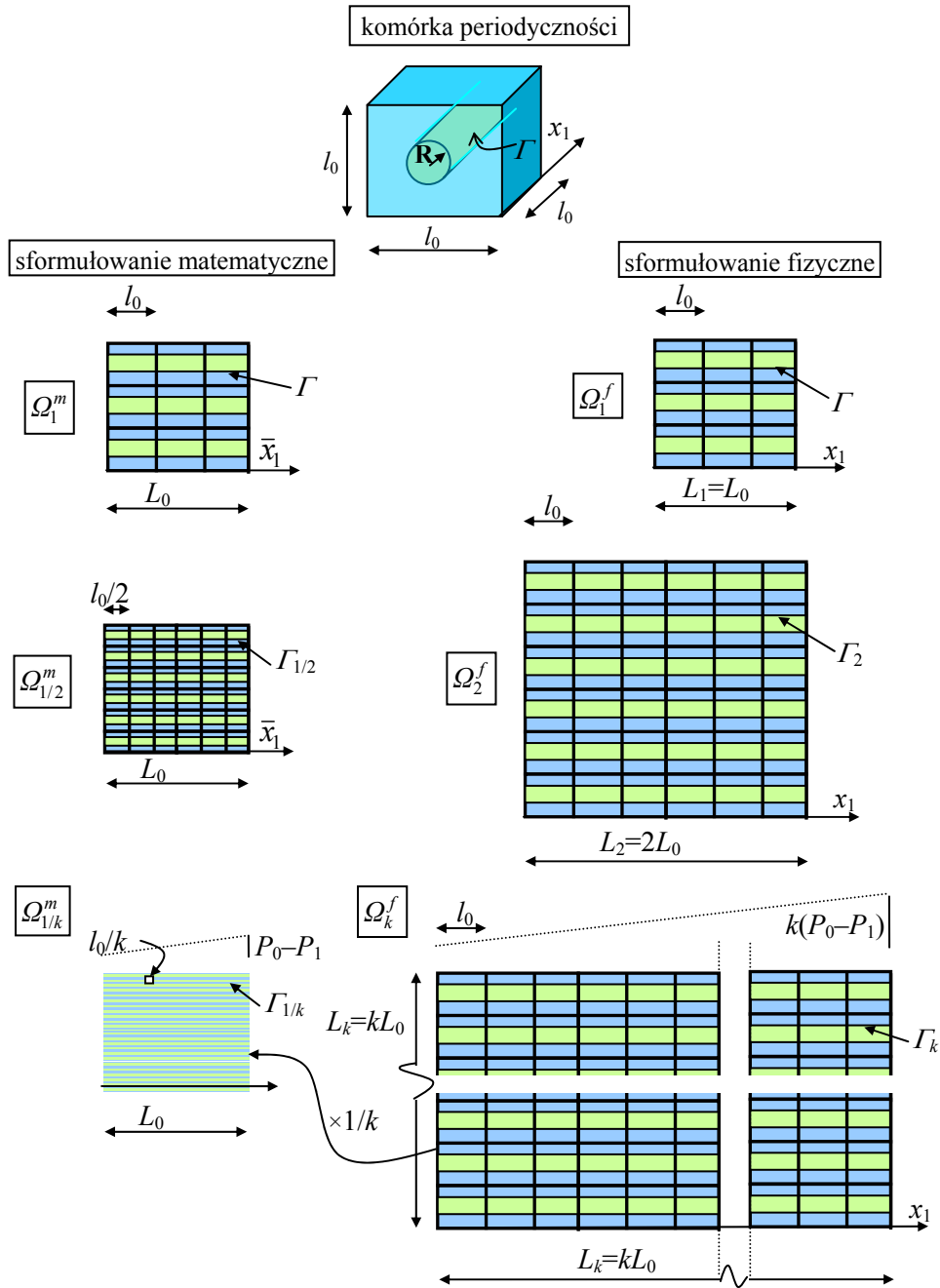
σ_{ij} – składowa tensora naprężenia cieczy,

p – ciśnienie cieczy,

v_i – składowa wektora prędkości cieczy,

μ – lepkość cieczy,

δ_{ij} – symbol Kroneckera.



Rys. 2.15. Geometryczna ilustracja sformułowania matematycznego i fizycznego procesu filtracji
 Fig. 2.15. Geometrical representation of mathematical and physical formulations of filtration process

Warunek nieściśliwości cieczy to

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.145)$$

Przy odpowiednio małym gradiencie ciśnienia i małej wartości stosunku średnicy kanalika do jego długości, pomijając zaburzenia przy końcach kanalika, przepływ cieczy jest przepływem laminarnym i nazywa się go *przepływem Poiseuille'a* (Landau i Lifszyc [88]). Przepływ ten charakteryzuje stała wartość, wzdłuż kanalika, gradientu ciśnienia oraz – dla ustalonej wartości gradientu ciśnienia – stała wartość strumienia cieczy przepływającej przez pojedynczy kanalik. Wartość strumienia cieczy (równoważnie: średnia prędkość cieczy w kanaliku) jest proporcjonalna do kwadratu średnicy kanalika oraz gradientu ciśnienia, tj.¹²

$$\langle v_1 \rangle = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{(P_0 - P_1)}{L}, \quad (2.146)$$

gdzie:

$\langle v_1 \rangle$ – średnia prędkość cieczy w kanaliku (w kierunku x_1 (rys. 2.15)),

R – promień kanalika,

L – długość kanalika,

$(P_0 - P_1)$ – różnica ciśnień na końcach kanalika.

Zależność (2.146) jest ważna tylko dla przepływów, którym towarzyszy warunek pełnej adhezji, tzn. zerowa wartość wektora prędkości cieczy na powierzchni kontaktu z ciałem stałym.

Zauważmy, w sformułowaniu matematycznym stosunek średnicy kanalika do jego długości, dla ustalonej wartości k , jest równy

$$\frac{2R_{1/k}}{L_0} = \frac{2R}{kL_0}, \quad (2.147)$$

gdzie:

R – promień kanalika w niezdeformowanej komórce periodyczności (rys. 2.15),

$R_{1/k} = R/k$ – promień kanalika w komórce periodyczności po jej transformacji w jednokładności o skali $1/k$,

L_0 – długość próbki w sformułowaniu matematycznym.

Analogiczna wartość, dla tej samej wartości k , charakteryzuje ośrodek w sformułowaniu fizycznym, tj.

$$\frac{2R}{L_k} = \frac{2R}{kL_0}, \quad (2.148)$$

gdzie: $L_k = kL_0$ – aktualna długość próbki w sformułowaniu fizycznym (rys. 2.15).

¹² Wyprowadzenie w książce Landau i Lifszyc [88, s. 74–75]. Przedstawiony tam wzór opisuje wartość masy cieczy Q przepływającej w jednostce czasu przez przekrój kanalika. Wzór (2.146) jest bezpośrednio konsekwencją tożsamości $\langle v_1 \rangle = Q/(\rho\pi R^2)$, gdzie: ρ – gęstość cieczy.

Wobec tego, przy dostatecznie dużej wartości k , zarówno w sformułowaniu matematycznym, jak i sformułowaniu fizycznym, przepływ cieczy przez pory ośrodka jest *przepływem Poiseuille'a*.

Aby zachować warunek podobieństwa obu myślowo prowadzonych eksperymentów, wraz ze wzrostem długości próbki (sformułowanie fizyczne), różnica ciśnień na końcach próbki jest w sformułowaniu fizycznym proporcjonalnie powiększana (rys. 2.15), tak aby gradient ciśnienia cieczy (siła wymuszająca przepływ) nie ulegał zmianie wraz ze zmianą k .

Po oznaczeniu, w sformułowaniu matematycznym, parametryzowanego pola ciśnienia przez ${}^{1/k}p(\bar{x}_1)$ oraz pola prędkości przez ${}^{1/k}v_1(\bar{x}_1)$ (pozostałe składowe pola prędkości są równe zeru w *przepływie Poiseuille'a*) zgodnie z (2.146) możemy zapisać

$$\left\langle {}^{1/k}v_1 \right\rangle = -\frac{R_{1/k}^2 (P_0 - P_1)}{8\mu L_0} = -\frac{1}{k^2} \frac{R^2 (P_0 - P_1)}{8\mu L_0} \quad (2.149)$$

oraz (gradient ciśnienia jest stały wzdłuż kanalika)

$$\frac{\partial {}^{1/k}p}{\partial \bar{x}_1} = -\frac{P_0 - P_1}{L_0}. \quad (2.150)$$

Podobnie postępując, w sformułowaniu fizycznym otrzymujemy

$$\left\langle {}^k v_1 \right\rangle = -\frac{R^2 k (P_0 - P_1)}{8\mu L_k} = -\frac{R^2 (P_0 - P_1)}{8\mu L_0}, \quad (2.151)$$

$$\frac{\partial {}^k p}{\partial x_1} = -\frac{P_0 - P_1}{L_0}, \quad (2.152)$$

gdzie:

- ${}^k p(x_1)$ i ${}^k v_1(x_1)$ – odpowiednio, parametryzowane pola: ciśnienia i prędkości cieczy w sformułowaniu fizycznym,
- \bar{x}_1 – współrzędna przestrzenna w sformułowaniu matematycznym,
- x_1 – współrzędna przestrzenna w sformułowaniu fizycznym (obszar $\Omega_{1/k}^m$ jest odwzorowaniem obszaru Ω_k^f w jednokładności o skali $1/k$, wobec tego: $k\bar{x}_1 = x_1$).

Otrzymane zależności (2.149)–(2.152) wskazują, że w tych dwóch sformułowaniach gradient ciśnienia cieczy ma tę samą wartość, tj.

$$\frac{\partial {}^{1/k}p}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial {}^k p}{\partial x_1}, \quad (2.153)$$

natomiast prędkości związane są relacją

$$\langle v_1^{1/k} \rangle = \frac{1}{k^2} \langle v_1^k \rangle. \quad (2.154)$$

Oznacza to, że w sformułowaniu fizycznym średnia prędkość przepływającej cieczy zdąży do stałej wartości, natomiast w sformułowaniu matematycznym – zdąży do zera. Wobec tego, aby proces matematycznej teorii homogenizacji był adekwatny do poszukiwania ekwiwalentnego opisu dla procesu przepływu płynu przez ośrodek porowaty, opis mikroskopowy musi być przeskalowany.

Zależności (2.149) i (2.154) wskazują na bezpośrednią przyczynę skalowania tego procesu, tj. średnia wartość prędkości cieczy jest proporcjonalna do kwadratu wartości promienia poru, która to wartość ulega drastycznym zmianom w transformacjach jednokładnych pojedynczej komórki periodyczności. Przy ustalonej wartości lepkości cieczy zmniejszenie promienia poru powoduje więc proporcjonalny wzrost oporu przepływu, co w konsekwencji daje spadek wartości prędkości cieczy, w granicy, aż do zera. Aby więc skompensować „sztuczny” wzrost oporu przepływu spowodowany matematyczną operacją przekształcania w jednokładności pojedynczej komórki periodyczności, należy równocześnie zmniejszyć tyle samo lepkość cieczy. W ten sposób charakter przepływu cieczy i wartość pól: ciśnienia i prędkości cieczy w sformułowaniu matematycznym będą dokładnie takie same, jak w sformułowaniu fizycznym.

Skalowanie opisu mikroskopowego polega zatem na sukcesywnym, wraz ze zmniejszaniem się promienia poru, zmniejszaniem lepkości cieczy (zob. Hornung [74]), tzn.

$$\sigma_{ij}^{1/k} = -p^{1/k} \delta_{ij} + \frac{\mu}{k^2} \left(\frac{\partial v_i^{1/k}}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial v_j^{1/k}}{\partial \bar{x}_i} \right). \quad (2.155)$$

W metodzie homogenizacji parametryzacji opisu mikroskopowego dokonuje się, omówionym wcześniej, parametrem skali ε , reprezentującym aktualną skalę jednokładności, w której przetransformowana została pojedyncza komórka periodyczności. Wobec tego $\varepsilon = 1/k$ oraz

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^\varepsilon \delta_{ij} + \varepsilon^2 \mu \left(\frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial v_j^\varepsilon}{\partial \bar{x}_i} \right). \quad (2.156)$$

Powyższy związek implikuje następującą postać przeskalowanych równań równowagi cieczy (przyjęto przepływ laminarny, a więc człony inercyjne są pominięte), tj.

$$\varepsilon^2 \mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left(\frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial \bar{x}_j} \right) - \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial \bar{x}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.157)$$

Warunek nieściśliwości cieczy (2.145) nie ulega, oczywiście, zmianie.

Przedstawiony przeskalowany opis mikroskopowy (2.156)–(2.157) przepływu cieczy przez ośrodek porowaty otrzymano, korzystając z rozwiązania Poiseuille’a. Wobec tego otrzymane równania są ważne dla przepływów, w których człony inercyjne są pomijalne oraz na powierzchni kontaktu między ciałem stałym a cieczą nie występuje zjawisko poślizgu (warunek pełnej adhezji). Zależnie od wartości różnicy ciśnień przyłożonej na końcach próbki nasyconego ośrodka porowatego, jak również od geometrii przestrzeni porowej, powyższe założenia nie muszą, oczywiście, być spełnione i może być możliwe inne skalowanie opisu mikroskopowego. Na przykład wpływ geometrii przestrzeni porowej, a dokładniej rozmiarów cząstek ciała stałego, na „naturę” przepływu cieczy ilustrują wyniki otrzymane przez Allaire’a (rozdz. 3. w [74]). W rozważaniach swoich Allaire traktuje cząstki ciała stałego jakby były „zawieszane” w cieczy (cząstki są bardzo małe), ale równocześnie – jako nieruchome. Analizuje możliwy makroskopowy (ujednorodniony) opis zachowania się cieczy w zależności od wymiaru cząstki stałej a^ε znajdującej się w pojedynczej komórce periodyczności o wymiarze ε , przyjmując równocześnie $a^\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$. W zależności więc od wymiaru cząstki ciała stałego otrzymuje trzy możliwe opisy makroskopowe przepływu cieczy. Pierwszy opis makroskopowy, którego można było oczekiwać, to równania Stokesa. Istnieje jednak „krytyczna” wielkość cząstek, przy której mikroskopowe równania przepływu lepkiej cieczy Newtona prowadzą do opisu makroskopowego wyrażonego przez prawo Brinkmana. Gdy wymiar cząstki przekracza zdecydowanie wielkość krytyczną, opis makroskopowy przepływu cieczy rządony jest przez prawo Darcy’ego.

Przypadki skalowania opisu mikroskopowego dla niestacjonarnego przepływu lepkiej cieczy Newtona, wraz z otrzymanymi na drodze homogenizacji opisami makroskopowymi, są przedstawione w pracach [30], [74], [108], [137].

Podsumowując, konieczność skalowania opisu mikroskopowego przepływu cieczy przez ośrodek porowaty jest wynikiem dwóch faktów. Po pierwsze, parametry efektywne przepływu (parametry opisu makroskopowego) są nie tylko funkcją względnych wymiarów przestrzeni porowej, ale przede wszystkim jej bezwzględnego wymiaru. Oznacza to, że pomniejszanie lub powiększanie w jednokładności o skali k pojedynczej komórki ośrodka porowatego prowadzi do zmiany wartości parametrów efektywnych przepływu.

Po drugie, różne skalowanie opisu mikroskopowego przepływu cieczy przez ośrodek porowaty jest wynikiem, możliwej, różnej natury zachowania się płynu w przestrzeni porowej, np. dominacji sił inercyjnych nad lepкими i odwrotnie. Uwidoczniają to wyniki badań laboratoryjnych (Cieśllicki i Lasowska [46]) przedstawiające, dzięki zastosowaniu specjalnej techniki wizualizacji, różną naturę przepływu cieczy, spowodowaną różną geometrią przestrzeni porowej, jak również wartością gradientu ciśnienia cieczy wymuszającego przepływ.

W przypadku ośrodków gruntowych i skalnych przyjmuje się jednak najczęściej (np. Kaviani [79], Sparks [146], Thiel [155] i in.), że przepływ jest wolny i laminarny. Wobec tego w dalszej części niniejszej monografii do analizy procesów zachodzących

w nasyconych ośrodkach gruntowych i skalnych stosowane będą równania (2.156) i (2.157).

W przypadku mikroniejednorodnego ciała stałego na ogół efektywne parametry ośrodka są niewrażliwe na transformacje pojedynczej komórki w jednokładności o dowolnej skali. Ilustrują to na przykład otrzymane związki (2.90) i (2.95) definiujące wartości składowych efektywnego tensora dyfuzji.

Zauważmy, jeśli tensor ten zależałby od wymiaru komórki periodyczności, wtedy

$${}^k D_{il} \neq D_{il},$$

gdzie:

D_{il} – składowe tensora dyfuzji obliczone dla komórki periodyczności o wymiarze Y ,

${}^k D_{il}$ – składowe tego tensora obliczone dla komórki periodyczności o wymiarze kY .

Po oznaczeniu przez $\omega_i^k(ky_i)$ rozwiązania zagadnienia lokalnego (2.90) dla komórki o wymiarze kY otrzymujemy tożsamość

$$\frac{\partial \left(\frac{{}^k \omega_i(ky_i)}{k} \right)}{\partial y_j} = \frac{\partial {}^k \omega_i(ky_i)}{\partial (ky_j)}.$$

Wobec tego rozwiązania zagadnienia lokalnego (2.90) dla komórki periodyczności o wymiarze kY i Y związane są relacją

$${}^k \omega_i(ky_i) = k \omega_i(y_i),$$

gdzie $\omega_i(y_i)$ oznacza rozwiązanie dla komórki periodyczności o wymiarze Y .

Wykorzystując powyższą relację w operacji całkowania (2.95), otrzymuje się natychmiast

$${}^k D_{il} = D_{il},$$

co oznacza, że efektywny tensor dyfuzji jest niewrażliwy na wielkość pojedynczej komórki periodyczności. Opis mikroskopowy nie wymaga więc przeskalowania.

Omówione powyżej dwa sformułowania poszukiwania ujednorodnionego ośrodka zastępczego, tj. matematyczne i fizyczne, zakładają że $l/L = \varepsilon \rightarrow 0$. W rzeczywistości wymiar niejednorodności l i wymiar makroskopowy L są wielkościami skończonymi. Otrzymany więc w wyniku homogenizacji opis makroskopowy jest aproksymacją modelowanego procesu, tym lepszą, im $l/L = \varepsilon$ jest mniejsze.

Do tej pory przedstawialiśmy L jako jeden z wymiarów makroskopowej objętości ośrodka. W przypadku zagadnień statycznych takie przyjęcie jest uzasadnione. Na ogół L zależy jednak od „wymuszenia”, jakiemu poddany jest ośrodek. Można poka-

zać [16], że w przypadku zagadnień dynamicznych wielkość ta odpowiada długości fali makroskopowej. Oczywiście, aby zdefiniować równoważny makroskopowy opis matematyczny rozchodzenia się fali w ośrodku mikroniejnorodnym, wymiar niejednorodności musi być dużo mniejszy od długości fali. W przeciwnym razie, w terminologii Auriaulta [16], opis jest „niehomogenizowalny”. W tym przypadku np. ośrodek periodyczny i ośrodek losowy wykazują całkowicie odmienne zachowanie i muszą być użyte różne metody do analizy procesów w nich zachodzących (np. Woźniak [164] – periodyczne laminaty, Sobczyk [145] – ośrodki losowe).

2.2.5. Uwagi

Prezentując matematyczną teorię homogenizacji stwierdzono, że w przypadku analizy procesu przepływu płynu przez ośrodek porowaty konieczne jest skalowanie opisu mikroskopowego. Jest to między innymi wynik „wrażliwości” parametrów przepływu na zmiany wymiarów przestrzeni porowej w przekształceniu jednokładnym. Omówione zostały trzy metody poszukiwania ekwiwalentnego opisu makroskopowego dla ośrodka mikroniejnorodnego, tj.: metoda asymptotycznej homogenizacji, metoda zbieżności dwuskalowej oraz metoda Γ -zbieżności.

Przedstawiony przykład modelowy zagadnienia dyfuzji pokazał, że wszystkie te trzy metody, przynajmniej w przypadku analizowanego zagadnienia, prowadzą do tego samego opisu makroskopowego.

Podstawowym założeniem metody asymptotycznej homogenizacji i metody zbieżności dwuskalowej¹² jest periodyczność struktury ośrodka. Metoda Γ -zbieżności, co należy dodać, „pracuje” również w przypadku homogenizacji stochastycznej [135].

Porównując te metody, można stwierdzić, że dwie ostatnie tj.: zbieżności dwuskalowej i Γ -zbieżności, są pod względem matematycznym rygorystyczne, tzn. prowadzą równocześnie do dedukcji granicy oraz zbieżności rozwiązania. O ile jednak metoda zbieżności dwuskalowej definiuje również sposób poszukiwania granicy, o tyle metoda Γ -zbieżności na ogół nie. Przedstawiona powyżej, w przypadku zagadnienia dyfuzji, stosunkowa łatwość korzystania z metody Γ -zbieżności była wynikiem twierdzenia 2.7 o zbieżności funkcjonalów zdefiniowanych przez odpowiedni potencjał. W razie więc możliwości skorzystania z twierdzenia 2.7 metoda Γ -zbieżności daje szybko ostateczny wynik, co w rezultacie umożliwia zdefiniowanie parametrów efektywnych otrzymanego opisu makroskopowego. W innych przypadkach praktyczne stosowanie metody Γ -zbieżności jest skomplikowane i wymaga wiedzy matematycznej daleko wykraczającej poza zakres wiedzy osób bezpośrednio z matematyką nie związanych [54], [107].

Podobne uwagi można odnieść do metody zbieżności dwuskalowej. Gdy poszukiwanie odpowiedniej granicy dwuskalowej musi być oparte tylko na definicji 2.1, ko-

¹² W pracy [38] proponuje się również rozszerzenie metody na homogenizację stochastyczną.

nieczny aparat analizy funkcjonalnej wykracza daleko poza zakres wiedzy niematematyka. Ułatwieniem w stosowaniu tej metody są twierdzenia przedstawione w pracy [7] (tylko część jest zaprezentowana w niniejszym opracowaniu).

Metoda asymptotycznej homogenizacji, w przeciwieństwie do dwóch omówionych wcześniej metod, nie podaje równocześnie z otrzymanym opisem makroskopowym dowodu zbieżności parametryzowanego pola. Szybkie i stosunkowo łatwe „dochodzenie” do opisu makroskopowego jest konsekwencją założenia, że parametryzowane pole wykazuje charakter asymptotyczny i może być przedstawione w postaci rozwinięcia asymptotycznego (2.80). Cytowane w niniejszej pracy twierdzenia o zbieżności dwuskalowej dają matematyczne uzasadnienie stosowania rozwinięcia asymptotycznego w tym sensie, że parametryzowane pole jest zbieżne dwuskalowo do pierwszego członu rozwinięcia, a gradient parametryzowanego pola do gradientów pierwszego i drugiego rozwinięcia (określonych odpowiednio względem x i y), przynajmniej dla dużej klasy zagadnień. Ponadto, wiele dodatkowych twierdzeń oraz matematycznych dowodów poprawności przyjęcia parametryzowanego pola w postaci rozwinięcia asymptotycznego przedstawionych jest w pracach [27], [74] i [137].

2.3. Ośrodki losowe – metody oszacowań własności efektywnych

W przypadku ośrodków mikroniejednorodnych o strukturze periodycznej zagadnienie określania parametrów efektywnych opisu makroskopowego sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego sformułowanego dla pojedynczej komórki periodyczności. Jeśli znane są: rozkład i geometria poszczególnych składników oraz wartości parametrów analizowanego procesu, to wartości parametrów efektywnych można określić jednoznacznie. W prezentowanym zagadnieniu dyfuzji, równania pozwalające jednoznacznie określić efektywny tensor dyfuzji to (2.90) i (2.95).

W przypadku ośrodków losowych, takich jak np. ośrodki gruntowe i skalne, rozkład oraz geometria poszczególnych składników ośrodka nie są dokładnie znane. Dostępna jest jedynie częściowa informacja statystyczna o ośrodku. Podstawową informacją statystyczną, którą dysponujemy, jest przede wszystkim udział frakcyjny poszczególnych składników ośrodka. Ponadto, jeśli w ośrodku nie występują żadne szczególne kierunki uporządkowania, innymi słowy – ośrodek jest całkowicie „nieuporządkowany”, to drugą dostępną informacją statystyczną jest makroskopowa izotropia ośrodka.

O ile – przy założeniu, że ośrodek losowy jest statystycznie jednorodny ergodyczny lub statystycznie periodyczny ergodyczny – przyjęcie hipotezy periodyczności przy poszukiwaniu opisu makroskopowego jest dopuszczalne (Sab [135]), o tyle metody określania parametrów efektywnych dla ośrodków periodycznych i losowych muszą być różne. W przypadku ośrodków losowych, ze względu na niepełną informację statystyczną, możemy tylko podać oszacowania wartości parametrów efektywnych

w terminach znanej informacji statystycznej oraz dopuszczalny przedział wartości tych parametrów (ograniczenia).

Stosunkowo „najlepiej” rozpoznane i opracowane są metody oszacowań wartości parametrów efektywnych dla fizycznie liniowych ośrodków losowych, np. losowych ośrodków liniowo-sprężystych. Zagadnienie oszacowań własności efektywnych dla nieliniowych ośrodków losowych jest nadal zagadnieniem otwartym, choć w ostatniej dekadzie nastąpił obserwowalny postęp (Ponte Castañeda [121], [122]; Willis [161]).

Najczęściej stosowaną ideą szacowania wartości parametrów efektywnych dla ośrodków nieliniowych jest tzw. idea liniowego ośrodka porównawczego. Innymi słowy – oszacowania otrzymuje się z oszacowań dla ośrodków liniowych przez odpowiedni dobór właściwości porównywanego ośrodka liniowego. Przykład takiej metody, zaproponowanej przez Ponte Castañedę [121], przedstawiony będzie w dalszej części rozdziału.

W przypadku liniowo-sprężystych ośrodków losowych najczęściej stosowaną metodą szacowania wartości efektywnego tensora sztywności sprężystej jest tzw. metoda samouzgodnionego pola. Pozostałe metody, jak schemat Mori–Tanaki oraz Kuster–Toksöza, mają ograniczone zastosowanie, tj. mały udział frakcyjny wtrąceń w kompozycie. Wszystkie te metody skonstruowane są według rozwiązania statycznego „zagadnienia pojedynczego wtrącenia” w nieskończonym, jednorodnym ośrodku ciągłym. Istnieje również druga grupa metod, która własności efektywne definiuje na podstawie rozwiązania zagadnienia rozproszenia fali na pojedynczym wtrąceniu.

Poniżej omówiono tylko metody oparte na rozwiązaniu statycznym zagadnienia pojedynczego wtrącenia, gdyż druga grupa metod, mimo że ideowo różna, daje te same oszacowania [29]. Najwięcej miejsca poświęcono sformułowaniu metody samouzgodnionego pola. Jest to schemat najczęściej stosowany podczas szacowania parametrów efektywnych losowych ośrodków liniowo-sprężystych [43], [165].

W przypadku ośrodków losowych, oprócz oszacowania wartości efektywnych ośrodka, ważne jest również sformułowanie zakresu, w jakim mogą się one zmieniać (podanie ograniczeń). Dla liniowo-sprężystego wieloskładnikowego ośrodka losowego najlepszymi ograniczeniami, w terminach objętości frakcyjnej, są ograniczenia Voigta i Reussa, tj.

$$\left(\sum_{\alpha=1}^N c^{\alpha} (\mathbf{C}^{\alpha})^{-1} \right)^{-1} \leq \mathbf{C}^{\text{eff}} \leq \sum_{\alpha=1}^N c^{\alpha} \mathbf{C}^{\alpha}, \quad (2.158)$$

gdzie:

c^{α} i \mathbf{C}^{α} – odpowiednio: udział frakcyjny składnika α w ośrodku oraz jego tensor sztywności sprężystej,

\mathbf{C}^{eff} – efektywny tensor sztywności sprężystej.

Analogiczne związki obowiązują dla tensora podatności sprężystej, tj.

$$\left(\sum_{\alpha=1}^N c^{\alpha} (\mathbf{S}^{\alpha})^{-1} \right)^{-1} \leq \mathbf{S}^{\text{eff}} \leq \sum_{\alpha=1}^N c^{\alpha} \mathbf{S}^{\alpha}, \quad (2.159)$$

gdzie:

\mathbf{S}^{α} – tensor podatności sprężystej składnika α ,

\mathbf{S}^{eff} – efektywny tensor podatności sprężystej.

W przypadku ośrodka makroskopowo izotropowego jedynymi ograniczeniami „węższymi” od przedstawionych powyżej, wyrażonymi w terminach objętości frakcyjnej, są ograniczenia Hashina-Shtrikmana dla ośrodka dwuskładnikowego [152], tj.

$$K^{(1)} + \frac{1-c^{(1)}}{\frac{1}{K^{(2)}-K^{(1)}} + \frac{3c^{(1)}}{3K^{(1)}+4G^{(1)}}} \leq K^{\text{eff}} \leq K^{(2)} + \frac{c^{(1)}}{\frac{1}{K^{(1)}-K^{(2)}} + \frac{3(1-c^{(1)})}{3K^{(2)}+4G^{(2)}}},$$

$$G^{(1)} + \frac{1-c^{(1)}}{\frac{1}{G^{(2)}-G^{(1)}} + \frac{6c^{(1)}(K^{(1)}+2G^{(1)})}{5G^{(1)}(3K^{(1)}+4G^{(1)})}} \leq G^{\text{eff}} \leq G^{(2)}$$

$$+ \frac{c^{(1)}}{\frac{1}{G^{(1)}-G^{(2)}} + \frac{6(1-c^{(1)})(K^{(2)}+2G^{(2)})}{5G^{(2)}(3K^{(2)}+4G^{(2)})}}, \quad (2.160)$$

gdzie:

K^{eff} i G^{eff} – odpowiednio: efektywny moduł odkształcenia objętościowego oraz efektywny moduł odkształcenia postaciowego,

$K^{(i)}$ i $G^{(i)}$ – odpowiednie moduły dla składnika i ,

$c^{(1)}$ – udział frakcyjny pierwszego składnika.

Ponadto, w powyższym związku przyjęto $K^{(1)} < K^{(2)}$ oraz $G^{(1)} < G^{(2)}$.

2.3.1. Kompozyt liniowo-sprężysty. Metody oszacowań: samouzgodnionego pola, Kuster–Toksöza i Mori–Tanaki

Rozważamy kompozytowy ośrodek sprężysty utworzony z N jednorodnych składników cechujących się różnymi własnościami sprężystymi. O składnikach tego ośrodka wiemy, że każdy z nich jest zbudowany z materiału izotropowego oraz liniowo-sprężystego. Wartości parametrów sprężystości każdego składnika są nam znane.

Rozkład składników w kompozycie jest losowy. Informacja statystyczna o tym rozkładzie, jedyna, jaką dysponujemy, to: udział frakcyjny poszczególnych składników oraz brak w kompozycie szczególnych kierunków uporządkowania, czyli makroskopowa izotropia kompozytu.

Zagadnienie, które chcemy rozwiązać, to: oszacowanie wartości parametrów efektywnych sprężystości analizowanego kompozytu (dokładne określenie tych wartości jest niemożliwe ze względu na częściową tylko informację o rozkładzie tych składników).

Reasumując, dane, którymi dysponujemy, to:

➤ związki konstytutywne liniowej sprężystości dla każdego składnika α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) wraz z wartościami parametrów, tj.

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkh}^{\alpha} e_{kh}(u(r)) \quad r \in V^{\alpha}, \quad (2.161)$$

przy czym (składniki są izotropowe) [61]

$$C_{ijkh}^{\alpha} = K^{\alpha} \delta_{ij} \delta_{kh} + G^{\alpha} \left(\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kh} \right), \quad (2.162)$$

➤ makroskopowy związek konstytutywny kompozytu, tj. (liniowo-sprężyste zachowanie składników implikuje liniowo-sprężyste zachowanie kompozytu)

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkh}^{\text{eff}} \langle e_{kh}(u) \rangle, \quad (2.163)$$

gdzie:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{\|V\|} \int_V \sigma_{ij}(r) dV \quad \text{i} \quad \langle e_{kh}(u) \rangle = \frac{1}{\|V\|} \int_V e_{kh}(u(r)) dV, \quad (2.164)$$

➤ informacja statystyczna o rozkładzie:

wartość udziału frakcyjnego poszczególnych składników w kompozycie, tj.

$$c^{\alpha} = \frac{\|V^{\alpha}\|}{\|V\|} \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (\text{oczywiście: } \sum_{\alpha=1}^N c^{\alpha} = 1), \quad (2.165)$$

makroskopowa izotropia kompozytu, tj.

$$C_{ijkh}^{\text{eff}} = K^{\text{eff}} \delta_{ij} \delta_{kh} + G^{\text{eff}} \left(\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kh} \right). \quad (2.166)$$

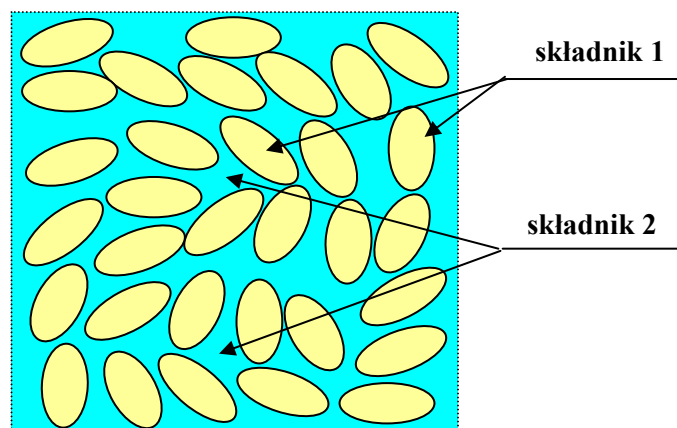
W powyższych związkach zastosowano następujące oznaczenia:

V^{α} – obszar zajmowany przez składnik α (może to być obszar wielospójny (rys. 2.16)),

$V = \bigcup_{\alpha=1}^N V^{\alpha}$ – obszar zajmowany przez kompozyt,

$\|V^\alpha\|$ i $\|V\|$ – miary objętości: V^α oraz V ,
 K^α i G^α – odpowiednio: moduł odkształcenia objętościowego oraz moduł odkształcenia postaciowego składnika α ,
 K^{eff} i G^{eff} – efektywne moduły odkształcenia objętościowego oraz postaciowego kompozytu.

Wielkościami poszukiwanymi są wartości parametrów efektywnych K^{eff} i G^{eff} .



Rys. 2.16. Kompozyt dwuskładnikowy
 Fig. 2.16. Two-components' composite

Załóżmy obecnie, że kompozyt jest „zanurzony” w nieskończonym, jednorodnym ośrodku ciągłym (rys. 2.17), który to ośrodek jest poddany „wymuszeniu” zewnętrznemu w postaci jednorodnego odkształcenia przyłożonego w nieskończoności. Wymuszenie to, oczywiście, indukuje w kompozycie (w poszczególnych składnikach kompozytu) pewne pole odkształcenia i stowarzyszone z nim pole naprężenia. Ponieważ składniki kompozytu oraz ośrodek otaczający kompozyt są liniowo-sprężyste (obowiązuje zasada superpozycji), wobec tego panujące w kompozycie pole odkształcenia można przedstawić następująco

$$e_{ij}(u(r)) = A_{ijkh}(r)E_{kh}, \quad (2.167)$$

gdzie:

E_{kh} – wartość odkształcenia panującego w nieskończoności,
 $A_{ijkh}(r)$ – pole odkształcenia w kompozycie wywołane jednostkowym odkształceniem ($E_{kh} = (\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk})/2$) przyłożonym w nieskończoności do ośrodka otaczającego kompozyt.

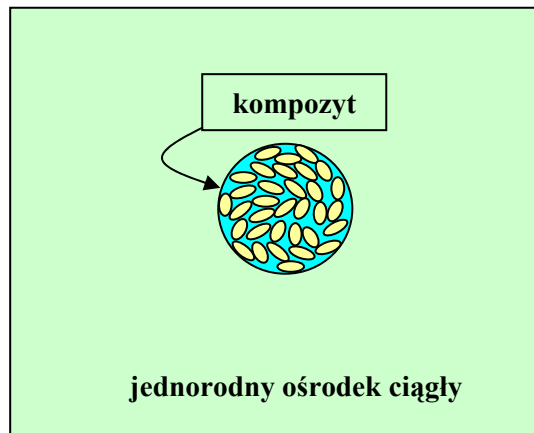
Dokonując kolejno uśrednienia powyższego równania po objętości każdego składnika, otrzymujemy

$$\langle e_{ij} \rangle^\alpha = A_{ijkh}^\alpha E_{kh} \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (2.168)$$

gdzie

$$\langle e_{ij} \rangle^\alpha = \frac{1}{\|V^\alpha\|} \int_{V^\alpha} e_{ij}(u(r)) dV, \quad A_{ijkh}^\alpha = \frac{1}{\|V^\alpha\|} \int_{V^\alpha} A_{ijkh}(r) dV. \quad (2.169)$$

Wielkość $\langle e_{ij} \rangle^\alpha$ reprezentuje średnią wartość odkształcenia w składniku α . Tensor A_{ijkh}^α jest nazywany tensorem lokalizacji odkształcenia.



Rys. 2.17. Kompozyt zanurzony w nieskończonym jednorodnym ośrodku ciągłym
Fig. 2.17. Composite immersed in a homogeneous infinite continuous medium

Średnia wartość odkształcenia w kompozycie, zdefiniowana zależnością (2.164), może być teraz obliczona jako

$$\langle e_{ij} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha \langle e_{ij} \rangle^\alpha \quad (2.170)$$

lub, jeśli wykorzystamy zależność (2.168), równoważnie jako

$$\langle e_{ij} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha A_{ijkh}^\alpha E_{kh}. \quad (2.171)$$

Definiując, podobnie jak dla odkształcenia, średnią wartość naprężenia w składniku α , tj.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle^\alpha = \frac{1}{\|V^\alpha\|} \int_{V^\alpha} \sigma_{ij}(r) dV, \quad (2.172)$$

otrzymujemy (sumowanie po indeksie α obowiązuje wyłącznie wtedy, gdy występuje znak sumy, natomiast po pozostałych indeksach, zgodnie z wcześniejszą umową sumacyjną, zawsze gdy się powtarzają)

$$\langle \sigma_{ij} \rangle^\alpha = C_{ijkh}^\alpha \langle e_{kh} \rangle^\alpha, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha \langle \sigma_{ij} \rangle^\alpha. \quad (2.173)$$

Zależności (2.173) są, odpowiednio, bezpośrednią konsekwencją związków konstytutywnych (2.161) oraz definicji (2.164) średniej wartości naprężenia w kompozycie.

Wykorzystanie związku lokalizacyjnego (2.168) w zależnościach (2.173) prowadzi do

$$\langle \sigma_{ij} \rangle^\alpha = C_{ijkh}^\alpha A_{khlm}^\alpha E_{lm}, \quad (2.174a)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha C_{ijkh}^\alpha A_{khlm}^\alpha E_{lm}. \quad (2.174b)$$

Średnią wartość naprężenia w kompozycie można jednocześnie obliczyć, korzystając ze związku konstytutywnego dla kompozytu (2.163), który po zastosowaniu wyrażenia (2.171) przyjmuje postać

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkh}^{\text{eff}} \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha A_{khlm}^\alpha E_{lm} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha C_{ijkh}^{\text{eff}} A_{khlm}^\alpha E_{lm}. \quad (2.175)$$

Po odjęciu stronami równań (2.174b) i (2.175) otrzymujemy

$$\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (C_{ijkh}^{\text{eff}} - C_{ijkh}^\alpha) A_{khlm}^\alpha E_{lm} = 0. \quad (2.176)$$

Równanie (2.176) musi być spełnione dla dowolnych wartości składowych tensora E_{ij} , co implikuje

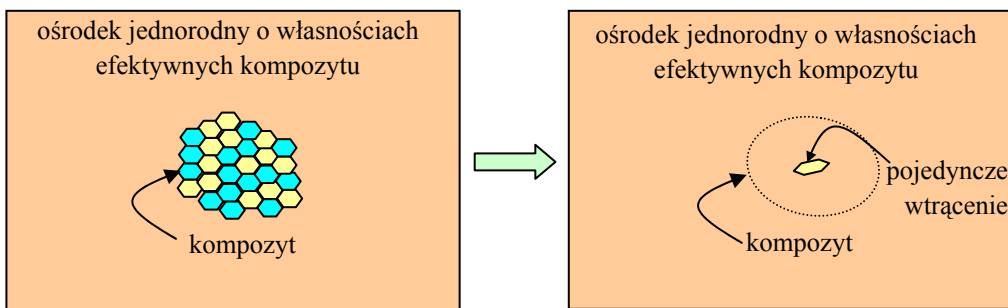
$$\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (C_{ijkh}^{\text{eff}} - C_{ijkh}^\alpha) A_{khlm}^\alpha = 0. \quad (2.177)$$

Jeśli więc potrafimy oszacować wartości składowych tensora lokalizacji odkształcenia A_{ijkh}^α , to związek (2.177) prowadzi bezpośrednio do oszacowań wartości parametrów efektywnych sprężystości kompozytu.

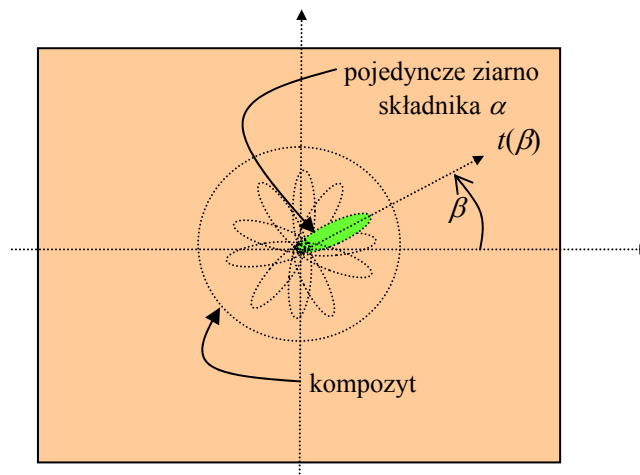
Metoda samouzgodnionego pola

Metoda ta została wprowadzona przez Hersheya i Krönera (Zaoui [165]) jako schemat aproksymacyjny do określania efektywnych parametrów sprężystości dla ośrodków o strukturze polikrystalicznej.

Kompozyt jest zanurzony w ośrodku jednorodnym o wartościach parametrów sprężystości równych wartościom parametrów efektywnych kompozytu (wartości, których poszukujemy) (rys. 2.18). Następnie skomplikowane oddziaływania między dowolnym elementem kompozytu a pozostałymi jego elementami zastępuje się oddziaływaniem między tym elementem a „ujednorodnionym kompozytem”, stanowiącym kontynuację ośrodka, w którym kompozyt jest zanurzony. W konsekwencji wartość odkształcenia w pojedynczym ziarnie jest przybliżana przez rozwiązanie zagadnienia pojedynczego ziarna zanurzonego w nieskończonym jednorodnym ośrodku ciągłym (rys. 2.18).



Rys. 2.18. Modelowanie oddziaływań między ziarnami w metodzie samouzgodnionego pola
Fig. 2.18. Interactions between grains modelled according to the self-consistent scheme



Rys. 2.19. Geometryczna interpretacja wartości tensora lokalizacji odkształcenia
Fig. 2.19. Geometrical interpretation of strain localization tensor value

Wartość odkształcenia w ziarnie, jak również wartość tensora lokalizacji odkształcenia, nie zależy od miejsca, w którym to ziarno się znajduje (otaczający je ośrodek jednorodny jest nieskończony), a jedynie od jego orientacji (rys. 2.19). Ponieważ ten-

sor lokalizacji odkształcenia dla składnika α , to wartość średnia obliczona po wszystkich ziarnach tworzących składnik α , wobec tego (poniższy związek odpowiada zagadnieniu dwuwymiarowemu (rys. 2.19))

$$A_{khlm}^{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{khlm}^{\alpha}(\beta) d\beta, \quad (2.178)$$

gdzie:

$A_{khlm}^{\alpha}(\beta)$ – wartość tensora lokalizacji odkształcenia dla ziarna, tworzącego składnik α , zorientowanego w kierunku $t(\beta)$ (rys. 2.19),

β – wartość kąta między osią poziomą a kierunkiem $t(\beta)$ orientacji ziarna.

Tensor lokalizacji odkształcenia A_{khlm}^{α} jest więc tensorem izotropowym. Tensor ten ma prostą reprezentację

$$A_{khlm}^{\alpha} = \frac{1}{3}(P^{\alpha} - Q^{\alpha})\delta_{kh}\delta_{lm} + \frac{1}{2}Q^{\alpha}(\delta_{kl}\delta_{hm} + \delta_{km}\delta_{hl}), \quad (2.179)$$

gdzie wartości P^{α} i Q^{α} podano, dla wtrąceń kulistych oraz w kształcie igiełek, w tabeli 2.1. W tabeli tej wykorzystano, dodatkowo, następujące oznaczenia:

$$\gamma = G \frac{3K + G}{3K + 4G}, \quad \zeta = \frac{G(9K + 8G)}{6(K + 2G)} \quad (2.180)$$

oraz indeksem m oznaczono parametry ośrodka, w którym jest zanurzone wtrącenie, natomiast przez α – parametry wtrącenia. W przypadku metody samouzgodnionego pola parametry z indeksem m oznaczają poszukiwane wartości efektywne.

Tabela¹³ 2.1

Typ wtrącenia	P^{α}	Q^{α}
kula	$\frac{K^m + \frac{4}{3}G^m}{K^{\alpha} + \frac{4}{3}G^m}$	$\frac{G^m + \zeta^m}{G^{\alpha} + \zeta^m}$
igielka	$\frac{K^m + G^m + \frac{1}{3}G^{\alpha}}{K^{\alpha} + G^m + \frac{1}{3}G^{\alpha}}$	$\frac{1}{5} \left(\frac{4G^m}{G^m + G^{\alpha}} + 2 \frac{G^m + \gamma^m}{G^{\alpha} + \gamma^m} + \frac{K^{\alpha} + \frac{4}{3}G^m}{K^{\alpha} + G^m + \frac{1}{3}G^{\alpha}} \right)$

¹³ Wyniki zamieszczone w tabeli przepisano z pracy: Berryman J.G., Berge P.A., *Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites*, Mechanics of Materials, 22, 1996, 149–164.

Tensory: C_{ijkh}^α oraz C_{ijkh}^{eff} są, podobnie jak tensor lokalizacji odkształcenia, również tensorami izotropowymi. Wobec tego:

$$C_{ijkh}^\alpha A_{klm}^\alpha = \left\{ K^\alpha P^\alpha - \frac{2}{3} G^\alpha Q^\alpha \right\} \delta_{ij} \delta_{lm} + G^\alpha Q^\alpha \{ \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl} \}, \quad (2.181a)$$

$$C_{ijkh}^{\text{eff}} A_{klm}^\alpha = \left\{ K^{\text{eff}} P^\alpha - \frac{2}{3} G^{\text{eff}} Q^\alpha \right\} \delta_{ij} \delta_{lm} + G^{\text{eff}} Q^\alpha \{ \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl} \}. \quad (2.181b)$$

Uwzględnienie (2.181) w (2.177) prowadzi do

$$\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha \left\{ (K^{\text{eff}} - K^\alpha) P^\alpha - \frac{2}{3} (G^{\text{eff}} - G^\alpha) Q^\alpha \right\} \delta_{ij} \delta_{lm} \quad (2.182)$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (G^{\text{eff}} - G^\alpha) Q^\alpha (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) = 0.$$

Równanie (2.182) implikuje następujące równości:

$$\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (K^{\text{eff}} - K^\alpha) P^\alpha = 0, \quad (2.183a)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (G^{\text{eff}} - G^\alpha) Q^\alpha = 0. \quad (2.183b)$$

Jest to układ dwóch sprzężonych ze sobą równań nieliniowych. Sprzężenie tych równań jest konsekwencją obecności w wartościach P^α i Q^α zarówno K^{eff} jak i G^{eff} (por. tab. 2.1). Na przykład dla wieloskładnikowego ośrodka kompozytowego utworzonego tylko z wtrąceń w kształcie kulek mamy (tab. 2.1):

$$P^\alpha = \frac{K^{\text{eff}} + \frac{4}{3} G^{\text{eff}}}{K^\alpha + \frac{4}{3} G^{\text{eff}}}, \quad Q^\alpha = \frac{G^{\text{eff}} + \zeta^{\text{eff}}}{G^\alpha + \zeta^{\text{eff}}}, \quad \zeta^{\text{eff}} = \frac{G^{\text{eff}} (9K^{\text{eff}} + 8G^{\text{eff}})}{6(K^{\text{eff}} + 2G^{\text{eff}})},$$

co – po podstawieniu do (2.183) oraz dokonaniu prostych przekształceń – implikuje następujące równania:

$$\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha \frac{(K^{\text{eff}} - K^\alpha)}{K^\alpha + \frac{4}{3} G^{\text{eff}}} = 0, \quad (2.184a)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha \frac{(G^{\text{eff}} - G^\alpha)}{G^\alpha + \frac{G^{\text{eff}} (9K^{\text{eff}} + 8G^{\text{eff}})}{6(K^{\text{eff}} + 2G^{\text{eff}})}} = 0. \quad (2.184b)$$

Rozwiązania układu (2.184), dla określonych udziałów frakcyjnych poszczególnych składników, poszukuje się metodami iteracyjnymi.

Schemat samouzgodnionego pola jest również stosowany do określania parametrów efektywnych ośrodków sprężystych ze spękaniami lub pustkami [42]. Analiza sprowadza się, tym razem, do zagadnienia pojedynczej pustki lub spękania, umieszczonych w nieskończonym ośrodku ciągłym, charakteryzującym się poszukiwanymi parametrami efektywnymi. W przypadku zagadnienia dwuwymiarowego, dla ośrodka makroskopowo izotropowego, prowadzi to do następujących zależności na parametry efektywne [78]

$$E^{\text{eff}} = E(1 - \pi\xi), \quad \nu^{\text{eff}} = \nu (1 - \pi\xi), \quad (2.185)$$

gdzie:

ξ – tzw. parametr gęstości spękań (Budiansky i O’Connell [42]),

E i ν – odpowiednio: moduł Younga i współczynnik Poissona materiału szkieletu.

Modyfikację powyższego schematu dla ośrodków spękanych, zwaną *schematem różnicowym*, zaproponował Hashin w pracy [70]. Ponownie rozpatruje się jedno izolowane spękanie w nieskończonej matrycy, z tym że w przeciwieństwie do metody samouzgodnionego pola, tym razem analiza jest prowadzona w sposób przyrostowy. Gęstość spękań jest zwiększana o małe przyrosty $d\xi$ i w każdym kroku obliczeniowym są określane wartości parametrów efektywnych ośrodka.

Dla ośrodka makroskopowo izotropowego, w przypadku zagadnienia dwuwymiarowego, prowadzi to do zależności różniczkowych (konsekwencja (2.185))

$$E^{\text{eff}} + dE^{\text{eff}} = E^{\text{eff}}(1 - \pi d\xi), \quad \nu^{\text{eff}} + d\nu^{\text{eff}} = \nu^{\text{eff}}(1 - \pi d\xi), \quad (2.186)$$

które – po zastosowaniu warunku początkowego, tzn. $E^{\text{eff}} = E$, $\nu^{\text{eff}} = \nu$ dla $\xi = 0$, dają:

$$E^{\text{eff}} = Ee^{-\pi\xi}, \quad \nu^{\text{eff}} = \nu e^{-\pi\xi}. \quad (2.187)$$

W podsumowaniu prezentacji metody samouzgodnionego pola oraz jej modyfikacji w postaci schematu różnicowego należy podkreślić, że tak jak udowodnili odpowiednio Milton [110] oraz Norris [116] schematy te są *realizowalne*. Oznacza to, że do każdych wartości parametrów efektywnych otrzymanych z tych schematów można „stworzyć” odpowiadający ośrodek cechujący się tymi parametrami efektywnymi. Oznacza to również, że schematy te nigdy nie dają wartości parametrów efektywnych niezgodnych z przedstawionymi wcześniej ograniczeniami.

Metody: Mori–Tanaki i Kuster–Toksöza

Metoda samouzgodnionego pola traktowała wszystkie składniki ośrodka równorzędnie, w tym sensie, że każdy z nich był „zanurzany” w ośrodku ciągłym o poszukiwanych parametrach efektywnych. W przypadku ośrodków, w których wyraźna jest przewaga jednego składnika nad innymi, tzn. tworzy on matrycę ośrodka, w której

zanurzone są pozostałe składniki (por. rys. 2.16 – składnik 2. to matryca), do szacowania własności efektywnych ośrodka są stosowane najczęściej metody: Mori–Tanaki i Kuster–Toksöza (Dvorak i Benveniste [56], Suquet [152]).

Podstawowym założeniem tych metod jest niewielki udział frakcyjny wtrąceń w porównaniu do udziału frakcyjnego matrycy. Określanie parametrów efektywnych polega na rozwiązaniu, podobnie jak w metodzie samouzgodnionego pola, zagadnienia pojedynczego wtrącenia w nieskończonym ośrodku ciągłym. Tym razem jednak ośrodkiem, w którym zanurzone są poszczególne składniki, jest matryca, której parametry sprężyste znamy.

W przypadku metody Mori–Tanaki, równaniami wyjściowym szacowania parametrów efektywnych są, podobnie jak w metodzie samouzgodnionego pola, równania (2.183). Tensor lokalizacji odkształcenia dla składnika α jest jednak określany jako rozwiązanie zagadnienia pojedynczego wtrącenia zanurzonego w matrycy m , której własności znamy. Oznacza to, że wielkości P^α i Q^α są funkcją jedynie parametrów sprężystości składnika α oraz matrycy. Dodatkowo, dla α odpowiadającego matrycy zakłada się, że tensor lokalizacji odkształcenia jest tensorem jednostkowym, tzn.

$$A_{ijkh}^m = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}). \quad (2.188)$$

Dla reprezentacji w postaci (2.179) implikuje to: $P^m = 1$ i $Q^m = 1$.

Po przekształceniu równań (2.183) do postaci

$$K^{\text{eff}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha K^\alpha P^\alpha}{\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha P^\alpha}, \quad (2.189a)$$

$$G^{\text{eff}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha G^\alpha Q^\alpha}{\sum_{\alpha=1}^N c^\alpha Q^\alpha}, \quad (2.189b)$$

łatwo zauważyć, że prawe strony są, dla danych typów wtrąceń oraz ich udziałów frakcyjnych, tylko funkcją parametrów sprężystości składników kompozytu. Zależności (2.189) stanowią ostateczną postać ogólnych równań szacowania wartości parametrów efektywnych w metodzie Mori–Tanaki.

Dla kompozytu wieloskładnikowego zbudowanego z matrycy oraz wtrąceń kulistych, zależności (2.189) transformują się do postaci (P^α i Q^α ponownie wzięto z tabeli 2.1)

$$K^{\text{eff}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \frac{c^\alpha K^\alpha}{K^\alpha + \frac{4}{3}G^m}}{\sum_{\alpha=1}^N \frac{c^\alpha}{K^\alpha + \frac{4}{3}G^m}}, \quad (2.190a)$$

$$G^{\text{eff}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \frac{c^\alpha G^\alpha}{G^\alpha + \frac{G^m(9K^m + 8G^m)}{6(K^m + 2G^m)}}}{\sum_{\alpha=1}^N \frac{c^\alpha}{G^\alpha + \frac{G^m(9K^m + 8G^m)}{6(K^m + 2G^m)}}}. \quad (2.190b)$$

Podobnie jest w schemacie Kuster–Toksöza. Tensor lokalizacji odkształcenia ponownie przybliża się przez rozwiązanie zagadnienia pojedynczego wtrącenia zanurzonego w jednorodnym ośrodku ciągłym, którym to ośrodkiem jest jeden ze składników kompozytu (tzw. matryca). Punktem startowym nie jest jednak układ (2.183), a jego pewna modyfikacja. W metodzie Kuster–Toksöza przyjmuje się, że zanurzany w matrycy kompozyt ma kształt kuli. Następnie wartość średnią odkształcenia w kompozycie aproksymuje się przez

$$\langle e_{kh} \rangle = A_{khlm}^{\text{eff}} E_{lm}, \quad (2.191)$$

gdzie A_{khlm}^{eff} reprezentuje tensor lokalizacji odkształcenia dla „ujednorodnionego” kompozytu w kształcie kuli zanurzonego w nieskończonej matrycy.

Jednocześnie średnie odkształcenie w kompozycie opisuje zależność (2.171), wobec tego

$$A_{khlm}^{\text{eff}} E_{lm} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha A_{khlm}^\alpha E_{lm}. \quad (2.192)$$

Konsekwentnie:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkh}^{\text{eff}} A_{khlm}^{\text{eff}} E_{lm} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha C_{ijkh}^\alpha A_{khlm}^\alpha E_{lm}, \quad (2.193a)$$

$$C_{ijkh}^m A_{khlm}^{\text{eff}} E_{lm} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha C_{ijkh}^m A_{khlm}^\alpha E_{lm}, \quad (2.193b)$$

gdzie prawa strona równania (2.193a) to zależność (2.174b), a C_{ijkh}^m oznacza tensor sztywności sprężystej matrycy.

Po odjęciu stronami równań (2.193) otrzymujemy

$$(C_{ijkh}^{\text{eff}} - C_{ijkh}^m) A_{khlm}^{\text{eff}} E_{lm} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (C_{ijkh}^\alpha - C_{ijkh}^m) A_{khlm}^\alpha E_{lm}. \quad (2.194)$$

Równanie (2.194) musi być spełnione dla dowolnych wartości E_{lm} , a więc

$$(C_{ijkh}^{\text{eff}} - C_{ijkh}^m) A_{khlm}^{\text{eff}} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (C_{ijkh}^\alpha - C_{ijkh}^m) A_{khlm}^\alpha. \quad (2.195)$$

Po ponownym skorzystaniu z własności izotropii tensorów lokalizacji: A_{khlm}^α oraz A_{khlm}^{eff} (kompozyt jest w kształcie kuli) oraz z tożsamości (2.181) można pokazać (podobnie jak przejście (2.177), (2.182)–(2.183)), że równanie (2.195) implikuje następujące równości, tj.

$$(K^{\text{eff}} - K^m) P^{\text{eff}} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (K^\alpha - K^m) P^\alpha, \quad (2.196a)$$

$$(G^{\text{eff}} - G^m) Q^{\text{eff}} = \sum_{\alpha=1}^N c^\alpha (G^\alpha - G^m) Q^\alpha, \quad (2.196b)$$

gdzie (tab. 2.1)

$$P^{\text{eff}} = \frac{K^m + \frac{4}{3}G^m}{K^{\text{eff}} + \frac{4}{3}G^m}, \quad Q^{\text{eff}} = \frac{G^m + \zeta^m}{G^{\text{eff}} + \zeta^m}, \quad \zeta^m = \frac{G^m (9K^m + 8G^m)}{6(K^m + 2G^m)}.$$

Ostateczna postać równań szacowania parametrów efektywnych w metodzie Kuster–Toksöza dana jest związkami:

$$(K^{\text{eff}} - K^m) \frac{K^m + \frac{4}{3}G^m}{K^{\text{eff}} + \frac{4}{3}G^m} = \sum_{\alpha=1}^N (K^\alpha - K^m) P^\alpha c^\alpha, \quad (2.197)$$

$$(G^{\text{eff}} - G^m) \frac{G^m + \zeta^m}{G^{\text{eff}} + \zeta^m} = \sum_{\alpha=1}^N (G^\alpha - G^m) Q^\alpha c^\alpha. \quad (2.198)$$

Gdy ośrodek jest zbudowany z matrycy, w której są zanurzone wtrącenia o kształcie sferycznym, obie metody (schemat Mori–Tanaki i schemat Kuster–Toksöza) dają

ten sam wynik¹⁴. Ponadto, w przypadku ośrodka dwuskładnikowego, gdy matryca jest zbudowana z materiału o większym module odkształcenia postaciowego niż materiał wtrącenia (o kształcie sferycznym), wtedy metody te dają oszacowanie efektywnego modułu odkształcenia objętościowego równe dolnemu ograniczeniu Hashina–Shtrikmana. W przeciwnym razie, tj. gdy matrycę tworzy ośrodek o mniejszym module odkształcenia postaciowego niż materiał wtrącenia, osiągnięte jest górne ograniczenie Hashina–Shtrikmana na wartość modułu odkształcenia objętościowego.

W ogólnym przypadku, tj. dowolnego kształtu wtrącenia, metody Mori–Tanaki oraz Kuster–Toksöza są *nierealizowalne*.

2.3.2. Kompozyt fizycznie nieliniowy. Schemat wariacyjny Ponte Castañedy

W przypadku ośrodków losowych, fizycznie nieliniowych, najczęstszą metodą szacowania własności efektywnych oraz poszukiwania ich ograniczeń jest procedura oparta na liniowym ośrodku porównawczym.

Poniżej przedstawiamy jedną z takich metod zaproponowaną przez Ponte Castañedę [121]. Ideowo podobne metody, tzn. oparte na ośrodku porównawczym, przedstawione są w pracach: Ponte Castañeda [122], Ponte Castañeda i Suquet [123] oraz Suquet [151, 152].

Rozważamy nieliniowy ośrodek losowy, który tworzy N składników. Zakładamy ponadto, że równania konstytutywne składników tego ośrodka są zdefiniowane przez odpowiedni potencjał wyrażony przez tensor naprężenia. Jak zwykle, rozkład składników w ośrodku określają funkcje charakterystyczne $h^\alpha(x)$. Potencjał naprężenia dla całego ośrodka ma więc postać

$$u(\sigma, x) = \sum_{\alpha=1}^N h^\alpha(x) u^\alpha(\sigma), \quad (2.199)$$

gdzie $u^\alpha(\sigma)$ – potencjał dla składnika α .

Potencjał zastępczy jest zdefiniowany przez (związki (2.43) i (2.44) w p. 2.1.2)

$$U(\langle \sigma \rangle) = \inf_{\sigma \in S(\langle \sigma \rangle)} \langle u(\sigma, x) \rangle. \quad (2.200)$$

W podobny sposób jest zdefiniowany potencjał zastępczy dla ośrodka liniowo-sprężystego, który stosowany będzie do szacowania potencjału zastępczego dla ośrodka nieliniowego. O ośrodku liniowym zakładamy, że ma taki sam rozkład składników, jak w analizowanym ośrodku nieliniowym. Wobec tego:

¹⁴ Dowód jest przedstawiony w pracy: Berryman J.G., Berge P.A., *Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites*, *Mechanics of Materials*, 22, 1996, 149–164.

$$\tilde{U}(\langle \sigma \rangle) = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}(\langle \sigma \rangle)} \langle \tilde{u}(\sigma, x) \rangle, \quad (2.201)$$

gdzie

$$\tilde{u}(\sigma, x) = \sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha}(x) \tilde{u}^{\alpha}(\sigma); \quad \tilde{u}^{\alpha}(\sigma) = \frac{\sigma_e^2}{2G^{\alpha}} + \frac{\sigma_o^2}{2K^{\alpha}} \quad (2.202)$$

oraz

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}; \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}; \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}. \quad (2.203)$$

Jako przykład metody „liniowego ośrodka porównawczego” rozważamy przypadek, gdy potencjał ośrodka nieliniowego (jego składników) jest funkcją potęgową o wykładniku większym niż dwa. Możliwe jest wtedy zdefiniowanie następujących funkcji¹⁵

$$v^{\alpha}(G^{\alpha}, K^{\alpha}) = \sup_{\sigma} (\tilde{u}^{\alpha}(\sigma) - u^{\alpha}(\sigma)). \quad (2.204)$$

Wykorzystując związki (2.199) i (2.202), zależność (2.204) można przedstawić również jako

$$V(G, K, x) = \sup_{\sigma} (\tilde{u}(\sigma, x) - u(\sigma, x)), \quad (2.205)$$

gdzie

$$V(G, K, x) = \sum_{\alpha=1}^N h^{\alpha}(x) v^{\alpha}(G^{\alpha}, K^{\alpha}). \quad (2.206)$$

¹⁵ Jeśli potencjał ośrodka nieliniowego ma wykładnik mniejszy od dwóch, to definicja (2.204) nie ma sensu. Należy wtedy definiować minimum z różnicy potencjałów, a nie maksimum jak w (2.204). Ilustrują to poniższe dwa proste przykłady:

a) niech $(K^{\alpha} \rightarrow \infty)$: $\tilde{u}^{\alpha}(\sigma) = \frac{\sigma_e^2}{2G^{\alpha}}$ oraz $u^{\alpha}(\sigma) = \frac{\sigma_e^4}{2B^{\alpha}}$, wtedy

$$\sup_{\sigma} (\tilde{u}^{\alpha}(\sigma) - u^{\alpha}(\sigma)) = \frac{1}{2} \sup_{\sigma} \left[\sigma_e^2 \left(\frac{1}{G^{\alpha}} - \frac{\sigma_e^2}{B^{\alpha}} \right) \right] = \frac{B^{\alpha}}{8(G^{\alpha})^2},$$

gdzie B^{α} – stała materiałowa ośrodka nieliniowego;

b) $\tilde{u}^{\alpha}(\sigma) = \frac{\sigma_e^2}{2G^{\alpha}}$ oraz $u^{\alpha}(\sigma) = \frac{|\sigma_e|}{2B^{\alpha}}$, wtedy

$$\inf_{\sigma} (\tilde{u}(\sigma) - u(\sigma)) = \frac{1}{2} \inf_{\sigma} \left[\sigma_e \left(\frac{\sigma_e}{G^{\alpha}} - \frac{1}{B^{\alpha}} \right) \right] = -\frac{G^{\alpha}}{8(B^{\alpha})^2}.$$

Wobec tego, zgodnie z (2.205), dla każdych K^α i G^α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) oraz σ , w każdym punkcie x kompozytu jest spełniona nierówność

$$V(G, K, x) \geq \tilde{u}(\sigma, x) - u(\sigma, x) \quad (2.207)$$

lub równoważnie

$$u(\sigma, x) \geq \tilde{u}(\sigma, x) - V(G, K, x). \quad (2.208)$$

Uśrednienie tej nierówności po objętości kompozytu daje

$$\langle u(\sigma, x) \rangle \geq \langle \tilde{u}(\sigma, x) \rangle - \bar{V}(G, K), \quad (2.209)$$

gdzie (bezpośrednia konsekwencja (2.206))

$$\bar{V}(G, K) = \langle V(G, K, x) \rangle = \sum_{\alpha=1}^N h^\alpha(x) v^\alpha(G^\alpha, K^\alpha). \quad (2.210)$$

Nierówność (2.209) implikuje

$$\inf_{\sigma \in S(\langle \sigma \rangle)} \langle u(\sigma, x) \rangle \geq \inf_{\sigma \in S(\langle \sigma \rangle)} [\langle \tilde{u}(\sigma, x) \rangle - \bar{V}(G, K)]. \quad (2.211)$$

$V(G, K)$ nie zależy jednak od σ , a więc

$$\inf_{\sigma \in S(\langle \sigma \rangle)} \langle u(\sigma, x) \rangle \geq \inf_{\sigma \in S(\langle \sigma \rangle)} \langle \tilde{u}(\sigma, x) \rangle - \bar{V}(G, K). \quad (2.212)$$

Na podstawie definicji potencjałów zastępczych (2.200) i (2.201) dla ośrodka nieliniowego i liniowego, nierówność (2.212) można przedstawić jako

$$U(\langle \sigma \rangle) \geq \tilde{U}(\langle \sigma \rangle) - \bar{V}(G, K), \quad (2.213)$$

która jest spełniona dla każdych wartości K^α , G^α oraz $\langle \sigma \rangle$.

Jeśli możemy więc obliczyć potencjał zastępczy dla ośrodka liniowego w funkcji (G^α , K^α), to nierówność (2.213) prowadzi do rodziny ograniczeń na potencjał zastępczy kompozytu nieliniowego. Optymalne dobranie liniowego ośrodka porównawczego polega na przyjęciu takich parametrów sprężystości jego składników, aby wyrażenie po prawej stronie nierówności (2.213) osiągało swoje maksimum. Po oznaczeniu

$$H(\langle \sigma \rangle) = \sup_{G, K} (\tilde{U}(\langle \sigma \rangle) - \bar{V}(G, K)), \quad (2.214)$$

nierówność (2.213) implikuje

$$U(\langle \sigma \rangle) \geq H(\langle \sigma \rangle). \quad (2.215)$$

Zastosowanie powyższego schematu zilustrujemy oszacowaniem potencjału zastępczego dla nieliniowego ośrodka porowatego (Ponte Castañeda [121]). Przyjmuje-

my, że szkielet ośrodka porowatego jest zbudowany z materiału nieściśliwego, charakteryzującego się potencjałem naprężenia (funkcja potęgowa naprężenia σ_e o wykładniku wyższym niż dwa), tj.

$$u^{(1)} = f(\sigma_e). \quad (2.216)$$

Konsekwentnie, liniowy ośrodek porównawczy również jest przyjmowany jako zbudowany z nieściśliwego szkieletu, co implikuje

$$\tilde{u}^{(1)} = \frac{\sigma_e^2}{2G}. \quad (2.217)$$

Wobec tego, zgodnie z (2.204), (2.216) oraz (2.217), możemy zapisać

$$v^{(1)}(G) = \sup_{\sigma} \left(\frac{\sigma_e^2}{2G} - f(\sigma_e) \right). \quad (2.218)$$

Oczywiście, (zależność (2.210))

$$\bar{V}(G) = cv^{(1)}(G), \quad (2.219)$$

gdzie:

c – udział frakcyjny szkieletu w ośrodku porowatym,

$1 - c$ – porowatość ośrodka.

Uwzględnienie (2.219) w (2.214) daje

$$H(\langle\sigma\rangle) = c \sup_G \left(\frac{\tilde{U}(\langle\sigma\rangle)}{c} - v^{(1)}(G) \right). \quad (2.220)$$

Następny krok analizy to wykorzystanie oszacowań lub ograniczeń dla ośrodka liniowego.

W rozważanym przypadku może to być np. dolne ograniczenie Hashina-Shtrikmana dla potencjału naprężenia, tj.

$$\tilde{U}(\langle\sigma\rangle) \geq \frac{\sigma_e^2}{2G_{HS}} + \frac{\sigma_0^2}{2K_{HS}}, \quad (2.221)$$

gdzie (prawa strona nierówności (2.160) po podstawieniu $G^{(2)} = G$, $K^{(2)} \rightarrow \infty$, $K^{(1)} = 0$, $G^{(1)} = 0$ oraz $c^{(1)} = 1 - c$)

$$G_{HS} = \frac{Gc}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}c}; \quad K_{HS} = \frac{4}{3}G \frac{c}{(1-c)}. \quad (2.222)$$

Po podstawieniu prawej strony nierówności (2.221) do (2.220), w miejsce potencjału zastępczego dla ośrodka liniowego, otrzymujemy

$$H(s) = c \sup_G \left(\frac{s^2}{2G} - v^{(1)}(G) \right); \quad s = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}c \right) \sigma_e^2 + \frac{9}{4}(1-c)\sigma_0^2}. \quad (2.223)$$

W celu znalezienia ostatecznej postaci oszacowania potencjału dla ośrodka nieliniowego stosowana jest następująca własność transformacji Legendrea [123], tj. jeśli funkcje $F(Y)$ i $F_1(X)$ są funkcjami wypukłymi oraz

$$F(Y) = \sup_X (XY - F_1(X)), \quad (2.224)$$

to również

$$F_1(X) = \sup_Y (XY - F(Y)). \quad (2.225)$$

Zastosowanie tego schematu do związku (2.218) i utożsamienie Y z $1/(2G)$ oraz X z σ_e^2 prowadzi do

$$f(\sigma_e) = \sup_G \left(\frac{\sigma_e^2}{2G} - v^{(1)}(G) \right), \quad (2.226)$$

co – przez podstawienie $\sigma_e \rightarrow s$ – implikuje

$$f(s) = \sup_G \left(\frac{s^2}{2G} - v^{(1)}(G) \right). \quad (2.227)$$

Porównując równania (2.227) i (2.223), dostajemy natychmiast

$$H(s) = cf(s) \quad (2.228)$$

i w konsekwencji (nierówność (2.215))

$$U(\langle \sigma \rangle) \geq cf(s). \quad (2.229)$$

Otrzymany rezultat, ponieważ wykorzystuje ograniczenie Hashina–Shtrikmana dla ośrodka liniowego, może być interpretowany jako nieliniowe dolne ograniczenie Hashina–Shtrikmana. Przedstawiona procedura może być również zastosowana do określania oszacowań dla kompozytu nieliniowego, odpowiadających oszacowaniom otrzymanym ze schematów samouzgodnionego pola czy Mori–Tanaki dla ośrodka liniowego. Jak łatwo zauważyć, schemat ten daje tylko jednostronne ograniczenie na potencjał naprężenia. Ekwiwalentnie, w podobny sposób można poszukiwać ograniczeń dla potencjału odkształcenia. Z tego, co autorowi wiadomo, nie istnieje obecnie schemat analizy losowych ośrodków nieliniowych, który podawałby równocześnie dolne i górne ograniczenie własności efektywnych ośrodka.

Inne schematy poszukiwania oszacowań oraz ograniczeń dla losowych kompozytów nieliniowych, również oparte na idei liniowego kompozytu porównawczego, stosowane np. do analizy ośrodków plastycznych przedstawione są w [122], [123], [151], [152].

2.4. Podsumowanie

Podczas prezentacji podstaw metody homogenizacji omówiono jej dwa sformułowania, tzn. metodę wygładzania oraz matematyczną teorię homogenizacji. Cel jest jeden – sformułowanie dla istniejącego opisu matematycznego, charakteryzującego się silnie nieciągłymi polami fizycznymi (nazywanego opisem mikroskopowym), opisu równoważnego (nazywanego opisem makroskopowym), charakteryzującego się „gładkimi” polami, a więc nadającego się do obliczeń inżynierskich.

Opisu tego poszukuje się, w ogólności, na dwa sposoby, tj. przez bezpośrednie stosowanie operacji uśredniania (wygładzenie pola) lub przez „myślowe” żądanie, aby wymiar niejednorodności zdażał do zera (matematyczna teoria homogenizacji).

Podczas omawiania technik stosujących operację uśredniania wskazano, że metody objętościowego i wagowego uśredniania, ze względu na brak w nich hipotezy zamykającej, charakteryzują się zjawiskiem „zatrzymania” w procesie przejścia z jednej skali obserwacji do drugiej. Trudność ta jest omijana dzięki przyjęciu hipotezy zamykającej w postaci warunku periodyczności lub poprzez „przenoszenie członów niezdefiniowanych” do skali makroskopowej i ich analizę na podstawie drugiej zasady termodynamiki. Techniki te stosowane są przede wszystkim w modelowaniu procesów transportu w ośrodkach porowatych.

Ciągła mikromechanika, opierając się na pojęciu reprezentatywnej elementarnej objętości (REO), formułuje opis makroskopowy przez wyróżnienie zmiennych mikroskopowych i makroskopowych. Te drugie na ogół są wartościami średnimi, obliczonymi wewnątrz REO z tych pierwszych. Sformułowanie to, ideowo, jest bliskie badaniom eksperymentalnym prowadzonym w laboratorium w tym sensie, że poszukuje się relacji między wielkościami mierzalnymi w czasie eksperymentu, tj. średnimi wartościami przemieszczenia (odkształcenia) i naprężenia przyłożonymi do brzegów próbki. Klasycznie, jako warunki brzegowe przyjmuje się jednorodne odkształcenie lub naprężenie. W przypadku jednak deformacji plastycznych ośrodka, poprawnym warunkiem brzegowym jest jednorodne odkształcenie [150]. Sformułowania związków makroskopowych, np. potencjałów zastępczych są analogiczne do sformułowań otrzymanych z matematycznej teorii homogenizacji (por. (2.43), (2.44) i twierdzenie 2.7 wraz z (2.127)). Wykorzystywana jest ona przede wszystkim w analizie procesu deformacji oraz prognozowania własności efektywnych kompozytowych ciał stałych.

Podczas omawiania matematycznej teorii homogenizacji stwierdzono, że w przypadku analizy procesu przepływu płynu przez ośrodek porowaty konieczne jest skalowanie opisu mikroskopowego. Jest to, między innymi, wynik „wrażliwości” parametrów przepływu na zmiany wymiarów przestrzeni porowej w przekształceniu jednokładnym.

Omówiono trzy techniki, tj. metodę asymptotycznej homogenizacji, metodę zbieżności dwuskalowej oraz metodę Γ -zbieżności. Podstawowym założeniem dwóch

pierwszych metod jest periodyczność analizowanej struktury, trzecia – „pracuje” również w przypadku ośrodków losowych. Szczegółowe porównanie tych metod przedstawiono w p. 2.2.5.

Celem niniejszej monografii jest zaproponowanie, stosunkowo prostej, a zarazem skutecznej, metody dedukcji opisu makroskopowego procesów zachodzących w ośrodkach gruntowych i skalnych z ich opisu mikroskopowego. Zdaniem autora, metodą taką, równie dobrze nadającą się do modelowania procesów transportu, jak i mechanicznego zachowania kompozytowego ciała stałego (ośrodka porowatego) jest metoda asymptotycznej homogenizacji.

Zastrzeżeniem, jakie budzi stosowanie metody asymptotycznej homogenizacji do analizy dowolnych ośrodków porowatych, jest warunek periodyczności struktury. Jeśli jednak ograniczyć się tylko do poszukiwania formy równań makroskopowych oraz analizy roli struktury wewnętrznej, to stosowanie tej metody można rozciągnąć również na ośrodki nie tylko periodyczne [16], [85], [128], [132], [133], [134], [135].

Określanie parametrów efektywnych dla ośrodków losowych i ośrodków periodycznych wymaga jednak odmiennych metod. Metody szacowania wartości efektywnych dla ośrodków losowych omówione zostały w poprzednim punkcie.

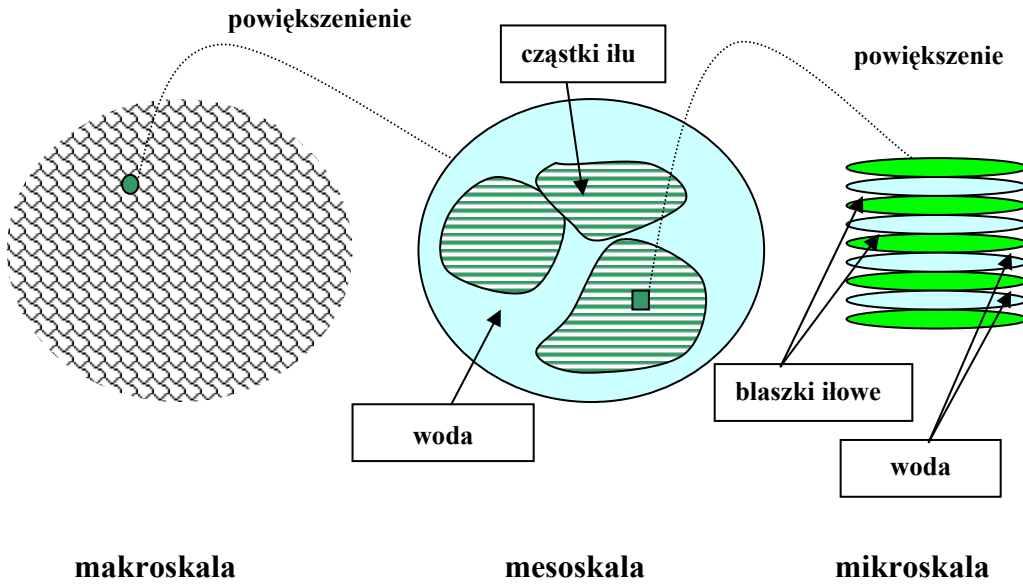
Do tej pory nie poruszane było jedno, chyba najważniejsze zagadnienie – opis mikroskopowy. Zakładano, że potrzebujemy tylko „narzędzia”, aby istniejący opis mikroskopowy „przenieść” do skali makroskopowej. Jest oczywiste, że zależnie od „jakości” (dokładności) sformułowanego modelu mikroskopowego, w wyniku homogenizacji, otrzymamy odpowiedniej „jakości” model makroskopowy. Z drugiej strony, im bardziej skomplikowany opis mikroskopowy, tym trudniejsze „przeniesienie” go do skali makroskopowej. W rzeczywistości sformułowanie opisu mikroskopowego zależy w równej mierze od rodzaju ośrodka oraz od zagadnienia, które chcemy opisać lub rozwiązać. Ilustrują to poniższe przykłady.

W przypadku ośrodków porowatych nasyconych płynem, opis mikroskopowy zależy nie tylko od rodzaju wypełniającego przestrzeń porową płynu (np. aktywność chemiczna z ciałem stałym tworzącym szkielet), ale również od struktury wewnętrznej ośrodka porowatego.

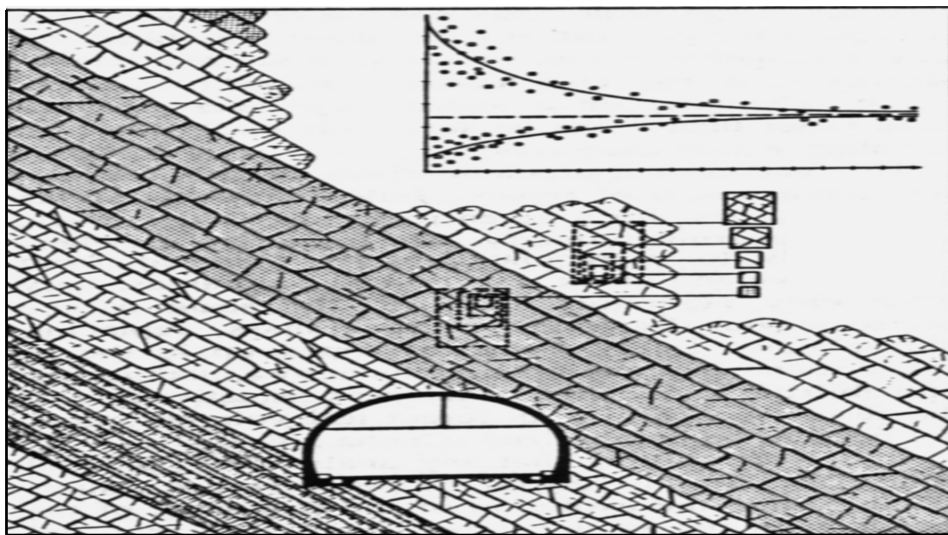
Rozważmy zachowanie się gazu w przestrzeni porowej o określonej średnicy porów d_a . Biorąc pod uwagę wartość δ średniej drogi swobodnej cząsteczki gazu, tzn. średni dystans cząsteczki między dwoma kolejnymi zderzeniami, możemy wyróżnić przynajmniej trzy skrajne przypadki zachowania się gazu:

➤ $d_a/\delta \gg 1$ – zachowanie się gazu w przestrzeni porowej jest zdominowane tylko przez zderzenia cząstek gazu między sobą. Z punktu widzenia mechanicznego gaz może być modelowany jako barotropowa lepka ciecz Newtona.

➤ $d_a/\delta \ll 1$ – w tym przypadku przepływ gazu jest zdeterminowany przez zderzenia cząstek gazu z powierzchnią ciała stałego. Podstawowy postulat mechaniki kontinuum tym razem nie jest, oczywiście, spełniony. Modelowanie matematyczne przepływu może być przeprowadzone bądź w ramach mechaniki statystycznej, bądź



Rys. 2.20. Wieloskalowy model ilów
 Fig. 2.20. Multiscale model for clay



Rys. 2.21. Skale dla spękanego masywu skalnego
 Fig. 2.21. Scales for jointed rock mass

fenomenologicznie, gdy ciało stałe wraz z zawartym gazem traktuje się jako mieszaninę, w której proces przepływu jest rządony np. równaniem dyfuzji molekularnej Ficka.

➤ $d_a/\delta \approx 1$ – zderzenia między cząsteczkami gazu oraz między cząsteczką gazu a powierzchnią ciała stałego zachodzą równie często. Do opisu stosuje się tzw. model gazu zakurzonego [79] otrzymany w ramach zmodyfikowanej kinetycznej teorii gazu.

Dalej podano wartości średniej drogi swobodnej dla trzech rodzajów gazu (obliczone w tzw. warunkach normalnych, tj. ciśnienie atmosferyczne, temperatura $T = 294$ K) [99]: dwutlenek węgla $\delta = 57,4$ nm, para wodna $\delta = 43$ nm, azot $\delta = 67,7$ nm.

Drugi przykład roli rozmiaru porów na zachowanie się tym razem cieczy, stanowią wyniki badań przeprowadzone przez Gee et.al. [63] (prezentowane również w pracy Israelachviliego et.al. [75]). Celem tych badań było określenie natury przejścia z kontynuinalnego do molekularnego zachowania się cienkiej warstwy cieczy znajdującej się między dwiema płytkami ciała stałego. Zauważono, że zależnie od grubości warstwy, ciecz zachowuje się bądź jak klasyczna lepka ciecz Newtona, bądź jak ciało stałe. Stwierdzono również, że warstwy cieczy zachowujące się jak ciało stałe, po przyłożeniu do nich krytycznej wartości naprężenia ścinającego, zachowują się jak ciągliwe ciało stałe podlegające deformacji plastycznej.

Z omówionych powyżej dwóch przykładów zachowania się płynu w przestrzeni porowej jasno wynika, że opis lokalny, sformułowany dla danego ośrodka porowatego, musi być również adekwatny do jego struktury wewnętrznej. Ponadto, wiele ośrodków porowatych wykazuje tzw. hierarchiczną budowę [82], [89]. Ilustruje to struktura wewnętrzna gruntów ilowych przedstawiona na rysunku 2.20. W tym przypadku wyróżnione są nie dwie skale obserwacji, a co najmniej trzy: mikroskala, mezoskala oraz makroskala. Proces homogenizacji może więc polegać na sukcesywnym przechodzeniu z jednej do drugiej skali (Mei i Auriault [109]), w celu otrzymania opisu w naturalnej skali obserwacji.

W przytoczonym powyżej przykładzie, rzeczywiście pojęcie opisu mikroskopowego związane było z powszechnie rozumianym pojęciem słowa „mikro”. Jednak, jak zostało już wcześniej powiedziane, nazwy: opis mikroskopowy i opis makroskopowy używane są tylko po to, aby wyróżnić opis uwzględniający dyskretną strukturę ośrodka od zastępczego opisu uśrednionego. Zatem pojęcie opisu mikroskopowego nie musi wcale implikować rozmiarów klasycznie interpretowanych jako „mikro”. Zilustrowano to na rysunku 2.21, gdzie wymiar pojedynczego bloku może być wymiarem „mikro”.

3. Teoria porospężystości Biota. Wpływ mikrostruktury ośrodka na wartości stałych materiałowych

Jeżeli pod działaniem obciążenia przyłożonego do nasyconego płynem ośrodka porowatego rozpoczyna się proces wypierania płynu z porów, z równoczesnym odkształcaniem się ośrodka porowatego, to proces ten jest nazywany konsolidacją.

Twórcą pierwszego modelu matematycznego procesu konsolidacji ośrodka gruntowego był Terzaghi [35]. Nawodniony ośrodek gruntowy Terzaghi potraktował jako ośrodek dwufazowy, przyjmując, że składa się on z nieodkształcalnych ziaren tworzących szkielet oraz nieściśliwej cieczy wypełniającej pory. Założył, że rozważany proces powolnego zagęszczania się ośrodka gruntowego jest wynikiem zmniejszania się porowatości, która zmienia się wraz ze zmianą ciśnienia cieczy w przestrzeni porowej. Przyjął, że przepływ cieczy jest zgodny z prawem Darcy'ego oraz że współczynnik filtracji nie ulega zmianie w czasie procesu zagęszczania. Tak postawione założenia doprowadziły Terzaghiego do modelu jednowymiarowej konsolidacji, nazywanej konsolidacją hydrodynamiczną. Podczas budowy równań konsolidacji Terzaghi sformułował również, omówioną we wprowadzeniu, koncepcję naprężenia efektywnego.

Znaczące odstępstwa od teorii Terzaghiego obserwowano dla ośrodków porowatych, takich jak skały czy beton oraz w przypadku ekstremalnie wysokich naprężeń w ośrodkach gruntowych. Dopiero Biot, w ramach ogłoszonej przez siebie nowej teorii konsolidacji [32], uogólnił teorię na te ośrodki.

Teoria Biota, zwana teorią porospężystości, została oparta na następujących założeniach¹:

- a) cały ośrodek jest wypełniony cieczą,
- b) szkielet jest materiałem liniowo-sprężystym i izotropowym,
- c) odkształcenia ośrodka są małe,
- d) ciecz jest cieczą idealną,
- e) ciecz może zawierać pęcherzyki gazu (ciecz traktuje się jako ściśliwą, ale nie przenoszącą sił stycznych),
- f) przepływ cieczy w porach podlega prawu Darcy'ego,
- g) porowatość ośrodka uważa się za wielkość stałą.

¹ Są to oryginalne założenia sformułowane przez Biota w pracy [32]. Klasycznie, pojęcie *cieczy idealnej* oznacza, że ruchowi takiej cieczy nie towarzyszy żadna dyssypacja energii, tzn. procesy przewodnictwa cieplnego i lepkości są nieistotne (Landau i Lifszyc [88]). Obowiązkiwanie prawa Darcy'ego implikuje, oczywiście, lepkość cieczy, stąd jakby pewna niezgodność przyjętych przez Biota założeń. W oryginalnym wyprowadzeniu teorii porospężystości [32], założenie „ciecz jest idealna” wykorzystywane było przez Biota do stwierdzenia, że tensor naprężenia w cieczy jest tensorem izotropowym o wartości odpowiadającej ciśnieniu cieczy. Prawo Darcy'ego było traktowane jako niezależne założenie konstytutywne.

Zbiorny układ równań teorii porospężystości Biota jest sprzężonym układem równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, który dla ośrodka izotropowego ma postać

$$\frac{\partial (C_{ijkh}^{\text{eff}} e_{kh}(u) - \alpha p \delta_{ij})}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -\alpha \frac{\partial e_{ii}(u)}{\partial t} + \beta \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Omówiony jest on szczegółowo, wraz z dwiema ogólnymi metodami całkowania tych równań podanymi przez Derskiego, w pracy [82].

W równaniach (3.1) i (3.2):

- p – wartość ciśnienia płynu w przestrzeni porowej,
- u_i – składowa wektora przemieszczenia ośrodka porowatego,
- $e_{ij}(u)$ – składowa tensora odkształcenia,
- K – współczynnik filtracji,
- α, β – dodatkowe stałe materiałowe uwzględniające dwufazowy charakter ośrodka.

W równaniu (3.1) tensor sztywności sprężystej oznaczono jako „efektywny”, w celu odróżnienia go od tensora sztywności sprężystej materiału tworzącego szkielet ośrodka porowatego, który stosowany będzie w procesie homogenizacji.

Teorię porospężystości Biota omawiało wielu autorów: Auriault i Sanchez-Palencia [18], Biot [31], Biot i Willis [33], Coussy [47], Rice i Cleary [126], Thompson i Willis [156] (wymieniając najbardziej znane). Większość prac dotyczy interpretacji fizycznej stałych materiałowych, laboratoryjnych metod ich wyznaczenia oraz związków tych stałych z własnościami sprężystymi szkieletu ośrodka porowatego. Podstawą analizy jest na ogół ośrodek o cechach makroskopowej izotropii.

W ostatnim czasie ukazały się również prace (np. de Boer i Lade [36], Sibai [141]) przedstawiające wyniki badań laboratoryjnych wartości składowych tensora α_{ij} w funkcji parametrów mikrostruktury ośrodka (współczynnik materiałowy α , w przypadku anizotropii ośrodka, jest tensorem drugiego rzędu i jest oznaczany przez α_{ij}).

Ciekawe wyniki badań laboratoryjnych przedstawił Sibai [141]. Wskazują one na zależność między wartościami składowych tensora α_{ij} a pojawianiem się i wzrostem mikrospektań w ośrodku. Podczas tych badań wyznaczano wartości składowych tensora α_{ij} dla poszczególnych etapów obciążenia. W początkowej fazie obciążenia nie obserwowano zmian wartości składowych tensora α_{ij} . W miarę wzrostu przykładanego obciążenia oraz dochodzenia do maksymalnej nośności próbki obserwowano powiększanie się istniejących mikrospektań oraz powstawanie nowych. Procesowi temu towarzyszył wzrost wartości składowych analizowanego tensora. Tuż przed zniszczeniem składowe normalne tensora α_{ij} osiągnęły wartość jeden.

Wpływ mikrostruktury, a raczej jej zmian wywołanych pojawianiem się mikrospektań, na wartości efektywnych parametrów sprężystości analizowany był za pomo-

ca ̄ r̄ożnych modeli mikromechanicznych w wielu pracach ([42], [70], [78] – jako przykładowe). Brak jest natomiast podobnych analiz teoretycznych w odniesieniu do nasyconych ośrodków porowatych. R̄ownocześnie proponowane s̄a teorie makroskopowe, uwzględniające, w lepszy lub gorszy sposób, efekt mikrostruktury ośrodka porowatego – najczęściej przez wprowadzenie porowatości ośrodka jako dodatkowej zmiennej „wewnętrznej” opisu [26], [41], [153], [162].

Metoda asymptotycznej homogenizacji daje możliwość weryfikacji efektu mikrostruktury na wartości parametr̄ow efektywnych otrzymanego opisu makroskopowego. Celem niniejszego rozdziału jest więc analiza wpływu mikrostruktury na makroskopowe zachowanie nasyconego ośrodka porowatego. Ponieważ teoria porosprężystości Biota stanowi podstawy modelowania hydromechanicznego sprężenia w nasyconych ośrodkach porowatych, uzasadnione jest więc badanie efektu mikrostruktury na wartości stałych materiałowych tej teorii.

W tym rozdziale przedstawiono najpierw proces „odtworzenia” r̄ównań teorii porosprężystości Biota z opisu mikroskopowego przepływu lepkiej cieczy Newtona przez sprężyste odkształcalny ośrodek porowaty, a następnie, wykorzystując otrzymane z procesu przejścia „mikro–makro” definicje stałych materiałowych, zanalizowano wpływ mikrostruktury na wartości tych stałych. Rozważania ograniczono do stałych materiałowych teorii Biota „odpowiedzialnych” za hydromechaniczne sprężenie w nasyconych ośrodkach porowatych, tj. tensora α_{ij} i współczynnika β .

Pośrednim celem rozdziału jest przedstawienie metody asymptotycznej homogenizacji jako „narzędzia” badawczego, umożliwiającego analizę parametr̄ow efektywnych otrzymanego opisu makroskopowego.

Prezentowany w podrozdziale 3.1. proces „odtworzenia” związków teorii porosprężystości nie jest nowy. Podobne wyprowadzenia teorii Biota przedstawili, między innymi, Auriault i Sanchez-Palencia [18], Auriault [13], Strzelecki [147].

Umieszczenie tego wyprowadzenia w niniejszym rozdziale czyni jednak całą analizę spójną, a ponadto umożliwia w dalszej części monografii, przy analizie innych proces̄ow zachodzących w nasyconych ośrodkach porowatych, odwoływanie się do wyników juź otrzymanych i niepowtarzanie ich.

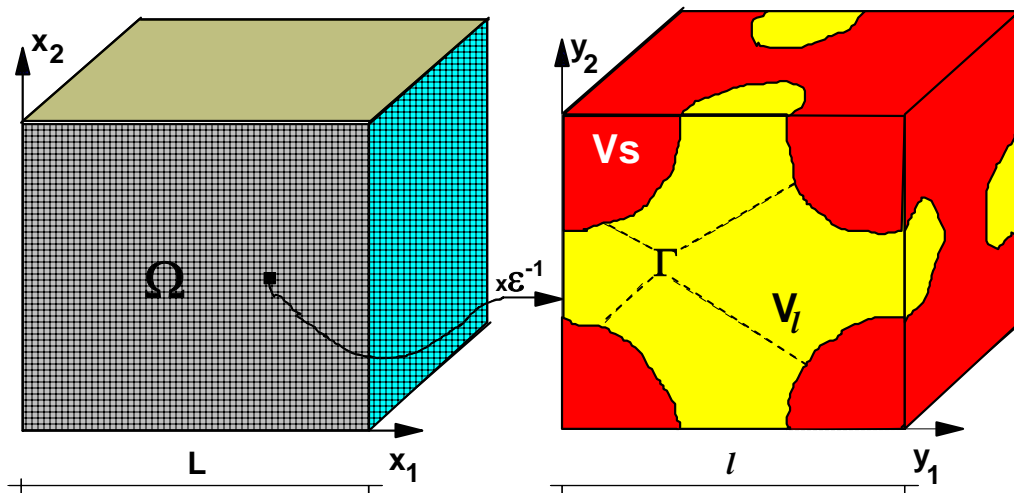
Identyfikacja parametr̄ow mikrostruktury (p. 3.2) jest nowa.

3.1. Poszukiwanie opisu makroskopowego – proces homogenizacji

Rozważamy proces konsolidacji ośrodka dwufazowego zbudowanego z porowatego szkieletu V_s wypełnionego lepka ̄ nieściśliwa ciecza ̄ Newtona – V_l (rys. 3.1). Zakładamy, że przemieszczenia i odkształcenia ośrodka s̄a małe. Proces przemieszczania się szkieletu przyjmujemy jako quasi-statyczny, a przepływ cieczy w przestrzeni porowej jako wolny i laminarny, czyli odbywający się przy bardzo małej liczbie Reynoldsa.

Przyjmujemy, że struktura ośrodka jest periodyczna, tzn. zbudowany jest z takich samych pojedynczych komórek, oraz pory są ze sobą połączone (rys. 3.1).

Przyjmujemy również, że szkielet ośrodka porowatego jest zbudowany z materiału liniowo-sprężystego. Rozszerzenie analizy o deformacje plastyczne przedstawiono w rozdziale 4.



Rys. 3.1. Rozważany ośrodek dwufazowy: Ω – cała objętość ośrodka,
 $V = V_s + V_l$ – objętość pojedynczej komórki
 Fig. 3.1. Two-phase medium considered: Ω – a bulk volume of the medium,
 $V = V_s + V_l$ – a unit cell volume

3.1.1. Opis mikroskopowy

Zgodnie z przedstawionymi założeniami, opis lokalny przepływu nieściśliwej lepkiej cieczy Newtona przez odkształcalny ośrodek porowaty tworzą

1. Dla cieczy:

- równania równowagi (dla małych liczb Reynoldsa)

$$\sigma_{ij,i}^l = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.3)$$

- równanie zachowania masy

$$v_{i,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.4)$$

- równania konstytutywne dla nieściśliwej lepkiej cieczy Newtona

$$\sigma_{ij}^l = -p\delta_{ij} + \mu^l(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \text{w } V_l. \quad (3.5)$$

2. Dla materiału tworzącego szkielet:

➤ równania równowagi

$$\sigma_{ij,i}^s = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (3.6)$$

➤ równania konstytutywne dla ciała liniowo-sprężystego

$$\sigma_{ij}^s = C_{ijkh} e_{kh}(u), \quad \text{gdzie } e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{w } V_s. \quad (3.7)$$

Równania (3.3)–(3.7) są uzupełnione o warunki brzegowe na granicy rozdziału faz Γ (rys. 3.1):

➤ warunek ciągłości wektora naprężenia

$$\sigma_{ij}^s N_i - \sigma_{ij}^l N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (3.8)$$

➤ warunek ciągłości wektora prędkości

$$\dot{u}_i - v_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (3.9)$$

gdzie:

σ_{ij}^s – składowa tensora naprężenia w szkielecie ośrodka,

C_{ijkh} – składowe tensora sztywności sprężystej składników szkieletu,

σ_{ij}^l – składowa tensora naprężenia w cieczy,

v_i – składowa wektora prędkości cieczy,

μ^l – lepkość cieczy,

N_i – składowa normalnej N do powierzchni Γ (w danym punkcie),

δ_{ij} – symbol Kroneckera.

Pozostałe oznaczenia są zgodne z wprowadzonymi w (3.1) i (3.2). Pochodną materialną po czasie dla szkieletu oznacza się przez dodanie kropki nad daną wielkością, natomiast pochodna przestrzenna jest oznaczana przecinkiem.

W celu dokonania procesu homogenizacji, tak jak to omówiono w poprzednim rozdziale, powyższy opis lokalny musi być przeskalowany. Dzięki skalowaniu równań przepływu w postaci (2.156) i (2.157) oraz dokonaniu przekształceń, powyższe związki prowadzą do przeskalowanego opisu „mikroskopowego” przepływu lepkiej cieczy Newtona przez odkształcalny ośrodek porowaty, tj.:

$$\varepsilon^2 \mu v_{i,jj} - p_{,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.10)$$

$$v_{i,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.11)$$

$$\left[C_{ijkh} e_{kh}(u) \right]_{,i} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (3.12)$$

$$\left[C_{ijkh} e_{kh}(u) + p \delta_{ij} - \varepsilon^2 \mu^l (v_{i,j} + v_{j,i}) \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (3.13)$$

$$\dot{u}_i - v_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.14)$$

„Odtworzenie” równań teorii porospężystości Biota, tj. poszczególne etapy procesu homogenizacji, są przedstawione w następnym punkcie.

3.1.2. Rozwinięcia asymptotyczne i proces uśredniania

Po wprowadzeniu do opisu mikroskopowego (3.10)–(3.14) rozwinięcia asymptotycznego dla v , p i u , tj.:

$$v_i(x, y, t) = v_i^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon v_i^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 v_i^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

$$p(x, y, t) = p^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon p^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.16)$$

$$u_i(x, y, t) = u_i^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.17)$$

oraz uwzględnieniu prawa zmiany operatora pochodnej przestrzennej (2.82) otrzymujemy:

$$-\varepsilon^{-1} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y_i} + \varepsilon^0 \left[\mu \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} v_i^{(0)} \right) - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i} \right] + \varepsilon^1 [\dots] + \dots = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.18)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_i} + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} \right] + \varepsilon^1 [\dots] + \dots = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] + \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) \right] + \frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(1)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(2)}) \right] \right\} \\ & + \varepsilon^1 [\dots] + \dots = 0, \quad \text{w } V_s, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] N_i + \varepsilon^0 \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) + p^{(0)} \delta_{ij} \right] N_i \\ & + \varepsilon^1 \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(1)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(2)}) + p^{(1)} \delta_{ij} - \mu^l \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right] N_i \\ & + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = 0, \quad \text{na } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon^0 \left[\dot{u}_i^{(0)} - v_i^{(0)} \right] + \varepsilon^1 \left[\dot{u}_i^{(1)} - v_i^{(1)} \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.22)$$

W równaniach (3.15)–(3.22) zastosowano oznaczenia:

$$e_{ij}^x(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad e_{ij}^y(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right). \quad (3.23)$$

Następny krok to selekcja wyrażień stojących przy odpowiednich potęgach parametru ε i przyrównanie ich do zera. W wyniku otrzymujemy sekwencję zagadnień brzegowych.

I zagadnienie brzegowe: równanie (3.18) przy ε^{-1}

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_l. \quad (3.24)$$

Równanie to, wraz z warunkiem periodyczności, implikuje

$$p^{(0)}(x, y, t) = p^{(0)}(x, t), \quad \text{w } V_l. \quad (3.25)$$

II zagadnienie brzegowe: równanie (3.20) przy ε^{-2} i (3.21) przy ε^{-1} :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (3.26)$$

$$\left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.27)$$

Zagadnienie to jest klasycznym zadaniem teorii sprężystości. Rozwiązaniem jest

$$u^{(0)}(x, y, t) = u^{(0)}(x, t), \quad \text{w } V_s. \quad (3.28)$$

III zagadnienie brzegowe: równanie (3.18) przy ε^0 , (3.19) przy ε^{-1} oraz (3.22) przy ε^0 :

$$\mu \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} v_i^{(0)} \right) - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.30)$$

$$\dot{u}_i^{(0)} - v_i^{(0)} = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.31)$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania słabego tego układu równań zapewnia lemat Laxa–Milgrama (pełną analizę przedstawił np. Strzelecki w pracy [147]). Ponieważ ciśnienie $p^{(0)}(x, t)$ oraz przemieszczenie szkieletu $u^{(0)}(x, t)$ nie zależą od mikroskopowej zmiennej przestrzennej y , wobec tego:

$$v_i^{(0)}(x, y, t) - \dot{u}_i^{(0)} = -\frac{k_{ij}(y)}{\mu^l} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \quad \text{w } V_l, \quad (3.32)$$

$$p^{(1)}(x, y, t) = \chi_i(y) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \overline{p^{(1)}(x)}, \quad \text{w } V_l, \quad (3.33)$$

gdzie: $\overline{p^{(1)}(x)}$ jest niezależne od zmiennej y (periodyczność implikuje możliwość rozwiązania z dokładnością do stałej) oraz pole tensorowe $k_{ij}(y)$ i pole wektorowe $\chi_i(y)$ są rozwiązaniem układu:

$$\frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{\partial k_{ij}(y)}{\partial y_l} \right) + \delta_{ij} - \frac{\partial \chi_j}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial k_{ij}(y)}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.35a)$$

$$k_{ij}(y) = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.35b)$$

Uśrednienie równania (3.32) po objętości pojedynczej komórki periodyczności prowadzi do prawa Darcy'ego filtracji cieczy przez ośrodek porowaty, tzn.

$$V_i - n\dot{u}_i^{(0)}(x, t) = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}(x, t)}{\partial x_j}, \quad \text{w } \Omega, \quad (3.36)$$

gdzie:

n – porowatość ośrodka,

K_{ij} – tensor filtracji (w przypadku makroskopowej izotropii ośrodka – współczynnik filtracji),

V_i – prędkość filtracji cieczy, zdefiniowana jako

$$V_i = \frac{1}{\|V\|} \int_{V_l} v_i^{(0)} dV, \quad (3.37)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{\|V\|} \int_{V_l} k_{ij}(y) dV. \quad (3.38)$$

IV zagadnienie brzegowe: równanie (3.20) przy ε^{-1} , (3.21) przy ε^0 (wykorzysta-
no również (3.28)):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) \right] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (3.39)$$

$$\left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) + p^{(0)} \delta_{ij} \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.40)$$

Podobnie jak *II zagadnienie brzegowe*, problem ten jest klasycznym zadaniem teo-
rii sprężystości. Poszukiwanym polem jest teraz $u^{(1)}$, natomiast $u^{(0)}(x, t)$ oraz $p^{(0)}(x, t)$
traktuje się jako dane, gdyż są y -niezależne. Układ (3.39)–(3.40) jest liniowy, wobec
tego

$$u_i^{(1)} = \xi_i^{jk}(y) e_{jk}^x(u^{(0)}) + \eta_i(y) p^{(0)} + \overline{u^{(1)}(x)}, \quad \text{w } V_s, \quad (3.41)$$

gdzie:

$\xi_i^{jk}(y)$ – wartość składowej wektora przemieszczenia szkieletu wywołana jednost-
kowym odkształceniem $e_{jk}^x(u^{(0)}) = 1$ i $p^{(0)} = 0$,

$\eta_i(y)$ – składowa wektora przemieszczenia wywołana jednostkową wartością ci-
śnienia cieczy $p^{(0)} = 1$ przy $e_{jk}^x(u^{(0)}) = 0$,

$\overline{u^{(1)}(x)}$ – dowolna funkcja zmiennej x .

Podobnie jak w *III zagadnieniu brzegowym*, jest to wynik warunków brzegowych
w postaci naprężeń i periodyczności pola przemieszczenia i naprężenia. Zagadnienie
można zatem rozwiązać w przemieszczeniach z dokładnością do stałej.

V zagadnienie brzegowe: równanie (3.20) przy ε^0 , (3.21) przy ε^1 :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) \right] + \frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(1)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(2)}) \right] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (3.42a)$$

$$\left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(1)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(2)}) + p^{(1)} \delta_{ij} - \mu^l \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.42b)$$

Po uśrednieniu równania (3.42a) po objętości pojedynczej komórki oraz wykorzy-
staniu dodatkowo twierdzenia Greena i warunku zerowania się całki powierzchniowej
na przeciwległych krańcach pojedynczej komórki (periodyczność), po przekształce-
niach i zastosowaniu równań (3.29) i (3.30) otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left\langle h(y) \left(C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) \right) - (1-h(y)) p \delta_{ij} \right\rangle \right] = 0, \quad \text{w } \Omega. \quad (3.43)$$

W wyniku zdefiniowania tensora naprężenia dla ośrodka dwufazowego jako

$$\sigma_{ij}^T = h(y)\sigma_{ij}^s - (1-h(y))p^{(0)}\delta_{ij}, \quad \text{gdzie} \quad h(y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } y \in V_s \\ 0 & \text{gdy } y \in V_l \end{cases}, \quad \text{w } V \quad (3.44)$$

oraz zastosowania związku konstytutywnego dla materiału szkieletu, tj.

$$\sigma_{ij}^s = C_{ijkh}(e_{kh}^x(u^{(0)}) + e_{kh}^y(u^{(1)})) + O(\varepsilon), \quad \text{w } V_s, \quad (3.45)$$

równania (3.43), (3.44) i (3.45) prowadzą do makroskopowych równań równowagi dla ośrodka dwufazowego

$$\frac{\partial \langle \sigma_{ij}^T \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad \text{w } \Omega. \quad (3.46)$$

Makroskopowe równania konstytutywne, tj. zależności między uśrednionym całkowitym naprężeniem w ośrodku dwufazowym a jego przemieszczeniem i ciśnieniem porowym, mają postać

$$\langle \sigma_{ij}^T \rangle = C_{ijkh}^{\text{eff}} e_{kh}^x(u^{(0)}) - \alpha_{ij} p^{(0)}, \quad \text{w } \Omega, \quad (3.47)$$

gdzie parametry efektywne definiują następujące zależności:

$$C_{ijkh}^{\text{eff}} = \langle h(y) (C_{ijkh} + C_{ijlm} e_{lm}^y(\xi^{kh})) \rangle, \quad \text{w } \Omega, \quad (3.48)$$

$$\alpha_{ij} = n\delta_{ij} - \langle h(y) C_{ijkh} e_{kh}^y(\eta) \rangle, \quad \text{w } \Omega. \quad (3.49)$$

Przy formułowaniu powyższych związków skorzystano z równań (3.41), (3.44) i (3.45) oraz oznaczeń

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{\|V\|} \int_V \varphi dV. \quad (3.50)$$

VI zagadnienie brzegowe: równanie (3.19) przy ε^0 i (3.22) przy ε^1 :

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (3.51a)$$

$$\dot{u}_i^{(1)} - v_i^{(1)} = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.51b)$$

Podobnie jak w poprzednim zagadnieniu, uśrednienie równania (3.51a), z zastosowaniem warunku brzegowego (3.51b) i rozwiązania (3.41), daje

$$\frac{\partial (V_i - n\dot{u}_i^{(0)})}{\partial x_i} = -\gamma_{ij} \dot{e}_{ij}^x(u^{(0)}) + \beta \dot{p}^{(0)}, \quad \text{w } \Omega, \quad (3.52)$$

gdzie:

$$\gamma_{ij} = n\delta_{ij} - \langle h(y) e_{kh}^y(\xi^{ij}) \rangle, \quad \beta = \langle h(y) e_{ii}^y(\eta) \rangle, \quad \text{w } \Omega. \quad (3.53)$$

Równanie (3.52) jest *makroskopowym prawem zachowania masy nieściśliwej cieczy, filtrującej przez odkształcalny ośrodek porowaty*.

Ponadto, jak to pokazano w p. 3.2: $\gamma_{ij} = \alpha_{ij}$ [18].

3.1.3. Opis makroskopowy

Zbioreczy układ równań opisu makroskopowego nasyconego ośrodka porowatego tworzą:

➤ **prawo filtracji**

$$V_i - n\dot{u}_i^{(0)}(x,t) = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}(x,t)}{\partial x_j}, \quad \text{w } \Omega, \quad (3.54)$$

➤ **równanie zachowania masy dla filtrującej cieczy²**

$$\frac{\partial (V_i - n\dot{u}_i^{(0)})}{\partial x_i} = -\alpha_{ij} \dot{e}_{ij}^x(u^{(0)}) + \beta \dot{p}^{(0)}, \quad \text{w } \Omega, \quad (3.55)$$

➤ **równania równowagi dla ośrodka dwufazowego**

$$\frac{\partial \langle \sigma_{ij}^T \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad \text{w } \Omega, \quad (3.56)$$

➤ **równania konstytutywne**

$$\langle \sigma_{ij}^T \rangle = C_{ijkh}^{\text{eff}} e_{kh}^x(u^{(0)}) - \alpha_{ij} p^{(0)}, \quad \text{w } \Omega. \quad (3.57)$$

Równania (3.54)–(3.57) to „odtworzony” opis matematyczny teorii porosprężystości Biota. Należy jednak podkreślić, że w założeniach Biota ciecz wypełniająca pory była cieczą Pascala i prawo Darcy’ego przyjęte zostało jako równanie konstytutywne. W niniejszym wyprowadzeniu przyjęto, że ośrodek jest nasycony lepką cieczą Newtona, a prawo Darcy’ego zostało otrzymane.

Przedstawione w poprzednim punkcie rozwiązania kolejnych zagadnień brzegowych mogą być również zastosowane do określenia zmian porowatości ośrodka. Zauważmy, że dylatacja szkieletu jest równa

$$e_{ii}(u) = e_{ii}^x(u^{(0)}) + e_{ii}^y(u^{(1)}) + O(\varepsilon), \quad \text{w } V_s, \quad (3.58)$$

wobec tego, dzięki warunkowi periodyczności, mamy również (pomijając wielkość $O(\varepsilon)$)

² Prawo to – równanie (3.52) – zmodyfikowano, wykorzystując fakt, że $\alpha_{ij} = \gamma_{ij}$. Dowód tej równoważności jest przedstawiony w p. 3.2.

$$\langle h(y)e_{ii}(u) \rangle = (1-n)e_{ii}^x(u^{(0)}) + \frac{1}{\|V\|} \int_{\Gamma} u_i^{(1)} N_i dS. \quad (3.59)$$

Drugie wyrażenie po prawej stronie powyższego równania reprezentuje zmianę porowatości (ze znakiem minus) ośrodka w konfiguracji aktualnej, tj. przy jednorodnym odkształceniu $e_{ii}^x(u^{(0)})$ pojedynczej komórki periodyczności. Całkowitą zmianę porowatości ośrodka (oznaczana jako Δn) w odniesieniu do konfiguracji niezdeformowanej określa następujący związek³

$$\Delta n = n e_{ii}^x(u^{(0)}) - \frac{1}{\|V\|} \int_{\Gamma} u_i^{(1)} N_i dS, \quad (3.60)$$

wobec tego, z porównania równań (3.59) i (3.60) otrzymujemy

$$\Delta n = e_{ii}^x(u^{(0)}) - \langle h(y)e_{ii}(u) \rangle, \quad \text{w } \Omega. \quad (3.61)$$

Zastosowanie równania (3.41) we wzorze (3.59), a następnie w (3.61) prowadzi do prawa zmiany porowatości ośrodka, tj.

$$\Delta n = \alpha_{ij} e_{ij}^x(u^{(0)}) - \beta p \quad \text{lub} \quad \dot{n} = \alpha_{ij} \dot{e}_{ij}^x(u^{(0)}) - \beta \dot{p}, \quad \text{w } \Omega. \quad (3.62)$$

3.2. Wpływ mikrostruktury ośrodka na wartości stałych materiałowych α_{ij} i β

Przedstawione w poprzednim punkcie definicje stałych materiałowych teorii Biota (związki (3.48), (3.49) oraz (3.53)) są funkcjami pól: $\xi^{kh}(y)$ i $\eta(y)$, będących rozwiązaniami zagadnienia brzegowego (3.39) i (3.40). Wobec tego poszukiwanie relacji między parametrami mikrostruktury ośrodka a stałymi teorii porosprężystości to analiza wpływu poszczególnych parametrów mikrostruktury na rozwiązania $\xi^{kh}(y)$ i $\eta(y)$.

Zgodnie z przedstawioną wcześniej interpretacją pól $\xi^{kh}(y)$ i $\eta(y)$, są one rozwiązaniami następujących zagadnień brzegowych:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} [C_{ijkh} + C_{ijlm} e_{lm}^y(\xi^{kh})] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (3.63a)$$

$$C_{ijlm} e_{lm}^y(\xi^{kh}) N_i = -C_{ijkh} N_i, \quad \text{na } \Gamma, \quad (3.63b)$$

³ Szczegółowe wyprowadzenie oraz omówienie, uwzględniające zmiany zarówno odwracalne, jak i nieodwracalne porowatości ośrodka, przedstawiono w p. 4.1.2. Analiza ta została odsunięta do rozdziału 4., gdyż w teorii porosprężystości zmiana porowatości ośrodka, jako parametr, nie występuje jawnie, podczas gdy w teorii poroplastyczności, analizowanej w rozdziale 4., jest to dodatkowa zmienna kinematyczna opisu matematycznego.

$$\frac{\partial}{\partial y_i} [C_{ijlm} e_{lm}^y(\eta)] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (3.64a)$$

$$C_{ijlm} e_{lm}^y(\eta) N_i = -\delta_{ij} N_i, \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.64b)$$

Zagadnienia brzegowe (3.63) i (3.64) mogą być, równoważnie, przedstawione w postaci sformułowań wariacyjnych, tzn.:

► **zagadnienie brzegowe (3.63)**

znajdź $\xi^{kh}(y) \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3$ takie, że:

$$\forall w \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3, \quad B(\xi^{kh}, w) = - \int_{V_s} C_{ijkh} e_{ij}^y(w) dV, \quad (3.65)$$

► **zagadnienie brzegowe (3.64)**

znajdź $\eta(y) \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3$ takie, że:

$$\forall w \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3, \quad B(\eta, w) = - \int_{V_s} e_{ii}^y(w) dV. \quad (3.66)$$

Forma dwuliniowa jest zdefiniowana

$$B(v, w) = \int_{V_s} C_{ijkh} e_{ij}^y(v) e_{kh}^y(w) dV. \quad (3.67)$$

Własność eliptyczności tensora sztywności sprężystej składników szkieletu, jak również jego symetria, zapewniają nie tylko istnienie i jednoznaczność rozwiązania powyższych sformułowań wariacyjnych, ale również symetrię formy dwuliniowej, tj. $B(v, w) = B(w, v)$. Symetria formy dwuliniowej implikuje natomiast równość $\alpha_{ij} = \gamma_{ij}$. Zauważmy bowiem

$$B(\xi^{kh}, \eta) = - \int_{V_s} C_{ijkh} e_{ij}^y(\eta) dV = - \int_{V_s} e_{ii}^y(\xi^{kh}) dV = B(\eta, \xi^{kh}). \quad (3.68)$$

Z porównania definicji stałych α_{ij} i γ_{ij} , tj. równań (3.49) i (3.53), otrzymujemy poszukiwaną równość

$$\alpha_{kh} = n \delta_{kh} + \frac{B(\xi^{kh}, \eta)}{\|V\|} = n \delta_{kh} + \frac{B(\eta, \xi^{kh})}{\|V\|} = \gamma_{kh}. \quad (3.69)$$

Omówiona własność formy dwuliniowej, wraz z definicją współczynnika β (3.53), implikuje również

$$0 \leq B(\eta, \eta) = - \int_{V_s} e_{ii}^y(\eta) dV = - \frac{\beta}{\|V\|} \Rightarrow \beta \leq 0. \quad (3.70)$$

Nierówność ta – zgodnie zresztą z oczekiwaniem – wskazuje, że wzrostowi ciśnienia porowego w ośrodku towarzyszy wzrost objętości porów (równanie (3.62)) i odwrotnie – spadek ciśnienia powoduje zmniejszenie porowatości.

Przed przystąpieniem do dalszej analizy, aby uczynić ją możliwą (policzalną), sformułowane muszą być dodatkowe założenia upraszczające odnośnie mikrostruktury ośrodka. W rzeczywistości, w przypadku ośrodków porowatych, głównym celem analiz jest określenie roli geometrii porów (kształt, rozmiar) oraz wpływu pojawiania się i zwiększania spękań w ośrodku na wartości analizowanych stałych. Z tego względu w dalszej części niniejszego rozdziału zakłada się, że szkielet ośrodka jest zbudowany z jednorodnego i izotropowego materiału. Oznacza to, że wpływ parametrów sprężystości szkieletu jest uwzględniany tylko w sensie wartości średniej. Należy jednak dodać, że izotropia materiału szkieletu wcale nie implikuje makroskopowej izotropii ośrodka. Przeciwnie – ośrodek porowaty może wykazywać tzw. anizotropię strukturalną wywołaną kierunkowym ułożeniem spękań i porów.

3.2.1. Parametry mikrostruktury wpływające na wartości stałych α_{ij} i β

Zgodnie z uczynionym założeniem o izotropii i jednorodności materiału szkieletu, tensor sztywności sprężystej (opis mikroskopowy) może być przedstawiony następująco⁴ [61]:

$$C_{ijkl} = \frac{E}{2-\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right), \quad (3.71)$$

gdzie: E i ν są, odpowiednio, modułem Younga i współczynnikiem Poissona materiału szkieletu (założono $\nu < 0,5$).

Po podstawieniu równania (3.71) do sformułowania wariacyjnego (3.65) otrzymujemy następujące (po podzieleniu obu stron równania przez $E/(2-\nu)$), równoważne, sformułowanie wariacyjne dla rozwiązania $\xi_i^{kh}(y)$

$$\int_{V_s} a_{ijlm} e_{ij}^y(\xi^{kh}) e_{lm}^y(w) dV = - \int_{V_s} a_{ijkh} e_{ij}^y(w) dV, \quad (3.72)$$

w którym

$$a_{ijkh} = \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kh} + \delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (3.73)$$

⁴ Tensor sztywności sprężystej szkieletu wyrażono przez stałe E i ν (a nie np.: K i G) z dwóch powodów:

a) pozwala to ograniczyć analizę wpływu parametrów sprężystości na wartości α_{ij} tylko do jednej stałej, tj. ν ;

b) przejście od opisu konsolidacji wg Biota do opisu konsolidacji wg Terzagiego warunkuje się, najczęściej, nieściśliwością szkieletu (właściwość kontrolowana przez współczynnik Poissona). W niniejszym punkcie pokażemy, że przejście to jest również możliwe przy szkielecie ściśliwym.

Jest oczywiste, że związki (3.72) i (3.73) implikują niezależność rozwiązania $\xi^{kh}(y)$ od wartości modułu Younga materiału szkieletu. Oznacza to, że poszukiwane pole $\xi^{kh}(y)$ jest tylko funkcją współczynnika Poissona oraz geometrii porów. Stwierdzenie to można wyrazić następująco:

$$\xi_i^{kh}(y) = f_i^{kh}(y, \nu, \text{geometria porów}). \quad (3.74)$$

Dzięki zastosowaniu równoważnego sformułowania tensora α_{ij} w postaci związku (3.53) otrzymujemy

$$\alpha_{ij} = n\delta_{ij} - g_{ij}(\nu, \text{geometria porów}). \quad (3.75)$$

Zależność ta jest oczywiście zbyt ogólna, aby zidentyfikować wpływ poszczególnych parametrów na wartości składowych tensora materiałowego α_{ij} . Wskazuje jednak, że tensor współczynników naprężenia efektywnego wg Biota nie zależy od wartości modułu Younga materiału szkieletu.

Współczynnik β może być określony przez składowe tensora α_{ij} oraz parametry szkieletu E i ν . Zauważmy, że

$$B(\xi^{kh}\delta_{kh}, \eta) = - \int_{V_s} C_{ijkh} \delta_{kh} e_{ij}^y(\eta) dV. \quad (3.76)$$

Ponieważ

$$C_{ijkh} \delta_{kh} = \frac{E}{1-2\nu} \delta_{ij}, \quad (3.77)$$

wobec tego, zgodnie z definicją współczynnika β (3.53), otrzymujemy

$$B(\xi^{kh}\delta_{kh}, \eta) = - \frac{E}{1-2\nu} \beta \|V\|. \quad (3.78)$$

Zastosowanie zależności (3.69), po przekształceniach, prowadzi do

$$\beta = \frac{n - \frac{1}{3} \alpha_{ij} \delta_{ij}}{E} \cdot \frac{1}{3(1-2\nu)}. \quad (3.79)$$

Mianownik w równaniu (3.79) jest modułem odkształcenia objętościowego materiału szkieletu i będzie oznaczany przez K_s .

Wpływ parametrów mikrostruktury na wartość współczynnika β można więc analizować poprzez tensor α_{ij} . Moduł Younga musi być jednak uwzględniany podczas wyznaczania wartości β .

Rolę poszczególnych parametrów mikrostruktury zilustrowano wynikami obliczeń numerycznych dla założonych geometrii porów. Przedtem jednak przedstawiono ograniczenia na dopuszczalne wartości parametrów α_{ij} i β .

Auriault i Sanchez-Palencia [18], jak również Auriault [13], wykorzystując aparat metody homogenizacji, podali nierówności dla wartości tensora α_{ij} . Rozważania swoje ograniczyli jednak do przypadku, gdy szkielet ośrodka porowatego jest zbudowany z materiału izotropowego oraz cały ośrodek porowaty jest również makroskopowo izotropowy

$$n \leq \alpha_{ij} = \alpha_o \delta_{ij} \leq 1. \quad (3.80)$$

Obecnie, powyższe nierówności zostaną zmodyfikowane dla przypadku anizotropii strukturalnej. Zauważmy, że bezpośrednią konsekwencją (3.70) i (3.79) jest

$$n \leq \frac{1}{3} \alpha_{ij} \delta_{ij}. \quad (3.81)$$

W celu znalezienia „górnego ograniczenia” wartości tensora α_{ij} skorzystamy z warunku eliptyczności efektywnego tensora sprężystości, zdefiniowanego zależnością (3.48) (dowód eliptyczności przedstawiono w pracy [13]). Warunek ten implikuje następującą nierówność

$$C_{ijkh}^{\text{eff}} \delta_{ij} \delta_{kh} \geq 0. \quad (3.82)$$

Ponadto, analogicznie do (3.76) i (3.77), możemy zapisać:

$$\forall w \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3, \quad B(\xi^{kh} \delta_{kh}, w) = -\frac{E}{1-2\nu} \int_{V_s} e_{ii}^y(w) dV. \quad (3.83)$$

Na podstawie wzorów (3.66) i (3.67) mamy również

$$\forall w \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3, \quad B\left(\frac{E}{1-2\nu} \eta, w\right) = -\frac{E}{1-2\nu} \int_{V_s} e_{ii}^y(w) dV. \quad (3.84)$$

Równości (3.83) i (3.84) implikują

$$\forall w \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3, \quad B\left(\xi^{kh} \delta_{kh} - \frac{E}{1-2\nu} \eta, w\right) = 0. \quad (3.85)$$

Ponieważ powyższa zależność jest prawdziwa dla dowolnego pola w , wobec tego musi być również

$$B\left(\xi^{kh} \delta_{kh} - \frac{E}{1-2\nu} \eta, \xi^{kh} \delta_{kh} - \frac{E}{1-2\nu} \eta\right) = 0, \quad (3.86)$$

co – wraz z eliptycznością formy dwuliniowej – implikuje

$$\xi_i^{kh}(y) \delta_{kh} = \frac{E}{1-2\nu} \eta_i(y). \quad (3.87)$$

Z zależności (3.87) oraz definicji (3.48) efektywnego tensora sztywności sprężystej, po przekształceniach (więcej szczegółów w Łydźba i Shao [103]), otrzymujemy

$$C_{ijkh}^{\text{eff}} \delta_{kh} \delta_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} [3 - \alpha_{ij} \delta_{ij}]. \quad (3.88)$$

Równanie to wraz z nierównościami (3.82) i (3.81) prowadzi do

$$n \leq \frac{1}{3} \alpha_{ij} \delta_{ij} \leq 1. \quad (3.89)$$

Równość (3.79) i ograniczenia (3.89) implikują

$$\frac{n-1}{K_s} \leq \beta \leq 0, \quad (3.90)$$

gdzie moduł odkształcenia objętościowego materiału szkieletu określa związek

$$K_s = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3.91)$$

3.2.2. Wyniki obliczeń numerycznych wartości stałych α_{ij} i β

Dotychczas przez pojęcie „parametry mikrostruktury” rozumiane były: własności mechaniczne materiału szkieletu oraz – dokładniej niesprecyzowana – geometria porów. W celu „ilościowego” określenia ich wpływu na wartości stałych materiałowych teorii Biota konieczne jest więc określenie „geometrii porów”.

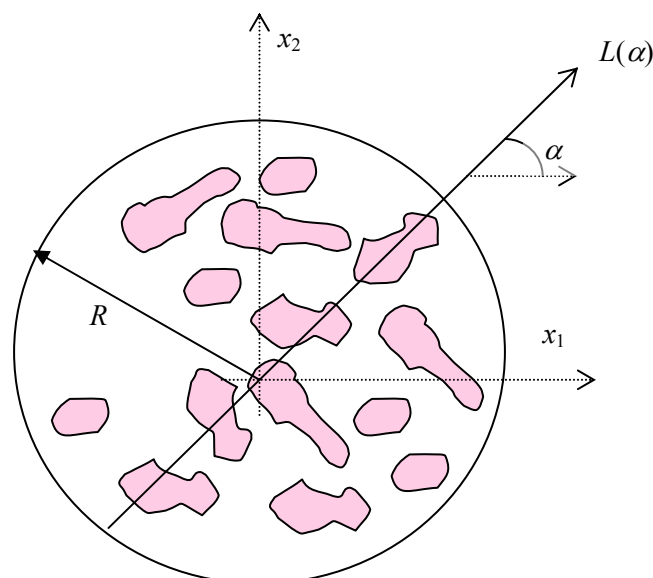
Jest oczywiste, że „dokładne” opisanie geometrii przestrzeni porowej w naturalnych ośrodkach porowatych (nie wytworzonych przez człowieka) jest, zarówno z punktu widzenia teoretycznego, jak i – tym bardziej – praktycznego, zadaniem niewykonalnym – wymagałoby nieskończonej liczby parametrów, nieskończonej liczby pomiarów, jeśli w ogóle byłoby możliwe. Z tego względu, zarówno laboratoryjnie, jak i teoretycznie, opis mikrostruktury ośrodków jest dokonywany w sensie „wartości średniej”. Oznacza to, że cechy mikrostrukturalne ośrodka są „wygładzane” w wyniku operacji uśrednienia.

W przypadku ośrodków porowatych, takich jak ośrodki gruntowe i skalne, podstawową miarą „mikrostruktury przestrzeni porowej”, w sensie wartości średniej, jest porowatość lub wskaźnik porowatości ośrodka. Niestety, parametr ten nie wystarcza do opisu własności ośrodków anizotropowych lub ośrodków o tzw. wywołanej anizotropii (ośrodek skalny, w którym występuje kierunkowy proces kruchego pęknięcia lub zamykania się już istniejących spękań). Aby możliwe było uwzględnienie „kierunkowego” rozkładu porów, konieczna jest dodatkowa miara. Miarą taką, dość powszechnie obecnie używaną do opisu struktury ośrodka mikroniejednorodnego (zob. Eme-

riault et.al. [58], Kantani [92], Rothenburg i Bathurst [127]), jest tensor struktury (ang. *fabric tensor*). W przypadku ośrodków porowatych odpowiednie jest określenie – tensor struktury porowej (ang. *void fabric tensor*) [112].

Założmy, że analizowana jest próbka ośrodka o bardzo dużej liczbie porów (*reprezentatywna elementarna objętość* – w przypadku ośrodków losowych, *komórka periodyczności* – w przypadku struktur periodycznych). „Średnią” charakterystykę geometrii porowej określa się, uśredniając, w obrębie analizowanej próbki, całą objętość zajmowaną przez pory. Uśredniania dokonuje się jednak dla uwzględnienia kierunkowej rozbudowy przestrzeni porowej, po tzw. liniach testowych (rys. 3.2).

W celu uproszczenia prezentacji, rozważamy zagadnienie dwuwymiarowe i uśredniania dokonujemy w obrębie koła (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Kierunkowe uśrednianie przestrzeni porowej ośrodka
Fig. 3.2. Directional averaging of medium's pore space

Kierunek linii testowych $L = 2R$ określa kąt $\alpha \in [0, 2\pi]$. Jeśli $l(\alpha) = \sum l_i(\alpha)$ jest łączną długością zajęta przez pory w linii testowej $L(\alpha)$, to udział frakcyjny porów w tej linii testowej jest określony związkiem [112]

$$n(\alpha) = \frac{l(\alpha)}{L}. \quad (3.92)$$

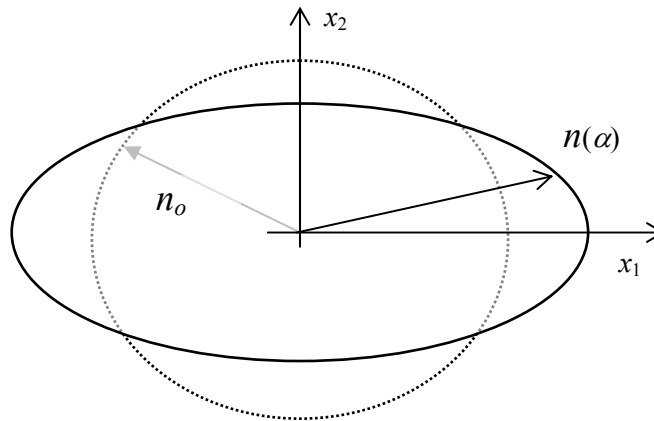
Związek ten określa kierunkowy rozkład, w funkcji kąta α , porowatości ośrodka. Przykładowy taki rozkład, typu „ciąglego”, przedstawiono na rysunku 3.3. Rzeczywi-

ste rozkłady, wynik analizy stereologicznej (patrz np. [92], [112]), mają charakter skokowy.

Całka po jednostkowym okręgu z „kierunkowego” rozkładu porowatości, tj.

$$n_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(\alpha) d\alpha \quad (3.93)$$

jest, klasycznie rozumianą, porowatością ośrodka.



Rys. 3.3. Kierunkowy rozkład porowatości (linia przerywana – rozkład izotropowy)
Fig. 3.3. Directional distribution of porosity (dashed line – isotropic distribution)

Zauważmy, zgodnie z definicją (3.92), że

$$n(\alpha + \pi) = n(\alpha). \quad (3.94)$$

Oznacza to, że otrzymany kierunkowy rozkład porowatości jest środkowo-symetryczny względem początku układu współrzędnych. Taki rozkład może być opisany przez [92]

$$n(\alpha) = n_o \left(1 + A_{ij} v_i(\alpha) v_j(\alpha) + A_{ijkh} v_i(\alpha) v_j(\alpha) v_k(\alpha) v_h(\alpha) + \dots \right), \quad (3.95)$$

gdzie:

$A_{i_1 i_2 \dots i_N}$ – tzw. tensor struktury (tensor bezśladowy rzędu N ; $N = 2, 4, 6, \dots$),

v_i – składowa o kierunku x_i jednostkowego wektora linii testowej $L(\alpha)$.

Zależność (3.95) wskazuje, że do „pełnego” opisu rozkładu porowatości ośrodka potrzeba nieskończenie wiele parametrów. Najczęściej jednak kierunkowy rozkład porowatości jest aproksymowany przez uwzględnienie tylko tensora struktury rzędu dwa, tj. A_{ij} .

Podobnie można zdefiniować „kierunkowy” rozkład porowatości, przyjmując uśrednianie po kuli, po sześciacie (zagadnienie przestrzenne) lub po kwadracie (zagadnienie płaskie).

Załóżmy obecnie, że analizowana jest makroskopowa (efektywna) wielkość Π w funkcji rozkładu $n(\alpha)$. W tym przypadku jedną z możliwych weryfikacji zależności $\Pi(n(\alpha))$ jest przyjęcie realizacji ośrodka w postaci struktury periodycznej, w której pojedyncza komórka periodyczności ma przestrzeń porową (kształt pojedynczego poru) opisaną przez $n(\alpha)$ (rys. 3.3). Oczywiście, w przypadku tak przyjętej geometrii, makroskopowe własności ośrodka periodycznego, tj. kierunkowy rozkład porowatości, są dokładnie $n(\alpha)$. Innymi słowy, równanie (3.95) może być interpretowane jako opis geometrii pojedynczego poru (w sensie wartości średniej) w pojedynczej komórce periodyczności o jednostkowej objętości. Zauważmy, że tak przyjęta geometria pojedynczej komórki periodyczności, jeśli nie są uwzględniane tensory wyższego rzędu w (3.95), jest już „wygładzona”. Do analizy mogą więc być użyte proste geometrie porów. Oznacza to jednak również, że otrzymany wynik musi być interpretowany jako średnia wartość możliwych makroskopowych „odpowiedzi” mikrostruktury ośrodka. Zauważmy, że bardziej skomplikowane geometrie pojedynczej komórki, w wyniku omówionego procesu uśredniania po dużej objętości ośrodka, mogą również „produkować” ten sam kierunkowy rozkład porowatości, jednak inną wartość analizowanej wielkości $\Pi(n(\alpha))$.

Przedstawiony opis przestrzeni porowej w pojedynczej komórce periodyczności jest, oczywiście, jednym z możliwych. Zaletą tego opisu jest to, że pozwala uwzględnić anizotropowy charakter ośrodka, jak również wywołaną anizotropię, np. procesem kruchego pęknięcia. Należy jednak podkreślić, że tak zdefiniowana przestrzeń porowa odzwierciedla tylko w sensie „wartości średniej” skomplikowaną geometrię struktury ośrodka porowatego. W przypadku analizy procesu filtracji takie określenie geometrii jest niewystarczające, gdyż w opisie geometrii nie jest uwzględniany bardzo ważny parametr, jakim jest „stopień połączenia porów”.

Do analizy wpływu mikrostruktury na wartości stałych α_{ij} i β wykorzystano „wygładzone” geometrie porów. Ponadto, obliczenia numeryczne ograniczono do przypadków dwuwymiarowych (rys. 3.4), dających jednak pogląd na rolę geometrii mikrostruktury oraz współczynnika Poissona na wartości omawianych stałych.

Geometrie I i II (rys. 3.4) mogą być traktowane jako idealizacja przestrzeni porowej występującej w ośrodkach skalnych, podczas gdy geometria III to idealizacja przestrzeni porowej występującej w ośrodkach granulowanych (gruntowych).

Struktura I to pory w kształcie elips, których ogólne równanie konturu dane jest wzorem

$$\left(\frac{y_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{a_2}\right)^2 - R^2 = 0, \quad (3.96)$$

w którym: R , a_1 i a_2 to parametry elipsy (rys. 3.4).

Oczywiście, przy jednostkowym wymiarze komórki periodyczności, wartość pola elipsy to równocześnie porowatość ośrodka, tj.

$$n = \pi R^2 a_1 a_2, \quad (3.97)$$

co implikuje, we współrzędnych biegunowych, następujący opis konturu przestrzeni porowej dla struktury I, tj.

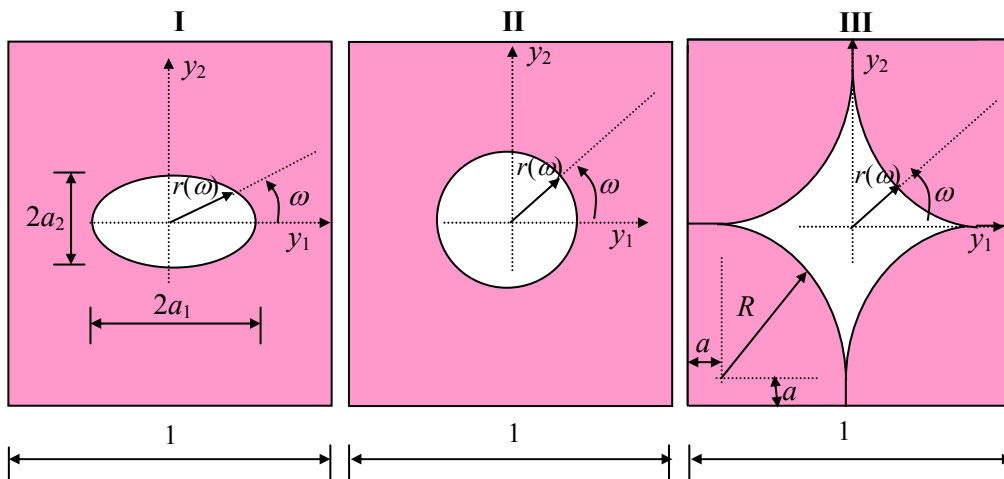
$$r(\omega) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{m} + m \sin^2 \omega}}, \quad (3.98)$$

gdzie (rys. 3.4):

n – porowatość ośrodka,

$m = a_1/a_2$ – stosunek półosi elipsy,

(r, ω) – współrzędne biegunowe, odpowiednio, promień oraz kąt mierzony od osi y_1 .



Rys. 3.4. Uprozczone geometrie pojedynczej komórki przyjęte do obliczeń

Fig. 3.4. Simplified geometries of the unit cell taken for the calculation

Równanie (3.98) może być również interpretowane jako równanie parametryczne rodziny geometrii typu I, która to rodzina (zbiór) parametryzowana jest przez n i m . Wartości n i m muszą jednak spełniać następujące ograniczenia (rys. 3.4)

$$r(\omega = 0) \leq 0,5 \wedge r\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right) \leq 0,5, \quad (3.99)$$

co – wraz z (3.98) – implikuje

$$m \in \left[\frac{4n}{\pi}, \frac{\pi}{4n} \right] \wedge n \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.100)$$

Geometria typu I jest więc dwuparametrowym opisem przestrzeni porowej ośrodka. Wartości analizowanych stałych α_{ij} i β , dla struktury typu I, mają więc następującą reprezentację funkcyjną, tj.

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(v, n, m) \wedge \beta = \beta(v, E, n, m). \quad (3.101)$$

Geometria II jest szczególnym przypadkiem geometrii I, tj. geometria I przy $m = 1$. Równanie konturu przestrzeni porowej dla tej struktury dane jest więc wzorem

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \wedge n \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]. \quad (3.102)$$

Jest to więc jednoparametrowa rodzina geometrii przestrzeni porowych.

Podobnie, tzn. jednoparametrowy zbiór geometrii przestrzeni porowych, indukuje przyjęta struktura typu III. Kontur tej struktury jest opisany równaniami (rys. 3.4):

$$(y_1 - R)^2 + (y_2 - R)^2 = R^2 \quad \text{dla } y_1 \in [0, R] \wedge y_2 \in [0, R], \quad (3.103a)$$

$$(y_1 + R)^2 + (y_2 - R)^2 = R^2 \quad \text{dla } y_1 \in [-R, 0] \wedge y_2 \in [0, R], \quad (3.103b)$$

$$(y_1 + R)^2 + (y_2 + R)^2 = R^2 \quad \text{dla } y_1 \in [-R, 0] \wedge y_2 \in [-R, 0], \quad (3.103c)$$

$$(y_1 - R)^2 + (y_2 + R)^2 = R^2 \quad \text{dla } y_1 \in [0, R] \wedge y_2 \in [-R, 0]. \quad (3.103d)$$

Wartość porowatości określa zależność

$$n = (4 - \pi)R^2 \wedge n \in \left[0, \frac{4 - \pi}{4} \right]. \quad (3.104)$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych, otrzymujemy:

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{n}{4 - \pi}} \left(\cos \omega + \sin \omega - \sqrt{\sin 2\omega} \right) \quad \text{dla } \omega \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad (3.105a)$$

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{n}{4 - \pi}} \left(-\cos \omega + \sin \omega - \sqrt{-\sin 2\omega} \right) \quad \text{dla } \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right], \quad (3.105b)$$

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{n}{4 - \pi}} \left(-\cos \omega - \sin \omega - \sqrt{\sin 2\omega} \right) \quad \text{dla } \omega \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right], \quad (3.105c)$$

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{n}{4-\pi}} \left(\cos \omega - \sin \omega - \sqrt{-\sin 2\omega} \right) \text{ dla } \omega \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \quad (3.105d)$$

Podane zależności jasno dowodzą, że rodzina struktur typu III jest zbiorem jedno-parametrowym. W przypadku więc struktur II i III do pełnego odtworzenia geometrii porowej wystarcza tylko znajomość aktualnej wartości porowatości.

Do wyznaczenia, dla zadanej geometrii przestrzeni porowej, wartości składowych tensora α_{ij} skorzystano z definicji (3.49) tego tensora. W tym przypadku poszukuje się rozwiązania zagadnienia lokalnego, w którym warunek brzegowy na granicy ciała stałe–ciecz jest zadany przez jednostkowe izotropowe ciśnienie cieczy. Przy warunku $e_{ij}^x(u^{(0)}) = 0$, tensor α_{ij} reprezentuje składowe tensora uśrednionego całkowitego naprężenia ośrodka (wzięte z przeciwnym znakiem).

Obliczenia numeryczne stanu naprężenia w pojedynczej komórce, dla przyjętych geometrii ośrodka, przeprowadzono metodą elementów skończonych. Otrzymane rozwiązanie następnie uśredniano, w celu wyznaczenia wartości składowych tensora α_{ij} .

Wartości współczynnika β obliczano ze zmodyfikowanej do płaskiego stanu odkształcenia zależności (3.79). Zauważmy, że płaski stan odkształcenia implikuje

$$\sigma_{33}^s(y) = \nu \left(\sigma_{11}^s(y) + \sigma_{22}^s(y) \right) \quad \forall y \in V_s, \quad (3.106)$$

gdzie oś y_3 wyznacza kierunek prostopadły do płaszczyzny y_2Oy_1 (rys. 3.4).

Uśrednienie powyższej zależności prowadzi do

$$\langle \sigma_{33}^s \rangle = \nu \left(\langle \sigma_{11}^s \rangle + \langle \sigma_{22}^s \rangle \right) \quad \forall y \in V_s. \quad (3.107)$$

Przy $e_{ij}^x(u^{(0)}) = 0$ tensor α_{ij} reprezentuje jednak składowe tensora uśrednionego całkowitego naprężenia ośrodka (wzięte z przeciwnym znakiem) nasyconego cieczą z ciśnieniem $p = 1$. Wobec tego

$$\langle \sigma_{11}^s \rangle - n = -\alpha_{11}; \quad \langle \sigma_{22}^s \rangle - n = -\alpha_{22}; \quad \langle \sigma_{33}^s \rangle - n = -\alpha_{33}. \quad (3.108)$$

Zastosowanie zależności (3.108) w (3.107), po prostych przekształceniach, daje

$$\alpha_{33} = \nu(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + n(1 - 2\nu). \quad (3.109)$$

Ostatecznie, po podstawieniu równania (3.109) do (3.79), otrzymujemy

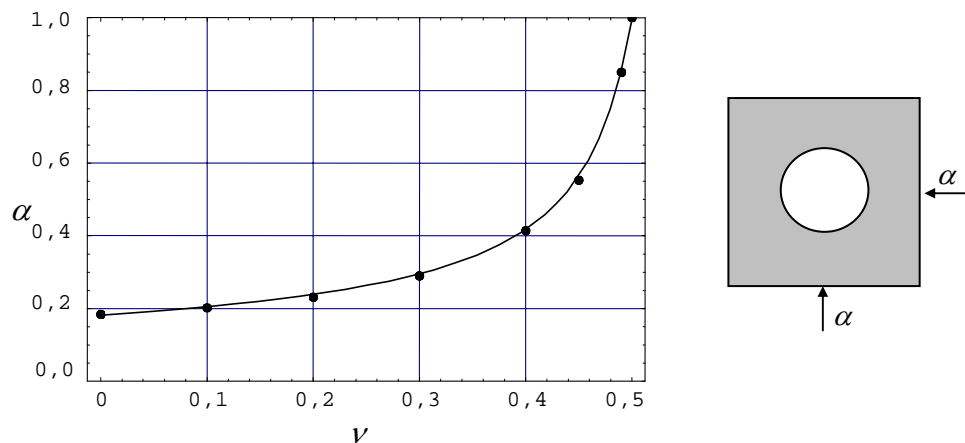
$$\beta = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} [2n - (\alpha_{11} + \alpha_{22})]. \quad (3.110)$$

Wpływ współczynnika Poissona

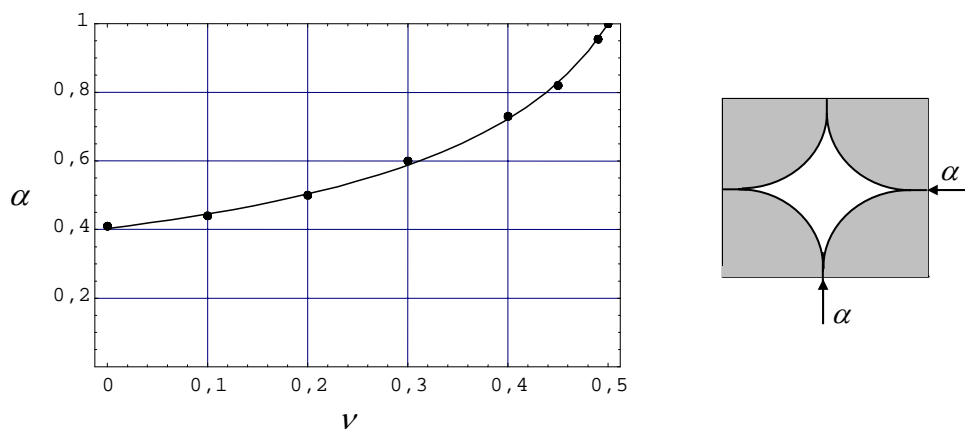
W pierwszym etapie obliczeń określano wpływ wartości współczynnika Poissona na wartości analizowanych stałych teorii porosprężystości Biota. Przy ustalonych parametrach geometrycznych struktur I, II i III zmieniano wartość współczynnika Poi-

ssona charakteryzującego materiał ośrodka. Dla wszystkich trzech struktur przyjęto tę samą wartość porowatości: $n = 0,102$ oraz ponadto, dla geometrii I, założono: $m = a_1/a_2 = 2$.

Ostateczne wyniki, tzn. wartości składowych tensora α_{ij} oraz współczynnika β przedstawiono w postaci wykresów na rysunkach 3.5–3.8.



Rys. 3.5. Wartości współczynnika α w funkcji wartości współczynnika Poissona
Fig. 3.5. Values of the coefficient α versus Poisson's ratio

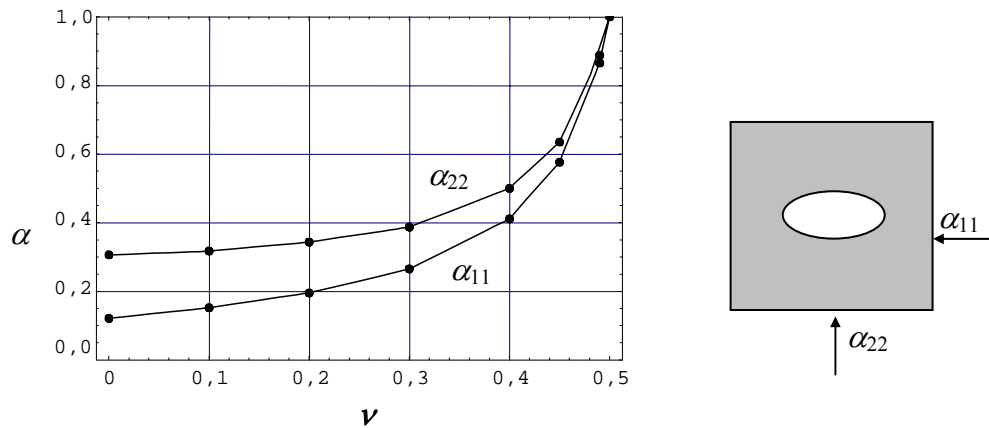


Rys. 3.6. Wartości współczynnika α w funkcji wartości współczynnika Poissona
Fig. 3.6. Values of the coefficient α versus Poisson's ratio

Zgodnie z oczekiwaniami, wzrostowi wartości współczynnika Poissona towarzyszy zwiększenie wartości tensora α_{ij} (rys. 3.5–3.7). Trzy typy analizowanych struktur indukują różne wartości tensora α_{ij} . Ponadto, geometria I charakteryzuje się różnymi

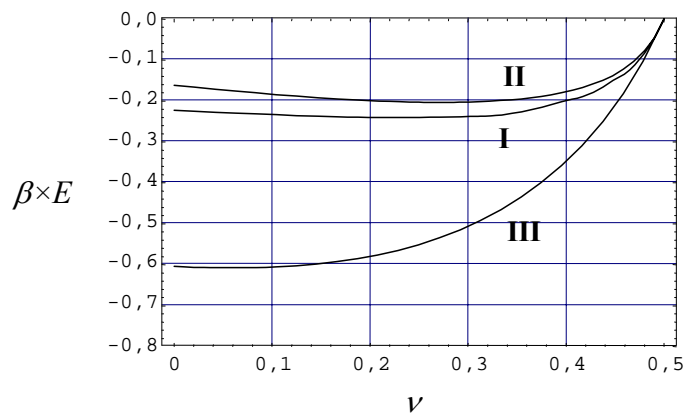
wartościami składowych tensora α_{ij} (rys. 3.7). Wraz ze wzrostem wartości współczynnika Poissona różnica między tymi składowymi maleje (rys. 3.7), a przy $\nu = 0,5$ – całkowicie zanika. Jest to zgodne z dobrze znaną własnością tensora α_{ij} , że dla materiału nieściśliwego jest tensorem izotropowym i ma wartość jeden (por.: Biot [32], Auriault i Sanchez-Palencia [18], Łydźba [102]).

Wpływ kształtu przestrzeni porowej jest również wyraźnie widoczny w wartościach współczynnika β (rys. 3.8). Ośrodek cechujący się wyższą wartością tensora α_{ij} charakteryzuje również większa wartość (bezwzględna) współczynnika β . W przeciwieństwie jednak do tensora α_{ij} , wzrostowi współczynnika Poissona nie zawsze towarzyszy zwiększenie wartości współczynnika β . Dla każdej z analizowanych struktur istnieje wartość współczynnika Poissona, różna od zera, przy której wartość współczynnika β osiąga swoje minimum (rys. 3.8).



Rys. 3.7. Wartości współczynnika α w funkcji wartości współczynnika Poissona

Fig. 3.7. Values of the coefficient α versus Poisson's ratio



Rys. 3.8. Zależność współczynnika β od wartości współczynnika Poissona materiału szkieletu dla trzech mikrostruktur; E – wartość modułu Younga dla szkieletu

Fig. 3.8. Dependence of the coefficient β on the value of Poisson's ratio of skeleton material for three microstructures; E – Young's modulus of the skeleton material

Wpływ geometrii mikrostruktury

W tej części obliczeń, przyjmując stałą wartość współczynnika Poissona równą $\nu = 0,2$, analizowano wpływ parametrów geometrycznych struktur I, II i III na wartości badanych stałych. Uzmiennieniu podlegały więc: porowatość (wszystkie trzy struktury) oraz stosunek pól osi elipsy (struktura I).

Analizę rozpoczęto od struktur jednoparametrowych, tj. geometrii II i III. Wyniki obliczeń numerycznych badanych stałych w funkcji aktualnej wartości porowatości ośrodka przedstawiono na rysunkach 3.9–3.11.

W strukturach II i III założona geometria przestrzeni porowej implikuje równość składowych α_{11} i α_{22} . Pozwala to porównać otrzymane wyniki z dopuszczalnymi wartościami tych stałych danymi przez ograniczenia Hashina–Shtrikmana dla ośrodka losowego (statystycznie jednorodnego i izotropowego). Wykorzystano postać tych ograniczeń dla zagadnienia płaskiego (Cherkaev i Gibiansky [44]). Dla ośrodka porowatego prowadzą one do

$$0 \leq K_o \leq K_s + \frac{n}{-\frac{1}{K_s} + \frac{1-n}{K_s + G}}. \quad (3.111)$$

Wartość $\nu = 0,2$ implikuje w zagadnieniu płaskim $G = \frac{3}{4}K_s$ i ostatecznie

$$\frac{K_o}{K_s} \leq \frac{3(1-n)}{3+4n}. \quad (3.112)$$

Korzystając z zależności, dla ośrodka izotropowego, między współczynnikiem α a modułem K_o [33]

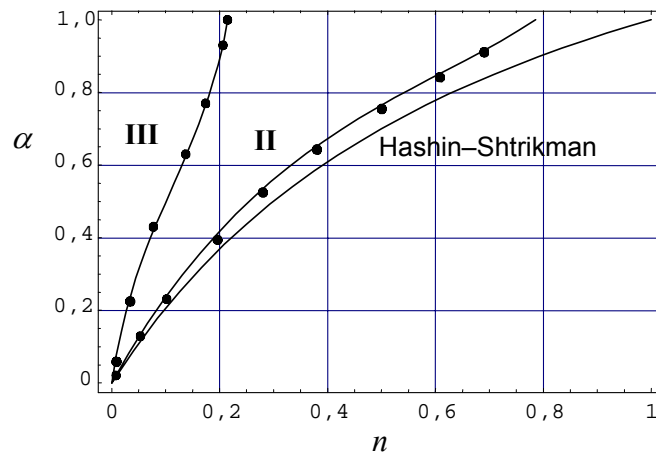
$$\alpha = 1 - \frac{K_o}{K_s} \quad (3.113)$$

otrzymujemy ograniczenia wartości α

$$1 \geq \alpha \geq 1 - \frac{3(1-n)}{3+4n}. \quad (3.114)$$

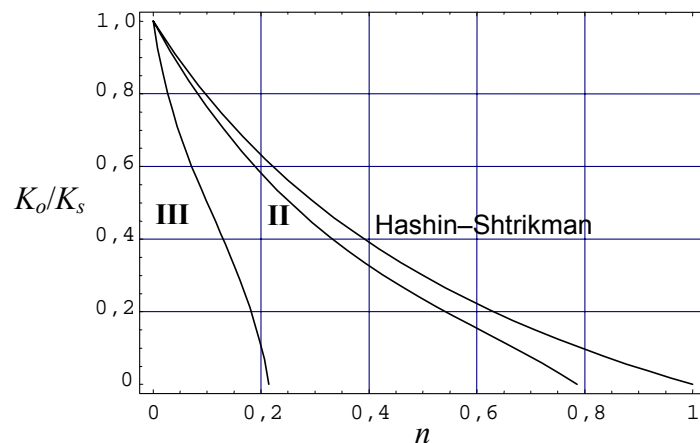
Wyniki przedstawione na rysunku 3.9 jednoznacznie wskazują, że struktury II i III charakteryzują, dla tej samej wartości porowatości, „drastycznie” różne wartości współczynnika α . Podobne stwierdzenie ma zastosowanie do pozostałych obliczonych parametrów efektywnych (rys. 3.10 i 3.11). Ponadto, dla geometrii II, dolne ograniczenie (współczynnika α) Hashina–Shtrikmana dla ośrodka losowego jest równocze-

śnie dość „dobrym” oszacowaniem wartości tego współczynnika w funkcji porowatości. Podobnie jest z wartością efektywnego modułu odkształcenia, tzn. górne ograniczenie (modułu K_o) Hashina–Shtrikmana jest dość dobrym oszacowaniem wartości K_o w funkcji porowatości.



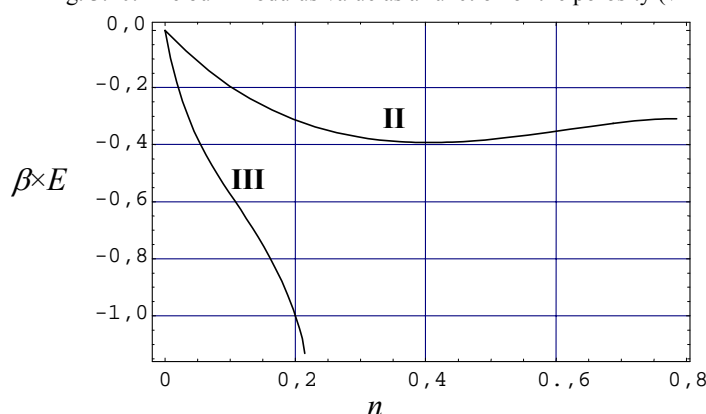
Rys. 3.9. Zależność współczynnika α od porowatości ($\nu = 0,2$)
Fig. 3.9. Dependence of the coefficient α on porosity ($\nu = 0.2$)

Przedstawione na rysunku 3.9 wyniki pokazują również istnienie „krytycznej” wartości porowatości, przy której analizowany współczynnik osiąga wartość „prawie” jeden (wartość jeden, gdy kontur przestrzeni porowej osiąga brzegi komórki periodyczności). Oznacza to, że napężenie efektywne wg Terzagiego może być „osiągnięte” nawet dla ośrodków porowatych o ściśliwym materiale szkieletu ($\nu < 0,5$). Warunkiem jest odpowiednio „rozbudowana” przestrzeń porowa ośrodka. W przypadku struktury III – „imitującej” ośrodek granulowany – wartość tej porowatości to nieco powyżej 20%, a więc wielkość typowa dla rzeczywistych ośrodków gruntowych.



Rys. 3.10. Wartość modułu odkształcenia objętościowego jako funkcja porowatości ($\nu = 0,2$)

Fig. 3.10. The bulk modulus value as a function of the porosity ($\nu = 0,2$)



Rys. 3.11. Wartość współczynnika β w funkcji porowatości:

E – wartość modułu Younga dla szkieletu

Fig. 3.11. Value of the coefficient β versus porosity:

E – Young's modulus of the skeleton material

Struktura I to dwuparametrowa rodzina geometrii przestrzeni porowej. Udział poszczególnych parametrów geometrycznych w wartościach analizowanych stałych określano więc dwuetapowo. Najpierw, dla ustalonej wartości porowatości, uzmienniany był parametr m , reprezentujący stosunek dwóch półośi elipsy. Dla wybranych wartości m dokonywano obliczeń numerycznych, których wynikiem końcowym było określenie wartości badanych stałych odpowiadających tym wartościom parametru m oraz założonej wartości porowatości. Następnie ustalano nową wartość porowatości i ponownie uzmienniano wartość parametru m itd.

Otrzymane wartości składowych tensora α_{ij} w funkcji wartości parametru m (dla różnych, ale ustalonych wartości porowatości) przedstawiono na rysunkach 3.14–3.18. Odpowiadające im, tzn. dla tych samych m i n , wartości współczynnika β pokazano na rysunku 3.19.

Przy określaniu wartości analizowanych stałych wykorzystano, redukującą liczbę koniecznych obliczeń numerycznych, następującą własność symetrii, obowiązującą dla zagadnienia płaskiego, tj.

$$\alpha_{11}\left(\nu, n, \frac{1}{m}\right) = \alpha_{22}(\nu, n, m) \wedge \alpha_{22}\left(\nu, n, \frac{1}{m}\right) = \alpha_{11}(\nu, n, m). \quad (3.115)$$

Powyższe tożsamości są konsekwencją następującego faktu: geometria struktury I dla $m = 1/m_1$ to dokładnie obrócona o kąt 90° geometria struktury I dla $m = m_1$ (rys.

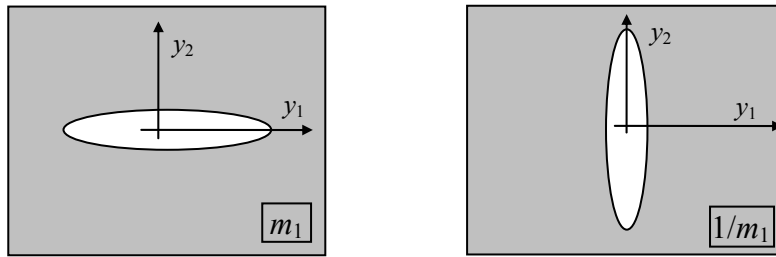
3.12). Odpowiadające więc wartościom: $m = 1/m_1$ i $m = m_1$ składowe tensora α_{ij} transformują się podobnie jak przy obrocie układu współrzędnych o kąt 90° , co dokładnie wyrażają zależności (3.115).

Tożsamości (3.115) implikują ponadto

$$\alpha_{11}\left(v, n, \frac{1}{m}\right) + \alpha_{22}\left(v, n, \frac{1}{m}\right) = \alpha_{22}(v, n, m) + \alpha_{11}(v, n, m), \quad (3.116)$$

co w konsekwencji – wraz z równaniem (3.110) – prowadzi do

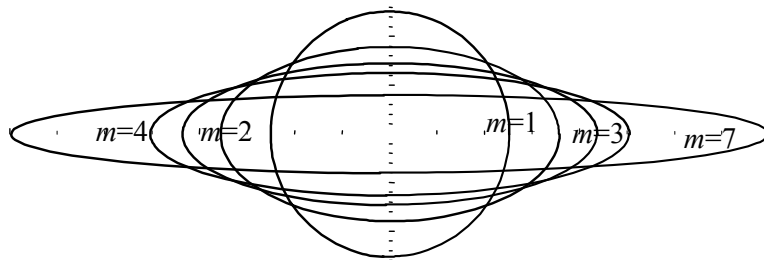
$$\beta\left(v, n, \frac{1}{m}\right) = \beta(v, n, m). \quad (3.117)$$



Rys. 3.12. Struktura I dla dwóch przeciwnych wartości parametru m
Fig. 3.12. Structure I for two inverse values of the parameter m

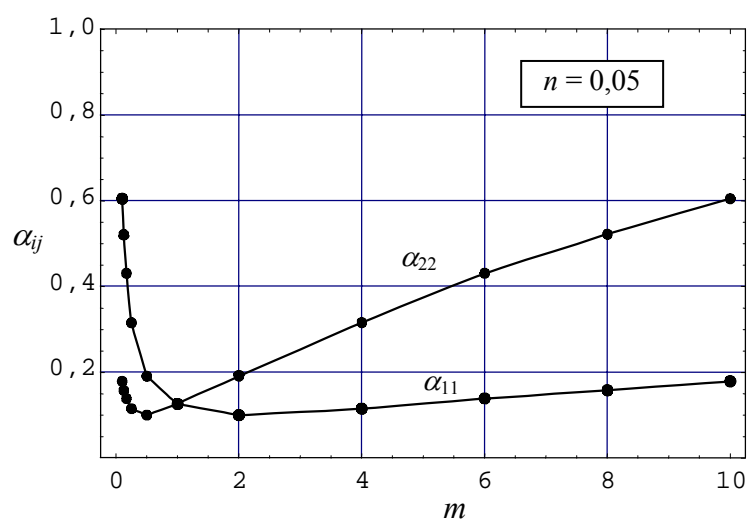
Własności (3.115) i (3.117) pozwalają więc ograniczyć rozważania analizowanych stałych do przypadku gdy $m \geq 1$. Oczywiście, dla $m < 1$ wartości badanych stałych jednoznacznie determinują prawa symetrii (3.115) i (3.117).

Na rysunku 3.13 pokazano przykładowe geometrie przestrzeni porowej struktury I, odpowiadające różnym wartościom parametru m , przy jednocześnie stałej wartości porowatości.



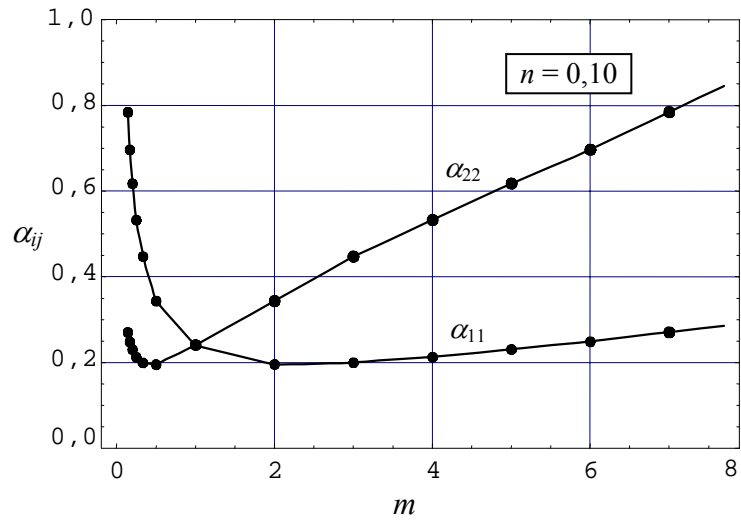
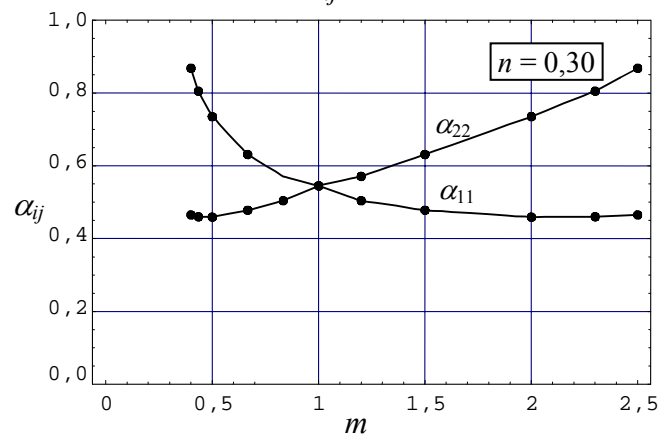
Rys. 3.13. Geometria przestrzeni porowej dla różnych wartości parametru m ,
ale ustalonej wartości n
Fig. 3.13. Pore space geometry for different values of the parameter m
but fixed value of n

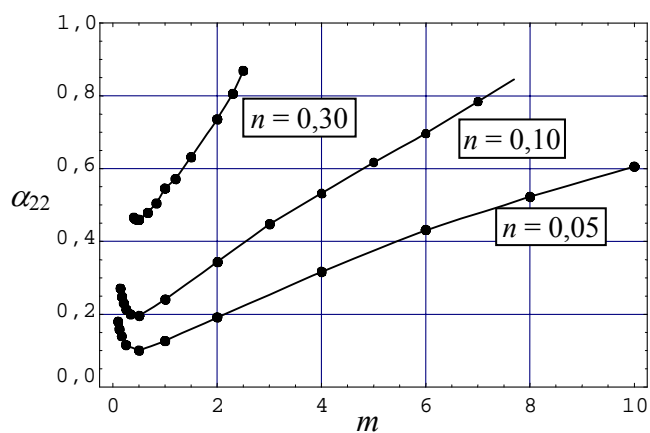
Otrzymane wyniki stałych materiałowych dla struktury I jasno wskazują (rys. 3.17–3.19), że – podobnie jak w przypadku struktur II i III – wzrostowi porowatości ośrodka towarzyszy zwiększenie wartości składowych tensora α_{ij} oraz współczynnika β (co do wartości bezwzględnej). Ponadto, analizowane stałe silnie zależą od aktualnej proporcji pól eliptycznych – parametr m .



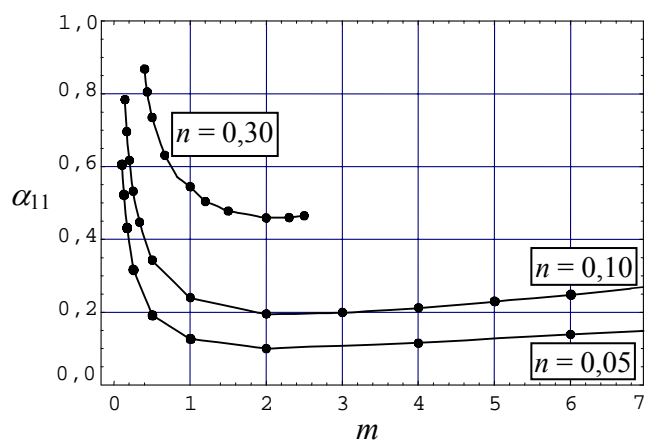
Rys. 3.14. Wartości tensora α_{ij} w funkcji parametru m ($n = 0,05$)

Fig. 3.14. Values of the tensor α_{ij} versus parameter m ($n = 0.05$)

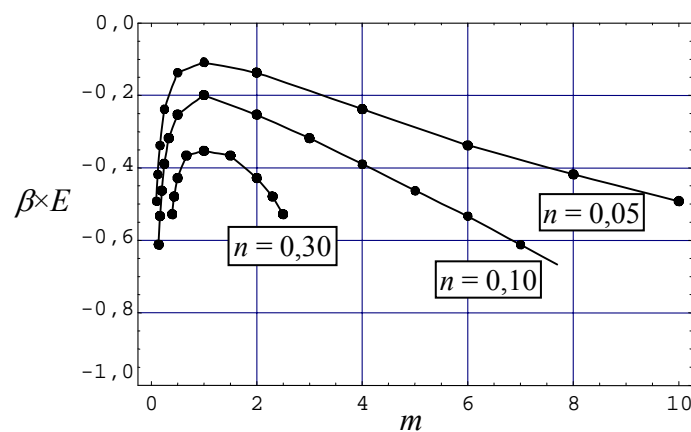
Rys. 3.15. Wartości tensora α_{ij} w funkcji parametru m ($n = 0,10$)Fig. 3.15. Values of the tensor α_{ij} versus parameter m ($n = 0.10$)Rys. 3.16. Wartości tensora α_{ij} w funkcji parametru m ($n = 0,30$)Fig. 3.16. Values of the tensor α_{ij} versus parameter m ($n = 0.30$)



Rys. 3.17. Wartości składowej α_{22} w funkcji parametru m dla wybranych wartości n
 Fig. 3.17. Values of the component α_{22} versus parameter m for different assumed values of n



Rys. 3.18. Wartości składowej α_{11} w funkcji parametru m dla wybranych wartości n
 Fig. 3.18. Values of the component α_{11} versus parameter m for different assumed values of n



Rys. 3.19. Wartości współczynnika β w funkcji parametru m dla wybranych wartości n
 Fig. 3.19. Values of the β -coefficient versus parameter m for different assumed values of n

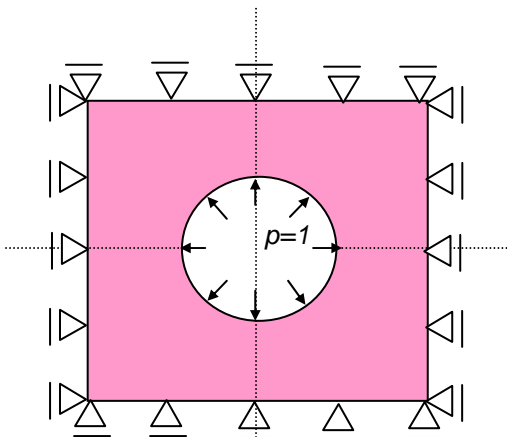
Zarówno w przypadku tensora α_{ij} , jak i współczynnika β , wartości tych stałych, przy ustalonej wartości n , mają swoje lokalne ekstrema dla określonych wartości m (rys. 3.14–3.19).

W przypadku współczynnika β lokalne maksimum osiągane jest, niezależnie od aktualnej wartości porowatości, dla $m = 1$ (rys. 3.19). Składowe α_{ij} osiągają swoje lokalne minima, dla porowatości $n \leq \pi/8$, odpowiednio w punktach: składowa α_{11} w pobliżu $m = 2$ (rys. 3.18), natomiast składowa α_{22} – w pobliżu $m = 1/2$ (rys. 3.19). Dla porowatości $n > \pi/8$ wartość $m = 2$ jest, zgodnie z (3.100), niedopuszczalna i α_{11} ma swoje minimum dla $m = \pi/(4n)$, natomiast α_{22} dla $m = 4n/\pi$.

Przybliżone zależności funkcyjne

Stała β , dla wszystkich analizowanych struktur, jest związana zależnością (3.110) z tensorem α_{ij} . Znalazienie więc oszacowania wartości tensora α_{ij} w funkcji aktualnych wartości: ν , n i m natychmiast daje, dzięki (3.110), oszacowanie wartości stałej β w funkcji: E , ν , n i m . W dalszych rozważaniach skoncentrowano się więc na poszukiwaniu zależności funkcyjnych tylko wartości tensora materiałowego α_{ij} .

Zgodnie z wcześniejszą analizą, składowe tensora α_{ij} to, odpowiednio uśrednione (3.49), rozwiązanie $\eta_i(y)$ zagadnienia (3.64) z warunkiem brzegowym w postaci lokalnej periodyczności pola $\eta_i(y)$. W przypadku analizowanych struktur (mają dwie osie symetrii) lokalna periodyczność $\eta_i(y)$ implikuje warunek $\eta_i(y) = 0$ na odpowiednich brzegach komórki periodyczności (rys. 3.20). Taki typ warunków brzegowych, w konsekwencji, uniemożliwia znalezienie tzw. „rozwiązania zamkniętego”⁵ zagadnienia brzegowego (3.64). Z tego więc względu zależność funkcyjna tensora α_{ij} poszukiwana będzie, na podstawie otrzymanych wcześniej wyników obliczeń numerycznych, w jej postaci przybliżonej.

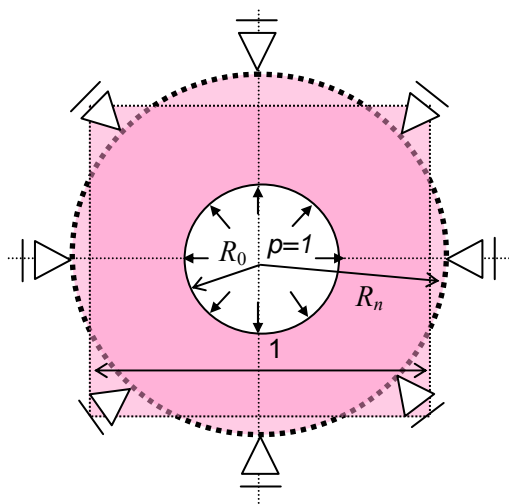


Rys. 3.20. Schemat statyczny do określania stałych α_{ij} i β

Fig. 3.20. Statical schema for determination of the constants α_{ij} and β

⁵ Na ogół rozwiązanie analityczne ma postać nieskończonego szeregu potęgowo-trigonometrycznego [61].

Ponownie zaczynamy od najprostszej geometrii, tzn. struktury II. W celu sformułowania zależności przybliżonej zakładamy, że uśredniona (wg (3.49)) wartość rozwiązania (3.64) może być przybliżana przez uśrednione rozwiązanie podobnego zagadnienia, jednak ze zmienionymi warunkami brzegowymi (rys. 3.21). To „nowe” zagadnienie brzegowe będziemy nazywać schematem aproksymacyjnym.



Rys. 3.21. Schemat aproksymacyjny

Fig. 3.21. Approximation schema

Rozwiązanie schematu aproksymacyjnego ma postać [61]

$$\sigma_r(r) = -\frac{A}{r^2} + 2B \wedge \sigma_t(r) = \frac{A}{r^2} + 2B, \quad (3.118)$$

gdzie:

$\sigma_r(r)$ i $\sigma_t(r)$ – odpowiednio, składowa radialna i obwodowa tensora naprężenia,

A i B – stałe, których wartości determinują warunki brzegowe.

W schemacie aproksymacyjnym warunki brzegowe to

$$\sigma_r(r = R_0) = -1 \wedge u_r(r = R_n) = 0, \quad (3.119)$$

gdzie:

u_r – składowa radialna wektora przemieszczenia,

R_0 i R_n – odpowiednio, promień przestrzeni porowej oraz założony promień okręgu, dla którego $u_r = 0$ (rys. 3.21).

W płaskim stanie odkształcenia składowa radialna wektora przemieszczenia jest określona równaniem [61]

$$u_r(r) = \frac{r}{E} \left[(1-\nu^2)\sigma_t(r) - \nu(1+\nu)\sigma_r(r) \right], \quad (3.120)$$

co – wraz z warunkiem brzegowym (3.119b) – implikuje

$$\sigma_t(r=R_n) = \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_r(r=R_n). \quad (3.121)$$

Uwzględnienie zależności (3.118) we wzorze (3.121), po przekształceniach, prowadzi do

$$2B = \frac{A}{(2\nu-1)R_n^2}. \quad (3.122)$$

Konsekwentnie, po podstawieniu równania (3.122) do (3.118a), a następnie do (3.119a) otrzymujemy

$$A = \frac{R_0^2 R_n^2 (2\nu-1)}{R_n^2 (2\nu-1) - R_0^2}. \quad (3.123)$$

Równość (3.123) – wraz z (3.122) – implikuje

$$2B = \frac{R_0^2}{R_n^2 (2\nu-1) - R_0^2}. \quad (3.124)$$

Ostatecznie, składowa obwodowa tensora naprężenia ma postać

$$\sigma_t(r) = \frac{R_0^2 R_n^2 (2\nu-1)}{R_n^2 (2\nu-1) - R_0^2} \frac{1}{r^2} + \frac{R_0^2}{R_n^2 (2\nu-1) - R_0^2}. \quad (3.125)$$

Korzystając teraz z własności [40], że uśrednione po objętości pojedynczej komórki periodyczności, wartości składowych tensora całkowitego naprężenia są równe wartościom średnim składowych tego tensora obliczonych po powierzchni, możemy zapisać (wartość ciśnienia porowego $p = 1$)

$$\langle \sigma_{22}^T \rangle = -2R_0 + 2 \int_{R_0}^{0.5} \sigma_t(r) dr. \quad (3.126)$$

Jednocześnie, przy warunku $e_{ij}^x(u^{(0)}) = 0$, uśredniona składowa tensora całkowitego naprężenia reprezentuje, wziętą z przeciwnym znakiem, odpowiednią składową tensora α_{ij} . Wobec tego

$$\alpha_{22} = 2R_0 - 2 \int_{R_0}^{0.5} \sigma_t(r) dr. \quad (3.127)$$

Podstawienie równania (3.125) do wyrażenia (3.127) oraz scałkowanie i proste przekształcenia prowadzą, w konsekwencji, do zależności

$$\alpha_{22} = t_0 + \frac{t_0^2}{1 - 2\nu + T_n^2 t_0^2} \left[T_n^2 (1 - t_0) - (1 - 2\nu) \left(\frac{1}{t_0} - 1 \right) \right], \quad (3.128)$$

w której

$$t_0 = \frac{R_0}{1/2} \wedge T_n = \frac{1/2}{R_n}$$

reprezentują (rys. 3.21), odpowiednio, stosunek promienia przestrzeni porowej do promienia koła wpisanego w kontur pojedynczej komórki periodyczności oraz stosunek promienia koła wpisanego w kontur pojedynczej komórki periodyczności do promienia koła, dla którego spełniony jest przemieszczeniowy warunek brzegowy (3.119b).

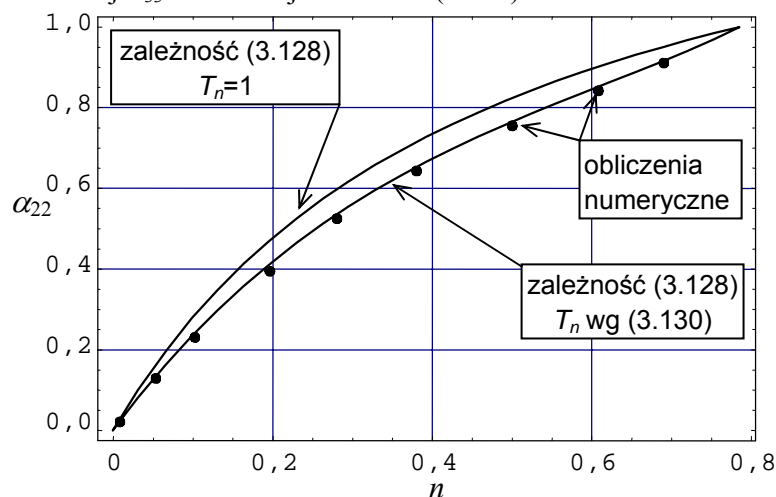
Dla geometrii typu II wartość t_0 , w funkcji aktualnej wartości porowatości, określa równanie (bezpośrednia konsekwencja (3.102))

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}. \quad (3.129)$$

Wartość T_n jest na ogół funkcją porowatości, którą wyznacza się przez „wpisanie” wyników otrzymanych ze schematu aproksymacyjnego w wyniki uzyskane z obliczeń numerycznych. Otrzymano

$$T_n = (1 - n^3)(1 + \nu(1 - \nu))\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.130)$$

Równania (3.128) wraz z (3.129) i (3.130) stanowią poszukiwaną zależność funkcyjną dla struktury II. Wartość składowej α_{11} jest, oczywiście, równa wartości α_{22} . Wartość składowej α_{33} determinuje równanie (3.109).



Rys. 3.22. Wartości składowej α_{22} obliczone według proponowanej zależności (3.128): struktura II

Fig. 3.22. Values of the component α_{22} calculated according to the proposed relation (3.128): structure II

Porównanie wartości składowej α_{22} , danych przez wyrażenie (3.128) oraz tych z obliczeń numerycznych, przedstawiono na rysunku 3.22. Wyniki te jasno wskazują, że zaproponowana zależność funkcyjna (3.128) jest bardzo dobrym oszacowaniem wartości składowej α_{22} . Potwierdza to również rysunek 3.5, na którym pokazano wartości α_{22} w funkcji współczynnika Poissona. Punkty na tym rysunku reprezentują wyniki obliczeń numerycznych, natomiast linia ciągła to zależność (3.128).

Ostateczna postać proponowanego oszacowania, wyrażona przez porowatość oraz współczynnik Poissona, to (otrzymana w wyniku podstawienia (3.129) i (3.130) do (3.128))

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \alpha_{22} = & 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \\ & + \frac{4\frac{n}{\pi}}{1-2\nu+2(1-n^3)[1+\nu(1-\nu)]\frac{n}{\pi}} \\ & \times \left[\frac{(1-n^3)[1+\nu(1-\nu)]}{2} \left(1-2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \right) - (1-2\nu) \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{n}{\pi}}} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Powróćmy jeszcze na chwilę do zależności (3.128). Łatwo sprawdzić, że spełnia ona, niezależnie od przyjętej wartości T_n , następujące trzy warunki:

1. $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \alpha_{22} = 0$,
2. $\lim_{t_0 \rightarrow 1} \alpha_{22} = 1$,
3. $\forall t_0 > 0 \quad \lim_{\nu \rightarrow 0,5} \alpha_{22} = 1$.

Na ogół każda zależność funkcyjna tensora α_{ij} , niezależnie od geometrii mikrostruktury ośrodka porowatego, dla której została zaproponowana, musi wykazywać takie własności. Pierwsza z nich może być zinterpretowana jako: *brak w ośrodku przestrzeni porowej* $\rightarrow \alpha_{ij} = 0$. Druga własność, potwierdzona w niniejszym opracowaniu numerycznie, to: *przestrzeń porowa osiąga brzegi pojedynczej komórki periodyczności* \rightarrow *odpowiednia składowa tensora α_{ij} osiąga wartość jeden*. W końcu trzecia własność, najczęściej cytowana w literaturze, to: *ośrodek nieściśliwy* $\rightarrow \alpha_{ij} = \delta_{ij}$.

W dalszej analizie założono, że oszacowania wartości tensora α_{ij} dla pozostałych struktur, tj. geometrii I i geometrii III, mogą być otrzymane przez odpowiednią modyfikację zależności (3.128). Wprowadzane nowe elementy do związku (3.128) muszą

jednak zapewniać spełnienie, przez tak otrzymaną funkcję aproksymacyjną, wymienionych trzech własności.

Podejście takie wydaje się szczególnie zasadne w odniesieniu do struktury I. W tym przecież przypadku funkcja aproksymacyjna dla geometrii I musi się transformować, przy $m = 1$, do zależności aproksymacyjnej dla struktury II, tj. do związku (3.128).

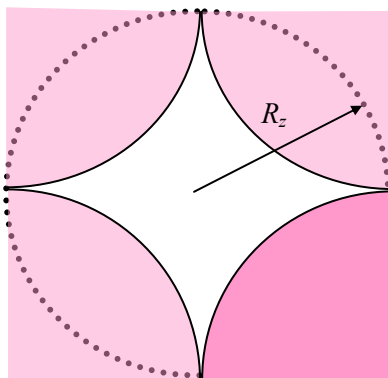
Odpowiedniej modyfikacji równania (3.128) dla struktur I i III poszukiwano poprzez proces „wpisywania” się w wyniki otrzymane już wcześniej metodą elementów skończonych.

Zaczęto od struktury typu III. Jest to, podobnie jak struktura II, jednoparametrowa rodzina geometrii przestrzeni porowej. Poszukiwana zależność aproksymacyjna wartości tensora α_{ij} jest więc tylko funkcją porowatości i współczynnika Poissona. Proces wpisywania się w wyniki obliczeń numerycznych (rys. 3.24) doprowadził w wyniku, dla struktury III, do następującej postaci tej funkcji

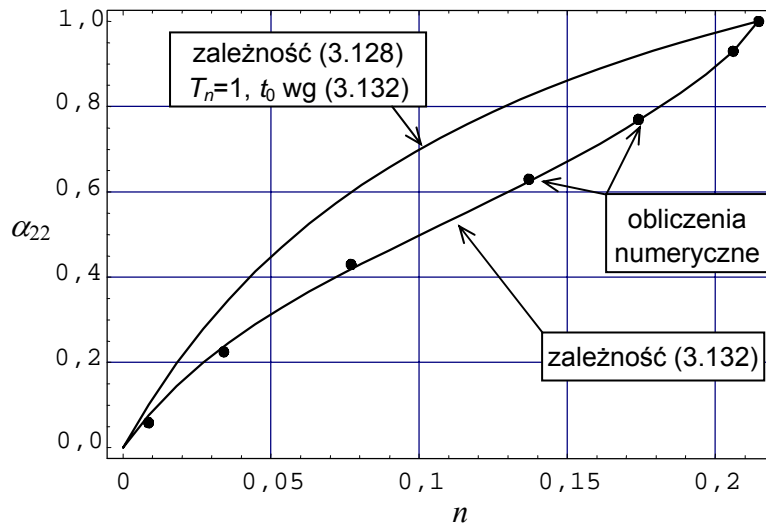
$$\alpha_{22} = \left[1 - 2\sqrt{2}(1-2\nu)(1+\nu)(1-t_0)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t_0^{\sqrt{2}} \right] \times \left\{ t_0 + \frac{t_0^2}{1-2\nu+T_n^2 t_0^2} \left[T_n^2(1-t_0) - (1-2\nu) \left(\frac{1}{t_0} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (3.132)$$

$$t_0 = \frac{R_z}{1/2} = 2\sqrt{\frac{n}{4-\pi}}, \quad T_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \left(\frac{t_0}{2} \right)^2 \right) [1 + \nu(1-\nu)],$$

gdzie R_z to tzw. „promień zastępczy” (rys. 3.23).



Rys. 3.23. Promień zastępczy dla struktury III
Fig. 3.23. Effective radius for the structure III



Rys. 3.24. Wartości składowej α_{22} obliczone według proponowanej zależności (3.128): struktura III

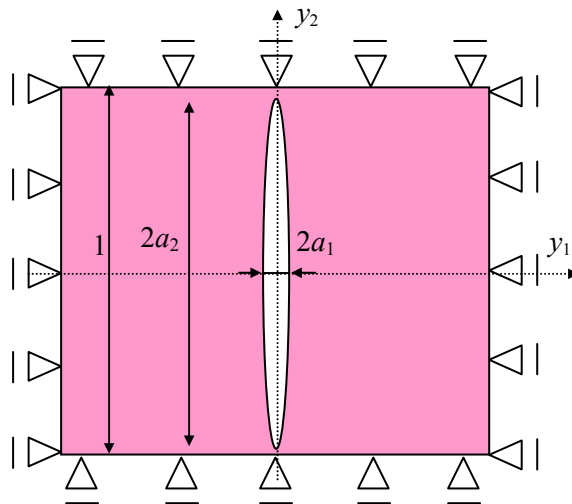
Fig. 3.24. Values of the component α_{22} calculated according to the proposed relation (3.128): structure III

Wyniki przedstawione na rysunku 3.24 ewidentnie dowodzą, że proponowana zależność aproksymacyjna (3.132) wartości składowej α_{22} dla struktury III jest również, podobnie jak zależność (3.128) dla struktury II, bardzo dobrym oszacowaniem. Oczywiście: $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, natomiast α_{33} oblicza się zgodnie z tożsamością (3.109). Rysunek 3.6 potwierdza, że jest to również bardzo dobra zależność funkcyjna ze względu na współczynnik Poissona (linia ciągła na tym rysunku to wyniki związku (3.132)).

Struktura I jest dwuparametrową rodziną geometrii przestrzeni porowej. Poszukiwane oszacowanie wartości składowej α_{22} jest więc funkcją trzech argumentów, tj. n , m i ν . Rozważania ograniczono tylko do funkcji aproksymacyjnej wartości składowej α_{22} , gdyż funkcja ta, przez podstawienie $m \rightarrow 1/m$, staje się również oszacowaniem wartości składowej α_{11} (symetria (3.116)).

Podobnie jak w przypadku poprzednich struktur, oszacowania poszukiwano, modyfikując zależność (3.128) i wpisując się w wyniki przeprowadzonych już wcześniej obliczeń numerycznych. W przeciwieństwie jednak do poprzednich struktur, wykorzystano dodatkowo jeszcze jeden schemat aproksymacyjny (rys. 3.25).

Wprowadzenie drugiego schematu aproksymacyjnego jest podyktowane faktem, że o ile analizowana struktura dla wartości m bliskich wartości jeden jest geometrycznie bliska strukturze II, o tyle dla $m \gg 1$ oraz $m \ll 1$ jest ona geometrycznie bliższa jednak „szczelinie” (rys. 3.25). W tym przypadku, tj. $m \gg 1$ lub $m \ll 1$, wprowadzony wcześniej schemat aproksymacyjny jest nieodpowiedni i konieczne jest skonstruowanie nowego schematu, bardziej adekwatnego do rozważanej geometrii.



Rys. 3.25. Drugi schemat aproksymacyjny
Fig. 3.25. The second approximate schema

Na rysunku 3.25 przedstawiono strukturę I dla $m \ll 1$. Tak jak poprzednio, przestrzeń porowa jest wypełniona płynem, w którym panuje jednostkowe ciśnienie. Ponieważ oś y_1 (podobnie oś y_2) jest równocześnie osią symetrii oraz $m \ll 1$, wobec tego możemy przyjąć, że: $e_{22}^y(y_2 = 0, y_1) = 0$ i w konsekwencji

$$\sigma_{22}^s(y_2 = 0, y_1) = \nu \left[\sigma_{11}^s(y_2 = 0, y_1) + \sigma_{33}^s(y_2 = 0, y_1) \right]. \quad (3.133)$$

Równocześnie pole naprężenia spełnia (3.106), tj.

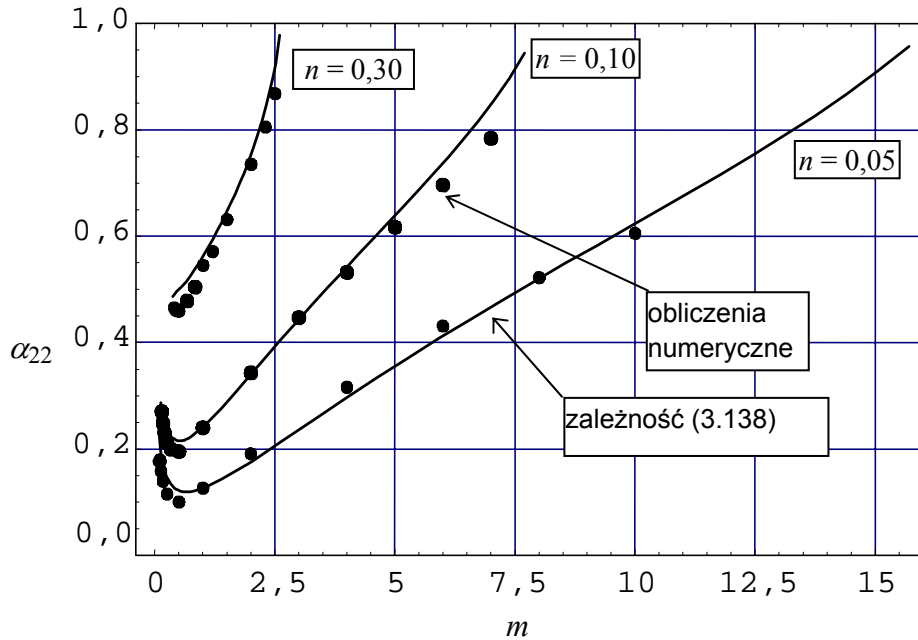
$$\sigma_{33}^s(y_2, y_1) = \nu \left[\sigma_{11}^s(y_2, y_1) + \sigma_{22}^s(y_2, y_1) \right], \quad (3.134)$$

co – wraz z (3.133) – prowadzi do

$$\sigma_{22}^s(y_2 = 0, y_1) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11}^s(y_2 = 0, y_1). \quad (3.135)$$

Przy $m \ll 1$ oraz $2a_2 \rightarrow 1$ (rys. 3.25) można przyjąć, że: $\sigma_{11}^s(y_2 = 0, y_1) = -1$ (wartość ciśnienia porowego). Wobec tego

$$\langle \sigma_{22}^T \rangle = 2 \int_{a_1}^{0.5} \sigma_{22}^s(y_2 = 0, y_1) dy_1 - 2a_1 = -(1-2a_1) \frac{\nu}{1-\nu} - 2a_1. \quad (3.136)$$



Rys. 3.26 Wartości składowej α_{22} obliczone wg proponowanej zależności: struktura I
Fig. 3.26. Values of the component α_{22} calculated according to the proposed relation: structure I

Wartość (3.136), wzięta z przeciwnym znakiem, określa składową α_{22} . Ostatecznie więc

$$\alpha_{22} = (1 - 2a_1) \frac{\nu}{1 - \nu} + 2a_1 \quad (3.137)$$

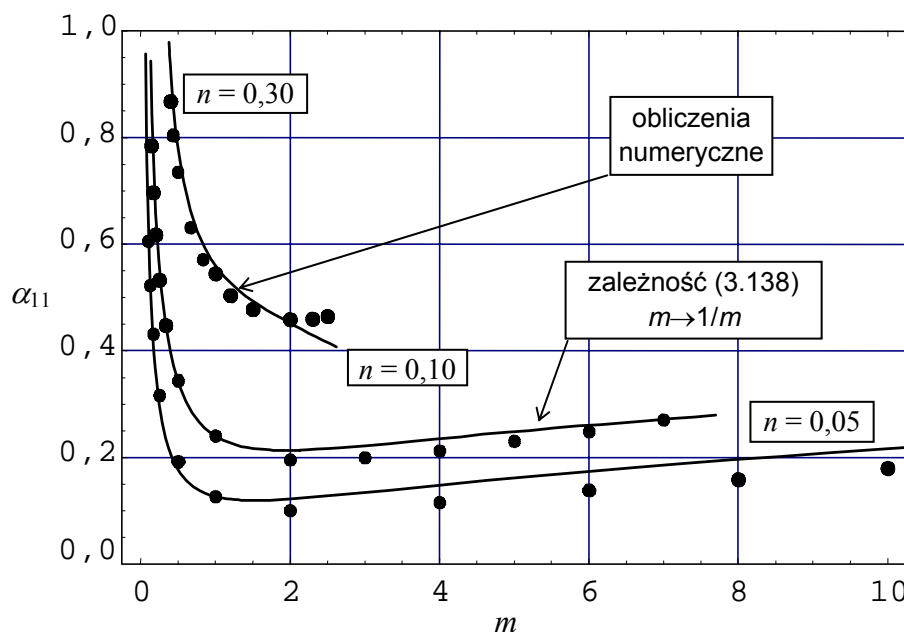
jest oszacowaniem wartości α_{22} w drugim schemacie aproksymacyjnym. Oszacowanie to, wraz z oszacowaniem (3.128), zostały wykorzystane do skonstruowania funkcji aproksymacyjnej wartości składowej α_{22} dla struktury I. Proces wpisywania się w wyniki obliczeń numerycznych (rys. 3.26–3.28) doprowadził, dla struktury I, do następującej postaci poszukiwanego oszacowania

$$\alpha_{22} = \left[1 - t_2 (t_1 - t_2)^6 \right] \left\{ t_1 + \frac{t_1^2}{1 - 2\nu + T_n^2 t_1^2} \left[T_n^2 (1 - t_1) - (1 - 2\nu) \left(\frac{1}{t_1} - 1 \right) \right] \right\} - (t_1 - t_2) (1 - t_1)^{1-n} \left[(1 - t_1) \frac{\nu}{1 - \nu} + t_1 \right], \quad (3.138)$$

gdzie:

$$T_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^3 t_1^6 \right] [1 + \nu (1 - \nu)]; \quad t_1 = 2a_1 = 2\sqrt{\frac{nm}{\pi}}; \quad t_2 = 2a_2 = 2\sqrt{\frac{n}{m\pi}}. \quad (3.139)$$

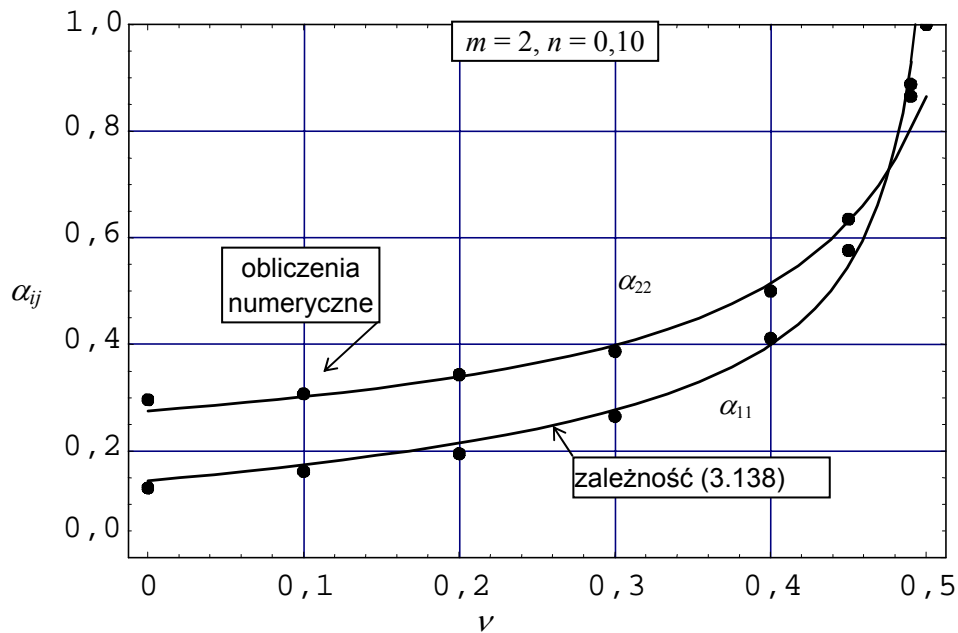
Wyniki przedstawione na rysunkach 3.26–3.28 świadczą, że proponowana zależność (3.138) jest dość dobrym przybliżeniem wartości składowej α_{22} dla różnych wartości: n , m i ν . Wszystkie podstawowe własności, takie jak: lokalne minima składowej α_{11} i α_{22} , transformowanie się przy $m = 1$ do oszacowania (3.128), proponowana funkcja (3.138) dobrze weryfikuje.



Rys. 3.27. Wartości składowej α_{11} obliczone według proponowanej zależności: struktura I
Fig. 3.27. Values of the component α_{11} calculated according to the proposed relation: structure I

Wyniki przedstawione na rysunkach 3.26–3.28 wskazują również, że funkcja aproksymacyjna (3.138) nie jest, niestety, aż tak bardzo dobrym oszacowaniem, jak – otrzymane wcześniej dla struktur II i III – zależności (3.128) i (3.132). Należy jednak podkreślić, że w przeciwieństwie do poprzednich geometrii, ta funkcja aproksymacyjna podaje wartości składowych tensora α_{ij} dla geometrii, która wraz ze zmianą wartości parametru m doznaje bardzo dużych zmian kształtu (rys. 3.13).

Oszacowanie (3.138) kończy poszukiwanie zależności funkcyjnych stałych materiałowych teorii porosprężystości Biota dla trzech przyjętych struktur ośrodka porowatego.



Rys. 3.28. Wartości składowej α_{11} obliczone według proponowanej zależności: struktura I
 Fig. 3.28. Values of the component α_{11} calculated according to the proposed relation: structure I

3.3. Uwagi

Za pomocą metody asymptotycznej homogenizacji przedstawiono proces „odtworzenia” teorii porosprężystości Biota z opisu mikroskopowego przepływu lepkiej cieczy Newtona przez sprężyste odkształcalny ośrodek porowaty. Należy podkreślić, że prawo Darcy’ego filtracji płynu przez ośrodek porowaty zostało otrzymane, a nie – założone.

Zastosowanie metody homogenizacji umożliwiło również, nieosiągalną na drodze rozważań fenomenologicznych, identyfikację parametrów mikrostruktury ośrodka porowatego odpowiedzialnych za wartości analizowanych stałych materiałowych. Otrzymane z procesu homogenizacji definicje stałych materiałowych pozwoliły, dla zadanych geometrii porów, określić zwłaszcza wartości składowych tensora α_{ij} i współczynnika β . Przyjęto trzy typy struktur reprezentujących idealizacje mikrostruktury: ośrodka skalnego i gruntowego.

Na podstawie przedstawionych wyników obliczeń numerycznych można stwierdzić, że:

1. Analizowane stałe „silnie” zależą od struktury geometrii porowej ośrodka. Objawia się to, między innymi, w zależności wartości tych stałych zarówno od wartości porowatości ośrodka, jak również od pozostałych parametrów geometrycznych mikrostruktury.

W niniejszym opracowaniu analizowano jedno- i dwuparametrowe rodziny geometrii przestrzeni porowej.

2. Przy odpowiednio rozbudowanej przestrzeni porowej i nawet ściśliwym szkieletcie, istnieje krytyczna wartość porowatości, przy której składowe tensora α_{ij} , lub przynajmniej jedna z nich, osiąga wartość jeden. Na przykład dla struktury imitującej ośrodek gruntowy wartość krytycznej porowatości to nieco powyżej 20%.

Wynik ten potwierdza, że dla ośrodków gruntowych przejście od opisu konsolidacji według Biota do opisu konsolidacji według Terzagiego to przede wszystkim efekt struktury ośrodków gruntowych, a nie nieściśliwości ich ziaren.

3. Szczególnie duże zmiany wartości analizowanych stałych materiałowych może indukować proces kruchego pęknięcia zachodzący w ośrodkach skalnych. Ilustrują to wyniki obliczeń numerycznych dla porów w kształcie elips. Wzrost wartości parametru m reprezentującego stosunek pól elipsy może być utożsamiany, przy małej wartości porowatości, z propagacją pojedynczego spękania w ośrodku. Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych są, w tym sensie, potwierdzeniem omawianych we wstępie do niniejszego rozdziału wyników badań laboratoryjnych Sibaia [141].

4. W przypadku analizy nasyconych ośrodków porowatych, których procesowi deformacji towarzyszą duże zmiany mikrostruktury ośrodka, konieczne jest wprowadzenie do opisu matematycznego tego procesu dodatkowych parametrów reprezentujących odpowiednie miary mikrostruktury. Wartości stałych materiałowych odpowiedzialnych za hydromechaniczne sprzężenie w nasyconym ośrodku porowatym (analizowanych w niniejszym rozdziale) są funkcją tych dodatkowych parametrów.

Wyniki obliczeń numerycznych zastosowane zostały następnie do sformułowania zależności funkcyjnych wartości analizowanych stałych materiałowych od parametrów mikrostruktury. Dla trzech analizowanych struktur są to zależności: (3.128), (3.132) i (3.138). Proponowane funkcje aproksymacyjne, ze względu na przyjęcie do obliczeń „wygładzonych” przestrzeni porowych, muszą być traktowane w terminach oszacowań. Otrzymane zostały przez proces „perodyzacji” ośrodka, tzn. dla zadanego rozkładu tzw. „kierunkowej porowatości” tworzono strukturę periodyczną, w której geometria poru w pojedynczej komórce periodyczności opisana była przez funkcję rozkładu kierunkowej porowatości. W tym sensie reprezentują one średnie wartości możliwych makroskopowych „odpowiedzi” mikrostruktury ośrodka. Otrzymane oszacowania są, oczywiście, „realizowalne”, gdyż sformułowane zostały i zweryfikowane według obliczeń numerycznych dla konkretnych mikrostruktur ośrodka porowatego.

Na podstawie zagadnień brzegowych (3.34)–(3.36), podobnie jak stałych materiałowych α_{ij} i β , można określać wartości tensora filtracji w funkcji geometrii przestrzeni porów. Rozwiązania, wraz z zastosowaną metodą, są przedstawione w pracach: Ferreol i Rothman [60], Kohring [84], Zick i Homsy [167]. Dla ośrodków granulowanych (kształt sferyczny ziaren), wyniki obliczeń numerycznych współczynnika filtracji [167] potwierdzają, między innymi, stosowalność empirycznego wzoru Krügera, tzn.

$$\frac{1}{3} K_{ij} \delta_{ij} \propto \frac{n^3}{\mu'(1-n)^2} a^2, \quad (3.140)$$

gdzie a – średnica ziarna.

4. Deformacje plastyczne nasyconych płynem ośrodków porowatych – teoria poroplastyczności

W modelowaniu matematycznym deformacji plastycznych nasyconego cieczą ośrodka porowatego stosowana jest najczęściej (np. przez Kisiela [82], Ryncarza [131], Schreflera i Gawina [139], Thiela [155]), omówiona we wstępie niniejszej monografii, koncepcja naprężenia efektywnego. W przypadku deformacji sprężystych, możliwość zdefiniowania hipotetycznego tensora naprężenia efektywnego przedstawiono w poprzednim rozdziale. Rozszerzanie jednak koncepcji naprężenia efektywnego na deformacje plastyczne budzi wiele kontrowersji (por. de Buhan i Dormieux [52], [53], Coussy [47], Łydźba i Shao [104], [105] – rozważania teoretyczne; Kerbouche et.al. [81], Pietruszczak i Pande [119] – wyniki badań doświadczalnych).

Coussy w pracy [47] zaproponował ogólny opis matematyczny deformacji plastycznych nasyconych ośrodków porowatych. Opierając się na rozważaniach fenomenologicznych, Coussy stwierdza, że warunek plastyczności nasyconego ośrodka porowatego musi być wyrażony przez dwie niezależne „siły termodynamiczne”, tj. tensor naprężenia oraz ciśnienie porowe. Stowarzyszonymi z tymi siłami termodynamicznymi, zmiennymi kinematycznymi, są: tensor odkształcenia oraz zmiana porowatości.

W przypadku stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia, zgodnie z propozycją Coussy’ego, związki opisujące deformacje plastyczne nasyconego ośrodka porowatego tworzą:

➤ kryterium plastyczności

$$F(\sigma_{ij}, p) \leq 0, \quad (4.1)$$

➤ prawo plastycznego płynięcia

$$\dot{E}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \dot{n}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (4.2)$$

gdzie $\dot{E}_{ij}^p, \dot{n}^p$ – odpowiednio, składowa tensora prędkości plastycznego odkształcenia oraz prędkość plastycznych zmian porowatości ośrodka¹.

¹ Tensor prędkości plastycznego odkształcenia oznaczono wielką literą, gdyż reprezentuje on wielkość opisu makroskopowego. W dalszej części, w opisie mikroskopowym, stosowany będzie również tensor prędkości plastycznego odkształcenia i jako wielkość opisu mikroskopowego będzie oznaczany małą literą. Występujący we wzorach (4.1), (4.2) i (4.4) tensor naprężenia, jako stosowany przez Coussy’ego w rozważaniach fenomenologicznych, również jest wielkością makroskopową (tej wielkości jednak, na razie, nie wyróżniamy innym symbolem).

Ta propozycja nie wyklucza, oczywiście, istnienia naprężenia efektywnego. Z tego też względu Coussy, w celu uproszczenia opisu, proponuje istnienie tzw. „plastycznego” naprężenia efektywnego w formie analogicznej do tensora naprężenia efektywnego według Biota, tj. przy deformacjach sprężystych. Wartość współczynników występujących w definicji naprężenia efektywnego ma jednak być na ogół różna przy deformacjach sprężystych i plastycznych.

Istnienie naprężenia efektywnego jest oparte na założeniu, że w czasie deformacji plastycznych nasyconego ośrodka porowatego spełniona jest relacja

$$b\dot{E}_{ij}^p \delta_{ij} = \Delta \dot{n}^p, \quad (4.3)$$

która po przyjęciu stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia prowadzi do²

$$F(\sigma_{ij} + bp\delta_{ij}) \leq 0. \quad (4.4)$$

Współczynnik b jest nową stałą materiałową, określaną jako tzw. współczynnik „plastycznego” naprężenia efektywnego.

Jest oczywiste, że istnienie „plastycznego” naprężenia efektywnego otrzymane zostało przy bardzo mocnym założeniu odnośnie plastycznego zachowania nasyconego ośrodka porowatego. Z tego też powodu proponowany wynik musi być potraktowany jedynie jako hipoteza.

Bardziej jednoznaczny wynik, jednakże częściowy, otrzymano metodą homogenizacji [52], [53], [103]. Korzystając ze sformułowania stanów granicznych dla ośrodków kompozytowych, de Buhan i Dormieux pokazali w pracach [52] i [53], że graniczna powierzchnia plastyczności nasyconego ośrodka porowatego może być wyrażona przez naprężenie efektywne według Terzagiego lub, przy dodatkowych założeniach, naprężenie efektywne proponowane przez Coussy’ego. Odpowiednia postać naprężenia efektywnego zależy od przyjętego na poziomie lokalnym kryterium plastyczności szkieletu. Łydzba i Shao, korzystając z metody asymptotycznej homogenizacji, otrzymali podobne wyniki, jednak odnośnie początkowej powierzchni plastyczności nasyconego ośrodka porowatego i przy założeniu, że szkielet ośrodka porowatego jest zbudowany z jednorodnego materiału [103].

² Poniższy wynik jest konsekwencją następującego podstawienia: $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + bp\delta_{ij}$, wtedy:
 $F(\sigma_{ij}, p) = F(\bar{\sigma}_{ij} - bp\delta_{ij}, p) = \bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}, p)$ oraz $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ i $\frac{\partial \bar{F}}{\partial p} = -b \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial p}$. Po zastosowaniu równań (4.2) i (4.3) otrzymujemy $\lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial p} = -b\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial p} = -b\dot{E}_{ij}^p \delta_{ij} + \dot{n}^p = 0$, co w konsekwencji prowadzi do $\frac{\partial \bar{F}}{\partial p} = 0 \Rightarrow \bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}, p) = \bar{F}(\bar{\sigma}_{ij}) = F(\sigma_{ij} + bp\delta_{ij})$.

Celem niniejszego rozdziału jest wyprowadzenie, za pomocą metody homogenizacji, ogólnej struktury opisu matematycznego deformacji plastycznych nasyconego ośrodka porowatego oraz weryfikacja koncepcji naprężenia efektywnego w zakresie deformacji plastycznych.

4.1. Poszukiwanie opisu makroskopowego – proces homogenizacji

W przypadku poszukiwania ekwiwalentnego opisu makroskopowego ośrodka mikroniejednorodnego zbudowanego z materiałów o cechach sprężysto-plastycznych, klasyczne stosowanie metody asymptotycznej homogenizacji na ogół nie jest możliwe. Taki tok postępowania prowadziłby do konieczności rozważenia i rozwiązania (numerycznie) bardzo wielu zagadnień brzegowych, sformułowanych dla pojedynczej komórki periodyczności. Otrzymany wynik byłby i tak ważny tylko dla określonej struktury wewnętrznej ośrodka przyjętej do obliczeń numerycznych oraz historii obciążenia realizowanego w obliczeniach.

Ten silny efekt struktury wewnętrznej oraz historii obciążenia jest wynikiem zależności makroskopowej powierzchni plastyczności od całego pola odkształceń plastycznych materiału w pojedynczej komórce periodyczności, tj. od nieskończonej liczby parametrów (pisze o tym Suquet w pracy [150]). Innymi słowy – wiadomo, że wraz z rozwojem odkształceń plastycznych materiał będzie wykazywał wzmocnienie (makroskopowo), ale nie znamy formy tego wzmocnienia. Zależy ono od aktualnego rozkładu pola odkształceń plastycznych wewnątrz pojedynczej komórki, a rozkład ten zależy od struktury wewnętrznej materiału i historii obciążenia, której poddany był w przeszłości materiał.

Wynik procesu homogenizacji jest więc częściowy. Otrzymuje się ogólną strukturę opisu matematycznego, zidentyfikowane są zmienne makroskopowe, ale postać funkcji plastyczności nie jest dokładnie znana (wiadomo jakich parametrów jest funkcją).

4.1.1. Opis mikroskopowy

Podobnie jak w rozdziale 3., rozważamy proces konsolidacji ośrodka dwufazowego zbudowanego z porowatego szkieletu, zajmującego objętość V_s , wypełnionego lepka nieściśliwą cieczą Newtona V_l . Przyjmujemy ponadto, że przemieszczenia i odkształcenia ośrodka są małe, proces deformacji szkieletu jest quasi-statyczny, a przepływ cieczy w przestrzeni porowej jest wolny i laminarny. Struktura ośrodka jest periodyczna, a pory są ze sobą połączone. Tym razem jednak zakładamy, w przeciwieństwie do rozważań przeprowadzonych w poprzednim rozdziale, że szkielet ośrodka porowatego jest zbudowany z materiału sprężysto-plastycznego.

Opis mikroskopowy więc tworzą:

➤ **dla cieczy:**

równania równowagi

$$\sigma_{ij,i}^l = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (4.5)$$

równanie zachowania masy

$$v_{i,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (4.6)$$

równania konstytutywne dla nieściśliwej lepkiej cieczy Newtona

$$\sigma_{ij}^l = -p\delta_{ij} + \mu^l(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \text{w } V_l, \quad (4.7)$$

➤ **dla materiału tworzącego szkielet:**

równania równowagi

$$\sigma_{ij,i}^s = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.8)$$

równania sprężystości

$$\sigma_{ij}^s = C_{ijkl} [e_{kh}(u) - \varepsilon_{kh}^p], \quad \text{gdzie } e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{w } V_s, \quad (4.9)$$

związki plastyczności:

warunek plastyczności

$$f(\sigma_{ij}^s) - \kappa \leq 0, \quad (4.10)$$

prawo plastycznego płynięcia

$$\dot{\varepsilon}_{kh}^p = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij}^s)}{\partial \sigma_{kh}^s}. \quad (4.11)$$

Równania (4.5)–(4.11) są uzupełnione o warunki brzegowe na granicy rozdziału faz Γ , tj.

warunek ciągłości wektora naprężenia

$$\sigma_{ij}^s N_i - \sigma_{ij}^l N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.12)$$

warunek ciągłości wektora prędkości

$$\dot{u}_i - v_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (4.13)$$

W równaniach tych zastosowano takie same oznaczenia, jak w rozdziale 3., oraz dodatkowo:

ε_{kh}^p – składowa tensora odkształceń plastycznych,

κ – parametr kryterium plastyczności,

$\lambda \geq 0$ – mnożnik Lagrange'a (wyznaczany z warunku zgodności $\dot{f}(\sigma_{ij}^s) = 0$),

$g(\sigma_{ij}^s)$ – potencjał plastyczny.

Podobnie jak w rozdziale 3., w celu dokonania procesu homogenizacji podany opis lokalny musi być przeskalowany.

Skalowanie, podobnie jak w przypadku deformacji sprężystych, prowadzi do:

$$\mu \varepsilon^2 v_{i,jj} - p_{,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (4.14)$$

$$v_{i,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (4.15)$$

$$\left[C_{ijkh} \{ e_{kh}(u) - \varepsilon_{kh}^p \} \right]_{,i} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.16)$$

$$f(\sigma_{ij}^s) - \kappa \leq 0 \quad \wedge \quad \dot{\varepsilon}_{kh}^p = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij}^s)}{\partial \sigma_{kh}^s}, \quad \text{w } V_s, \quad (4.17)$$

$$\left[C_{ijkh} \{ e_{kh}(u) - \varepsilon_{kh}^p \} + p \delta_{ij} - \varepsilon^2 \mu^l (v_{i,j} + v_{j,i}) \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.18)$$

$$\dot{u}_i - v_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (4.19)$$

4.1.2. Proces uśredniania

– zasada makrojednorodności, wielkości makroskopowe

Po wprowadzeniu do opisu mikroskopowego (4.14)–(4.19) rozwinięcia asymptotycznego dla v , p i u , tj.

$$v_i(x, y, t) = v_i^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon v_i^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 v_i^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (4.20)$$

$$p(x, y, t) = p^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon p^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (4.21)$$

$$u_i(x, y, t) = u_i^{(0)}(x, y, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x, y, t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (4.22)$$

oraz uwzględnieniu prawa zmiany operatora pochodnej przestrzennej (2.82) otrzymujemy:

$$-\varepsilon^{-1} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y_i} + \varepsilon^0 \left[\mu \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} \right) - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i} \right] + \varepsilon^1 [\dots] + \dots = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (4.23)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_i} + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} \right] + \varepsilon^1 [\dots] + \dots = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] \\
& + \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} \{ e_{kh}^x(u^{(0)}) + e_{kh}^y(u^{(1)}) - \varepsilon_{kh}^p(y) \} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] \right\} \\
& + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[C_{ijkh} \{ e_{kh}^x(u^{(0)}) + e_{kh}^y(u^{(1)}) - \varepsilon_{kh}^p(y) \} \right] + \frac{\partial}{\partial y_i} \left[C_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(1)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(2)}) \right] \right\} + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1} \left[C_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] N_i + \varepsilon^0 \left[C_{ijkh} \{ e_{kh}^x(u^{(0)}) + e_{kh}^y(u^{(1)}) - \varepsilon_{kh}^p(y) \} + p^{(0)} \delta_{ij} \right] N_i \\
& + \varepsilon^1 \left[C_{ijkh} \{ e_{kh}^x(u^{(1)}) + e_{kh}^y(u^{(2)}) \} + p^{(1)} \delta_{ij} - \mu^l \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right] N_i + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = 0, \text{ na } \Gamma,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\varepsilon^0 \left[\dot{u}_i^{(0)} - v_i^{(0)} \right] + \varepsilon^1 \left[\dot{u}_i^{(1)} - v_i^{(1)} \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = 0, \text{ na } \Gamma. \tag{4.27}$$

Powyższy układ równań uzupełniają zależności (4.17), definiujące: dopuszczalny stan naprężenia w szkielecie osrodka porowatego oraz prawo ewolucji odkształceń plastycznych.

Selekcja wyrażeń stojących przy odpowiednich potęgach parametru ε daje sekwencję zagadnień lokalnych, sformułowanych dla pojedynczej komórki periodyczności. Pierwsze trzy zagadnienia są dokładnie takie same, jak pierwsze trzy zagadnienia brzegowe analizowane w rozdziale 3. Z tego względu podajemy tylko ich ostateczne rozwiązania, tj.

$$p^{(0)}(x, y, t) = p^{(0)}(x, t), \quad \text{w } V_1, \tag{4.28a}$$

$$v^{(0)}(x, y, t) - \dot{u}_i^{(0)} = -\frac{k_{ij}(y)}{\mu^l} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \quad \text{w } V_l, \tag{4.28b}$$

$$p^{(1)}(x, y, t) = \chi_i(y) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \bar{p}^{(1)}(x), \quad \text{w } V_l, \tag{4.28c}$$

$$u^{(0)}(x, y, t) = u^{(0)}(x, t), \quad \text{w } V_s \tag{4.28d}$$

oraz makroskopowe prawo filtracji, będące wynikiem bezpośredniego uśrednienia równania (4.28b), tzn.

$$V_i - nu_i^{(0)}(x,t) = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}(x,t)}{\partial x_j}, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.29)$$

gdzie:

n – porowatość ośrodka,

K_{ij} – tensor filtracji,

V_i – składowa wektora makroskopowej prędkości filtracji cieczy,

$k_{ij}(y)$ i $\chi_i(y)$ – rozwiązania układu (3.43)–(3.36) (rozdz. 3.).

Przed przystąpieniem do sformułowania i analizy czwartego zagadnienia lokalnego zauważmy najpierw, że związek konstytutywny sprężystości (4.9), po uwzględnieniu rozwinięcia asymptotycznego pola przemieszczenia (4.22) oraz prawa transformacji pochodnej przestrzennej (2.82), wraz z wynikiem (4.28d), przyjmuje postać

$$\sigma_{ij}^s = C_{ijkh} \left[e_{kh}^x(u^{(0)}) + e_{kh}^y(u^{(1)}) - \varepsilon_{kh}^p \right] + O(\varepsilon), \quad \text{w } V_s. \quad (4.30)$$

Zależność ta, wraz ze związkami plastyczności (4.17), prowadzi, przy $\varepsilon \rightarrow 0$, do [37], [149]–[151]

$$f(\sigma_{ij}^{(0)s}) - \kappa \leq 0 \quad \wedge \quad \dot{\varepsilon}_{kh}^p = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij}^{(0)s})}{\partial \sigma_{kh}^{(0)s}}, \quad \text{w } V_s, \quad (4.31)$$

gdzie:

$$\sigma_{ij}^{(0)s} = C_{ijkh} \left[e_{kh}^x(u^{(0)}) + e_{kh}^y(u^{(1)}) - \varepsilon_{kh}^p \right], \quad \text{w } V_s. \quad (4.32)$$

IV zagadnienie lokalne tworzą więc: równania (4.25) przy ε^{-1} , (4.26) przy ε^0 oraz (4.31), jako konsekwencja zależności (4.17). Na podstawie (4.32) oraz po oznaczeniu, dla przejrzystości rozważań, tensora makroodkształcenia $e_{kh}^x(u^{(0)}(x,t))$ przez $E_{kh}(x,t)$ zagadnienie to, w obrębie pojedynczej komórki periodyczności, można przedstawić następująco:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)s}}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.33a)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)s} N_i = -p^{(0)} \delta_{ij} N_i, \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.33b)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)s}(y) = C_{ijkh} \left[e_{kh}^y(\tilde{u}) - \varepsilon_{kh}^p \right], \quad \text{w } V_s, \quad (4.33c)$$

$$\tilde{u}_i(y,t) = E_{ij}(t) y_j + u_i^{(1)}(y,t), \quad \text{w } V_s, \quad (4.33d)$$

$$f(\sigma_{ij}^{(0)s}) \leq 0 \quad \wedge \quad \dot{\varepsilon}_{kh}^p = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij}^{(0)s})}{\partial \sigma_{kh}^{(0)s}}, \quad \text{w } V_s. \quad (4.33e)$$

Układ równań (4.33), ze względu na obecność związków plastyczności (4.33e), jest układem nieliniowym. Poszukiwane pola mikroskopowe: $u_i^{(1)}(y,t)$, $\varepsilon_{kh}^p(y,t)$ oraz

$\sigma_{ij}^{(0)s}(y,t)$ (lub równoważnie: $\tilde{u}_i(y,t)$, $e_{kh}^y(\tilde{u}(y,t))$) są nie tylko funkcją aktualnych wartości tensora makroodkształcenia i ciśnienia porowego, ale na ogół całej ich historii, tzn. $\tau \in (-\infty, t] \mapsto \{E_{ij}(\tau), p(\tau)\}$. Rozwiązanie więc zagadnienia lokalnego (4.33), dla ustalonej chwili czasowej t i współrzędnej przestrzennej x , charakteryzuje układ

$$\left[\tau \in (-\infty, t] \mapsto \{E_{ij}(\tau), p^{(0)}(\tau)\} \right] \mapsto \{e_{ij}^y(\tilde{u}(y,t)), \varepsilon_{ij}^p(y,t)\}, \quad (4.34)$$

w którym lewa strona reprezentuje historię „wymuszenia” zewnętrznego (zmiennie nie zależą od zmiennej mikroskopowej y), a prawa strona to pola mikroodkształcenia: całkowitego i plastycznego. W sformułowaniu tym tensor mikronapężenia jest funkcją zależną, poprzez związek konstytutywny (4.33c), zmiennych: $e_{ij}^y(\tilde{u})$ i ε_{ij}^p . Niech

$$\{e_{ij}^y(\tilde{u}(y,t)), \varepsilon_{ij}^p(y,t), \sigma_{ij}^{(0)s}(y,t)\} \quad (4.35)$$

reprezentuje, aktualnie panujący w pojedynczej komórce periodyczności, stan mikroodkształcenia (całkowitego i plastycznego) i stan mikronapężenia. Powyższy stan ośrodka można przedstawić jako superpozycję dwóch stanów, tj.

$$\begin{aligned} & \{e_{ij}^y(\tilde{u}(y,t)), \varepsilon_{ij}^p(y,t), \sigma_{ij}^{(0)s}(y,t)\} \\ &= \{e_{ij}^y(\tilde{u}^e(y,t)), 0, \sigma_{ij}^e(y,t)\} + \{e_{ij}^y(\tilde{u}^{\text{res}}(y,t)), \varepsilon_{ij}^p(y,t), \sigma_{ij}^{\text{res}}(y,t)\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Stan $\{e_{ij}^y(\tilde{u}^{\text{res}}(y,t)), \varepsilon_{ij}^p(y,t), \sigma_{ij}^{\text{res}}(y,t)\}$ charakteryzuje ośrodek „makroskopowo nieobciążony”, ale z „wmrożonymi” odkształceniami plastycznymi. Odpowiadające temu stanowi całkowite makroodkształcenie, jako wywołane tylko polem plastycznego mikroodkształcenia, jest więc makroskopowym odkształceniem plastycznym ośrodka E_{ij}^p . Stan ten jest więc rozwiązaniem następującego układu

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{\text{res}}}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.37a)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{res}} N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.37b)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{res}}(y) = C_{ijkh} [e_{kh}^y(\tilde{u}^{\text{res}}) - \varepsilon_{kh}^p], \quad \text{w } V_s, \quad (4.37c)$$

$$\tilde{u}_i^{\text{res}}(y) = E_{ij}^p y_j + u_i^{(1)r}(y), \quad \text{w } V_s, \quad (4.37d)$$

$$\frac{1}{\|V\|} \int_{V_s} \sigma_{ij}^{\text{res}}(y) dy = 0. \quad (4.37e)$$

Równania (4.37b) i (4.37e) określają odpowiednio: brak ciśnienia porowego oraz zerową wartość makronapężenia, czyli makroskopowy brak obciążenia ośrodka.

Stan $\{e_{ij}^y(\tilde{u}^e(y,t)), 0, \sigma_{ij}^e(y,t)\}$ określa pola mikroskopowe wywołane deformacją sprężystą ośrodka na skutek „zewnętrznego wymuszenia” makroskopowym odkształceniem $(E_{ij} - E_{ij}^p)$ i ciśnieniem porowym p . Jest on więc rozwiązaniem układu:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^e}{\partial y_i} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.38a)$$

$$\sigma_{ij}^e N_i = -p^{(0)} \delta_{ij} N_i, \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.38b)$$

$$\sigma_{ij}^e(y) = C_{ijkh} e_{kh}^y(\tilde{u}^e), \quad \text{w } V_s, \quad (4.38c)$$

$$\tilde{u}_i^e(y) = (E_{ij} - E_{ij}^p) y_j + u_i^{(1)e}(y), \quad \text{w } V_s. \quad (4.38d)$$

Zgodnie z układem (4.33), sumaryczne pole mikronapężenia $\sigma_{ij}^e(y,t) + \sigma_{ij}^{\text{res}}(y,t)$ spełnia ograniczenie wynikające z warunku plastyczności, tj.

$$f(\sigma_{ij}^e(y) + \sigma_{ij}^{\text{res}}(y)) - \kappa \leq 0, \quad \forall y \in V_s. \quad (4.39)$$

Układ (4.38) jest, obecnie w trochę zmodyfikowanej postaci, **IV zagadnieniem brzegowym**, analizowanym w rozdziale 3. Korzystając z (3.41), możemy więc zapisać:

$$e_{ij}^y(\tilde{u}^e(y)) = \left[I_{ijkh} + e_{ij}^y(\xi^{kh}(y)) \right] (E_{kh} - E_{kh}^p) + e_{ij}^y(\eta) p^{(0)}, \quad \text{w } V_s, \quad (4.40a)$$

$$\sigma_{ij}^e(y) = C_{ijkh} \left[I_{khlm} + e_{kh}^y(\xi^{lm}(y)) \right] (E_{lm} - E_{lm}^p) + C_{ijkh} e_{kh}^y(\eta) p^{(0)}, \quad \text{w } V_s, \quad (4.40b)$$

gdzie:

$$I_{ijkh} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) - \text{tensor jednostkowy},$$

$\xi_i^{kh}(y)$ i $\eta_i(y)$ – odpowiednio, rozwiązanie pola przemieszczenia $u_i^{(1)e}(y)$ przy $\{E_{ij} - E_{ij}^p = \delta_{ik} \delta_{jh}, p^{(0)} = 0\}$ i przy $\{E_{ij} - E_{ij}^p = 0, p^{(0)} = 1\}$.

Definiując, podobnie jak w poprzednim rozdziale, tensor napężenia dla ośrodka dwufazowego jako

$$\sigma_{ij}^T = h(y) \sigma_{ij}^{(0)s} - (1 - h(y)) p^{(0)} \delta_{ij}, \quad \text{gdzie } h(y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } y \in V_s, \\ 0 & \text{gdy } y \in V_l, \end{cases} \quad \text{w } V, \quad (4.41)$$

zgodnie z (4.36), możemy zapisać

$$\sigma_{ij}^T = h(y)(\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{res}) - (1 - h(y))p^{(0)}\delta_{ij}, \quad \text{w } V. \quad (4.42)$$

Uśrednienie powyższego związku i jednocześnie wykorzystanie zależności (4.40b) i (4.37e) daje makroskopowy związek konstytutywny sprężystości, tzn.

$$\Sigma_{ij}^T = C_{ijkh}^{\text{eff}}(E_{kh} - E_{kh}^p) - \alpha_{ij}p^{(0)}, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.43)$$

gdzie, w celu wyróżnienia wielkości makroskopowej, użyto oznaczenia $\Sigma_{ij}^T = \langle \sigma_{ij}^T \rangle$.

Wartości składowych tensora makroskopowego plastycznego odkształcenia w funkcji aktualnego pola plastycznego mikroodkształcenia definiuje układ (4.37). Parametry efektywne, tak jak w poprzednim rozdziale, określają związki (3.48) i (3.49).

Związek konstytutywny (4.43) i zależność (4.40b) pozwalają również określić dla ośrodka suchego (tj. przy $p^{(0)} = 0$), przy deformacjach sprężystych szkieletu, rozkład mikronapężenia w pojedynczej komórce periodyczności w funkcji aktualnych wartości składowych tensora makronapężenia. Zależność ta ma postać

$$\sigma_{ij}^e(y) = L_{ijkh}(y)\Sigma_{kh}^T \quad \text{przy } p^{(0)} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.44)$$

gdzie $L_{ijkh}(y)$ jest tzw. tensorem lokalizacji napężenia (pole tensorowe), zdefiniowanym równością

$$L_{ijkh}(y) = C_{ijrs} \left[I_{rslm} + e_{rs}^y(\xi^{lm}) \right] S_{lmkh}^{\text{eff}}, \quad \text{w } V_s. \quad (4.45)$$

Jako konsekwencję uśrednienia równania (4.44), otrzymuje się również

$$\langle h(y)L_{ijkh}(y) \rangle = I_{ijkh}. \quad (4.46)$$

Tensor S_{lmkh}^{eff} jest efektywnym tensorem podatności sprężystej ośrodka porowatego bez cieczy i jest zdeterminowany przez efektywny tensor sztywności sprężystej związkiem

$$S_{lmij}^{\text{eff}} C_{ijkh}^{\text{eff}} = I_{lmkh}. \quad (4.47)$$

Analizę zagadnienia (4.37) rozpoczynamy od sformułowania, dla nasyconych ośrodków porowatych, zasady makrojednorodności. Zasada ta, określana również jako warunek makrojednorodności Hilla (rozd. 2.), sformułowana została pierwotnie dla ośrodków nieporowatych. Obecność porów oraz cieczy w ośrodku powodują, że konieczna jest jej modyfikacja.

Zauważmy, że dla każdego periodycznego pola przemieszczenia $w(y) \in (H_{\#}^1(V))^3$ oraz dla każdego samozrównoważonego i periodycznego pola mikronapężenia $\sigma_{ij}(y)$, tzn.

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij}(y) \in SA \\ & = \left\{ \tau_{ij}(y) \left| \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_i} = 0, \text{ w } V_s, \quad \tau_{ij} N_i = 0 \text{ na } \Gamma, \quad \tau_{ij}(y) - V - \text{periodyczny} \right. \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

spełniona jest tożsamość

$$\langle h(y) \sigma_{ij} e_{ij}^y(w) \rangle = 0. \quad (4.49)$$

Tożsamość ta jest wynikiem następujących równości:

$$\langle h(y) \sigma_{ij} e_{ij}^y(w) \rangle = \frac{1}{\|V\|} \left[\int_{V_s} \frac{\partial(\sigma_{ij} w_j)}{\partial y_i} dV - \int_{V_s} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_i} w_j dV \right], \quad (4.50)$$

$$\frac{1}{\|V\|} \int_{V_s} \frac{\partial(\sigma_{ij} w_j)}{\partial y_i} dV = \frac{1}{\|V\|} \left[\int_{\partial V_s \cap \partial V} \sigma_{ij} w_j N_i dS + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} w_j N_i dS \right] = 0, \quad (4.51)$$

które są konsekwencją: pole mikronapężenia jest polem samozrównoważonym, wobec tego druga całka po prawej stronie równania (4.50) jest tożsamościowo równa zeru, periodyczność mikropól implikuje zerowanie się pierwszej całki po prawej stronie równania (4.51), zerowa wartość wektora napężenia na powierzchni Γ daje zerową wartość drugiej całki po prawej stronie (4.51).

Tożsamość (4.49) prowadzi w konsekwencji do **zasady makrojednorodności dla ośrodka porowatego bez płynu**:

$$\forall \sigma_{ij}(y) \in SA \wedge \forall u_i(y) \in KA = \{u_i(y) \mid u_i(y) = E_{ij} y_j + w_i(y), w_i(y) - V - \text{periodyczne}\}$$

spełniona jest tożsamość

$$\langle h(y) \sigma_{ij} e_{ij}^y(u) \rangle = \langle h(y) \sigma_{ij} \rangle E_{ij}. \quad (4.52)$$

W przypadku ośrodka nasyconego płynem z ciśnieniem porowym p , zależność (4.52) nie obowiązuje, gdyż pole mikronapężenia $\sigma_{ij}(y) \notin SA$ – brak zerowania się wektora napężenia na powierzchni Γ . Modyfikację tej zasady, uwzględniającą obecność cieczy w przestrzeni porowej, otrzymuje się po zastosowaniu podstawienia

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y) = \sigma_{ij}^{(0)s}(y) + h(y) p \delta_{ij}, \quad \text{w } V_s, \quad (4.53)$$

gdzie:

$$\sigma_{ij}^{(0)s}(y) \in \overline{SA}(p)$$

$$= \left\{ \tau_{ij}(y) \left| \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_i} = 0, \text{ w } V_s, \quad \tau_{ij} N_i = -p \delta_{ij} N_i, \text{ na } \Gamma, \quad \tau_{ij}(y) - V - \text{periodyczny} \right. \right\}$$

jest statycznie dopuszczalnym polem mikronapężenia szkieletu, dla ośrodka porowatego nasyconego cieczą z ciśnieniem p (równania (4.33a) i (4.33b)).

Oczywiście $\sigma_{ij}^{eq}(y) \in SA$, a wobec tego, zgodnie z (4.52) i (4.53), otrzymujemy

$$\langle h(y) \sigma_{ij}^{eq} e_{ij}^y(u) \rangle = \langle h(y) (\sigma_{ij}^{(0)s} + p \delta_{ij}) \rangle E_{ij}. \quad (4.54)$$

Ponadto, zgodnie z podstawieniem (4.41), mamy

$$\langle h(y) (\sigma_{ij}^{(0)s} + p \delta_{ij}) \rangle = \Sigma_{ij}^T + p \delta_{ij}. \quad (4.55)$$

Prawa strona równości (4.55) reprezentuje składową tensora napężenia efektywnego według Terzagiego i, dla przejrzystości rozważań, oznaczana będzie przez Σ_{ij}^{eT} .

Jako konsekwencję (4.54) i (4.55), możemy sformułować **zasadę makrojednorodności dla ośrodka porowatego nasyconego płynem**

$\forall \sigma_{ij}(y) \in \overline{SA}(p) \wedge \forall u_i(y) \in KA$ spełniona jest tożsamość

$$\langle h(y) (\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) e_{ij}^y(u) \rangle = \Sigma_{ij}^{eT} E_{ij}. \quad (4.56)$$

Powróćmy teraz do układu (4.37). Zgodnie z równaniami (4.37a), (4.37b) i (4.37e) oraz zasadą makrojednorodności (4.52) mamy

$$\forall u_i(y) \in KA \quad \langle h(y) \sigma_{ij}^{res} e_{ij}^y(u) \rangle = 0. \quad (4.57)$$

Podstawiając w powyższym związku, jako kinematycznie dopuszczalne pole mikroodkształcenia

$$e_{ij}^y(u) = S_{ijlm} L_{lmpq}(y) \quad (4.58)$$

oraz uwzględniając zależności (4.37c) i (4.37d), otrzymujemy

$$\langle h(y) C_{ijkh} (e_{kh}^y(u^{(1)r}) + E_{kh}^p - \varepsilon_{kh}^p(y)) S_{ijlm} L_{lmpq}(y) \rangle = 0. \quad (4.59)$$

W równaniu (4.58) tensor S_{ijkh} jest tensorem podatności sprężystej materiału tworzącego szkielet. Równość (4.59), po przekształceniach, prowadzi do

$$E_{ij}^p = \langle h(y) L_{khij}(y) \varepsilon_{kh}^p(y) \rangle - \langle h(y) L_{khij}(y) e_{kh}^y(u^{(1)r}) \rangle. \quad (4.60)$$

Drugi człon po prawej stronie (4.60), zgodnie z tożsamością (4.49), jest jednak równy zero i wobec tego

$$E_{ij}^p = \langle h(y) L_{khij}(y) \varepsilon_{kh}^p(y) \rangle. \quad (4.61)$$

Zależność (4.61) określa wartości składowych tensora makroskopowego plastycznego odkształcenia w funkcji aktualnych wartości pola plastycznego mikroodkształce-

nia. Jest również interpretowana (np. [152]) jako definicja tensora plastycznego makroodkształcenia.

Uwzględnienie (4.61) w zagadnieniu lokalnym (4.37) prowadzi do związku między aktualnym polem residualnego naprężenia $\sigma_{ij}^{\text{res}}(y)$ a aktualnym polem plastycznego mikroodkształcenia $\varepsilon_{ij}^p(y)$. Zauważmy, że po podstawieniu wzoru (4.61) do równania (4.37d), sformułowanie wariacyjne zagadnienia lokalnego (4.37) ma postać znajdź $u^{(1)r}(y) \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3$ takie, że:

$$\forall w \in (H_{\#}^1(V)/\mathbf{R})^3 \quad B(u^{(1)r}, w) = - \int_{V_s} C_{ijkl} \left[\langle h(y) L_{lmkh} \varepsilon_{lm}^p(y) \rangle - \varepsilon_{kh}^p(y) \right] dV, \quad (4.62)$$

gdzie, podobnie jak w poprzednim rozdziale, forma dwuliniowa jest zdefiniowana zależnością (3.67).

Rozwiązanie tego zagadnienia ma ogólną postać

$$u_i^{(1)r}(y) = - \int_{V_s} H_{ikh}(y, y') \varepsilon_{kh}^p(y') dy', \quad (4.63)$$

która, wraz ze związkiem konstytutywnym (4.37c) i równaniem (4.37d), implikuje

$$\sigma_{ij}^{\text{res}}(y) = - \int_{V_s} R_{ijkh}(y, y') \varepsilon_{kh}^p(y') dy'. \quad (4.64)$$

Zależność (4.64) określa pole mikronaprężenia w pojedynczej komórce periodyczności wywołane tylko deformacjami plastycznymi szkieletu. Należy podkreślić, że występujące w powyższych związkach pola tensorowe: $H_{ikh}(y, y')$ i $R_{ijkh}(y, y')$ są funkcją jedynie geometrii mikrostruktury ośrodka, tj. kształtu i wzajemnego ułożenia porów, oraz własności sprężystych materiału tworzącego szkielet ośrodka porowatego.

Rozłożenie **IV zagadnienia lokalnego** opisanego układem (4.33) na dwa układy, tj. (4.37) i (4.38), pozwala również zidentyfikować wartość zmian porowatości ośrodka: wywołanej deformacjami plastycznymi szkieletu (Δn^p – plastyczna zmiana porowatości) oraz deformacjami sprężystymi ($[\Delta n - \Delta n^p]$ – sprężysta zmiana porowatości, Δn – całkowita zmiana porowatości). Zauważmy bowiem, że – zgodnie z (4.52) i (4.46) – mamy

$$E_{kh} = \langle h(y) L_{ijkh}(y) e_{ij}^y(\tilde{u}) \rangle, \quad (4.65)$$

skoro $L_{ijkh}(y)$ jest statycznie dopuszczalnym mikronaprężeniem oraz $e_{ij}^y(\tilde{u})$ jest kinematycznie dopuszczalnym mikroodkształceniem (równanie (4.33d)). Równocześnie

$$\langle h(y) L_{ijkh}(y) e_{ij}^y(\tilde{u}) \rangle = \langle h(y) e_{kh}^y(\tilde{u}) \rangle \neq E_{kh}, \quad (4.66)$$

gdyż I_{ijkh} nie jest statycznie dopuszczalnym polem mikronapężenia dla ośrodka porowatego bez cieczy. Po „rozszerzeniu” jednak pola przemieszczenia $\tilde{u}_i(y)$ na cały obszar pojedynczej komórki periodyczności, tzn.

$$\tilde{u}_i(y) = h(y) \left[E_{ij} y_j + u_i^{(1)}(y) \right] + (1-h(y)) \left[E_{ij} y_j + w_i(y) \right], \quad \text{w } V, \quad (4.67)$$

$$w_i(y) - V - \text{periodyczne}, \quad u_i^{(1)}(y) = w_i(y), \quad \text{na } \Gamma,$$

wtedy

$$\langle e_{ii}^y(\tilde{u}) \rangle = E_{ii}. \quad (4.68)$$

Związek (4.68) można przedstawić również jako

$$\langle h(y) e_{ii}^y(\tilde{u}) \rangle + \frac{1}{\|V\|} \int_{\partial V_i} \tilde{u}_i(y) N_i dS = E_{ii}. \quad (4.69)$$

Drugi człon po lewej stronie tego równania określa zmianę porowatości ośrodka, wobec tego, biorąc pod uwagę zależności (4.67) i (4.69), możemy zapisać

$$\Delta n = E_{ii} - \langle h(y) e_{ii}^y(\tilde{u}) \rangle \quad \text{oraz} \quad \Delta n = n E_{ii} + \frac{1}{\|V\|} \int_{\Gamma} w_i(y) N_i dS. \quad (4.70)$$

Po skorzystaniu teraz z dokonanego wcześniej rozkładu pola przemieszczenia $\tilde{u}(y) = \tilde{u}_i^e(y) + \tilde{u}_i^{\text{res}}(y)$, przez analogię do (4.70), otrzymujemy

$$\Delta n^p = E_{ii}^p - \langle h(y) e_{ii}^y(\tilde{u}^{\text{res}}) \rangle \quad \text{oraz} \quad \Delta n^p = n E_{ii}^p + \frac{1}{\|V\|} \int_{\Gamma} w_i^r(y) N_i dS, \quad (4.71a)$$

$$\Delta n - \Delta n^p = (E_{ii} - E_{ii}^p) - \langle h(y) e_{ii}^y(\tilde{u}^e) \rangle$$

$$\text{oraz} \quad \Delta n - \Delta n^p = n (E_{ii} - E_{ii}^p) + \frac{1}{\|V\|} \int_{\Gamma} w_i^e(y) N_i dS, \quad (4.71b)$$

$$w_i^r(y) \wedge w_i^e(y) - V - \text{periodyczne}, \quad w_i^r(y) = u_i^{(1)r}(y) \wedge w_i^e(y) = u_i^{(1)e}(y), \quad \text{na } \Gamma.$$

Równania (4.71b) mogą być jeszcze przekształcone przez wykorzystanie otrzymanego wcześniej rozwiązania (4.40a). Uwzględnione to zostanie podczas analizy VI zagadnienia lokalnego.

Podstawową własnością charakteryzującą plastyczne płynięcie jest nieodwracalność. Rozkład zagadnienia lokalnego (4.36) na dwa układy (4.37) i (4.38) uzupełniało

więc, do tej pory nie analizowane, ograniczenie (4.39) definiujące dopuszczalne stany pola mikronapężenia. Ograniczenie to prowadzi do definicji, w przestrzeni (uogólnionych) naprężeń makroskopowych, tzw. (domkniętego) obszaru sprężystego \mathbf{E}_s . Wnętrze \mathbf{E}_s określa obszar sprężysty, natomiast brzeg zbioru \mathbf{E}_s – to makroskopowa powierzchnia plastyczności.

Zauważmy, że dla ustalonego rozkładu pola plastycznego mikroodkształcenia $\{\varepsilon_{ij}^p(y, t)\}$ rozkład pola mikronapężenia $\{\sigma_{ij}^{(0)s}(y, t)\}$ w funkcji aktualnych wartości składowych tensora makronapężenia Σ_{ij}^T i ciśnienia porowego p określa, zgodnie z otrzymanymi wcześniej rezultatami (4.40b) oraz (4.43) i (4.44), następujący związek lokalizacyjny

$$\sigma_{ij}^{(0)s}(y) - \sigma_{ij}^{\text{res}}(y) = L_{ijkh}(y) (\Sigma_{kh}^T + \alpha_{kh} p^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(\eta) p^{(0)}, \text{ w } V_s. \quad (4.72)$$

Wartości $\sigma_{ij}^{\text{res}}(y)$ w funkcji aktualnego rozkładu pola mikroodkształcenia $\{\varepsilon_{ij}^p(y, t)\}$ podaje zależność (4.64). Wobec tego obszar sprężysty dla nasyconego ośrodka porowego definiuje zbiór

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_s(p, \{\sigma_{ij}^{\text{res}}(y)\}) \\ &= \left\{ \Sigma_{ij}^T \mid f(L_{ijkh}(y) (\Sigma_{kh}^T + \alpha_{kh} p^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(\eta) p^{(0)}) + \sigma_{ij}^{\text{res}}(y) - \kappa \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right\}, \text{ w } \Omega, \end{aligned} \quad (4.73)$$

gdzie $\mathbf{E}_s(p, \{\sigma_{ij}^{\text{res}}(y)\})$ oznacza, przy ustalonym polu residualnego mikronapężenia i wartości ciśnienia porowego p , obszar sprężysty w przestrzeni Σ_{ij}^T . Brzeg obszaru sprężystego to, przy zadanych wartościach $(p, \{\sigma_{ij}^{\text{res}}(y)\})$, powierzchnia plastyczności w przestrzeni Σ_{ij}^T .

Jak łatwo zauważyć z definicji (4.73), makroskopowa powierzchnia plastyczności jest funkcją aktualnego pola residualnego mikronapężenia lub – równoważnie – aktualnego pola plastycznego mikroodkształcenia. Nie jest więc na ogół możliwe „pozbycie” się z opisu makroskopowego zmiennych mikroskopowych, z wyłączeniem dwóch przypadków, tj.: początkowej powierzchni plastyczności i powierzchni definiującej nośność graniczną pojedynczej komórki periodyczności.

Początkowa powierzchnia plastyczności jest brzegiem obszaru sprężystego określonego przy $\{\sigma_{ij}^{\text{res}}(y) = 0 \quad \forall y \in V_s\}$, tj.

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_s(p, \{0\}): \\ &= \left\{ \Sigma_{ij}^T \mid f(L_{ijkh}(y) (\Sigma_{kh}^T + \alpha_{kh} p^{(0)}) + C_{ijkh} e_{kh}^y(\eta) p^{(0)}) - \kappa \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right\}, \text{ w } \Omega, \end{aligned} \quad (4.74)$$

natomiast graniczna powierzchnia plastyczności, parametryzowana przez wartość ciśnienia porowego p , jest brzegiem obszaru $\mathbf{E}_S^u(p)$, zdefiniowanego jako (por. Bouchitte [37], Suquet [150])

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_S^u(p): \\ & = \left\{ \Sigma_{ij}^T \mid \exists \sigma_{ij} \in \overline{SA}(p), \langle h(y)\sigma_{ij} \rangle - np\delta_{ij} = \Sigma_{ij}^T, f(\sigma_{ij}) - \kappa \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right\}, \text{ w } \Omega. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Zgodnie z tą definicją, obszar $\mathbf{E}_S^u(p)$ to zbiór, dla ustalonej wartości ciśnienia porowego p , wszystkich takich stanów makronapężenia, dla których istnieją pola mikronapężenia, spełniające: lokalne warunki równowagi, warunek brzegowy na granicy: ciało stałe–ciecz oraz są plastycznie dopuszczalne, tzn. w każdym punkcie szkieletu V_s nie jest przekroczone lokalne kryterium plastyczności.

Definicja (4.75) jest tzw. *potencjalnie bezpiecznym* [150] oszacowaniem nośności granicznej ośrodka. Oszacowanie to jest *nośnością graniczną* ośrodka wtedy, gdy prawo plastycznego płynięcia materiału tworzącego szkielet jest prawem stowarzyszonym.

Po wprowadzeniu teraz makroskopowych funkcji plastyczności: początkowej – $F_S^0(\Sigma_{ij}^T, p) \leq 0$ oraz granicznej – $F_S^u(\Sigma_{ij}^T, p) \leq 0$, powyższe zbiory można równoważnie przedstawić jako

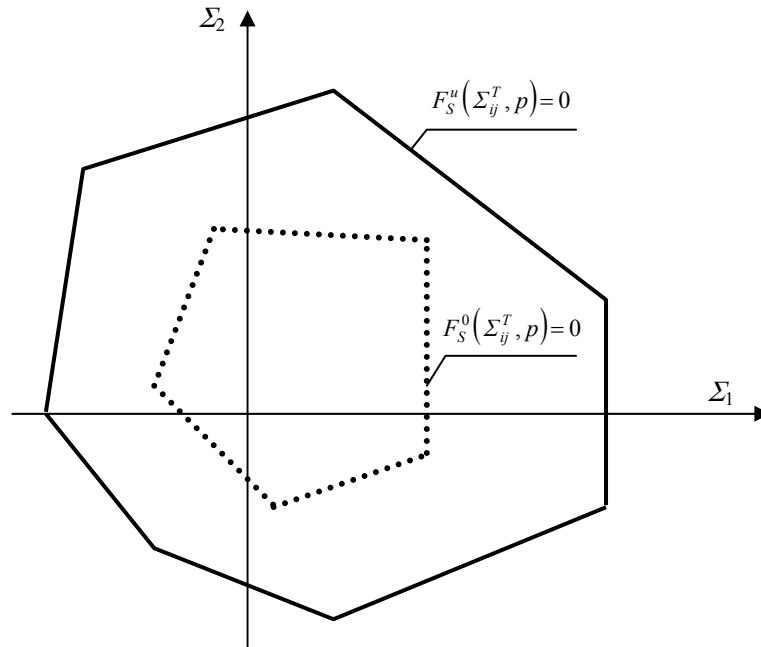
$$\mathbf{E}_S(p, \{0\}) := \left\{ \Sigma_{ij}^T \mid F_S^0(\Sigma_{ij}^T, p) \leq 0 \right\}, \text{ w } \Omega, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{E}_S^u(p) := \left\{ \Sigma_{ij}^T \mid F_S^u(\Sigma_{ij}^T, p) \leq 0 \right\}, \text{ w } \Omega. \quad (4.77)$$

Zgodnie z zależnościami (4.74) i (4.75), spełniona jest następująca relacja (rysunek 4.1)

$$\mathbf{E}_S(p, \{0\}) \subset \mathbf{E}_S^u(p), \text{ w } \Omega. \quad (4.78)$$

Na podstawie analizy definicji (4.74) i (4.76) można wywnioskować, że parametry i kształt początkowej powierzchni plastyczności są wynikiem geometrii mikrostruktury oraz parametrów sprężystości i plastyczności materiału tworzącego szkielet. Równocześnie, w wyniku porównania zależności (4.75) i (4.77), można stwierdzić, że parametry i kształt granicznej powierzchni plastyczności to wynik jedynie geometrii mikrostruktury i parametrów plastyczności materiału tworzącego szkielet ośrodka porowatego. Ponieważ własności sprężyste ośrodka nie mają wpływu na graniczną powierzchnię plastyczności, wobec tego może być ona wyznaczana, przy zadanej geometrii mikrostruktury, z potraktowaniem materiału szkieletu jako sztywno idealnie plastycznego.



Rys. 4.1. Schematyczne przedstawienie początkowej i granicznej powierzchni plastyczności
 Fig. 4.1. Schematic of initial and ultimate yield surfaces

W przypadku szkieletu zbudowanego z materiału sprężysto-plastycznego, z definicji obszarów sprężystych (4.73)–(4.75) oraz relacji (4.78) wynika, że ośrodek porowaty wraz z rozwojem plastycznych mikroodkształceń będzie doznawał wzmocnienia plastycznego. Rodzaj i wielkość tego wzmocnienia zależy jednak od całego rozkładu pola plastycznego mikroodkształcenia, czyli od nieskończonej liczby parametrów. Rezultat procesu homogenizacji jest więc częściowy. Do zastosowań praktycznych otrzymany wynik musi więc być uzupełniony o dodatkowe założenia natury fenomenologicznej, np. uproszczenie polegające na przyjęciu, że zakres sprężysty stanowi wnętrze zbioru (4.75), a (makroskopowy) warunek plastyczności to graniczna powierzchnia plastyczności. W razie konieczności uwzględnienia wzmocnienia plastycznego, wpływ pola plastycznego mikroodkształcenia modeluje się najczęściej, na poziomie makroskopowym, przez przyjęcie wzmocnienia plastycznego w funkcji plastycznego makroodkształcenia reprezentującego sumaryczny rozkład pola plastycznego mikroodkształcenia.

W celu sformułowania makroskopowego prawa ewolucji odkształceń plastycznych rozpatrzmy obecnie przypadek szkieletu ośrodka porowatego zbudowanego z materiału sztywno idealnie plastycznego. W każdym punkcie szkieletu tensor plastycznego mikroodkształcenia i tensor mikronapężenia spełniają zasadę maksymalnej plastycznej dyssypacji [77], [91]. Zasada ta stwierdza: *dla danego odkształcenia pla-*

stycznego ε_{ij}^p , ze wszystkich możliwych naprężeń τ_{ij} spełniających ograniczenie wynikające z kryterium plastyczności, moc dyssypacji plastycznej

$$d^p \left[\tau_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right] = \tau_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (4.79)$$

osiąga swoje maksimum dla aktualnego stanu naprężenia σ_{ij} .

Niech $\{\varepsilon_{ij}^p(y), \sigma_{ij}(y)\}$ są aktualnie panującym, przy ciśnieniu porowym p , polem plastycznego mikroodkształcenia i polem mikronaprężenia, wobec tego

$$\forall \tau_{ij}(y) \in \overline{SA}(\tilde{p}) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p(y) \left[\tau_{ij}(y) - \sigma_{ij}(y) \right] \leq 0 \quad \forall y \in V_s. \quad (4.80)$$

Ponieważ $\sigma_{ij}(y) \in \overline{SA}(p)$, zapisując więc nierówność (4.80) w postaci

$$\begin{aligned} \forall \tau_{ij}(y) \in \overline{SA}(\tilde{p}) \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p(y) \left[\left(\tau_{ij}(y) + \tilde{p} \delta_{ij} \right) - \left(\sigma_{ij}(y) + p \delta_{ij} \right) \right] \\ - \dot{\varepsilon}_{ij}^p(y) \delta_{ij} [\tilde{p} - p] \leq 0 \quad \forall y \in V_s, \end{aligned} \quad (4.81)$$

a następnie uśredniając, wraz z zastosowaniem zasady makrojednorodności dla nasyconego ośrodka porowatego (4.56), otrzymujemy

$$\dot{E}_{ij}^p \left[\tilde{\Sigma}_{ij}^{eT} - \Sigma_{ij}^{eT} \right] - \langle h(y) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \delta_{ij} \rangle [\tilde{p} - p] \leq 0, \quad \text{w } \Omega. \quad (4.82)$$

Ta nierówność, po przekształceniach i uwzględnieniu równania (4.71), może być również przedstawiona w postaci

$$\dot{E}_{ij}^p \left[\tilde{\Sigma}_{ij}^T - \Sigma_{ij}^T \right] + \dot{n}^p [\tilde{p} - p] \leq 0, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.83)$$

co implikuje następujące sformułowanie makroskopowej zasady plastycznej dyssypacji:

makroskopowa zasada maksymalnej plastycznej dyssypacji dla nasyconego ośrodka porowatego: dla danego (uogólnionego) stanu odkształcenia plastycznego $\{\dot{E}_{ij}^p, \dot{n}^p\}$, ze wszystkich możliwych (uogólnionych) naprężeń $\{\tilde{\Sigma}_{ij}^T, \tilde{p}\}$ spełniających makroskopowe kryterium plastyczności, moc dyssypacji plastycznej

$$D^p \left[\left\{ \tilde{\Sigma}_{ij}^T, \tilde{p} \right\}, \left\{ \dot{E}_{ij}^p, \dot{n}^p \right\} \right] = \tilde{\Sigma}_{ij}^T \dot{E}_{ij}^p + \tilde{p} \dot{n}^p, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.84)$$

osiąga swoje maksimum dla aktualnego (uogólnionego) stanu naprężenia $\{\Sigma_{ij}^T, p\}$.

Jak wiadomo (np. [77], [91]), zasada maksymalnej plastycznej dyssypacji implikuje stowarzyszone prawo plastycznego płynięcia, sformułowanie (4.84) prowadzi więc do

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F_S^u(\Sigma_{kh}^T, p)}{\partial \Sigma_{ij}^T} \quad \wedge \quad \dot{n}^p = \lambda \frac{\partial F_S^u(\Sigma_{kh}^T, p)}{\partial p}, \quad \text{w } \Omega. \quad (4.85)$$

Są to prawa plastycznego płynięcia dla nasyconego ośrodka porowatego zbudowanego ze szkieletu o cechach ciała sztywno idealnie plastycznego.

W przypadku szkieletu sprężysto-plastycznego prawa plastycznego płynięcia są dodatkowo, podobnie jak (aktualna) powierzchnia plastyczności, funkcją pola residualnego mikronaprężenia (równoważnie – pola plastycznego mikroodkształcenia). „Pełnych” więc związków, przydatnych w zastosowaniach inżynierskich, makroskopowego prawa plastycznego płynięcia nie udaje się uzyskać. Ponownie potrzebne są dodatkowe postulaty natury fenomenologicznej. Najczęściej rozszerza się ważność prawa plastycznego płynięcia, otrzymanego dla materiału sztywno-plastycznego, na cały proces deformacji plastycznych materiału sprężysto-plastycznego, przyjmując równocześnie makroskopową funkcję plastyczności jako zależną od plastycznego mikroodkształcenia (wzmocnienie plastyczne).

V zagadnienie lokalne: Równanie (4.25) przy ε^0 , (4.26) przy ε^1 .

Po podstawieniu (4.32), równania te można zapisać

$$\sigma_{ij,ix}^{(0)s} + \left[C_{ijkh} \{ e_{kh}^x(u^{(1)}) + e_{kh}^y(u^{(2)}) \} \right]_{,iy} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.86)$$

$$\left[C_{ijkh} \{ e_{kh}^x(u^{(1)}) + e_{kh}^y(u^{(2)}) \} + p^{(1)} \delta_{ij} - \mu^l \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (4.87)$$

Powyższy układ jest analogiczny do odpowiadającego mu układowi (3.42), analizowanego w poprzednim rozdziale. Po przekształceniach prowadzi on do makroskopowych równań równowagi dla ośrodka dwufazowego, tj.

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}^T}{\partial x_i} = 0, \quad \text{w } \Omega. \quad (4.88)$$

VI zagadnienie lokalne: równanie (4.24) przy ε^0 , (4.27) przy ε^1

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial y_i} = 0 \quad \text{w } V_l, \quad (4.89)$$

$$\dot{u}_i^{(1)} - v_i^{(1)} = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (4.90)$$

Uśrednienie równania (4.89), z wykorzystaniem warunku brzegowego (4.90), prowadzi do

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\|V\|} \int_{\Gamma} v_i^{(1)} N_i dS = 0, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.91)$$

gdzie V_i jest składową wektora makroskopowej prędkości filtracji cieczy.

Po uwzględnieniu zależności (4.67) i (4.70) równanie (4.91) można przekształcić do postaci

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} - n \dot{E}_{ii} = -\dot{n}, \quad \text{w } \Omega \quad (4.92)$$

lub

$$\frac{\partial (V_i - n \dot{u}_i^{(0)})}{\partial x_i} = -\dot{n}, \quad \text{w } \Omega. \quad (4.93)$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę (4.71) oraz definicje parametrów efektywnych (3.53) wraz z równością (3.69), otrzymujemy

$$\frac{\partial (V_i - n \dot{u}_i^{(0)})}{\partial x_i} = -\dot{n}^p - \alpha_{ij} (\dot{E}_{ij} - \dot{E}_{ij}^p) + \beta \dot{p}^{(0)}, \quad \text{w } \Omega. \quad (4.94)$$

Równanie (4.94) jest makroskopowym prawem zachowania masy nieściśliwej cieczy, filtrującej przez odkształcalny, sprężysto-plastyczny ośrodek porowaty.

4.1.3. Ogólna struktura (przybliżonego) opisu makroskopowego

Jak już wcześniej stwierdzono, w przypadku ośrodka sprężysto-plastycznego proces homogenizacji nie daje pełnych makroskopowych związków plastyczności. W otrzymanym opisie występuje całe pole residualnego mikronaprężenia, czyli nieskończenie wiele parametrów. W zastosowaniach praktycznych wpływ tego pola na funkcję plastyczności upraszcza się (modeluje) przez przyjęcie wzmocnienia plastycznego najczęściej jako funkcji plastycznego makroodkształcenia. Z tego względu, prezentując poniżej ogólną strukturę opisu matematycznego deformacji plastycznych nasyconego ośrodka porowatego, przydatną w zastosowaniach inżynierskich, dodano w tytule tego podrozdziału termin – przybliżony. Należy jednak podkreślić, że oprócz związków plastyczności, pozostałe równania opisu matematycznego nie zawierają takiego „przybliżenia”.

Zbioreczy układ równań teorii poroplastyczności tworzą:

➤ prawo filtracji

$$V_i - n \dot{u}_i^{(0)}(x, t) = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}(x, t)}{\partial x_j}, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.95)$$

➤ równanie zachowania masy dla filtrującej cieczy

$$\frac{\partial (V_i - n \dot{u}_i^{(0)})}{\partial x_i} = -\dot{n}^p - \alpha_{ij} (\dot{E}_{ij} - \dot{E}_{ij}^p) + \beta \dot{p}^{(0)}, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.96)$$

➤ równania równowagi dla ośrodka dwufazowego

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}^T}{\partial x_i} = 0, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.97)$$

➤ równania konstytutywne sprężystości

$$\Sigma_{ij}^T = C_{ijkh}^{\text{eff}}(E_{kh} - E_{kh}^p) - \alpha_{ij} p^{(0)}, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.98)$$

➤ związki plastyczności:

(przybliżony) warunek plastyczności

$$F(\Sigma_{ij}^T, p^{(0)}; E_{ij}^p, n^p) \leq 0, \quad \text{w } \Omega, \quad (4.99a)$$

(przybliżone) prawo plastycznego płynięcia

$$\dot{E}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G(\Sigma_{kh}^T, p^{(0)})}{\partial \Sigma_{ij}^T} \quad \wedge \quad \dot{n}^p = \lambda \frac{\partial G(\Sigma_{kh}^T, p^{(0)})}{\partial p^{(0)}}, \quad \text{w } \Omega. \quad (4.99b)$$

4.2. Ważność i zakres stosowalności koncepcji naprężenia efektywnego

Jak stwierdzono już we wstępie, ogólna postać kryterium plastyczności (4.99a) nie wyklucza istnienia, dla nasyconego ośrodka porowatego, hipotetycznego tensora naprężenia efektywnego, który podstawiony do kryterium plastyczności dla materiału suchego daje funkcję plastyczności dla ośrodka nasyconego płynem. Celem niniejszego rozdziału jest weryfikacja koncepcji naprężenia efektywnego w zakresie deformacji plastycznych.

W rozważaniach powyższe zagadnienie jest formułowane bardziej ogólnie, tzn.: *czy ze znajomości powierzchni plastyczności dla ośrodka suchego jesteśmy w stanie zbudować powierzchnię plastyczności dla ośrodka nasyconego?* Oznacza to, że (przybliżone) makroskopowe zachowanie ośrodka suchego traktuje się jako dane, a interesuje nas „tylko” wpływ ciśnienia porowego cieczy na funkcję plastyczności nasyconego ośrodka porowatego.

Weryfikacja zasady równoważności naprężenia polegać będzie na porównywaniu odpowiednich związków dla ośrodka suchego oraz nasyconego, tzn. sformułowań powierzchni plastyczności, odpowiadających tym układom, wyrażonych przez prawa lokalizacji naprężenia.

Jako kryterium plastyczności materiału tworzącego szkielet (opis mikroskopowy) przyjmowane są: kryterium Hubera–Misesa i kryterium Coulomba–Mohra.

4.2.1. Prawo lokalizacji naprężenia

Ośrodek suchy

Lokalne zagadnienie brzegowe, przy zadanym rozkładzie pola plastycznego mikroodkształcenia, ma postać

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,i}^s &= 0, & \text{w } V_s, \\ \sigma_{ij}^s N_i &= 0, & \text{na } \Gamma, \\ \sigma_{ij}^s(y) &= C_{ijkh} [e_{kh}(u) - \varepsilon_{kh}^p], & \text{w } V_s, \\ u_i(y) &= E_{ij} y_j + u_i^*(y), & \text{w } V_s, \\ f(\sigma_{ij}^s) &\leq 0, \quad u_i^*(y) - Y \text{ periodyczne,} \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

gdzie – dla uproszczenia zapisu – pominięto indeksy oznaczające kolejne człony rozwinięcia asymptotycznego, a także indeksy oznaczające różniczkowanie po zmiennych przestrzennych x i y , gdyż wszystkie różniczkowania po zmiennej przestrzennej są tylko po zmiennej y . Symbol $e_{ij}(u)$ jest więc obecnie interpretowany jako

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right).$$

Ponadto, $\sigma_{ij}^s(y)$ oznacza pole mikronapężenia w szkielecie oraz $\varepsilon_{ij}^p(y)$ – „wmrożone” pole plastycznego mikroodkształcenia (traktowane jako dane).

Z zastosowaniem pojęcia samozrównoważonego napężenia residualnego, tensora makroodkształcenia E_{ij} i tensora plastycznego makroodkształcenia E_{ij}^p , powyższe zagadnienie lokalne może być przetransformowane do

$$\sigma_{ij}^s(y) - \sigma_{ij}^{\text{res}}(y) = [C_{ijkh} + C_{ijlm} e_{lm}(\xi^{kh})] [E_{kh} - E_{kh}^p], \quad \text{w } V_s \quad (4.101)$$

i ostatecznie do prawa lokalizacji napężenia

$$\sigma_{ij}^s(y) - \sigma_{ij}^{\text{res}}(y) = L_{ijkh}(y) \Sigma_{kh}^s, \quad \text{w } V_s, \quad (4.102)$$

gdzie Σ_{ij}^s – składowa tensora makronapężenia dla ośrodka suchego.

Ośrodek nasycony płynem

Dla ośrodka porowatego nasyconego płynem z ciśnieniem porowym p i z „wmrożonym” polem plastycznego mikroodkształcenia $\bar{\varepsilon}_{ij}^p(y)$, lokalne zagadnienie brzegowe ma postać

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,i}^s &= 0, & \text{w } V_s, \\ \sigma_{ij}^s N_i &= -p \delta_{ij} N_i, & \text{na } \Gamma, \\ \sigma_{ij}^s(y) &= C_{ijkh} [e_{kh}(\bar{u}) - \bar{\varepsilon}_{kh}^p], & \text{w } V_s, \\ \bar{u}_i(y) &= \bar{E}_{ij} y_j + \bar{u}_i^*(y), & \text{w } V_s, \\ f(\sigma_{ij}^s) &\leq 0, \quad \bar{u}_i^*(y) - Y \text{ periodyczne.} \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

W taki sam sposób, jak dla ośrodka suchego, otrzymujemy

$$\sigma_{ij}^s(y) - \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y) = [C_{ijkh} + C_{ijlm} e_{lm}(\xi^{kh})] [E_{kh} - E_{kh}^p] + C_{ijkh} e_{kh}(\eta) p. \quad (4.104)$$

Równanie (104) zostanie uproszczone dzięki zastosowaniu zasady makrojednorodności (4.52) i (4.56). Przepisując równanie (4.104) w postaci

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij}^s(y) - \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y) + p\delta_{ij} \\ &= \left[C_{ijkh} + C_{ijlm} e_{lm}(\xi^{kh}) \right] \left[E_{kh} - E_{kh}^p \right] + \left[C_{ijkh} e_{kh}(\eta) p + p\delta_{ij} \right], \end{aligned} \quad (4.105)$$

a następnie uśredniając je, otrzymujemy

$$\Sigma_{ij}^{eT} = C_{ijkh}^{\text{eff}} \left[E_{kh} - E_{kh}^p \right] + \left\langle h(y) \left(C_{ijkh} e_{kh}(\eta) p + p\delta_{ij} \right) \right\rangle. \quad (4.106)$$

Można je również przedstawić jako

$$S_{khij}^{\text{eff}} \Sigma_{ij}^{eT} = \left[E_{kh} - E_{kh}^p \right] + S_{khij}^{\text{eff}} \left\langle h(y) \left(C_{ijlm} e_{lm}(\eta) p + p\delta_{ij} \right) \right\rangle, \quad (4.107)$$

gdzie $S_{ijkh}^{\text{eff}} = \left\langle h(y) L_{lmij} S_{lmrs} L_{rskh} \right\rangle$.

Z warunku makrojednorodności (4.52), jak również własności symetrii tensora efektywnej podatności sprężystej ($S_{khij}^{\text{eff}} = S_{ijkh}^{\text{eff}}$), drugi człon po prawej stronie (4.107) może być przedstawiony jako

$$\begin{aligned} & \left\langle h(y) L_{lmij} S_{lmrs} L_{rskh} \right\rangle \left\langle h(y) \left(C_{ijtn} e_{tn}(\eta) p + p\delta_{ij} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle h(y) S_{ijrs} L_{rskh} \left(C_{ijtn} e_{tn}(\eta) p + p\delta_{ij} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.108)$$

gdź $S_{ijrs} L_{rskh}$ jest kinematycznie dopuszczalnym polem mikroodkształcenia, odpowiadającym makroskopowej wielkości S_{ijkh}^{eff} oraz $C_{ijtn} e_{tn}(\eta) p + p\delta_{ij}$ jest statycznie dopuszczalnym polem mikronapężenia. Prawa strona (4.108) może być również rozpisana do postaci

$$\begin{aligned} & \left\langle h(y) S_{ijrs} L_{rskh} \left(C_{ijtn} e_{tn}(\eta) p + p\delta_{ij} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle h(y) L_{rskh} S_{rsij} C_{ijtn} e_{tn}(\eta) \right\rangle p + \left\langle h(y) S_{ijrs} L_{rskh} \delta_{ij} \right\rangle p. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Po uwzględnieniu wzoru (4.49) łatwo stwierdzić, że

$$\left\langle h(y) L_{rskh} S_{rsij} C_{ijtn} e_{tn}(\eta) \right\rangle p = \left\langle h(y) L_{rskh} e_{rs}(\eta) \right\rangle p = 0, \quad (4.110)$$

co – wraz z zależnością (4.109) – transformuje równanie (4.107) do postaci

$$S_{khij}^{\text{eff}} \Sigma_{ij}^{eT} = E_{kh} - E_{kh}^p + \left\langle h(y) S_{ijrs} L_{rskh} \delta_{ij} \right\rangle p. \quad (4.111)$$

Równanie (4.111) implikuje

$$\Sigma_{ij}^{eT} = C_{ijkh}^{\text{eff}} (E_{kh} - E_{kh}^p + \langle h(y) S_{lmrs} L_{rskh} \delta_{lm} \rangle p). \quad (4.112)$$

Z porównania równań (4.106) i (4.112) otrzymuje się tożsamość

$$\left\langle \left[C_{ijkh} + C_{ijlm} e_{lm}(\xi^{kh}) \right] \langle h(y) S_{lmrs} L_{rskh} \delta_{lm} \rangle p - \left[C_{ijkh} e_{kh}(\eta) p + p \delta_{ij} \right] \right\rangle = 0. \quad (4.113)$$

Po oznaczeniu

$$P_{ij}(y) = \left[C_{ijkh} + C_{ijlm} e_{lm}(\xi^{kh}) \right] \langle h(y) S_{lmrs} L_{rskh} \delta_{lm} \rangle - \left[C_{ijkh} e_{kh}(\eta) + \delta_{ij} \right], \quad (4.114)$$

a następnie podstawieniu wzoru (4.114) do równania (4.105), wraz z równaniem (4.112), otrzymujemy ostateczną postać prawa lokalizacji naprężenia dla nasyconego ośrodka porowatego

$$\sigma_{ij}^s(y) - \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y) + p \delta_{ij} + P_{ij}(y) p = L_{ijkh}(y) \Sigma_{kh}^{eT}. \quad (4.115)$$

Tensor $P_{ij}(y)$ (pole tensorowe) może być zinterpretowany jako tensor polaryzacji ciśnienia, gdyż określa niejednorodny rozkład pola mikronaprężenia szkieletu wywołany jednorodnym ciśnieniem porowym. Należy podkreślić, że tensor L_{ijkh} jest tym samym tensorem lokalizacji naprężenia co dla ośrodka suchego.

Kończąc analizę prawa lokalizacji naprężenia, zbadajmy warunki, dla jakich $P_{ij}(y) = 0 \quad \forall y \in V_s$.

Po pierwsze, z definicji (4.114) łatwo dostrzec, że

$$P_{ij}(y) \in SA \text{ i } \langle h(y) P_{ij} \rangle = 0.$$

Po drugie –

$$P_{ij}(y) = 0 \quad \forall y \in V_s$$

implikuje

$$\langle h(y) P_{ij}(y) P_{ij}(y) \rangle = 0.$$

Z drugiej strony

$$\langle h(y) P_{ij} P_{ij} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle h(y) P_{ij} S_{ijkh} P_{kh} \rangle = 0. \quad (4.116)$$

Stosując warunek makrojednorodności (4.52) do kinematycznie dopuszczalnego pola odkształcenia $S_{ijkh}(P_{kh} + \delta_{kh})$ i statycznie dopuszczalnego pola naprężenia P_{ij} , otrzymujemy

$$\langle h(y) P_{ij} S_{ijkh} (P_{kh} + \delta_{kh}) \rangle = \langle h(y) P_{ij} \rangle \langle h(y) L_{klij} S_{khlm} (P_{lm} + \delta_{lm}) \rangle = 0, \quad (4.117)$$

wobec tego

$$\langle P_{ij} S_{ijkh} P_{kh} \rangle = - \langle P_{ij} S_{ijkh} \delta_{kh} \rangle. \quad (4.118)$$

Zależność (4.118) oznacza, że $P_{ij}(y) = 0 \quad \forall y \in V_s$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle P_{ij} S_{ijkh} \delta_{kh} \rangle = 0$. Spełnione to jest na ogół dla dowolnej geometrii mikrostruktury wtedy i tylko wtedy, gdy $S_{ijkh}(y) \delta_{kh}$ ma stałą wartość – niezależną od współrzędnej przestrzennej y . Na przykład dla szkieletu zbudowanego z izotropowych materiałów implikuje to tę samą wartość modułu odkształcenia objętościowego składników tworzących szkielet ośrodka porowatego.

W dalszej części niniejszego rozdziału ośrodek, dla którego tensor polaryzacji ciśnienia jest tożsamościowo równy zeru, będziemy nazywać – dla uproszczenia – ośrodkiem o mikrojednorodnym szkielecie. Dla takiego ośrodka prawo lokalizacji naprężenia ma postać

$$\sigma_{ij}^s(y) - \sigma_{ij}^{\text{res}}(y) + p \delta_{ij} = L_{ijkh}(y) \Sigma_{kh}^{eT}. \quad (4.119)$$

Dla ośrodka zbudowanego z wielu składników sprężystych, o różnych wartościach modułów odkształcenia objętościowego, spełnione jest $\langle P_{ij} S_{ijkh} P_{kh} \rangle > 0$ i prawo lokalizacji naprężenia ma niezerowy tensor polaryzacji ciśnienia.

4.2.2. Szkielet zbudowany z mikrojednorodnego materiału

Zgodnie z definicją (4.73) oraz prawami lokalizacji naprężenia (4.119) i (4.102), obszar sprężysty dla ośrodka porowatego suchego oraz nasyconego płynem definiują następujące zbiory:

➤ **ośrodek suchy**

$$\mathbf{E}_D(\{\sigma_{ij}^{\text{res}}\}) = \left\{ \Sigma_{ij}^s \mid f(L_{ijkh}(y) \Sigma_{kh}^s + \sigma_{ij}^{\text{res}}(y)) \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right\}, \quad (4.120)$$

➤ **ośrodek nasycony płynem**

$$\mathbf{E}_S(p, \{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\}) = \left\{ \Sigma_{ij}^{eT} \mid f(L_{ijkh}(y) \Sigma_{kh}^{eT} - p \delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y)) \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right\}. \quad (4.121)$$

Zbiór $\mathbf{E}_S(p, \{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\})$ oznacza, przy zadanym rozkładzie pola mikronaprężenia i wartości ciśnienia porowego, domknięty obszar sprężysty w przestrzeni naprężenia efektywnego według Terzagiego.

Jest oczywiste, że określenie obszaru sprężystego, w obu przypadkach, wymaga znajomości całego pola naprężenia residualnego $\{\sigma_{ij}^{\text{res}}(y)\}$ – dla ośrodka suchego oraz $\{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y)_s\}$ – dla ośrodka nasyconego płynem. W praktyce, tak jak stwierdzono już wcześniej, stosuje się modele przybliżone. Na przykład zakres sprężysty dla ośrodka suchego aproksymuje się najczęściej przez przyjęcie wzmocnienia plastycznego proporcjonalnego do wielkości makroskopowego odkształcenia plastycznego, tzn.

$$\mathbf{E}_D(E_{ij}^p) = \left\{ \Sigma_{ij}^s \mid F_D(\Sigma_{ij}^s; \mathcal{X}(E_{ij}^p)) \leq 0 \right\}, \quad (4.122)$$

gdzie $F_D(\Sigma_{ij}^s; \mathcal{X}(E_{ij}^p))$ określa makroskopowy warunek plastyczności.

W dalszej części koncepcję naprężenia efektywnego przeanalizowano dla dwóch klasycznych kryteriów plastyczności materiału tworzącego szkielet.

Kryterium Hubera–Misesa

Kryterium to nie zależy od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia. Wobec tego, wprowadzając tensor naprężenia zdefiniowany jako

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y) = \sigma_{ij}^s(y) + p\delta_{ij}, \quad (4.123)$$

otrzymujemy następujące tożsamości

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y) - \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y) = L_{ijkh} \Sigma_{kh}^{eT}, \quad (4.124a)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y) = C_{ijkh} (e_{kh}^{\text{eq}}(\tilde{u}) - \bar{\varepsilon}_{kh}^p), \quad \text{gdzie } e_{kh}^{\text{eq}}(\tilde{u}) = e_{kh}(\tilde{u}) + \frac{p\delta_{kh}}{3K_s}, \quad (4.124b)$$

$$(\forall p) \quad f(\sigma_{ij}^s) = f(\sigma_{ij}^{\text{eq}}), \quad (4.124c)$$

$$\frac{\partial f(\sigma_{ij}^s)}{\partial \sigma_{kh}^s} = \frac{\partial f(\sigma_{ij}^{\text{eq}})}{\partial \sigma_{kh}^{\text{eq}}}. \quad (4.124d)$$

Tożsamość (4.124c), łącznie z definicją (4.121), prowadzi do

$$\mathbf{E}_S(p, \{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\}) = \left\{ \Sigma_{ij}^{eT} \mid f(L_{ijkh}(y)\Sigma_{kh}^{eT} + \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y)) \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right\}. \quad (4.125)$$

Ponadto, po uwzględnieniu tożsamości (4.124), zagadnienie lokalne (4.103) można przedstawić w równoważnej postaci, tj.

$$\sigma_{ij,i}^{\text{eq}} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (4.126a)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}} N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.126b)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y) = C_{ijkh} [e_{kh}^{\text{eq}}(\bar{u}) - \bar{\varepsilon}_{kh}^p], \quad \text{w } V_s, \quad (4.126c)$$

$$\bar{u}_i(y) = E_{ij}^{\text{eq}} y_j + \bar{u}_i^*(y), \quad \text{gdzie } E_{ij}^{\text{eq}} = \bar{E}_{ij} + \frac{p\delta_{ij}}{3K_s}, \quad \text{w } V_s, \quad (4.126d)$$

$$f(\sigma_{ij}^{\text{eq}}) \leq 0, \quad \bar{u}_i^*(y) - Y \text{ periodyczne.}$$

Własność (4.124d), przy stowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia, implikuje dodatkowo

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p(y) = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}^{\text{eq}}} C_{klmn} \dot{e}_{mn}^{\text{eq}}(y)}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}^{\text{eq}}} C_{klmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}^{\text{eq}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^{\text{eq}}}} \Leftrightarrow f(\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y)) = 0 \wedge \dot{f}(\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y)) = 0, \\ 0 \quad \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \quad (4.127)$$

Układ równań (4.126)–(4.127) stanowi lokalne zagadnienie sprężysto-plastyczne, dla ośrodka nasyconego płynem, wyrażone przez wprowadzone nowe pola tensorowe. Odpowiednie zagadnienie lokalne dla ośrodka suchego określone jest dokładnie tym samym układem.

Rozważmy obecnie rozwiązanie powyższego zagadnienia, przyjmując jako stan początkowy ośrodka brak plastycznych mikroodkształceń oraz jako wymuszenie makroskopowe – historię makroskopowego odkształcenia i ciśnienia porowego cieczy. Dla uproszczenia zapisu historia $\tau \in (-\infty, t] \mapsto \{E_{ij}(\tau), p(\tau)\}$ będzie oznaczana przez $\{\bar{E}_{ij}(t), p(t)\}$. Niech para

$$\{\bar{E}_{ij}(t), p(t)\} \mapsto \{e_{ij}(\bar{u}(y, t)), \bar{\varepsilon}_{ij}^p(y, t)\} \quad (4.128)$$

charakteryzuje rozwiązanie lokalnego zagadnienia sprężysto-plastycznego dla ośrodka nasyconego płynem. Zgodnie z wyprowadzonym nowym opisem (4.126)–(4.127) powyższe rozwiązanie może więc być scharakteryzowane jako

$$\{E_{ij}^{\text{eq}}(t)\} \mapsto \{e_{ij}^{\text{eq}}(\tilde{u}(y, t)), \bar{\varepsilon}_{ij}^p(y, t)\} \quad (4.129)$$

lub

$$\{E_{ij}(t) = E_{ij}^{\text{eq}}(t)\} \mapsto \{e_{ij}(u(y, t)) = e_{ij}^{\text{eq}}(\tilde{u}(y, t)), \varepsilon_{ij}^p(y, t) = \bar{\varepsilon}_{ij}^p(y, t)\}. \quad (4.130)$$

Układ (4.130) jest rozwiązaniem lokalnego zagadnienia sprężysto-plastycznego sformułowanego dla ośrodka suchego. Oznacza to, że rozwiązanie dla ośrodka nasyconego płynem można otrzymać jako rozwiązanie dla ośrodka suchego przez „nałożenie” historii $\{E_{ij}(t)\} = \left\{ \bar{E}_{ij}(t) + \frac{p(t)}{3K_s} \delta_{ij} \right\}$. Dla tych odpowiadających sobie zagadnień

lokalnych, jako konsekwencja (4.61) i (4.64), otrzymujemy

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^s(y, t) = \sigma_{ij}^{\text{eq}}(y, t); \sigma_{ij}^{\text{res}}(y, t) = \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y, t) \quad \forall y \in V_s \\ E_{ij}^p(t) = \bar{E}_{ij}^p(t); \Sigma_{ij}^s(t) = \Sigma_{ij}^{eT}(t) \end{cases} \quad \text{dla} \quad E_{ij}(t) = \bar{E}_{ij}(t) + \frac{p(t)}{3K_s} \delta_{ij}, \quad (4.131)$$

gdzie zmienne po lewej stronie w (4.131) odpowiadają ośrodkowi suchemu, a zmienne po prawej stronie – ośrodkowi nasyconemu płynem.

Z porównania definicji obszarów sprężystych (4.120) i (4.122) otrzymujemy, dzięki (4.131), tożsamość

$$\mathbf{E}_S(p, \{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\}) = \mathbf{E}_D(\{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\}), \quad (4.132)$$

która dowodzi, że dla kryterium plastyczności Hubera–Misesa makroskopowy warunek plastyczności dla nasyconego ośrodka porowatego może być otrzymany przez zastosowanie tensora naprężenia efektywnego według Terzagiego.

Jest oczywiste, że powyższe stwierdzenie może być rozszerzone na wszystkie inne kryteria plastyczności (przyjęte na poziomie mikroskopowym), które nie zależą od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia, nawet jeśli prawo plastycznego płynięcia jest prawem niestowarzyszonym. W przypadku niestowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia potencjał plastyczny musi jednak mieć postać

$$\tilde{g}(\sigma_{ij}) = aI_1 + g(J_2, J_3), \quad (4.133)$$

gdzie:

- I_1 – pierwszy niezmiennik tensora naprężenia,
- J_2 i J_3 – drugi i trzeci niezmiennik dewiatora naprężenia,
- $g(J_2, J_3)$ – dowolna funkcja,
- a – parametr (może być $a = 0$).

Taka postać potencjału plastycznego umożliwia wyrażenie prędkości odkształcenia plastycznego przez wprowadzone nowe pole mikronaprężenia (4.123) i związek ma dokładnie taką samą postać, jak związek dla ośrodka suchego. Otrzymane zależności (4.131) są więc nadal ważne, a wobec tego również równanie (4.132).

Powróćmy do modeli przybliżonych. Zgodnie z otrzymanymi wynikami możemy stwierdzić, że

$$\mathbf{E}_S(p, \bar{E}_{ij}^p) = \left\{ \Sigma_{ij}^{eT} \mid F_D(\Sigma_{ij}^{eT}; \mathcal{X}(\bar{E}_{ij}^p)) \leq 0 \right\} \quad (4.134)$$

jest tak samo dobrą aproksymacją dla ośrodka nasyconego, jak (4.122) dla ośrodka suchego. Podobnie, zgodnie z (4.131), jeśli dla ośrodka suchego spełnione jest

$$\dot{E}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G(\Sigma_{kh}^s)}{\partial \Sigma_{ij}^s}, \quad (4.135)$$

to dla ośrodka nasyconego

$$\dot{\bar{E}}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G(\Sigma_{kh}^{eT})}{\partial \Sigma_{ij}^{eT}}. \quad (4.136)$$

Powyższe tożsamości jednoznacznie wskazują, że dla analizowanego materiału tensor naprężenia efektywnego według Terzagiego spełnia, w zakresie plastycznym, zarówno zasadę równoważności naprężenia, jak i odkształcenia.

Warunek Coulomba–Mohra

Kryterium plastyczności ma postać

$$f(\sigma_{ij}) = I_1 \sin \varphi + \frac{1}{2} \left[3(1 - \sin \varphi) \sin \theta + \sqrt{3}(3 + \sin \varphi) \cos \theta \right] \sqrt{J_2} - 3c \cos \varphi \leq 0, \quad (4.137)$$

gdzie:

φ – kąt tarcia wewnętrznego ($\varphi \geq 0$),
 c – spójność materiału szkieletu (założono³ $c > 0$),

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \text{ – kąt Lodego.}$$

Tym razem, w przeciwieństwie do poprzedniego przypadku, nie udało się autorowi udowodnić ważności koncepcji naprężenia efektywnego dla dowolnej historii obciążenia $\{\bar{E}_{ij}(t), p(t)\}$. Koncepcję naprężenia efektywnego można jednak potwierdzić dla warunków tzw. pełnego drenażu $\{\bar{E}_{ij}(t), p(t) = \text{const}\}$. W dalszej więc części tylko ten przypadek jest analizowany.

Podobnie jak poprzednio, wprowadzamy nowe pole mikronaprężenia, zdefiniowane

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}} = \frac{\sigma_{ij}^s + p\delta_{ij}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi / c}, \quad (4.138)$$

które spełnia tożsamość

$$f(\sigma_{ij}^s) = (1 + p \operatorname{tg} \varphi / c) f(\sigma_{ij}^{\text{eq}}). \quad (4.139)$$

Powyższa zależność implikuje

$$f(\sigma_{ij}^s) \leq 0 \Leftrightarrow f(\sigma_{ij}^{\text{eq}}) \leq 0; \quad \frac{\partial f(\sigma_{ij}^s)}{\partial \sigma_{kh}^s} = \frac{\partial f(\sigma_{ij}^{\text{eq}})}{\partial \sigma_{kh}^{\text{eq}}}. \quad (4.140)$$

Związki (4.140) umożliwiają przekształcenie zagadnienia (4.103) do postaci (4.126), z tym że równania (4.126c) i (4.126d) mają teraz postać

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y) = C_{ijkh} \left(e_{kh}^{\text{eq}}(\tilde{u}) - \frac{\varepsilon_{kh}^p}{1 + p \operatorname{tg} \varphi / c} \right), \quad \text{gdzie } e_{kh}^{\text{eq}}(\tilde{u}) = \frac{e_{kh}(\tilde{u}) + \frac{p\delta_{kh}}{3K_s}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi / c}, \quad (4.141a)$$

$$\tilde{u}_i(y) = E_{ij}^{\text{eq}} y_j + u_i^*(y), \quad \text{gdzie } E_{ij}^{\text{eq}} = \frac{\bar{E}_{ij} + \frac{p\delta_{ij}}{3K_s}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi / c}. \quad (4.141b)$$

³ Przedstawiona dalej analiza ma zastosowanie tylko dla materiałów ze spójnością, tzn. dla przypadku, gdy $c > 0$. Wartość c może być na ogół bardzo mała, musi jednak być wartością skończoną. Przypadek $c = 0$ analizowany będzie, w dalszej części niniejszego opracowania, z zastosowaniem otrzymanego rozwiązania dla $c > 0$ i żądaniem, aby $c \rightarrow 0$.

Ponadto, dla ustalonej wartości ciśnienia porowego ($p(t) = \text{const}$) oraz przy stowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia, możemy zapisać

$$\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^p(y)}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}^{\text{eq}}} C_{klmn} \dot{e}_{mn}^{\text{eq}}(y)}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}^{\text{eq}}} C_{klmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}^{\text{eq}}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^{\text{eq}}} & \Leftrightarrow f(\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y)) = 0 \wedge \dot{f}(\sigma_{ij}^{\text{eq}}(y)) = 0, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \quad (4.142)$$

Powtarzając dokładnie analizę, jak dla kryterium Hubera–Misesa, otrzymujemy

$$\{E_{ij}(t) = E_{ij}^{\text{eq}}(t)\} \mapsto \left\{ e_{ij}(u(y,t)) = e_{ij}^{\text{eq}}(\tilde{u}(y,t)), \varepsilon_{ij}^p(y,t) = \frac{\bar{\varepsilon}_{ij}^p(y,t)}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right\}, \quad (4.143)$$

co oznacza, że rozwiązanie zagadnienia lokalnego dla nasyconego ośrodka porowatego przy warunku tzw. pełnego drenażu może być otrzymane jako rozwiązanie zagadnienia dla ośrodka suchego przy wymuszeniu

$$E_{ij}(t) = \frac{\bar{E}_{ij} + \frac{p \delta_{ij}}{3K_s}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c}. \quad (4.144)$$

Oczywiście, w konsekwencji, otrzymujemy również

$$\sigma_{ij}^s(y,t) = \sigma_{ij}^{\text{eq}}(y,t); \quad \sigma_{ij}^{\text{res}}(y,t) = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y,t)}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \quad \forall y \in V_s, \quad (4.145a)$$

$$E_{ij}^p(t) = \frac{\bar{E}_{ij}^p(t)}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c}; \quad \Sigma_{ij}^s(t) = \Sigma_{ij}^{\text{eq}}(t), \quad (4.145b)$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, zmienne po lewej stronie równości odpowiadają ośrodkowi suchemu, a po prawej – ośrodkowi nasyconemu płynem.

Wprowadzone nowe pole tensorowe mikronaprężenia definiuje nowy tensor makroskopowy, tzn.

$$\Sigma_{ij}^{\text{eq}} = \frac{\Sigma_{ij}^{eT}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} = \frac{1}{\|V\|} \int_{V_s} \sigma_{ij}^{\text{eq}}(y) dy. \quad (4.146)$$

Wykorzystując powyższy tensor naprężenia, zakres sprężysty dla ośrodka nasyconego płynem można określić jako

$$\mathbf{E}^{\text{eq}}(p, \{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\}) = \left\{ \Sigma_{ij}^{\text{eq}} \left| f \left(L_{ijkh}(y) \Sigma_{kh}^{\text{eq}} + \frac{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y)}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right) \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right. \right\}. \quad (4.147)$$

Powyższa definicja, wraz z definicją (4.120) dla ośrodka suchego, oraz otrzymane zależności (4.145) pozwalają sformułować równość

$$\mathbf{E}^{\text{eq}}(p, \{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\}) = \mathbf{E}_D \left(\left\{ \frac{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right\} \right), \quad (4.148)$$

która oznacza, że wprowadzony tensor makroskopowego naprężenia (4.146) spełnia zasadę równoważności naprężenia. Zgodnie ze stosowaną terminologią jest to więc tensor naprężenia efektywnego.

Odnośnie modeli przybliżonych otrzymujemy

$$\mathbf{E}^{\text{eq}}(p, \bar{E}_{ij}^p) = \left\{ \Sigma_{ij}^{\text{eq}} \left| F_D \left(\Sigma_{ij}^{\text{eq}}; \chi \left(\frac{\bar{E}_{ij}^p}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right) \right) \leq 0 \right. \right\}, \quad (4.149)$$

$$\frac{\dot{\bar{E}}_{ij}^p}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} = \lambda \frac{\partial G(\Sigma_{kh}^{\text{eq}})}{\partial \Sigma_{ij}^{\text{eq}}}. \quad (4.150)$$

W przypadku kryterium Hubera–Misesa otrzymane związki (4.134) i (4.136) jednoznacznie dowodziły, że tensor naprężenia efektywnego według Terzagiego spełnia, w zakresie plastycznym, zarówno zasadę równoważności naprężenia, jak i odkształcenia. Otrzymane powyżej, dla kryterium Coulomba–Mohra, związki (4.149) i (4.150) wskazują, że wprowadzony tensor naprężenia efektywnego (4.146) nie spełnia równocześnie zasady równoważności naprężenia i odkształcenia. Może być „tylko” zastosowany do sformułowania związków plastyczności dla ośrodka nasyconego. Konieczna jest jednak znajomość aktualnej wartości ciśnienia porowego p (związek (4.150)). Ponadto, w wyniku analizy zależności (4.149) i (4.150) ujawnia się „pozorna” sprzeczność z wynikami przedstawionymi w podrozdziale 4.1. Tam udowodniono, że jeśli na poziomie „mikro” prawo plastycznego płynięcia jest prawem stowarzyszonym, to własność ta przechodzi również na poziom „makro”. Układ (4.149)–(4.150) określa jednak niestowarzyszoną plastyczność. Należy zaznaczyć, że udowodniona własność: *prawo stowarzyszone na poziomie mikro, wtedy również prawo stowarzyszone na poziomie makro* pokazana została w odniesieniu do tensora całkowitego naprężenia, a nie wprowadzonego powyżej tensora efektywnego.

Zgodnie z (4.99) musi być spełnione

$$\mathbf{E}_S^T(p, \bar{E}_{ij}^p) = \left\{ \Sigma_{ij}^T \left| \bar{F}(\Sigma_{ij}^T, p; \bar{\chi}(\bar{E}_{ij}^p)) \leq 0 \right. \right\}, \quad (4.151a)$$

$$\dot{\bar{E}}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \bar{F}(\Sigma_{kh}^T, p)}{\partial \Sigma_{ij}^T}, \quad (4.151b)$$

gdzie:

$\mathbf{E}_S^T(p, \bar{E}_{ij}^p)$ – domknięty obszar sprężysty w przestrzeni naprężeń całkowitych (przy zadanej wartości ciśnienia porowego),

$\bar{F}(\Sigma_{kh}^T, p^{(0)}) \leq 0$ – makroskopowy warunek plastyczności dla nasyconego ośrodka porowatego.

Otrzymane zależności (4.149) i (4.150), wraz ze związkami (4.151), prowadzą w wyniku do następującego opisu dla ośrodka porowatego nasyconego płynem

$$\mathbf{E}_S^T(p, \bar{E}_{ij}^p) = \left\{ \Sigma_{ij}^T \left| (1 + p \operatorname{tg} \varphi/c)^2 F_D \left(\frac{\Sigma_{ij}^T + p \delta_{ij}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c}; \chi \left(\frac{\bar{E}_{ij}^p}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right) \right) \leq 0 \right. \right\}, \quad (4.152a)$$

$$\dot{\bar{E}}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \left[(1 + p \operatorname{tg} \varphi/c)^2 F_D \left(\frac{\Sigma_{kh}^T + p \delta_{kh}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c}; \chi \left(\frac{\bar{E}_{kh}^p}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right) \right) \right]}{\partial \Sigma_{ij}^T}. \quad (4.152b)$$

Układ ten określa stowarzyszoną plastyczność. Ponadto, zależności (4.152) dowodzą, że dla analizowanego ośrodka możliwe jest, na podstawie znajomości opisu matematycznego plastyczności dla ośrodka suchego, zbudowanie odpowiedniego opisu matematycznego dla ośrodka nasyconego płynem.

4.2.3. Dowolny ośrodek porowaty

Podobnie jak dla ośrodka o szkieletcie mikrojednorodnym, definiujemy zakres sprężysty, tj.

➤ ośrodek nasycony płynem

$$\mathbf{E}_S(p, \{\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}\}) = \left\{ \Sigma_{ij}^{eT} \mid f(L_{ijkh}(y) \Sigma_{kh}^{eT} - p(P_{ij}(y) + \delta_{ij}) + \bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y)) \leq 0 \quad \forall y \in V_s \right\}. \quad (4.153)$$

W celu sprawdzenia ważności zasady równoważności naprężenia muszą być przeanalizowane dodatkowe własności tensora polaryzacji ciśnienia.

1. Po rozłożeniu tensora polaryzacji ciśnienia na część hydrostatyczną i dewiatorową, tzn.

$$P_{ij}(y) = P^S(y) \delta_{ij} + P_{ij}^D(y), \quad (4.154)$$

można udowodnić, że jeśli $P_{ij} \neq 0$, to $P_{ij}^D \neq 0$. Dowód przeprowadzamy przez zaprzeczenie, tzn. niech istnieje taki ośrodek porowaty, dla którego spełnione jest

$$\exists y \in V_s \Rightarrow P_{ij}(y) \neq 0 \wedge P_{ij}^D = 0 \quad \forall y \in V_s. \quad (4.155)$$

Skoro pole tensorowe $P_{ij}(y)$ jest polem samozrównoważonym i $P_{ij}^D(y) = 0$, wobec tego $P^S(y)$ musi być również polem samozrównoważonym. Oznacza to, że

$$P^S(y) = \text{const} \quad \forall y \in V_s. \quad (4.156)$$

Wiemy, że $\langle h(y) P_{ij}(y) \rangle = 0$, a wobec tego $P^S(y) = 0$ i $P_{ij}(y) = 0$. To oczywiście kończy dowód.

Własność $P_{ij} \neq 0$, wtedy $P_{ij}^D \neq 0$ oznacza, że w przypadku szkieletu zbudowanego z materiałów spełniających kryterium Hubera–Misesa, nawet przy zerowej wartości naprężenia efektywnego według Terzagiego, szkielet może się uplastyczniać. Jako przykład rozważmy nasycony ośrodek porowaty zbudowany z materiałów spełniających kryterium Hubera–Misesa z warunkiem początkowym $\bar{\sigma}_{ij}^{\text{res}}(y) = 0 \quad \forall y \in V_s$, tzn. brak pola plastycznego mikroodkształcenia (początkowa powierzchnia plastyczności). Zgodnie z definicją (4.153) możemy zapisać

$$\Sigma_{ij}^{eT} = 0 \in \mathbf{E}_S(p; \{0\}) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } p \sqrt{\frac{3}{2} P_{ij}^D P_{ij}^D} \leq \sigma_o(y) \quad \forall y \in V_s, \quad (4.157)$$

gdzie $\sigma_o(y)$ – wartości parametru kryterium Hubera–Misesa dla każdego składnika szkieletu ośrodka porowatego.

Proces uśrednienia daje warunek konieczny spełnienia powyższej zależności, tzn.

$$p \leq p^p = \frac{\langle h(y) \sigma_o(y) \rangle}{\left\langle h(y) \sqrt{\frac{3}{2} P_{ij}^D P_{ij}^D} \right\rangle}. \quad (4.158)$$

Wobec tego, jeśli $\langle \sigma_o(y) \rangle$ jest wartością skończoną, to p^p jest ograniczone. Skoro nierówność (4.158) jest warunkiem koniecznym, wobec tego dla $p > p^p$ w ośrodku wystąpią deformacje plastyczne.

Należy podkreślić, że podobne stwierdzenie dla materiału szkieletu spełniającego kryterium Coulomba–Mohra nie jest możliwe. Więcej informacji jest potrzebnych odnośnie własności tensora polaryzacji.

2. Zobaczymy, że nie istnieje niezerowy tensor współczynników A_{kh} , taki że

$$P_{ij}(y) = L_{ijkh}(y) A_{kh} \quad \forall y \in V_s. \quad (4.159)$$

Ponownie dowód przeprowadza się przez zaprzeczenie. Załóżmy, że taki tensor istnieje, wobec tego

$$0 = \langle P_{ij}(y) \rangle = \langle L_{ijkh}(y) \rangle A_{kh}. \quad (4.160)$$

Jednakże $\langle L_{ijkh} \rangle = I_{ijkh}$, a zatem $A_{ij} = 0$, co kończy dowód.

Powyższa własność implikuje liniową niezależność pól: $P_{ij}(y)p$ i $L_{ijkh}(y)\Sigma_{kh}$.

Ostatecznie, porównując definicje zakresów sprężystych dla ośrodka suchego i nasyconego płynem, możemy stwierdzić, że obecność tensora polaryzacji uniemożliwia skonstruowanie powierzchni plastyczności dla ośrodka nasyconego płynem według powierzchni plastyczności dla ośrodka suchego. Tym samym hipotetyczny tensor naprężenia efektywnego spełniający zasadę równoważności naprężenia nie istnieje.

Tensor naprężenia efektywnego według Terzagiego może być jednak użyty do skonstruowania *potencjalnie bezpiecznego* oszacowania granicznej powierzchni plastyczności. Zgodnie z definicją (4.75) każde statycznie dopuszczalne pole naprężenia spełniające lokalne kryterium plastyczności daje potencjalnie bezpieczne oszacowanie powierzchni granicznej nośności ośrodka porowatego. Jako pole mikronaprężenia można więc wykorzystać, dla zadanej geometrii mikrostruktury, pole mikronaprężenia dla ośrodka o szkielecie mikrojednorodnym (bez tensora polaryzacji ciśnienia). Na podstawie wyników otrzymanych dla ośrodka o szkielecie mikrojednorodnym można udowodnić, że

$$\left\{ \Sigma_{ij}^T \mid F_D^u(\Sigma_{ij}^T + p\delta_{ij}) \leq 0 \right\} \subset E_S^u(p) := \left\{ \Sigma_{ij}^T \mid F_S^u(\Sigma_{ij}^T, p) \leq 0 \right\}, \quad (4.161)$$

gdzie po lewej stronie tej relacji występuje warunek granicznej nośności dla ośrodka suchego, a po prawej – warunek granicznej nośności dla ośrodka nasyconego.

4.3. Przykłady funkcji plastyczności dla ośrodka nasyconego

Przedstawiona w poprzednim punkcie weryfikacja koncepcji naprężenia efektywnego wykazała, że w przypadku ośrodka porowatego, o szkielecie jednorodnym, możliwe jest skonstruowanie opisu matematycznego plastyczności dla ośrodka nasyconego wyłącznie ze znajomości opisu plastyczności dla ośrodka suchego.

Otrzymana konstrukcja (4.152) opisu plastyczności dla ośrodka nasyconego jest całkowicie nowa i na ogół „nie redukuje” się do klasycznej koncepcji naprężenia efektywnego według Terzagiego. Z tego względu praktyczne stosowanie związków (4.152) zilustrowano konkretnymi przykładami.

Niech $F_S(\Sigma_{ij}^T, p; E_{ij}^p) \leq 0$ oraz $F_D(\Sigma_{ij}^s; E_{ij}^p) \leq 0$ oznaczają, odpowiednio, makroskopowe kryterium plastyczności dla ośrodka nasyconego oraz makroskopowe kryterium plastyczności dla ośrodka suchego. Wtedy, jako bezpośrednia konsekwencja zależności (4.152) oraz (4.99b)

$$F_S(\Sigma_{ij}^T, p; E_{ij}^p) = (1 + p \operatorname{tg} \varphi/c)^2 F_D \left(\frac{\Sigma_{ij}^T + p \delta_{ij}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c}; \chi \left(\frac{E_{ij}^p}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right) \right) \leq 0, \quad (4.162a)$$

$$\dot{n}^p = \dot{E}_{ij}^p \left(\delta_{ij} - \frac{\Sigma_{ij}^T + p \delta_{ij}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \operatorname{tg} \varphi/c \right). \quad (4.162b)$$

Jak łatwo zauważyć, powyższe związki implikują, przy $\varphi = 0$, klasyczną koncepcję naprężenia efektywnego według Terzagiego.

Zgodnie z (4.162a), w celu sformułowania makroskopowego kryterium plastyczności dla ośrodka nasyconego płynem konieczna jest znajomość makroskopowego kryterium plastyczności dla ośrodka suchego.

Rozpatrujemy najpierw, najpowszechniej stosowane – zarówno do gruntów, jak i do skał – kryterium plastyczności Coulomba–Mohra, tj.

$$F_D(\Sigma_{ij}^s) = I_1 \sin \varphi^{\text{eff}} + \frac{1}{2} \left[3(1 - \sin \varphi^{\text{eff}}) \sin \theta + \sqrt{3} (3 + \sin \varphi^{\text{eff}}) \cos \theta \right] \sqrt{J_2} - 3 c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} \leq 0, \quad (4.163)$$

gdzie parametry oznaczono jako efektywne w celu wyróżnienia ich od parametrów lokalnych (mikroskopowych).

Ponieważ funkcja

$$F_D(\Sigma_{ij}^s) + 3 c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} \quad (4.164)$$

jest funkcją jednorodną stopnia jeden tensora naprężenia, wobec tego

$$\begin{aligned} & (1 + p \operatorname{tg} \varphi/c)^2 \left(F_D \left(\frac{\Sigma_{ij}^T + p \delta_{ij}}{1 + p \operatorname{tg} \varphi/c} \right) + 3 c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} \right) \\ & = (1 + p \operatorname{tg} \varphi/c) \left(F_D(\Sigma_{ij}^T + p \delta_{ij}) + 3 c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} \right). \end{aligned} \quad (4.165)$$

Zastosowanie schematu (4.162a), z uwzględnieniem (4.165), prowadzi więc do

$$\begin{aligned} F_S(\Sigma_{ij}^T, p) & = (1 + p \operatorname{tg} \varphi/c) \\ & \times \left[F_D(\Sigma_{ij}^T + p \delta_{ij}) + 3 c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} - (1 + p \operatorname{tg} \varphi/c) 3 c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} \right] \leq 0, \end{aligned} \quad (4.166)$$

co implikuje następujący warunek plastyczności dla ośrodka nasyconego

$$I_1^{eT} \sin \varphi^{\text{eff}} + \frac{1}{2} \left[3(1 - \sin \varphi^{\text{eff}}) \sin \theta + \sqrt{3}(3 + \sin \varphi^{\text{eff}}) \cos \theta \right] \sqrt{J_2^{eT}} - 3c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} (1 + p \operatorname{tg} \varphi/c) \leq 0, \quad (4.167)$$

gdzie

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3^{eT}}{(J_2^{eT})^{3/2}} \right)$$

oraz wszystkie niezmienniki są niezmiennikami tensora naprężenia wg Terzagiego. Po zdefiniowaniu

$$b = 1 - \frac{c^{\text{eff}}}{c} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi^{\text{eff}}} \quad (4.168a)$$

oraz

$$\Sigma_{ij}^b = \Sigma_{ij}^T + bp \delta_{ij} = \Sigma_{ij}^{eT} - p \frac{c^{\text{eff}}}{c} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi^{\text{eff}}} \delta_{ij} \quad (4.168b)$$

warunek (4.167) może być równoważnie wyrażony przez niezmienniki tensora Σ_{ij}^b , tj.

$$I_1^b \sin \varphi^{\text{eff}} + \frac{1}{2} \left[3(1 - \sin \varphi^{\text{eff}}) \sin \theta + \sqrt{3}(3 + \sin \varphi^{\text{eff}}) \cos \theta \right] \sqrt{J_2^b} - 3c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}} \leq 0. \quad (4.169)$$

Dla podkreślenia, w powyższym wyrażeniu wszystkie niezmienniki to niezmienniki tensora Σ_{ij}^b .

Tensor Σ_{ij}^b spełnia więc zasadę równoważności naprężenia. Kryterium plastyczności dla ośrodka suchego wyrażone przez ten tensor stało się kryterium plastyczności dla ośrodka nasyconego płynem. Wart podkreślenia jest również fakt, że postać (4.168b) otrzymanego naprężenia efektywnego jest zgodna z omówioną we wstępie do niniejszego rozdziału postacią naprężenia efektywnego (4.4) postulowaną przez Coussy'ego.

Podajmy możliwy zakres wartości współczynnika materiałowego b . Pole mikronaprężenia musi spełniać lokalne kryterium Coulomba–Mohra w każdym punkcie szkieletu ośrodka. Wobec tego musi również spełniać następującą, prostszą, nierówność

$$\forall y \in V_s \quad \sigma_{ij}^s(y) \delta_{ij} \sin \varphi \leq 3c \cos \varphi. \quad (4.170)$$

Uśrednienie tego warunku, po objętości pojedynczej komórki periodyczności, w przypadku, gdy ośrodek jest suchy, implikuje

$$I_1 \sin \varphi = \langle \sigma_{ij}^s(y) \delta_{ij} \rangle \sin \varphi \leq 3c(1-n) \cos \varphi, \quad (4.171)$$

gdzie I_1 jest pierwszym niezmiennikiem tensora makronaprężenia.

Porównanie (4.171) z (4.163) prowadzi do nierówności

$$\frac{3c^{\text{eff}} \cos \varphi^{\text{eff}}}{\sin \varphi^{\text{eff}}} \leq \frac{3c(1-n) \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (4.172)$$

lub – po przekształceniu –

$$\frac{c^{\text{eff}}}{c} \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \varphi^{\text{eff}}} \leq (1-n). \quad (4.173)$$

Uwzględniając to, że wyrażenie po lewej stronie nierówności (4.173) jest nieujemne, oraz że występuje ona w definicji współczynnika b (4.168a), otrzymujemy

$$n \leq b \leq 1. \quad (4.174)$$

Osiągalność przez współczynnik b dolnego ograniczenia (4.174) potwierdzają między innymi wyniki badań laboratoryjnych przedstawione przez Pietruszczaka i Pande'a w pracy [119]. W wyniku badań przeprowadzonych na nasyconych wodą ceglach stwierdzili oni, że warunek plastyczności nasyconych cegieł wyraża się przez tensor naprężenia efektywnego Σ_{ij}^b , przy czym $b = n$. Tym samym wyniki te stanowią również laboratoryjną weryfikację, proponowanej w niniejszym opracowaniu, metody konstrukcji opisu plastyczności dla nasyconych ośrodków porowatych.

Osiągalność przez współczynnik b górnego ograniczenia (4.174) udowodnimy, rozważając ośrodek granulowany. W tym przypadku struktura ośrodka porowatego to kolekcja ziaren (rys. 4.2). Dodatkowo zakładamy, podobnie jak w przypadku rzeczywistych ośrodków gruntowych, że makroskopowe deformacje plastyczne tego ośrodka są wynikiem jedynie poślizgów międzyziarnowych. Innymi słowy, same ziarna są traktowane jako nieskończenie wytrzymałe. Makroskopowe kryterium plastyczności tego ośrodka porowatego jest konsekwencją lokalnego warunku plastyczności, który określa dopuszczalne wartości sił kontaktowych $T^{\alpha/\beta}$ (siła kontaktowa między ziarnami A_α i A_β (rys. 4.2)).

Wydzielając myślowo w ziarnie A_α jego część δA_α , ograniczoną powierzchnią S oraz powierzchnią ∂A_1 (rys. 4.2), warunek równowagi dla objętości δA_α można zapisać w postaci

$$-T_j^{\alpha/\beta} + \int_{\delta A_1} p \delta_{ij} N_i dA - \int_S \sigma_{ij}^s N_i dA = 0 \quad (4.175)$$

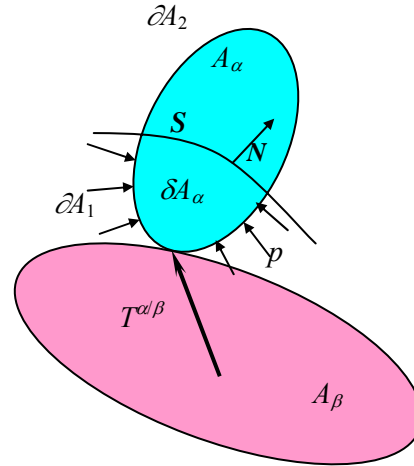
lub równoważnie

$$-T_j^{\alpha/\beta} + \int_{\delta A_1 + S} p \delta_{ij} N_i dA - \int_S p \delta_{ij} N_i dA - \int_S \sigma_{ij}^s N_i dA = 0, \quad (4.176)$$

gdzie:

N_i – składowa wektora normalnego do powierzchni ograniczającej objętość δA_α ,

$\partial A_1 + \partial A_2$ – powierzchnia ograniczająca ziarno A_α (rys. 4.2),
 $\partial A_1 + S$ – powierzchnia ograniczająca element δA_α .



Rys. 4.2. Siły kontaktowe w ośrodku granulowanym
 Fig. 4.2. Contact forces in granular material

Druga całka po lewej stronie równania (4.176) jest tożsamościowo równa zero, jako całka po zamkniętej powierzchni z wielkości stałej (przyjęto, że powierzchnia kontaktu międzyziarnowego jest miary zero). Wobec tego

$$-T_j^{\alpha/\beta} - \int_S (\sigma_{ij}^s + p\delta_{ij}) N_i dA = 0. \quad (4.177)$$

Definiując teraz, podobnie jak przy analizie kryterium Hubera–Misesa przedstawionej w punkcie 4.2.2, tensor

$$\sigma_{ij}^{\text{eq}} = \sigma_{ij}^s + p\delta_{ij}, \quad (4.178)$$

uzyskujemy

$$-T_j^{\alpha/\beta} = \int_S \sigma_{ij}^{\text{eq}} N_i dA. \quad (4.179)$$

Przyjmując lokalny warunek plastyczności (np. Coulomba–Mohra) dla kontaktu α/β jako $f(T^{\alpha/\beta}) \leq 0$, równanie (4.179) pozwala wyrazić ten warunek w postaci:

$$f\left(\int_S \sigma_{ij}^{\text{eq}} N_i dA\right) \leq 0. \text{ Powtarzając teraz analogiczny tok rozumowania jak przy weryfikacji}$$

koncepcji naprężenia efektywnego dla ciała Hubera–Misesa łatwo stwierdzić, że tensor naprężenia efektywnego według Terzagiego spełnia, dla tego ośrodka, zasadę równoważności naprężenia. To oczywiście oznacza $b = 1$. Wartość ta jest więc wynikiem niekończenie małej wartości (miary zero) powierzchni kontaktu w ośrodku granulowanym.

Przedstawione wartości współczynnika b dla dwóch, skrajnie różnych typów ośrodka porowatego, tj. cegły oraz ośrodka granulowanego, jasno dowodzą, że wartość tego współczynnika zależy od mikrostruktury ośrodka. Podobne stwierdzenia otrzymane zostały w rozdziale 3., w przypadku wartości współczynnika naprężenia efektywnego α stosowanego w opisie porospężystości. Dla ośrodków gruntowych udowodniono tam, że $\alpha = 1$.

Powyższe stwierdzenia pozwalają obecnie przeanalizować przypadek, gdy $c = 0$. Załóżmy, że ośrodek porowaty charakteryzują: pewna ustalona mikrostruktura oraz parametry wytrzymałościowe: $c = 0$ i $\operatorname{tg} \varphi > 0$. Rozważamy zbiór ośrodków porównawczych charakteryzujących się dokładnie tą samą mikrostrukturą co ośrodek pierwotny, tą samą wartością współczynnika tarcia φ oraz zmniejszającą się wartością kohezji c_k , ale jednocześnie $c_k > 0$. Przyjmujemy: $c_1 > c_2 > \dots > c_k > 0$. Zgodnie z (4.173) spełnione są

$$\forall c_k \quad 0 \leq \frac{c_k^{\text{eff}}}{c_k} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_k^{\text{eff}}} \leq 1 - n, \quad (4.180)$$

gdzie: c_k^{eff} i φ_k^{eff} – odpowiednio – makroskopowa spójność oraz kąt tarcia wewnętrznego dla ośrodka porównawczego ze spójnością lokalną równą c_k .

Po przejściu do granicy $c_k \rightarrow 0$, powyższe nierówności implikują

$$0 \leq \lim_{c_k \rightarrow 0} \frac{c_k^{\text{eff}}}{c_k} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_k^{\text{eff}}} \leq 1 - n, \quad (4.181)$$

co oznacza, że odpowiadająca tej granicy wartość stałej b jest wartością skończoną. Makroskopowa funkcja plastyczności dla tego ośrodka, gdy jest on nasycony płynem, wyraża się więc przez (4.169). Efektywna wartość spójności jest, oczywiście, tożsamościowo równa zero.

W podobny sposób konstruuje się opis dla ośrodka nasyconego, gdy ośrodek suchy jest opisany, makroskopowo, eliptycznym warunkiem plastyczności (kryterium przedstawione jest szczegółowo w pracy [82, s. 335–344]), tzn.

➤ dla ośrodka suchego

$$F_D(\Sigma_{ij}^s) = \frac{(I_1 + A)^2}{C^2} + \frac{J_2}{B^2} - 1 \leq 0, \quad (4.182)$$

wtedy, po zastosowaniu (4.162a), otrzymujemy dla ośrodka nasyconego płynem

$$F_S(\Sigma_{ij}^{eT}, p) = \frac{(I_1^{eT} + A(1 + p \operatorname{tg} \varphi / c))^2}{C^2} + \frac{J_2^{eT}}{B^2} - (1 + p \operatorname{tg} \varphi / c)^2 \leq 0 \quad (4.183)$$

lub równoważnie

$$F_S(\Sigma_{ij}^{eT}, p) = \frac{(I_1^{eT} + A(1 + p \operatorname{tg} \varphi / c))^2}{[C(1 + p \operatorname{tg} \varphi / c)]^2} + \frac{J_2^{eT}}{[B(1 + p \operatorname{tg} \varphi / c)]^2} - 1 \leq 0. \quad (4.184)$$

Stałe A, B, C są skalarnymi funkcjami wskaźnika porowatości.

Po wprowadzeniu nowej stałej materiałowej $a = \frac{A}{c} \operatorname{tg} \varphi$ warunek (4.184) można przedstawić w następującej równoważnej postaci

$$F_S(\Sigma_{ij}^{eT}, p) = \frac{(I_1^{eT} + A(1 + ap))^2}{\left[C\left(1 + p \frac{a}{A}\right)\right]^2} + \frac{J_2^{eT}}{\left[B\left(1 + p \frac{a}{A}\right)\right]^2} - 1 \leq 0. \quad (4.185)$$

Podobnie więc jak w przypadku makroskopowego kryterium Coulomba–Mohra, warunek plastyczności dla ośrodka nasyconego zawiera nową stałą materiałową. Tym razem jednak nie można zdefiniować tensora naprężenia efektywnego w postaci (4.168b). Warunek plastyczności jest wyrażony przez dwie niezależne „siły termodynamiczne”, tj. tensor naprężenia efektywnego według Terzagiego oraz ciśnienie porowe.

Obecnie autor niniejszej monografii niewiele jest w stanie powiedzieć o dopuszczalnym zakresie wartości stałej a w terminach odpowiednich parametrów mikrostruktury, jak chociażby wartość porowatości. Prace są obecnie w toku. Jedynej informacji o roli mikrostruktury na wartość stałej a dostarcza analizowany wcześniej ośrodek granulowany. Dla tego typu ośrodka, jak udowodniono powyżej, warunek plastyczności musi się dać zapisać tylko z wykorzystaniem tensora naprężenia efektywnego według Terzagiego, co implikuje $a = 0$. Uogólniając zatem, dla ośrodka porowatego, w którym powierzchnie kontaktu są miary zero, stała materiałowa a ma wartość również równą zero.

W podobny sposób, tzn. z wykorzystaniem wprowadzonych w niniejszym opracowaniu zależności (4.162), mogą być konstruowane dla innych makroskopowych kryteriów plastyczności dla ośrodka suchego odpowiadające im kryteria plastyczności dla ośrodka nasyconego płynem.

4.4. Podsumowanie

Dzięki technice homogenizacji wprowadzono ogólną strukturę opisu matematycznego deformacji plastycznych nasyconego ośrodka porowatego (zależności (4.95)–(4.99)). Wykazano, że deformacje plastyczne nasyconego ośrodka porowatego są „rządzone” przez dwie niezależne „siły termodynamiczne”, tj. tensor naprężenia

całkowitego oraz ciśnienie porowe. Otrzymany opis jest zgodny z zaproponowaną na drodze fenomenologicznej przez Coussy'ego ogólną teorią poroplastyczności [47]. Należy jednak podkreślić, że makroskopowa zasada maksymalnej plastycznej dyssypacji dla ośrodka nasyconego cieczą została otrzymana, a nie postulowana, jak przez Coussy'ego [47].

Zastosowanie metody homogenizacji umożliwiło ponadto, nieosiągalną na drodze rozważań fenomenologicznych, weryfikację koncepcji naprężenia efektywnego. Rozważono dwa przypadki: szkielet ośrodka porowatego zbudowany z jednorodnego materiału (brak tensora polaryzacji ciśnienia) oraz szkielet ośrodka porowatego zbudowany z wielu materiałów cechujących się różnymi wartościami stałych sprężystości (niezerowy tensor polaryzacji ciśnienia).

Dla ośrodka porowatego zbudowanego z jednorodnego szkieletu zaproponowano oryginalną konstrukcję opisu plastyczności dla ośrodka nasyconego na podstawie znajomości wyłącznie opisu plastyczności dla ośrodka suchego. Przedstawiona metoda redukuje się do koncepcji naprężenia efektywnego według Terzagiego wtedy, gdy:

- lokalny warunek plastyczności materiału szkieletu nie zależy od kąta tarcia wewnętrznego, przy równocześnie dowolnej mikrostrukturze ośrodka porowatego,
- lokalny warunek plastyczności ma niezerową wartość kąta tarcia wewnętrznego, powierzchnia kontaktów międzyziarnowych w ośrodku jest jednak miary zero.

W przypadku ośrodka porowatego zbudowanego z niejednorodnego szkieletu w prawie lokalizacji naprężenia występuje tensor polaryzacji ciśnienia. Obecność tego tensora uniemożliwia konstrukcję opisu plastyczności w oparciu o opis plastyczności dla ośrodka suchego. Tensor naprężenia efektywnego według Terzagiego może być wtedy zastosowany do skonstruowania potencjalnie bezpiecznego oszacowania nośności granicznej nasyconego ośrodka porowatego.

5. Sorpcja i pęcznienie sorpcyjne w nasyconych ośrodkach porowatych

Konsekwencją kontaktu dwóch faz objętościowych bardzo często jest zjawisko nazywane sorpcją [166]. Polega ono na pochłanianiu jednej fazy przez drugą. Ośrodek pochłaniający jest nazywany sorbentem, pochłaniany natomiast – sorbatem.

W przypadku kontaktu ciała stałego z płynem, charakter tego zjawiska zależy od budowy i struktury sorbentu. Wyróżnia się dwa skrajne przypadki [158]:

➤ ciało stałe charakteryzuje się płaską, nieporowatą powierzchnią; proces ten zachodzi na powierzchni sorbentu i polega na wytworzeniu autonomicznej fazy adsorpcyjnej,

➤ ciało stałe ma strukturę mikroporowatą o rozmiarach porów porównywalnych ze średnicami molekuł; pochłanianie gazu zachodzi w całej objętości ciała stałego, a proces ten jest nazywany absorpcją.

Procesem odwrotnym do procesu sorpcji jest zjawisko desorpcji – sorbat jest uwalniany z sorbentu.

W przypadku procesów sorpcyjnych w układzie ciało stałe–gaz podstawowymi czynnikami, nie licząc struktury i budowy sorbentu, mającymi wpływ na wielkość sorpcji są temperatura i ciśnienie gazu [166]. Dla stałych wartości temperatury sporządza się krzywe równowag sorpcyjnych, określające ilość zdeponowanego gazu w jednostce objętości ciała sorbującego, w zależności od wartości ciśnienia gazu. Charakterystyki te są nazywane izotermami sorpcji. Oznaczając przez C masę zasorbowanego gazu w jednostkowej objętości sorbentu oraz przez p ciśnienie gazu wolnego, izotermę sorpcji (oznaczaną przez $F(p)$) definiuje się równaniem

$$F(p) - C = 0. \quad (5.1)$$

Związek (5.1) to warunek równowagowy, tzn. jest on spełniony, jeśli składniki układu pozostają w równowadze termodynamicznej. W przeciwnym razie, tzn. gdy w układzie brak jest równowagi termodynamicznej, występuje zjawisko wymiany masy między jego składnikami. Można wyróżnić dwa przypadki:

- $F(p) - C > 0$ – w układzie występuje proces sorpcji,
- $F(p) - C < 0$ – w układzie występuje proces desorpcji.

Badania sorpcji w układach ciało stałe–gaz doprowadziły do stworzenia wielu modeli matematycznych związku $F(p)$ (obszerny przegląd tych równań jest zawarty w pracy [166]). Równania te można podzielić na trzy grupy:

- związki opisujące proces adsorpcji,
- związki opisujące zjawisko objętościowego zapełniania mikroporów,
- związki opisujące proces wnikania cząstek gazu w fazę elastyczną ciała stałego.

W naturalnych układach porowatych proces sorpcji to sumaryczny efekt: adsorpcji, zjawiska objętościowego zapełniania mikroporów oraz wnikania cząstek gazu w fazę

elastyczną ciała stałego. Eksperyment sorpcyjny dostarcza więc danych o sumarycznych efektach oddziaływań wszystkich wymienionych typów. Udział poszczególnych oddziaływań zależy od rodzaju składników tworzących układ sorpcyjny. Model matematyczny izotermy sorpcji należy zatem wybierać dla określonego układu wielofazowego.

Drugim procesem charakterystycznym układów wielofazowych jest zjawisko pęcznienia, tj. przyrost objętości ciała stałego podczas nasycania go płynem. Istnieje wiele przykładów układów wielofazowych, w których zjawisko to ma szczególnie wyraźne znaczenie, np.: nasycaniu wodą gruntów ilowych towarzyszy przyrost objętości nawet około 20% [10], [11], wnikaniu pod ciśnieniem wodoru do stali towarzyszy znaczna deformacja stali – cienkie blaszki, do których wnika wodór, wyginają się, cienkie płytki doznają zwichrzenia [117], nasycaniu węgla kamiennego dwutlenkiem węgla towarzyszy, przy ciśnieniu około 2 MPa, przyrost objętości około 2% [49].

Podobnie jak w przypadku procesu sorpcji, charakter tego zjawiska zależy, oczywiście, przede wszystkim od składników układu wielofazowego. Podczas nasycania montmorylonitu wodą obserwuje się przyrost objętości około 20% i więcej, podczas gdy przy nasycaniu, ponownie wodą, innego minerału ilowego – kaolinitu – obserwuje się „tylko” około 2% przyrostu objętości. W tym przypadku, to znaczy dwóch minerałów ilowych, przyczyną tak różnych wartości zmian objętościowych podczas nasycania ich wodą jest ich struktura atomowa [82]: montmorylonit ma budowę symetryczną, kaolinit natomiast – nie. Poszczególne blaszki montmorylonitu mają więc tendencję do wzajemnego odpychania się, a dostająca się między nie woda może je rozsunąć dość daleko.

Inny przykład to pęcznienie w układzie węgiel kamienny–dwutlenek węgla. Tym razem eksperyment laboratoryjny [49] wskazuje na bardzo dużą korelację między wartością pęcznienia a ilością zasorbowanego przez ciało stałe gazu. W tym więc przypadku zjawisko pęcznienia nazywane jest również pęcznieniem sorpcyjnym.

Ta krótka charakterystyka możliwych mechanizmów, zarówno procesu sorpcji, jak i pęcznienia, występujących w układach wielofazowych, wskazuje, że opis matematyczny tych procesów musi mieć charakter „opisu dedykowanego”, tzn. musi być konstruowany dla konkretnego układu wielofazowego. Ciało stałe o niewielkich wymiarach przestrzeni porowej determinować będzie inny mechanizm i naturę procesu sorpcji niż ciało charakteryzujące się dużymi porami. Ważnym elementem układu wielofazowego jest również ich wzajemna aktywność chemiczna.

W przypadku gruntów ilowych częściowo nasyconych wodą często stosowanym (cytowanym) opisem matematycznym mechanicznego zachowania się tego układu, uwzględniającym zjawisko pęcznienia, jest model zaproponowany przez Alonso et al., w pracy [9]. Sami autorzy, po upływie około 5 lat, stwierdzają jednak, że model ten nie opisuje, nawet jakościowo, głównych charakterystyk procesu pęcznienia [10]. Do stwierdzeń tych doprowadził ich własny eksperyment pęcznienia, sztucznie preparowanego, gruntu ilowego nasycanego wodą. Jak piszą Alonso et al., o naturze procesu pęcznienia decydują: jakościowo różne procesy transportu cieczy oraz jakościowo różne zachowanie się samej cieczy dla różnych wymiarów przestrzeni porowej [10].

Opisy matematyczne mechanicznego zachowania się układu: węgiel kamienny–dwutlenek węgla zaproponowano między innymi w pracach [24] i [64]. W pracy [64] do opisu procesu pęcznienia w układach wielofazowych korzystano ze zmodyfikowanego równania teorii porospężystości Biota. Mankamentem tego opisu jest fakt, że zmodyfikowano jedynie równania transportu masy, pozostawiając równocześnie klasyczną formę równań konstytutywnych. W modelu Biota, jak to przedstawiono w rozdziale 3., oddziaływanie płyn–ciało stałe ma charakter „czysto mechaniczny”, nie uwzględnia zatem procesu sorpcji.

Przy nasyceniu próbki gazem o ciśnieniu p zmiany dylatometryczne ośrodka dwufazowego określa równanie (w przypadku ośrodka izotropowego)

$$-p = K_o \varepsilon_v - \alpha p, \quad (5.2)$$

w którym:

ε_v – zmiana objętości ciała stałego,

K_o – efektywny moduł odkształcenia objętościowego,

α – stała materiałowa teorii Biota.

Zgodnie z nierównościami (3.89), stała α ma wartości z zakresu $[n, 1]$ (n – porowatość ośrodka), a więc związek (5.2) implikuje $\varepsilon_v \leq 0$. Oznacza to, że przy nasycaniu ciała stałego gazem pod ciśnieniem p musi być obserwowany skurcz, a nie pęcznienie.

Bauer i Łydźba zaproponowali konstrukcję modelu opartą na założeniu, że pęcznienie jest wynikiem procesu sorpcji gazu przez ciało stałe. Nie uwzględnili jednak, traktując jako pomijalne, wpływu oddziaływania mechanicznego gazu wolnego na ciało stałe [24].

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie modelu matematycznego zachowania się układu: ciało stałe–gaz, który będzie uwzględniał zarówno oddziaływanie mechaniczne składników ośrodka, jak również zachodzące w tym ośrodku procesy sorpcji. Zgodnie więc z terminologią, stosowaną już wcześniej, analizowany będzie układ, w którym występuje proces pęcznienia sorpcyjnego.

Konstrukcja opisu matematycznego w układach sorpcyjnych, jak już wcześniej sygnalizowano, musi mieć charakter opisu „dedykowanego”. Z tego względu, w dalszej części niniejszego rozdziału przyjmuje się, że analizowany jest ośrodek węgiel kamienny–dwutlenek węgla.

Ograniczenie się do układu sorpcyjnego węgiel–dwutlenek węgla spowodowane jest głównie faktem, że w latach 80. i 90. realizowany był w Polsce problem resortowy, oznaczony symbolem M.R.I.26, noszący tytuł *Zjawiska fizyczne w górotworze jako ośrodku wielofazowym*. Dzięki badaniom zrealizowanym w ramach tego projektu uzyskano wiele wyników doświadczalnych i teoretycznych [49], [64], [93], [94] odnośnie natury równoczesnych procesów sorpcji i pęcznienia, zachodzących w ośrodku węglowo-gazowym. Opisano i sklasyfikowano strukturę porową węgla, determinującą różne mechanizmy deponowania gazu [89]. Wyróżniono, między innymi, następujące zakresy porów:

- obszar sorpcji sieciowej, w którym cząsteczki gazu wnikają w fazę elastyczną węgla, a proces przypomina zjawisko rozpuszczania sorbatu w sorbencie,
- obszar mikroporów, w którym obserwuje się zjawisko ich objętościowego zapełniania cząsteczkami sorbatu,
- obszar mezo- i makroporów, w którym przebiega zjawisko adsorpcji.

Taka struktura przestrzeni porowej pozwala dość przejrzysto ustalić zakres obowiązywania różnych rodzajów procesu transportu gazu w przestrzeni porowej, a tym samym – dość precyzyjnie sformułować lokalny opis matematyczny procesów zachodzących w tym ośrodku.

W podrozdziale 5.1 przedstawiono: opis lokalny procesów fizycznych zachodzących w analizowanym układzie, proces homogenizacji (w zarysie) oraz ostateczny opis makroskopowy, a w podrozdziale 5.2 – identyfikację stałych materiałowych proponowanego opisu makroskopowego.

5.1. Poszukiwanie opisu makroskopowego – proces homogenizacji

Omówioną wcześniej strukturę porową ośrodka, w procesie formułowania mikroskopowego opisu matematycznego, upraszcza się i zakłada, że w ośrodku występują tylko dwa zakresy porów, tj.: mikropory, w których występuje gaz związany (zasorbowany) oraz makropory, w których występuje gaz wolny. Obszar ciała stałego wraz z mikroporami traktuje się jako mikroporowate ciało stałe. Nie wyróżnia się explicite punktów zajmowanych przez mikropory oraz ciało stałe. Innymi słowy, do tego obszaru stosuje się opis kontynuacyjny, tzn. punkty przestrzeni są równocześnie zajmowane przez współistniejące dwie fazy: ciało stałe i gaz związany w mikroporach. Nie identyfikuje się również, w jakim stanie skupienia gaz występuje w mikroporach. Przyjmuje się natomiast, że w przypadku równowagi termodynamicznej w układzie, ilość gazu w mikroporach jest określona izotermą sorpcji. Zakłada się ponadto, że proces transportu gazu związanego jest rządzony przez prawo dyfuzji molekularnej Ficka. Oddziaływanie wzajemne: związany w mikroporach gaz–ciało stałe modeluje się równaniami niesprężonej teorii dyfuzosprężystości [117] (teoria pierwotnie zaproponowana do opisu układu dwufazowego stal–wodór, czyli mikroporowatego ciała stałego i gazu). Gaz w makroporach traktuje się jako barotropową ciecz lepłą Newtona.

5.1.1. Opis lokalny

Zgodnie z uczynionymi powyżej założeniami, opis lokalny tworzą:

1. Mikroporowate ciało stałe wraz z zasorbowanym gazem:

- równania równowagi

$$\sigma_{ij,i}^s = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.3)$$

- równania konstytutywne niesprężonej teorii dyfuzosprężystości

$$\sigma_{ij}^s = a_{ijkh} e_{kh}(u) - \gamma_c C \delta_{ij}, \quad \text{w } V_s, \quad (5.4)$$

- równania zachowania masy dla gazu związanego w mikroporach

$$\frac{\partial C}{\partial t} - DC_{,ii} = 0, \quad \text{w } V_s. \quad (5.5)$$

2. Gaz w makroporach:

- równania równowagi

$$\sigma_{ij,i}^l = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (5.6)$$

- równania konstytutywne barotropowej lepkiej cieczy Newtona

$$\sigma_{ij}^l = -p \delta_{ij} + \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \text{w } V_l, \quad (5.7)$$

- równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (5.8)$$

- prawo gazu doskonałego dla procesu izotermicznego

$$\rho = \frac{\rho_a}{p_a} p, \quad \text{w } V_l, \quad (5.9)$$

gdzie:

- v_i – składowa wektora prędkości gazu wolnego,
- p – ciśnienie gazu wolnego,
- ρ – gęstość gazu wolnego,
- C – masa zasorbowanego gazu (gazu związanego w mikroporach) w jednostce objętości ciała stałego,
- u_i – składowa pola przemieszczenia ciała stałego,
- σ_{ij}^s i σ_{ij}^l – składowe tensora naprężenia ciała stałego oraz gazu wolnego,
- a_{ijkh} – składowa tensora sztywności sprężystej ciała stałego (zastosowano inne oznaczenie niż w poprzednich rozdziałach, gdyż tym razem przez C oznaczono koncentrację gazu związanego),
- D – współczynnik dyfuzji,
- $e_{ij}(u)$ – składowa tensora odkształcenia ciała stałego,
- γ_c – moduł odkształcenia sorpcyjnego ciała stałego,
- λ i μ – lepkości gazu wolnego,
- ρ_a – gęstość gazu przy ciśnieniu atmosferycznym,
- p_a – wartość ciśnienia atmosferycznego,
- V_s – objętość zajmowana przez mikroporowate ciało stałe w pojedynczej komórce periodyczności,
- V_l – objętość zajmowana przez wypełnione gazem wolnym makropory.

Podany układ równań uzupełniają warunki brzegowe na granicy rozdziału faz Γ , tj. na powierzchni rozgraniczającej gaz wolny i mikroporowate ciało stałe:

- ciągłość składowej normalnej strumienia gazu

$$[\rho(v_i - \dot{u}_i) + DC_i] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.10)$$

- równanie izotermy sorpcji

$$C = F(p), \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.11)$$

- warunek adhezji

$$(v_i - \dot{u}_i)t_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.12)$$

- ciągłość wektora naprężenia

$$[\sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}^l] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (5.13)$$

Dodatkowo zakłada się, że przed wystąpieniem procesów sorpcji lub desorpcji układ jest w równowadze termodynamicznej.

W równaniach (5.10)–(5.13) zastosowano oznaczenia:

N_i – składowa normalnej N do powierzchni Γ ,

t_i – składowa wektora stycznego do powierzchni Γ .

5.1.2. Skalowanie opisu mikroskopowego

Zgodnie z omówionym w rozdziale drugim matematycznym sformułowaniem metody homogenizacji, opisu makroskopowego poszukuje się przez żądanie, aby $\varepsilon \rightarrow 0$. Powoduje to, w przypadku procesów przepływu, konieczność skalowania opisu mikroskopowego. Polega ono na sukcesywnym, wraz z aktualną wartością skali jednokładności, pomniejszaniu wartości lepkości płynu. W przypadku barotropowej cieczy implikuje to: $\mu \rightarrow \varepsilon^2 \mu$ oraz $\lambda \rightarrow \varepsilon^2 \lambda$.

Analizowany układ sorpcyjny charakteryzuje jeszcze jeden proces transportu, tj. proces dyfuzji gazu związanego. Obecność tego procesu powoduje, że opis lokalny musi być dodatkowo przeskalowywany. Należy rozpatrzyć dwa przypadki:

1. Mikrostruktura ośrodka oraz jego własności dyfuzyjne indukują równie szybkie zmiany koncentracji gazu związanego, jak występujące w makroporach zmiany ciśnienia gazu wolnego.

2. Mikrostruktura ośrodka oraz jego własności dyfuzyjne powodują, że proces dyfuzji jest zdecydowanie wolniejszy od procesu filtracji; oznacza to, że zmianom ciśnienia gazu w przestrzeni porowej nie towarzyszą równie szybkie zmiany koncentracji gazu w mikroporach.

Wyróżnione dwa przypadki jasno wskazują, że analizowany układ sorpcyjny cechują dwa charakterystyczne czasy procesów transportu, tj. czas filtracji – T_f oraz czas

dyfuzji – T_D . Wyróżniony przypadek 1. implikuje¹ $T_D/T_f = O(1)$, natomiast przypadek 2. to $T_D/T_f = O(\varepsilon^{-1})$.

Przy transformacji pojedynczej komórki periodyczności w jednokładności o skali ε proporcja tych czasów nie może ulegać zmianie. Niech T_f^ε oraz T_D^ε oznaczają charakterystyczny czas filtracji oraz charakterystyczny czas dyfuzji dla aktualnej wartości skali jednokładności ε . Wtedy, zgodnie z prawem dyfuzji Ficka, charakterystyczny czas dyfuzji można oszacować jako

$$V_D^\varepsilon C = O\left(D \frac{C}{\varepsilon l}\right) \Rightarrow T_D^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon l}{V_D^\varepsilon}\right) = O\left(\frac{\varepsilon^2 l^2}{D}\right), \quad (5.14)$$

natomiast charakterystyczny czas filtracji

$$T_f^\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon l}{V_f^\varepsilon}\right), \quad (5.15)$$

gdzie:

l – rzeczywisty wymiar (przed jednokładnością) pojedynczej komórki periodyczności,

V_D^ε i V_f^ε – średnie prędkości: dyfuzji oraz filtracji dla aktualnej skali jednokładności ε .

Na podstawie zależności (5.14) oraz (5.15)

$$\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O\left(V_f^\varepsilon l \frac{\varepsilon}{D}\right). \quad (5.16)$$

Średnia prędkość filtracji V_f^ε nie może zależeć od wartości skali jednokładności ε i zapewnia to, dokonane wcześniej, skalowanie lepkości cieczy. Stałą proporcję czasów charakterystycznych utrzymuje się przez skalowanie wartości współczynnika dyfuzji. Dla wyróżnionych dwóch przypadków otrzymujemy:

przypadek 1. $\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O(1)$

$$\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O\left(V_f^\varepsilon l \frac{\varepsilon}{D}\right) = O(1) \Rightarrow D \rightarrow \varepsilon D, \quad (5.17)$$

¹ Symbol $O()$ to tzw. symbol Landaua; stosowany jest w znaczeniu „jest wielkością rzędu”, czyli np. $T_D/T_f = O(1)$ oznacza, że iloraz czasów charakterystycznych: dyfuzji i filtracji jest wielkością rzędu 1, natomiast $T_D/T_f = O(\varepsilon^{-1})$ – że są wielkością rzędu ε^{-1} .

przypadek 2. $\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O(\varepsilon^{-1})$

$$\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O\left(V_f^\varepsilon l \frac{\varepsilon}{D}\right) = O(\varepsilon^{-1}) \Rightarrow D \rightarrow \varepsilon^2 D. \quad (5.18)$$

Skalowanie to „dotyka”, wraz ze skalowaniem lepkości cieczy, tylko równań: (5.5), (5.7) oraz (5.10) opisu mikroskopowego. Dla wyróżnionych przypadków mają one postać:

przypadek 1. $\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O(1)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \varepsilon D C_{,ii} = 0, \quad (5.5a)$$

$$\sigma_{ij}^l = -p \delta_{ij} + \varepsilon^2 \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \varepsilon^2 \mu (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (5.7a)$$

$$[\rho (v_i - \dot{u}_i) + \varepsilon D C_{,i}] N_i = 0; \quad (5.10a)$$

przypadek 2. $\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O(\varepsilon^{-1})$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \varepsilon^2 D C_{,ii} = 0, \quad (5.5b)$$

$$\sigma_{ij}^l = -p \delta_{ij} + \varepsilon^2 \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \varepsilon^2 \mu (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad (5.7b)$$

$$[\rho (v_i - \dot{u}_i) + \varepsilon^2 D C_{,i}] N_i = 0. \quad (5.10b)$$

Pełny opis mikroskopowy, po przeskalowaniu oraz podstawieniu równań konstytutywnych (5.4) i (5.7) odpowiednio do (5.3), (5.6) oraz (5.13), ma postać:

➤ **mikroporowate ciało stałe wraz z zasorbowanym gazem:**
równania równowagi

$$(a_{ijkh} e_{kh}(u) - \gamma_c C \delta_{ij})_{,i} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.19)$$

równania zachowania masy dla gazu związanego w mikroporach

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \varepsilon^m D C_{,ii} = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.20)$$

➤ **gaz w makroporach:**

równania równowagi

$$\varepsilon^2 \mu v_{i,jj} + \varepsilon^2 (\lambda + \mu) v_{j,ji} - p_{,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (5.21)$$

równanie zachowania masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (5.22)$$

prawo gazu doskonałego dla procesu izotermicznego

$$\rho = \frac{\rho_a}{p_a} p, \quad \text{w } V_l. \quad (5.23)$$

➤ **warunki brzegowe na granicy rozdziału faz Γ :**

ciągłość składowej normalnej strumienia gazu

$$\left[\rho (v_i - \dot{u}_i) + \varepsilon^m DC_{,i} \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.24)$$

równanie izotermy sorpcji

$$C = F(p), \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.25)$$

warunek adhezji

$$(v_i - \dot{u}_i) t_i = 0 \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.26)$$

ciągłość wektora naprężenia

$$\left[a_{ijkh} e_{kh}(u) - \gamma_c C \delta_{ij} + p \delta_{ij} + \varepsilon^2 \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \varepsilon^2 \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (5.27)$$

W równaniach tych podstawienie $m = 1$ odpowiada przypadkowi 1., natomiast podstawienie $m = 2$ – przypadkowi 2.

5.1.3. Proces homogenizacji

Po wprowadzeniu do opisu mikroskopowego (5.19)–(5.27) rozwinięcia asymptotycznego dla v , p , ρ , u i C oraz uwzględnieniu prawa zmiany operatora pochodnej przestrzennej (2.82) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] + \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) - \gamma_c C^{(0)} \delta_{ij} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) - \gamma_c C^{(0)} \delta_{ij} \right] \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(1)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(2)}) - \gamma_c C^{(1)} \delta_{ij} \right] \right\} + \dots = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \frac{\partial C^{(0)}}{\partial t} - \varepsilon^{m-2} D \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial C^{(0)}}{\partial y_i} \right) \\ & - \varepsilon^{m-1} D \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial C^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right\} + \dots = 0, \quad \text{w } V_s, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} & - \varepsilon^{-1} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial y_i} \\ & + \varepsilon^0 \left[- \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial y_j} \right) \right] + \dots = 0, \quad \text{w } V_l, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial (\rho^{(0)} v_i^{(0)})}{\partial y_i} + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^{(0)} v_i^{(0)})}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho^{(0)} v_i^{(1)})}{\partial y_i} + \frac{\partial (\rho^{(1)} v_i^{(0)})}{\partial y_i} \right] + \dots = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (5.31)$$

$$\varepsilon^0 \left(\rho^{(0)} - \frac{\rho_a}{p_a} p^{(0)} \right) + \varepsilon^1 \left(\rho^{(1)} - \frac{\rho_a}{p_a} p^{(1)} \right) + \dots = 0, \quad \text{w } V_l, \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon^0 \rho^{(0)} (v_i^{(0)} - \dot{u}_i^{(0)}) + \varepsilon^1 \left\{ \rho^{(0)} (v_i^{(1)} - \dot{u}_i^{(1)}) + \rho^{(1)} (v_i^{(0)} - \dot{u}_i^{(0)}) \right\} \right] N_i \\ & + \left[\varepsilon^{m-1} D \frac{\partial C^{(0)}}{\partial y_i} + \varepsilon^m \left(D \frac{\partial C^{(0)}}{\partial x_i} + D \frac{\partial C^{(1)}}{\partial y_i} \right) \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$C^{(0)} = F(p^{(0)}), \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.34)$$

$$\varepsilon^0 (v_i^{(0)} - \dot{u}_i^{(0)}) t_i + \varepsilon^1 (v_i^{(1)} - \dot{u}_i^{(1)}) t_i + \dots = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \left[a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(0)}) \right] N_i + \varepsilon^0 \left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) - \gamma_c C^{(0)} \delta_{ij} + p^{(0)} \delta_{ij} \right] N_i \\ & + \varepsilon^1 \left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(1)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(2)}) - \gamma_c C^{(1)} \delta_{ij} + p^{(1)} \delta_{ij} - \lambda \frac{\partial v_k^{(0)}}{\partial y_k} \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial y_i} \right) \right] \\ & \times N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Większość lokalnych zagadnień brzegowych, dla odpowiednich potęg parametru ε , ma podobną strukturę jak lokalne zagadnienia brzegowe rozważane w analizie teorii porospężystości Biota. Występuje w nich, oczywiście, dodatkowy człon, związany z koncentracją gazu związanego. W celu więc nie powtarzania wszystkich przekształceń, bardzo podobnych do tych w rozdziale 3., przedstawia się tylko ostateczne rozwiązania kolejnych zagadnień lokalnych.

Wszystkie elementy przejścia „mikro–makro” analizowanego w niniejszym rozdziale zagadnienia, z wykorzystaniem metody asymptotycznej homogenizacji, omówione są szczegółowo w pracach autora [97], [99] i [100]. Proces przepływu gazu przez nieodkształcalny ośrodek porowaty, ale z uwięzionym w mikroporach gazem, rozważany jest również we wspólnej pracy autora niniejszej monografii z J.L. Auriaultem [98].

Przypadek 1. $\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O(1)$, $m = 1$

Układy równań – (5.28) przy ε^{-2} z (5.36) przy ε^{-1} , (5.29) przy ε^{-1} , (5.30) przy ε^{-1} , (5.32) przy ε^0 oraz (5.34) – prowadzą do następujących stwierdzeń:

$$u^{(0)} = u^{(0)}(x, t), \quad (5.37a)$$

$$C^{(0)} = C^{(0)}(x, t) = F(p^{(0)}), \quad (5.37b)$$

$$p^{(0)} = p^{(0)}(x, t), \quad (5.37c)$$

$$\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(x, t). \quad (5.37d)$$

Następne zagadnienie brzegowe to równania: (5.30) przy ε^0 , (5.31) przy ε^{-1} , (5.33) oraz (5.35) przy ε^0 . Po uwzględnieniu otrzymanych już wcześniej rozwiązań – (5.37a) i (5.37b) zagadnienie to redukuje się do **III zagadnienia brzegowego**, analizowanego w rozdziale 3. Prowadzi ono, po uśrednieniu, do klasycznej formy prawa Darcy’ego filtracji płynu

$$\langle v_i^{(0)} \rangle - n u_i^{(0)} = -K_{ij} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_j}, \quad (5.38)$$

gdzie:

n – porowatość ośrodka rozumiana jako udział frakcyjny makroporów w całej objętości ośrodka,

K_{ij} – efektywny tensor filtracji.

Kolejne zagadnienie brzegowe jest konsekwencją równań: (5.28) przy ε^{-1} i (5.36) przy ε^0 (skorzystano również z układu (5.37))

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) - \gamma_c F(p^{(0)}) \delta_{ij} \right] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.39a)$$

$$\left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) - \gamma_c F(p^{(0)}) \delta_{ij} + p^{(0)} \delta_{ij} \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (5.39b)$$

Układ (5.39) jest liniowy, więc

$$u_i^{(1)}(x, y) = \xi_i^{jk}(y) e_{jk}^x(u^{(0)}) - \eta_i(y) p^{(0)} + \eta_i \gamma_c F(p^{(0)}) + \bar{u}_i(x), \quad (5.40)$$

gdzie pola: $\xi_i^{jk}(y)$ i $\eta_i(y)$ to dokładnie rozwiązania tych samych zagadnień brzegowych, co analizowane w rozdziale 3., tj. (3.63) oraz (3.64). Funkcja $\bar{u}_i(x)$ jest dowolną funkcją współrzędnej x . Ta nieokreśloność jest wynikiem warunków brzegowych, tj. okresowości pola przemieszczenia i naprężenia, zagadnienie można zatem rozwiązać z dokładnością co do stałej.

Przy formułowaniu równania (5.40) założono dodatkowo, że szkielet mikroporowaty ma stałą, niezależną od współrzędnej y , wartość modułu γ_c . Założenie to pozwoliło zastosować rozwiązanie $\eta_i(y)$ do określenia wpływu $F(p^{(0)})$ na rozwiązanie $u_i^{(1)}(x, y)$.

Po zdefiniowaniu, podobnie jak w rozdziale 3., tensor naprężenia całkowitego dla rozważanego układu, tj.

$$\sigma_{ij}^T = h(y) \sigma_{ij}^{s(0)} + (1 - h(y)) p^{(0)} \delta_{ij}, \quad \text{gdzie } h(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y \in V_s, \\ 0 & \text{dla } y \notin V_s, \end{cases} \quad (5.41)$$

równania: (5.28) przy ε^0 , (5.36) przy ε^1 oraz (5.40) prowadzą, po uśrednieniu, do makroskopowych równań równowagi oraz związków konstytutywnych dla ośrodka wielofazowego, tj.

$$\frac{\partial \langle \sigma_{ij}^T \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (5.42)$$

$$\langle \sigma_{ij}^T \rangle = A_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) - \alpha_{ij} p^{(0)} - \gamma_{ij} F(p^{(0)}), \quad (5.43)$$

gdzie parametry efektywne są zdefiniowane zależnościami:

$$A_{ijkh} = (1 - n) a_{ijkh} + a_{ijlm} \langle e_{lm}^y(\xi^{kh}) \rangle, \quad (5.44)$$

$$\alpha_{ij} = n \delta_{ij} + a_{ijkh} \langle e_{kh}^y(\eta) \rangle,$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_c (1 - n) \delta_{ij} - \gamma_c a_{ijkh} \langle e_{kh}^y(\eta) \rangle.$$

Makroskopowe równanie zachowania masy dla gazu wolnego w makroporach otrzymuje się przez bezpośrednie uśrednienie równania (5.31) przy ε^0 z równoczesnym uwzględnieniem warunku (5.33) przy ε^1 . Ostateczna jego postać to

$$n \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho^{(0)} \left(\langle v_i^{(0)} \rangle - n \dot{u}_i^{(0)} \right) \right] + (1 - n) \frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial t} + \rho^{(0)} \left[\alpha_{ij} \dot{e}_{ij}^x(\dot{u}^{(0)}) - \beta \dot{p}^{(0)} + \gamma_c \beta \dot{F}(p^{(0)}) \right] = 0. \quad (5.45)$$

Współczynnik β to dokładnie ta sama stała materiałowa co w teorii porosprężystości Biota. Szczegółowo jest analizowana w rozdziale 3.

Opis makroskopowy analizowanego przypadku tworzą równania: (5.38), (5.42), (5.43) oraz (5.45).

Przypadek 2.: $\frac{T_D^\varepsilon}{T_f^\varepsilon} = O(\varepsilon^{-1}), m = 2$

Podobnie jak dla $m = 1$, opis makroskopowy otrzymuje się przez analizę kolejnych zagadnień brzegowych. W większości mają one dokładnie taką samą postać jak dla $m = 1$. Pierwsza różnica pojawia się w równaniu ciągłości masy gazu zasorbowanego, tj. równaniu (5.29) przy ε^0 . Obecnie, wraz z warunkiem (5.34), tworzą one następujące zagadnienie brzegowe

$$\frac{\partial C^{(0)}}{\partial t} - D \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial C^{(0)}}{\partial y_i} \right) = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.46)$$

$$C^{(0)} = F(p^{(0)}) \quad \text{na } \Gamma. \quad (5.47)$$

Powyższe zagadnienie rozwiązuje się przez następujące podstawienie

$$U(x, y, t) = C^{(0)}(x, y, t) - F(p^{(0)}), \quad (5.48)$$

które, po dokonaniu na układzie (5.46)–(5.47) transformacji Laplace'a, prowadzi do następującego zagadnienia brzegowego w przestrzeni transformat

$$s\mathcal{L}(U) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D \frac{\partial \mathcal{L}(U)}{\partial y_i} \right) = -\mathcal{L} \left(\frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial t} \right), \quad \text{w } V_s, \quad (5.49)$$

$$\mathcal{L}(U) = 0, \quad \text{na } \Gamma, \quad (5.50)$$

gdzie:

s – dowolna liczba zespolona,
 \mathcal{L} – transformata Laplace'a, tj.

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt.$$

Równanie (5.49) jest ponownie liniowe, a więc rozwiązanie w przestrzeni transformat ma postać

$$\mathcal{L}(U) = -\mathcal{L}(G(y, t)) \mathcal{L} \left(\frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial t} \right), \quad (5.51)$$

gdzie funkcja $G(y, t)$ jest rozwiązaniem następującego zagadnienia lokalnego

$$s\mathcal{L}(G) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D \frac{\partial \mathcal{L}(G)}{\partial y_i} \right) = 1, \quad \text{w } V_s, \quad (5.51a)$$

$$\mathcal{L}(G) = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (5.51b)$$

Na podstawie twierdzenia o splocie otrzymujemy

$$U(x, y, t) = - \int_0^t \frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial \tau} G(y, t - \tau) d\tau, \quad (5.52)$$

co wraz z (5.48) implikuje

$$C^{(0)}(x, y, t) = F(p^{(0)}) - \int_0^t \frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial t} G(y, t - \tau) d\tau. \quad (5.53)$$

Dokonując, po objętości pojedynczej komórki periodyczności, uśrednienia równania (5.53), otrzymujemy ostatecznie

$$\langle C^{(0)}(x, y, t) \rangle = (1 - n) F(p^{(0)}) - \int_0^t \frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial t} \langle G(y, t - \tau) \rangle d\tau. \quad (5.54)$$

Równanie (5.54) wskazuje, że aktualna średnia wartość koncentracji gazu zasorbowanego zależy od historii pierwszej pochodnej po czasie z izotermy sorpcji. Funkcja $\langle G(y, t - \tau) \rangle$ jest nazywana funkcją pamięci.

Nowa postać równania (5.53) modyfikuje również, w porównaniu do poprzedniego przypadku, następane zagadnienie lokalne, które obecnie tworzą równania: (5.28) przy ε^{-1} i (5.36) przy ε^0 (zastosowano również (5.53))

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) - \gamma_c \left\{ F(p^{(0)}) - \int_0^t \frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial \tau} G(y, t - \tau) d\tau \right\} \delta_{ij} \right] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.55)$$

$$\left[a_{ijkh} e_{kh}^x(u^{(0)}) + a_{ijkh} e_{kh}^y(u^{(1)}) - \gamma_c F(p^{(0)}) \delta_{ij} + p^{(0)} \delta_{ij} \right] N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (5.56)$$

Rozwiązanie tego układu ma postać podobną jak (5.40), jednak z dodatkowym elementem, wynikającym z obecności wyrażenia całkowego, tj.

$$u_i^{(1)}(x, y) = \xi_i^{jk}(y) e_{jk}^x(u^{(0)}) - \eta_i(y) p^{(0)} + \eta_i \gamma_c F(p^{(0)}) + \gamma_c \int_0^t \frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial \tau} w_i(y, t - \tau) d\tau + \bar{u}_i(x), \quad \text{w } V_s, \quad (5.57)$$

gdzie pole wektorowe $w_i(y, t)$ jest rozwiązaniem, w przestrzeni transformat, następującego zagadnienia lokalnego

$$\frac{\partial}{\partial y_i} [a_{ijlm} e_{lmy}(\mathcal{L}[w(y, t)]) + \mathcal{L}[G(y, t)]\delta_{ij}] = 0, \quad \text{w } V_s, \quad (5.58)$$

$$a_{ijlm} e_{lmy}(\mathcal{L}[w(y, t)])N_i = 0, \quad \text{na } \Gamma. \quad (5.59)$$

Równanie równowagi dla ośrodka wielofazowego oraz związki konstytutywne są wynikiem równań: (5.28) przy ε^0 , (5.36) przy ε^1 oraz (5.57), które po uśrednieniu prowadzą do

$$\frac{\partial \langle \sigma_{ij}^T \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (5.60)$$

$$\langle \sigma_{ij}^T \rangle = A_{ijkh} e_{kh}^x(u) - \alpha_{ij} p^{(0)} - \gamma_{ij} F(p^{(0)}) + \int_0^t \frac{\partial F(p^{(0)})}{\partial \tau} m_{ij}(t - \tau) d\tau, \quad (5.61)$$

gdzie funkcja pamięci $m_{ij}(t)$ dana jest zależnością

$$m_{ij}(t) = \gamma_c \langle G(t) \rangle \delta_{ij} + \gamma_c a_{ijkh} \langle e_{kh}^y(w(t)) \rangle. \quad (5.62)$$

Ostatnie prawo makroskopowe to prawo zachowania masy dla gazu wolnego w makroporach. Jest ono wynikiem uśrednienia równania (5.31) przy ε^0 z jednoczesnym uwzględnieniem warunku brzegowego (5.33) przy ε^1 . Ponownie pomijamy wszystkie przekształcenia i podajemy jego ostateczną postać

$$\begin{aligned} & n \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho^{(0)} \left(\langle v_i^{(0)} \rangle - n \dot{u}_i^{(0)} \right) \right] + \frac{\partial \langle C^{(0)} \rangle}{\partial t} \\ & + \rho^{(0)} \left(\alpha_{ij} \dot{e}_{ij}^x(u) - \beta \dot{p} + \gamma_c \beta \dot{F}(p) + \int_0^t \frac{\partial F(p(\tau))}{\partial \tau} \beta_m(t - \tau) d\tau \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.63)$$

gdzie $\beta_m(t)$ to dodatkowa funkcja pamięci, zdefiniowana jako

$$\beta_m(t) = -\gamma_c \langle e_{ii}^y(w) \rangle \quad (5.64)$$

oraz $\langle C^{(0)} \rangle$ określa zależność (5.54).

W analizie przypadku 2. ograniczono się tylko do przedstawienia związków, które różnią się od odpowiadających im związków makroskopowych otrzymanych dla przypadku 1. Prawo filtracji Darcy'ego obowiązuje, oczywiście, również dla przypadku 2.

5.1.4. Zbiórca układ równań opisu makroskopowego

Zbiórca układ równań opisu makroskopowego tworzą (indeksy oznaczające pierwsze człony rozwinięć asymptotycznych zostały pominięte):

Przypadek 2.

równania konstytutywne

$$\langle \sigma_{ij}^T \rangle = A_{ijkh} e_{khx}(u) - \alpha_{ij} p - \gamma_{ij} F(p) + \int_0^t \frac{\partial F(p(\tau))}{\partial \tau} m_{ij}(t-\tau) d\tau, \quad (5.65)$$

równania równowagi dla ośrodka wielofazowego

$$\frac{\partial \langle \sigma_{ij}^T \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (5.66)$$

prawo filtracji dla gazu wolnego

$$\langle v_i \rangle - n \dot{u}_i = -K_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (5.67)$$

równanie zachowania masy dla filtrującego gazu

$$\begin{aligned} n \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho (\langle v_i \rangle - n \dot{u}_i)] + \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial t} \\ + \rho \left(\alpha_{ij} \dot{e}_{ijx}(u) - \beta \dot{p} + \gamma_c \beta \dot{F}(p) + \int_0^t \frac{\partial F(p)}{\partial \tau} \beta_m(t-\tau) d\tau \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.68)$$

przy czym

$$\langle C \rangle = (1-n)F(p) - \int_0^t \frac{\partial F(p(\tau))}{\partial \tau} \langle G(t-\tau) \rangle d\tau. \quad (5.69)$$

Przypadek 1. Opis matematyczny ponownie tworzą równania (5.65)–(5.69), dodatkowo jednak: $m_{ij}(t) = 0$, $\beta_m(t) = 0$ oraz $\langle G(t) \rangle = 0$.

Opis matematyczny przypadku 1. można zinterpretować jako mieszane równania teorii dyfuzosprężystości i teorii porosprężystości Biota. Oddziaływanie gazu związanego na gaz wolny jest określone w równaniu zachowania masy przez człon źródłowy, tzn. pochodną czasową koncentracji gazu związanego oraz, dodatkowo, przez oddziaływanie mechaniczne, będące wynikiem sorpcyjnej rozszerzalności się mikroporowatego ciała stałego. Oddziaływanie mechaniczne gazu wolnego na ciało stałe jest klasycznym oddziaływaniem proponowanym w teorii porosprężystości Biota.

Przypadek 2. jest opisany o wiele bardziej skomplikowaną postacią równań. Opis ten wykazuje silny reologiczny charakter. W prawie wszystkich równaniach, tzn.: związkach konstytutywnych, równaniu zachowania masy filtrującego gazu wolnego, obecny jest człon zależny od historii pochodnej czasowej izotermy sorpcji. Jest to wynik zależności (5.72), która stwierdza, że aktualna wartość koncentracji gazu związanego jest nie tylko funkcją, przez izotermę sorpcji, aktualnej wartości ciśnienia porowego, ale zależy również od historii pochodnej czasowej izotermy sorpcji, a więc pośrednio od historii zmian wartości ciśnienia porowego. Zależności te reprezentują tzw. efekt pamięci. Fizycznie zjawisko to jest wynikiem nienadążania zmian koncentracji gazu uwięzionego w mikroporach za zmianami wartości ciśnienia gazu w makroporach. Można powiedzieć, że na poziomie lokalnym w układzie jest brak równowagi termodynamicznej. Opis matematyczny przypadku 2. jest oczywiście bardziej ogólny niż przypadku 1. W czasie $t \rightarrow \infty$, przy jednocześnie niezmiennych warunkach brzegowych, proces opisany równaniami przypadku 2. staje się procesem stacjonarym i transformuje się do opisu przypadku 1.

5.2. Identyfikacja stałych materiałowych

Identyfikacji stałych materiałowych opisu makroskopowego dokonamy na podstawie otrzymanych w procesie homogenizacji definicji parametrów efektywnych, tj. równań: (5.44), (5.62) oraz (5.64), jak również wyników badań laboratoryjnych prezentowanych w literaturze przedmiotu [49]¹. Skoncentrowano się tylko na tych wielkościach efektywnych, które w równaniach konstytutywnych (5.65) oraz prawie zachowania masy (5.68) określają wpływ procesu sorpcji. W szczególności identyfikuje się funkcje pamięci: $m_{ij}(t)$, $\beta_m(t)$ i $\langle G(t) \rangle$ oraz stałe materiałowe: γ_{ij} i γ_c .

Wielkości efektywne α_{ij} i β , stałe materiałowe teorii Biota są szczegółowo analizowane w rozdziale 3.

Funkcje pamięci: $m_{ij}(t)$, $\beta_m(t)$ i $\langle G(t) \rangle$ oraz stałe materiałowe γ_{ij} i γ_c określano na podstawie warunku makroskopowej izotropii ośrodka węglowego, tj.: warunku klasycznie zakładanego w badaniach laboratoryjnych układów sorpcyjnych [49].

Identyfikację stałych materiałowych rozpoczynamy od sformułowania istniejących zależności między „nowymi” stałymi a stałymi teorii porosprężystości Biota oraz od

¹ Wykorzystano również wyniki: równowagowych wartości pęcznienia węgla w atmosferze dwutlenku węgla przedstawione w pracy: Ceglarska-Stefańska G., Jagiełło J., *An application of vacancy theory of adsorption to the analysis of the natural coal – CO₂ system at high pressures*, Arch. Min. Sci., Vol. 33, 1988, 369–377; oraz równowagowych wartości sorpcji przedstawione w pracy: Tarnowski J., *Porównawcza metoda opracowania prognozy stref zagrożonych wyrzutami węgla i gazu. Zgodność prognozy ze stanem faktycznym w różnych warunkach geologicznych*, materiały XII międzynarodowego kolokwium nt. „Kierunki zwalczania zagrożenia wyrzutami gazów i skał w górnictwie podziemnym”, Nowa Ruda–Radków 1988, s. 189–227.

określenia liczby niezależnych wielkości efektywnych. Z porównania definicji (5.44b) i (5.44c) widać, że spełniona jest równość

$$\frac{\gamma_{ij}}{\gamma_c} + \alpha_{ij} = \delta_{ij}, \quad (5.70)$$

która dla ośrodka makroskopowo-izotropowego implikuje

$$\frac{\gamma}{\gamma_c} + \alpha = 1, \quad (5.71)$$

gdzie: $\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij}$ oraz $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$.

Na podstawie tożsamości $a_{ijkh} \delta_{ij} = 3K_s \delta_{kh}$ można dowieść, że definicje (5.62) oraz (5.64) implikują relację

$$\beta_m(t) = \frac{\gamma_c \langle G(t) \rangle - m(t)}{K_s}, \quad (5.72)$$

w której:

K_s – moduł odkształcenia objętościowego materiału szkieletu oraz, dla ośrodka makroskopowo-izotropowego,

$$m_{ij}(t) = m(t) \delta_{ij}.$$

Tożsamość (5.70) oznacza, że efektywny moduł odkształcalności sorpcyjnej γ_{ij} jest skorelowany z tensorem materiałowym teorii Biota oraz modułem odkształcalności sorpcyjnej γ_c ciała mikroporowatego. Związek (5.70) pozwala prawie natychmiast przetransformować wyniki rozdziału 3., odnośnie wpływu różnych geometrii przestrzeni porowej na wartości tensora α_{ij} , na odpowiednie stwierdzenia odnośnie wartości tensora γ_{ij} . Podobnie mogą być również przetransformowane, otrzymane w rozdziale 3., oszacowania wartości tensora α_{ij} .

Tożsamość (5.72) wskazuje, że proponowany model cechują tylko dwie niezależne funkcje pamięci, tj. $m(t)$ i $\langle G(t) \rangle$.

Otrzymane związki (5.71) i (5.72) dowodzą również, że do pełnej identyfikacji wielkości efektywnych proponowanego modelu wystarcza, w przypadku znajomości odpowiednich stałych materiałowych opisu Biota, określenie postaci funkcji pamięci $m(t)$ i $\langle G(t) \rangle$ oraz wartości stałej γ_c . Oczywiście pełny opis procesu sorpcji wymaga również identyfikacji postaci funkcji opisującej izotermę sorpcji, tj. $F(p)$.

W dalszej części określone zostaną, na podstawie wyników badań laboratoryjnych, tylko wielkości stowarzyszone z procesem sorpcji i pęcznienia sorpcyjnego. Pozostałe stałe materiałowe, jak K_s oraz α , traktuje się jako dane. Stałe te charakteryzują tylko porowaty szkielet i nie zależą od rodzaju płynu wypełniającego pory ośrodka. Należy je więc wyznaczać, dla układów sorpcyjnych, przez eksperyment wykonany na analizowanym ośrodku porowatym, gdy jego przestrzeń porowa jest wypełniona płynem obojętnym. Taki eksperyment pozwala rozseparować wpływ hydromechanicznego sprężenia w nasyconym ośrodku porowatym od procesu sorpcji.

Funkcja pamięci $\langle G(t) \rangle$

Do identyfikacji tej funkcji wykorzystano wyniki: analizy teoretycznej, przedstawione we wspólnej pracy autora z J.L. Auriaultem [98], oraz wyniki badań eksperymentalnych przedstawione w publikacji [49].

Dzięki przyjęciu pewnej idealizacji szkieletu węglowego określono analityczną postać rozwiązania zagadnienia lokalnego (5.51a)–(5.51b) i postać funkcji pamięci $\langle G(t) \rangle$. Założono, że ośrodek porowaty jest utworzony z kolekcji jednakowych kulek zbudowanych z mikroporowatego ciała stałego i otrzymano [98]

$$\langle G(t) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \pi} e^{-D(\pi/R)^2 t}, \quad (5.73)$$

gdzie:

R – promień pojedynczej kulki,

i – liczba naturalna.

W badaniach laboratoryjnych opisanych w pracy [49], w specjalnie skonstruowanym aparacie, dokonywano równoczesnych pomiarów, w tych samych chwilach czasowych, wielkości sorpcji oraz wartości pęcznienia sorpcyjnego. W eksperymencie tym próbka nasycana była dwutlenkiem węgla pod ciśnieniem 2 MPa. Oprócz ciśnienia gazu do próbki nie przykładano żadnego obciążenia. W czasie nasycania mierzono wielkość sorpcji oraz wartość pęcznienia próbki.

Zgodnie z zależnością (5.69), wielkość koncentracji gazu związanego, w funkcji czasu, określa równanie

$$\langle C \rangle(t) = (1-n) F(p) - \int_0^t \frac{\partial F(p(\tau))}{\partial \tau} \langle G(t-\tau) \rangle d\tau. \quad (5.74)$$

Przyjmując dodatkowo, że w cytowanym eksperymencie [49], ze względu na bardzo małe próbki użyte do eksperymentu (pojedynczy wymiar próbki to około 2 cm), proces wypełnienia makroporów odbył się natychmiastowo, równanie (5.74) prowadzi do

$$\frac{M_z(t)}{M_z(t \rightarrow \infty)} = 1 - \frac{\langle G(t) \rangle}{1-n}, \quad (5.75)$$

gdzie:

$M_z(t)$ – aktualna wartość masy zasorbowanego gazu w próbce,

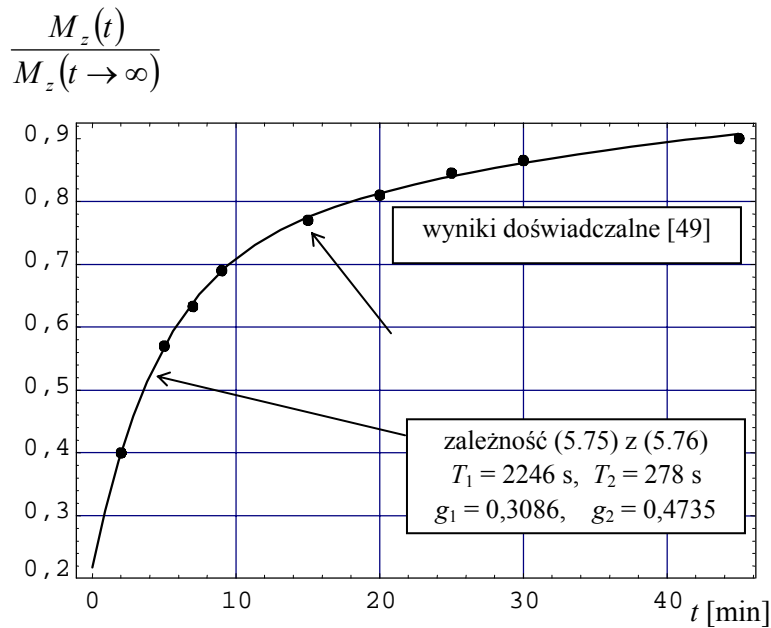
$M_z(t \rightarrow \infty)$ – równowagowa wartość masy zasorbowanego gazu w próbce.

Postać funkcji pamięci zidentyfikowano na podstawie wyników eksperymentu [49] metodą regresji nieliniowej. Założono, zgodnie z wynikiem (5.73), że funkcja pamięci może być przybliżana szeregiem

$$\frac{\langle G(t) \rangle}{1-n} = g_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + g_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + \dots \quad (5.76)$$

gdzie: T_1, T_2, \dots oraz g_1, g_2, \dots to poszukiwane stałe modelu.

W wyniku wpisywania się w rezultaty eksperymentu [49] okazało się, że uwzględnienie tylko dwóch członów rozwinięcia (5.76) doskonale weryfikuje dane z eksperymentu (rys. 5.1). Wyznaczono: $g_1 = 0,3086$, $g_2 = 0,4735$, $T_1 = 2246$ s oraz $T_2 = 278$ s.



Rys. 5.1. Względna wartość sorbowanego gazu w czasie. Ciśnienie gazu wolnego $p = 2$ MPa
Fig. 5.1. Relative value of a gas being sorbed versus time. Free gas pressure $p = 2$ MPa

Funkcja pamięci $m(t)$

Zgodnie z warunkami omówionego wcześniej eksperymentu [49], proponowane równania konstytutywne (5.65) implikują

$$-p = K_o \varepsilon_v(t) - \alpha p - \gamma F(p) + \int_0^t \frac{\partial F(p(\tau))}{\partial \tau} m(t-\tau) d\tau, \quad (5.77)$$

gdzie:

ε_v – odkształcenie objętościowe próbki,

K_o – efektywny moduł odkształcenia objętościowego próbki.

Po zastosowaniu dodatkowo związku (3.113)

$$\alpha = 1 - \frac{K_o}{K_s} \quad (5.78)$$

oraz (5.71), równanie (5.77) można przekształcić do postaci

$$\varepsilon_v(t) = -\frac{p}{K_s} + \frac{\gamma_c}{K_s} F(p) - \frac{1}{K_o} \int_0^t \frac{\partial F(p(\tau))}{\partial \tau} m(t-\tau) d\tau. \quad (5.79)$$

Ponowne zastosowanie przybliżenia o natychmiastowym wypełnieniu makroporów sprawia, że równanie (5.79) implikuje

$$\varepsilon_v(t) = -\frac{p}{K_s} + \frac{\gamma_c}{K_s} F(p) \left[1 - \frac{K_s}{\gamma_c K_o} m(t) \right]. \quad (5.80)$$

Po wprowadzeniu dodatkowych oznaczeń, tj.: ρ_z – gęstość właściwa mikroporowatego szkieletu węglowego bez zasorbowanego gazu, M_s – masa szkieletu węglowego próbki bez zasorbowanego gazu, zależność (5.80) można wyrazić następująco

$$\varepsilon_v(t) = -\frac{p}{K_s} + \lambda \frac{M_z(t \rightarrow \infty)}{M_s} \left[1 - \frac{K_s}{\gamma_c K_o} m(t) \right], \quad (5.81)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{\gamma_c \rho_z}{K_s} \quad (5.82)$$

może być zinterpretowany jako efektywny sorpcyjny współczynnik rozszerzalności objętościowej, natomiast $M_z(t \rightarrow \infty)/M_s$ reprezentuje równowagową wartość zasorbowanej masy gazu w jednostkowej masie szkieletu. Z danych eksperymentu wyznaczono $M_z(t \rightarrow \infty)/M_s = 0,0589$.

Przyjmując, podobnie jak dla funkcji pamięci $\langle G(t) \rangle$, przybliżenie

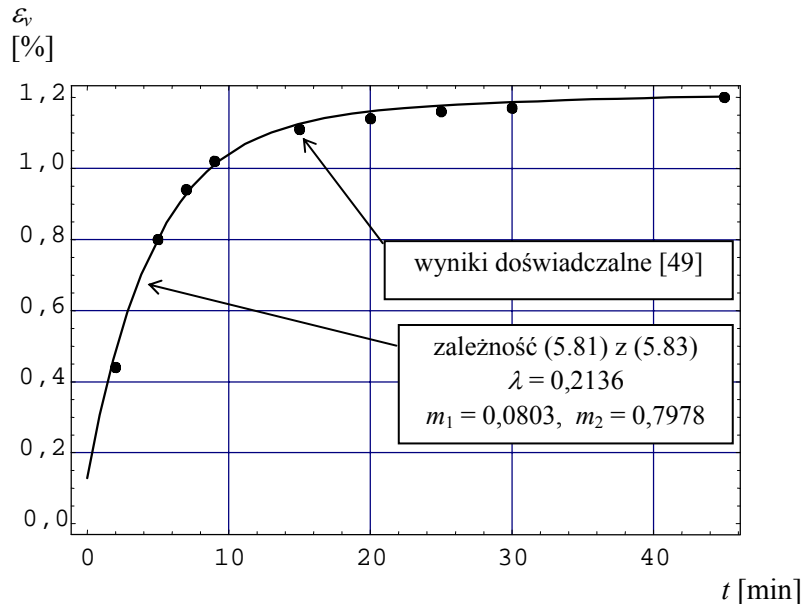
$$\frac{K_s}{\gamma_c K_o} m(t) = m_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + m_2 e^{-\frac{t}{T_2}}, \quad (5.83)$$

metodą regresji nieliniowej wyznaczono: $\lambda = 0,2136$, $m_1 = 0,0803$ oraz $m_2 = 0,7978$. Wartości parametrów T_1 oraz T_2 nie zmieniano. Ponadto przyjęto typową wartość modułu odkształcenia objętościowego szkieletu $K_s = 8000$ MPa.

Na rysunku 5.2. pokazano, że proponowana funkcja pamięci (5.83) bardzo dobrze opisuje wyniki eksperymentalne.

W pracy [49] badano również efektywne parametry sprężystości samego węgla (bez udziału gazu). W wyniku dodatkowych obliczeń stwierdzono, że $K_o = 413$ MPa. Zależność (5.78) pozwala, przy przyjętej wartości $K_s = 8000$ MPa, określić wartość współczynnika α . Otrzymano $\alpha = 0,948$. Ponadto, dla zadanej wartości ρ_z związek (5.82) jednoznacznie determinuje wartość stałej γ_c w zależności od wartości λ i K_s . Przyjmując typową wartość dla węgla kamiennego $\rho_z = 1800$ kg/m³, wyzna-

czono $\gamma_c = 949333 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Wartość ta, zgodnie z tożsamością (5.71), implikuje $\gamma = 49365 \text{ m}^2/\text{s}^2$.



Rys. 5.2. Wartość pęcznienia w czasie. Ciśnienie gazu wolnego $p = 2 \text{ MPa}$
Fig. 5.2. Sorption swelling versus time. Free gas pressure $p = 2 \text{ MPa}$

Izoterma sorpcji $F(p)$

Najczęściej stosowanymi modelami matematycznymi izotermy sorpcji są:

➤ izoterma Langmuira

$$\frac{M_z}{M_s} = \frac{B_1 p/p_a}{B_2 + p/p_a}, \quad (5.84)$$

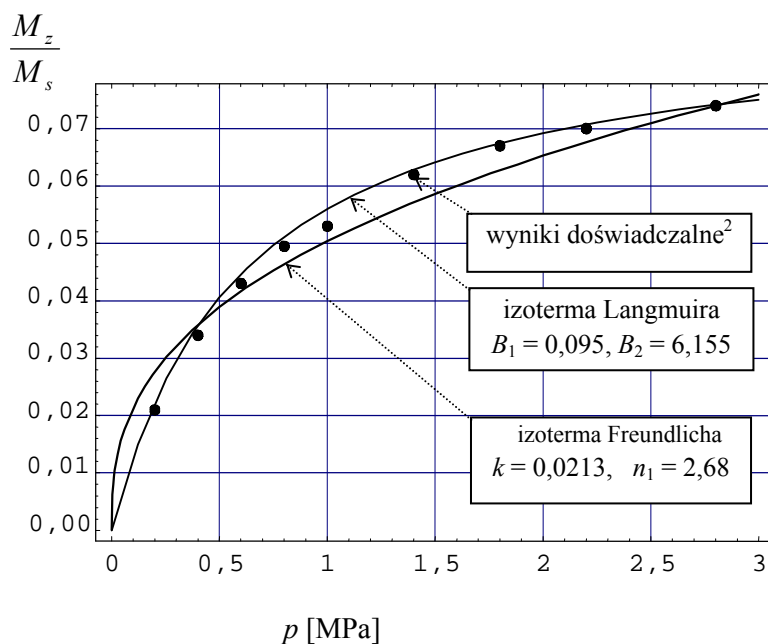
➤ izoterma Freundlicha

$$\frac{M_z}{M_s} = k \left(\frac{p}{p_a} \right)^{1/n_1}, \quad (5.85)$$

gdzie

$$F(p) = \rho_z M_z / M_s.$$

Porównanie izoterm sorpcji określonych równaniami: (5.84) oraz (5.85) z wynikami badań laboratoryjnych przedstawiono na rysunku 5.3². Rysunek ten dowodzi, że do układu sorpcyjnego węgiel kamienny–dwutlenek węgla równanie izotermy sorpcji według Langmuira bardzo dobrze opisuje wyniki eksperymentalne.



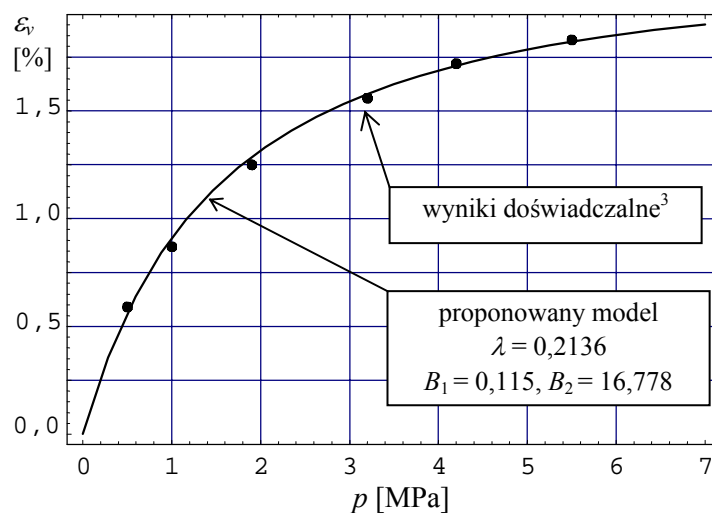
Rys. 5.3. Izoterma sorpcji
Fig.5.3. Sorption isotherm

Na rysunku 5.4 przedstawiono wyniki badań doświadczalnych³ równowagowych wartości pęcznienia próbki węglowej w atmosferze dwutlenku węgla. Niestety, użyte do badań próbki węglowe to nie te same, które badano w pracy [49], ani również nie te, które wykorzystano do zidentyfikowania równania izotermy sorpcji. W celu więc ilościowego dostosowania proponowanego modelu do wyników eksperymentu konieczna była zmiana wartości parametrów izotermy sorpcji (rys. 5.4). Wartość współ-

² Wykorzystano wyniki doświadczalne przedstawione w pracy: Tarnowski J., *Porównawcza metoda opracowania prognozy stref zagrożonych wyrzutami węgla i gazu. Zgodność prognozy ze stanem faktycznym w różnych warunkach geologicznych*, materiały XII międzynarodowego kolokwium nt. „Kierunki zwalczania zagrożenia wyrzutami gazów i skał w górnictwie podziemnym”, Nowa Ruda–Radków 1988, s. 189–227.

³ Wykorzystano wyniki doświadczalne z pracy: Ceglarska-Stefańska G., Jagiełło J., *An application of vacancy theory of adsorption to the analysis of the natural coal – CO₂ system at high pressures*, Arch. Min. Sci., Vol. 33, 1988, 369–377.

czynnika λ przyjęto jednak taką, jaką wyznaczono według eksperymentu równoczesnej sorpcji i pęcznienia przedstawionego w pracy [49].



Rys. 5.4. Wartość pęcznienia w funkcji wartości ciśnienia gazu wolnego
Fig. 5.4. Sorption swelling versus free gas pressure

Przy zmienionych parametrach izotermy sorpcji, model bardzo dobrze wpisuje się w wyniki badań eksperymentalnych.

5.3. Wnioski

Przedstawiony matematyczny opis makroskopowy procesów zachodzących w układach sorpcyjnych wskazuje, że uwięziony w mikroporach gaz oddziałuje zarówno na proces filtracji gazu wolnego, jak i na mechaniczne zachowanie się ciała stałego. Otrzymane związki konstytutywne można interpretować jako mieszane równania teorii dyfuzosprężystości i teorii porosprężystości Biota. Zależnie od własności dyfuzyjnych mikroporowatego ciała stałego oraz od jego mikrostruktury zachowanie się układu może wykazywać bardzo silny charakter reologiczny. Objawia się to w efektach pamięci występujących w związkach konstytutywnych oraz w zależności wielkości koncentracji uwięzionego gazu od historii pierwszej pochodnej czasowej z izotermy sorpcji.

Na podstawie dostępnych w literaturze przedmiotu wyników badań laboratoryjnych zidentyfikowano postać funkcji pamięci występującą w równaniach konstytutywnych oraz postać funkcji pamięci pozwalającą określać wartość koncentracji gazu w funkcji czasu procesu. Otrzymano dobrą zgodność modelu z wynikami badań eksperymentalnych.

Podsumowując otrzymane w punkcie 5.1.3, dla dwóch wyróżnionych przypadków, opisy makroskopowe stwierdzono, że opis przypadku 2. transformuje się do opisu 1. przy $t \rightarrow \infty$. Przedstawiona funkcja pamięci (5.73) dla ośrodka utworzonego z kolekcji jednakowych kulek wskazuje jednak, że transformacja tych opisów może być również wynikiem mikrostruktury, tak jak sugerowano przy skalowaniu opisu mikroskopowego: *mikrostruktura ośrodka oraz jego własności dyfuzyjne indukują równie szybkie zmiany koncentracji gazu związanego jak występujące w makro-porach zmiany ciśnienia gazu*. Zauważmy, zgodnie z (5.73), przyjęcie $R \rightarrow 0$ oznacza, że na poziomie lokalnym układ nieskończenie szybko osiąga stany równowagi termodynamicznej. Wtedy właśnie zaczyna obowiązywać opis matematyczny sformułowany dla przypadku 1. Ten efekt autorzy pracy [10] obserwowali podczas nasycania wodą i zagęszczania sztucznie preparowanych gruntów ilowych. Stwierdzili, że ich model zaproponowany w pracy [9] tego nie uwzględnia oraz że odpowiedzialne są za to procesy transportu zasorbowanej substancji w mikroporach. Wydaje się więc, że mimo iż prezentowany powyżej opis matematyczny otrzymano dla układu sorpcyjnego: ciało stałe o hierarchicznej budowie porów–gaz, to może być również, przynajmniej jakościowo, stosowany do innych układów wielofazowych.

6. Metoda homogenizacji w bezpośredniej praktyce inżyniera

Przedstawione w poprzednich rozdziałach rozważania miały charakter podstawowy. Weryfikowane były przede wszystkim ogólne teorie opisu matematycznego deformacji nasyconych ośrodków porowatych. Podstawowa własność metody homogenizacji, wyróżniająca ją od innych metod modelowania matematycznego, tj. możliwość określania wartości parametrów efektywnych opisu makroskopowego, stosowana była w badaniu roli struktury wewnętrznej ośrodka oraz jej zmian, wywołanych np. procesem kruchego pęknięcia, na wartości parametrów efektywnych.

W codziennej praktyce inżyniera właśnie ta własność, tj. możliwość określania parametrów efektywnych, jest najważniejsza. Jak już wspomniano we wstępie do niniejszej monografii, podstawowym założeniem odnośnie zarówno ośrodka gruntowego, jak i skalnego stosowanym w procesie projektowania jest ich makroskopowa ciągłość i jednorodność. Kluczowym elementem procesu projektowania jest więc dobór parametrów efektywnych. O ile w przypadku ośrodka gruntowego parametry mierzone w laboratorium mogą być traktowane jako efektywne, o tyle w przypadku masywu skalnego – nie. W laboratorium, na małych próbkach, są określane właściwości skały. W rozwiązywaniu zagadnień inżynierskich zasadnicze znaczenie ma jednak skala masywu skalnego. Istnieje, oczywiście, zasadnicza różnica między wartościami własności mechanicznych skał i masywu skalnego, głównie jako wynik występujących w masywie skalnym nieciągłości.

Masyw skalny charakteryzuje wielostopniowość [155], wynikająca z występowania w nim elementów strukturalnych płaskich (nieciągłości) i przestrzennych (bloków). Strukturę taką określa się mianem „systemu blokowego”. Spękania występują na ogół w sposób uporządkowany. Drugim elementem strukturalnym masywów skalnych jest warstewkowość, będąca najczęściej wynikiem warunków sedymentacyjno-diagenetycznych.

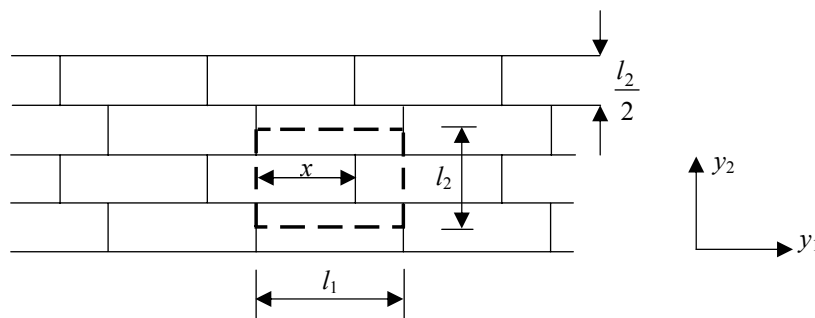
W obu tych przypadkach, to jest struktur blokowych i warstewkowych, w procesie projektowania dysponujemy najczęściej parametrami mechanicznymi poszczególnych elementów strukturalnych masywu skalnego. Konieczne jest więc „przejście” z tymi parametrami na masyw skalny, to znaczy określenie wartości parametrów efektywnych.

Celem niniejszego rozdziału jest szczegółowe przedstawienie i omówienie metod określania parametrów efektywnych dla struktur blokowych i warstewkowych. Ponieważ w praktyce geotechnicznej coraz częściej stosowane są różnego rodzaju geokompozyty (grunt zbrojony [138], grunt wzmocniony zużytymi oponami [3], grunt wzmocniony pionowymi kolumnami [6], skotwiony masyw skalny [28]), rozdział ten kończy więc analiza nośności granicznej gruntu zbrojonego.

6.1. Parametry efektywne spękanego blokowo masywu skalnego

Istnienie nieciągłości w masywie skalnym ma zasadniczy wpływ na jego własności mechaniczne i wytrzymałościowe. W celu jakościowego i ilościowego uwypuklenia wpływu tych spękań na makroskopowe własności masywu skalnego, w dalszej części niniejszego rozdziału założono, że bloki tworzące analizowaną strukturę są nieodkształcalne. Makroskopowe deformacje ośrodka są więc wynikiem tylko deformacji na powierzchniach kontaktu między blokami, tzn. są wynikiem wzajemnego przesuwania i obrotu bloków.

Geometrię analizowanej struktury przedstawiono na rysunku 6.1. W celu uogólnienia rozwiązania przyjęto przesunięcie jednej warstwy względem drugiej o parametr x . Taki układ spękań jest określany mianem „blokowy drugiego rodzaju” [76]. Gdy $x = 0$, wtedy struktura taka jest nazywana „blokową pierwszego rodzaju”.



Rys. 6.1. Spękany blokowo masyw skalny
Fig. 6.1. Blocky-jointed rock mass

6.1.1. Deformacje sprężyste

Zgodnie z zaprezentowaną wcześniej procedurą metody homogenizacji, zagadnienie poszukiwania opisu ekwiwalentnego, jak również wartości parametrów efektywnych, spękanego blokowo masywu skalnego rozpoczyna sformułowanie lokalnego opisu matematycznego rozważanego zagadnienia. Opis ten tworzą:

- równania równowagi dla bloku k

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial x_i} = 0, \quad (6.1)$$

- warunek nieodkształcalności się bloku

$$\left(\frac{\partial u_j^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (6.2)$$

- związki fizyczne dla powierzchni kontaktu (założono liniową sprężystość)

$$T_i^{\Gamma} = K_{ij} [u_j], \quad (6.3)$$

- warunek ciągłości wektora naprężenia na powierzchni kontaktu

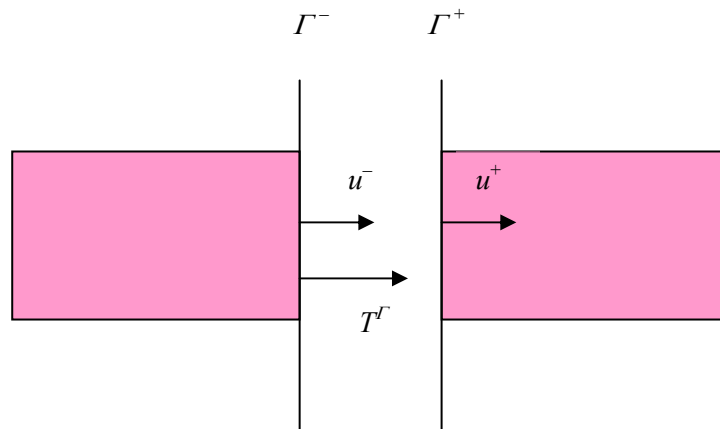
$$\left[\sigma_{ij} N_i \right] = 0, \quad (6.4)$$

gdzie (rys. 6.2)

$$[u] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (u^+ - u^-) \quad (6.5)$$

T_i^{Γ} – składowa naprężenia na powierzchni kontaktu,

N_i – normalna do powierzchni kontaktu.



Rys. 6.2. Schematyczny obraz pól fizycznych na powierzchni kontaktu
Fig. 6.2. Schematic of physical fields on a contact surface

Przedstawiony powyżej opis lokalny, dla każdego bloku z osobna, nie jest zbyt dogodny do analizy, dlatego dalsze rozważania będą prowadzone na tzw. polach rozmytych. Niech:

$$h^k(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in V^k, \\ 0, & \text{gdy } x \notin V^k, \end{cases} \quad (6.6)$$

definiuje tzw. funkcję charakterystyczną dla bloku k . Pole przemieszczenia oraz pole naprężenia, w całym obszarze REO, można przedstawić jako

$$u(x) = \sum_{k=1}^N h^k(x) u^k(x), \quad (6.7)$$

$$\sigma_{ij}^k(x) = \sum_{k=1}^N h^k(x) \sigma_{ij}^k(x), \quad (6.8)$$

gdzie:

V^k – objętość pojedynczego bloku,

N – liczba bloków w REO.

Należy zaznaczyć, że wprowadzone związki (6.7) i (6.8), ze względu na nieciągłość funkcji charakterystycznej, nie są odpowiednio „gładkie” w sensie matematycznym. W dalszej więc części wszystkie pochodne przestrzenne są rozumiane w sensie dystrybucyjnym, tzn.

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_k} = \sum_{\alpha=1}^N h^\alpha(y) \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial y_k} + \sum_{\Gamma=1}^M [u_i] \delta_\Gamma N_k^\Gamma, \quad (6.9)$$

gdzie:

M – liczba powierzchni kontaktu w REO,

δ_Γ – delta Diraca w przestrzeni trójwymiarowej związana z powierzchnią Γ ,

N^Γ – wektor normalny do powierzchni Γ zorientowany w kierunku dodatnim względem układu odniesienia.

Po uwzględnieniu pól fizycznych (6.6)–(6.9) oraz wprowadzeniu rozwinięcia asymptotycznego, wraz z prawem zmiany operatora pochodnej przestrzennej, opis lokalny rozważanego zagadnienia ma postać:

➤ równanie równowagi

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}^{(-1)}}{\partial y_i} \right\} + \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}^{(-1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_i} \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_i} \right\} + \varepsilon^1 \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}}{\partial y_i} \right\} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (6.10)$$

➤ warunek nieodkształcalności bloków

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-1} \left\{ e_{ij}^y(u^{(0)}) - \frac{1}{2} \sum_{\Gamma=1}^M \left\{ [u_i^{(0)}] \delta_\Gamma N_K^\Gamma + [u_K^{(0)}] \delta_\Gamma N_i^\Gamma \right\} \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ e_{ik}^x(u^{(0)}) + e_{ik}^y(u^{(1)}) - \frac{1}{2} \sum_{\Gamma=1}^M \left\{ [u_i^{(1)}] \delta_\Gamma N_K^\Gamma + [u_K^{(1)}] \delta_\Gamma N_i^\Gamma \right\} \right\} + \varepsilon^1 \{ \dots \} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

gdzie:

$$e_{ik}^x(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (6.11a)$$

$$e_{ik}^y(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_i} \right), \quad (6.11b)$$

➤ związki konstytutywne dla powierzchni kontaktu

$$T_i^\Gamma = \varepsilon^{-1} K_{ij}^\Gamma \left[u_j^{(0)} \right] + \varepsilon^0 K_{ij}^\Gamma \left[u_j^{(1)} \right] + \varepsilon^1 K_{ij}^\Gamma \left[u_j^{(2)} \right] + \dots \quad (6.12)$$

Należy zaznaczyć, że ze względu na możliwą nieciągłość pól fizycznych na brzegach REO (występowanie powierzchni kontaktu) warunek lokalnej periodyczności analizowanych pól musi być rozumiany w szerszym sensie (rozdzielane muszą być wartości lewo- i prawostronne na powierzchni kontaktu), tzn.:

$$u_i^{(k)}(0^-) = u_i^{(k)}(l^-), \quad (6.13a)$$

$$u_i^{(k)}(0^+) = u_i^{(k)}(l^+). \quad (6.13b)$$

Rozwiązanie pola $u_i^{(0)}(x_j, y_j)$ wewnątrz REO

Mnożymy równanie (6.10) stojące przy ε^{-2} przez pierwszy człon rozwinięcia asymptotycznego pola przemieszczenia i otrzymujemy

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(-1)}}{\partial y_i} u_j^{(0)} = 0. \quad (6.14)$$

Uśrednienie równania (6.14) po objętości REO oraz wykorzystanie związku konstytutywnego dla powierzchni kontaktu (zależność (6.12) przy ε^{-1}), po przekształceniach, prowadzi do

$$\sum_{\Gamma=1}^M \int_{\Gamma} K_{ij}^\Gamma \left[u_i^{(0)} \right] \left[u_j^{(0)} \right] d\Gamma = 0. \quad (6.15)$$

Równanie (6.15) przedstawia energię sprężystą zgromadzoną na powierzchniach kontaktu wewnątrz REO i jest wielkością dodatnio zdefiniowaną, wobec tego

$$\left[u_j^{(0)} \right] = 0 \quad (6.16)$$

na każdej powierzchni kontaktu Γ .

Zależność (6.16) wraz z warunkiem nieodkształcalności się bloków (wyrażenie przy ε^{-1} w równaniu (6.11)) daje

$$e_{ik}^y(u^{(0)}) = 0, \quad (6.17)$$

co wraz z warunkiem periodyczności implikuje niezależność pierwszego członu rozwinięcia asymptotycznego pola przemieszczenia od mikroskopowej zmiennej przestrzennej y , tzn.

$$u_i^{(0)} = u_i^{(0)}(x_j). \quad (6.18)$$

Rozwiązanie pola $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ wewnątrz REO

Przed przystąpieniem do rozwiązywania pola $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ zauważmy, że warunek nieodkształcalności się bloków (wyrażenie (6.11) przy ε^0) po uśrednieniu po objętości REO prowadzi do definicji tensora makroodkształcenia

$$E_{ik} = e_{ik}^x(u^{(0)}) = \frac{1}{2\|V_{\text{REO}}\|} \sum_{\Gamma=1}^M \int_{\Gamma} \{ [u_i^{(1)}] N_K^{\Gamma} + [u_K^{(1)}] N_i^{\Gamma} \} d\Gamma. \quad (6.19)$$

Definicja tensora makronapężenia jest konsekwencją równań równowagi ((6.10) przy ε^{-1}), które dzięki (6.18) i (6.12) redukują się do postaci

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_i} = 0. \quad (6.20)$$

Warunek ten implikuje dwa równoważne sformułowania tensora makronapężenia. Ponieważ $\sigma_{ij}^{(0)}$ jest polem samozrównoważonym (równanie (6.20)), spełnione jest więc również

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)} y_k}{\partial y_i} = \sigma_{kj}^{(0)}, \quad (6.21)$$

które po uśrednieniu po objętości REO prowadzi do

$$\langle \sigma_{kj}^{(0)} \rangle_S = \langle \sigma_{kj}^{(0)} \rangle. \quad (6.22)$$

Lewa strona powyższej równości jest wartością średnią po powierzchni, prawa natomiast – po objętości. Takie sformułowanie tensora makronapężenia pozwala ograniczyć rozważania rozkładów napężenia wewnątrz REO, wywołanych przez pole $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$, do analizy rozkładów naprężeń na powierzchniach kontaktowych.

Zależność (6.21) implikuje również drugie, także wygodne, sformułowanie tensora makronapężenia (rys. 6.3)

$$\langle \sigma_{kj}^{(0)} \rangle = \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\Gamma=1}^{M_{\alpha}} \bar{T}_j^{\Gamma} \bar{l}_k^{\Gamma}, \quad (6.23)$$

gdzie:

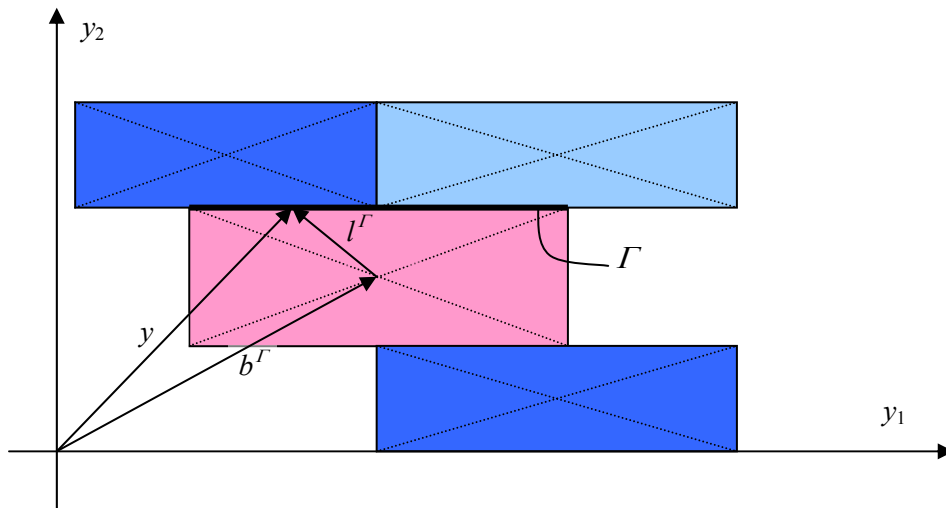
N – liczba bloków w REO,

M_{α} – liczba powierzchni kontaktu w bloku α

oraz:

$$\bar{T}_j^{\Gamma} = \int_{\Gamma} T_j^{\Gamma} d\Gamma, \quad \bar{l}_k^{\Gamma} = \frac{\int_{\Gamma} T_j^{\Gamma} l_k^{\Gamma} d\Gamma}{\int_{\Gamma} T_j^{\Gamma} d\Gamma}. \quad (6.24)$$

Definicja (6.23) jest znanym związkiem Love–Cristoffersena stosowanym w analizie ośrodków granulowanych [58].



Rys. 6.3. Schematyczny obraz zmiennych stosowanych w definicji tensora makronapężenia
Fig. 6.3. Schematic of variables used in a definition of macro-stress tensor

Mając zdefiniowane wielkości makroskopowe, sformułowanie makroskopowych związków konstytutywnych oraz określenie wartości parametrów efektywnych jest bezpośrednią konsekwencją rozkładu $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ wewnątrz REO.

Ponieważ związki na powierzchniach kontaktu są liniowe, wobec tego rozwiązania $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ można poszukiwać przez analizę prostych przypadków ściskania i ścinania (zasada superpozycji). Ponadto, rozkład pola $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ wewnątrz REO

jest, przede wszystkim, konsekwencją warunku nieodkształcalności się bloków. Zauważmy bowiem – wyrażenie (6.11) przy ε^0 implikuje warunek

$$\forall V_k \quad \forall y \in V_k \quad e_{ij}^y(u^{(1)}) = -e_{ij}^x(u^{(0)}), \quad (6.25)$$

który implikuje liniowy rozkład pola przemieszczenia $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ wewnątrz każdego bloku.

Określenie pola $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ dla zadanego makroodkształcenia polega więc na nadaniu liniowych rozkładów pola przemieszczenia wewnątrz każdego bloku, w taki sposób, aby spełniony był warunek (6.25) oraz – dodatkowo – warunek periodyczności. W celu spełnienia warunku periodyczności na powierzchniach kontaktu muszą być założone nieciągłości pola $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$. Nieciągłości te muszą mieć takie wartości, aby indukowane przez nie naprężenia kontaktowe zapewniały równowagę poszczególnych bloków wewnątrz REO i periodyczność pola naprężenia. Wartości naprężeń kontaktowych określa związek ((6.12) przy ε^0), tzn.

$$T_i^r = K_{ij}^r \left[u_j^{(1)} \right], \quad (6.26)$$

Dalej przyjęto, że sztywność kontaktu w kierunku normalnym jest równa k_n , natomiast w kierunku stycznym – k_t . Rozwiązania przypadków prostego ściskania i ścianania przedstawiono poniżej.

Proste ściskanie w kierunku Y_2

Zadano makroodkształcenie: $E_{22} = \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_2} = b$ i $E_{11} = E_{12} = 0$.

Rozkład pola $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ wewnątrz REO przedstawiono na rysunku 6.4. Rozkład ten implikuje naprężenia kontaktowe tylko na powierzchniach prostopadłych do osi Y_2 o wartości

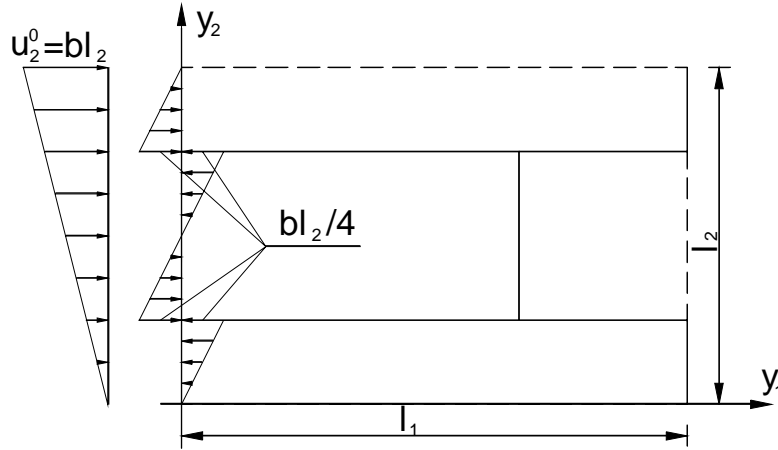
$$T_2 = k_n \frac{bl_2}{2}, \quad (6.27)$$

wobec tego składowe tensora makronaprężenia od wymuszenia makroodkształceniem

$E_{22} = \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_2} = b$ są równe

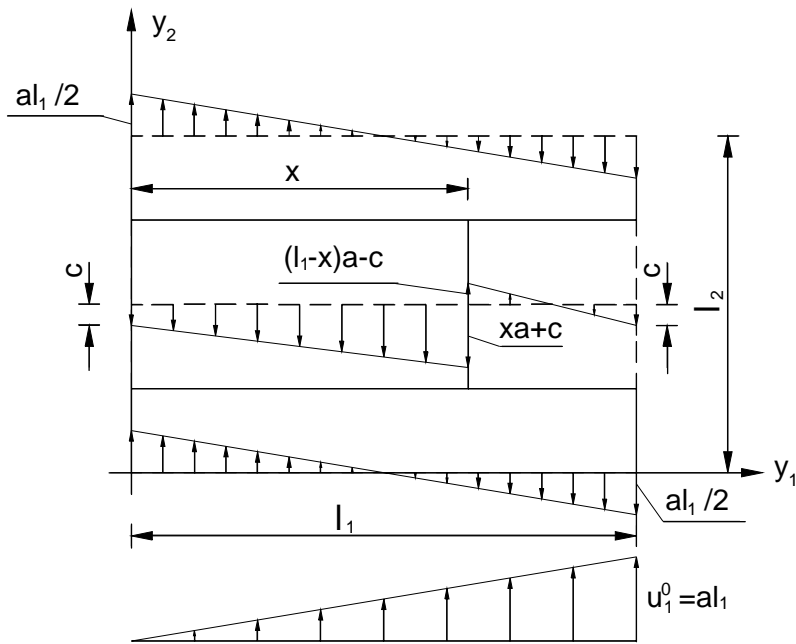
$$\langle \sigma_{22}^{(0)} \rangle = k_n \frac{l_2}{2} E_{22}, \quad (6.28a)$$

$$\langle \sigma_{11}^{(0)} \rangle = \langle \sigma_{12}^{(0)} \rangle = 0. \quad (6.28b)$$



Rys. 6.4. Pole przemieszczenia $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ w prostym ściskaniu Y_2

Fig. 6.4. Displacement field $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ during simple compression Y_2



Rys. 6.5. Pole przemieszczenia $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ w prostym ściskaniu Y_1

Fig. 6.5. Displacement field $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ during simple compression Y_1

Proste ściskanie w kierunku Y_1

Zadano: $E_{11} = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial y_1} = a$ i $E_{22} = E_{12} = 0$.

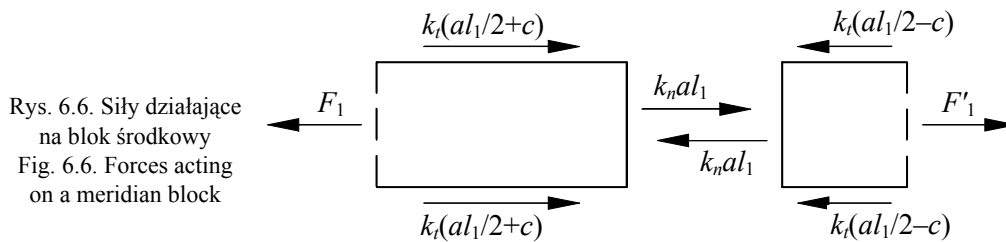
Pole $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$, spełniające warunek nieodkształcalności (6.25) i warunek periodyczności przemieszczenia, pokazano na rysunku 6.5. W celu zapewnienia periodyczności tensora naprężenia przedstawiony na rysunku 6.5 rozkład pola przemieszczenia sparametryzowano, chwilowo nieokreślonym, parametrem c . Wartość tego parametru otrzymuje się przez analizę rozkładu sił działających na blok środkowy (rys. 6.6).

Periodyczność tensora naprężenia implikuje $F_1 = F_1'$ (rys. 6.6). Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$k_t \left(a \frac{l_1}{2} + c \right) x = k_t \left(a \frac{l_1}{2} - c \right) (l_1 - x). \quad (6.29)$$

Ostatecznie otrzymujemy więc

$$c = a \left(\frac{l_1}{2} - x \right). \quad (6.30)$$



Analiza sił kontaktowych wywołanych polem $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ (rys. 6.5), po przyjęciu wartości c zgodnej z (6.30), prowadzi do następujących wartości składowych tensora makronaprężenia

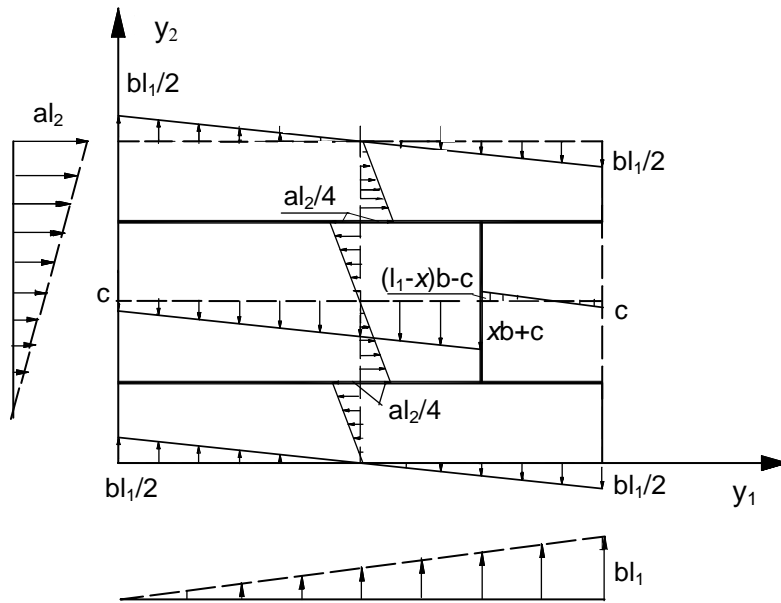
$$\langle \sigma_{11}^{(0)} \rangle = \left[k_n + 2 \frac{k_t x (l_1 - x)}{l_2 l_1} \right] l_1 E_{11}, \quad (6.31)$$

$$\langle \sigma_{12}^{(0)} \rangle = \langle \sigma_{22}^{(0)} \rangle = 0.$$

Czyste ścinanie

Zadano: $\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_2} = a$ i $\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_1} = b$.

Rozkład pola przemieszczenia $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ przedstawiono na rysunku 6.7. Wartość parametru c determinuje, podobnie jak w poprzednim przypadku, warunek periodyczności pola naprężenia (periodyczność sił działających na blok środkowy (rys. 6.8)). Otrzymujemy więc $c = \frac{b}{2}(l_1 - 2x)$.



Rys. 6.7. Pole przemieszczenia $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ w prostym ścinaniu

Fig. 6.7. Displacement field $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ during simple shearing

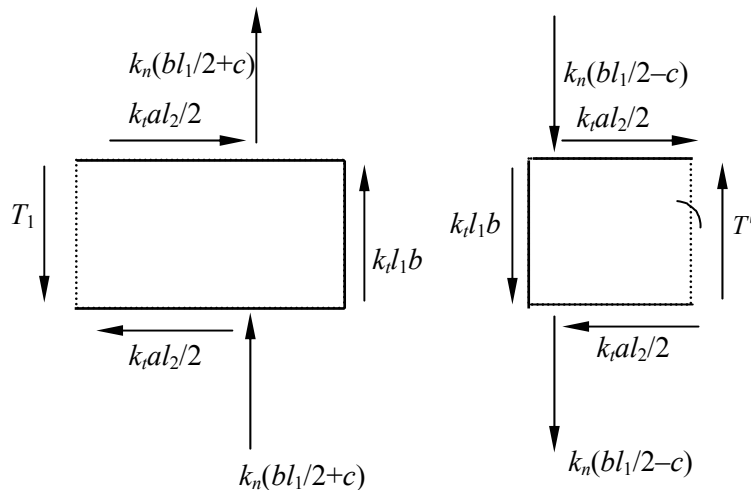
Analiza sił kontaktowych wywołanych założonym polem przemieszczenia (rys. 6.7), po uwzględnieniu określonej już wartości c , prowadzi do następujących wartości składowych tensora makronaprężenia

$$\langle \tilde{\sigma}_{21} \rangle = k_t a \frac{l_2}{2}, \quad (6.32a)$$

$$\langle \tilde{\sigma}_{12} \rangle = k_t b l_1 + 2k_n b \frac{x(l_1 - x)}{l_2}, \quad (6.32b)$$

$$\langle \tilde{\sigma}_{22} \rangle = 0, \quad (6.32c)$$

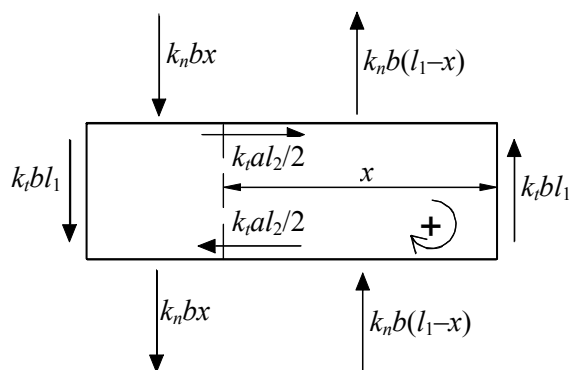
$$\langle \tilde{\sigma}_{11} \rangle = 0. \quad (6.32d)$$



Rys. 6.8. Siły działające na blok środkowy w prostym ścinaniu
 Fig. 6.8. Forces acting on a meridian block during simple shearing

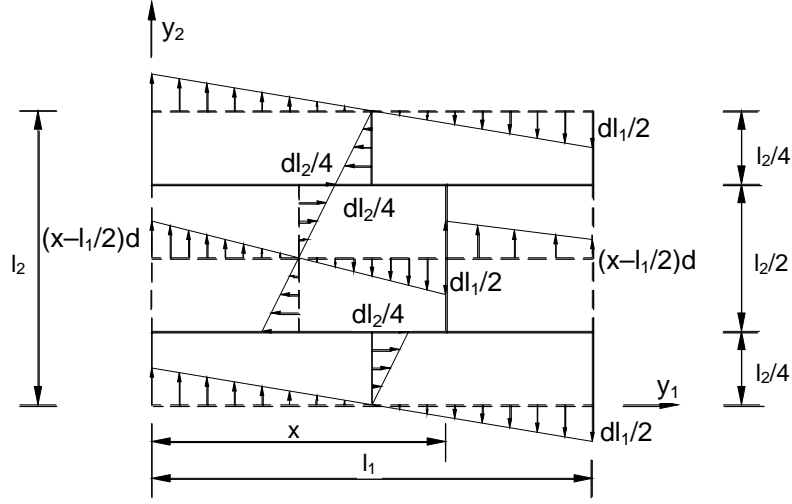
W podanych związkach składowe tensora makronapężenia oznaczono dodatkowym symbolem, gdyż okazuje się, że założone pole przemieszczenia nie spełnia zasady zachowania momentu pędu. Moment sił działających na pojedynczy blok, obliczony względem środka ciężkości bloku, jest równy (rys. 6.9)

$$\tilde{M}_{12} = \frac{l_1}{2} \left[k_t a \frac{l_2^2}{2} - k_t b l_2 l_1 - 2k_n b x (l_1 - x) \right]. \quad (6.33)$$



Rys. 6.9. Siły działające na pojedynczy blok
 Fig. 6.9. Forces acting on a single block

W celu zrównoważenia tego momentu nadajemy blokom mikroobrót d (jedyne, kinematycznie dopuszczalne, dodatkowe pole przemieszczenia spełniające warunek nieodkształcalności). Rozkład pola przemieszczenia przedstawiono na rysunku 6.10.



Rys. 6.10. Pole przemieszczenia $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ wywołane mikroobrotom bloków

Fig. 6.10. Displacement field $u_i^{(1)}(x_j, y_j)$ due to blocks' micro-rotation

Mikroobrót bloku o wartości d wywołuje następujące wartości: składowych tensora makronapężenia i momentu sił względem środka ciężkości bloku (rys. 6.11):

$$\langle \sigma_{11}^* \rangle = 0, \quad (6.34a)$$

$$\langle \sigma_{22}^* \rangle = 0, \quad (6.34b)$$

$$\langle \sigma_{21}^* \rangle = -k_t d \frac{l_2}{2}, \quad (6.34c)$$

$$\langle \sigma_{12}^* \rangle = k_t d l_1 + 2k_n d \frac{x(l_1 - x)}{l_2}, \quad (6.34d)$$

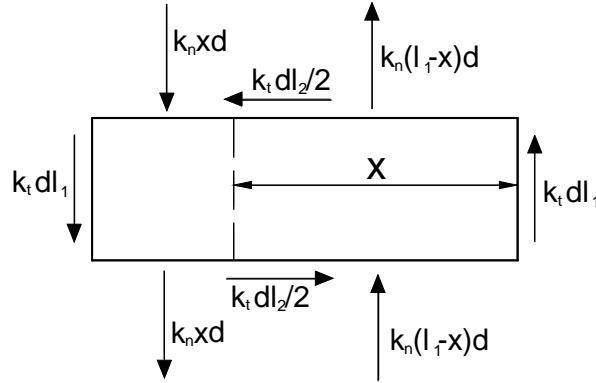
$$M_{12}^* = -\frac{l_1}{2} d \left[k_t \frac{l_2^2}{2} + k_t l_2 l_1 + 2k_n x(l_1 - x) \right]. \quad (6.34e)$$

Oczywiście wypadkowy moment sił musi być równy zeru, a więc

$$M_{12}^* + \tilde{M}_{12} = 0, \quad (6.35)$$

co – po zastosowaniu związków (6.33) i (6.34e) – implikuje

$$d = \frac{k_t a \frac{l_2^2}{2} - k_t b l_2 l_1 - 2k_n b x(l_1 - x)}{k_t \frac{l_2^2}{2} + k_t l_2 l_1 + 2k_n x(l_1 - x)}. \quad (6.36)$$



Rys. 6.11. Siły działające na pojedynczy blok podczas mikroobrotu
Fig. 6.11. Forces acting on a single block during micro-rotation

Wielkości makroskopowe w prostym ścinaniu są więc sumą $a + b$ i d (wartość d jest określona zależnością (6.36)). Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$\langle \sigma_{11}^{(0)} \rangle = 0, \quad (6.37a)$$

$$\langle \sigma_{22}^{(0)} \rangle = 0, \quad (6.37b)$$

$$\langle \sigma_{12}^{(0)} \rangle = \langle \sigma_{21}^{(0)} \rangle = k_t l_2 \frac{k_t l_2 l_1 + 2k_n x (l_1 - x)}{k_t \frac{l_2^2}{2} + k_t l_2 l_1 + 2k_n x (l_1 - x)} E_{12}. \quad (6.37c)$$

Związek konstytutywny dla ekwiwalentnego, jednorodnego, ośrodka ciągłego jest bezpośrednią konsekwencją przedstawionych wcześniej rozwiązań – prostego ściskania oraz ścinania – i może być przedstawiony w formie

$$\begin{Bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{\text{eff}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{\text{eff}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{12}^{\text{eff}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix}, \quad (6.38)$$

gdzie:

$$K_{11}^{\text{eff}} = \left[k_n + 2 \frac{k_t x (l_1 - x)}{l_2 l_1} \right] l_1, \quad (6.39a)$$

$$K_{22}^{\text{eff}} = k_n \frac{l_2}{2}, \quad (6.39b)$$

$$K_{12}^{\text{eff}} = k_t l_2 \frac{k_t l_2 l_1 + 2k_n x (l_1 - x)}{k_t \frac{l_2^2}{2} + k_t l_2 l_1 + 2k_n x (l_1 - x)}, \quad (6.39c)$$

dla przejrzystości zapisu tensor makronapężenia oznaczono przez Σ_{ij} ($= \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle$).

Opis (6.38) określa bezrozporowy ośrodek sprężysty. Otrzymane związki (6.39), definiujące wartości parametrów efektywnych w funkcji parametrów struktury (l_1 , l_2 , x , k_n , k_t), wyraźnie różnicują ośrodek blokowy drugiego i pierwszego rodzaju. Parametry efektywne ośrodka blokowego pierwszego rodzaju otrzymuje się przez podstawienie $x = 0$ w (6.39). Po przekształceniach otrzymujemy

$$\bar{K}_{11}^{\text{eff}} = k_n l_1, \quad (6.40a)$$

$$\bar{K}_{22}^{\text{eff}} = k_n \frac{l_2}{2}, \quad (6.40b)$$

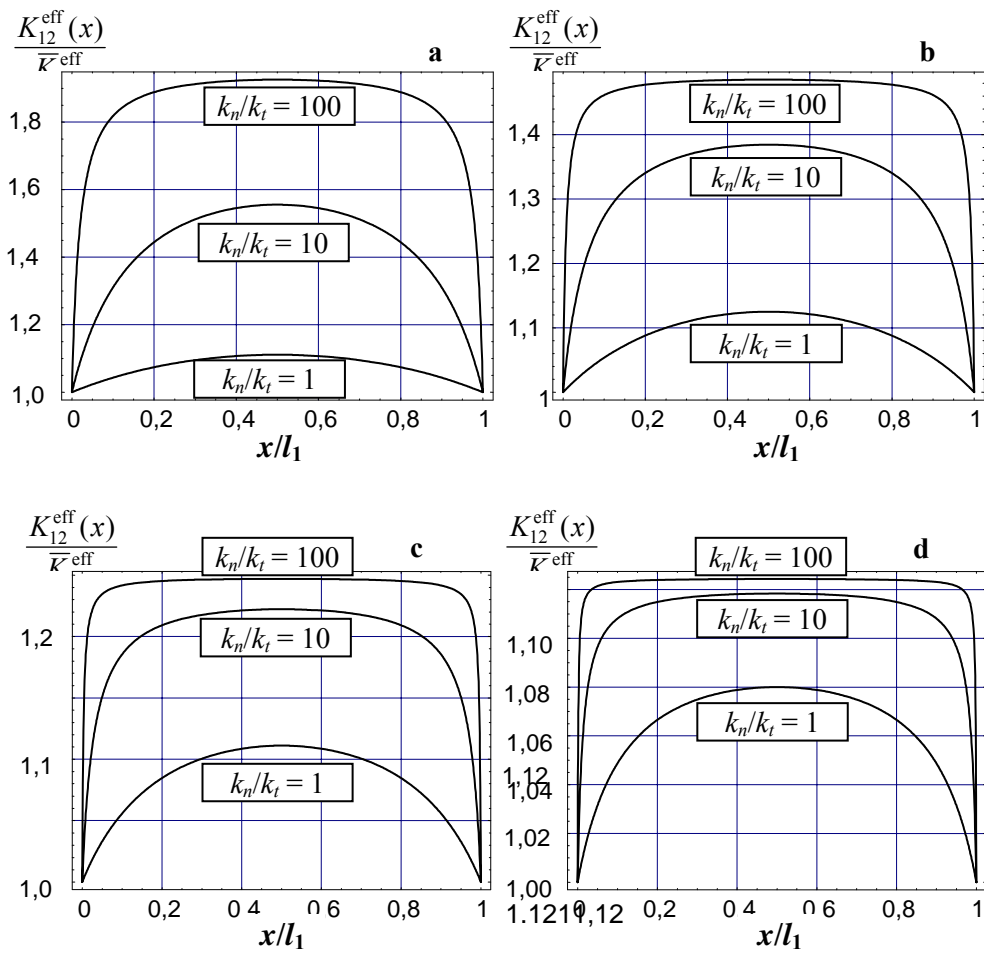
$$\bar{K}_{12}^{\text{eff}} = \frac{2k_t l_1 l_2}{l_2 + 2l_1}, \quad (6.40c)$$

gdzie $\bar{K}_{ij}^{\text{eff}}$ – składowe efektywnej sztywności ośrodka blokowego pierwszego rodzaju.

Wpływ wzajemnego ułożenia bloków (parametr x) na wartości parametrów efektywnych zilustrowano na rysunkach 6.12 i 6.13, gdzie pokazano wartości względnej sztywności efektywnej ośrodka w funkcji x . Względna sztywność ośrodka to stosunek sztywności efektywnej ośrodka blokowego drugiego rodzaju (dla danego x) do sztywności efektywnej ośrodka blokowego pierwszego rodzaju. Na rysunku 6.12 przedstawiono względną sztywność ośrodka na ścinanie, natomiast na rysunku 6.13 – na ściskanie. Obliczenia przeprowadzono dla różnych wymiarów bloków, tj. dla różnych wartości l_1/l_2 .

Jak łatwo zauważyć z rysunku 6.12, wzrostowi wartości l_1/l_2 towarzyszy spadek wartości względnej efektywnej sztywności na ścinanie, zanika zatem różnica między ośrodkiem blokowym pierwszego i drugiego rodzaju.

Dokładnie odwrotną własność pokazano na rysunku 6.13, gdzie wzrostowi l_1/l_2 towarzyszy zwiększenie efektywnej sztywności na ściskanie. Biorąc jednak pod uwagę fakt, że zwykle dla powierzchni kontaktu spełniona jest relacja $k_n \gg k_t$, to – zgodnie z rysunkami 6.12 i 6.13 – różnica między ośrodkiem blokowym pierwszego i drugiego rodzaju jest przede wszystkim w wartości efektywnej sztywności na ścinanie. Dodatkowo, dla $k_n/k_t = 100$ wartość względnej efektywnej sztywności na ścinanie charakteryzuje prawie całkowita niewrażliwość na wartość parametru x (wyłączając przypadek $x = 0$ i $x = l_1$). Wobec tego w praktyce, przy braku dokładnej informacji o geometrii spękań, dla ośrodka blokowego drugiego rodzaju można przyjmować $x = 0,5l_1$.

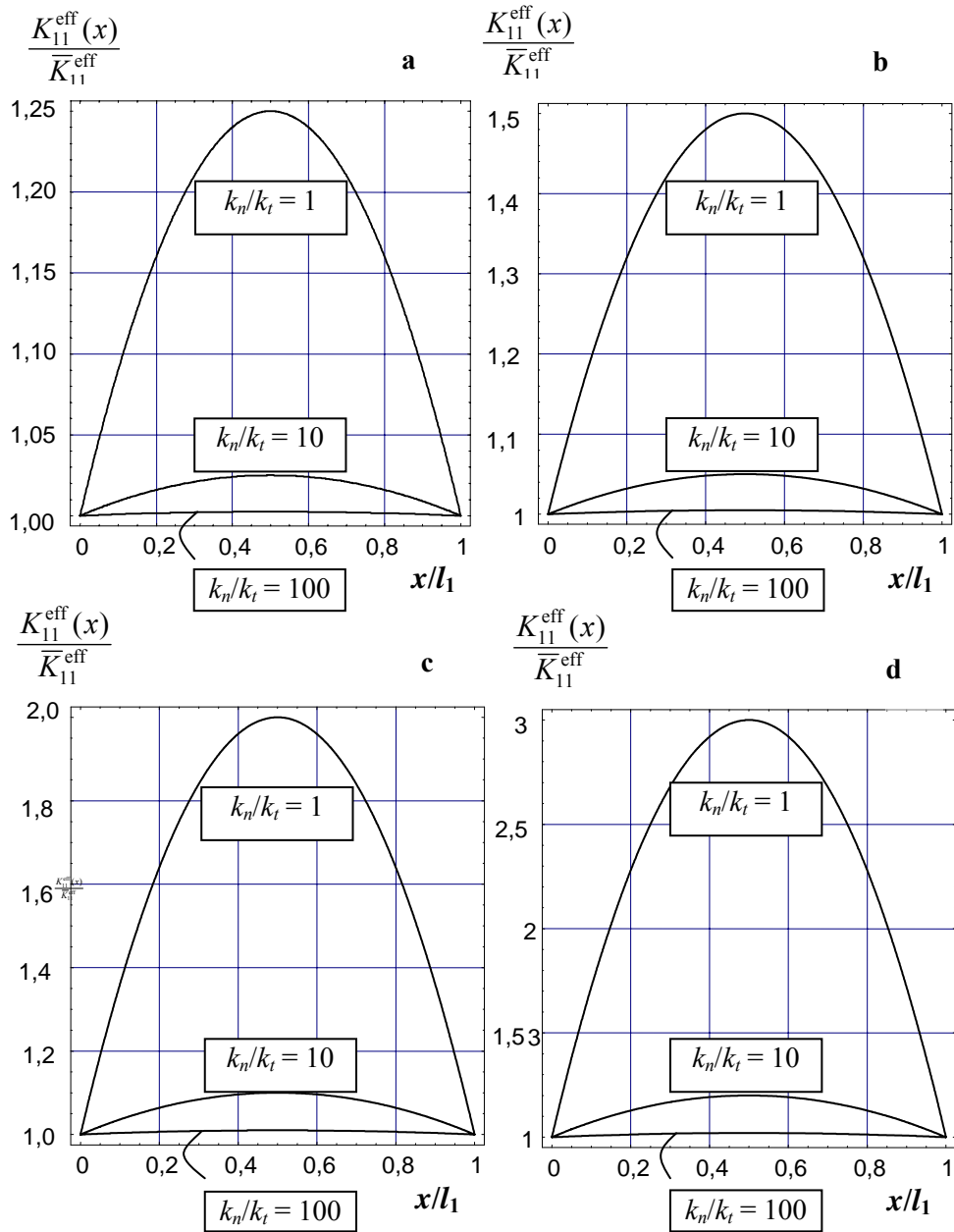


Rys. 6.12. Wartość względnej efektywnej sztywności na ścinanie w funkcji x :

$$\text{a) } \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}, \text{ b) } \frac{l_1}{l_2} = 1, \text{ c) } \frac{l_1}{l_2} = 2, \text{ d) } \frac{l_1}{l_2} = 4$$

Fig. 6.12. Relative value of effective stiffness for shearing versus x :

$$\text{a) } \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}, \text{ b) } \frac{l_1}{l_2} = 1, \text{ c) } \frac{l_1}{l_2} = 2, \text{ d) } \frac{l_1}{l_2} = 4$$



Rys. 6.13. Wartość względnej efektywnej sztywności na ściskanie w funkcji x :

a) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}$, b) $\frac{l_1}{l_2} = 1$, c) $\frac{l_1}{l_2} = 2$, d) $\frac{l_1}{l_2} = 4$

Fig. 6.13. Relative value of effective stiffness for compression versus x :

a) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2}$, b) $\frac{l_1}{l_2} = 1$, c) $\frac{l_1}{l_2} = 2$, d) $\frac{l_1}{l_2} = 4$

6.1.2. Nośność graniczna

Ponieważ spękania ośrodka skalnego charakteryzują się z reguły dużo niższymi parametrami wytrzymałościowymi niż materiał tworzący bloki, stanowią więc one predysponowane powierzchnie poślizgu. Bardzo często, gdy naprężenia w masywie skalnym są jeszcze bardzo niewielkie, zniszczenie masywu skalnego następuje już wzdłuż tych spękań.

Podobnie więc jak w przypadku efektywnych cech sprężystych struktur blokowych, w celu uwypuklenia wpływu spękań, tym razem na nośność graniczną spękanego masywu skalnego, zakłada się możliwość zniszczenia masywu skalnego tylko wzdłuż powierzchni spękań, dla których warunek uplastycznienia (wystąpienia poślizgu) postuluje się w postaci uogólnionego warunku Coulomba–Mohra

$$f(T_t^{\Gamma}, T_n^{\Gamma}) = |T_t^{\Gamma}| + T_n^{\Gamma} \operatorname{tg} \phi - c \leq 0, \quad (6.41)$$

gdzie:

T_t^{Γ} i T_n^{Γ} – składowa styczna i normalna wektora naprężenia na powierzchni kontaktu Γ ,

$\operatorname{tg} \phi$ i c – parametry wytrzymałości na ścinanie wzdłuż tego spękania.

Innymi słowy – przyjmuje się, że bloki są zbudowane z materiału o nieporównywalnie lepszych parametrach wytrzymałościowych niż odpowiadające im parametry wytrzymałościowe spękań.

Adaptując do struktury blokowej, przedstawioną w rozdziale 2. definicję makroskopowego warunku plastyczności (2.51), makroskopową nośność graniczną spękanego blokowo masywu skalnego można scharakteryzować następująco (porównaj również omówienie w rozdziale 4. dotyczące granicznej powierzchni plastyczności ośrodka porowatego (4.75) i (4.77))

$$F(\Sigma_{ij}) \leq 0 \Leftrightarrow \Sigma_{ij} \in P^h = \left\{ \langle \tau_{ij} \rangle \mid \exists \tau_{ij}(y), \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_i} = 0, f(\tau_{ij} N_i^{\Gamma}) \leq 0 \quad \forall y \in \Gamma, \forall \Gamma \right\}. \quad (6.42)$$

Zależność (6.42) definiuje makroskopową nośność graniczną ośrodka blokowego przez zbiór dopuszczalnych stanów makronaprężenia Σ_{ij} , przy czym, w myśl powyższego związku, dany stan makronaprężenia jest dopuszczalny wtedy i tylko wtedy, gdy można skonstruować dla niego samorzównoważone pole mikronaprężenia, o wartości średniej równej temu makronaprężeniu, spełniające kryterium plastyczności (6.41) w każdym punkcie wszystkich powierzchni kontaktu znajdujących się w REO. Dodatkowo, jak zwykle podczas analizy struktur periodycznych, pole mikronaprężenia musi być lokalnie periodyczne.

Brzeg zbioru P^h to poszukiwana powierzchnia, w przestrzeni makronaprężenia, granicznej nośności ośrodka blokowego, tj. $F(\Sigma_{ij}) = 0$. Określenie więc nośności granicznej ośrodka to wyznaczenie punktów ekstremalnych (brzegowych) zbioru P^h .

W wielu wypadkach znalezienie punktów ekstremalnych zbioru jest bardzo trudne i dlatego bardzo często dokonuje się jedynie ich oszacowania. W tym celu korzysta się z twierdzeń nośności granicznej o tzw. ocenie dolnej i górnej (por. np.: Izbicki [76] i Izbicki i Mróz [77]). Oczywiście, gdy ocena górna i dolna są sobie równe, jest to punkt ekstremalny zbioru P^h .

Zgodnie z definicją (6.42), każde samozrównoważone i lokalnie periodyczne pole mikronapężenia, spełniające lokalne kryterium plastyczności, po uśrednieniu należy do zbioru P^h – daje więc dolną ocenę nośności granicznej ośrodka (jest to tzw. oszacowanie statyczne).

Oszacowanie kinematyczne, dotyczące górnej oceny nośności granicznej, otrzymuje się z kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości, określającego mechanizm zniszczenia zgodnie ze stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia. Dla dowolnego przygotowanego pola prędkości, spełniającego warunek nieodkształcalności się bloków (równanie (6.11) przy ε^0), mamy

$$\left\langle \sigma_{ik}^{(0)} \left\{ e_{ik}^x(\dot{u}^{(0)}) + e_{ik}^y(\dot{u}^{(1)}) - \frac{1}{2} \sum_{\Gamma=1}^M \left\{ \left[\dot{u}_i^{(1)} \right] \delta_{\Gamma} N_K^{\Gamma} + \left[\dot{u}_K^{(1)} \right] \delta_{\Gamma} N_i^{\Gamma} \right\} \right\} \right\rangle = 0, \quad (6.43)$$

które – po przekształceniu i uwzględnieniu definicji tensora (prędkości) makroodkształcenia (6.19) – prowadzi do

$$\langle \sigma_{ik}^{(0)} \rangle \dot{E}_{ik} = \Sigma_{ik} \dot{E}_{ik} = \frac{1}{\|V_{\text{REO}}\|} \sum_{\Gamma=1}^M \int_{\Gamma} T_i^{\Gamma} \left[\dot{u}_i^{(1)} \right] d\Gamma, \quad (6.44)$$

więc

$$T_i^{\Gamma} \left[\dot{u}_i^{(1)} \right] \leq \pi \left(\left[\dot{u}_i^{(1)} \right] \right) = \max_{T^{\Gamma}} \left\{ T_i^{\Gamma} \left[\dot{u}_i^{(1)} \right]; f(T_t^{\Gamma}, T_n^{\Gamma}) \leq 0 \right\}. \quad (6.45)$$

Ponadto, dla stowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia, spełnione jest (np. [76])

$$\pi \left(\left[\dot{u}_i^{(1)} \right] \right) = \sqrt{\left[\dot{u}_i^{(1)} \right] \left[\dot{u}_i^{(1)} \right]} c \cos \phi, \quad (6.46)$$

wobec tego, biorąc pod uwagę (6.44) i (6.45), otrzymujemy

$$\Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} \leq \frac{c \cos \phi}{\|V_{\text{REO}}\|} \sum_{\Gamma=1}^M \int_{\Gamma} \sqrt{\left[\dot{u}_i^{(1)} \right] \left[\dot{u}_i^{(1)} \right]} d\Gamma. \quad (6.47)$$

Ponowne wykorzystanie definicji (6.19) tensora makroodkształcenia prowadzi do

$$\Sigma_{ij} \sum_{\Gamma=1}^M \int_{\Gamma} \left\{ \left[\dot{u}_i^{(1)} \right] N_j^{\Gamma} + \left[\dot{u}_j^{(1)} \right] N_i^{\Gamma} \right\} d\Gamma \leq 2c \cos \phi \sum_{\Gamma=1}^M \int_{\Gamma} \sqrt{\left[\dot{u}_i^{(1)} \right] \left[\dot{u}_i^{(1)} \right]} d\Gamma. \quad (6.48)$$

Jest to ogólne sformułowanie górnej oceny nośności granicznej struktury blokowej.

Praktyczne stosowanie przedstawionej metodyki ilustruje analiza nośności granicznej struktury blokowej pierwszego rodzaju. Zgodnie z (6.41) i (6.42), pole mikronapężenia musi spełniać następujące warunki (rys. 6.14a)

$$\left| T_1^{r_2} \right| \leq -T_2^{r_2} \operatorname{tg} \phi + c \quad \wedge \quad \left| T_2^{r_1} \right| \leq -T_1^{r_1} \operatorname{tg} \phi + c, \quad (6.49)$$

co implikuje

$$\left\langle \left| T_1^{r_2} \right| \right\rangle_{r_2} \leq -\left\langle T_2^{r_2} \right\rangle_{r_2} \operatorname{tg} \phi + c \quad \wedge \quad \left\langle \left| T_2^{r_1} \right| \right\rangle_{r_1} \leq -\left\langle T_1^{r_1} \right\rangle_{r_1} \operatorname{tg} \phi + c, \quad (6.50)$$

gdzie zastosowany symbol uśredniania oznacza uśrednianie po indeksowanej powierzchni.

Ponieważ jednak

$$\left| \left\langle T_1^{r_2} \right\rangle_{r_2} \right| \leq \left\langle \left| T_1^{r_2} \right| \right\rangle_{r_2} \quad \wedge \quad \left| \left\langle T_2^{r_1} \right\rangle_{r_1} \right| \leq \left\langle \left| T_2^{r_1} \right| \right\rangle_{r_1}, \quad (6.51)$$

wobec tego, po zastosowaniu dodatkowo definicji (6.22) tensora makronapężenia, zależności (6.50) prowadzą do

$$\left| \Sigma_{21} \right| \leq -\Sigma_{22} \operatorname{tg} \phi + c \quad \wedge \quad \left| \Sigma_{12} \right| \leq -\Sigma_{11} \operatorname{tg} \phi + c. \quad (6.52)$$

Jeżeli przyjmiemy jako pole mikronapężenia pole jednorodne

$$\sigma_{ij}^{(0)}(y) = \sigma_{ji}^{(0)}(y) = \left\langle \sigma_{ij}^{(0)}(y) \right\rangle = \Sigma_{ij},$$

to nierówności (6.52) stają się dolnym oszacowaniem nośności granicznej systemu blokowego pierwszego rodzaju.

Oszacowanie górne (kinematyczne) otrzymuje się przez rozpatrzenie prostych schematów zniszczenia struktury blokowej (rys. 6.14b–e). Mechanizm przedstawiony na rysunku 6.14b, po zastosowaniu nierówności (6.48), prowadzi do

$$l_1 \Sigma_{22} [v] \sin \phi + l_1 \Sigma_{12} [v] \cos \phi \leq l_1 [v] c \cos \phi, \quad (6.53)$$

co implikuje

$$\Sigma_{12} \leq -\Sigma_{22} \operatorname{tg} \phi + c. \quad (6.54)$$

Postępując analogicznie, dla mechanizmu z rysunku 6.14c otrzymujemy

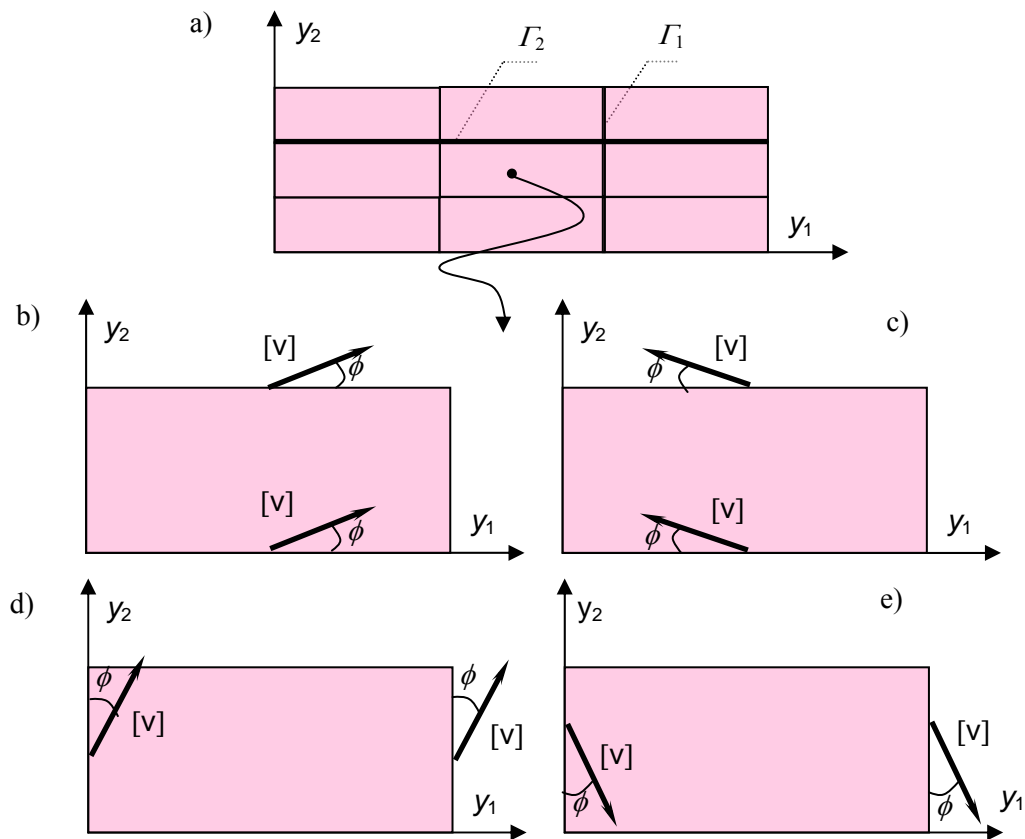
$$-\Sigma_{12} \leq -\Sigma_{22} \operatorname{tg} \phi + c. \quad (6.55)$$

Nierówności (6.54) i (6.55) implikują (6.52a) (tensor makronapężenia jest symetryczny). Nierówność (6.52b) jest konsekwencją pozostałych mechanizmów (rys. 6.14d,e). Oznacza to, że nierówności (6.52) określają punkty ekstremalne zbioru P^h ,

a więc reprezentują makroskopowy warunek nośności granicznej struktury blokowej pierwszego rodzaju. Warunek ten zilustrowano na rysunku 6.15.

Nośność graniczną struktury blokowej drugiego rodzaju wyznaczyli P. de Buhan i G. de Felice¹. Graficzną prezentację tej powierzchni, dla różnych wartości parametru $m = l_2/l_1$, przedstawiono na rysunku 6.16, z którego łatwo dostrzec, że dla $m_1 < m_2$

$$P_{m_1}^h \supseteq P_{m_2}^h. \quad (6.56)$$



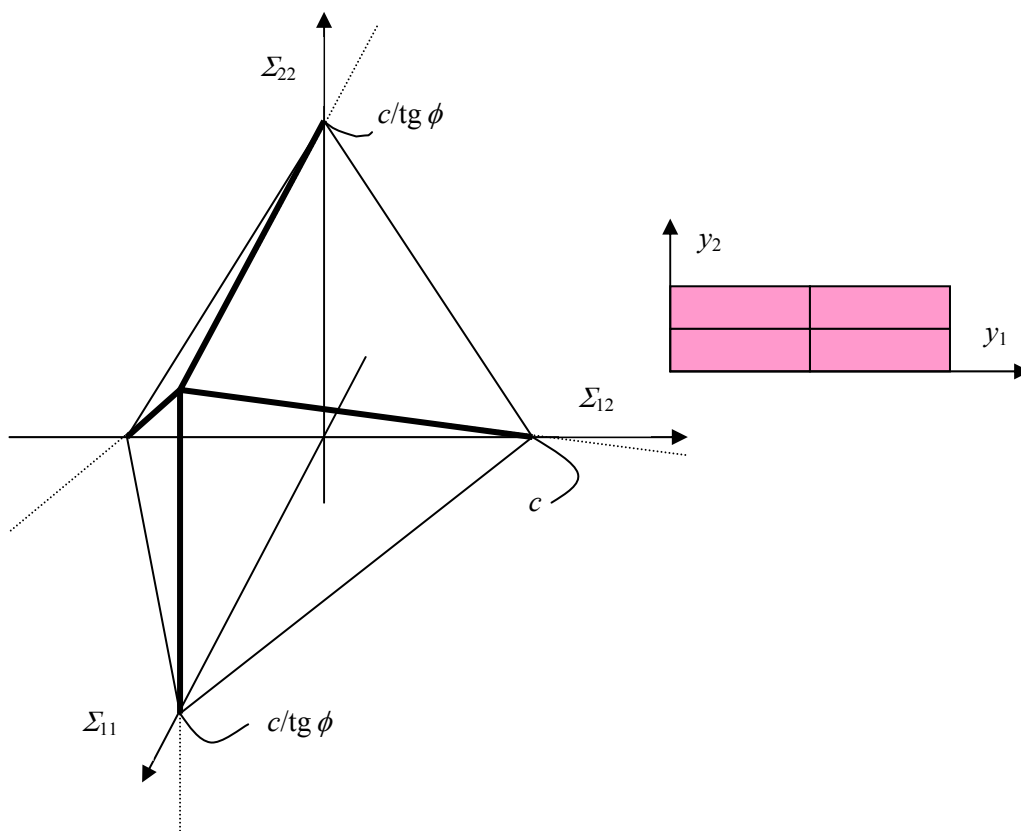
Rys. 6.14. Struktura blokowa pierwszego rodzaju i mechanizmy jej zniszczenia
 Fig. 6.14. Blocky-jointed structure of the first type and its destruction modes

¹ W pracy P. de Buhan, G. de Felice, *A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 45, No. 7, 1997, 1085–1104, przedstawiony jest cały proces konstrukcji nośności granicznej dla struktury blokowej drugiego rodzaju.

Ponadto, z porównania wyników dla struktury blokowej pierwszego rodzaju (rys. 6.15) z wynikami dla struktury blokowej drugiego rodzaju (rys. 6.16) otrzymujemy również

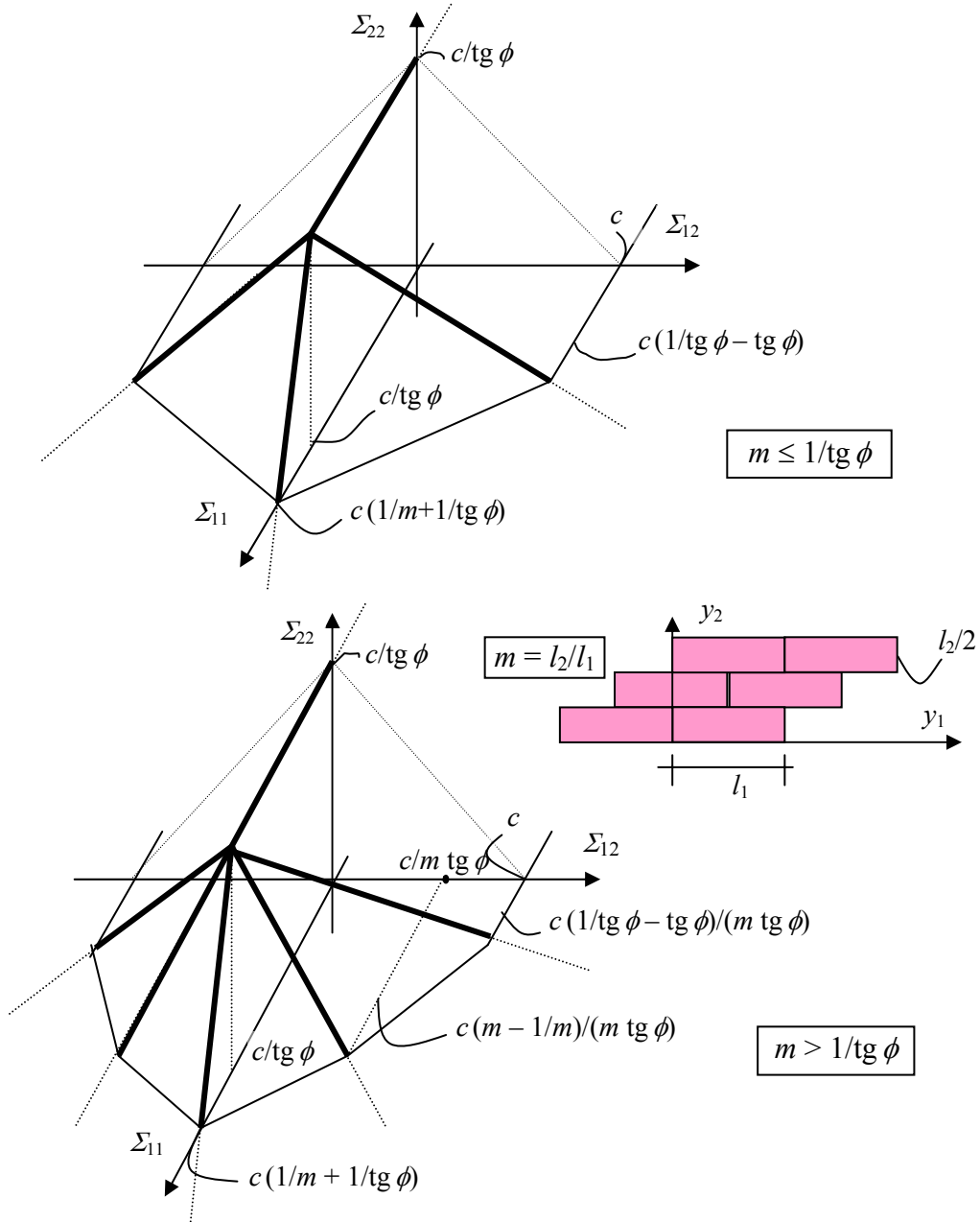
$$P_1^h \subseteq P_{II}^h, \quad (6.57)$$

gdzie dolne indeksy oznaczają ośrodek blokowy pierwszego i drugiego rodzaju.



Rys. 6.15. Nośność graniczna struktury blokowej pierwszego rodzaju
Fig. 6.15. Ultimate strength of blocky-jointed structure of the first type

Zależność (6.57) oznacza, że oszacowanie bezpieczne nośności granicznej struktury blokowej, przy braku pełnej informacji o geometrii spękań, to nośność graniczna struktury blokowej pierwszego rodzaju.



Rys. 6.16. Nośność graniczna struktury blokowej drugiego rodzaju
 Fig. 6.16. Ultimate strength of blocky-jointed structure of the second type

6.2. Parametry efektywne skał o strukturze warstewkowej

Drugim elementem strukturalnym ośrodków gruntowych i skalnych, szczególnie często występującym w utworach osadowych, jest warstewkowość. Wytworzenie takiej struktury jest związane z procesem powstawania tych skał, tzn. przez osadzanie i konsolidację pod wpływem pionowego obciążenia działającego w trakcie diagenyzy. Przykładem takich utworów są np.: łupki, mułowce oraz iłowce.

Konsekwencją warstewkowości skały jest silna anizotropia jej własności mechanicznych, sprężystych i plastycznych. W celu zobrazowania relacji warstewkowość–anizotropia, w niniejszym punkcie (podobnie jak dla struktur blokowych) analizowane są – dla skał o strukturze warstewkowej – zarówno parametry efektywne sprężystości, jak i ich nośność graniczna.

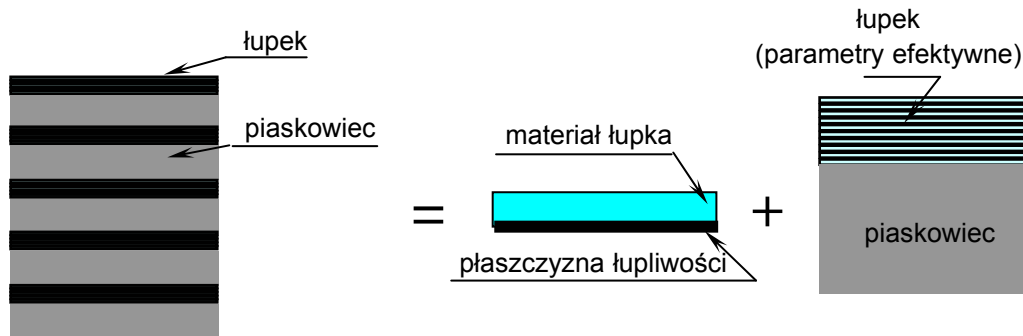
Obliczenia ilościowe przeprowadzono dla „sztandarowego” przykładu skalnych utworów warstewkowych, tzn. skał fliszu karpackiego. Charakteryzują się one stosunkowo regularną laminacją; najczęściej są utworzone z łupków (ilastych, bitumicznych, marglistych) z wkładkami piaskowca lub z piaskowca przewarstwianego łupkiem.

W analizie założono, że każda z warstw jest zbudowana z materiału jednorodnego i izotropowego. Związki fizyczne sprężystości składników ośrodka przyjęto jako liniowe zależności Hooke’a, natomiast kryterium plastyczności – jako warunek Coulomba–Mohra. Założono również, że połączenie warstw jest idealne, co oznacza, że w analizie nie wyróżnia się dodatkowych cech mechanicznych powierzchni kontaktu.

Założenie o izotropii materiału w stosunku do piaskowca wydaje się rozsądne, natomiast w stosunku do łupka – ze względu na obecność w nim tzw. uprzywilejowanych płaszczyzn łupliwości – dyskusyjne. Przyjęcie takiego założenia pozwala jednak w bardzo przejrzysty sposób przedstawić metodykę określania własności efektywnych struktur warstewkowych. Nie zmniejsza również ogólności prezentowanej analizy, gdyż uwzględnienie występowania płaszczyzn łupliwości dokonuje się najczęściej dwukrotnie – dwukrotne zastosowanie metody homogenizacji, każdorazowo dla dwuskładnikowego ośrodka warstewkowego (rys. 6.17). W pierwszym kroku ośrodkiem warstewkowym jest łupek, w którym podstawową komórkę periodyczności (REO) tworzą: pojedyncza warstwa zbudowana z jednorodnego i izotropowego materiału oraz płaszczyzna łupliwości, charakteryzująca się odmiennymi własnościami mechanicznymi niż materiał łupka. Drugi krok obliczeń to wyznaczenie parametrów efektywnych dla ośrodka, w którym REO tworzą: warstwa łupka, charakteryzowana parametrami efektywnymi wyznaczonymi w pierwszym kroku, oraz warstwa piaskowca. W obu tych krokach powtarzany jest więc schemat obliczeniowy dla dwuskładnikowego ośrodka warstewkowego, z tym że w drugim kroku łupek (parametry efektywne) jest materiałem anizotropowym.

Uwzględnienie anizotropii w prezentowanym w dalszej części schemacie nie wprowadza jednak metodologicznie żadnych dodatkowych, oprócz wydłużenia obliczeń, komplikacji. Z tego względu w niniejszym punkcie przedstawiono tylko jedno-

krotne zastosowanie schematu metody homogenizacji dla dwuskładnikowego ośrodka warstewkowego.



Rys. 6.17. Iterowana metoda homogenizacji
Fig. 6.17. Reiterated homogenization method

6.2.1. Deformacje sprężyste

Analizowaną strukturę przedstawiono na rysunku 6.18 (przez n oznaczono udział frakcyjny łupka, a przez $(1 - n)$ – udział frakcyjny piaskowca).

Wartekowość struktury wraz z warunkiem lokalnej periodyczności implikują zależność pola przemieszczenia, pola odkształcenia oraz pola naprężenia tylko od jednej mikroskopowej współrzędnej przestrzennej, tj. y_1 (rys. 6.18). Ponadto, postępując podobnie jak w poprzednich punktach (patrz np. rozdział 3. – *II zagadnienie brzegowe*), można udowodnić, że pierwszy człon rozwinięcia asymptotycznego pola przemieszczenia jest funkcją tylko makroskopowych współrzędnych przestrzennych, tj. x_1, x_2, x_3 . W konsekwencji stwierdzenia te implikują następującą postać:

- rozwinięcia asymptotycznego pola przemieszczenia

$$u_i(x_1, x_2, x_3, y_1) = u_i^{(0)}(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_1, x_2, x_3, y_1) + \dots, \quad (6.58)$$

- lokalnych warunków równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^{(0)}}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}^{(0)}}{\partial y_1} = 0. \quad (6.59)$$

Określenie wartości parametrów efektywnych sprężystości struktury warstewkowej, podobnie jak dla analizowanego wcześniej systemu blokowego, jest bezpośrednią konsekwencją rozwiązania pola $u_i^{(1)}(x_1, x_2, x_3, y_1)$ wewnątrz REO (rys. 6.19).

Po oznaczeniu składowych tensora makroodkształcenia przez E_{ij} ($= e_{ij}^x(u^{(0)})$) oraz uwzględnieniu (6.58), związki konstytutywne sprężystości przyjmują postać:

$$\sigma_{11}^{(0)} = \lambda_k (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu_k E_{11} + (2\mu_k + \lambda_k) \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y_1}, \quad (6.60a)$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = 2\mu_k E_{12} + \mu_k \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y_1}, \quad (6.60b)$$

$$\sigma_{13}^{(0)} = 2\mu_k E_{13} + \mu_k \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1}, \quad (6.60c)$$

gdzie: μ_k i λ_k są stałymi Lamégo dla łupka ($k = 1$) oraz piaskowca ($k = 2$).

Zależności (6.60) wraz z warunkami równowagi (6.59) implikują następującą, przemieszczeniową, postać warunków równowagi

$$\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial y_1^2} = 0, \quad \text{w } V_{\text{REO}}. \quad (6.61)$$

Rozwiązanie równań (6.61) ma następującą ogólną postać (rys. 6.19)

$$u_1^{(1)}(y_1) = A_k y_1 + a_1, \quad u_2^{(1)}(y_1) = B_k y_1 + b_1, \quad u_3^{(1)}(y_1) = C_k y_1 + c_1, \quad \text{w } V_{\text{REO}}, \quad (6.62)$$

gdzie: wartości stałych A_k, B_k, C_k ($k = 1$ – łupek, $k = 2$ – piaskowiec) determinują warunki lokalnej periodyczności oraz ciągłości wektora naprężenia na powierzchni kontaktu ($y_1 = 0$) i zostaną określone w dalszej części, natomiast stałe: a_1, b_1, c_1 są dowolne – warunki lokalnej periodyczności pozwalają określić pole przemieszczenia tylko z dokładnością co do stałej.

Z warunków periodyczności $u_i^{(1)}(y_1 = n) = u_i^{(1)}(y_1 = -(1-n))$ otrzymujemy

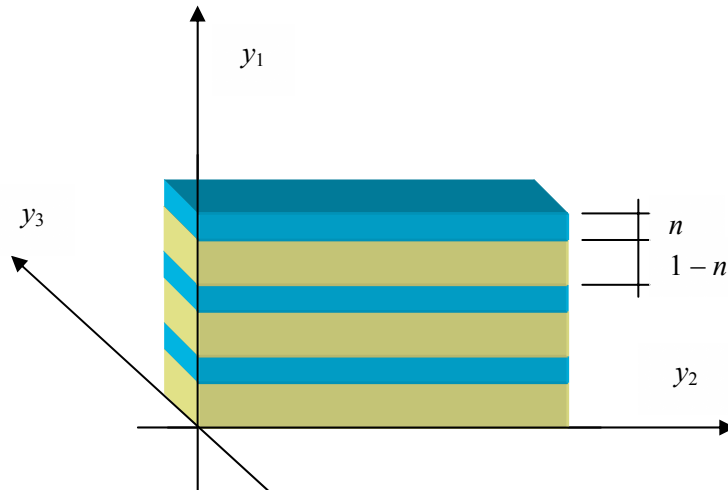
$$A_2 = -\frac{n}{1-n} A_1, \quad B_2 = -\frac{n}{1-n} B_1, \quad C_2 = -\frac{n}{1-n} C_1. \quad (6.63)$$

Warunek ciągłości wektora naprężenia na powierzchni kontaktu $y_1 = 0$, tzn. $\sigma_{ii}^{(0)}(y_1 = 0^+) = \sigma_{ii}^{(0)}(y_1 = 0^-)$, w konsekwencji prowadzi do następujących wartości stałych A_1, B_1, C_1 :

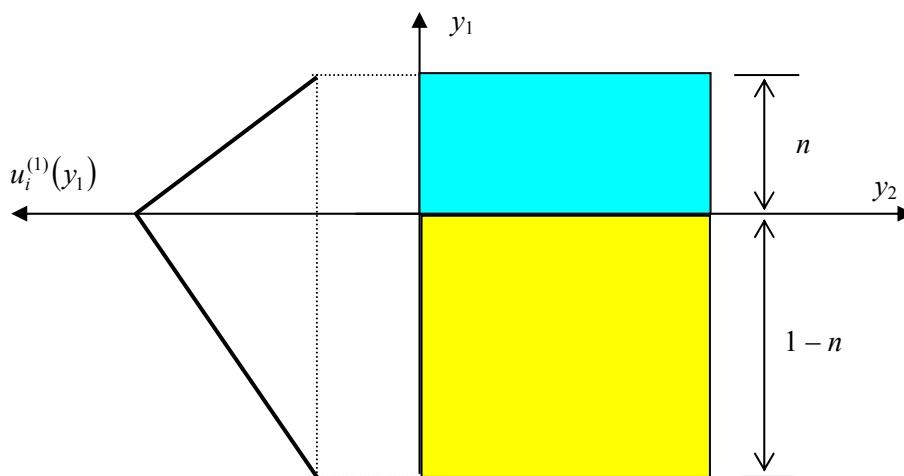
$$A_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2(\mu_2 - \mu_1)E_{11}}{\lambda_1 + \frac{n}{1-n}\lambda_2 + 2\mu_1 + 2\frac{n}{1-n}\mu_2}, \quad (6.64a)$$

$$B_1 = \frac{2(\mu_2 - \mu_1)E_{12}}{\mu_1 + \frac{n}{1-n}\mu_2}, \quad (6.64b)$$

$$C_1 = \frac{2(\mu_2 - \mu_1)E_{13}}{\mu_1 + \frac{n}{1-n}\mu_2}. \quad (6.64c)$$



Rys. 6.18. Struktura warstewkowa
Fig. 6.18. Laminated structure



Rys. 6.19. Rozwiązanie lokalnego zagadnienia brzegowego
Fig. 6.19. Solution of local boundary-value problem

Wprowadzenie powyższych zależności do związków konstytutywnych sprężystości, a następnie ich uśrednienie daje, po przekształceniach, następujące makroskopowe zależności dla ekwiwalentnego, jednorodnego ośrodka ciągłego

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{13} \\ \Sigma_{23} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_4 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{array} \right\}, \quad (6.65)$$

przy czym: $\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle$ oraz wartości efektywnych sztywności określają zależności:

$$C_1 = \frac{(2\mu_1 + \lambda_1)(2\mu_2 + \lambda_2)}{2(1-n)\mu_1 + \lambda_1 + n(2\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (6.66a)$$

$$C_2 = \frac{2n\mu_2\lambda_1 + (2(1-n)\mu_1 + \lambda_1)\lambda_2}{2(1-n)\mu_1 + \lambda_1 + n(2\mu_2 + \lambda_2 - \lambda_1)}, \quad (6.66b)$$

$$C_3 = n\lambda_1 + (1-n)\lambda_2 + 2n\mu_1 + 2(1-n)\mu_2 + \frac{(1-n)n(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2(n-1)\mu_1 - \lambda_1 + n(\lambda_1 - 2\mu_2 - \lambda_2)}, \quad (6.66c)$$

$$C_4 = n\lambda_1 + (1-n)\lambda_2 + \frac{(1-n)n(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2(n-1)\mu_1 - \lambda_1 + n(\lambda_1 - 2\mu_2 - \lambda_2)}, \quad (6.66d)$$

$$C_5 = \frac{2\mu_1\mu_2}{(1-n)\mu_1 + n\mu_2}, \quad (6.66e)$$

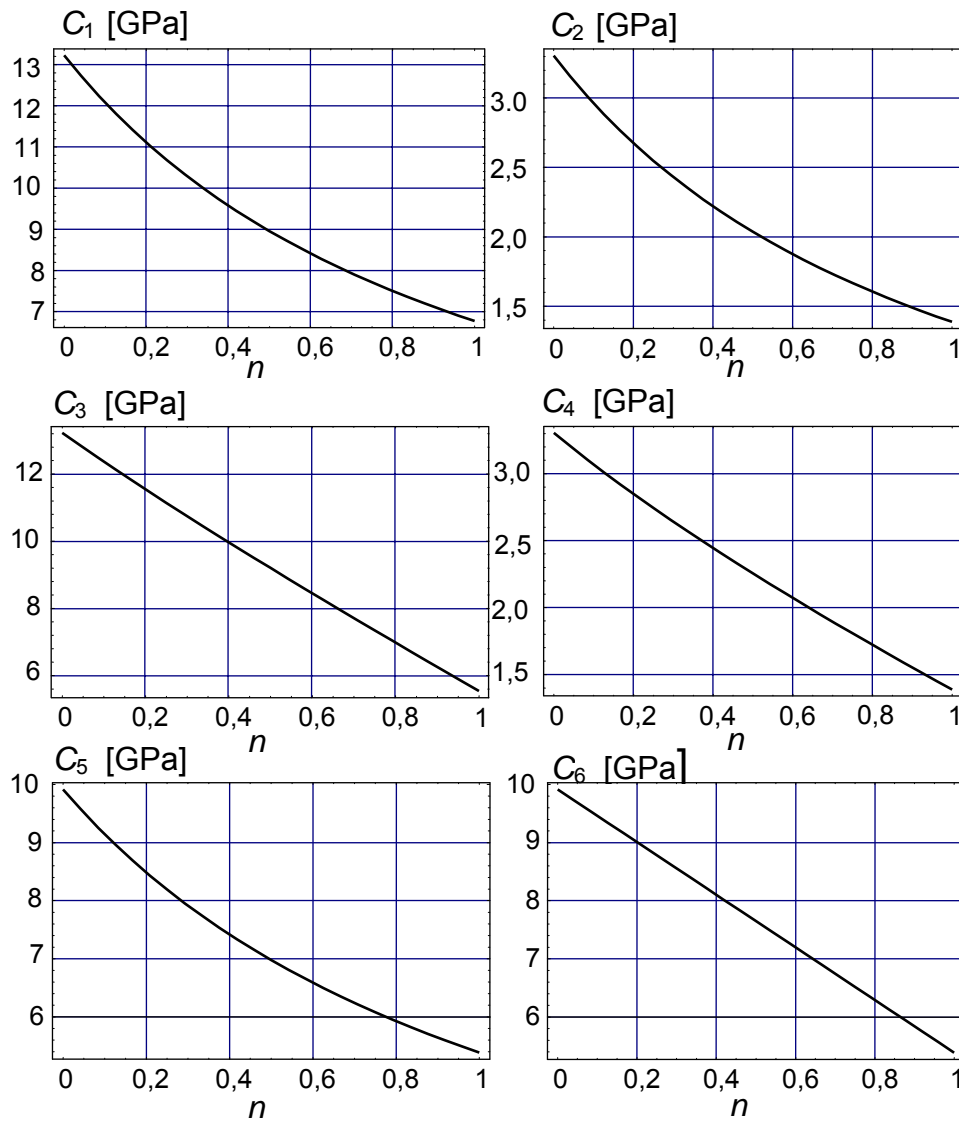
$$C_6 = 2n\mu_1 + 2(1-n)\mu_2. \quad (6.66f)$$

Na podstawie analizy otrzymanych związków sprężystości, tj. (6.65) i (6.66), łatwo zauważyć, że tak jak sugerowano już wcześniej, warstewkowość struktury indukuje anizotropię (efektywnych) własności mechanicznych ośrodka, a dokładniej – anizotropię osiowosymetryczną, zwaną również izotropią transwersalną [82].

Wpływ udziału frakcyjnego łupka na wartości poszczególnych efektywnych sztywności fliszu karpackiego przedstawiono na rysunku 6.20. W obliczeniach przyjęto: dla łupka – $E_1 = 6,3$ GPa i $\nu_1 = 0,17$ oraz dla piaskowca – $E_2 = 11,9$ GPa oraz $\nu_2 = 0,2$. Wartości te implikują, zgodnie ze wzorami [61]:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (6.67)$$

następujące wartości stałych Lamégo: dla łupka – $\lambda_1 = 1,39$ GPa i $\mu_1 = 2,69$ GPa oraz dla piaskowca – $\lambda_1 = 3,30$ GPa i $\mu_1 = 4,96$ GPa.



Rys. 6.20. Wartości sztywności efektywnych w funkcji udziału frakcyjnego łupka
Fig. 6.20. Values of effective stiffness as a function of shale volume fraction

6.2.2. Nośność graniczna

Poszukiwanie makroskopowego warunku nośności granicznej struktury warstewkowej ograniczamy do przypadku płaskiego stanu odkształcenia (przypadek najczęściej stosowany w praktyce inżyniera geotechnika). Warunek Coulomba–Mohra w układzie $y_1 0 y_2$ (rys. 6.21) można wtedy wyrazić

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}; c, \phi) = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \sigma_{12}^2} + \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \sin \phi - c \cos \phi \leq 0, \quad (6.68)$$

gdzie c i ϕ są parametrami wytrzymałościowymi, odpowiednio: spójnością i kątem tarcia wewnętrznego.

Warunek (6.68) można równoważnie zapisać również jako:

$$\sigma_{12}^2 \leq g(\sigma_{11}, \sigma_{22}; c, \phi) = \left(-\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \sin \phi + c \cos \phi \right)^2 - \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} \quad (6.69a)$$

$$\text{i}$$

$$0 \leq -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \sin \phi + c \cos \phi. \quad (6.69b)$$

Warunkiem koniecznym spełnienia nierówności (6.69), definiującym zarazem dopuszczalny zbiór wartości σ_{11} i σ_{22} , jest

$$\frac{|\sigma_{11} - \sigma_{22}|}{2} \leq -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \sin \phi + c \cos \phi, \quad (6.70)$$

co w konsekwencji prowadzi do następujących zależności

$$\sigma_1(\sigma_{11}, c, \phi) \leq \sigma_{22} \leq \sigma_2(\sigma_{11}, c, \phi) \quad \wedge \quad \sigma_{11} \leq c \operatorname{ctg} \phi, \quad (6.71)$$

w których:

$$\sigma_1(\sigma_{11}, c, \phi) = \sigma_{11} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - 2c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}, \quad (6.72a)$$

$$\sigma_2(\sigma_{11}, c, \phi) = \sigma_{11} \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} + 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (6.72b)$$

Definicja makroskopowej nośności granicznej struktury warstewkowej jest, podobnie jak dla systemu blokowego, konsekwencją ogólnego sformułowania makroskopowego warunku plastyczności (2.51), który – po uwzględnieniu lokalnych warunków równowagi (6.59) – przyjmuje postać:

$$F(\Sigma_{ij}) \leq 0$$

$$\Downarrow \quad (6.73)$$

$$\Sigma_{ij} \in P^h = \left\{ \left\langle \tau_{ij} \right\rangle \left| \exists \tau_{ij}(y_1), \frac{\partial \tau_{11}}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y_1} = 0, f(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}; c_1, \phi_1) \leq 0 \quad \forall y_1 \in V_1 \right. \right. \\ \left. \left. f(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}; c_2, \phi_2) \leq 0 \quad \forall y_1 \in V_2, \tau_{ij} - \text{lokalnie periodyczne} \right. \right\},$$

gdzie:

c_1, ϕ_1 – parametry wytrzymałościowe łupka,

c_2, ϕ_2 – parametry wytrzymałościowe piaskowca.

V_1 i V_2 – obszar w REO zajmowany przez łupek oraz przez piaskowiec (rys. 6.21).

Forma lokalnych warunków równowagi implikuje jednak $\tau_{11} = \langle \tau_{11} \rangle$ i $\tau_{12} = \langle \tau_{12} \rangle$, wobec tego rozkład pola mikronapężenia odpowiadający zadanemu stanowi makro-napężenia $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{22}\}$ można ogólnie scharakteryzować jako (rys. 6.21)

$$\sigma_{11}^{(0)}(y_1) = \Sigma_{11}, \quad \sigma_{12}^{(0)}(y_1) = \Sigma_{12}, \quad \sigma_{22}^{(0)}(y_1) = \begin{cases} \sigma & y_1 \in V_1 \\ \tau & y_1 \in V_2 \end{cases}, \quad \Sigma_{22} = n\sigma + (1-n)\tau. \quad (6.74)$$

Rozkład (6.74) implikuje następującą, równoważną, definicję zbioru P^h

$$F(\Sigma_{ij}) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Sigma_{ij} \in P^h \quad (6.75)$$

$$= \left\{ \Sigma_{ij} \left| \exists \sigma, f(\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \sigma; c_1, \phi_1) \leq 0 \wedge f\left(\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma; c_2, \phi_2\right) \leq 0 \quad \forall y_1 \in V_{\text{REO}} \right. \right\}.$$

Warunki konieczne spełnienia w poszczególnych warstwach kryterium plastyczności są konsekwencją nierówności (6.71), tj.

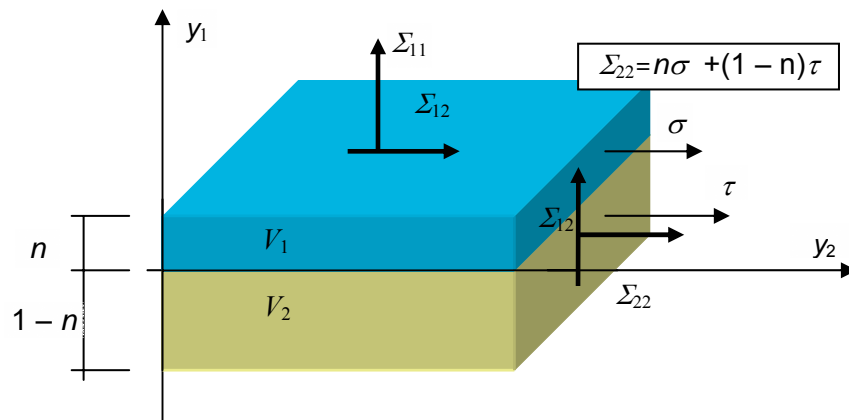
$$f(\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \sigma; c_1, \phi_1) \leq 0 \Leftrightarrow \sigma_1(\Sigma_{11}, c_1, \phi_1) \leq \sigma \leq \sigma_2(\Sigma_{11}, c_1, \phi_1) \wedge \Sigma_{11} \leq c_1 \operatorname{ctg} \phi_1,$$

$$f\left(\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma; c_2, \phi_2\right) \leq 0, \quad (6.76)$$

\Downarrow

$$\sigma_1(\Sigma_{11}, c_2, \phi_2) \leq \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma \leq \sigma_2(\Sigma_{11}, c_2, \phi_2) \wedge \Sigma_{11} \leq c_2 \operatorname{ctg} \phi_2,$$

gdzie funkcje σ_1 i σ_2 są zdefiniowane zależnościami (6.72).



Rys. 6.21. Rozkład pola mikronapężenia towarzyszący zadanemu stanowi makronapężenia
Fig. 6.21. Distribution of micro-stress field associated with given macro-stress state

Wobec tego, aby dla zadanego stanu $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{22}\}$ istniało takie σ , że kryteria plastyczności są spełnione (nie są przekroczone) równocześnie w obu warstwach, tzn.

$$\Sigma_{12}^2 \leq g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1) \wedge \Sigma_{12}^2 \leq g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma, c_2, \phi_2\right), \quad (6.77)$$

muszą być spełnione następujące ograniczenia (rys. 6.22):

$$\sigma_1(\Sigma_{11}, c_1, \phi_1) \leq \sigma \leq \sigma_2(\Sigma_{11}, c_1, \phi_1), \quad \sigma'_1(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, c_2, \phi_2) \leq \sigma \leq \sigma'_2(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, c_2, \phi_2),$$

$$\Sigma_{11} \leq \min(c_1 \operatorname{ctg} \phi_1, c_2 \operatorname{ctg} \phi_2),$$

$$\sigma'_1(c_2, \phi_2) \leq \sigma_2(c_1, \phi_1) \wedge \sigma_1(c_1, \phi_1) \leq \sigma'_2(c_2, \phi_2), \quad (6.78)$$

gdzie, zgodnie z zależnością (6.69a),

$$g(\Sigma_{11}, \sigma; c_1, \phi_1) = \left(-\frac{\Sigma_{11} + \sigma}{2} \sin \phi_1 + c_1 \cos \phi_1 \right)^2 - \frac{(\Sigma_{11} - \sigma)^2}{4},$$

$$g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma; c_2, \phi_2\right) = \left(-\frac{\Sigma_{11} + \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma}{2} \sin \phi_2 + c_2 \cos \phi_2 \right)^2 - \frac{\left(\Sigma_{11} - \frac{\Sigma_{22}}{1-n} + \frac{n}{1-n}\sigma\right)^2}{4} \quad (6.79)$$

oraz, jako bezpośrednia konsekwencja (6.76c),

$$\begin{aligned}\sigma'_2(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, c, \varphi) &= -\frac{1-n}{n} \Sigma_{11} \frac{1+\sin \phi}{1-\sin \phi} + \frac{1-n}{n} 2c \frac{\cos \phi}{1-\sin \phi} + \frac{\Sigma_{22}}{n}, \\ \sigma'_1(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, c, \varphi) &= -\frac{1-n}{n} \Sigma_{11} \frac{1-\sin \phi}{1+\sin \phi} - \frac{1-n}{n} 2c \frac{\cos \phi}{1+\sin \phi} + \frac{\Sigma_{22}}{n}.\end{aligned}\quad (6.80)$$

Warunki (6.78b) i (6.78c) wraz z zależnościami (6.80) definiują zbiór B^h dopuszczalnych stanów naprężenia $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\}$, tj.

$$\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\} \in B^h$$

⇓

$$\Sigma_{22} \leq \Sigma_{11} \left[n \frac{1-\sin \phi_1}{1+\sin \phi_1} + (1-n) \frac{1-\sin \phi_2}{1+\sin \phi_2} \right] + 2 \left[nc_1 \frac{\cos \phi_1}{1+\sin \phi_1} + (1-n) \frac{\cos \phi_2}{1+\sin \phi_2} \right]$$

i

$$\Sigma_{22} \geq \Sigma_{11} \left[n \frac{1+\sin \phi_1}{1-\sin \phi_1} + (1-n) \frac{1+\sin \phi_2}{1-\sin \phi_2} \right] - 2 \left[nc_1 \frac{\cos \phi_1}{1-\sin \phi_1} + (1-n) \frac{\cos \phi_2}{1-\sin \phi_2} \right] \quad (6.81)$$

i

$$\Sigma_{11} \leq \min(c_1 \operatorname{ctg} \phi_1, c_2 \operatorname{ctg} \phi_2),$$

taki, że: $\forall \{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\} \in B^h \exists \Sigma_{12}$ oraz $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{22}\} \in P^h$.

Implikuje to następującą, równoważną, definicję zbioru P^h jako iloczynu kartezjański dwóch zbiorów

$$P^h = B^h \times \left\{ \Sigma_{12} \left| \Sigma_{12}^2 \leq \sup_{\sigma} \left[\min \left(g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1), g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n} \sigma, c_2, \phi_2\right) \right) \right] \right. \right\}. \quad (6.82)$$

Oczywiście, punkty ekstremalne zbioru P^h to punkty $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{22}\}$, takie, że

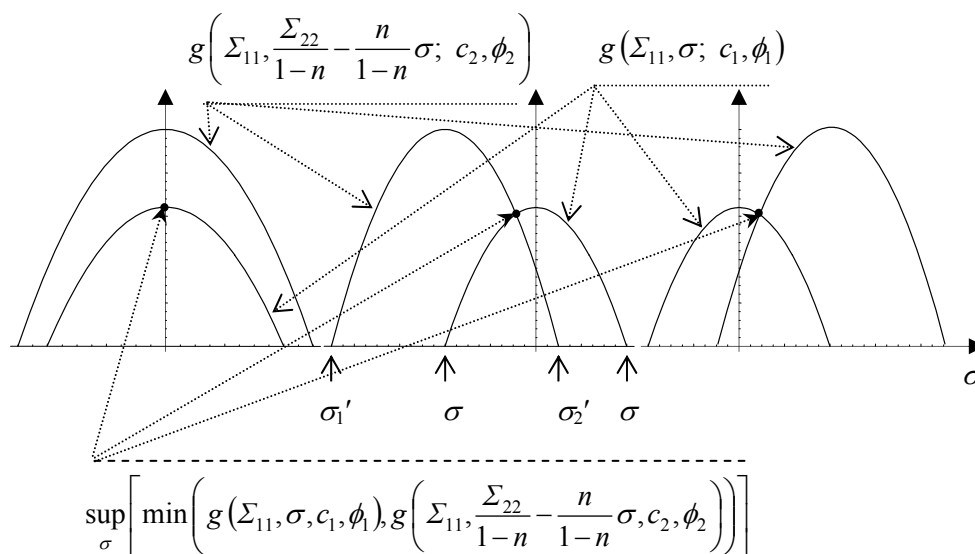
$$\begin{aligned}\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\} &\in B^h \wedge \Sigma_{12} \\ &= \pm \sqrt{\sup_{\sigma} \left[\min \left(g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1), g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n} \sigma, c_2, \phi_2\right) \right) \right]}.\end{aligned}\quad (6.83)$$

Określenie więc punktów ekstremalnych zbioru P^h (lub równoważnie – powierzchni nośności granicznej) jest nieliniowym zagadnieniem optymalizacyjnym.

W dalszej części, zgodnie z definicją (6.83), skoncentrowano się na wyznaczeniu warunku nośności granicznej struktury warstewkowej dla zadanych wartości liczbowych parametrów: c_1, c_2, ϕ_1, ϕ_2 oraz n . Przyjęto: dla łupka – $c_1 = 4$ MPa i $\phi_1 = 32^\circ$ oraz

dla piaskowca – $c_1 = 14$ MPa i $\phi_1 = 39^\circ$. Ponadto analizowano dwa przypadki, tj.: piaskowiec przewarstwiony łupkiem, który charakteryzowano przez $n = 0,2$, oraz łupek przewarstwiony piaskowcem – $n = 0,8$.

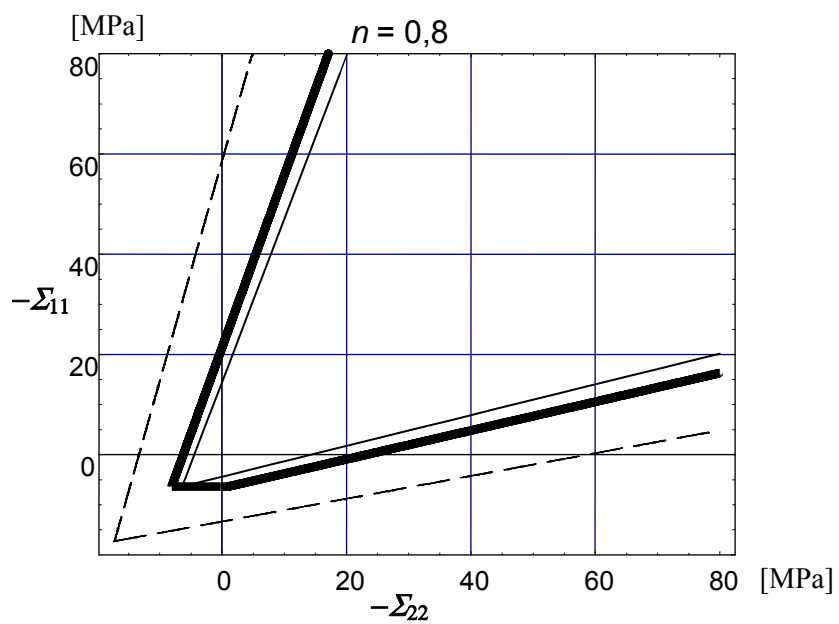
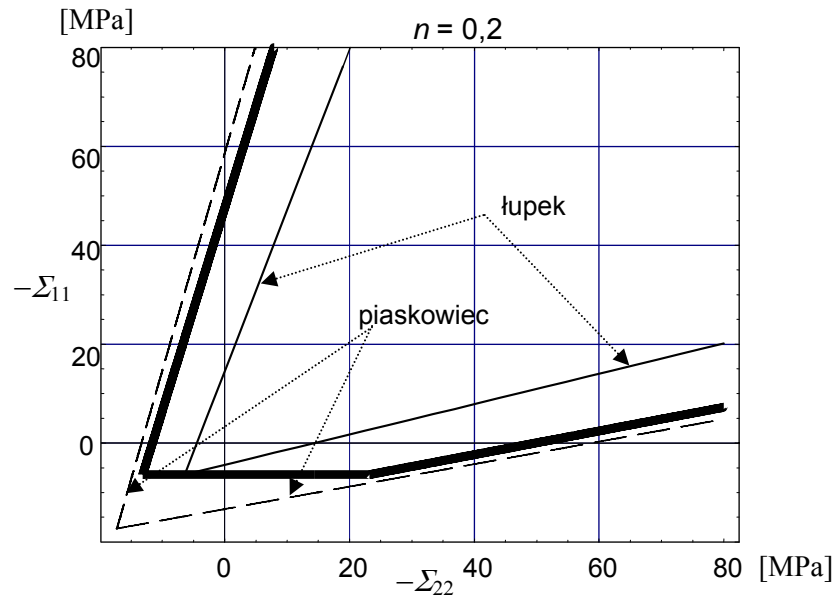
Zbiór B^h dopuszczalnych stanów naprężenia $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\}$, zdefiniowany nierównościami (6.81), dla przyjętych wartości parametrów wytrzymałościowych przedstawiono, odpowiednio dla $n = 0,2$ i $n = 0,8$, na rysunku 6.23 – obszar zawarty między pogrubionymi liniami.



Rys. 6.22. Geometryczna ilustracja punktów ekstremalnych
Fig. 6.22. Geometrical illustration of extremal points

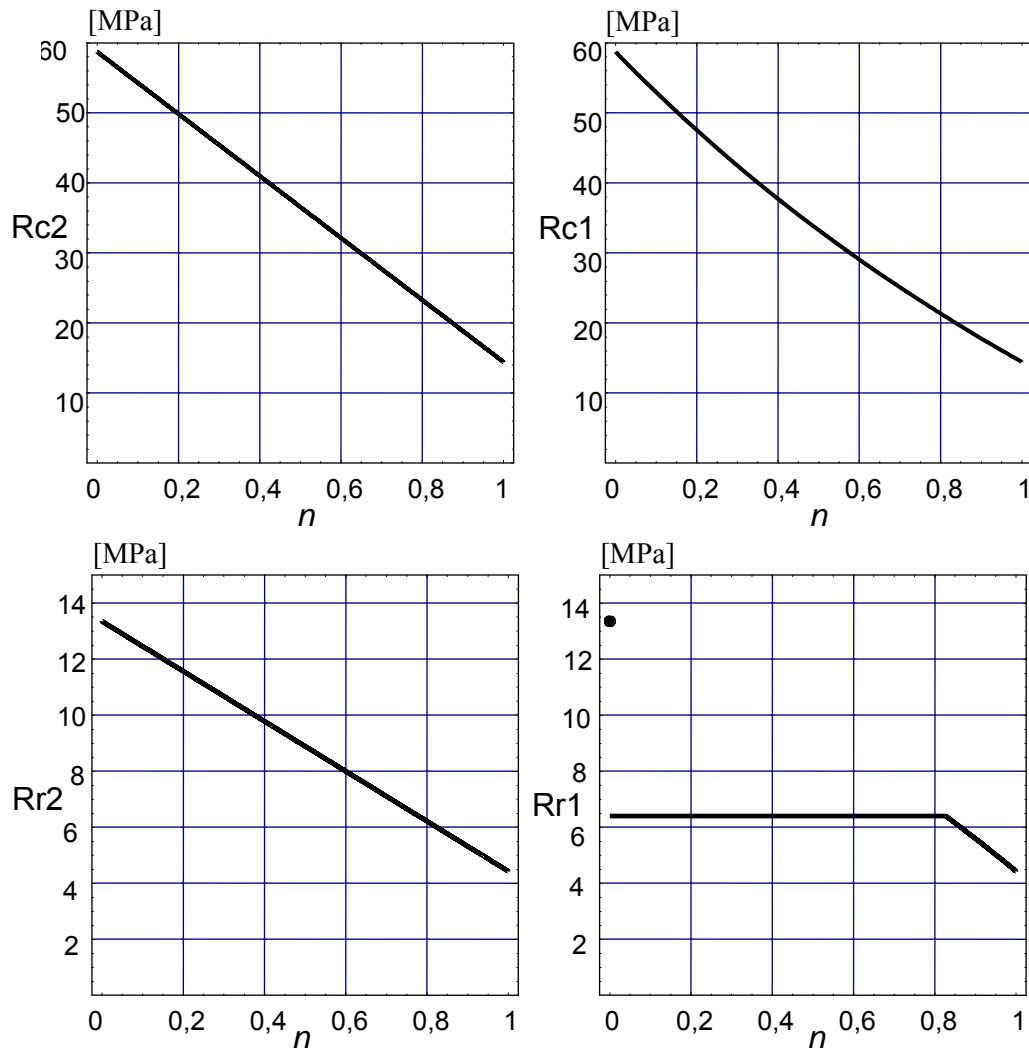
Zależności (6.81), definiujące zbiór B^h , umożliwiają również określenie wytrzymałości analizowanej struktury warstewkowej na jednoosiowe ściskanie i rozciąganie, w kierunkach y_1 i y_2 . Przedstawiają je, dla różnych wartości udziału frakcyjnego łupka, wykresy na rysunku 6.24. Zarówno z rysunku 6.23, jak i z rysunku 6.24 jasno wynika, że warstewkowość indukuje makroskopowo anizotropowe zachowanie plastyczne ośrodka. Widać również wyraźnie, że warstwa „najsłabsza” ma decydujący wpływ na wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie w kierunku y_1 – nawet przy infimezmalnie małym udziale łupka następuje gwałtowny spadek wytrzymałości na rozciąganie w kierunku prostopadłym do laminacji (rys. 6.24). Jest to oczywiście zgodne z zasadą, że o wytrzymałości łańcucha decyduje ogniwo najsłabsze.

Określenie wartości ekstremalnych naprężeń ścinających Σ_{12} , dla różnych punktów $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\} \in B^h$ dokonano numerycznie. Wykorzystano program *Mathematica*. Wartości te poszukiwano w funkcji Σ_{11} , przy ograniczeniu: $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} = \text{const}$. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 6.25 i 6.26.



Rys. 6.23. Zbiór B^h dopuszczalnych stanów naprężenia $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\}$

Fig. 6.23. Set B^h of admissible states of stresses $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\}$

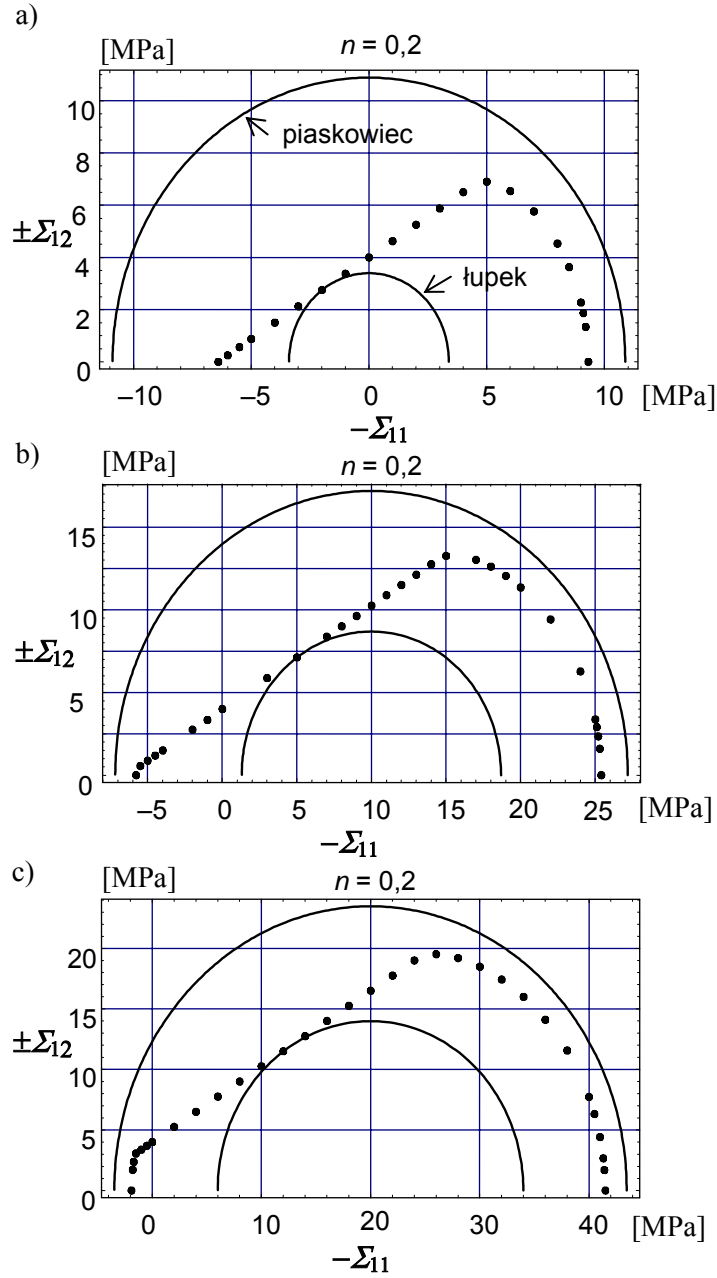


Rys. 6.24. Wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie i rozciąganie w funkcji udziału objętościowego łupka
 Fig. 6.24. Uniaxial compressive and tensile strengths versus shale volume fraction

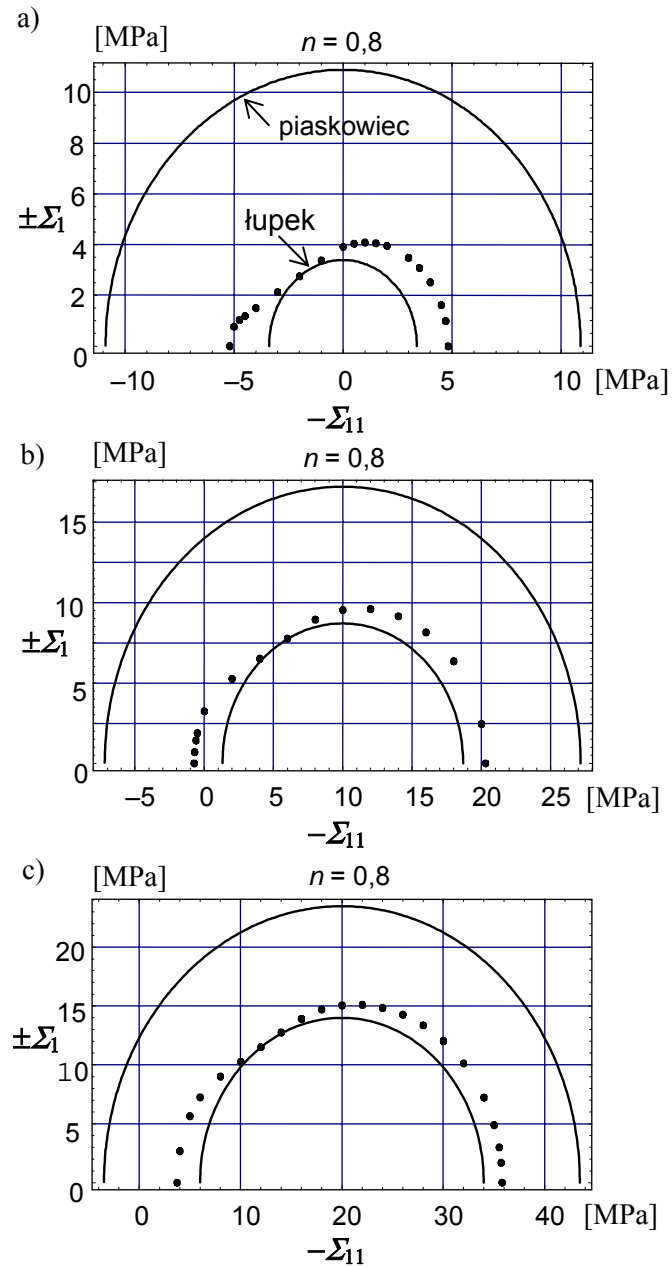
W przypadku ośrodka jednorodnego i izotropowego punkty ekstremalne Σ_{12} , przy $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} = \text{const}$, leżą na obwodzie kół Mohra. Warstwokowość struktury (rys. 6.25 i 6.26), degeneruje pierwotną postać kryterium plastyczności. Makroskopowy warunek nośności granicznej analizowanej struktury warstwowej można wyrazić

$$\Sigma_{12}^2 \leq F_i(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}), \quad (6.84)$$

przy czym dla różnych punktów $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\}$ postać funkcji $F_i(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ jest inna.



Rys. 6.25. Ekstremalne wartości naprężeń stycznych Σ_{12} w funkcji Σ_{11} :
 a) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 0$, b) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 10$, c) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 20$
 Fig. 6.25. Extremal values of shearing stress Σ_{12} versus Σ_{11} :
 a) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 0$, b) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 10$, c) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 20$



Rys. 6.26. Ekstremalne wartości naprężeń stycznych Σ_{12} w funkcji Σ_{11} :

a) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 0$, b) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 10$, c) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 20$

Fig. 6.26. Extremal values of shearing stress Σ_{12} versus Σ_{11} :

a) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 0$, b) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 10$, c) $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 20$

Okazuje się jednak, że zbiór B^h można podzielić na trzy podzbiory, w obrębie których funkcja ta ma stałą określoną postać. Pierwszy zbiór indukuje punkty ekstremalne Σ_{12} stowarzyszone z wierzchołkiem paraboli $g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1)$ (rys. 6.22). Zbiory drugi i trzeci to punkty ekstremalne Σ_{12} stowarzyszone z punktem przecięcia się parabol:

$$g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1) \quad \text{i} \quad g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma, c_2, \phi_2\right).$$

W konsekwencji otrzymano (rys. 6.27, 6.28, 6.29)

$$\boxed{n = 0,2}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad & 0,567\left(2,24 + 1,04\Sigma_{22} - 0,5\sqrt{(14,17 - \Sigma_{22})(94,48 - \Sigma_{22})}\right) \leq \Sigma_{11} \\ & \leq 0,567\left(2,24 + 1,04\Sigma_{22} + 0,5\sqrt{(14,17 - \Sigma_{22})(94,48 - \Sigma_{22})}\right) \\ & \quad \Downarrow \\ & F_1(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = (-\Sigma_{11} \operatorname{tg} \phi_1 + c_1)^2. \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{\Sigma_{22} - 2\left(nc_1 \frac{\cos \phi_1}{1 + \sin \phi_1} + (1-n)c_2 \frac{\cos \phi_2}{1 + \sin \phi_2}\right)}{\left(n \frac{1 - \sin \phi_1}{1 + \sin \phi_1} + (1-n) \frac{1 - \sin \phi_2}{1 + \sin \phi_2}\right)} \leq \Sigma_{11} \\ & \leq 0,567\left(2,24 + 1,04\Sigma_{22} - 0,5\sqrt{(14,17 - \Sigma_{22})(94,48 - \Sigma_{22})}\right) \\ & \quad \Downarrow \\ & F_2(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = 104,66 - 0,675(0,453 + \Sigma_{11})\Sigma_{11} - 10,587\Sigma_{22} \\ & + 1,22\Sigma_{11}\Sigma_{22} - 0,276\Sigma_{22}^2 \\ & + 0,518(8,678 - \Sigma_{11} + 0,453\Sigma_{22}) \\ & \sqrt{-93,89 - \Sigma_{11}(3,536 - \Sigma_{11}) + 10,08\Sigma_{22} - 1,16\Sigma_{11}\Sigma_{22} + 0,263\Sigma_{22}^2}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

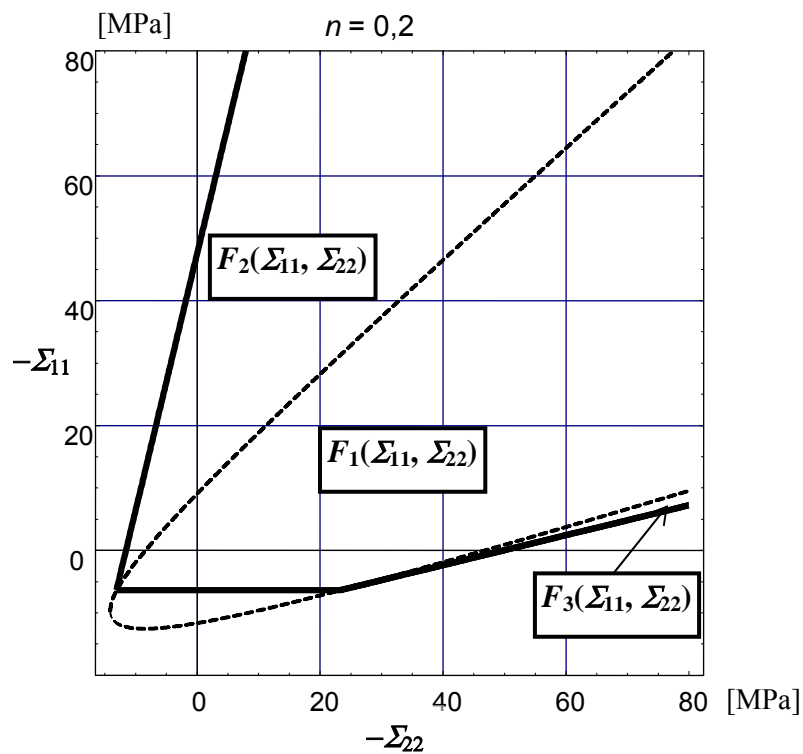
$$3. \quad 0,567 \left(2,24 + 1,04 \Sigma_{22} + 0,5 \sqrt{(14,17 - \Sigma_{22})(94,48 - \Sigma_{22})} \right) \leq \Sigma_{11}$$

$$\leq \frac{\Sigma_{22} + 2 \left(n c_1 \frac{\cos \phi_1}{1 - \sin \phi_1} + (1 - n) c_2 \frac{\cos \phi_2}{1 - \sin \phi_2} \right)}{\left(n \frac{1 + \sin \phi_1}{1 - \sin \phi_1} + (1 - n) \frac{1 + \sin \phi_2}{1 - \sin \phi_2} \right)}$$

$$\Downarrow$$

(6.87)

$$\begin{aligned} F_3(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= 104,66 - 0,675(0,453 + \Sigma_{11})\Sigma_{11} - 10,587\Sigma_{22} \\ &+ 1,22\Sigma_{11}\Sigma_{22} - 0,276\Sigma_{22}^2 - 0,518(8,678 - \Sigma_{11} + 0,453\Sigma_{22}) \\ &\times \sqrt{-93,89 - \Sigma_{11}(3,536 - \Sigma_{11}) + 10,08\Sigma_{22} - 1,16\Sigma_{11}\Sigma_{22} + 0,263\Sigma_{22}^2}. \end{aligned}$$



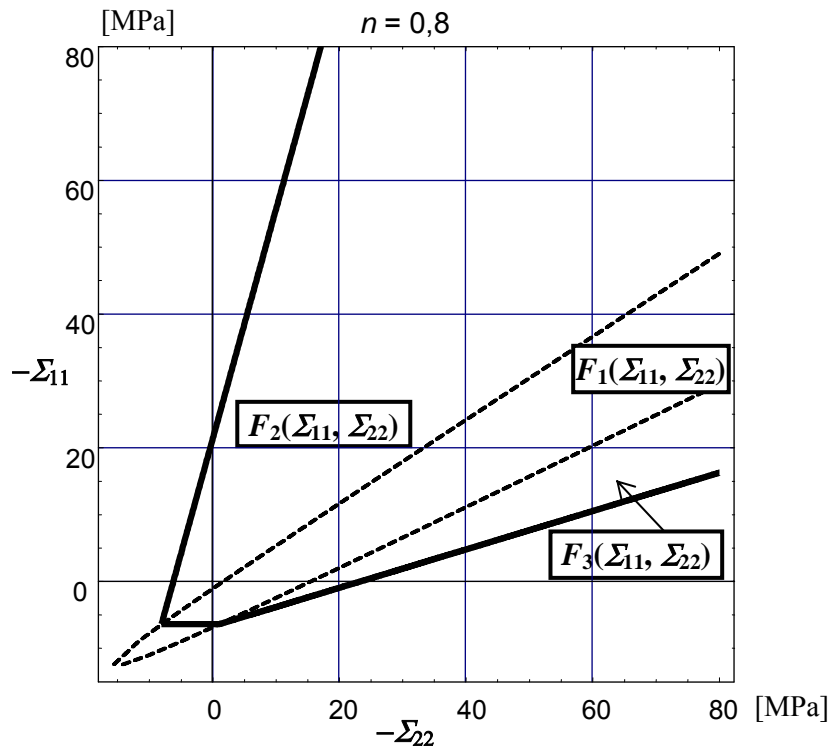
Rys. 6.27. Obszary obowiązywania różnych postaci makroskopowego kryterium nośności granicznej
Fig. 6.27. Domains of validity of different forms of macroscopic ultimate strength criterion

$n = 0,8$

$$\begin{aligned}
1. \quad & 0,038 \left(103,9 + 14,25 \Sigma_{22} - 2,0 \sqrt{(15,53 - \Sigma_{22}) (93,13 - \Sigma_{22})} \right) \leq \Sigma_{11} \\
& \leq 0,038 \left(103,9 + 14,25 \Sigma_{22} + 2,0 \sqrt{(15,53 - \Sigma_{22}) (93,13 - \Sigma_{22})} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& F_1(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = (-\Sigma_{11} \operatorname{tg} \phi_1 + c_1)^2.
\end{aligned} \tag{6.88}$$

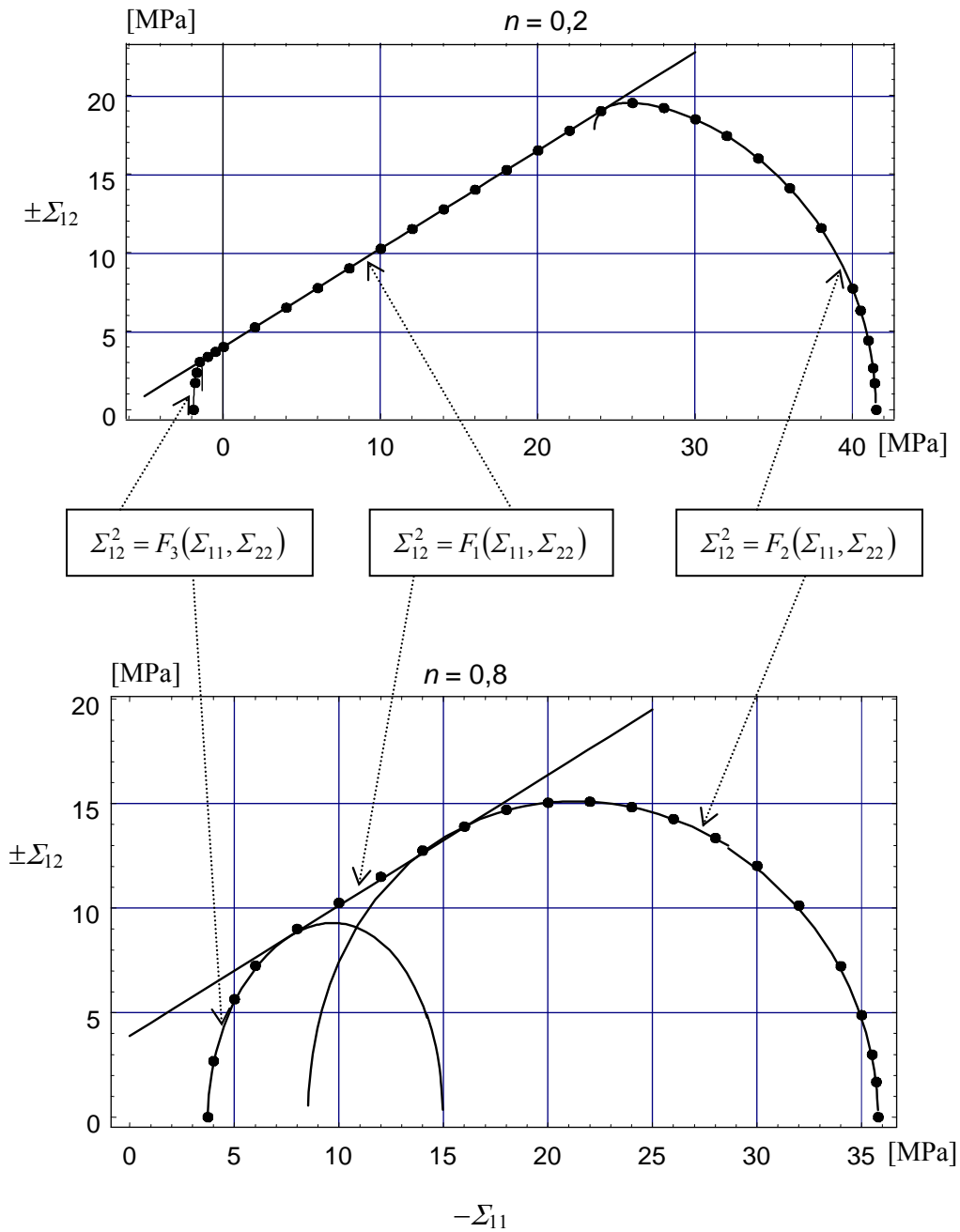
$$\begin{aligned}
2. \quad & \frac{\Sigma_{22} - 2 \left(nc_1 \frac{\cos \phi_1}{1 + \sin \phi_1} + (1-n)c_2 \frac{\cos \phi_2}{1 + \sin \phi_2} \right)}{\left(n \frac{1 - \sin \phi_1}{1 + \sin \phi_1} + (1-n) \frac{1 - \sin \phi_2}{1 + \sin \phi_2} \right)} \leq \Sigma_{11} \\
& \leq 0,038 \left(103,9 + 14,25 \Sigma_{22} - 2,0 \sqrt{(15,53 - \Sigma_{22}) (93,13 - \Sigma_{22})} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& F_2(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = -24,13 + 0,88(8,77 - \Sigma_{11})\Sigma_{11} - 6,01\Sigma_{22} \\
& + 1,33\Sigma_{11}\Sigma_{22} - 0,35\Sigma_{22}^2 + 0,711(4,52 - \Sigma_{11} + 0,53\Sigma_{22}) \\
& \times \sqrt{150,14 - \Sigma_{11}(20,39 - \Sigma_{11}) + 3,85\Sigma_{22} - 0,85\Sigma_{11}\Sigma_{22} + 0,225\Sigma_{22}^2}.
\end{aligned} \tag{6.89}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & 0,038 \left(103,9 + 14,25 \Sigma_{22} + 2,0 \sqrt{(15,53 - \Sigma_{22}) (93,13 - \Sigma_{22})} \right) \leq \Sigma_{11} \\
& \leq \frac{\Sigma_{22} + 2 \left(nc_1 \frac{\cos \phi_1}{1 - \sin \phi_1} + (1-n)c_2 \frac{\cos \phi_2}{1 - \sin \phi_2} \right)}{\left(n \frac{1 + \sin \phi_1}{1 - \sin \phi_1} + (1-n) \frac{1 + \sin \phi_2}{1 - \sin \phi_2} \right)} \\
& \quad \Downarrow \\
& F_3(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = -24,13 + 0,88(8,77 - \Sigma_{11})\Sigma_{11} - 6,01\Sigma_{22} \\
& + 1,33\Sigma_{11}\Sigma_{22} - 0,35\Sigma_{22}^2 - 0,711(4,52 - \Sigma_{11} + 0,53\Sigma_{22}) \\
& \times \sqrt{150,14 - \Sigma_{11}(20,39 - \Sigma_{11}) + 3,85\Sigma_{22} - 0,85\Sigma_{11}\Sigma_{22} + 0,225\Sigma_{22}^2}.
\end{aligned} \tag{6.90}$$



Rys. 6.28. Obszary obowiązywania różnych postaci makroskopowego kryterium nośności granicznej
 Fig. 6.28. Domains of validity of different forms of macroscopic ultimate strength criterion

Przedstawione opisy (6.85)–(6.88) i (6.88)–(6.90) otrzymano dla ustalonych wartości parametrów wytrzymałościowych składników struktury warstewkowej oraz przy ustalonym udziale objętościowym łupka, tj. $n = 0,2$ oraz $n = 0,8$. W przeciwieństwie do parametrów efektywnych sprężystości, nie podano tym razem „zamkniętych” związków określających parametry efektywne plastyczności w funkcji parametrów wytrzymałościowych mikrostruktury, a jedynie wynik końcowy (ilościowy) – w postaci kryterium nośności dla zadanych parametrów wytrzymałościowych składników struktury. Na podstawie omówionego wcześniej stwierdzenia, że punkty ekstremalne są związane z wierzchołkami parabol lub punktami ich przecięcia, takie zależności można wyprowadzić i autor niniejszego opracowania tego dokonał. Otrzymane związki są jednak bardzo skomplikowane i dlatego nie zostały tutaj przedstawione. Bardziej racjonalne jest konstruowanie warunku nośności granicznej dla zadanych wartości parametrów wytrzymałościowych elementów struktury, tak jak to przedstawiono w niniejszym punkcie.



Rys. 6.29. Warunek nośności granicznej przy: $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 20$ MPa
 Fig. 6.29. Ultimate strength condition at $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 20$ MPa

Procedura jest bardzo prosta, tzn.

$$1. \quad \sigma_o = \frac{1}{2}(\sigma_1(\Sigma_{11}, c_1, \phi_1) + \sigma_2(\Sigma_{11}, c_1, \phi_1)) \quad (6.91)$$

jest współrzędną wierzchołka paraboli $g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1)$, której odpowiada

$$2. \quad g(\Sigma_{11}, \sigma_o, c_1, \phi_1) = (-\Sigma_{11} \operatorname{tg} \phi_1 + c_1)^2. \quad (6.92)$$

Jest to poszukiwany punkt ekstremalny wtedy i tylko wtedy, gdy (rys. 6.22)

$$3. \quad g(\Sigma_{11}, \sigma_o, c_1, \phi_1) \leq g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n} \sigma_o, c_2, \phi_2\right). \quad (6.93)$$

Nierówność ta definiuje podzbiór zbioru B^h (na rysunkach 6.27 i 6.28 obszar zawarty między liniami przerywanymi), dla którego punkty ekstremalne Σ_{12} są określone zależnością

$$4. \quad \Sigma_{12}^2 = F_1(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) = (-\Sigma_{11} \operatorname{tg} \phi_1 + c_1)^2 \quad (6.94)$$

Pozostałe dwa podzbiory zbioru B^h (na rysunkach 6.27 i 6.28 obszary zawarte między linią pogrubioną i linią przerywaną) indukują punkty ekstremalne Σ_{12} , wyznaczone przez punkty przecięcia się parabol, tzn. należy najpierw – ze względu na parametr σ – rozwiązać równanie kwadratowe (rys. 6.22)

$$5. \quad g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1) = g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n} \sigma, c_2, \phi_2\right), \quad (6.95)$$

którego pierwiastki $\bar{\sigma}_1$ i $\bar{\sigma}_2$ definiują poszukiwane ostatnie dwie funkcje

$$6. \quad \begin{aligned} F_2(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= g(\Sigma_{11}, \bar{\sigma}_1, c_1, \phi_1), \\ F_3(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}) &= g(\Sigma_{11}, \bar{\sigma}_2, c_1, \phi_1). \end{aligned} \quad (6.96)$$

Opisane kolejne „kroki” bardzo prosto i szybko realizuje się za pomocą programu *Mathematica*.

Dla innych wartości parametrów wytrzymałościowych, jak również innych wartości udziału objętościowego n , opis nośności granicznej struktury warstewkowej jest jakościowo podobny (rys. 6.29), przy założeniu, że składniki ośrodka mają tzw. „uporządkowane wartości” parametrów wytrzymałościowych.

Termin „uporządkowane wartości” jest rozumiany w tym sensie, że jeśli $c_1 < c_2$, to również $\phi_1 < \phi_2$, lub jeśli $c_1 > c_2$, to również $\phi_1 > \phi_2$. W takim przypadku, przy warunku plastyczności według kryterium Coulomba–Mohra, warstwa cechująca się mniejszymi wartościami parametrów wytrzymałościowych, niezależnie od wartości składowych tensora naprężenia, ale takich samych dla obu składników struktury, jest „słabsza”. Funkcja $F_1(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$, odpowiadająca wierzchołkowi paraboli $g(\sigma)$ materiału

słabszego, charakteryzuje się więc parametrami wytrzymałościowymi, tzn. c i ϕ , odpowiadającymi materiałowi słabszemu: $c = \min(c_1, c_2)$ i $\phi = \min(\phi_1, \phi_2)$. Jeśli natomiast struktura ma składniki o „wartościach nieuporządkowanych”, np. $c_1 < c_2$ i $\phi_1 > \phi_2$, to stwierdzenie, czy dany składnik jest „słabszy” czy „mocniejszy”, jest funkcją aktualnego stanu naprężenia (por. np. (6.69)). Funkcja $F_1(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$, w zależności od aktualnego (makroskopowego) stanu naprężenia, charakteryzowana będzie przez parametry wytrzymałościowe jednego bądź drugiego składnika struktury – aktualnie „słabszego”. Zależności (6.81), definiujące zbiór B^h dopuszczalnych stanów naprężenia $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\}$, pozostają nadal aktualne. Zbiór B^h należy jednak podzielić na cztery podzbiory, w obrębie których kryterium nośności granicznej struktury warstewkowej ma stałą określoną postać. Pierwszy zbiór, podobnie jak dla struktury o „wartościach uporządkowanych” parametrów wytrzymałościowych, indukuje punkty ekstremalne Σ_{12} stowarzyszone z wierzchołkiem paraboli

$$g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1)$$

(rys. 6.22). Drugi zbiór indukuje jednak punkty ekstremalne stowarzyszone z wierzchołkiem paraboli

$$g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma, c_2, \phi_2\right).$$

Trzeci i czwarty zbiór, znów jak dla struktury o „wartościach uporządkowanych”, to punkty ekstremalne Σ_{12} stowarzyszone z punktem przecięcia się parabol:

$$g(\Sigma_{11}, \sigma, c_1, \phi_1) \quad \text{i} \quad g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma, c_2, \phi_2\right).$$

W takim więc przypadku ostateczny opis matematyczny nośności granicznej struktury warstewkowej jest jeszcze bardziej skomplikowany, choć metodyka i procedura jego określania jest analogiczna do przedstawionej w niniejszym punkcie dla struktury o „wartościach uporządkowanych”.

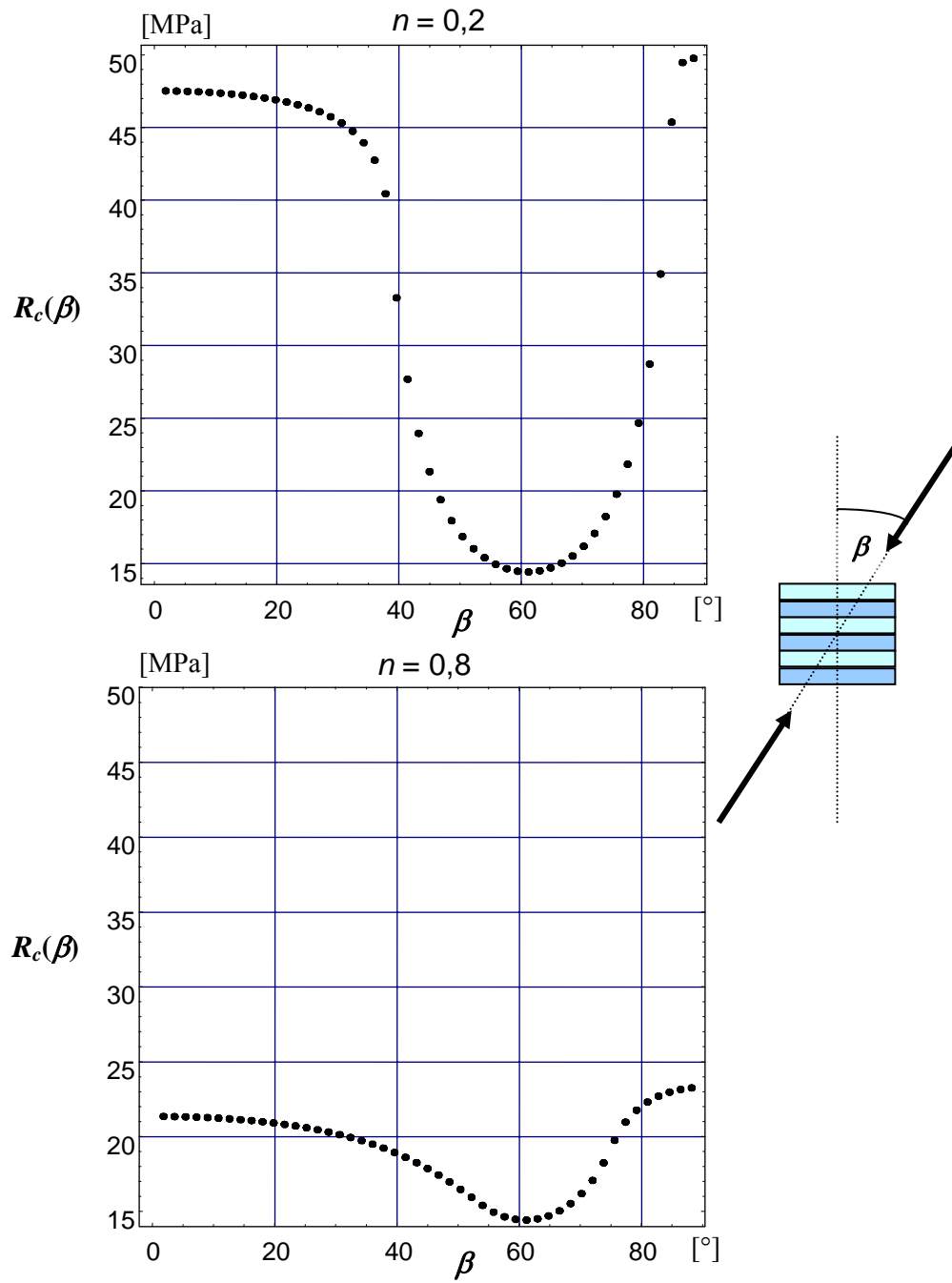
W niniejszym punkcie nie przedstawiono opisu ilościowego tego drugiego przypadku, tj. struktury o „wartościach nieuporządkowanych”, z dwóch przyczyn:

1. Metodyka i procedury numeryczne poszukiwania punktów ekstremalnych są podobne do stosowanych dla struktury o „wartościach uporządkowanych”; opisany wcześniej algorytm musi być uzupełniony o procedurę wyznaczania podzbioru B^h indukującego punkty ekstremalne stowarzyszone z wierzchołkiem paraboli

$$g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\sigma, c_2, \phi_2\right):$$

niech $\bar{\sigma}_o$ jest wierzchołkiem tej paraboli, wtedy poszukiwany podzbiór definiuje nierówność

$$g(\Sigma_{11}, \bar{\sigma}_o, c_1, \phi_1) \geq g\left(\Sigma_{11}, \frac{\Sigma_{22}}{1-n} - \frac{n}{1-n}\bar{\sigma}_o, c_2, \phi_2\right). \quad (6.97)$$



Rys. 6.30. Wartości wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie dla różnych kierunków obciążenia
 Fig. 6.30. Uniaxial compressive strength versus direction of loading

2. Parametry wytrzymałościowe składników fliszu karpackiego, tj. łupka i piaskowca, mają „wartości uporządkowane” – łupek jest zdecydowanie „słabszym” materiałem niż piaskowiec.

Przedstawione wyniki nośności granicznej dla tej „prostszej” struktury już, zdaniem autora niniejszej monografii, w sposób oczywisty dowodzą zarówno efektywności, jak i użyteczności metody homogenizacji w praktyce inżyniera geotechnika.

Efektywność i użyteczność metody homogenizacji nie jest jeszcze tak wyraźna w przypadku parametrów efektywnych sprężystości – sześć stałych makroskopowych jest funkcją pięciu parametrów: po dwie stałe sprężystości dla każdej z warstw oraz udział objętościowy łupka. Otrzymany opis makroskopowy nośności granicznej struktury warstewkowej, np. (6.85)–(6.87), zawiera już jednak dużą liczbę stałych materiałowych (26 stałych). Jednocześnie informacja wykorzystana do jego skonstruowania to: postać na poziomie lokalnym warunku plastyczności (6.68), cztery wartości parametrów wytrzymałościowych (c_1 , c_2 , ϕ_1 , ϕ_2) oraz udział objętościowy łupka n .

Zastosowanie metody homogenizacji pozwala więc ograniczyć badania laboratoryjne do najprostszego testu, tzn. badania wytrzymałości łupka oraz piaskowca w aparacie bezpośredniego ścinania, w celu określenia niezbędnych parametrów wytrzymałościowych składników struktury: c_1 , ϕ_1 (łupek) oraz c_2 i ϕ_2 (piaskowiec),

Analizę nośności granicznej skał fliszu karpackiego kończy zależność wartości wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie w funkcji kierunku obciążenia (rys. 6.30). Jest ona bezpośrednią konsekwencją prezentowanych opisów (6.85)–(6.87) i (6.88)–(6.90) oraz związków transformacyjnych związanych z obrotem układu współrzędnych. Anizotropia ośrodka jest bardzo wyraźna (rys. 6.30), przy czym szczególnie duże różnice w wartości wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie, dla różnych kierunków obciążenia, występują w ośrodku o małym udziale objętościowym łupka.

6.3. Grunt zbrojony – nośność graniczna

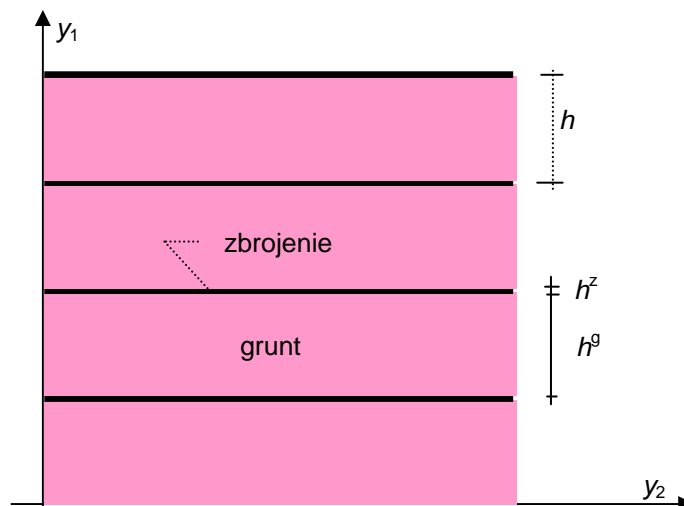
W praktyce inżyniera geotechnika coraz częściej obecnie, w celu zabezpieczenia stateczności konstrukcji geotechnicznych, stosowane są różnego rodzaju techniki „ulepszania” masywu gruntowego i skalnego [3], [6], [28]. Jednym z częstych zabiegów geotechnicznych jest zbrojenie masywu gruntowego (np.: gwoździowanie, kotwienie, mikropale) oraz stosowanie konstrukcji z gruntu zbrojonego.

Analizę stateczności „ulepszanego” zbrojeniem ośrodka gruntowego można na ogół prowadzić na dwa, metodologicznie odmienne, sposoby. Pierwsze podejście to potraktowanie ośrodka zbrojonego jako wieloskładnikowego ośrodka niejednorodnego o wyraźnie wyróżnionych składnikach – ośrodek dyskretny. W podejściu tym parametry analizowanego ośrodka są więc funkcją miejsca, tzn.: zależnie od tego, czy dane współrzędne przestrzenne należą do zbrojenia czy do gruntu, odpowiadają temu ośrodkowi parametry mechaniczne charakterystyczne dla zbrojenia lub gruntu. Anali-

za stateczności zbrocza wytworzonego w takim ośrodku wymaga więc, poza nielicznymi przypadkami trywialnymi, zastosowania kodów numerycznych metody stanów granicznych. Oczywiście, wraz ze wzrostem liczby zbrojenia (gęstości) wydłuża to czas obliczeń, a w przypadkach ekstremalnych może prowadzić do niestabilności schematu numerycznego, wówczas, tzn. przy dużej wartości gęstości zbrojenia, ośrodek taki traktuje się jako jednorodny ośrodek ciągły o parametrach efektywnych, będących złożoną funkcją rodzimych parametrów mechanicznych gruntu i zbrojenia. Podejście to stosowane jest bardzo często do analizy stateczności konstrukcji z gruntu zbrojonego [67], [138].

Technologia wykonania konstrukcji z gruntu zbrojonego jest bardzo prosta – polega na naprzemiennym ułożeniu warstwy gruntu i materiału wzmacniającego (tzw. zbrojenia). Jest to więc dwuskładnikowy materiał kompozytowy (rys. 6.31). Różne rodzaje zbrojenia oraz stosowanych konstrukcji z gruntu zbrojonego są omówione obszernie w pracy [138].

W niniejszym punkcie przedstawiono, opierając się na metodzie homogenizacji, konstrukcję nośności granicznej gruntu zbrojonego wkładkami stalowymi.



Rys. 6.31. Grunt zbrojony
Fig. 6.31. Reinforced soil

Dla poszczególnych elementów analizowanego geokompozytu przyjęto następujące hipotezy wytrzymałościowe: hipotezę Coulomba–Mohra (grunt) oraz hipotezę Treski (stal). Rozważa się tylko płaski stan odkształcenia. Ponadto, ponieważ hipotezę Treski można otrzymać z hipotezy Coulomba–Mohra przez przyjęcie zerowej wartości kąta tarcia wewnętrznego, w konstrukcji nośności granicznej gruntu zbrojonego dogodnie jest więc przyjąć, że wytrzymałość obu składników geokompozytu jest okre-

ślona przez kryterium Coulomba–Mohra, przy czym stal charakteryzuje się zerową wartością kąta tarcia wewnętrznego.

W przypadku klasycznych konstrukcji z gruntu zbrojonego gruntem zasypowym jest grunt sypki o dużej wartości kąta tarcia wewnętrznego, co implikuje przyjęcie w analizie zerowej wartości spójności dla gruntu. Jedynymi niezerowymi parametrami wytrzymałościowymi składników ośrodka są więc: ϕ – kąt tarcia wewnętrznego gruntu oraz c – wartość spójności (stal). Parametrem charakteryzującym ilościowo mikrostrukturę gruntu zbrojonego jest udział frakcyjny zbrojenia w geokompozycie (rys. 6.31): $n = h^z/h$ (h^z – grubość pojedynczego zbrojenia, h – rozstaw między kolejnymi warstwami zbrojenia).

Grunt zbrojony to materiał o strukturze warstewkowej (rys. 6.31), można więc zastosować cały algorytm konstrukcji nośności granicznej przedstawiony w poprzednim punkcie.

W przedstawionej poniżej analizie wykorzystano jednak pewną specyfikę gruntu zbrojonego, wyraźnie modyfikującą (upraszczającą) rozważania. Mianowicie, udział frakcyjny zbrojenia w konstrukcjach z gruntu zbrojonego jest bardzo mały (rzędu 10^{-2}), a równocześnie wytrzymałość tego zbrojenia na ścinanie (wartość spójności c) jest nieporównywalnie większa niż, przy typowo spotykanych w praktyce małych wartościach naprężenia, wytrzymałość samego gruntu: $|\sigma_{11}| \tan \phi$. Matematycznie wyraża się to jako [51]: $n \rightarrow 0$ i $2nc \rightarrow \sigma_o$, gdzie: $\sigma_o = R_t/h$, R_t – wytrzymałość pojedynczej warstwy zbrojenia na jednoosiowe rozciąganie, liczona na jednostkę długości w kierunku prostopadłym do płaszczyzny $y_1 y_2$ (rys. 6.31). Ponadto, warunek $n \rightarrow 0$ pozwala (w granicy) wykorzystać następującą tożsamość: $A(1 - n) = A$.

Zgodnie z zależnościami (6.71) i (6.72), dopuszczalne stany pola mikronaprężenia $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}\}$ definiują nierówności:

➤ dla gruntu

$$\sigma_{11}^g \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \leq \sigma_{22}^g \leq \sigma_{11}^g \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \wedge \sigma_{11}^g \leq 0, \quad (6.98)$$

➤ dla zbrojenia

$$\sigma_{11}^z - 2c \leq \sigma_{22}^z \leq \sigma_{11}^z + 2c, \quad (6.99a)$$

$$\sigma_{22}^z \geq 0, \quad (6.99b)$$

gdzie górne indeksy g oraz z odpowiadają gruntowi oraz zbrojeniu.

Ze względu na możliwość wystąpienia przy ściskaniu wyboczenia zbrojenia wprowadzono dodatkowo warunek (6.99b).

Na podstawie ogólnej postaci rozkładu pola mikronaprężenia dla struktur warstewkowych (rys. 6.21 – tym razem jednak miejsce łupka odpowiada zbrojeniu ($\sigma_{22}^z = \sigma$), a piaskowca – gruntowi ($\sigma_{22}^g = \tau$)), nierówności (6.98) i (6.99) można zapisać w postaci

$$\Sigma_{11} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \leq \tau \leq \Sigma_{11} \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \wedge \Sigma_{11} \leq 0, \quad (6.100a)$$

$$0 \leq \sigma \leq \Sigma_{11} + 2c$$

lub równoważnie

$$(1-n)\Sigma_{11} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - (1-n)\Sigma_{11} \leq (1-n)(\tau - \Sigma_{11}) \quad (6.100b)$$

$$\leq (1-n)\Sigma_{11} \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} - (1-n)\Sigma_{11} \wedge \Sigma_{11} \leq 0,$$

$$-n\Sigma_{11} \leq n(\sigma - \Sigma_{11}) \leq 2nc.$$

Po dodaniu do siebie stronami nierówności (6.100a) oraz skorzystaniu ze stwierdzenia, że $2nc \xrightarrow{n \rightarrow 0} \sigma_o$, jak również (rys. 6.21): $n\sigma + (1-n)\tau = \Sigma_{22}$, otrzymujemy

$$\Sigma_{11} \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \leq \Sigma_{22} \leq \Sigma_{11} \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} + \sigma_o \wedge \Sigma_{11} \leq 0. \quad (6.101)$$

Nierówności (6.101) definiują zbiór B^h dopuszczalnych stanów makronapężenia $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\}$. Reprezentację graficzną tego zbioru przedstawiono na rysunku 6.32.

Definicję zbioru P^h (brzeg tego zbioru to warunek nośności granicznej) dopuszczalnych stanów makronapężenia $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{22}\}$, podobnie jak w poprzednim punkcie, można wyrazić przez iloczyn kartezjański zbioru B^h oraz zbioru dopuszczalnych makronapężeń Σ_{12} . Zauważmy przedtem, że w granicy $n \rightarrow 0$

$$0 \leq q = n(\sigma - \Sigma_{11}) \leq \sigma_o \quad (6.102)$$

oraz, dzięki tożsamości $q + (1-n)\tau = \Sigma_{22} - n\Sigma_{11}$,

$$\Sigma_{11} - \tau = (1-n)(\Sigma_{11} - \tau) = (1-n)\Sigma_{11} + n\Sigma_{11} - \Sigma_{22} + q = \Sigma_{11} - \Sigma_{22} + q, \quad (6.103)$$

$$\Sigma_{11} + \tau = (1-n)(\Sigma_{11} + \tau) = (1-2n)\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - q = \Sigma_{11} + \Sigma_{22} - q.$$

Jeśli przyjąć, że wyczerpaniu nośności gruntu zbrojonego towarzyszy zawsze uplastycznienie warstwy gruntu, to zbiór P^h można zdefiniować jako

$$P^h = B^h \times \left\{ \Sigma_{12} \left| \Sigma_{12}^2 \leq \sup_{0 \leq q \leq \sigma_o} \left(\left(\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - q}{2} \sin \phi \right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22} + q}{2} \right)^2 \right) \right. \right\}. \quad (6.104)$$

Punkty ekstremalne zbioru P^h to punkty $\{\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{22}\}$, takie że

$$\{\Sigma_{11}, \Sigma_{22}\} \in B^h \wedge \Sigma_{12} = \pm \sqrt{\sup_{0 \leq q \leq \sigma_o} \left(\left(\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - q}{2} \sin \varphi \right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22} + q}{2} \right)^2 \right)}. \quad (6.105)$$

Funkcja pod pierwiastkiem w (6.105) to, ze względu na zmienną q , parabola zwrócona „wierzchołkiem” do góry, wobec tego

$$\sup_{q \in (-\infty, +\infty)} \left(\left(\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - q}{2} \sin \varphi \right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22} + q}{2} \right)^2 \right) = (-\Sigma_{11} \operatorname{tg} \varphi)^2, \quad (6.106)$$

gdzie wartość ta odpowiada wierzchołkowi paraboli i jest osiągnięta dla

$$q = \Sigma_{22} - \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}. \quad (6.107)$$

Ponieważ jednak $0 \leq q \leq \sigma_o$, wobec tego

$$\sqrt{\sup_{0 \leq q \leq \sigma_o} \left(\left(\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - q}{2} \sin \varphi \right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22} + q}{2} \right)^2 \right)} = -\Sigma_{11} \operatorname{tg} \varphi \quad (6.108)$$

jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \leq \Sigma_{22} \leq \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} + \sigma_o. \quad (6.109)$$

Zauważmy jednak, że dla $0 < \varphi < 90^\circ$ oraz $\Sigma_{11} \leq 0$ prawdziwe są następujące nierówności:

$$\Sigma_{11} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} < \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \quad \wedge \quad \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} + \sigma_o < \Sigma_{11} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \sigma_o, \quad (6.110)$$

wobec tego, dla:

$$\Sigma_{11} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \leq \Sigma_{22} < \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \quad (6.111)$$

oraz

$$\Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} + \sigma_o < \Sigma_{22} \leq \Sigma_{11} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \sigma_o$$

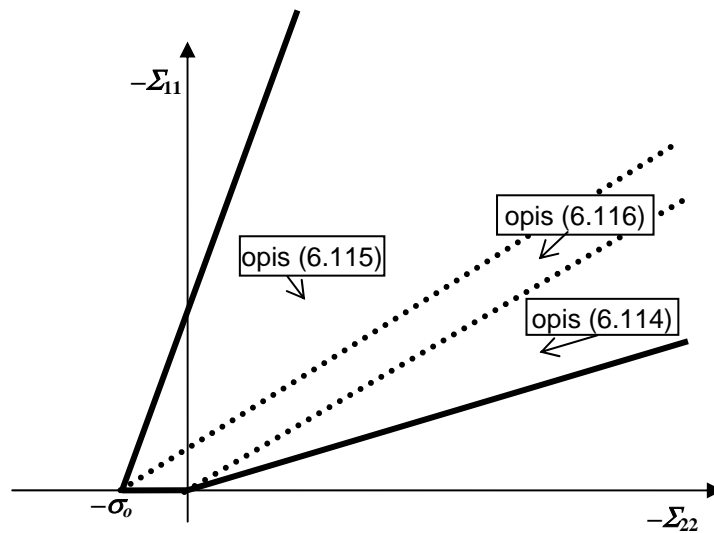
punkty ekstremalne nie są wyznaczone przez współrzędną wierzchołka paraboli, lecz punkty krańcowe przedziału $[0, \sigma_o] \ni q$, tzn. $q = 0$ lub $q = \sigma_o$.

Nierówność

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - \sigma_o}{2} \sin \varphi \right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22} + \sigma_o}{2} \right)^2 \\ & \geq \left(\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} \sin \varphi \right)^2 - \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22}}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.112)$$

implikuje

$$\Sigma_{22} \geq \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} + \frac{\sigma_o}{2}. \quad (6.113)$$



Rys. 6.32. Reprezentacja graficzna zbioru B^h
Fig. 6.32. Graphical representation of the set B^h

Ostatecznie więc stwierdzamy, biorąc pod uwagę nierówności (6.113) i (6.111), że nośność graniczną gruntu zbrojonego określają następujące nierówności:

$$1. \quad \Sigma_{11} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \leq \Sigma_{22} < \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \quad (6.114)$$

$$\sqrt{\Sigma_{12}^2 + \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22}}{2} \right)^2} \leq -\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} \sin \varphi.$$

$$2. \quad \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} + \sigma_o < \Sigma_{22} \leq \Sigma_{11} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \sigma_o$$

$$\Downarrow$$

$$(6.115)$$

$$\sqrt{\Sigma_{12}^2 + \left(\frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22} + \sigma_o}{2}\right)^2} \leq -\frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - \sigma_o}{2} \sin \varphi.$$

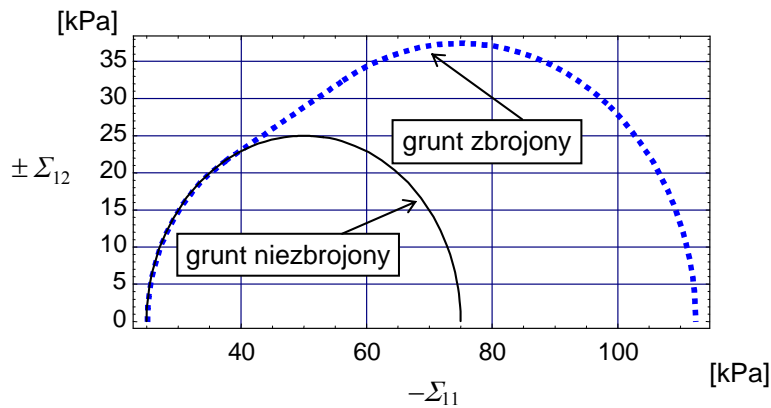
$$3. \quad \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \leq \Sigma_{22} \leq \Sigma_{11} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} + \sigma_o$$

$$(6.116)$$

$$\Downarrow$$

$$|\Sigma_{12}| \leq -\Sigma_{11} \operatorname{tg} \varphi.$$

Reprezentację graficzną warunku (6.114)–(6.116), dla przykładowych danych liczbowych, przedstawiono na rysunku 6.33.



Rys. 6.33. Nośność graniczna gruntu zbrojonego przy: $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 50$ kPa ($\varphi = 30^\circ$ i $\sigma_o = 50$ kPa)
 Fig. 6.33. Ultimate strength of reinforced soil at: $-(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})/2 = 50$ kPa ($\varphi = 30^\circ$ i $\sigma_o = 50$ kPa)

6.4. Uwagi

Przedstawione w punkcie 6.1.1 definicje (6.39) parametrów efektywnych sprężystości spękanego blokowo masywu skalnego otrzymano przy warunku nieodkształcalności się samych bloków. Założenie to wprowadzono w celu określenia wpływu istniejących w masywie skalnym nieciągłości na wartości parametrów efektywnych sprężystości całego masywu.

Odształcalność bloków uwzględnia się przez proste sumowanie odpowiednich tensorów podatności sprężystej. Odształcenie makroskopowe jest sumą uśrednionego odształcenia bloków oraz odształcenia będącego wynikiem deformacji na powierzchniach kontaktu. Ta druga część odpowiada makroskopowemu odształceniu ośrodka zbudowanego z nieodkształcalnych bloków, wobec tego

$$E_{ij} = E_{ij}^b + E_{ij}^k, \quad (6.117)$$

gdzie:

E_{ij}^b – uśredniona wartość odształcenia w blokach tworzących REO,

E_{ij}^k – makroskopowe odształcenie struktury blokowej zbudowanej z nieodkształcalnych bloków.

Oczywiście

$$E_{ij}^b = S_{ijkh}^b \Sigma_{kh} \quad (6.118)$$

oraz, jako bezpośrednia konsekwencja zależności (6.38),

$$\begin{Bmatrix} E_{11}^k \\ E_{22}^k \\ E_{12}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K_{11}^{\text{eff}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K_{12}^{\text{eff}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (6.119)$$

gdzie:

S_{ijkh}^b – tensor podatności sprężystej bloków,

K_{ij}^{eff} – wartości zdefiniowane zależnościami (6.39), reprezentujące składowe efektywnej sztywności sprężystej struktury blokowej zbudowanej z nieodkształcalnych bloków.

Uwzględnienie równań (6.118) i (6.119) we wzorze (6.117) dowodzi, że efektywny tensor podatności sprężystej struktury blokowej to suma tensora podatności sprężystej bloków oraz tensora efektywnej podatności sprężystej struktury blokowej utworzonej z nieodkształcalnych bloków.

W podrozdziale 6.3 ograniczono się do przedstawienia tylko nośności granicznej gruntu zbrojonego jako bezpośredniej konsekwencji, wyprowadzonych w punkcie 6.2.2, związków dla struktury warstewkowej. Pełną analizę, zarówno własności sprężystych, jak i plastycznych gruntu zbrojonego, traktowanego jako kompozyt, przedstawił Sawicki².

² Sawicki A., *Kontynuualna teoria kompozytów i jej zastosowanie do analizy gruntu zbrojonego*, Prace Instytutu Budownictwa Wodnego PAN nr 7, Gdańsk 1980.

7. Zakończenie

W niniejszej pracy przedstawiono niektóre z możliwych zastosowań metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skał. Brak miejsca nie pozwolił na przedstawienie innych zastosowań metody, np. w analizie procesu rozchodzenia się zanieczyszczeń w nasyconym wodą ośrodku gruntowym. Uwzględnione w niniejszej monografii zagadnienia potraktowano natomiast bardzo szczegółowo. Skoncentrowano się przede wszystkim na analizie tych procesów fizycznych, które zachodzą w ośrodkach gruntowych i skalnych, gdy są one nasycone płynem, tj. na zagadnieniach, z którymi spotykamy się na co dzień w geotechnice. Omówiono między innymi wpływ mikrostruktury tych ośrodków na wartości stałych materiałowych teorii poroprężystości Biota. Wychodząc z opisu lokalnego dla nasyconego płynem sprężysto-plastycznego szkieletu, wyprowadzono ogólną strukturę opisu matematycznego deformacji plastycznych nasyconych ośrodków porowatych. Zweryfikowano i podano warunki oraz zakres stosowalności, omówionej we wstępie niniejszej monografii, koncepcji naprężenia efektywnego w zakresie deformacji niesprężystych. Sformułowano opis matematyczny mechanicznego zachowania się ośrodków skalnych nasyconych płynem, którym towarzyszą procesy: sorpcji oraz pęcznienia sorpcyjnego.

Wymienione powyżej zagadnienia analizowano, począwszy od sformułowania opisu lokalnego (na poziomie niejednorodności) aż po tzw. opis makroskopowy, tj. opis matematyczny ważny w skali zastosowań inżynierskich. W każdym z tych zagadnień zwrócono szczególną uwagę na rolę mikrostruktury ośrodków gruntowych i skalnych na wartości parametrów efektywnych otrzymanego opisu makroskopowego.

Wszystkie te analizy umożliwiła, stosowana w niniejszym opracowaniu, metoda homogenizacji. Przydatność tej metody, tym razem w praktyce inżyniera geotechnika, ilustrują również rozwiązania otrzymane w rozdziale 6. Podano tam między innymi „zamknięte” związki na parametry efektywne sprężystości spękanego blokowo masywu skalnego oraz przedstawiono warunki nośności granicznej dla struktury blokowej I i II rodzaju. Metodologicznie podobne wyniki, tzn. własności efektywne sprężystości oraz nośność graniczną skał o strukturze warstewkowej, zilustrowano wynikami otrzymanymi dla skał fliszu karpackiego.

Podsumowania otrzymanych w pracy wyników dokonano w kontekście, sformułowanego w podrozdziale 1.2, celu i zakresu pracy. Wyniki te omówiono w takiej kolejności, w jakiej otrzymano je w poszczególnych rozdziałach niniejszej pracy. Są to wnioski odnoszące się do otrzymanych przez autora wyników oraz dotyczące przydatności metody homogenizacji w mechanice gruntów i skał.

Pierwszy z rozwiązanych problemów dotyczy wpływu mikrostruktury ośrodków gruntowych i skalnych na wartości parametrów efektywnych teorii poroprężystości Biota. Udowodniono, na podstawie metody homogenizacji, że wartości tych stałych silnie zależą od geometrii przestrzeni porowej ośrodków. Przyjmując proste idealizacje mikrostruktury ośrodka skalnego i gruntowego, obliczono, za pomocą metody elemen-

tów skończonych, wartości tych stałych. Wyniki obliczeń wykorzystano następnie do sformułowania zależności funkcyjnych wartości tych stałych w funkcji parametrów mikrostruktury. Zaproponowane funkcje aproksymacyjne, ze względu na przyjęte do obliczeń uproszczone geometrie przestrzeni porowej – analizowano jedno- i dwuparametrowe rodziny geometrii – muszą być traktowane w sensie oszacowań. Wyniki te stanowią treść podrozdziału 3.2 i są to oryginalne rozwiązania autora niniejszej monografii. Wskazują one również, że w przypadku analizy nasyconych ośrodków skalnych, których procesowi deformacji towarzyszą duże zmiany mikrostruktury, konieczne jest wprowadzenie do opisu matematycznego tego procesu dodatkowych parametrów reprezentujących odpowiednie miary mikrostruktury. W tym sensie, wyprowadzone w tym rozdziale, funkcje aproksymacyjne mogą mieć zastosowanie w analizie procesu deformacji nasyconego ośrodka porowatego, któremu towarzyszą duże zmiany jego przestrzeni porowej, np. wywołane procesem kruchego pęknięcia.

Bezpośrednią konsekwencją tych rezultatów jest wniosek dotyczący przydatności metody homogenizacji w mechanice gruntów i skał – metoda pozwoliła na, nieosiągalną na drodze rozważań fenomenologicznych, identyfikację parametrów mikrostruktury odpowiedzialnych za wartości stałych materiałowych teorii Biota.

Drugie z rozwiązywanych zagadnień dotyczy opisu matematycznego deformacji plastycznych nasyconych płynem ośrodków porowatych. Wykazano, że deformacje plastyczne nasyconego ośrodka porowatego są „rządzone” przez dwie niezależne siły termodynamiczne, tj. tensor naprężenia całkowitego oraz ciśnienie porowe. Stowarzyszonymi z tymi wielkościami zmiennymi kinematycznymi są, odpowiednio, tensor odkształcenia oraz zmiana porowatości. Wyprowadzono, zakładając na poziomie lokalnym (w szkielecie) obowiązywanie zasady maksymalnej plastycznej dyssypacji, makroskopowe sformułowanie tej zasady dla ośrodka nasyconego płynem. W tym sensie otrzymane wyniki stanowią potwierdzenie, sformułowanej na podstawie rozważań fenomenologicznych, ogólnej teorii poroplastyczności zaproponowanej przez Coussy’ego [47]. Przedstawione wyprowadzenie jest oryginalnym wynikiem autora niniejszej monografii.

Nie mniej ważny i również oryginalny rezultat autora odnośnie deformacji plastycznych nasyconego ośrodka porowatego to weryfikacja ważności koncepcji naprężenia efektywnego w zakresie deformacji niesprężystych. Stwierdzono (z wyłączeniem ośrodków gruntowych), że koncepcja naprężenia efektywnego nie obowiązuje w przypadku ośrodków porowatych, dla których na poziomie lokalnym kryterium plastyczności zależy od pierwszego niezmiennika tensora naprężenia. Zaproponowano całkowicie oryginalną metodę konstrukcji plastyczności dla ośrodka nasyconego płynem, pozwalającą budować kryterium plastyczności dla ośrodka nasyconego na podstawie znajomości tylko kryterium plastyczności dla ośrodka porowatego bez cieczy. Konstrukcje tę określają zależności (4.152). Należy podkreślić, że w szczególnych przypadkach, np. ośrodkach granulowanych, metoda ta prowadzi do klasycznej koncepcji naprężenia efektywnego zaproponowanej przez Terzaghiego.

W rozdziale 4. wskazano również na pewne ograniczenia metody homogenizacji, tzn. niemożliwe jest przy użyciu tej metody skonstruowanie pełnego makroskopowego

opisu matematycznego ośrodka niejednorodnego, którego składniki wykazują cechy ośrodka sprężysto-plastycznego. W takim przypadku można tylko wyprowadzić ogólną strukturę opisu matematycznego deformacji plastycznych, zakładając, że ośrodek jest zbudowany z materiałów sztywno idealnie plastycznych. Wiadomo, że w trakcie deformacji plastycznych ośrodek będzie doznawał wzmocnienia, ale nie można jednoznacznie nawet typu tego wzmocnienia określić. Potrzebne są dodatkowe postulaty natury fenomenologicznej, tak jak przedstawiono to w rozdziale 4.

Odrębnym problemem, jaki podjęto w niniejszej rozprawie, jest opis matematyczny procesów zachodzących w układach sorpcyjnych. Ośrodek skalny potraktowano jako ośrodek o hierarchicznej strukturze porów. Pozwoliło to wyróżnić dwa, jakościowo różne, zakresy porów (mikro- i makropory), determinujące różne procesy transportu płynu w tych porach. W rezultacie wyprowadzono komplet równań opisu makroskopowego uwzględniający procesy: sorpcji oraz pęcznienia sorpcyjnego. Opis ten także jest oryginalnym rozwiązaniem autora. Korzystając z dostępnych w literaturze przedmiotu wyników badań eksperymentalnych, zidentyfikowano stałe materiałowe proponowanego opisu. Na podkreślenie zasługuje identyfikacja, na podstawie wyników badań laboratoryjnych, postaci funkcji pamięci występujących w proponowanym opisie.

Ostatnim zagadnieniem, którego rozwiązania podjęto się w tej rozprawie, jest problem „przenoszenia” parametrów: wytrzymałościowych oraz sprężystości, otrzymanych dla próbek, na masyw skalny. Wyróżniono dwa typy masywu skalnego, tj.: o strukturze blokowej oraz o strukturze warstewkowej. W pierwszym przypadku, tj. masywu o strukturze blokowej, podano oryginalną autorską metodę wyznaczania parametrów efektywnych sprężystości. Pozwoliło to wyprowadzić „zamknięte” związki określające parametry efektywne tego typu struktur. Oryginalnym rozwiązaniem przedstawionym w tym rozdziale jest również nośność graniczna dla skał o strukturze warstewkowej. W literaturze przedmiotu rozwiązanie tego zagadnienia można znaleźć w zasadzie tylko dla kompozytów warstwowych, w których kryterium plastyczności składników struktury to kryterium Hubera–Misesa. W niniejszym opracowaniu podano rozwiązanie dla struktur, w których wytrzymałość składników jest określona przez kryterium Coulomba–Mohra. Sformułowano ogólny algorytm określania nośności granicznej dla tego typu struktur skalnych. Efektywność proponowanej metody ilustruje wyznaczona numerycznie nośność graniczna skał fliszu karpackiego.

Na zakończenie podsumowania wyników niniejszej pracy należy stwierdzić, że niektóre rozpatrywane problemy mają charakter podstawowy. Prezentowane, na przykład w rozdziałach 3.–5., wyniki mogą być wykorzystane, po odpowiedniej modyfikacji, do analizy procesów niesprężystych w nasyconych ośrodkach porowatych, którym towarzyszą procesy „rozpuszczania” jednego ze składników ośrodka lub procesy kruchości pęknięcia szkieleto (procesy bardzo często występujące w ośrodkach skalnych). Ponadto, wyniki rozdziałów 4. i 5. mogą stanowić bazę do konstruowania opisu uwzględniającego równoczesne procesy: sorpcji, pęcznienia sorpcyjnego oraz deformacji plastycznej ośrodka. Część z tych problemów jest obecnie lub stanie się w najbliższym czasie przedmiotem badań autora.

Dodatek

A.1. Przestrzenie funkcji makroskopowych

Przestrzeń funkcji całkowalnych z potęgą p

$$L^p(\Omega) = \left\{ u; u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \int |u(x)|^p dx < \infty \right\}, \quad (\text{A.1})$$

z normą

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (\text{A.2})$$

Przestrzeń funkcji o wartościach wektorowych całkowalnych z potęgą p

$$(L^p(\Omega))^N = \left\{ u; u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N, \int (|u(x)|_N)^p dx < \infty \right\}, \quad (\text{A.3})$$

z normą

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|_N)^p dx \right)^{1/p}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie

$$|u|_N = \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p}. \quad (\text{A.5})$$

Przestrzeń funkcji mających pochodne całkowalne z potęgą p

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u; u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega) \right\}, \quad (\text{A.6})$$

z normą

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}^p \right)^{1/p}. \quad (\text{A.7})$$

Przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem

$$L^2(\Omega) = \left\{ u; u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \int_{\Omega} u^2(x) dx < \infty \right\}, \quad (\text{A.8})$$

z normą

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2(x) dx}. \quad (\text{A.9})$$

Przestrzeń funkcji o wartościach wektorowych całkownych z kwadratem

$$(L^2(\Omega))^N = \left\{ u; u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N, \int ([u(x)]_N)^2 dx < \infty \right\}, \quad (\text{A.10})$$

z normą

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} ([u(x)]_N)^2 dx \right)^{1/2}, \quad (\text{A.11})$$

gdzie

$$[u]_N = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2}. \quad (\text{A.12})$$

Przestrzeń funkcji mających pochodne całkowne z kwadratem

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega), \quad (\text{A.13})$$

z normą

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}^2}. \quad (\text{A.14})$$

Przestrzeń funkcji testowych

$$D(\Omega) = \left\{ u; u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}, u \text{ z nośnikiem zwartym w } \Omega, u \text{ ma pochodne wszystkich rzędów} \right\}.$$

A.2. Przestrzenie funkcji mikroskopowych**Przestrzeń funkcji Y periodycznych mających pochodne całkowne z potęgą p**

$$W_{\#}^{1,p}(Y) = \left\{ u; u \in W^{1,p}(Y), u \text{ jest } Y \text{ periodyczne} \right\}, \quad (\text{A.15})$$

z normą

$$\|u\|_{W_{\#}^{1,p}(Y)} = \left(\|u\|_{L^p(Y)}^p + \|\nabla u\|_{(L^p(Y))^N}^p \right)^{1/p}. \quad (\text{A.16})$$

Przestrzeń funkcji Y periodycznych, mających pochodne całkowne z kwadratem

$$H_{\#}^1(Y) = W_{\#}^{1,2}(Y), \quad (\text{A.17})$$

z normą

$$\|u\|_{H_{\#}^1(Y)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(Y)}^2 + \|\nabla u\|_{(L^2(Y))^N}^2}. \quad (\text{A.18})$$

A.3. Przestrzenie funkcji dwuskalowych

Przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem z mikro- i makroziennymi

$$L^2(\Omega \times Y) = L^2(\Omega; L^2_{\#}(Y)) = \left\{ u; u: \Omega \rightarrow L^2_{\#}(Y), \int_{\Omega} \|u(x, \cdot)\|_{L^2(Y)}^2 dx < \infty \right\}, \quad (\text{A.19})$$

z normą

$$\|u\|_{L^2(\Omega; L^2_{\#}(Y))} = \sqrt{\int_{\Omega} \|u(x, \cdot)\|_{L^2(Y)}^2 dx}. \quad (\text{A.20})$$

Przestrzeń funkcji testowych z mikro- i makroziennymi

$$D(\Omega; C^{\infty}_{\#}(Y))$$

$$= \left\{ u; u: \Omega \rightarrow C^{\infty}_{\#}(Y), u \text{ z nośnikiem zwartym w } \Omega, u \text{ ma pochodne wszystkich rzędów} \right\}.$$

Applications of asymptotic homogenisation method in soil and rock mechanics

Some applications of asymptotic homogenisation method for mathematical modelling of physical processes taking place in soil and rock media have been presented. Special emphasis has been put on analysis and modelling of the phenomena associated with saturated soil and rock media, i.e. on filtration, consolidation, sorption and swelling processes.

Chapter 2 surveys and compares different formulation as well as techniques of homogenisation method. In particular, it details formulation called as smoothing theory and as mathematical homogenisation theory. It discusses basic principles and properties of some techniques, i.e. volume and weight averaging, continuum micro-mechanics, asymptotic homogenisation, two-scale convergence as well as Γ -convergence. Special attention is paid on the asymptotic homogenisation method for periodic structures. Presentation of some methods of effective properties estimation for random media ends the section.

Chapter 3 is devoted to the Biot's poroelasticity theory. First, general relations linking the macroscopic poroelastic coefficients with the averaged micromechanical solutions are recovered. Considering a variational formulation of appropriate boundary value problems stated for the representative volume element, microstructural parameters affecting the values of poroelastic constants are then identified. A strong dependence of the poroelastic coefficients on the internal geometry of pores as well as on the global porosity of the medium is clearly pointed out. Quantitative effect of these parameters on the values of coefficients examined is presented for simplified pores geometries for which numerical calculations have been carried out.

The mathematical modelling of plastic deformation of saturated porous media is a subject of the chapter 4. First, a mathematical description valid at the pore level is "upscaled" using the asymptotic homogenisation technique. It is shown that proper macroscopic description should involve, besides strain tensor, also the porosity variation as the second cinematic variable. The macroscopic principle of maximum plastic dissipation is formulated. Then validity and limits of the effective stress concept for saturated porous media are studied in the plastic domain. It is proved that, in general, an effective stress tensor fulfilling stress equivalence principle could not be defined for an arbitrary porous medium. The effective stress tensor could be, however, defined for a porous medium composed of homogeneous skeleton. The new formulation method of yield function for saturated material based on yield function for dry material is proposed.

Chapter 5 investigates phenomena of sorption and sorption swelling taking place in saturated porous media. The main result consists in the fact that macroscopic behaviour of rock saturated with gas can be modelled by two different macroscopic descriptions. The appropriate dimensionless number defines their respective ranges of validity.

Examples of application of homogenisation method in engineering practice end the monograph.

Literatura

- [1] Abdi R., de Buhan P., Pastor J., *Calculation of the critical height of a homogenised reinforced soil wall: a numerical approach*, Int. J. Anal. Meth. Geomech., 18, 1994, 485–505.
- [2] Abib M.M., Pyrah I.C., *Consolidation behaviour of finely laminated clays*, Computers and Geotechnics, 10, 1990, 307–323.
- [3] Aburahman M., Jouve P., Bouzidi R., *The modelling of soil reinforced by used tyres – application for retaining walls*, in: Numerical Models in Geomechanics, NUMOG V, Pande & Pietruszczak (eds.), 1995, 243–248.
- [4] Achanta S., Cushman J.H., Okos M.R., *On multicomponent, multiphase thermomechanics with interfaces*, Int. J. Engng. Sci., Vol. 32, No. 11, 1994, 1717–1738.
- [5] Achanta S., Cushman J.H., *Non-equilibrium swelling and capillary relations for colloidal systems*, J. Col. Sci., 168, 1994, 266–268.
- [6] Alamgir M. et.al., *Deformation analysis of soft ground reinforced by columnar inclusions*, Computers and Geotechnics, 18, 1996, 267–290.
- [7] Allaire G., *Homogenization and two-scale convergence*, SIAM J. Math. Anal., 23 (6), (1992), 1482–1518.
- [8] Al-Mukhtar M., *Macroscopic behaviour of microstructural properties of a kaolinite clay under controlled mechanical and hydraulic state*, in: Unsaturated Soils, Alonso i Delage (eds.), 1995, 3–9.
- [9] Alonso E.E., Gens A., Josa A., *A constitutive model for partially saturated soils*, Geotechnique, 40 (3), 1990, 405–430.
- [10] Alonso E.E. et.al., *Experimental behaviour of highly expansive double-structure clay*, in: Unsaturated Soils, Alonso i Delage (eds.), (1995), 11–16.
- [11] Alonso E.E., Gheleng W.Y.Y., Gens A., *Stress-path testing of expansive compacted soils*, in: Unsaturated Soils, Alonso i Delage (eds.), 1995, 77–82.
- [12] Anagnostou G., Kovari K., *Numerical analysis of tunnel floor heaves in swelling ground*, in: Numerical Models in Geomechanics, NUMOG V, Pande & Pietruszczak (eds.), 1995, 451–456.
- [13] Auriault J.L., *Dynamic behaviour of porous media*, in: Transport Processes in Porous Media, J. Bear and M. Y. Corapcioglu (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1991, 471–519.
- [14] Auriault J.L., Boutin C., *Deformable porous media with double porosity. Quasistaticss. I: Coupling effects*, Transport in Porous Media, 7, 1992, 63–82.
- [15] Auriault J.L., Boutin C., *Deformable porous media with double porosity. Quasistaticss. I: Memory effects*, Transport in Porous Media, 10, 1993, 153–169.
- [16] Auriault J.L., *Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible?*, Int. J. Engng. Sci., 29 (7), 1991, 785–795.
- [17] Auriault J.L., Caillerie D., *Quelques remarques sur les méthodes d'homogénéisation*, Rev. Franç. Geotech., No. 49, 1989, 43–50.
- [18] Auriault J.L., Sanchez-Palencia E., *Étude de comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable*, Journal de Mécanique, 16 (4), 1977, 575–603.
- [19] Auriault J.L., et. al., *Porous deformable media saturated by a very compressible fluid: quasi-statics*, Eur. J. Mech. A/Solids, 9 (4), 1990, 373–392.
- [20] Auriault J.L., Bonnet G., *Surface effects in composite materials: two simple examples*, Int. J. Engng. Sci., 25 (3), 1987, 307–323.
- [21] Auriault J.L., *Nonsaturated deformable porous media: quasistatics*, Transport in Porous Media, 2, 1987, 45–64.
- [22] Auriault J.L., Sanchez-Palencia E., *Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements biphasiques en milieu poreux*, Journal de Mécanique Theoretique et Appliquee, Numero special, 1986, 141–156.

- [23] Barrere J., Gipouloux O., Whitaker S., *On the closure problem for Darcy's law*, Transport in Porous Media, 7, 1992, 209–222.
- [24] Bauer J., Łydźba D., *Model of gas-coal medium with a sorption phenomenon*, Transport in Porous Media, 14, 1994, 207–217.
- [25] Bear J., Bachmat Y., *Deletion of nondominant effects in modelling transport in porous media*, Transport in Porous Media, 7, 1992, 15–38.
- [26] Bedford A., Drumheller D.S., *Theories of immiscible and structured mixtures*, Int. J. Engng. Sci., 21 (8), 1983, 863–960.
- [27] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolau G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1978.
- [28] Bernaud D., de Buhan P., Maghous S., *Numerical simulation of the convergence of a bolt-supported tunnel through a homogenised method*, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 19, 1995, 267–288.
- [29] Berryman J.G., *Single-scattering approximations for coefficients in Biot's equations of poroelasticity*, J. Acoust. Soc. Am., 91 (2), 1992, 551–571.
- [30] Bielski R.W., Telega J.J., *Effective properties of geomaterials: rocks and porous media*, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., A-26 (285), 1997.
- [31] Biot M.A., *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for porous material*, J. Appl. Mech., 23 (1), 1956, 91–96.
- [32] Biot M.A., *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., 12, 1941, 155–164.
- [33] Biot M.A., Willis D.G., *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, J. Appl. Mech., 24, 1957, 594–601.
- [34] Bishop A.W., Blight G.E., *Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils*, Geotechnique, 13, 3, 1963, 177–197.
- [35] Boer R. de, Schiffman R.L., Gibson R.E., *The origins of the theory of consolidation: the Terzaghi-Fillunger dispute*, Geotechnique, 46 (2), 1996, 175–186.
- [36] Boer R. de, Lade P.V., *The concept of effective stress for soil, concrete and rock*, Geotechnique, 47 (1), 1997, 61–78.
- [37] Bouchitte G., *Homogenisation sur $BV(\Omega)$ de fonctionnelles integrales a croissance lineaire. Application a un probleme d'analyse limite en plasticite*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, serie I, 1985, 785–788.
- [38] Bourgeat A., Mikelic A., Wright S., *Stochastic two-scale convergence in the mean and applications*, J. reine angew. Math., 456, 1994, 19–51.
- [39] Bourgeat A., Kozlov S.M., Mikelic A., *Effective equations of two-phase flow in random media*, Calc. Var., 3, 1995, 385–406.
- [40] Boutin C., *Microstructural effects in elastic composites*, Int. J. Solids Structures, 33 (7), 1996, 1023–1051.
- [41] Bowen R.M., *Compressible porous media by use of the theory of mixtures*, Int. J. Engng. Sci., 20, 1982, 697–763.
- [42] Buidiansky B., O'Connell R.J., *Elastic moduli of a cracked solid*, Int. J. Solid. Structures, 12, 1976, 81–96.
- [43] Buisson M., Molinari A., Berveiller M., *On a constitutive relation for heterogeneous thermoelastic media*, Arch. Mech., 42, 2, 1990, 197–221.
- [44] Cherkaev A.V., Gibiansky L.V., *Coupled estimates for the bulk and shear moduli of a two-dimensional isotropic elastic composite*, J. Mech. Phys. Solids, 41, 5, 1993, 937–980.
- [45] Chen W.F., Mizuno E., *Nonlinear analysis in soil mechanics*, Elsevier, 1990.
- [46] Ciślicki K., Lasowska A., *The effect of inertia on flows in tubes with periodic step changes in diameter*, Bull. Pol. Acad. Sci. Tech., 43 (4), 1995, 445–458.

- [47] Coussy O., *Mechanics of porous continua*, Willey, 1995.
- [48] Cushman J.H., *The physics of fluids in hierarchical porous media: angstroms to miles*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [49] Czaplinski A., Gustkiewicz J., Hołda S., *An apparatus for investigation of changes of stresses and strains of rock samples under sorption*, Arch. Min. Sci., 31, 1986, 703–716.
- [50] de Buhan P., Taliercio A., *A homogenization approach to the yield strength of composite material*, Eur. J. Mech. A/Solids, 10, 1991, 129–154.
- [51] de Buhan P. et.al., *Yield design of reinforced earth walls by a homogenisation method*, Geotechnique, 39, 1989, 189–201.
- [52] de Buhan P., Dormieux L., *On the validity of the effective stress concept for assessing the strength of saturated porous materials: a homogenization approach*, J. Mech. Phys. Solids, 44, 1996, 1649–1667.
- [53] de Buhan P., Dormieux L., *A micromechanics-based approach to the failure of saturated porous media*, Transport in Porous Media, 34, 1999, 47–62.
- [54] dal Maso G., *An Introduction to Γ -Convergence*, Birkhäuser, Boston 1993.
- [55] Drugan W.J., Willis J.R., *A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites*, J. Mech. Phys. Solids, 44, 1996, 497–524.
- [56] Dvorak G.J., Benveniste Y., *On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media*, Proc. R. Soc. Lond. A, **437**, 1992, 291–310.
- [57] Dvorak G.J., *Transformation field analysis of inelastic composite materials*, Proc. R. Soc. Lond. A, **437**, 1992, 311–327.
- [58] Emeriault F., Cambou B., Mahboubi A., *Homogenization for granular materials: non-reversible behaviour*, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 1, 1996, 199–218.
- [59] Ene H.I., Polisewski D., *Thermal flow in porous media*, D. Reidel Publishing Company, Boston 1987.
- [60] Ferreol B., Rothman D., *Lattice-Boltzmann simulations of flow through fontainebleau sandstone*, Transport in Porous Media, 20, 1995, 3–20.
- [61] Fung Y.C., *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
- [62] Gałka A., Telega J.J., Wojnar R., *Thermodiffusion in heterogeneous elastic solids and homogenization*, Arch. Mech., 46, 3, 1994, 267–314.
- [63] Gee L.M. et.al., *Liquid to solidlike transitions of molecularly thin films under shear*, J. Chem. Phys., 93 (3), 1990, 1895–1906.
- [64] Gergowicz Z., Bauer J., *Próba zastosowania zmodyfikowanego modelu ośrodka dwufazowego Biota do opisu węgli wyrzutowych*, Górnictwo, 12 (3), 1988, 131–155.
- [65] Gilbert F., *Change of scale in multiphase media: the case of saturated soils*, in: *Geomaterials: Constitutive equations and modelling*, F. Darve (ed.), 1990, 329–347.
- [66] Ginzbourg I., Adler P.M., *Surface tension models with different viscosities*, Transport in Porous Media, 20, 1995, 37–76.
- [67] Gomis F., *Numerical analysis of reinforced earth walls via a homogenization method*, in: *Numerical Models in Geomechanics*, NUMOG V, Pande & Pietruszczak (eds.), 1995, 231–242.
- [68] Green A.E., Naghdi P.M., *A dynamical theory of interacting continua*, Int. J. Engng. Sci., 3, 1965, 231–241.
- [69] Habib P., *An introduction to the rheology of geomaterials*, in: *Geomaterials: Constitutive equations and modelling*, F. Darve (ed.), 1990, 1–5.
- [70] Hashin Z., *The differential scheme and its application to cracked materials*, J. Mech. Phys. Solids, 36, 1988, 719–734.
- [71] Hashin Z., *Analysis of composite materials: a survey*, J. Appl. Mech., 50, 1983, 481–505.
- [72] Hassanizadeh S.M., Gray W.G., *Mechanics and thermodynamics of multiphase flow in porous media including interphase boundaries*, Adw. Water Res., 1990, 169–186.

- [73] Hill R., *A self-consistent mechanics of composite materials*, J. Mech. Phys. Solids, 13, 1965, 213–222.
- [74] Hornung U. (ed), *Homogenization and Porous Media*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 6, Springer-Verlag, Berlin 1997.
- [75] Israelachvili J.N., McGuiggan P.M., Homola A.M., *Dynamics properties of molecularly thin liquid films*, Science, 240, 1988, 189–191.
- [76] Izbicki R.J., *Stany graniczne ośrodków gruntowych i splekanych ośrodków skalnych*, Prace Naukowe Instytutu Geotechniki PWr, nr 39, seria Monografie 15, Wrocław 1983.
- [77] Izbicki R.J., Mróz Z., *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał*, PWN, Warszawa 1976.
- [78] Kachanov M., *Effective properties of cracked solids: critical review of some basic concepts*, Appl. Mech. Rev., 45 (8), 1992, 304–335.
- [79] Kaviany M., *Principles of heat transfer in porous media*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [80] Keller J.B., *Darcy's law for flow in porous media and the two-space method*, in: *Nonlinear partial differential equations in engineering and applied science*, Sternberg R., Kalinowski A., Papadakis J. (eds.) Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 54, 1980, 429–443.
- [81] Kerbouche R. et al., *On the poroplastic behaviour of porous rocks*, Eur. J. Mech. A/Solids, 14 (4), 1995, 577–587.
- [82] Kisiel I. (red.), Derski W., Izbicki R., Mróz Z., *Mechanika skał i gruntów*, seria Mechanika Techniczna, PWN, Warszawa 1982.
- [83] Kleiber M. (red), Borkowski A., Burczyński T., Demkowicz L., Dems K., Grabacki J., Gutkowski W., Kączkowski Z., Kruszewski J., Mróz Z., Orkisz J., Waszczyszyn Z., *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, seria Mechanika Techniczna, PWN, Warszawa 1995.
- [84] Kohring G.A., *Calculation of the permeability of porous media using hydrodynamic cellular automata*, Journal of Statistical Physics, 63 (1/2), 1991, 411–417.
- [85] Kröner E., *Effective elastic moduli of periodic and random media: a unification*, Mechanics Research Communications, 7 (5), 1980, 323–327.
- [86] Kubik J., *A macroscopic description of geomaterial pore structure of porous solids*, Int. J. Engng. Sci., 24, 1986, 971–980.
- [87] Kubik J., *On internal coupling in dynamic equations of fluid-saturated porous solid*, Int. J. Engng. Sci., 24, 1986, 981–989.
- [88] Landau L.D., Lifszyc E.M., *Hydrodynamika*, seria Fizyka Techniczna, PWN, Warszawa 1994.
- [89] Lasoń M., *Specific surface of porous materials*, Arch. Min. Sci., 33, 1988, 475–497.
- [90] Lemaitre J., *A course on damage mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [91] Lemaitre J., Chaboche J.L., *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [92] Kantani K., *Stereological determination of structural anisotropy*, Int. J. Engng. Sci., 22 (5), 1984, 531–546.
- [93] Litwiniszyn J., *Gas emission from a crushed rock medium during its sudden outburst*, Arch. Min. Sci., 32, 1987, 155–168.
- [94] Litwiniszyn J., *Rarefaction shock waves in porous media accumulating CO₂, CH₄, N₂*, in: *20 years cooperation in physics of fluids*, J. Kielbasa (ed.), Gottingen–Kraków, 1993, 7–33.
- [95] Lorenci P.B., *A matrix formulation for the elastoplastic homogenisation of layered materials*, Mech. Cohesive-Frictional Mater., 1, 1996, 273–294.
- [96] Łydzba D., Auriault J.L., *Gas flow through porous media: influence of microporous structure*, 4^{ème} Colloque Franco-Polonais „Geotechnique et environnement”, 1993, 13–23.
- [97] Łydzba D., *Gas migration through porous media- mathematical description*, in: *Int. Workshop Homogenization, Theory of migration and granular bodies*, E. Dembicki, J.L. Auriault, Z. Sikora (eds.), Gdańsk 1995.

- [98] Łydźba D., Auriault J.L., *Gas filtration through porous coal medium. Effect of the gas constrained in micropores*, Arch. Mech., 48 (3), 1996, 447–473.
- [99] Łydźba D., *Consolidation of porous medium saturated with gas and with sorption phenomenon, Part I – Asymptotic analysis*, Studia Geot. Mech., 1–2, 1996.
- [100] Łydźba D., *Consolidation of porous medium saturated with gas and with sorption phenomenon, Part II – Parameters' Identification*, Studia Geot. Mech., 1–2, 1997.
- [101] Łydźba D., *Homogenisation theories applied to porous media mechanics*, J. Th. Appl. Mech., 36, 1998, 3.
- [102] Łydźba D., *Introduction to the Homogenization method in Geomechanics*, Report de EUDIL de Université des Sciences et Technologies de Lille (skrypt do wykładu dla studentów D.E.A. de Genie Civil), Lille 1996.
- [103] Łydźba D., Shao J.F., *Study of poroelasticity material coefficients as response of microstructure*, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 5, 2000, 149–171.
- [104] Łydźba D., Shao J.F., *Validity and limits of stress equivalence principle for saturated porous media- a micromechanics based study. Part I – Skeleton composed of a micro-homogeneous material*, C.R. Acad. Sc. Paris, Serie II, 2000.
- [105] Łydźba D., Shao J.F., *Validity and limits of stress equivalence principle for saturated porous media- a micromechanics based study. Part II – An arbitrary porous medium*, C.R. Acad. Sc. Paris, Serie II, 2000.
- [106] Marcellini P., *Periodic solutions and homogenization of non-linear variational problems*, Ann. Mat. Pura Appl., CXVII, 1978, 139–152.
- [107] Müller S., *Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., 99, 1987, 189–212.
- [108] Mei C.C., Auriault J.L., *The effect of weak inertia on flow through a porous medium*, J. Fluid Mech., 222, 1991, 647–663.
- [109] Mei C.C., Auriault J.L., *Mechanics of heterogeneous porous media with several spatial scales*, Proc. R. Soc. Lond., A 426, 1989, 391–423.
- [110] Milton G.W., *The coherent potential approximation is a realizable effective medium scheme*, Comm. Math. Phys., 99, 1985, 463–500.
- [111] Mojia H., Bufler H., *On a self-consistent method to the analysis of elastic and elasto-plastic materials with inclusions*, ZAAM, 76, 1996, 427–437.
- [112] Muhunthan B., Chameau J.L., *Void fabric tensor and ultimate surface of soils*, J. Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE, 123, 2, 1997, 173–181.
- [113] Murad M.A., Bennethum L.S., Cushman J.H., *A multi-scale theory of swelling porous media: I. Application to one-dimensional consolidation*, Transport in Porous Media, 19, 1995, 93–122.
- [114]Nguetseng G., *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., 20, 1989, 608–623.
- [115] Nigmatulin R.I., *Three-Dimensional Averaging in the Mechanics of Heterogeneous Media*, Fluids Mechanics-Soviet Research, 10 (4), 1981, 72–105.
- [116] Norris A.N., *A differential scheme for the effective moduli for composites*, Mech. Mat. 4, 1–16.
- [117] Nowacki W., *Postępy teorii sprężystości*, PWN, Warszawa 1986.
- [118] Oka F., *Validity and limits of the effective stress concept in geomechanics*, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 1, 1996, 219–234.
- [119] Pietruszczak S., Pande G.N., *On the mechanical response of saturated cemented materials. Part II – Experimental investigation and numerical simulations*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 19, 1995, 563–571.
- [120] Pietruszczak S., Turu G., Pande G.N., *On the mechanical response of saturated cemented materials. Part I – Theoretical consideration*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 19, 1995, 555–562.

- [121] Ponte Castañeda P., *The effective mechanical properties of non-linear isotropic composites*, J. Mech. Phys. Solids, 39, 1991, 45–71.
- [122] Ponte Castañeda P., *New variational principles in plasticity and their application to composite materials*, J. Mech. Phys. Solids, 40, 1992, 1757–1788.
- [123] Ponte Castañeda P., Suquet P., *Nonlinear composites*, Advances in Applied Mechanics, Vol. 34, 1998, 172–295.
- [124] Ponte Castañeda P., Willis J.R., *The effect of spatial distribution on the effective behaviour of composite materials and cracked media*, J. Mech. Phys. Solids, 43, 1995, 1919–1951.
- [125] Pruchnicki E., Shahrour I., *A macroscopic elastoplastic constitutive law for multilayered media: application to reinforced earth material*, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 18, 1994, 507–518.
- [126] Rice J.R., Cleary M.P., *Some basic stress-diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents*, Ref. Geophys. Space. Phys., 14, 1976, 227–241.
- [127] Rothenburg L., Bathurst R.J., *Analytical study of induced anisotropy in idealised granular materials*, Geotechnique, 39, 1989, 601–614.
- [128] Rubinstein J., Torquato S., *Flow in random porous media: mathematical formulation, variational principles and rigorous bounds*, J. Fluid Mech., 206, 1989, 25–46.
- [129] Ruth D., Huiping M.A., *On the derivation of the forchheimer equation by means of the averaging theorem*, Transport in Porous Media, 7, 1992, 255–264.
- [130] Rymarz C., *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa 1993.
- [131] Ryncarz T., *Zarys fizyki górotworu*, Śląskie Wydawnictwo Techniczne, Katowice 1993.
- [132] Sab K., *On the homogenization and the simulation of random materials*, Eur. J. Mech. A/Solids, 11, 1992, 585–607.
- [133] Sab K., *Principe de Hill et Homogenisation des Matériaux Aleatoires*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 312, Serie IIb, 1991, 1–5.
- [134] Sab K., *Homogenization and Simulation of Ergodic Random Media*, Communication to the George Hermann 70th Anniversary Symposium, March 27–29, University of California, California 1991.
- [135] Sab K., *Homogenization of non-linear random media by duality method. Application to plasticity*, Asymptotic Analysis, 9, 1994, 311–336.
- [136] Sanchez-Palencia E., *Boundary layers and edge effects in composites*, in: *Homogenization Techniques for Composite Media*, Lecture Notes in Physics, 272, Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [137] Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [138] Sawicki A., Leśniewska D., *Grunt zbrojony – teoria i zastosowanie*, PWN, Warszawa 1993.
- [139] Schrefler B.A., Gawin D., *Thermo-hydro-mechanics of partially saturated porous media, a numerical approach*, in: *International Workshop on Homogenization, Theory of Migration and Granular Bodies*, E. Dembicki, J.L. Auriault, Z. Sikora (eds.), Gdańsk 1995, 175–184.
- [140] Shao J.F., Łydźba D., *Un modele d'endommagement poroélastique pour milieux poreux saturés*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 327, Serie IIb, 1999, 1305–1310.
- [141] Sibai M., *Etude de l'interaction fluide-squelette dans les roches. Methodes experimentales et modelisation*, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandre-Artois, No. 522 (praca doktorska), 1990.
- [142] Slattery J.C., *Single phase flowthrough porous media*, AIChE J., 15, 1969, 866–872.
- [143] Smolarski A.Z., *Mathematical model of the phenomena in the system of gas-coal*, in: *20 years of cooperation in physics and fluids*, J. Kielbasa (ed.), Gottingen–Kraków 1993, 295–310.
- [144] Smolarski A.Z. et al., *Experimental research on briquette destruction caused by rarefaction waves*, Arch. Min. Sci., 39, 3, 1994, 313–330.
- [145] Sobczyk K., *Fale stochastyczne*, PWN, Warszawa 1982.

- [146] Sparks D.L., *Chemical kinetics and mass transfer processes in soils and soils constituents*, Transport processes in porous media, J. Bear and M.Y. Corapcioglu (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1991, 583–637.
- [147] Strzelecki T. (red.), Auriault J.L., Bauer J., Kostecki S., Puła W., *Mechanika ośrodków niejednorodnych. Teoria homogenizacji*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 1997.
- [148] Suchnicka H., *Problemy określania wytrzymałości gruntów*, Prace Naukowe Instytutu Geotechniki 30, seria Monografie 9, Wrocław 1979.
- [149] Suquet P., *Analyse limite et homogenisation*, C.R. Acad. Sc. Paris, Serie II, t. 296, 1983, 1355–1358.
- [150] Suquet P., *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*, in: *Homogenization Techniques for Composite Media*, Lecture Notes in Physics, 272, Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [151] Suquet P., *Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic composites*, *J. Mech. Phys. Solids*, 41, 1993, 981–1002.
- [152] Suquet P. (ed.), *Continuum micromechanics*, CISM Courses and Lectures No. 377, Springer-Verlag, 1997.
- [153] Szefer G., *Nonlinear problems of consolidation theory*, w: *Polsko-Francuskie sympozjum Mechaniki nieliniowej*, Kraków 1977.
- [154] Telega J.J., *Homogenization of fissured elastic solids in the presence of unilateral conditions and friction*, *Computational Mechanics*, 6, 1990, 109–127.
- [155] Thiel K., *Mechanika skal w inżynierii wodnej*, PWN, Warszawa 1980.
- [156] Thompson M., Willis J.R., *A reformation of the equations of anisotropic poroelasticity*, *J. Appl. Mech. ASME*, 58, 1991, 612–616.
- [157] Truesdell C., Toupin R., *The classical field theories*, *Handbuch der Physik*, Vol. III/I, Springer-Verlag, 1960.
- [158] Weber W.J., McGinley P.M., Katz L.E., *The nature and effects of sorption process in subsurface systems*, in: *Transport processes in porous media*, J. Bear and M.Y. Corapcioglu (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1991, 541–582.
- [159] Wilde P., Walter A., Zawisza W., *Sprężysto-plastyczne modele ośrodków rozdrobnionych*, Ossolineum, Wrocław 1980.
- [160] Willis J. R., *Randomly inhomogeneous media*, w *Homogenization Techniques for Composite Media*, Lecture Notes in Physics, 272, Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [161] Willis J.R., *On methods for bounding the overall properties of non-linear composites*, *J. Mech. Phys. Solids*, 39, 1991, 73–86.
- [162] Wilmański K., *Porous media at finite strains. The new model with the balance equation for porosity*, *Arch. Mech.*, 48, 4, 1996, 591–628.
- [163] Wilun Z., *Zarys geotechniki*, WKŁ, Warszawa 1982.
- [164] Woźniak Cz., *Refined macro-dynamics of periodic structures*, *Arch. Mech.*, 45, 3, 1993, 295–304.
- [165] Zaoui A., *Approximate statistical modelling and applications*, in: *Homogenization Techniques for Composite Media*, Lecture Notes in Physics, 272, Springer-Verlag, Berlin 1987.
- [166] Zarzycki R., Chacuk A., *Absorption fundamentals and application*, Pergamon Press, Oxford 1993.
- [167] Zick A.A., Homsy G.M., *Stokes flow through periodic arrays of spheres*, *J. Fluid Mech.*, 115, 1982, 13–26.

Spis rzeczy

1. Wprowadzenie.....	4
1.1. Wstęp.....	4
1.2. Cel i zakres pracy.....	12
2. Metoda homogenizacji – podstawowe zasady i techniki.....	16
2.1. Metoda wygładzania.....	17
2.1.1. Metody objętościowego i wagowego uśredniania.....	21
2.1.2. Ciągła mikromechanika.....	29
2.2. Matematyczna teoria homogenizacji.....	34
2.2.1. Metoda asymptotycznej homogenizacji.....	36
2.2.2. Metoda zbieżności dwuskalowej.....	51
2.2.3. Metoda Γ -zbieżności.....	55
2.2.4. Skalowanie opisu mikroskopowego.....	60
2.2.5. Uwagi.....	70
2.3. Ośrodki losowe – metody oszacowań własności efektywnych.....	71
2.3.1. Kompozyt liniowo-sprężysty. Metody oszacowań: samouzgodnionego pola, Kuster–Toksöza i Mori–Tanaki.....	73
2.3.2. Kompozyt fizycznie nieliniowy. Schemat wariacyjny Ponte Castañedy.....	85
2.4. Podsumowanie.....	90
3. Teoria porosprężystości Biota. Wpływ mikrostruktury ośrodka na wartości stałych materiałowych.....	94
3.1. Poszukiwanie opisu makroskopowego – proces homogenizacji.....	96
3.1.1. Opis mikroskopowy.....	97
3.1.2. Rozwinięcia asymptotyczne i proces uśredniania.....	99
3.1.3. Opis makroskopowy.....	104
3.2. Wpływ mikrostruktury na wartości stałych materiałowych α_{ij} i β	105
3.2.1. Parametry mikrostruktury wpływające na wartości stałych α_{ij} i β	107
3.2.2. Wyniki obliczeń numerycznych wartości stałych α_{ij} i β	110
3.3. Uwagi.....	135
4. Deformacje plastyczne nasyconych płynem ośrodków porowatych – teoria poroplastyczności.....	138
4.1. Poszukiwanie opisu makroskopowego – proces homogenizacji.....	140
4.1.1. Opis mikroskopowy.....	140
4.1.2. Proces uśredniania – zasada makrojednorodności, wielkości makroskopowe.....	142
4.1.3. Ogólna struktura (przybliżonego) opisu makroskopowego.....	157
4.2. Ważność i zakres stosowalności koncepcji naprężenia efektywnego.....	158
4.2.1. Prawo lokalizacji naprężenia.....	158
4.2.2. Szkielet zbudowany z mikrojednorodnego materiału.....	162

4.2.3. Dowolny ośrodek porowaty	169
4.3. Przykłady funkcji plastyczności dla ośrodka nasyconego.....	171
4.4. Podsumowanie.....	177
5. Sorpcja i pęcznienie sorpcyjne w nasyconych ośrodkach porowatych	179
5.1. Poszukiwanie opisu makroskopowego – proces homogenizacji	182
5.1.1. Opis lokalny	182
5.1.2. Skalowanie opisu mikroskopowego.....	184
5.1.3. Proces homogenizacji.....	187
5.1.4. Zbiórca układ równań opisu makroskopowego.....	194
5.2. Identyfikacja stałych materiałowych.....	195
5.3. Wnioski	202
6. Metoda homogenizacji w bezpośredniej praktyce inżyniera.....	204
6.1. Parametry efektywne spękanego blokowo masywu skalnego.....	205
6.1.1. Deformacje sprężyste	205
6.1.2. Nośność graniczna.....	221
6.2. Parametry efektywne skał o strukturze warstewkowej.....	227
6.2.1. Deformacje sprężyste	228
6.2.2. Nośność graniczna.....	233
6.3. Grunt zbrojony – nośność graniczna	250
6.4. Uwagi	256
7. Zakończenie.....	258
Dodatek	261
Applications of asymptotic homogenisation method in soil and rock mechanics	264
Literatura	265

Z wielu możliwych zastosowań metody homogenizacji związanych z mechaniką ośrodków gruntowych i skalnych omówiono niektóre, dotyczące modelowania i analizy procesów zachodzących w tych ośrodkach, przede wszystkim wtedy, gdy są one nasycone cieczą lub gazem, tzn.: procesów filtracji, konsolidacji, sorpcji oraz pęcznienia, podając oryginalne rozwiązania. Przedstawiono zwłaszcza wpływ mikrostruktury ośrodków porowatych na wartości stałych materiałowych teorii porosprężystości Biota. Zweryfikowano tzw. koncepcję naprężenia efektywnego w zakresie zachowania niesprężystego nasyconego ośrodka porowatego, podając równocześnie metody przybliżone konstrukcji powierzchni plastyczności dla tych ośrodków. Sformułowano ogólną strukturę opisu matematycznego nasyconych ośrodków porowatych w przypadku deformacji plastycznych. Zaproponowano model matematyczny mechanicznego zachowania się ośrodków porowatych nasyconych płynem, w których proces pęcznienia ciała stałego jest wynikiem sorpcji.

**Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika”
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
budynek A-1 PWr., tel. (0-71) 320-25-34,
„Tech”
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. (0-71) 320-32-52
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową**

ISSN