Akademia Ekonomiczna im. Oskara Langego
we Wrocławiu
Wydział Informatyki i Zarządzania
Katedra Matematyki

Marek Biernacki

PROBLEMY POMIARU UBÓSTWA

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Walentego Ostasiewicza

Wrocław 1998

Pragnę podziękować mojemu Promotorowi
Profesorowi Walentemu Ostasiewiczowi
za cierpliwość, życzliwe wsparcie
i wiele wskazówek, które pomogły mi
w sformułowaniu i rozwiązaniu
problemów przedstawionych w pracy.

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Ubóstwo jest pojęciem wieloznacznym. Słowo ubogi w znaczeniu pierwotnym miało oddźwięk bardzo pozytywny, ponieważ oznaczało człowieka, który sens swego istnienia i swej nadziei pokładał w Bogu, jako jedynym źródle życia, wobec którego każde inne dobro ma wartość względną, jakkolwiek byłoby pożądane i nawet niezbędne. W języku potocznym termin ten oznacza brak dostatecznych środków do życia na określonym poziomie.

Bieda jest przede wszystkim wielkim problemem świata. Ponad 50% światowej ludności żyje w krajach biednych, z których trzy największe to Indie, Chiny i Indonezja. W krajach bogatych dochód roczny na jednego mieszkańca jest czterdziestokrotnie większy niż w krajach biednych. Są to uderzające różnice, nie między najbiedniejszym a najbogatszym mieszkańcem kuli ziemskiej, ale między średnio zamożnym mieszkańcem takiego kraju jak Indie, a jego odpowiednikiem np. w Niemczech czy USA. Na połowę ludności świata zamieszkującej kraje najbiedniejsze przypada zaledwie 5% dochodu światowego. Natomiast na 16% światowej ludności zamieszkującej kraje uprzemysłowione przypada ponad 60% dochodu światowego (przy czym te 16% ludności produkuje podobny procent światowych dóbr).

Według nieoficjalnych szacunków kilkaset osób w Polsce zarabia ponad 50 tys. zł miesięcznie. Z drugiej strony prawie 2 miliony ludzi żyje poniżej minimum egzystencji, a kilkanaście milionów poniżej minimum socjalnego, które w 1998 roku wynosi 485 zł na osobę. Pomiary subiektywnego odczucia biedy przeprowadzone w 1995 roku dają następujący obraz (L. Beskid): 18% respondentów uznało się za całkowicie biednych, a dalsze 56% – za biednych pod niektórymi względami. Jak z powyższego widać zjawisko ubóstwa jest ważnym problemem naszego kraju.

Pojęcie ubóstwa może mieć dwa znaczenia: po pierwsze może to być sytuacja w której trudno jest przeżyć w dosłownym tego słowa znaczeniu i po drugie może to być sytuacja, w której jest trudno osiągnąć standard życia w danej populacji. Te dwa różne znaczenia pojęcia ubóstwa mają poważne konsekwencje dla pomiaru, analizy i redukcji ubóstwa.

Ogólnie można wyróżnić trzy kategorie ubóstwa: absolutne, w którym linię ubóstwa wyznaczają eksperci i jest nią minimum egzystencji, relatywne, w którym linia ubóstwa jest równa pewnemu procentowi przeciętnych wydatków i subiektywne, w którym linia ubóstwa jest wyznaczana na podstawie społecznej oceny niezbędnych dochodów. Inne kryteria wyznaczania granicy ubóstwa stosują naukowcy, inne politycy; inne ekonomiści, jeszcze inne socjolodzy.

Intuicyjnie pojęcie ubóstwa rozumiane jest dość dobrze. Trudności z nim związane pojawiają się wówczas, gdy trzeba określić stopień ubóstwa. Problem ubóstwa od dawna jest dyskutowany głównie z punktu widzenia ekonomicznego i społecznego. Natomiast od niespełna ćwierć wieku problem ten rozpatrywany jest też w sposób formalny, czynione są wysiłki wykorzystania formalnego aparatu matematyki i statystyki do precyzyjnego określenia stopnia ubóstwa poszczególnych grup społecznych, a także globalnej zmiany ubóstwa całego kraju.

Ubóstwo jako przedmiot badań ma charakter szczególny. Po pierwsze dlatego, że jest często używane w walce politycznej i po drugie – co jest bardziej istotne – jest bardzo związany z działaniami praktycznymi pomocy społecznej, a szczególnie redystrybucji.

Głównym celem niniejszej pracy jest z jednej strony dokonanie przeglądu piśmiennictwa ekonomicznego na temat ubóstwa jak też i próba systematycznego przedstawienia ważniejszych propozycji formalizacji problemów ubóstwa.

Rozdział pierwszy obejmuje zagadnienia ogólne stanowiące podstawę rozwiązań szczegółowych, którym poświęcona jest cała pozostała część niniejszej pracy. W szczególności w rozdziale tym krótko scharakteryzowano biedę jako problem społeczny. Poza tym w sposób możliwie jednolity przedstawiono teorię pomiaru i na jej tle zaprezentowano dyskusję na temat ogólnego problemu pomiaru cech o charakterze ekonomicznym.

W rozdziale drugim przedstawione są najważniejsze aspekty problemu ubóstwa, zarówno pod względem ogólno-filozoficznym, ekonomicznym i społecznym. W rozdziale tym omówiono też wciąż kontrowersyjne problemy związane z określeniem tak zwanej linii ubóstwa.

W rozdziale trzecim dokonano przeglądu najważniejszych propozycji podejścia aksjomatycznego do zagadnień pomiaru ubóstwa. Po dokonaniu analizy istniejących mierników, w rozdziale tym przedstawiona została własna propozycja indeksu do pomiaru ubóstwa. Istotną cechą tego indeksu jest po pierwsze to, że spełnia on podstawowe warunki wymagane od mierników ubóstwa. Po drugie jest on zależny od dochodów w sposób ciągły. Poza tym zaproponowany indeks jest wrażliwy zarówno na głębokość ubóstwa jak i na nierówność ekonomiczną wśród ubogich. Przez głębokość rozumiana jest wielkość luki dochodu populacji ubogich.

W rozdziale czwartym przedstawiono zarys problematyki pomiaru nierówności ekonomicznych. Pokazano też zależności pomiędzy dobrobytem, miernikami ubóstwa i miernikami nierówności ekonomicznych. W rozdziale tym jest także przedstawiona hipoteza Kuznetsa, która orzeka, ze im większa jest nierówność przy wysokich dochodach, to tym szybszy możliwy jest rozwój gospodarczy.

Rozdział piąty zawiera analizę ubóstwa w Polsce w okresie 1992–1996. Zjawisko ubóstwa badane było dla całej Polski jak też z rozróżnieniem dwóch sektorów: publicznego i prywatnego. Niezależnie od tego zbadano zjawisko ubóstwa w dziesięciu działach gospodarki z podziałem na sektor prywatny i publiczny: w górnictwie i kopalnictwie, działalności produkcyjnej, handlu, budownictwie, hotelarstwie i restauracjach, transporcie, administracji, edukacji, ochronie zdrowia oraz rolnictwie. Problem ubóstwa został też zbadany dla wybranych dziesięciu województw: warszawskiego, ciechanowskiegp, legnickiego, katowickiego, krakowskiego, nowosądeckiego, opolskiego, przemyskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego. W wyborze województw i działów gospodarki kierowano się metodą największych skrajności. Poza tym przedstawiono możliwość redukcji ubóstwa w Polsce poprzez politykę podatkową.

Wyniki przeprowadzonych badań przedstawione są w Aneksie.

Podsumowaniem pracy jest Zakończenie.

Dołączony do pracy aneks obejmuje tablice wartości znanych mierników ubóstwa i nierówności ekonomicznych. Poza tym zawiera on także wykresy krzywych Lorenza i uogólnionych krzywych Lorenza dla wybranych populacji w badanym okresie.

Analizy ubóstwa, jak i nierówności ekonomicznych dokonano w oparciu o dane pochodzące z publikacji GUS-u, a także z nieopublikowanych jeszcze danych za rok 1996 życzliwie dostarczonych przez Prof. Macieja S. Kota. Autor niniejszej rozprawy wyraża swą wdzięczność za ich udostępnienie. Słowa wdzięczności kieruje też pod adresem Prof. Antoniego Smoluka za wsparcie i pomoc okazywaną w trakcie pisania pracy.

1. WPROWADZENIE

1.1. Ubóstwo jako problem społeczny

Problem jako niepożądany stan rzeczy staje się problemem społecznym kiedy zaczyna oddziaływać na społeczeństwo. Nie jest tu istotny sposób tego oddziaływania Może on polegać na dyskomforcie psychicznym, czy tez zamieszkach ulicznych. Ważne jest, że problem jest zauważony i doceniona jest jego waga oraz potrzeba rozwiązania. Reakcja na problem społeczny pochodzić może zarówno ze strony społeczeństwa w odpowiedni sposób zmobilizowanego przez jednostki, które pierwsze dostrzegły samo zjawisko lub jego wagę, jak i ze strony władz, które z reguły dostrzegają problemy społeczne poprzez pryzmat problemu sprawowania władzy.

Jednostka, której potrzeby materialne nie są zaspokajane w zakresie społecznie akceptowanego minimum, może liczyć na pomoc innych. Problem pojawia się kiedy nie można znaleźć innych podmiotów skłonnych i zdolnych do takiej pomocy. Zjawisko to staje się jeszcze bardziej skomplikowane kiedy w miejscu jednostki podstawimy grupę ludzi, społeczność. Problem będzie się różnie rysował w zależności od tego na jakiej podstawie ową grupę wyodrębnimy. Inaczej będzie to wyglądało w przypadku grupy zawodowej (na przykład rolników), podobnie lecz inaczej przy warstwie społecznej (na przykład robotników), całkiem natomiast inne problemy pojawią się w przypadku grupy – mieszkańców całej, wyodrębnionej części kraju czy regionu (na przykład mieszkańców tak zwanej ściany wschodniej). Gdy sytuacja grupy, w której stan posiadania odbiega ujemnie od standardów przyjętych w całej społeczności staje się znana, to powstaje problem przyjęcia tej informacji przez pozostałą część społeczeństwa. Generalnie wyodrębnić tu można trzy podejścia: pierwsze to niezauważenie problemu; drugie to jego akceptacja i uznanie za zjawisko normalne, a z czasem pożądane; trzecie natomiast to brak akceptacji i podjęcie kroków do zmiany takiego stanu rzeczy. Może to być zarówno sposób reakcji innej grupy (czytaj nieubogiej), jak i szeroko rozumianej władzy.

W przypadku dwóch pierwszych punktów widzenia ubóstwo jest postrzegane jako element składowy życia społecznego. Jeśli przyjmiemy trzecią postawę, to możemy zastanowić się nad źródłem, strukturą tego zjawiska (jego obszarem i głębokością) i potrzebą jego zmiany.

Procesy transformacyjne w sferze gospodarczej i politycznej, jakie nastąpiły w Polsce po 1989 r. spowodowały zmiany także w sferze społecznej. Prywatyzacja państwowych przedsiębiorstw przemysłowych doprowadziła często do ograniczenia ich dotychczasowej działalności gospodarczej i do grupowych zwolnień pracowników. Podobnie w rolnictwie w wyniku likwidacji Państwowych Gospodarstw Rolnych zwolniono zatrudnionych w nich pracowników. Ponieważ nie powstały dla tych osób nowe miejsca pracy, spowodowało to wysoki wzrost bezrobocia. Wysokie bezrobocie wpływa poważnie na warunki życia takich kategorii społecznych, jak: absolwenci średnich i wyższych szkół, emeryci i tak zwani chłopo-robotnicy. Emeryci dlatego, że ich emerytury i renty są na ogół niskie. Zatem bezrobocie ogranicza ich szansę na dodatkowe zarobki. Polskie rolnictwo przez długi okres było oparte na małych gospodarstwach, które nie były w stanie zapewnić środków na utrzymanie rodziny. W związku z industrializacją i urbanizacją kraju chłopi łatwo znajdowali zatrudnienie poza miejscem swojego zamieszkania i dalej prowadząc też własne gospodarstwo mogli zapewnić rodzinie godny byt. Ograniczenia w przemyśle i w budownictwie spowodowane procesami transformacji w pierwszej kolejności dotknęły tej warstwy, co też doprowadziło do zubożenia i tak biednej wsi. Niekorzystna zmiana stosunku cen artykułów rolnych do przemysłowych, wysoka stopa kredytowa, spadek popytu na żywność przy jednoczesnym dużym imporcie z zagranicy to spowodowało, że w ubóstwie na wsi żyje niemal połowa rodzin.

W wysoce niekorzystnym położeniu jest większość osób utrzymujących się z pracy w sferze budżetowej zwłaszcza pracownicy służby zdrowia, oświaty, kultury, pomocy społecznej.

Trudna jest sytuacja wielkiej rzeszy robotników zatrudnionych w tych przedsiębiorstwach, które mają nikłą zdolność konkurencyjną, są zadłużone i stoją u progu bankructwa. Ludzie ci żyją w stanie ciągłego zagrożenia i – z konieczności godzą się na bardzo niskie i często nieregularnie wypłacane zarobki.

Jest jeszcze jedna kategoria osób na którą trzeba zwrócić uwagę; są to dzieci. Coraz częstsze sygnały o niedożywieniu dzieci wskazują na poważne zagrożenia biologicznego rozwoju przyszłego pokolenia. Spadek ilości żłobków, przedszkoli, wyjazdów na kolonie letnie lub zimowe, oraz nasilenie zjawiska rezygnacji rodziców z posyłania ich dzieci do szkól ponadpodstawowych i w końcu wzrost zachorowań na chorobę ubóstwa jaką jest gruźlica.

Można też mówić o geografii biedy. W regionach najuboższych ekonomicznie (rozpiętość między województwami w wytwarzaniu produktu narodowego na jednego mieszkańca wyraża się stosunkiem 1:3, rozpiętość realnych dochodów gospodarstw domowych stosunkiem 1:2). W regionach o najwyższej stopie bezrobocia (na przykład w 1994 r. wahała się ona od 7,5% w województwie warszawskim do 30% w województwie słupskim, a liczba bezrobotnych na jedno wolne miejsce zgłoszone w urzędach pracy – od 13 w województwie krakowskim do 593 – w województwie wałbrzyskim). W regionach uznanych za obszary klęski ekologicznej (w 1992 r. szacowano je na 11% powierzchni i 34,5% ludności kraju). Należy podkreślić, że warunki życia na wsi i w małych miejscowościach są dużo gorsze niż w dużych miastach.

Jeszcze kilka słów o społecznym odbiorze pauperyzacji i nadmiernego bogacenia się. Tylko 7% respondentów uczestniczących w 1993 r. w badaniach nad subiektywną oceną ubóstwa uważało je za zawinione przez osoby przez nie dotknięte (Beskid 1995). Na pytanie „komu żyje się obecnie lepiej niż w PRL?” na pierwszym miejscu wymieniono „złodziei i kombinatorów" (80%), a dopiero na drugim – „ludzi przedsiębiorczych" (77%); ludzie uczciwi zajęli w tym rankingu jedno z ostatnich miejsc (9%); (Czapiński 1994).

Społeczny zakres ubóstwa jest zjawiskiem uwarunkowanym czynnikami obiektywnymi i subiektywnymi, charakterystycznymi dla społeczeństwa danego kraju.

Do obiektywnych zaliczamy czynniki ekonomiczne, demograficzne i społeczno-polityczne. Zarówno niski dochód narodowy, jak i wysoki przyrost naturalny – nawet przy średnim dochodzie narodowym, a także obowiązujące zasady podziału tegoż dochodu i jego redystrybucji współokreślają społeczny zakres ubóstwa, jaki występuje w danym kraju.

Do subiektywnych czynników zaliczamy:

a) przekonania, postawy i zachowania ludzi danego społeczeństwa lub społeczności;

b) indywidualne możliwości uczestnictwa poszczególnych ludzi w konkurencji, występującej w gospodarce rynkowej.

Zauważmy, że pracownicy w krajach (strefach) ubogich są znacznie mniej wydajni, gdyż pracują w zdecydowanie gorszych warunkach. Przy niskich kwalifikacjach i małej liczbie maszyn i narzędzi przypadających na osobę są oni w stanie wytworzyć w jednostce czasu niewiele dóbr i odpowiednio mniej zarabiają. Także złe odżywianie zmniejsza ich wydajność.

Ze względu na sposób spojrzenia na zjawisko ubóstwa w czasach współczenych warto zwrócić uwagę na encyklikę Jana Pawła II *Centesimus annus*.

Analiza problemu rodzi proponowane rozwiązanie. W analizie marksistowskiej klucz do zrozumienia nędzy stanowi słowo eksploatacja. Biedni są ci, którzy na wiele sposobów wykorzystywani są przez system kapitalistyczny. Dzisiaj praktycznie w każdym społeczeństwie ludzie są eksploatowani. Według Jana Pawła II, zgodnie z jego analizą w encyklice *Centesimus* ubodzy to ci, którzy pozbawieni są możliwości czerpania korzyści z wolnej gospodarki. Zatem są oni odsunięci na margines społeczeństwa. Teoria marksistowska proponuje walkę klas. Jan Paweł II uważa, że jedynie współpraca bogatych z biednymi pozwoli biednym przeskoczyć granicę ubóstwa. „Zasada solidarności" wymaga, by bogaci i biedni zrozumieli, iż rozwój ekonomiczny dokonywany jest dla wspólnego dobra i we wspólnym interesie. Najbardziej oczywistą gwarancją, że bogacz zamknie drzwi przed biednym, stanowi przekonanie tegoż bogacza, że biedny jest śmiertelnym zagrożeniem dla jego własnego dobrobytu. Papież wywodzi z tej tezy konsekwencje dotyczące wszystkich możliwości. „Pełna sprawiedliwość stanie się możliwa dopiero wówczas, gdy ludzie nie będą traktować ubogiego, który prosi o wsparcie dla podtrzymania życia, jak kłopotliwego natręta, ale dostrzegą w nim sposobność do czynienia dobra dla samego dobra, możliwość osiągnięcia bogactwa większego." Zgodnie z jego definicją ubóstwa ubogich nie należy traktować w kategoriach zagrożenia czy brzemienia, ale w kategoriach potencjału i możliwości. Jeśli przyczynę nędzy stanowi odsunięcie na margines, to lekarstwem na nią jest włączenie.

Podczas gdy firmy poszukują zarówno alternatywnej pracy ludzkiej, jak i alternatyw dla ludzkiej pracy, odsunięci na margines stają się coraz mniej ważni dla gospodarki. Z punktu widzenia zwykłej kalkulacji użyteczności są oni całkowicie zbędni. Tymczasem bogaci stanowić będą coraz większą część populacji i kierując się umacnianiem własnej pozycji będą izolować się przed odsuniętymi na margines. Powstaje pytanie jak temu zapobiec?. Ciągle wzrastająca liczba ludzi cierpi jednak z powodu braku jakiejkolwiek odpowiedzi. Jeśli bogaci stanowią 10 lub 20% populacji, to ich władza polityczna zupełnie przekształci nasze życie publiczne. Jednak wielu bogatych może współczuć i troszczyć się, lecz jeśli nie ma wiarygodnych odpowiedzi na pytanie, co czynić z klasą niższą, ich opcje będą ograniczone.

„Interweniując bezpośrednio i pozbawiając społeczeństwo odpowiedzialności, Państwo opiekuńcze powoduje utratę ludzkich energii i przesadny wzrost publicznych struktur, w których – przy ogromnych kosztach – raczej dominuje logika biurokratyczna, aniżeli troska o to, by służyć korzystającym z nich ludziom". Jan Paweł II nie wzywa do demontażu państwa opiekuńczego, a już na pewno nie zaleca ograniczenia ludzkich potrzeb. Raczej ponagla, byśmy poszukiwali takiej polityki, która może być bliska posiadającym najlepsze warunki do zaspokajania ludzkich potrzeb. „Istotnie – pisze – wydaje się, że lepiej zna i może zaspokoić potrzeby ten, kto styka się z nimi z bliska i kto czuje się bliźnim człowieka potrzebującego".

W odniesieniu do państwa i społeczeństwa tą myśl przekazał następująco: "...społeczność wyższego rzędu nie powinna ingerować w wewnętrzne sprawy społeczności niższego rzędu, pozbawiając ją kompetencji, lecz raczej winna wspierać ją w razie konieczności i pomóc w koordynacji jej działań z działaniami innych grup społecznych, dla dobra wspólnego".

Weźmy pod uwagę komunistyczne Chiny. Despoci tego kraju próbują prowadzić politykę „jedno dziecko na rodzinę". Brzemienne kobiety zmuszane są do aborcji. Szerzy się dzieciobójstwo. Oblicza się, że corocznie zabijanych jest 500000 dzieci. Na dodatek tę brutalną przemoc i zamknięcie serc przed nowym życiem niektórzy zachodni i wschodni eksperci traktują jako „realistyczną" i „odważną" odpowiedź Chin na zagrożenie „eksplozją populacyjną".

Papież niejednokrotnie podkreślał konieczność ograniczenia interwencji państwa oraz jego charakter instrumentalny, jako że jednostka, rodzina i społeczeństwo są w stosunku do niego wcześniejsze. Państwo zaś istnieje po to, by chronić ich prawa, bynajmniej nie zaś po to, by je tłumić.

1.2. Elementy teorii pomiaru

1.2.1. Wstęp

Badanie naukowe polega na znalezieniu praw rządzących badaną rzeczywistością. Często te prawa opisują związki ilościowe pomiędzy podstawowymi właściwościami badanych obiektów. Przykładami takich właściwości są: prędkość i masa w fizyce, czy podaż i popyt w ekonomii. Aby jednak można było sformułować prawo ilościowe, trzeba umieć opisać odpowiednie właściwości za pomocą liczb. Postępowanie służące do reprezentowania właściowości za pomocą liczb[1] nazywamy pomiarem, przy czym celem pomiaru jest takie przedstawienie treści obserwacji liczbami związanymi ze sobą tak samo jak są lub mogą być związane ze sobą obserwowane przedmioty, zdarzenia lub ich własności. Na przykład, wiedzieć, że szerokość pewnej skrzyni wynosi 80 cm, a szerokość drzwi wynosi 90 cm, to wiedzieć, że skrzynia przejdzie przez drzwi.

Teoria pomiaru zajmuje się uzasadnieniem różnych procedur pomiarowych oraz badaniem sensu uzyskiwanych w ten sposób wyników.

Dla zilustrowania problemu omówmy dwa przykłady pomiaru: jeden z zakresu fizyki, drugi z nauk społecznych.

1. **Pomiar ciężaru** polega na zdefiniowaniu relacji porządkującej $\succcurlyeq$, która oznacza „co najmniej tak ciężki, jak...", i której zachodzenie bada się poprzez umieszczenie przedmiotów na szalkach wagi oraz obserwowanie, która z szalek opada. Można również, oprócz porównywania pojedynczych obiektów (oznaczonych symbolem x, y, z) wiązać je ze sobą poprzez umieszczenie na jednej szalce. Jeśli $x \circ y$ oznacza tak rozumiane powiązanie obiektów x i y, to $x \circ y \succcurlyeq z$ oznacza obserwację mówiącą, że łączny ciężar przedmiotów x i y jest co najmniej taki, jak ciężar przedmiotu z. Na bazie tych informacji chcemy zbudować skalę pomiarową w, która każdemu obiektowi x przyporządkowuje liczbę $w(x)$ w taki sposób, że:

a) $w(x) \geq w(y) \Leftrightarrow x \succcurlyeq y$,

b) $w(x \circ y) = w(x) + w(y)$.

Żąda się więc, aby skala ciężaru odzwierciedlała uporządkowanie przedmiotów pod względem ciężaru i była addytywna, tzn. aby ciężar przypisany połączonym przedmiotom był równy sumie ciężarów tych przedmiotów.

2. **Pomiar przedziałów użyteczności.**

Załóżmy, że mamy wyborcę oceniającego kandydatów do pełnienia jakiejś funkcji politycznej. Przypuśćmy, że porządkuje on tych kandydatów zgodnie z własnymi preferencjami; niech $x \succcurlyeq y$ oznacza sąd mówiący, iż kandydat y nie jest lepszy od kandydata x. Przypuśćmy dalej, że ów człowiek jest w stanie uporządkować nie tylko samych kandydatów, lecz również różnice pomiędzy nimi; niech $(x, y) \succcurlyeq (z, w)$ oznacza sąd mówiący, że różnica pomiędzy kandydatami z i w nie jest większa od różnicy pomiędzy kandydatami x i y. Na podstawie tych informacji dąży się do skonstruowania funkcji użyteczności u (dla danego wyborcy), która każdemu kandydatowi x przyporządkowuje liczbę $u(x)$ w taki sposób, aby były spełnione następujące warunki:

---

[1] W teorii pomiaru występuje też pomiar bez liczb – jest on opisany w 1.2.8.

a) $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succcurlyeq y$,

b) $u(x) - u(y) \geq u(z) - u(w) \Leftrightarrow (x, y) \succcurlyeq (z, w)$.

Skala użyteczności powinna więc odzwierciedlać zarówno uporządkowanie kandydatów, jak i uporządkowanie różnic (przedziałów) pomiędzy kandydatami.

Dokładniejsza analiza powyższych i innych przykładów systemów pomiaru prowadzi w naturalny sposób do szeregu pytań, które stanowią podstawowe problemy teorii pomiaru.

1. **Zagadnienie istnienia reprezentacji** – czy wszystkie cechy daje się mierzyć? Jeśli nie, to jakie warunki muszą być spełnione, aby można było skonstruować skalę pomiarową?

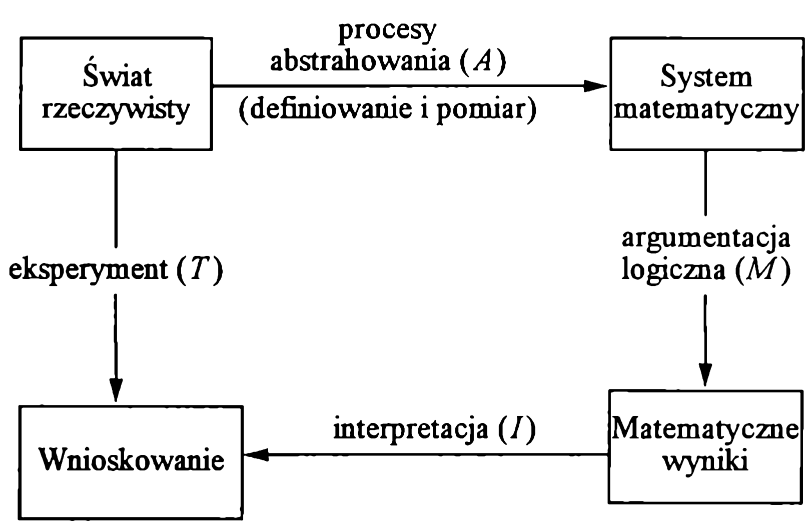
2. **Zagadnienie jednoznaczności.** Jeśli dysponujemy jakąś szczegółową procedurą pomiaru, to jak wiele pozostawia ona swobody w przypisywaniu przedmiotom liczb? Czy liczby te są wyznaczone jednoznacznie, czy też dobierane dowolnie?

3. **Zagadnienie sensowności (znaczenia).** Jeśli dana jest konkretna skala pomiarowa, to jakie wnioski można z niej wyciągnąć? Jakie stwierdzenia sformułowane na podstawie liczbowej skali pomiarowej mają sens?

4. **Problem skalowania.** Jak przeprowadza się konstrukcję liczbowych skal pomiarowych? W jaki sposób przekształca się informacje o uporządkowaniach w zdania mówiące o liczbach? Jak postępuje się z błędami pomiaru?

Na początku spróbujmy prześledzić ogólny proces badania rzeczywistości, który ilustruje rys. 1.1.

Punktem wyjścia procesu badawczego jest świat realny, a dokładniej pewien system elementów fizycznych. Następnie poprzez proces abstrahowania (A), w którym definiujemy pojęcia i ustalamy metodę pomiaru dochodzimy do systemu matematycznego. System matematyczny powinien zawierać stwierdzenia dotyczące egzystencji elementów danego zbioru, relacje między nimi, operacje na tych elementach i własności tych operacji.



Rys. 1.1

Proces pomiaru formalnie może być opisany następująco. Niech $P=\{p_1, p_2, \ldots\}$ będzie zbiorem fizycznych obiektów lub zdarzeń. Pomiarem A na P będziemy nazywać funkcję, która każdemu elementowi p z P przyporządkowuje element $b = A(p)$ w pewnym systemie matematycznym $B=\{b_1, b_2, \ldots\}$ (jest to proces A na rys. 1.1). System matematyczny B decyduje o formie (skali) pomiaru). Korzystając z własności systemu B możemy znaleźć zależności lub przeprowadzić dozwolone operacje na obrazach elementów w B (na rys. 1.1 jest to proces M). Wyniki i zależności otrzymane na drodze matematycznej dedukcji w B muszą być z powrotem interpretowane w języku świata rzeczywistego (na rys. 1.1 proces I).

Jeżeli wyniki otrzymane na drodze AMI (z rys. 1.1) są sprzeczne z wynikami eksperymentu (T), to musimy poszukać nowego cyklu AMI, który lepiej dopasuje się do wyniku eksperymentu. Jeżeli mamy rodzinę cykli $A_i M_i I_i$, to szukamy takiego cyklu $A_0 M_0 I_0$, który najlepiej dopasuje się do wyniku eksperymentu (T).

1.2.2. Zagadnienie istnienia reprezentacji

1. Przypatrzmy się jeszcze raz rys. 1.1. Procesy eksperymentowania i wnioskowania są – jak się wydaje – scharakteryzowane dość jednoznacznie, za to procesy abstrahowania i interpretacji nie wydają się być jednoznaczne. Co mamy na myśli, gdy mówimy, że pewien system formalny jest modelem lub reprezentacją naszego świata?

Zauważmy, że mierzenie jakiejś właściwości jest w pewnym sensie tworzeniem prostego modelu numerycznego (tj. modelu opartego na zbiorze liczb rzeczywistych). System formalny jest uważany za model rzeczywistości, jeśli – mówiąc najogólniej – odzwierciedla on strukturę tej rzeczywistości lub jej istotne cechy. Aby precyzyjniej scharakteryzować określenie modelu wprowadzimy pewne pojęcia z zakresu teorii systemów relacyjnych.

2.a. Relacje

Binarną relacją $\mathcal{R}$ określoną na zbiorze A nazywamy pewien zbiór uporządkowanych par, o elementach ze zbioru A; inaczej mówiąc relacja jest to pewien podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times A$, gdzie A jest pewnym zadanym zbiorem;

b. Własności binarnych relacji $(A, \mathcal{R})$

– zwrotność $\forall a \in A \; a\mathcal{R}a$,

– przeciwzwrotność $\forall a \in A \; \sim a\mathcal{R}a$,

– symetria $\forall a,b \in A \; a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$,

– asymetria $\forall a,b \in A \; \sim a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$,

– antysymetria $\forall a,b \in A \; (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$,

– przechodniość $\forall a,b,c \in A \; (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$,

– ujemna przechodniość $\forall a,b,c \in A \; [\sim a\mathcal{R}b \wedge (\sim b\mathcal{R}c)] \Rightarrow (\sim a\mathcal{R}c)$,

– spójność (zupełność) $\forall a,b \in A \; a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$,

– słaba spójność $\forall a,b \in A \; (a \neq b) \Rightarrow (a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a)$.

Zauważmy, że ujemna przechodniość jest równoważna warunkowi:

$$\forall a,b,c \in A \;\; a\mathscr{R}b \Rightarrow (a\mathscr{R}c \vee c\mathscr{R}b).$$

Załóżmy, że mamy dany zbiór obiektów A z określonym na nim zbiorem relacji $\mathscr{R}_i$ $(i \in \mathscr{T})$.

Definicja 1.1. Zbiór A razem z określonym na nim zbiorem relacji $\mathscr{R}_i$ $(i \in \mathscr{T})$ będziemy nazywać systemem relacyjnym (s.r.) i oznaczymy przez $\left[A;\, \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ lub $\mathscr{A}$.

Definicja 1.2. Jeżeli $\mathscr{R}_i$ są k_i-argumentowymi relacjami na A, to $\left[(k_i)\colon\, i \in \mathscr{T}\right]$ nazywamy typem s.r. $\left[A;\, \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$.

Jeśli $\mathscr{R}$ jest relacją k-argumentową w A^k, to przez $\mathscr{R}$ będziemy oznaczać zbiór w A^k odpowiadający relacji $\mathscr{R}$, i przez $\mathscr{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ wartość funkcji charakterystycznej tego zbioru w punkcie $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Zatem zapisy $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathscr{R}$ i $\mathscr{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$ są równoważne. Przykładowo system relacyjny $[\Re; >, \geq]$ jest typu [2,2].

Gdy $A = \Re$ (zbiór liczb rzeczywistych), to mówimy o numerycznym systemie relacyjnym (n.s.r.).

Jeśli $\left[A;\, \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ jest s.r. i $A_0 \subset A$, to $\left[A_0;\, \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ określa s.r. $\left[A_0;\, \left(\mathscr{R}_i \cap A_0^{k_i}\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$.

Struktura zbioru A może być określona nie tylko relacjami, ale także operacjami. Tak jak w przypadku pomiaru masy, chcielibyśmy, aby nasza miara była addytywna, tzn. aby miara kombinacji dwóch przedmiotów była sumą ich miar (mas).

Uściślijmy to. Trójwymiarowa relacja $(A, \circ)$ jest binarną operacją, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

a) $\forall a,b \in A \;\; \exists c \in A\colon\; (a,b,c) \in \circ$,

b) $\forall a,b,c,d \in A \;\; \left[(a,\, b,\, c) \in \circ \wedge (a,\, b,\, d) \in \circ\right] \Rightarrow c = d$.

Jeśli $(A, \circ)$ jest operacją i $(a, b, c) \in \circ$, to piszemy wtedy $c = a \circ b$.

Zatem, jeśli pewna operacja $\circ$ przyporządkowuje każdemu punktowi $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k$ dokładnie jeden element $\circ(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A$, to można opisać ją jako $k+1$ wymiarową relację $\mathscr{R}_0$ określoną następująco:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}) \in \mathscr{R}_0 \Leftrightarrow \circ(a_1, a_2, \ldots, a_k) = a_{k+1}.$$

Definicja 1.3. S.r. $\left[A\colon\, \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ nazywa się algebrą, jeśli wszystkie relacje są operacjami.

Definicja 1.4. S.r. nazywa się k-wymiarowym numerycznym systemem relacyjnym (n.s.r.), gdy $A = \Re^k$. Jeśli zbiór A składa się z obserwowalnych – empirycznych obiektów, i relacje $\mathscr{R}_i$ określone są empirycznie, to system $\left[A\colon \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ będziemy nazywać empirycznym systemem relacyjnym (e.s.r.).

1.2.3. Relacje równoważności i kongruencji

Definicja 1.5. Binarną relację $\approx$ na zbiorze A nazywamy relacją równoważności, gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Klasą abstrakcji (równoważności) elementu $a \in A$ jest zbiór wszystkich elementów z A będących w relacji z elementem a (równoważnych elementowi a) i będziemy ją oznaczać przez $[a]$ lub $\tilde{\tilde{a}}$. Za pomocą klas abstrakcji relację równoważności można scharakteryzować w następujący sposób:

(i) $a \in [a]$ dla wszystkich $a \in A$,

(ii) dla wszystkich $a, b \in A$ $[a]\cap[b] = \varnothing$ lub $[a] = [b]$.

Definicja 1.6. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ – s.r. Relacja równoważności $\approx$ na zbiorze A jest relacją kongruencji dla $\mathscr{A}$, jeśli spełnia własność podstawień, tzn.:

$$\forall_{i\in\mathscr{T}}\left[\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right)\in A^{k_i} \wedge \left(a_1', a_2', \ldots, a_{k_i}'\right)\in A^{k_i} \wedge a_j \approx a_j' \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, k_i\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathscr{R}_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right) = \mathscr{R}_i\left(a_1', a_2', \ldots, a_{k_i}'\right).$$

Dla s.r. $\left[\mathfrak{R};\ \mathscr{R}_1\right]$, z relacją $\mathscr{R}_1 = \left\{(x, y)\colon x^2 < y^2\right\}$ przykładem relacji kongruencji jest relacja $x \approx y \Leftrightarrow (x = y \vee x = -y)$.

Przy pomiarze wagi ciało można zastąpić dowolnym innym ciałem o tej samej wadze niezależnie od postaci, gęstości, koloru itd.

Definicja 1.7. Mówimy, że relacja równoważności $\approx_2$ jest większa niż relacja równoważności $\approx_1$, jeśli $\approx_1 \subset \approx_2$ lub, co jest równoważne, gdy z $a \approx_1 b$ wynika, że $a \approx_2 b$.

Twierdzenie 1.1. Dla każdego s.r. $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ istnieje (jednoznacznie określona) największa relacja kongruencji $\approx_{\mathscr{A}}$ (tzn. $\approx_{\mathscr{A}} \supset \approx$ dla każdej relacji kongruencji $\approx$ dla $\mathscr{A}$).

Dowód. Zdefiniujmy relację $\approx_{\mathscr{A}}$ w następujący sposób:

$$a \approx_{\mathscr{A}} a' \Leftrightarrow \left[\forall_{i\in\mathscr{T}}, j = 1, 2, \ldots, k_i \wedge a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{k_i} \in A\right],$$

$$\mathscr{R}_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_{k_i}\right) = \mathscr{R}_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a', a_{j+1}, \ldots, a_{k_i}\right).$$

Relacja $\approx_{\mathscr{A}}$ jest relacją równoważności, oprócz tego jest relacją kongruencji dla $\mathscr{A}$. Niech $a_j \approx a_j'$ dla $j = 1, 2, \ldots, k_i$. Wtedy

$$\mathscr{R}_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right) = \mathscr{R}_i\left(a_1', a_2, \ldots, a_{k_i}\right) = \mathscr{R}_i\left(a_1', a_2', \ldots, a_{k_i}\right) = \ldots = \mathscr{R}_i\left(a_1', a_2', \ldots, a_{k_i}'\right).$$

Z drugiej strony, niech $\approx$ będzie relacją kongruencji dla $\mathscr{A}$ i $a \approx a'$. Ponieważ $x \approx x$ dla każdego $x \in A$, to $a \approx_{\mathscr{A}} a'$.

Stąd elementy z $\mathscr{A}$ należące do tej samej klasy abstrakcji można utożsamić względem relacji $\approx_{\mathscr{A}}$ (ponieważ za pomocą wszystkich relacji danego systemu relacyjnego nie można ich rozróżnić). Z drugiej strony, elementy należące do różnych klas abstrakcji można rozróżnić za pomocą pewnych relacji z zadanego s.r. $\mathscr{A}$: jeśli $a \not\approx_{\mathscr{A}} a'$, to istnieją $i \in \mathscr{T}$, $j \in \{1, 2, ..., k_i\}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{k_i} \in \mathscr{A}$ takie, że

$$\mathscr{R}_i(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_{k_i}) \neq \mathscr{R}_i(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a', a_{j+1}, \ldots, a_{k_i}).$$

Wychodząc z s.r. $\mathscr{A} = \left[\mathscr{A}; (\mathscr{R}_i)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ i relacji kongruencji $\approx$ w $\mathscr{A}$ można wyprowadzić s.r. $\mathscr{A}/\approx = \left[\tilde{\tilde{\mathscr{A}}}; (\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_i)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ tego samego typu co $\mathscr{A}$. Elementami zbioru $\tilde{\tilde{\mathscr{A}}}$ są klasy abstrakcji indukowane relacją $\approx$. Relacje między elementami z $\tilde{\tilde{\mathscr{A}}}$ są jednoznacznie określone przez relacje między elementami z $\mathscr{A}$ – „przedstawicielami" klas abstrakcji

$$\mathscr{R}_i(\tilde{\tilde{a}}_1, \tilde{\tilde{a}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{k_i}) = \mathscr{R}_i(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}) \text{ dla } a_j \in \tilde{\tilde{a}}_j \ (j = 1, 2, ..., k_i).$$

Definicja 1.8. S.r. $\mathscr{A}/\approx$ będziemy nazywać systemem ilorazowym z relacjami systemu $\mathscr{A}$ modulo $\approx$.

Definicja 1.9. S.r. $\mathscr{A}$ będziemy nazywać systemem niesprowadzalnym, jeśli równość będzie jedyną relacją kongruencji w $\mathscr{A}$.

Twierdzenie 1.2. Dla dowolnego s.r. $\mathscr{A}$ system ilorazowy $\mathscr{A}/\approx_{\mathscr{A}}$ jest niesprowadzalny. Wtedy $\mathscr{A}/\approx_{\mathscr{A}}$ będziemy nazywać niesprowadzalnym s.r. odpowiadającym systemowi $\mathscr{A}$.

Dowód. Niech $\sim$ będzie największą relacją kongruencji w $\mathscr{A}$: i $\tilde{\tilde{a}} \sim \tilde{\tilde{a}}'$. Wtedy

$$\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_i(\tilde{\tilde{a}}_1, \tilde{\tilde{a}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{j-1}, \tilde{\tilde{a}}, \tilde{\tilde{a}}_{j+1}, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{k_i}) \neq \mathscr{R}_i(\tilde{\tilde{a}}_1, \tilde{\tilde{a}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{j-1}, \tilde{\tilde{a}}', \tilde{\tilde{a}}_{j+1}, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{k_i})$$

dla wszystkich $i \in \mathscr{T}$, $j = 1, 2, ..., k_i$ i $\tilde{\tilde{a}}_1, \tilde{\tilde{a}}_2, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{j-1}, \tilde{\tilde{a}}_{j+1}, \ldots, \tilde{\tilde{a}}_{k_i} \in \tilde{\tilde{\mathscr{A}}}$.

Zatem $\mathscr{R}_i(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_{k_i}) = \mathscr{R}_i(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a', a_{j+1}, \ldots, a_{k_i})$ dla wszystkich $i \in \mathscr{T}$, $j = 1, 2, ..., k_i$ i $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{k_i} \in \mathscr{A}$.

Stąd wynika, że $a \approx_{\mathscr{A}} a'$, tzn., że $\tilde{\tilde{a}} = \tilde{\tilde{a}}'$.

1.2.4. Przekształcenia, homomorfizmy i izomorfizmy

Niech A i B oznaczają dwa dowolne zbiory. Przekształceniem zbioru A w zbiór B nazywamy funkcję m, która każdemu elementowi $a \in A$ przyporządkowuje element $m(a) \in B$ i zapisujemy to następująco m: $A \to B$. Zbiór A nazywamy dziedziną przekształcenia, a zbiór B zbiorem wartości. Jeśli $m(A) = B$, to przekształcenie m nazywamy przekształceniem **na** (w odróżnieniu od przekształcenia w) B. Przez $m^{-1}(B)$ będziemy oznaczać zbiór tych elementów z A, których obrazy należą do zbioru B.

Definicja 1.10. Załóżmy, że mamy dwa s.r. tego samego typu: $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ i $\mathscr{B} = \left[B;\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i \in \mathscr{T}}\right]$. Przekształceniem m zbioru A w (na) zbiór B będziemy nazywać homomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ w (na) $\mathscr{B}$, jeśli dla wszystkich $i \in \mathscr{T}$ i $\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right) \in A^{k_i}$

$$\mathscr{R}_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right) = \mathscr{S}_i\left(m(a_1), m(a_2), \ldots, m\left(a_{k_i}\right)\right).$$

Zdefiniujmy przekształcenie $m_{(k)}\colon A^k \to B^k$ wzorem

$$m_{(k)}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \left(m(a_1), m(a_2), \ldots, m(a_k)\right).$$

Przekształcenie m będzie homomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B} \Leftrightarrow$ dla wszystkich $i \in \mathscr{T}$

$$\mathscr{R}_i = m_{(k_i)}^{-1}(\mathscr{S}_i).$$

Jeśli $\mathscr{R}_i \subset m_{(k_i)}^{-1}(\mathscr{S}_i)$, to będziemy mówić, że m jest algebraicznym homomorfizmem.

Definicja 1.11. Izomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ na $\mathscr{B}$ będziemy nazywać homomorfizm systemu $\mathscr{A}$ na $\mathscr{B}$, który jest wzajemnie jednoznaczny (tzn. różnowartościowy i na). Przekształcenie m jest różnowartościowe $\Leftrightarrow$ dla wszystkich $a, b \in A$ jeśli $a \neq b$, to $m(a) \neq m(b)$.

Jeśli m jest izomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ na $\mathscr{B}$, to m^{-1} jest izomorfizmem systemu $\mathscr{B}$ na $\mathscr{A}$. Stąd systemy relacyjne $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ będziemy nazywać izomorficznymi, gdy będzie istniał izomorfizm systemu $\mathscr{A}$ na $\mathscr{B}$.

Przykład. Niech $\mathscr{A} = [\Re;\ <,\ +]$, $\mathscr{B} = \left[\Re_+;\ <,\ \times\right]$. Wtedy przekształcenie $m\colon \Re \to \Re_+ = \{x \in \Re\colon x > 0\}$ określone wzorem $m(x) = \exp(x)$ jest izomorfizmem tych systemów:

$$x < y \Leftrightarrow \exp(x) < \exp(y)$$

i

$$z = x + y \Leftrightarrow \exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Definicja 1.12. Automorfizmem systemu $\mathscr{A}$ będziemy nazywać izomorfizm systemu $\mathscr{A}$ na siebie.

Trywialnym przykładem automorfizmu systemu $\mathscr{A}$ jest funkcja tożsamościowa.

Definicja 1.13. Niech A, B, C oznaczają zbiory i m – przekształcenie z A w B, oraz n – przekształcenie z B w C. Przekształcenie $n \circ m\colon A \to C$ definiujemy wzorem $n \circ m(a) = n(m(a))$ i nazywamy złożeniem przekształceń n i m.

Twierdzenie 1.3. Złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem oraz złożenie izomorfizmów jest izomorfizmem.

Wniosek 1.1. Wszystkie automorfizmy s.r. $\mathscr{A}$ tworzą grupę względem operacji złożenia $\circ$; będziemy ją oznaczać przez $\Gamma_{\mathscr{A}}$.

Twierdzenie 1.4. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ i $\mathscr{B} = \left[B;\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ – s.r. tego samego typu i m – homomorfizm systemu $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$. Wtedy binarna relacja $\approx$, zdefiniowana warunkiem

$$a \approx a' \Leftrightarrow m(a) = m(a') \tag{1}$$

jest relacją kongruencji w $\mathscr{A}$ (nazywać ją będziemy relacją kongruencji generowaną homomorfizmem m).

Dowód. Zwrotność, symetria i przechodniość relacji $\approx$ wynikają bezpośrednio z odpowiednich własności relacji $=$. Zatem relacja $\approx$ jest relacją równoważności.

Niech $i \in \mathscr{T}$, $a_{(k_i)} = \left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right) \in A^{k_i}$, $a'_{(k_i)}, \ldots, \left(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{k_i}\right) \in A^{k_i}$, przy czym $a_j \approx a'_j$ dla wszystkich $j = 1, 2, \ldots, k_i$. Wtedy $m_{(k_i)}\left(a_{(k_i)}\right) = m_{(k_i)}\left(a'_{(k_i)}\right)$ z definicji relacji $\approx$, a ponieważ m jest homomorfizmem, więc

$$\mathscr{R}_i\left(a_{(k_i)}\right) = \mathscr{S}_i\left(m_{(k_i)}\left(a_{(k_i)}\right)\right) = \mathscr{S}_i\left(m_{(k_i)}\left(a'_{(k_i)}\right)\right) = \mathscr{R}_i\left(a'_{(k_i)}\right).$$

Zatem, $\approx$ jest relacją kongruencji w $\mathscr{A}$.

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia 1.2.

Twierdzenie 1.5. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ – s.r. i m – oznacza przekształcenie zbioru A w B. Załóżmy, że binarna relacja w $\mathscr{A}$, zdefiniowana warunkiem (1) z twierdzenia 1.2 jest relacją kongruencji w $\mathscr{A}$. Wtedy istnieją relacje $\mathscr{S}_i$ ($i \in \mathscr{T}$) w $\mathscr{B}$, jednoznacznie określone na $m_{(k_i)}\left(A^{k_i}\right)$ i takie, że m – homomorfizm systemu $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B} = \left[B;\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$, a dokładniej

$$\mathscr{S}_i = m_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right).$$

Dowód. Ponieważ binarna relacja określona warunkiem (*) z twierdzenia 1.2 jest relacją kongruencji w $\mathscr{A}$, więc $m^{-1}_{(k_i)}\left(m_{(k_i)}\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right)\right) \subset \mathscr{R}_i$ dla każdego $i \in \mathscr{T}$ i $\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right) \in \mathscr{R}_i$. Zatem $m^{-1}_{(k_i)}\left(m_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right)\right) \subset \mathscr{R}_i$. Zawieranie w drugą stronę $m^{-1}_{(k_i)}\left(m_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right)\right) \supset \mathscr{R}_i$ jest prawdziwe dla dowolnego przekształcenia. Stąd $m^{-1}_{(k_i)}\left(m_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right)\right) = \mathscr{R}_i$ i zgodnie z definicją 1.10 m jest homomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ w $\left[B;\ \left(m_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right)\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$. Z drugiej strony, jeśli m jest homomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ w $\left[B;\ \left(m_{(k_i)}\left(\mathscr{S}_i\right)\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$, to $\mathscr{R}_i = m^{-1}_{(k_i)}\left(\mathscr{S}_i\right)$, $i \in \mathscr{T}$.

Ponieważ $m_{(k_i)}$ przekształca A^{k_i} na $m_{(k_i)}\left(A^{k_i}\right)$, to $\mathscr{S}_i \cap m_{(k_i)}\left(A^{k_i}\right) = m_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right)$, $i \in \mathscr{T}$.

Twierdzenie 1.6. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ – s.r. i $\approx$ – relacja kongruencji w $\mathscr{A}$. Wtedy:

(i) przekształcenie $h\colon a \to \tilde{\tilde{a}}$ jest homomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ na system ilorazowy $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}/\approx$;

(ii) jeśli $\approx_1$ – relacja kongruencji w $\mathscr{A}_1$, to system $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}/\approx_1$ jest izomorficzny z systemem $\mathscr{A}/\approx_0$, gdzie $\approx_0 = h^{-1}(\approx_1)$, lub – co jest równoważne – $a \approx_0 b \Leftrightarrow \tilde{\tilde{a}} \approx_1 \tilde{\tilde{b}}$.

Dowód.

(i) Przekształcenie $m = h$ odpowiada warunkowi twierdzenia 1.5. Zgodnie z definicją 1.8 $\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_i = h_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right)$. Zatem z twierdzenia 1.5 wynika, że h jest homomorfizmem.

(ii) Niech h_1 i h_0 – homomorfizmy i $\approx$, $\approx_0$ – odpowiadające im relacje. Z definicji $\approx_0$ zbiór $h_0 \circ h^{-1} \circ h_1^{-1}(c)$ jest jednoelementowy, powiedzmy $m(c)$, dla każdego $c \in \mathscr{A}_1/\approx_1$. Oprócz tego, m przekształca wzajemnie jednoznacznie $\mathscr{A}_1/\approx_1$ na $\mathscr{A}/\approx_0$. Ponieważ h_0 jest homomorfizmem, to dla każdego $i \in \mathscr{T}$

$$m_{(k_i)}^{-1}\left(\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_i^{\circ}\right) = h_{1(k_i)} \circ h_{(k_i)} \circ h_{0(k_i)}^{-1}\left(\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}_i^{\circ}\right) = h_{1(k_i)} \circ h_{(k_i)}\left(\mathscr{R}_i\right).$$

Z definicji systemu ilorazowego po prawej stronie równości mamy i-tą relację z s.r. $\mathscr{A}_1/\approx_1$, więc m jest wzajemnie jednoznacznym homomorfizmem, czyli jest izomorfizmem.

Wniosek 1.2. Niech $\mathscr{A}$ – niesprowadzalny s.r. Jeżeli m – homomorfizm systemu $\mathscr{A}$ w s.r. $\mathscr{B}$, to jest on wzajemnie jednoznaczny.

Dowód. Ponieważ relacja kongruencji generowana przez homomorfizm m jest równością, więc z faktu $m(a) = m(a')$ wynika, że $a = a'$.

Definicja 1.14. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ – s.r., $A_0 \subset A$. Przez $\Gamma_{\mathscr{A}}\left(A_0\right)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich wzajemnie jednoznacznych homomorfizmów systemu $\left[A_0;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ w $\mathscr{A}$. Elementy zbioru $\Gamma_{\mathscr{A}}\left(A_0\right)$ będziemy nazywać częściowymi endomorfizmami systemu $\mathscr{A}$ (określonymi na A_0).

Jeżeli $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{A}}$ i $A_0 \subset A$, to $\gamma | A_0$ (γ obcięta do A_0) należy do $\Gamma_{\mathscr{A}}\left(A_0\right)$. W ogólności $\Gamma_{\mathscr{A}}(A)$ posiada elementy nie będące automorfizmami systemu $\mathscr{A}$. W dodatku, zbiór $\Gamma_{\mathscr{A}}\left(A_0\right)$, $A_0 \subset A$ posiada elementy, których nie można przedłużyć do automorfizmów systemu $\mathscr{A}$.

1. Niech $\mathscr{A} = [\mathscr{Z};\ <]$, gdzie $\mathscr{Z}$ – zbiór liczb całkowitych. Wtedy przekształcenie $\alpha(a) = 2 \cdot a$ dla wszystkich $a \in A$ należy do $\Gamma_{\mathscr{A}}(A)$, ale nie należy do $\Gamma_{\mathscr{A}}$ ($\Gamma_{\mathscr{A}}$ – grupa automorfizmów systemu $\mathscr{A}$ – nie jest wzajemnie jednoznaczna, a dokładniej nie jest na).

2. Niech $\mathscr{A} = [Z; <]$ i A_0 – zbiór liczb parzystych. Wtedy przekształcenie $\alpha(a) = a/2$ dla wszystkich $a \in A_0$ należy do $\Gamma_{\mathscr{A}}(A_0)$, ale nie można przedłużyć go do elementu zbioru $\Gamma_{\mathscr{A}}$ (ponieważ obrazem $\alpha(a)$ jest cały zbiór $\mathscr{Z}$).

Twierdzenie 1.7. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$ będzie niesprowadzalnym s.r., $\mathscr{B} = \left[B;\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$ będzie dowolnym s.r. tego samego typu, $\mathscr{M}$ – zbiór wszystkich homomorfizmów systemu $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$ i m_0 – dowolny element zbioru $\mathscr{M}$. Wtedy $\mathscr{M} = \left\{\gamma \circ m_0\colon \gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))\right\}$ i wszystkie elementy zbioru $\mathscr{M}$ są przekształceniami wzajemnie jednoznacznymi.

Dowód. Z wniosku 1.2 wszystkie elementy zbioru $\mathscr{M}$ są przekształceniami wzajemnie jednoznacznymi. Zatem, m_0 – izomorfizm systemu $\mathscr{A}$ na $\left[m_0(A);\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$. Z twierdzenia 1.3 dla dowolnego $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$ przekształcenie $\gamma \circ m_0$ jest homomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ na $\mathscr{B}$. Dla dowolnego $m \in \mathscr{M}$ przekształcenie $m \circ m_0^{-1}$ jest izomorfizmem systemu $\left[m_0(A);\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$ na $\left[m(A);\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$. Stąd $m_0 \circ m_0^{-1} \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$ i $m = \left(m_0 \circ m_0^{-1}\right) \circ m_0$.

1.2.5. Definicje i typy skal

Skalą (k-wymiarową) będziemy nazywać homomorfizm m z niesprowadzalnego empirycznego systemu relacyjnego $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$ w (k-wymiarowy) liczbowy system relacyjny $\mathscr{B} = \left[\Re^k;\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$. $\mathscr{B}$ nazywamy modelem systemu relacyjnego $\mathscr{A}$. Będziemy korzystać tylko z homomorfizmu **w** (a nie **na**), bo jeśli A – zbiór skończony lub przeliczalny, to dla $\mathscr{B} = \Re^k$ homomorfizm **na** nie istnieje. Wartości elementów zbioru A dla danego homomorfizmu będziemy nazywać wartościami skali. Ponieważ to przekształcenie jest homomorfizmem, więc z liczbowych relacji między wartościami skali będziemy wnioskować o empirycznych relacjach między empirycznymi obiektami: obiekty $a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}$ są w relacji $\mathscr{R}_i \Leftrightarrow$ odpowiadające im wartości skali $m(a_1), m(a_2), \ldots, m\left(a_{k_1}\right)$ są w relacji $\mathscr{S}_i$. Im więcej relacji bierze się pod uwagę przy definiowaniu skali, tym bardziej wartości skali opisują nam rzeczywistość.

Dla danego empirycznego s.r. $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$ istnieje jednoznacznie określony niesprowadzalny empiryczny s.r. $\left[\widetilde{\widetilde{A}}\colon \left(\widetilde{\widetilde{\mathscr{R}}}_i\right)_{i \in \mathscr{I}}\right]$, odpowiadający systemowi $\mathscr{A}$ (patrz twierdzenie 1.2). Jeśli m jest skalą przekształcającą system ilorazowy $\widetilde{\widetilde{\mathscr{A}}}$ w liczbowy s.r. $\mathscr{B}$, to przekształcenie $\widetilde{\widetilde{m}}\colon a \to \widetilde{\widetilde{a}} \to m\left(\widetilde{\widetilde{a}}\right)$ jest homomorfizmem systemu $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$. Stąd możemy dokonywać pomiaru dowolnego s.r.

Istnieje cała klasa skal przekształcających dany niesprowadzalny s.r. $\mathscr{A}$ w dany liczbowy s.r. $\mathscr{B}$. Tę klasę skal będziemy oznaczać $\mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Skale należące do klasy $\mathscr{M}$ będziemy nazywać równoważnymi, a klasę $\mathscr{M}$ – klasą skal równoważnych.

Jeżeli mamy daną skalę m_0 należącą do $\mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, to z pomocą „wewnętrznych" własności systemu $\mathscr{B}$, a w szczególności jego częściowych endomorfizmów, można scharakteryzować całą klasę $\mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. zgodnie z twierdzeniem:

$$\mathscr{M}(\mathscr{A}; \mathscr{B}) = \left\{\gamma \circ m_0 \colon \gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}\left(m_0(A)\right)\right\}.$$

Dwie skale są równoważne $\Leftrightarrow$ istnieje częściowy endomorfizm danego l.s.r. przekształcający jedna skalę w drugą. Elementy zbioru $\Gamma_{\mathscr{B}}\left(m_0(A)\right)$ będziemy nazywać dopuszczalnymi przekształceniami skali m_0, ponieważ przekształcają one skalę m_0 w skalę równoważną.

Zauważmy, że dla danego e.s.r. może istnieć kilka l.s.r., które są homomorficznymi obrazami danego e.s.r.

Systemy $[\mathfrak{R}; <, +]$ i $\left[\mathfrak{R}_+; <; \cdot\right]$ są izomorficzne. Zatem jeśli e.s.r. można przekształcić homomorficznie w $[\mathfrak{R}; <, +]$, to można go przekształcić homomorficznie w $\left[\mathfrak{R}_+; <; \cdot\right]$. Wybór jednego z tych dwóch systemów dla zbudowania skali zależy tylko od nas. Najlepiej wybierać system najprostszy – w tym przypadku $\left[\mathfrak{R}; <, +\right]$.

Będziemy mówić, że skala m_0 jest regularna $\Leftrightarrow$ $\Gamma_{\mathscr{B}}\left(m_0(A)\right) \neq \varnothing$. Zatem – przekształcenie wartości skali jest dopuszczalne, jeśli zachowuje ono relację reprezentowania systemu empirycznego przez liczbowy. Zbiór wszystkich przekształceń dopuszczalnych określa typ skali, czyli stopień jednoznaczności pomiaru. Skalę charakteryzuje się więc za pomocą dopuszczalnych przekształceń.

Scharakteryzujemy wybrane typy skal.

Skale nominalne

Najprostszym systemem relacyjnym jest system $[A; \approx]$, gdzie $\approx$ jest relacją równoważności. Odpowiadającym mu niesprowadzalnym s.r. jest system $\left[\widetilde{\widetilde{A}}; =\right]$, gdzie $\widetilde{\widetilde{A}}$ jest zbiorem klas równoważności (abstrakcji) systemu $\left[\widetilde{\widetilde{A}}; \approx\right]$. Skala liczbowa, przekształcająca $\left[\widetilde{\widetilde{A}}; =\right]$ w $[\mathfrak{R}; =]$ (lub $\left[\mathfrak{R}^k; =\right]$) istnieje $\Leftrightarrow$ moc zbioru $\widetilde{\widetilde{A}}$ jest mniejsza od *continuum* (jest przeliczalny). Jeśli skala istnieje, to mówi nam (informuje) czy dane elementy są równoważne, czy też nie.

Definicja 1.15. Różnowartościowe przekształcenie systemu $\left[\widetilde{\widetilde{A}}; =\right]$ w system $[\mathfrak{R}; =]$ nazywa się skalą nominalną.

Dla skali nominalnej dopuszczalne są dowolne przekształcenia różnowartościowe.

Przykładem skali nominalnej jest przyporządkowanie mężczyznom – 1, a kobietom – 0 (lub odwrotnie) – kolejność w tej skali jest nieistotna.

Skale porządkowe

We wszystkich spotykanych przypadkach e.s.r. ma co najmniej jedną relację równoważności i jedną relację porządku, dla których odpowiedni niesprowadzalny s.r. jest zbiorem uporządkowanym. Dla prostoty zapisu załóżmy, że system $\mathscr{A}$ jest uporządkowany, tzn. $[A; <]$, gdzie $<$ jest binarną relacją porządku zdefiniowaną warunkami:

(i) $\forall a, b \in A$, $(a = b) \vee (a < b) \vee (b < a)$,

(ii) $\forall a, b, c \in A$, $[(a < b) \wedge (b < c)] \Rightarrow (a < c)$.

W szczególności $\mathscr{B} = [\Re; <]$ jest systemem uporządkowanym. Stąd, aby przekształcenie f systemu $\mathscr{A}$ w system $\mathscr{B}$ było homomorfizmem, potrzeba, aby f zachowywało porządek, czyli aby f była funkcją rosnącą (a zatem jest także różnowartościowa).

Definicja 1.16. Skala $m: A \to \Re$ nazywa się skalą porządkową, jeśli jest ona jedyna z dokładnością do ściśle rosnących, ciągłych przekształceń zbioru $m(A)$ w $\Re$ (dopuszczalnymi przekształceniami są funkcje ciągłe, ściśle rosnące).

Skale określone z dokładnością do grup liniowych przekształceń (skala afiniczna – przedziałowa i liniowa – ilorazowa)

Definicja 1.17. Grupa Γ_P dodatnich przekształceń afinicznych z $\Re$ na $\Re$ składa się z wszystkich przekształceń postaci:

$$\gamma_{\alpha,\beta}: \to \alpha x + \beta, \text{ gdzie } \alpha \in \Re_+,\ \beta \in \Re.$$

Grupę $\Gamma_d = \{\gamma_{\alpha,0}: \alpha \in \Re_+\}$, będziemy nazywać grupą „rozciągnięć", a $\Gamma_S = \{\gamma_{1,\beta}: \beta \in \Re\}$ – grupą przesunięć.

Skalę będziemy nazywać **skalą afiniczną (przedziałową)**, jeśli jej jedynymi dopuszczalnymi przekształceniami są dodatnie afiniczne przekształcenia.

Skalę będziemy nazywać **skalą liniową (ilorazową)**, jeśli jej jedynymi dopuszczalnymi przekształceniami są rozciągnięcia.

Skalę będziemy nazywać **skalą różnicową**, jeśli jej jedynymi dopuszczalnymi przekształceniami są przesunięcia.

Uwaga 1.1. Grupa Γ_d jest podgrupą grupy Γ_P, a Γ_S jest normalną podgrupą grupy Γ_P. Podgrupy normalne $\Gamma \neq \{\gamma_{1,0}\}$ grupy Γ_P są postaci:

$$\Gamma = \{\gamma_{\alpha,\beta}: \alpha \in \mathscr{G},\ \beta \in \Re\},$$

gdzie $\mathscr{G}$ – multiplikatywna podgrupa grupy $\Re_+$.

Dowód. Grupa Γ jest normalną podgrupą grupy $\Gamma_P \Leftrightarrow$ z warunku $\gamma_{\alpha_0,\beta_0} \in \Gamma$ wynika, że:

$$\alpha_{\alpha,\beta}\gamma_{\alpha_0,\beta_0}\gamma_{\alpha,\beta}^{-1} = \gamma_{\alpha_0,\alpha\beta_0,\beta(1-\alpha_0)} \in \Gamma \text{ dla wszystkich } \alpha \in \Re_+,\ \beta \in \Re. \qquad (2)$$

Niech Γ będzie podgrupą normalną grupy Γ_P, $\Gamma \neq \{\gamma_{1,0}\}$. Wtedy znajdziemy taka parę $(\alpha_0, \beta_0) \neq (1, 0)$, że $\gamma_{\alpha_0, \beta_0} \in \Gamma$.

Jeśli $\alpha_0 \neq 1$, to z (2) bezpośrednio wynika, że

$$\gamma_{\alpha_0, \beta}: \beta \in \Re \subset \Gamma. \tag{3}$$

Jeśli $\alpha_0 = 1$, to $\beta_0 \neq 0$ i w Γ oprócz γ_{1,β_0} istnieje element $\gamma_{1,-\beta_0}$. Z (2) wynika, że

$$\gamma_{1,\beta_0\alpha} \in \Gamma \text{ i } \gamma_{1,-\beta_0\alpha} \in \Gamma \text{ dla wszystkich } \alpha > 0,$$

więc (3) zachodzi także dla $\alpha_0 = 1$, co kończy dowód.

Zauważmy, że skale dla których dopuszczalne przekształcenia są postaci $x \to \alpha x + \beta$, gdzie $\alpha < 0$ są dla nas nieużyteczne, ponieważ nie zachowują porządku.

Definicja 1.18. Skalę nazywamy absolutną, gdy jedynym dopuszczalnym przekształceniem jest funkcja tożsamościowa.

Tabela 1.1

Pewne typy skal

Lp.	Dopuszczalne przekształcenia	Typy skal	Przykłady
1	$\Phi(x) = x$	absolutna	moc zbioru
2	$\Phi(x) = \alpha x \quad (\alpha > 0)$	liniowa (ilorazowa)	masa, skala temperatur Kelwina, pieniądz
3	$\Phi(x) = \alpha x + \beta \ (\alpha > 0)$	afiniczna (przedziałowa)	temperatura Fahrenheita i Celsjusza, czas kalendarzowy
4	$\Phi(x)$ – funkcja rosnąca ciągła $x > y \Leftrightarrow \Phi(x) \geq \Phi(y)$	porządkowa	preferencje
5	$\Phi(x)$ – funkcja różnowartościowa	nominalna	rozróżnianie elementów

Wymieniliśmy pięć najszerzej dyskutowanych i omawianych typów skal. Ponieważ typ skali jest zdefiniowany za pomocą zbioru przekształceń dopuszczalnych, to istnieje nieskończenie wiele typów skal odpowiadających nieskończenie wielu zbiorom przekształceń dopuszczalnych. Ważną skalą w psycho-fizyce jest skala log-przedziałowa. Dopuszczalnymi przekształceniami tej skali są funkcje postaci: αx^β, α, $\beta > 0$. Co więcej, określenie typu skali, czyli scharakteryzowanie klasy przekształceń dopuszczalnych jest w wielu przypadkach trudnym zagadnieniem.

1.2.6. Problemy sensowności w teorii pomiaru

Wnioski oparte na wynikach pomiaru powinny być niezmiennicze ze względu na dopuszczalne przekształcenia skali. Zauważmy, że interpretacje i sens różnych statystyk opisowych zależne są od typu skali. Nie możemy, na przykład, wyciągać uzasadnionych wniosków z porównania średnich, jeśli odpowiednie właściwości nie zostały zmierzone na skali co najmniej przedziałowej. W przeciwnym wypadku nasze ustalenia nie będą niezmiennicze względem dopuszczalnych przekształceń skali. Nasze sądy byłyby prawdziwe ze względu na pewne skale dopuszczalne, a fałszywe – ze względu na inne.

Definicja 1.19. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ – niesprowadzalny e.s.r. i $\mathscr{B} = \left[\mathfrak{R}^k;\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ – l.s.r. tego samego typu, taki, że istnieje co najmniej jedna skala m przekształcająca system $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$. Niech $\mathscr{S}$ – k-wymiarowa relacja na $\mathscr{B}$.

Relacja $\mathscr{S}$ jest **sensowna** (formalnie znacząca), jeśli:

$$\text{dla wszystkich } m,\ m' \in \mathscr{M}(\mathscr{A},\ \mathscr{B}) \text{ i } a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k \in A,$$

$$\mathscr{S}\left(m(a_1),\ m(a_2),\ \ldots,\ m(a_k)\right) = \mathscr{S}\left(m'(a_1),\ m'(a_2),\ \ldots,\ m'(a_k)\right)$$

lub – co jest równoważne – $m_{(k)}^{-1}(\mathscr{S}) = m'^{-1}_{(k)}(\mathscr{S})$.

Kryterium 1.1. Niech $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{S}$ – takie jak w definicji 1.19 i niech m – dowolna skala przekształcająca system $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$. Relacja $\mathscr{S}$ jest sensowna $\Leftrightarrow$

$$\mathscr{M}(\mathscr{A},\ \mathscr{B}) = \mathscr{M}\left(\left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}},\ m_k^{-1}(\mathscr{S})\right],\ \left[B;\ \left(\mathscr{S}_i\right)_{i\in\mathscr{T}},\ \mathscr{S}\right]\right), \tag{4}$$

czyli stwierdzenie, które dotyczy skali jest sensowne, jeśli prawdziwość lub fałsz tego stwierdzenia nie zmieni się po zmianie skali na skalę równoważną.

Dla dowolnego s.r. $\mathscr{A} = \left[A;\ \left(\mathscr{R}_i\right)_{i\in\mathscr{T}}\right]$ i dowolnego podzbioru $A_0 \subset A$ zdefiniowaliśmy zbiór $\Gamma\left(A_0\right)$ – częściowych endomorfizmów i grupę automorfizmów $\Gamma_{\mathscr{A}}$. Teraz wykorzystamy te pojęcia dla scharakteryzowania relacji sensownych i odpowiadających im relacji empirycznych.

Definicja 1.20. Niech γ – przekształcenie zbioru $A_0 \subset A$ w A, a $\mathscr{R}$ – k-wymiarowa relacja na A. Relacja $\mathscr{R}$ nazywa się γ-inwariantną, jeśli $\mathscr{R}(a_1,a_2,\ldots,a_k) = \mathscr{R}\left(\gamma(a_1),\gamma(a_2),\ldots,\gamma(a_k)\right)$ dla wszystkich $\left(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k\right) \in A_0^k$, lub równoważnie, jeśli $\mathscr{R} \cap A_0^k = \gamma_{(k)}^{-1}(\mathscr{R})$.

Niech Γ – zbiór przekształceń. Relacja $\mathscr{R}$ nazywa się Γ-inwariantną, jeśli jest ona γ-inwariantną dla wszystkich $\gamma \in \Gamma$. Relacja $\mathscr{R}$ nazywa się inwariantną, jeśli jest $\Gamma_{\mathscr{A}}$-inwariantną.

Na przykład, jeśli relacje $\mathscr{R}_i$ $(i \in \mathscr{T})$ są inwariantne, to i są $\Gamma_{\mathscr{A}}\left(A_0\right)$-inwariantne dla wszystkich $A_0 \subset A$. Jeśli $\mathscr{R}$ – relacja inwariantna, to $\mathscr{R} = \gamma_{(k)}^{-1}(\mathscr{R}) = \gamma_{(k)}(\mathscr{R})$, ponieważ automorfizm γ przekształca A (A_0) wzajemnie jednoznacznie na A. Z definicji 1.20, 1.10 i 1.14 mamy:

Wniosek 1.3. Relacja $\mathscr{R}$ jest $\Gamma_{\mathscr{A}}(A_0)$-inwariantna $\Leftrightarrow$ $\Gamma_{\mathscr{A}}(A_0) = \Gamma_{\mathscr{A}'}(A_0)$, gdzie $\mathscr{A}' = \left[A;\ (\mathscr{R}_i)_{i \in \mathscr{T}},\ \mathscr{R}\right]$, tzn. każdy częściowy endomorfizm określony na A_0 jest częściowym endomorfizmem s.r. $\mathscr{A}$ uzupełnionego relacją $\mathscr{R}$.

Wniosek jest prawdziwy także, gdy zamiast $\Gamma(A_0)$ weźmiemy (grupę automorfizmów i wówczas $A_0 = A$).

Twierdzenie 1.8. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ (\mathscr{R}_i)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ – niesprowadzalny e.s.r., $\mathscr{B} = \left[B;\ (\mathscr{S}_i)_{i \in \mathscr{T}}\right]$ – l.s.r. tego samego typu, m_0 – dowolna, ustalona skala, przekształcająca $\mathscr{A}$ w $\mathscr{B}$ i $\mathscr{S}$ – relacja na $\mathscr{B}$. Wtedy relacja $\mathscr{S}$ jest sensowna $\Leftrightarrow$ jest ona $\Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$-inwariantna.

Dowód.

a. Niech $\mathscr{S}$ będzie k-wymiarową $\Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$-inwariantną relacją i $m \in M(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Z twierdzenia 1.7 istnieje takie przekształcenie $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$, że $m = \gamma \cdot m_0$, i stąd $m_{(k)}^{-1}(\mathscr{S}) = m_{0(k)}^{-1} \circ \gamma_{(k)}^{-1}(\mathscr{S})$. Ponieważ relacja $\mathscr{S}$ jest $\Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$-inwariantna i m_0 przekształca A na $m_0(A)$, więc $m_{0(k)}^{-1} \circ \gamma_{(k)}^{-1}(\mathscr{S}) = m_{0(k)}^{-1}\left(\mathscr{S} \cap m_0(A)^k\right)$. Zatem $m_{(k)}^{-1}(\mathscr{S}) = m_{0(k)}^{-1}(\mathscr{S})$ dla wszystkich $m \in M(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

b. Niech $\mathscr{S}$ będzie relacją sensowną i $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$. Wtedy z twierdzenia 1.7 $\gamma \circ m_0 \in M(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ i stąd $m_{0(k)}^{-1}(\mathscr{S}) = m_{0(k)}^{-1} \circ \gamma_{(k)}^{-1}(\mathscr{S})$. Ponieważ m_0 przekształca A na $m_0(A)$, więc $\mathscr{S} \cap m_0\left(A^k\right) = \gamma_{(k)}^{-1}(\mathscr{S})$.

Z tego twierdzenia wynika, że sensowność zależy tylko od inwariantności odpowiednich częściowych endomorfizmów danego l.s.r. $\mathscr{B}$. Wystarczy znać obraz $m(A)$ zbioru A tylko dla jednej ze skal. Jeśli, na przykład, wiemy, że istnieje skala m, dla której $m(A) = B$, to „zachowanie się" relacji $\mathscr{S}$ dla częściowych endomorfizmów zbioru B całkowicie określa jej sensowność.

Wniosek 1.4. Niech $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ takie jak w twierdzeniu 1.6.1 i $\mathscr{S}$ – relacja na $\mathscr{B}$. Wtedy $\mathscr{S}$ jest $\Gamma_{\mathscr{B}}(m(A))$-inwariantna dla wszystkich $m \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, jeśli jest $\Gamma_B\left(m_0(A)\right)$-inwariantna dla co najmniej jednej skali $m_0 \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Dowód. Jeśli $\mathscr{S}$ jest $\Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$-inwariantna dla jednej skali $m_0 \in M$, to z twierdzenia 1.8 jest ona sensowna, i wtedy z tego samego twierdzenia 1.8 relacja $\mathscr{S}$ jest $\Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$-inwariantna dla dowolnej skali $m_0 \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Z twierdzenia 1.8 i wniosku 1.4 bezpośrednio wynika praktyczne kryterium sensowności:

Wniosek 1.5. Niech $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ takie jak w twierdzeniu 1.8 i niech istnieje skala $m_0 \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ taka, że każdy element zbioru $\Gamma_{\mathscr{B}}(m_0(A))$ jest obcięciem elementu z $\Gamma_{\mathscr{B}}$, tj. obcięciem automorfizmu system $\mathcal{B}$. Wtedy następujące stwierdzenia o k-wymiarowej relacji $\mathcal{S}$ określonej na zbiorze $\mathcal{B}$ są równoważne:

(i) $\mathcal{S}$ jest sensowna,

(ii) istnieje taka skala $m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, że

$$\mathcal{S}(\gamma(b_1), \gamma(b_2), \ldots, \gamma(b_k)) = \mathcal{S}(b_1, b_2, \ldots, b_k) \tag{5}$$

dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{B}}$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in m(A)^k$,

(iii) warunek (5) jest spełniony dla wszystkich skal $m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Dowód. Z twierdzenia 1.8 i wniosku 1.3 wystarczy pokazać, że warunek (5) jest równoważny $\Gamma_{\mathcal{B}}(m(A))$-inwariantności relacji $\mathcal{S}$. Niech $\eta = \Gamma_{\mathcal{B}}(m(A))$. Wtedy m i $m_1 = \eta \circ m$ są skalami i z twierdzenia 1.7. Istnieją dwa automorfizmy γ i γ_1, dla których $m = \gamma \circ m_0$ i $m_1 = \gamma_1 \circ m_0$. Stąd wynika, że $\gamma_1 \circ m_0 = \eta \circ \gamma \circ m_0$. Zatem η i $\gamma_1 \circ \gamma^{-1}$ są równe na $m(A)$, więc każdy element z $\Gamma_{\mathcal{B}}(m_0(A))$ jest obcięciem pewnego automorfizmu systemu $\mathcal{B}$.

Z warunków (i) i (ii) wniosku 1.5 mamy:

Wniosek 1.6. Jeśli w założeniach wniosku 1.5 dla dowolnego wyboru $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in \Re^k$ istnieje taka skala m, że $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \in m(A)^k$, tzn. $B^k = \bigcup(m(A)^k : m \in M)$, to każda sensowna relacja na B jest inwariantna.

Sensowna relacja $\mathcal{S}$ na zbiorze B definiuje odpowiednią relację $\mathcal{R} = m_{(k)}^{-1}(\mathcal{S})$ na A niezależną od przekształcenia $m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Z kryterium 1.1 $\mathcal{R}$ jest relacją jednoznacznie zdefiniowaną.

Do tego czasu próbowaliśmy scharakteryzować sensowne relacje na zbiorze B z pomocą wewnętrznych własności systemu $\mathcal{B}$. Teraz spróbujemy za pomocą wewnętrznych własności systemu $\mathcal{A}$ scharakteryzować relacje na zbiorze A, odpowiadające sensownym relacjom na $\mathcal{B}$.

Twierdzenie 1.9. Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takie jak w twierdzeniu 1.8 i $\mathcal{R}$ jest k-wymiarową relacją na zbiorze A i $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \varnothing$. Relacja $\mathcal{R}$ definiuje sensowną relację na $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{R}$ jest Γ-inwariantna, gdzie:

$$\Gamma = \left\{m_1^{-1} \circ m_2 : m_1, m_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\right\}.$$

Dowód.

a. Załóżmy, że relacja $\mathcal{R}$ jest Γ-inwariantna i niech $\mathcal{S} = \bigcup\{m(\mathcal{R}) : m \in M(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$. Relacja $\mathcal{S}$, będąca podzbiorem zbioru $\Re^k$ jest k-wymiarową relacją na B, i $m_{(k)}^{-1}(\mathcal{S}) \supset m_{(k)}^{-1} m_{(k)}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ dla wszystkich $m \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Musimy jeszcze pokazać, że $m_{(k)}^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{R}$. Dla $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in m_{(k)}^{-1}(\mathcal{S})$ istnieją skala m' i $(a_1', a_2', \ldots, a_k') \in \mathcal{R}$ takie, że $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = m_{(k)}^{-1} \circ m'_{(k)}(a_1', a_2', \ldots, a_k')$, tzn. że $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \gamma_{(k)}(a_1', a_2', \ldots, a_k')$, gdzie $\gamma = m^{-1} \circ m' \in \Gamma$. Ponieważ $\mathcal{R}$ jest Γ-inwariantna, więc $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathcal{R}$.

b. Jeśli relacja $\mathscr{S}$ na B jest sensowna, $\mathscr{R}$ – odpowiada $\mathscr{S}$ i $\gamma = m_1^{-1} \circ m_2 \in \Gamma$, to z warunku $\mathscr{R} = m_{1(k)}^{-1}(\mathscr{S})$ wynika, że $\left(m_1^{-1} \circ m_2\right)_{(k)}^{-1}(\mathscr{R}) = m_{2(k)}^{-1} \circ m_{1(k)}(\mathscr{R}) = m_{2(k)}^{-1} \circ m_{1(k)} \circ m_{1(k)}^{-1}(\mathscr{S}) = $
$= m_{2(k)}^{-1}\left(\mathscr{S} \cap m_1(A)^k\right) = m_{2(k)}^{-1}(\mathscr{S}) \cap m_{2(k)}^{-1}\left(m_1(A)^k\right) = m_{2(k)}^{-1}(\mathscr{S}) \cap \left(m_2^{-1} \circ m_1(A)\right)^k$ Ponieważ $m_{2(k)}^{-1}(\mathscr{S}) = \mathscr{R}$ i $m_2^{-1} \circ m_1(A) = A_0$ – dziedzina przekształcania γ, więc ostatnie wyrażenie jest równe $\mathscr{R} \cap A_0^k$.

Wniosek 1.7. Niech $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ i $\mathscr{R}$ takie jak w twierdzeniu 1.9 i $m(A) = B$ dla wszystkich $m \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \neq \varnothing$. Relacja $\mathscr{R}$ odpowiada sensownej relacji na $\mathscr{R} \Leftrightarrow \mathscr{R}$ jest inwariantna.

Dowód. Ponieważ $m(A) = B$ dla wszystkich $m \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, więc każdy element zbioru Γ (zdefiniowanego w twierdzeniu 1.6.2) jest automorfizmem systemu $\mathscr{A}$, i stąd $\Gamma \subset \Gamma_{\mathscr{A}}$. Jeśli $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{A}}$. i m – dowolny element niepustego zbioru $\mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, to $\gamma = m_1^{-1} \circ m_2 \in \Gamma$, gdzie $m_1 = m$ i $m_2 = m \circ \gamma$, i stąd $\Gamma_{\mathscr{A}} \subset \Gamma$.

Wniosek 1.8. Niech $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ i Γ takie jak w twierdzeniu 1.9. Załóżmy, że każde przekształcenie $\gamma \in \Gamma$ jest obcięciem automorficznym systemu $\mathscr{A}$. Wtedy każda inwariantna relacja na zbiorze A odpowiada (generuje) sensownej relacji na zbiorze B.

Uwaga 1.2. Zakładaliśmy, że system $\mathscr{A}$ jest niesprowadzalny. Pomiar sprowadzalnego s.r. $\mathscr{A}$ był związany z pomiarem niesprowadzalnego s.r. $\tilde{\tilde{\mathscr{A}}}$ za pomocą kanonicznego przekształcenia π: $A \to \tilde{\tilde{\mathscr{A}}}$. Każdej k-wymiarowej relacji $\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}$ na zbiorze $\tilde{\tilde{A}}$ odpowiada relacja $\mathscr{R} = \pi_{(k)}^{-1}\left(\tilde{\tilde{\mathscr{R}}}\right)$ na zbiorze A. Jest oczywiste, że najgrubsza relacja kongruencji dla $\mathscr{A} = \left[A;\ (\mathscr{R}_i)_{i \in \mathscr{T}}\right]$, tj. $\approx_{\mathscr{A}}$, jest relacją kongruencji dla systemu $\mathscr{A}' = \left[A;\ (\mathscr{R}_i)_{i \in \mathscr{T}}, \mathscr{R}\right]$ – mówiąc nieściśle, dodanie relacji $\mathscr{R}$ nie precyzuje (dokładniej – nie określa) relacji kongruencji $\approx_{\mathscr{A}}$. Jeśli chcemy opisać relacje na A, odpowiadające sensownym relacjom na B, za pomocą własności inwariantnych, to rodzi się pytanie: czy relacja $\mathscr{R}$ jest inwariantna, jeśli nie precyzuje (dokładniej – nie określa) relacji $\approx_{\mathscr{A}}$? Odpowiedź przeczącą daje następujący przykład. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ \mathscr{R}_1\right]$, gdzie $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $\mathscr{R}_1 = \{(0,\ 1),\ (0, -1)\} \subset A^2$. Wtedy zbiór $\Gamma_{\mathscr{A}}$ składa się z dwóch permutacji:

$$(-1,\ 0,\ 1) \to (-1,\ 0,\ 1),$$
$$(-1,\ 0,\ 1) \to (1,\ 0,\ -1)$$

i spełnia założenia wniosku 1.8 względem Γ. Zbiory $\{0\}$ i $\{-1,\ 1\}$ są klasami kongruencji, generowanymi relacją $\approx_{\mathscr{A}}$. Relacja $\mathscr{R} = \{(-1, -1), (1,\ 1)\}$ jest inwariantna dla przekształceń z $\approx_{\mathscr{A}}$. Jednak zbiór $\{-1,\ 1\}$ nie jest klasą kongruencji dla $\left[\mathscr{A};\ \mathscr{R}_1, \mathscr{R}\right]$, ponieważ $\mathscr{R}(1,\ 1) \neq \mathscr{R}(1,\ -1)$.

Przykład. Niech $x_1', x_2', \ldots, x_k', x_1'', x_2'', \ldots, x_k''$ będą wielkościami należącymi do skali przedziałowej. Rozpatrzmy $2k$-wymiarową relację

$$\mathscr{S}\colon \bar{x}' < \bar{x}'',\ \text{gdzie } \bar{x}' = (1/k)\sum_{i=1}^{k} x_i' \ \text{ i } \ \bar{x}'' = (1/k)\sum_{i=1}^{k} x_i''.$$

Ponieważ $\Gamma_{\mathscr{B}} = \{x \to ax + b\colon a \in \Re_+,\ b \in \mathscr{R}\}$, więc relacja $\mathscr{S}$ jest $\Gamma_{\mathscr{B}}$-inwariantna i z wniosku 1.4 jest sensowna. Jednak relacja $\bar{x}'' < 2\bar{x}'$ nie jest sensowna, bo: $\bar{x}'' < 2\bar{x}' + b$ dla dostatecznie dużych b i $\bar{x}'' > 2\bar{x}' + b$ dla dostatecznie małego b i dowolnych $\bar{x}'$ i $\bar{x}''$. Stąd z wniosku 1.5 (ii) relacja ta nie jest sensowna (takie porównanie możliwe jest tylko dla skali ilorazowej).

Statystyka jest to przekształcenie z B^n w $\Re$, gdzie B – zbiór wartości skali. Na przykład, jeśli $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-wymiarowy wektor wartości skali, $x_i \in B$, to typowymi przykładami statystyk są średnie

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

i odchylenia standardowe

$$s = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jeśli x jest ilością, a p – ceną towaru, to xp jest statystyką. Jest to funkcja z $\mathscr{R}_+^2$ w $\mathscr{R}$, (x, p)-dwuwymiarowa wartość skali. Ponieważ wartości skali są określone jednoznacznie z dokładnością do zbioru Γ-dopuszczalnych przekształceń, to wartość $f(m(a_1), m(a_2), \ldots, m(a_n))\left(= f\left(m_{(n)}(a_n)\right)\right)$, rozpatrywana jako wartość funkcji rzeczywistej na A^n, będzie zależała od wyboru jednej z równoważnych skal.

Jeśli wychodzimy od idei, że wartość $f\left(m_{(n)}(a_n)\right)$ ma nam powiedzieć coś o rzeczywistości, to minimalnym warunkiem jest, żeby relacja równoważności na A^n indukowana równością $f\left(m_{(n)}(a_n)\right) = f\left(m_{(n)}(a_n')\right)$ nie zależała od m.

Definicja 1.21. Niech $\mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ – klasa skal równoważnych. Statystykę f na B^n nazywamy sensowną, jeśli relacja równoważności na A^n, generowana warunkiem $a_{(n)} = a_{(n)}' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f\left(m_{(n)}(a_n)\right) = f\left(m_{(n)}(a_n')\right)$ nie zależy od $m \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Zauważmy, że relacja równoważności na A^n jest $2n$-wymiarową relacją na A. Z definicji 1.21, 1.19 i twierdzenia 1.8 mamy

Wniosek 1.9. Niech $\mathscr{A} = \left[A;\ (\mathscr{R}_i)_{i \in \mathscr{I}}\right]$ – niesprowadzalny e.s.r., $\mathscr{B} = \left[B;\ (\mathscr{R}_i)_{i \in \mathscr{I}}\right]$ – l.s.r. i f – przekształcenie z B^n w $\Re$. Wtedy następujące stwierdzenia są równoważne:

i) f – statystyka sensowna,

ii) $f\left(x_{(n)}\right) = f\left(\gamma\left(x_{(n)}\right)\right)$ dla wszystkich $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m(A))$,

iii) $2n$-wymiarowa relacja $\left\{\left(x_{(n)}, x_{(n)}'\right) \in B^{2n}\colon f\left(x_{(n)}\right) = f\left(x_{(n)}'\right)\right\}$ na B jest sensowna.

Uwaga 1.3. Dowolna wzajemnie jednoznaczna funkcja rzeczywista statystyki sensownej jest statystyką sensowną.

Dla statystyki sensownej f każde przekształcenie $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m(A))$ indukuje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $\gamma' \colon f\left(m(A)^n\right) \to \Re$:

$$\gamma' \colon f\left(x_{(n)}\right) \to f\left(\gamma_{(n)}\left(x_{(n)}\right)\right), \tag{6}$$

$$\gamma' \colon f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to f\left(\gamma(x_1), \gamma(x_2), \ldots, \gamma(x_n)\right).$$

Jeśli $f\left(x_{(n)}\right) = f\left(x'_{(n)}\right)$, to $f\left(\gamma_{(n)}\left(x_{(n)}\right)\right) = f\left(\gamma_{(n)}\left(x'_{(n)}\right)\right)$. Zatem γ' jest zdefiniowana jednoznacznie. Jeśli $f\left(x_{(n)}\right) \neq f\left(x'_{(n)}\right)$, to $f\left(\gamma_{(n)}\left(x_{(n)}\right)\right) \neq f\left(\gamma_{(n)}\left(x'_{(n)}\right)\right)$, więc γ' jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym. Jeśli, na odwrót, dla danej statystyki f każde przekształcenie $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m(A))$ indukuje (poprzez (6)) wzajemnie jednoznaczne przekształcenie zbioru $f\left(m(A)^n\right)$ w $\Re$, to f jest sensowną statystyką. W ten sposób udowodniliśmy

Twierdzenie 1.10. Statystyka f jest sensowna $\Leftrightarrow$ dla każdego przekształcenia $\gamma \in \Gamma_{\mathscr{B}}(m(A))$ przekształcenie γ' określone warunkiem (6) wzajemnie jednoznacznie przekształca $f\left(m(A)^n\right)$ w $\Re$.

Teraz podamy kilka przykładów sensownych i niesensownych statystyk (w wyżej wymienionym ujęciu).

Skale porządkowe

Łatwo zauważyć, że średnie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

są niesensowne dla skal porządkowych, ponieważ równość

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x''_i$$

po nałożeniu funkcji rosnących jest naruszona. Na przykład: $x = (2, 4)$, $x' = (3, 3)$ i $f(x) = x^2$ rosnąca dla $x > 0$. Wtedy $\bar{x} = \bar{x}'$, ale $\frac{1}{2}\left(2^2 + 4^2\right) \neq \frac{1}{2}\left(3^2 + 3^2\right)$.

Sensowną statystyką dla tej skali jest na przykład mediana, tzn. $(k + 1)$-a wielkość wśród $n = 2k + 1$ wielkości, ułożonych w porządku wzrastania. Ponieważ żadna funkcja rosnąca nie zmienia kolejności ułożenia.

Przykład. W badaniach czytelnictwa trzech tygodników T1, T2, T3 na podstawie próby 100 osobowej ustalono, że:

35 osób czyta najchętniej tygodnik T1, a zatem 35 osób uszeregowało tygodniki następująco: (T1, T2, T3) lub (T1, T3, T2),

45 osób czyta tygodnik T1 na drugim miejscu, czyli uszeregowano (T2, T1, T3) lub (T3, T1, T2),

20 osób najmniej chętnie czyta tygodnik T1, czyli uszeregowano (T3, T2, T1) lub (T2, T3, T1).

Na podstawie tych danych (skala porządkowa) można stwierdzić, że:

a) wartość modalna (moda) rang przypisanych tygodnikowi T1 jest równa 2 (ranga wskazywana najczęściej – przez 45 osób),

b) mediana rang przypisanych tygodnikowi T1 jest również równa 2. Przy 100 czytelnikach, mediana jest wyznaczona przez czytelnika nr 50, a zatem jest to czytelnik, który umieścił tygodnik T1 na drugim miejscu. Istotnie, ponieważ pierwszych 35 czytelników umieściło tygodnik T1 na pierwszym miejscu, to pięćdziesiąty czytelnik musi należeć do grupy podającej tygodnik T1 na drugim miejscu.

Skale afiniczne (przedziałowe)

Z uwagi 1.1 wynika, że każda statystyka sensowna dla skal przedziałowych jest sensowna dla skal liniowych i różnic, jednak nie jest odwrotnie.

a. Rozpatrzmy sumę x_1+x_2, gdzie $(x_1, x_2)\in\Re^2$ – takie wartości skali dwuwymiarowej, że x_1 i x_2 są mierzone w różnych skalach ilorazowych, tzn. że zbiór dopuszczalnych przekształceń jest postaci:

$$\{(x_1, x_2)\to(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2): \alpha_1>0, \alpha_2>0\},$$

wtedy suma x_1+x_2 nie jest statystyką sensowną, ponieważ równość $x_1+x_2=x_1'+x_2'$ nie musi pociągać równości $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=\alpha_1 x_1'+\alpha_2 x_2'$. Z drugiej strony, jeśli x_1 i x_2 – wartości mierzone w tej samej jednowymiarowej skali przedziałowej, to suma jest statystyką sensowną, ponieważ równość $x_1+x_2=x_1'+x_2'$ pociąga za sobą $\alpha x_1+\alpha x_2+\beta=\alpha x_1'+\alpha x_2'+\beta$ dla wszystkich $\alpha, \beta\in\Re$.

b. Rozpatrzmy ogólniejszy przypadek sensownej statystyki dla skal przedziałowych, tzn. afiniczne funkcje postaci:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i+\lambda_0,$$

gdzie λ_i – dowolne, ustalone liczby rzeczywiste.

Jeśli $\lambda_0=0$, $\lambda_i=1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ i $\lambda_0=0$, $\lambda_i=\frac{1}{n}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, to otrzymamy najważniejsze statystyki sensowne dla tej miary (są to: suma wartości i średnia).

Funkcja f jest sensowna dla skali przedziałowej, ponieważ:

$$f(\alpha x_1+\beta, \alpha x_2+\beta, \ldots, \alpha x_n+\beta)=\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\beta\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+(1-\alpha)\lambda_0. \quad (7)$$

Więcej, z (7) wynika, że grupa przekształceń, indukowanych na zbiorze wartości funkcji f, w ogólnym przypadku jest izomorficzna z całą grupą dodatnich liniowych przekształceń.

c. Rozpatrzmy statystykę s (odchylenie standardowe):

$$s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie: $\bar{x}$ – średnia $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Statystyka s jest sensowna dla skal przedziałowych, ponieważ jeśli $x_i \to \alpha x_i + \beta$, to $s \to \alpha s$. Ta statystyka nie zmieni swej wartości tylko pod działaniem przesunięć:

$$x \to x + \beta.$$

Powróćmy jeszcze do skali porządkowej. Załóżmy, że mamy 5 kandydatów na prezydenta: A, B, C, D, E i należy ich uszeregować od najgorszego do najlepszego. Skala porządkowa pozwala każdemu kandydatowi przypisać liczbę porządkową (rangę) w danym uszeregowaniu. Jedna z możliwości może być następująca:

$A = 3, B = 2, C = 5, D = 4, E = 1.$

Ten sam problem spróbujmy rozwiązać na skali przedziałowej. Każdemu z kandydatów A, B, C, D, E należy przypisać liczbę z przedziału [1, 10]. Jedna z odpowiedzi może być następująca:

$$A = 4, B = 4, C = 7, D = 10, E = 1.$$

Jak łatwo zauważyć skala przedziałowa, podobnie jak porządkowa, wyznacza w tym przypadku uszeregowanie od najgorszego do najlepszego, ale pod względem dostarczanych informacji skala przedziałowa jest wyżej w hierarchii skal od skali porządkowej. Jest to oczywiste, ponieważ zbiór dopuszczalnych przekształceń skal porządkowych zawiera się w zbiorze dopuszczalnych przekształceń skal przedziałowych.

Na skali przedziałowej można przeprowadzać wszystkie te operacje matematyczne, które można przeprowadzać na skalach nominalnej i porządkowej. Jedną z nielicznych operacji, których nie możemy wykonywać na skalach przedziałowych, jest obliczanie ilorazów. Jest tak dlatego, że skala przedziałowa nie ma naturalnej jednostki miary ani ustalonego, uniwersalnego punktu zerowego. Zero na skali przedziałowej jest zerem umownym. Najczęściej podawanym w literaturze przykładem takich skal przedziałowych są skale Celsjusza i Fahrenheita. Załóżmy, że jeden obiekt ma temperaturę +20°C, drugi – +40°C, a trzeci – +42°C, to oczywistym jest, że najcieplejszym z nich jest obiekt nr 3 i że różnica temperatur pomiędzy obiektem nr 3 a obiektem nr 2 wynosi 2°C i różnica temperatur pomiędzy obiektem nr 2 a obiektem nr 1 wynosi 20°C. Możemy też stwierdzić, że różnica 2°C jest 10 razy mniejsza od różnicy 20°C. Na skali przedziałowej możemy zatem obliczyć ilorazy różnic między obiektami. Nie możemy jednak obliczać ilorazów bezpośrednio między obserwacjami. Na przykład nie możemy stwierdzić, iż obiekt nr 2 jest dwa razy cieplejszy od obiektu nr 1. Gdyby to było prawdą, to odpowiadające tym obserwacjom wartości na skali Fahrenheita powinny być również w stosunku 2:1. Wiemy, że 40°C = 104°F i 20°C = 68°F (zgodnie ze wzorem F = 32 + (9/5)°C), i stąd $104{:}68 \neq 2$. Powodem tego jest to, że skale przedziałowe nie mają naturalnej jednostki miary. Zauważmy też, że 0°C nie oznacza braku temperatury, gdyż możemy rejestrować temperatury poniżej i powyżej 0°C. Brak jakiegokolwiek ciepła odnotowany jest, jak wiadomo, przy temperaturze 0°K (Kelwina) = –273,15°C. Skala temperaturowa Kelwina jest zatem skalą wyższego rzędu niż skala Celsjusza – jest to skala liniowa.

Skale liniowe (ilorazowe)

a. Wiemy, że $\bar{x}$ i s są statystykami sensownymi dla skal przedziałowych, jednak „współczynnik wariancji” $s/\bar{x}$ w tej skali nie jest sensowny, ponieważ z faktu $s/\bar{x} = s'/\bar{x}'$ nie wynika, że $\alpha s/(\alpha\bar{x}+\beta) = \alpha s'/(\alpha\bar{x}'+\beta)$ dla wszystkich $\alpha > 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Współczynnik wariancji jest sensowny dla skal liniowych (ilorazowych).

b. Rozważmy problem obliczenia indeksów cen konsumpcyjnych (CPI) (jest to stosunek sumy cen określonych dóbr konsumpcyjnych objętych reprezentatywnym koszykiem w każdym kolejnym roku badania do sumy cen tych dóbr w roku bazowym). Niech $p_i(t)$ będzie ceną i-tego dobra w chwili t, a $p_i(0)$ – ceną tego dobra w roku bazowym. Wtedy

$$I(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)}.$$

Sprawdźmy, czy sensowne jest stwierdzenie, że CPI podwoił się w czasie ostatniego roku:

$$I(t+1) = 2I(t).$$

Ceny są mierzone pieniądzem, który jest mierzony skalą ilorazową. Jeżeli „nasze” dopuszczalne przekształcenia będą niezależne dla różnych cen (różnych towarów), to stwierdzenie to nie będzie sensowne; więcej – nawet stwierdzenie $I(t+1) > I(t)$ też nie będzie sensowne. Jednak jeżeli wszystkie ceny są mierzalne w tych samych jednostkach, wtedy nasze stwierdzenie jest sensowne.

Dla $\alpha > 0$ mamy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha p_i(t+1)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha p_i(0)} = 2\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha p_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha p_i(0)} \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(t+1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)} = 2\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)}.$$

Reasumując: skala ilorazowa jest to skala z ustalonym, uniwersalnym punktem zerowym, który oznacza brak nasilenia danej cechy. W związku z tym na skali ilorazowej mierzy się na przykład wielkość popytu na dany towar, koszty, liczbę konsumentów itp., możemy na niej obliczać średnią arytmetyczną. Należy podkreślić, że we współczesnych badaniach marketingowych występuje przekonanie, iż wszystkie znane metody statystyczne mogą być stosowane do danych typu co najmniej przedziałowego.

W pracy tej przedmiotem zainteresowania są indeksy ubóstwa, traktowane jako statystyki na wartościach skali ilorazowej. Ponieważ punktem wyjścia są dochody (wynagrodzenia), zatem są to statystyki na wartościach skali ilorazowej. Co więcej, wszystkie zmienne x_i są mierzone na tej samej skali ilorazowej. Przypomnijmy, że statystyka jest sensowna – dopuszczalna dla danego typu skali, gdy porównania są niezmiennicze względem dopuszczalnych przekształceń tej skali. Teraz zostanie zweryfikowana sensowność wymienionych w pracy indeksów ubóstwa.

Pierwszym indeksem jest procent ubogich. Zauważmy, że jest to statystyka na wartościach skali absolutnej (m jest to moc zbioru ubogich). Ponieważ jedynym przekształceniem dopuszczalnym jest funkcja tożsamościowa, więc jest on sensowny. Dodawanie i dzielenie są dopuszczalnymi operacjami.

Drugim indeksem jest luka dochodów ubogich (por. s. 72-73). Ponieważ dodawanie i odejmowanie są dopuszczalnymi statystykami dla skali przedziałowej, to tym bardziej są dopuszczalnymi statystykami dla skali ilorazowej. Dowód formalny:

Jeżeli dla danych x i y $I(x) = I(y)$, czyli $\sum_{i=1}^{m}(z - x_i) = \sum_{i=1}^{m}(z - y_i)$, to

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i.$$

Wtedy

$$I(ax+b) = \sum_{i=1}^{m}\left[az + b - (ax_i + b)\right] = m(az+b) - a\sum_{i=1}^{m} x_i - mb = m(az+b) - a\sum_{i=1}^{m} y_i - mb = I(ay+b).$$

Następnym indeksem jest indeks Sena (por. wzór (3), s. 73). Jeżeli opuścimy stałą normującą, to indeks Sena można zapisać w postaci:

$$\sum_{i=1}^{m}(z-x_i)(m+1-i).$$

Ponieważ dodawanie jest dopuszczalną statystyką dla skali przedziałowej, więc indeks ten jest sensowny dla tej skali, a tym bardziej dla skali ilorazowej.

Jeżeli $S(x)=S(y)$, to

$$S(ax)=\sum_{i=1}^{m}(az-ax_i)(m+1-i)=a\sum_{i=1}^{m}(z-x_i)(m+1-i)=a\sum_{i=1}^{m}(z-y_i)(m+1-i)=S(ay).$$

Jeżeli w indeksie Takayamy opuścimy stałą normującą, to można go zapisać w postaci:

$$P_T(x)=\sum_{i=1}^{m}(n+1-i)x_i^*,$$

gdzie x_i^* jest obcięciem x_i na wysokości z (wzór (21), s. 79).

Wtedy $P_T(x)=\sum_{i=1}^{m}(n+1-i)x_i+(n-m+1)z$ i dalszy ciąg dowodu sensowności tego indeksu jest identyczny jak dla indeksu Sena.

Klasa indeksów ubóstwa Kakwaniego (wzór (24), s. 80) jest uogólnieniem indeksu Sena. Pomijając stałą normującą można ją zapisać w postaci:

$$P_k(x)=\sum_{i=1}^{m}(z-x_i)(m+1-i)^k.$$

Dowód dopuszczalności tego indeksu dla skali ilorazowej jest identyczny jak dla indeksu Sena.

Indeksy Blackorby'ego-Donaldsona i Clarka, Hemminga, Ulpha (wzór (32), s. 82 i wzór (48), s. 86) są indeksami, w których występuje reprezentacyjny dochód ubogich. Otrzymuje się go za pomocą funkcji społecznej wyceny. Jeżeli zmienimy jednostkę wynagrodzenia, to znaczy, że wektor rozkładu dochodów pomnożymy przez stałą a ($a>0$), to dochód reprezentacyjny będzie wyrażony w nowej jednostce, czyli pomnożony przez a. Stąd dla tych indeksów jeżeli $P(x)=P(y)$, to $P(ax)=P(ay)$.

Indeks Fostera, Greera i Thorbecke (wzór (51), s. 87) pomijając stałą normującą jest postaci:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{m}\left[(z-x_i)/z\right]^{\alpha}.$$

Wtedy

$$P(ax)=\sum_{i=1}^{m}\left[(az-ax_i)/az\right]^{\alpha}=P(x).$$

Zatem z równości $P(x)=P(y)$ wynika równość $P(ax)=P(ay)$; czyli indeks ten jest dopuszczalny dla skali ilorazowej.

Na koniec sprawdźmy sensowność indeksu ciągłego (wzór (85), s. 107)

$$P(x)=\sum_{i=1}^{m}\left[(z-x_i)/(z+x_i)\right].$$

Zauważmy, że

$$P(\alpha x)=\sum_{i=1}^{m}\left[(\alpha z-\alpha x_i)/(\alpha z+\alpha x_i)\right]=P(x).$$

Stąd indeks ten jest dopuszczalny dla skali ilorazowej.

1.2.7. Modele podstawowych pomiarów

1.2.7.a. Funkcja użyteczności

Weźmy dowolny s.r. $\mathscr{A}=[A;\ \mathscr{R}]$, gdzie $\mathscr{R}$ – binarna relacja na A. Kiedy możemy znaleźć funkcję o wartościach rzeczywistych f na A taką, że dla wszystkich a, $b \in A$,

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow f(a)>f(b). \tag{8}$$

Funkcja f jest homomorfizmem z s.r. $\mathscr{A}=[A;\ \mathscr{R}]$ w l.s.r. $\mathscr{B}=[\Re;\ <]$. Teraz będziemy chcieli znaleźć warunki konieczne i wystarczające na istnienie takiej funkcji f. Przypomnijmy, że binarna relacja $\mathscr{R}$ na A jest asymetryczna, gdy $\forall a,\ b\in A$ $(a\mathscr{R}b \Rightarrow \sim b\mathscr{R}a)$, i jest ujemnie przechodnia, gdy

$$\forall a,\ b,\ c\in A\ \left[(\sim a\mathscr{R}b)\wedge(\sim b\mathscr{R}c)\right]\Rightarrow(\sim a\mathscr{R}c).$$

Definicja 1.22. Funkcję f spełniającą warunek (8) nazywamy funkcją użyteczności.

Twierdzenie 1.11. Załóżmy, że A jest zbiorem skończonym i $\mathscr{R}$ binarną relacją na A. Wtedy na A istnieje f – funkcja użyteczności $\Leftrightarrow$ $\mathscr{R}$ jest ujemnie przechodnia i asymetryczna na A (taką relację nazywamy ściśle słabym porządkiem).

Dowód. Niech f spełnia (8). Wtedy $\mathscr{R}$ jest asymetryczna na A, bo $a\mathscr{R}b \Rightarrow f(a)>f(b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sim f(b)>f(a) \Leftrightarrow \sim b\mathscr{R}a$. Jest także ujemnie przechodnia: jeśli $\sim a\mathscr{R}b\wedge\sim b\mathscr{R}c$, to $\sim(f(a)>f(b))\wedge\sim(f(b)>f(c))$, więc $f(a)\le f(c)$, czyli $\sim(f(a)>f(c))\Leftrightarrow\sim a\mathscr{R}c$.

Załóżmy, że $\mathscr{R}$ jest ściśle słabym porządkiem na A. Homomorfizm f skonstruujemy w następujący sposób:

$$f(x)=\text{liczba } y\in A\text{: } x\mathscr{R}y. \tag{9}$$

Dla ilustracji konstrukcji załóżmy, że $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ i $\mathscr{R}=\{(a,\ c),\ (a,\ d),\ (a,\ e),\ (b,\ c),\ (b,\ d),\ (b,\ e),\ (c,\ d),\ (c,\ e)\}$. Łatwo sprawdzić, że $\mathscr{R}$ jest ściśle słabym porządkiem i wtedy funkcja f ma postać:

$$f(a)=3,$$
$$f(b)=3,$$

$$f(c)=2,$$
$$f(d)=0,$$
$$f(e)=0.$$

Oczywiście f jest homomorfizmem, ponieważ zachowuje porządek.

Aby udowodnić, że funkcja f zdefiniowana (9) zawsze spełnia (8), udowodnimy najpierw, że $\mathscr{R}$ na A jest przechodnia przy założeniu, że $\mathscr{R}$ jest ściśle słabym porządkiem na A. Załóżmy, że $a\mathscr{R}b$ i $b\mathscr{R}c$ i $\sim a\mathscr{R}c$. Ponieważ $\mathscr{R}$ jest asymetryczna, więc $b\mathscr{R}c \Rightarrow \sim c\mathscr{R}b$, i ponieważ jest ujemnie przechodnia, więc $\sim a\mathscr{R}c \wedge \sim c\mathscr{R}b \Rightarrow \sim a\mathscr{R}b$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem $\mathscr{R}$ jest przechodnia na $\mathscr{A}$. Jeśli $a\mathscr{R}b \wedge b\mathscr{R}y$, to $a\mathscr{R}y$ dla wszystkich $y \in \mathscr{A}$. Zatem liczba y takich, że $a\mathscr{R}y$ jest co najmniej tak duża jak liczba y takich, że $b\mathscr{R}y$. Stąd $f(a) \geq f(b)$. Ponadto $a\mathscr{R}b$ i nie $b\mathscr{R}b$, ponieważ ściśle słaby porządek nie jest zwrotny. Zatem $f(a) > f(b)$.

Załóżmy teraz, że $f(a) > f(b)$ i $\sim a\mathscr{R}b$, wtedy $\sim b\mathscr{R}y$ implikuje $\sim a\mathscr{R}y$ z ujemnej przechodniości. Stąd $a\mathscr{R}y$ implikuje $b\mathscr{R}y$, więc $f(b) \geq f(a)$, zatem $\sim\left(f(a) > f(b)\right)$ – co jest sprzeczne z założeniem.

Z dowodu twierdzenia mamy użyteczny wniosek.

Wniosek 1.10. Każdy ściśle słaby porządek jest przechodni.

Wniosek ten daje nam narzędzie do sprawdzenia istnienia lub nie homomorfizmu spełniającego (*).

Wniosek 1.11. Załóżmy, że A jest zbiorem skończonym, i $\mathscr{R}$ jest binarną relacją na A. Wtedy istnieje funkcja użyteczności na $A \Leftrightarrow f$ zdefiniowana przez (9) spełnia (8).

Załóżmy, że nasz zbiór ma dużą liczbę elementów i porównywanie wszystkich par jest uciążliwe. Dodatkowo załóżmy, że istnieje funkcja użyteczności, tzn. że preferencje są ściśle słabo uporządkowane. Załóżmy też, że mamy do czynienia z pewnymi alternatywami, grą lub loterią i każde działanie ma pewną konsekwencję, a każda konsekwencja ma prawdopodobieństwo pojawienia się i swoją użyteczność.

Niech c_i – konsekwencje działań, $p(c_i)$ i $u(c_i)$ – odpowiednio prawdopodobieństwa i użyteczności. Oczekiwaną użyteczność akcji zdefiniujemy następująco:

$$\sum_{i=1}^{n} p(c_i)u(c_i).$$

Dla każdego działania liczymy jego oczekiwaną użyteczność i wybieramy to działanie, które ma największą użyteczność. Spróbujmy opisać tę procedurę. Niech $\mathscr{R}$ binarna relacja preferencji na A. Załóżmy, że w A istnieją takie dwa elementy a_* i a^*, że $a^*\mathscr{R}a_*$ oraz dla wszystkich $a \in A$ $\sim a\mathscr{R}a^*$ i $\sim a_*\mathscr{R}a$. Ponieważ $a^*\mathscr{R}a_*$ i u jest funkcją użyteczności, więc $u(a^*) > u(a_*)$. Weźmy $a \in A$ i niech $\lambda(a)$ będzie akcją, której konsekwencją jest a z prawdopodobieństwem 1, Następnie wybierzmy prawdopodobieństwo $f(a)$, dla którego mamy dwie akcje dla nas obojętne $\lambda(a)$ i $\Theta(a)$, które mają dwie konsekwencje: a^* z prawdopodobieństwem $f(a)$ i a_* z prawdopodobieństwem $1-f(a)$. Obojętność oznacza tu, że nie preferujemy żadnego z tych działań. Łatwo pokazać, że $f(a)$ definiuje porządkową funkcję użyteczności na $[A, \mathcal{R}]$. Oczekiwaną użytecznością dla $\lambda(a)$ jest $u(a)$ i dla $\Theta(a)$ jest

$$f(a)u(a^*)+[1-f(a)]u(a_*)=f(a)\left[u(a^*)-u(a_*)\right]+u(a_*).$$

Ponieważ dla nas działania $\Theta(a)$ i $\lambda(a)$ są obojętne, więc ich oczekiwane wartości możemy przyrównać

$$u(a)=f(a)\left[u(a^*)-u(a_*)\right]+u(a_*).$$

Ponieważ $u(a^*)-u(a_*)>0$, możemy podzielić równanie przez $u(a^*)-u(a_*)$ i otrzymamy

$$f(a)=\frac{u(a)-u(a_*)}{u(a^*)-u(a_*)}=\alpha u(a)+\beta,$$

gdzie

$$\alpha=\frac{1}{u(a^*)-u(a_*)} \text{ i } \beta=\frac{u(a)-u(a_*)}{u(a^*)-u(a_*)}.$$

Ponieważ $\alpha>0$, mamy dla wszystkich $a, b \in A$

$$u(a)>u(b) \Leftrightarrow f(a)>f(b).$$

Zatem

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow u(a)>u(b) \Leftrightarrow f(a)>f(b),$$

czyli f jest porządkową funkcją użyteczności na $[A; \mathcal{R}]$.

Twierdzenie 1.12. Załóżmy, że A jest zbiorem skończonym i $\mathcal{R}$ jest binarną relacją na A, oraz f jest funkcją rzeczywistą na A spełniającą (8). Wtedy f jest skalą porządkową, tzn. f: $[A; \mathcal{R}] \to \mathcal{B}=[\mathfrak{R}; <]$.

Dowód. Jeżeli Φ: $f(A) \to \mathfrak{R}$ jest funkcją rosnącą, to

$$(\Phi \circ f)(a)>(\Phi \circ f)(b) \Leftrightarrow f(a)>f(b) \Leftrightarrow a\mathcal{R}b.$$

Odwrotnie, jeśli f spełnia (*), to weźmy funkcję Φ: $f(A) \to \mathfrak{R}$ taką, że $\Phi \circ f$ jest rosnąca. Niech $\alpha, \beta \in f(A)$: $\alpha=f(a)$ i $\beta=f(b)$. Wtedy $\alpha>\beta \Leftrightarrow a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (\Phi \circ f)(a)>(\Phi \circ f)(b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Phi(\alpha)>\Phi(\beta)$

Zatem Φ jest funkcją rosnącą i stąd klasą dopuszczalnych przekształceń funkcji f jest klasa funkcji rosnących.

Uwaga 1.4. Twierdzenie 1.12 jest prawdziwe w przypadku, gdy A jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

Jeżeli $A = \mathfrak{R}\times\mathfrak{R}$ i $(a, b)\mathscr{R}(s, t) \Leftrightarrow a > s \vee (a = s \text{ i } b > t)$ ($\mathscr{R}$ jest porządkiem leksykograficznym na $\mathfrak{R}^2$), to nie istnieje funkcja f o wartościach rzeczywistych na A spełniająca (8). Załóżmy, że f istnieje. Wtedy

$$(a, 1)\mathscr{R}(a, 0) \Rightarrow f(a, 1) > f(a, 0).$$

Wiemy, że pomiędzy dwoma liczbami rzeczywistymi istnieje liczba wymierna, powiedzmy $g(a)$:

$$f(a, 1) > g(a) > f(a, 0).$$

Funkcja g przekształca $\mathfrak{R}$ w $\mathscr{Q}$ i jest różnowartościowa (rosnąca). Niech $a > b$, wtedy

$$g(a) > f(a, 0) > f(b, 1) > g(b).$$

Ale z drugiej strony wiemy, że nie istnieje funkcja różnowartościowa z $\mathfrak{R}$ w $\mathscr{Q}$ (bo $\mathfrak{R}$ i $\mathscr{Q}$ są różnych mocy). Zatem otrzymaliśmy sprzeczność.

1.2.7.b. Pomiar ekstensywny

Twierdzenie Höldera. Załóżmy, że mamy s.r. $\mathscr{A} = [A;\ \mathscr{R},\ \circ]$, gdzie $\mathscr{R}$ jest binarną relacją na A, a $\circ$ jest binarną operacją. Chcemy znaleźć funkcję f o wartościach rzeczywistych na zbiorze A spełniającą (8) i

$$f(a \circ b) = f(a) + f(b) \tag{10}$$

Będziemy szukać warunków na $[A;\ \mathscr{R},\ \circ]$ koniecznych i wystarczających dla istnienia homomorfizmu z $\mathscr{A} = [A;\ \mathscr{R},\ \circ]$ w $\mathscr{B} = [\mathfrak{R};\ <,\ +]$.

Pierwszym, który podał dostateczne warunki na istnienie pomiaru rozległego był Hölder (1901 r.). Wyszedł on od następującej definicji:

Definicja 1.23. System relacyjny $[A;\ \mathscr{R},\ \circ]$ jest uporządkowaną grupą Archimedesa, gdy spełnia następujące aksjomaty:

A1. $[A;\ \circ]$ jest grupą, tzn. spełnia następujące warunki:

G1) łączność: $\forall a, b, c \in A\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

G2) $\exists e \in A,\ \forall a \in A,\ a \circ e = e \circ a = a,\ \forall a \in A$,

G3) $\forall a \in A,\ \exists b \in A,\ a \circ b = b \circ a = e$.

A2. S.r. $[A;\ \mathscr{R}]$ jest ściśle prostym porządkiem, tzn. jest ściśle słabym porządkiem i jest spójny (tzn. $\forall a, b\ a \neq b \Rightarrow a\mathscr{R}b \vee b\mathscr{R}a$).

A3. Własność Archimedesa

$\forall a, b \in A,\ a\mathscr{R}e \Rightarrow (\exists n \in \mathscr{N}:\ na\mathscr{R}b)$ (nie ma nieskończenie małych).

Uporządkowanymi grupami Archimedesa są systemy:

$[\mathfrak{R};\ >,\ +], [\mathfrak{R}_+;\ >,\ \circ]$.

Twierdzenie 1.13. (Hölder). Każda uporządkowana grupa Archimedesa jest homomorficzna z $[\Re;\ >,\ +]$.

Twierdzenie 1.14. Załóżmy, że A jest niepustym zbiorem, $\mathscr{R}$ – binarną relacją na A, $\circ$ jest binarną operacją na A i f jest funkcją o wartościach rzeczywistych na A spełniającą warunki (8) i (10):

$$\forall a,\ b \in A,\ a\mathscr{R}b \Leftrightarrow f(a) > f(b) \tag{8}$$

i

$$f(a \circ b) = f(a) + f(b). \tag{10}$$

Wtedy $f\colon \mathscr{A} = [A;\ \mathscr{R},\ \circ] \to \mathscr{B} = [\Re;\ >,\ +]$ jest regularną reprezentacją i f jest skalą ilorazową (liniową).

Dowód. Aby pokazać, że $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ jest regularną reprezentacją, niech f i $g \in \mathscr{M}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. Zdefiniujmy $\Phi\colon f(A) \to \Re$ następująco: $\Phi(x) = g(a)$, jeśli $x = f(a)$. Wtedy $g = \Phi \circ f$

Aby pokazać, że f jest skalą stosunkową załóżmy, że dla pewnego $\alpha > 0$ $\Phi(x) = \alpha x$ dla wszystkich $x \in f(A)$. Wtedy $\Phi \circ f$ spełnia (8) i (10), ponieważ f spełnia.

Odwrotnie, załóżmy, że $\Phi\colon f(A) \to \Re$ jest dopuszczalną transformatą. Chcemy pokazać, że Φ jest transformatą stosunkową, tzn. istnieje $\alpha > 0$ i $\Phi(x) = \alpha x$ dla $x \in f(A)$. Niech $g = \Phi \circ f$. Pokażemy, że jeśli $f(a) > 0$, to $g(a) > 0$.

Gdyby $g(a) \leq 0$, to $g(a \circ a) = g(a) + g(a) \leq g(a)$. Ponieważ g spełnia (8), $g(a \circ a) \leq g(a)$ implikuje $\sim[a \circ a\mathscr{R}a]$, stąd $f(a \circ a) \leq f(a)$, czyli $f(a) < 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Podobnie dowodzimy, że jeśli $f(a) < 0$, to $g(a) < 0$ i jeśli $f(a) = 0$, to $g(a) = 0$. Załóżmy, że dla pewnego $e \in A$ $f(e) \neq 0$, np. $f(e) > 0$, i wtedy $g(e) > 0$. Dla tego e dobierzmy α tak, aby $g(e) = \alpha \cdot f(e)$ ($\alpha > 0$, bo $g(e) > 0$ i $f(e) > 0$). Chcemy pokazać, że $g(a) = \alpha \cdot f(a)$ dla wszystkich $a \in \mathscr{A}$, a to nam da, że $\Phi(x) = \alpha x$ dla wszystkich $x \in f(A)$.

Dowód (nie wprost). Załóżmy, że $g(a) < \alpha \cdot f(a)$, stąd

$$\frac{g(a)}{\alpha \cdot f(e)} < \frac{f(a)}{f(e)}.$$

Ponieważ pomiędzy dwoma liczbami rzeczywistymi jest liczba wymierna, więc istnieją takie liczby naturalne m i n, że

$$\frac{g(a)}{\alpha \cdot f(e)} < \frac{m}{m} < \frac{f(a)}{f(e)} \Leftrightarrow \frac{g(a)}{\alpha} < \frac{m \cdot f(e)}{n} < f(a).$$

Stąd $m \cdot f(e) < n \cdot f(a)$ i z (***) $f(me) < f(na)$ i z (*) $na\mathscr{R}me$. Ale wtedy $g(na) > g(me)$, więc $ng(a) > mg(e) = m \cdot \alpha \cdot f(e)$. Więc

$$\frac{g(x)}{\alpha} > \frac{m}{n} \cdot f(e) \text{ – sprzeczność.}$$

Podobnie pokazuje się, że jest niemożliwe, aby $g(a) > \alpha \cdot f(a)$. Zatem $g(a) = \alpha \cdot f(a)$.

Zauważmy, że jeśli f spełnia (8) i (10), to $g = \exp(f)$ spełnia

$$g(a \circ b) = g(a) \cdot g(b)$$

i wtedy mówimy, że g jest multiplikatywną reprezentacją. Odwrotnie, jeśli mamy multiplikatywną reprezentację (z dodatnią funkcją g), to wtedy $f = \ln g$ daje nam addytywną reprezentację.

1.2.7.c. Pomiar łączny

Niech A_i będzie zbiorem wszystkich możliwych a_i i niech $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Mówimy wtedy, że A ma strukturę produktową. Aby obliczyć użyteczność dowolnego elementu z A policzymy użyteczności każdej zmiennej oddzielnie i potem je zsumujemy. Tzn. jeśli u: $A \to \mathfrak{R}$ jest porządkową funkcją użyteczności, to chcemy znaleźć funkcje $u_1, u_2, \ldots, u_n$ o wartościach w $\mathfrak{R}$ na $A_1, A_2, \ldots, A_n$ odpowiednio i takie, że dla wszystkich $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in A$

$$u(a) = u_1(a_1) + u_2(a_2) + \ldots + u_n(a_n). \tag{11}$$

Funkcję użyteczności spełniającą (11) nazywamy addytywną funkcją użyteczności.

Załóżmy, że $\mathscr{R}$ jest binarną relacją na A. Jeśli $\mathscr{R}$ jest ścisłym porządkiem, to szukamy funkcji u_i o wartościach w $\mathfrak{R}$ na A_i odpowiednio takich, że dla dowolnych $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ w A

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow u_1(a_1) + u_2(a_2) + \ldots + u_n(a_n) > u_1(b_1) + u_2(b_2) + \ldots + u_n(b_n). \tag{12}$$

Chcielibyśmy znaleźć warunki dostateczne i wystarczające na $[A; \mathscr{R}]$ dla istnienia funkcji u_i spełniających (12).

Reprezentacja (12) jest często nazywana addytywnym łącznym pomiarem, ponieważ różne współrzędne mierzone są łącznie.

Dla ilustracji załóżmy, że $A_1 = A_2 = \{0, 1\}$ i relacja porządku dana jest następująco:

$$(1, 1) > (1, 0) > (0, 1) > (0, 0).$$

Weźmy porządkową funkcję użyteczności:

$$u(1, 1) = 3,\ u(1, 0) = 2,\ u(0, 1) = 1,\ u(0, 0) = 0.$$

Możemy znaleźć addytywną łączną reprezentację:

$$u_1(1) = 2,\ u_1(0) = 0,\ u_2(1) = 1,\ u_2(0) = 0.$$

Wtedy

$$u_1(1) + u_2(1) = 3,\ u_1(1) + u_2(0) = 2,$$
$$u_1(0) + u_2(1) = 1,\ u_1(0) + u_2(0) = 0,$$

więc $u_1(1) + u_2(1) > u_1(1) + u_2(0) > u_1(0) + u_2(1) > u_1(0) + u_2(0)$.

Zauważmy, że gdybyśmy w powyższym przykładzie zmienili relację porządku, to addytywna łączna reprezentacja nie istnieje. Niech

$$(0,\ 1)\mathscr{R}(0,\ 0) \text{ i } (1,\ 0)\mathscr{R}(1,\ 1).$$

Wtedy

$$u_1(0)+u_2(1)>u_1(0)+u_2(0),$$

stąd

$$u_2(1)>u_2(0),$$

i

$$u_1(1)+u_2(1)>u_1(1)+u_2(0)\Leftrightarrow(1,\ 1)\mathscr{R}(1,\ 0),$$

co jest sprzeczne z założeniem: $(1,\ 0)\mathscr{R}(1,\ 1)$.

Zdefiniujmy relację $\mathscr{S}$ na A w następujący sposób:

$$a\mathscr{S}b \Leftrightarrow \sim b\mathscr{R}a.$$

Jeśli $\mathscr{R}$ jest ścisłą preferencją (silnym porządkiem), to $\mathscr{S}$ jest słabą preferencją (słabym porządkiem).

Podamy teraz warunki na $[A;\ \mathscr{R}]$ dla istnienia funkcji u_i spełniających (12).

Aksjomat C1. Dla wszystkich $a_1,\ b_1 \in A_1$ i $a_2,\ b_2 \in A_2$ $(a_1,\ a_2)\mathscr{S}(b_1,\ b_2)$ lub $(b_1,\ b_2)\mathscr{S}(a_1,\ a_2)$.

Aksjomat C2. Załóżmy, że $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1} \in A_1$ i $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1} \in A_2$ i załóżmy, że π i σ są permutacjami zbioru $\{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$. Jeśli $(x_i,\ y_i)\mathscr{S}\left(x_{\pi(i)},\ y_{\sigma(i)}\right)$ dla $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, to $\left(x_{\pi(0)},\ y_{\sigma(0)}\right)\mathscr{S}(x_0,\ y_0)$.

Aby zilustrować aksjomat C2 weźmy $A_1=A_2=\{0,\ 1\}$, $x_0=1$, $x_1=0$, $y_1=1$, $y_2=1$. Niech π będzie permutacją tożsamościową, a $\sigma=(01)$. Aksjomat C2 mówi, że jeśli $(x_1,\ y_1)\mathscr{S}\left(x_{\pi(1)},\ y_{\sigma(2)}\right)$, to $\left(x_{\pi(0)},\ y_{\sigma(1)}\right)\mathscr{S}(x_0,\ y_0)$. W naszym przypadku:

$$(x_1,\ y_1)\mathscr{S}(x_1,\ y_0)\Rightarrow(x_0,\ y_1)\mathscr{S}(x_0,\ y_0),$$

czyli

$$(0,\ 1)\mathscr{S}(0,\ 0)\Rightarrow(1,\ 1)\mathscr{S}(1,\ 0).$$

Zauważmy, że aksjomat C2 wynika z reprezentacji (12)

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[u_1(x_i)+u_2(y_i)\right]=\sum_{i=0}^{n-1}u_1(x_i)+\sum_{i=0}^{n-1}u_2(y_i)=\sum_{i=0}^{n-1}u_1\left(x_{\pi(i)}\right)+\sum_{i=0}^{n-1}u_2\left(y_{\sigma(i)}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[u_1\left(x_{\pi(i)}\right)+u_2\left(y_{\sigma(i)}\right)\right].$$

Jeśli $(x_i,\ y_i)\mathscr{S}\left(x_{\pi(i)},\ y_{\sigma(i)}\right)$ dla $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, to

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[u_1(x_i)+u_2(y_i)\right]\geq\sum_{i=0}^{n-1}\left[u_1\left(x_{\pi(i)}\right)+u_2\left(y_{\sigma(i)}\right)\right].$$

Stąd

$$u_1(x_1)+u_2(y_0)<u_1\left(x_{\pi(0)}\right)+u_2\left(y_{\sigma(0)}\right),$$

więc

$$\left(x_{\pi(0)}, y_{\sigma(0)}\right)\mathscr{S}(x_0, y_0).$$

Twierdzenie 1.15. (Scott 1964). Załóżmy, że A_1 i A_2 są skończonymi zbiorami i $\mathscr{R}$ jest binarną relacją na $A = A_1 \times A_2$. Wtedy aksjomaty C1 i C2 są konieczne i wystarczające dla istnienia funkcji $u_1\colon A_1 \to \mathfrak{R}$ i $u_2\colon A_2 \to \mathfrak{R}$ takich, że dla wszystkich a_1, $b_1 \in A_1$ i a_2, $b_2 \in A_2$

$$(a_1, a_2)\mathscr{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow u_1(a_1)+u_2(a_2) > u_1(b_1)+u_2(b_2) \tag{13}$$

Jeśli u_1' i u_2' także spełniają (13), to istnieją liczby rzeczywiste α, β, γ, $\alpha > 0$ takie, że

$$u_1' = \alpha u_1 + \beta,$$

$$u_2' = \alpha u_2 + \gamma.$$

Aby móc stosować reprezentację addytywną konieczne jest, aby mierzony obiekt spełniał warunek niezależności, tzn. $[(a, x)\mathscr{R}(b, x)] \Rightarrow [(a, y)\mathscr{R}(b, y)]$ dla wszystkich y i $[(a, x)\mathscr{R}(a, y)] \Rightarrow [(b, x)\mathscr{R}(b, y)]$ dla wszystkich b.

Dla przykładu ten warunek mówi tyle, że jeśli ty wolisz bardziej (10 000 \$, 1 dom) niż (10 000 \$, 0 domów), to także będziesz preferował bardziej (1 \$, 1 dom) niż (1 \$, 0 domów). Nie ma niezależności, jeśli są pewne interakcje pomiędzy alternatywami i wtedy nie można stosować pomiaru łącznego.

W takich przypadkach być może możliwa jest pewna modyfikacja reprezentacji. Na przykład przypuśćmy, że możemy znaleźć funkcje rzeczywiste u_1 i λ_1 na A_1 i u_2, λ_2 na A_2 takie, że dla wszystkich a_1, b_1 z A_1 i a_2, b_2 z A_2

$$(a_1, a_2)\mathscr{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow u_1(a_1)+u_2(a_2)+\lambda_1(a_1)\cdot\lambda_2(a_2) > u_1(b_1)+u_2(b_2)+\lambda_1(b_1)\cdot\lambda_2(b_2) \tag{14}$$

Wyrażenie $\lambda_1(a_1)\cdot\lambda_2(a_2)$ reprezentuje efekt interakcji. Reprezentacja (14) jest nazywana quasi-addytywną reprezentacją.

Przykład. Niech $A_1 = A_2 = \{0, 1\}$, $\mathscr{R}$ na $A = A_1 \times A_2$ będzie porządkiem leksykograficznym. Wtedy $[A; \mathscr{R}]$ spełnia C1 i C2, warunek niezależności i ma addytywną łączną miarę. Aksjomat C1 jest spełniony, bo porządek leksykograficzny jest liniowy.

Aksjomat C2.

a) $\sigma = (0, 1)$, $\pi = \sigma$ lub b) $\sigma = (0, 1)$ $\pi =$ identyczność.

ad a) $(1, 1) \geq (0, 0)$ i $(1, 1) \geq (0, 0)$,

ad b) $(1, 1) \geq (1, 0)$ i $(0, 1) \geq (0, 0)$.

Warunek niezależności:

ad a) $(0, 1) \geq (0, 0)$ i $(1, 1) \geq (1, 0)$,

ad b) $(1, 1) \geq (1, 0)$ i $(0, 1) \geq (0, 0)$.

1.2.8. Półporządki

Jeśli $\mathscr{R}$ jest relacją preferencji na A, to relacją obojętności odpowiadającą relacji $\mathscr{R}$ jest relacja $\mathscr{E}$ na A zdefiniowana następująco:

$$\forall a,b \in A \;\; a\mathscr{E}b \Leftrightarrow [\sim a\mathscr{R}b \wedge \sim b\mathscr{R}a], \tag{15}$$

tzn. że elementy a i b są dla mnie obojętne, gdy nie preferuję a nad b, ani b nad a.

Z twierdzenia 1.11 wiemy, że jeżeli $\mathscr{R}$ jest ściśle słabym porządkiem (tzn. jest asymetryczna i ujemnie przechodnia), to istnieje reprezentacja f: $(A, \mathscr{R})$ w $(\Re, >)$ i wtedy $a\mathscr{E}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Ponieważ relacja = jest przechodnia, zatem $(A, \mathscr{E})$ też jest przechodnia.

Istnieją relacje obojętności, które nie są przechodnie. Np. większość ludzi woli kawę z jedną łyżeczką cukru niż z pięcioma łyżeczkami cukru (smakosze uważają, że najlepsza kawa jest bez cukru). Ale gdybyśmy dodawali po 1 g cukru, to kolejne słodzenia byłyby w relacji obojętności, choć ostateczny skutek (setna kawa) nie prowadzi do relacji obojętności. W tym przypadku relacja obojętności nie jest przechodnia. Innym przykładem może być problem kupna samochodu przy ograniczonych możliwościach finansowych.

Pewna osoba uważa, że cena jest ważniejsza niż jakość, ale gdy ceny są bliskie, to podstawą wyboru jest jakość. Zatem gdy ceny towarów a i b są bliskie, oraz ceny towarów b i c też są bliskie, wtedy może ona bardziej preferować a niż b, ponieważ a ma wyższą jakość niż b i bardziej preferować b niż c, gdyż b ma wyższą jakość niż c. Ale może się okazać, że bardziej preferuje c niż a, ponieważ cena c jest dostatecznie niższa od ceny a. W tym przypadku preferencja nie jest przechodnia. Ponadto nie jest też ujemnie przechodnia, czyli nie istnieje porządkowa funkcja użyteczności (bo aby istniała relacja preferencji, musiałaby być asymetryczna i ujemnie przechodnia).

Czy w takich przypadkach istnieje możliwość reprezentacji? Czy możemy znaleźć taką funkcję, żeby dostatecznie dobrze oddzielała elementy zbioru A? Odpowiedź na te pytania dał Luce (1956). Zaproponował, żeby poszukać taką funkcję rzeczywistą u na A, aby dla wszystkich $a, b \in A$ a było bardziej preferowane niż $b \Leftrightarrow u(a)$ jest nie tylko większe niż $u(b)$, ale „wystarczająco większe”. Aby opisać tę reprezentację formalnie ustalmy pewną liczbę dodatnią δ. Zapytajmy jakie warunki konieczne i wystarczające ma spełniać s.r. $(A, \mathscr{R})$, aby istniała funkcja rzeczywista na A taka, że dla wszystkich $a, b \in A$

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow u(a) > u(b) + \delta. \tag{16}$$

Czyli pytamy o warunki na istnienie homomorfizmu z $(A, \mathscr{R})$ w $(\Re, >_j)$, gdzie $x >_j y \Leftrightarrow x > y + \delta$ (por. Fishburn).

Niech $A = \{a, b, c, d\}$ i $\mathscr{R} = \{(a, b), (c, d)\}$ oraz b i c, b i d są względem siebie w relacji obojętności. Dla s.r. $(A, \mathscr{R})$ nie istnieje reprezentacja (homomorfizm) z $(A, \mathscr{R})$ w $(\Re, >_j)$. Gdyby istniała, to

$$f(a) > f(b) + \delta \geq f(c) > f(d) + \delta, \text{ czyli } (a, d) \in \mathscr{R},$$

co jest sprzeczne z definicją relacji $\mathscr{R}$ (druga nierówność wynika z tego, że c nie jest preferowane nad b).

Odpowiadając na to pytanie Luce wprowadził półporządek (*semiorder*).

Definicja 1.24. Mówimy, że binarna relacja $(A, \mathscr{R})$ jest półporządkiem, jeśli dla wszystkich $a, b, c, d \in A$ spełnia warunki:

S1. $\sim(a\mathscr{R}a)$,

S2 $(a\mathscr{R}b \wedge c\mathscr{R}d) \Rightarrow (a\mathscr{R}d \vee c\mathscr{R}b)$,

S3 $(a\mathscr{R}b \wedge b\mathscr{R}c) \Rightarrow (a\mathscr{R}d \vee d\mathscr{R}c)$.

Zauważmy, że warunki S1 i S2 lub S1 i S3 dają przechodniość relacji $(A, \mathscr{R})$. Warunki S2 i S3 można przedstawić na diagramach Hassego:

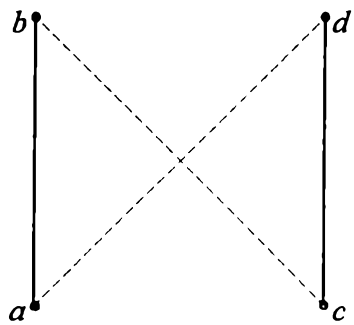


Diagram dla warunku S2

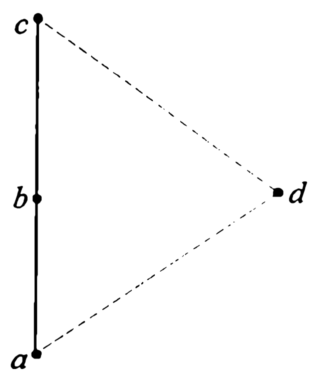


Diagram dla warunku S3

Warunki mówią tyle, że jedna z przerywanych linii musi być ciągła.

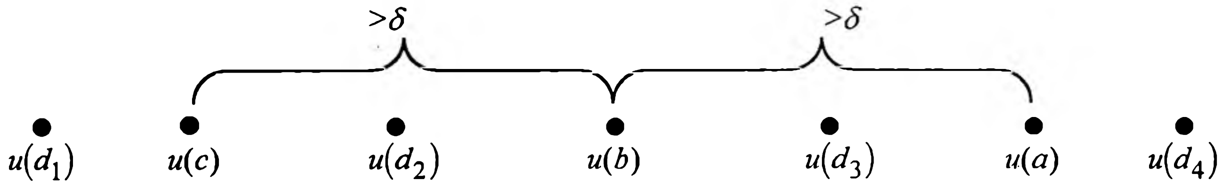
Twierdzenie 1.16. (Scott i Suppes). Załóżmy, że $\mathscr{R}$ jest binarną relacją na skończonym zbiorze A i δ jest liczbą dodatnią. Wtedy $[A; \mathscr{R}]$ jest półporządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja rzeczywista u na A taka, że dla wszystkich $a, b \in A$ spełnia warunek (16):

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow u(a) > u(b) + \delta. \tag{16}$$

Dowód tego twierdzenia jest konstrukcyjny i można go znaleźć w: Scott i Suppes (1956) lub Rabinovitch (1976) (por. Fishburn).

Zauważmy, że warunek S1 jest spełniony z definicji, bo mamy, że dla $\delta > 0$ $u(a)$ nigdy nie będzie większa niż $u(a) + \delta$.

Aby zobaczyć, że warunek S3 zachodzi załóżmy, że $a\mathscr{R}b$ i $b\mathscr{R}c$. Wtedy $u(a)$, $u(b)$ i $u(c)$ mają pozycje jak na rysunku:



Teraz $u(d)$ może mieć jedną z pozycji: $u(d_1)$, $u(d_2)$. Więc mamy $d_4\mathscr{R}c$, $d_3\mathscr{R}c$, $a\mathscr{R}d_2$, $a\mathscr{R}d_1$ – czyli następnik implikacji S3.

Aby zobaczyć, że warunek S2 zachodzi rozważmy dwa przypadki: $u(a) \geq u(c)$ i $u(c) \geq u(a)$. W pierwszym przypadku mamy:

$$u(a) \geq u(c) > u(d) + \delta, \text{ więc } a\mathscr{R}d.$$

W drugim przypadku

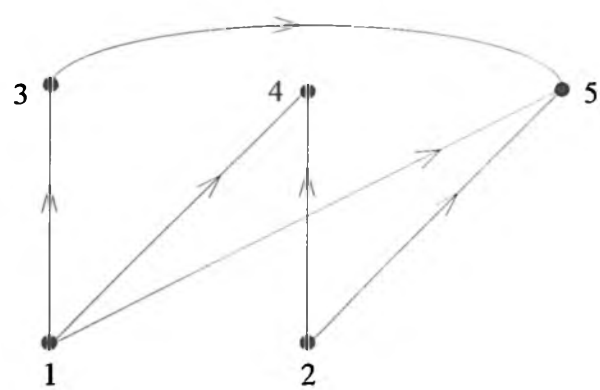
$$u(c) \geq u(a) > u(b) + \delta, \text{ więc } c\mathscr{R}b.$$

Przykład. Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $\mathscr{R} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5)\}$. Zauważmy, że $\mathscr{R}$ nie jest słabym porządkiem na A: $\sim(1\mathscr{R}2) \wedge \sim(2\mathscr{R}3)$, ale $1\mathscr{R}3$, czyli $\mathscr{R}$ nie jest ujemnie przechodnia, zatem nie istnieje funkcja $A \to \mathfrak{R}$ taka, że dla wszystkich $a, b \in A$

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow u(a) > u(b).$$

Jednak istnieje funkcja spełniająca (16). Dla sprawdzenia tego zauważmy, że aksjomat S1 jest spełniony z definicji $\mathscr{R}$. Przejdźmy do aksjomatu S2. W szczególności ponieważ $1\mathscr{R}3 \wedge 2\mathscr{R}4$, S2 implikuje $1\mathscr{R}4 \vee 2\mathscr{R}3$ – u nas mamy $1\mathscr{R}4$.

Zbudujmy graf dla naszego przykładu.



Teraz łatwo sprawdzić, że warunek S2 jest spełniony.
W naszym przykładzie $1\mathscr{R}3 \wedge 3\mathscr{R}5$, i istnieje $d = 4$ takie, że $1\mathscr{R}4$ lub $4\mathscr{R}5$. U nas $1\mathscr{R}4$.

Aby sprawdzić, że $\mathscr{R}$ jest półporządkiem na A czasami łatwiej jest znaleźć funkcję u spełniającą (16). Jeśli $\delta = 1$, to funkcja dla naszego przykładu dana jest przez: $u(1) = 2{,}6$; $u(2) = 1{,}8$; $u(3) = 1{,}5$; $u(4) = 0{,}7$; $u(5) = 0$.

Dla reprezentacji (16) nie ma twierdzeń, które jednoznacznie charakteryzowałyby klasę jednoznacznych przekształceń. Zatem nie definiuje ona skali regularnej. Przykład: $A = \{1, 2, 3\}$ i $\mathscr{R} = \left\{(1, 3),\ (1, 2)\right\}$. Wtedy dwie funkcje spełniają (16) dla $\delta = 1$:

I. $u(1) = 2$, $u(2) = 0$, $u(3) = 0$,

II. $v(1) = 2$, $v(2) = 0{,}1$, $v(3) = 0$.

Nie ma funkcji $\Phi\colon u(A) \to \Re$ takiej, że $v(a) = (\Phi \circ u)(a)$ dla wszystkich $a \in A$. Gdyby Φ istniała, to $v(2) = v(3)$, a tak nie jest.

Aby inaczej spojrzeć na reprezentację (16) rozważmy odcinek

$$\mathscr{J}(a) = \left[u(a) - \frac{\delta}{2},\ u(a) + \frac{\delta}{2}\right].$$

Jeśli $\mathscr{J}$ i $\mathscr{J}'$ są dwoma odcinkami rzeczywistymi, to będziemy mówić, że

$$\mathscr{J} \succ \mathscr{J}' \Leftrightarrow (a > b \quad \forall a \in \mathscr{J} \wedge \ \forall b \in \mathscr{J}').$$

Jeśli u spełnia (16), to

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow \mathscr{J}(a) \succ \mathscr{J}(b). \tag{17}$$

$\mathscr{J}(a)$ określa wielkość „rozmytości” a lub wielkość jego możliwych wartości. Wolimy a od b, gdy jesteśmy pewni, że każda możliwa wartość elementu a jest większa od każdej możliwej wartości elementu b. Można powiedzieć, że mamy tu preferencje z ograniczonym zaufaniem do informacji.

Powstaje pytanie: kiedy dla wszystkich $a \in A$ można wyznaczyć odcinek $\mathscr{J}(a)$ taki, że dla wszystkich $a, b \in A$ spełnione jest (17)?

Definicja 1.25. Binarna relacja $\mathscr{R}$ na A jest porządkiem przedziałowym, jeśli spełnia pierwsze dwa pierwsze warunki (S1 i S2) półporządku.

Zatem każdy półporządek jest porządkiem przedziałowym, na odwrót nie jest to prawda.

Odpowiedzią na postawione pytanie jest:

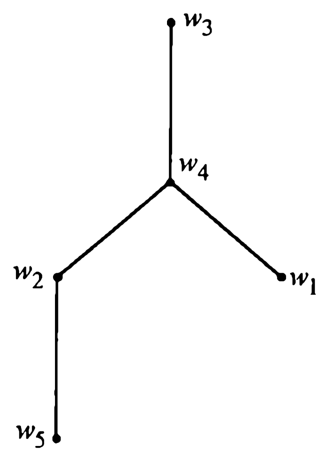
Twierdzenie 1.17. (Fishburn 1970). Załóżmy, że $\mathscr{R}$ jest binarną relacją na skończonym zbiorze A. Wtedy $\mathscr{R}$ jest porządkiem przedziałowym $\Leftrightarrow$ dla każdego $a \in \mathscr{A}$ można wyznaczyć przedział $\mathscr{J}(a)$ taki, że dla wszystkich $a, b \in A$

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow \mathscr{J}(a) \succ \mathscr{J}(b). \tag{17}$$

Łatwo zauważyć, że relację obojętności $\mathscr{E}$ (zdefiniowaną (15)) można zdefiniować następująco:

$$a\mathscr{E}b \Leftrightarrow \mathscr{J}(a) \cap \mathscr{J}(b) \neq \varnothing. \tag{18}$$

Przykład. Pewna osoba testuje pięć win i ocenia je poprzez wartości pieniężne następująco: w_1 jest warte między 10 zł a 4o zł, w_2 między 20 zł a 30 zł, w_3 między 100 zł a 150 zł, w_4 między 50 zł a 60 zł i w_5 między 10 zł i 15 zł. Wychodząc z reprezentacji (17) spróbujmy ustalić preferencje tej osoby na diagramie Hassego ($\delta = 1$ zł):



1.3. Problemy pomiaru cech ekonomicznych

Ekonomia jest nauką badającą, w jaki sposób społeczeństwo gospodarujące decyduje o tym, **co** (jakie dobra i usługi), **jak i dla kogo** wytwarzać. Dobrami nazywamy produkty materialne. Mianem usług określamy takie działania, które mogą zaspokoić potrzeby konsumenta jedynie w trakcie ich realizacji.

Naczelnym problemem ekonomicznym stojącym przed społecznością jest pogodzenie sprzeczności pomiędzy nieograniczonymi potrzebami ludzkimi w zakresie dóbr i usług a ograniczonością niezbędnych do ich wytwarzania zasobów (pracy, maszyn, surowców) (Begg 1995). Stąd potrzeba pomiaru cech ekonomicznych. Ekonomiści chcą mierzyć – między innymi – takie wielkości, jak „poziom rozwoju gospodarczego", „wpływ wydajności pracy na wzrost produkcji" lub „zależność popytu od ceny". Umiejętność mierzenia intensywności działalności gospodarczej i poziomu osiąganych rezultatów daje możliwość posługiwania się językiem arytmetyki liczb rzeczywistych przy opisywaniu obiektów gospodarczych. Na przykład intensywność działalności sklepu w danym odcinku czasowym mierzy się przychodem wyrażonym w pieniądzu, intensywność działalności wyższej uczelni mierzy się liczbą studentów studiujących w danej chwili lub w określonym czasie, intensywność działalności fabryki w danym okresie mierzy się ilością wyprodukowanych dóbr. Oczywiście są też takie cechy ekonomiczne, które jest bardzo trudno zmierzyć, na przykład „dobrobyt", „ubóstwo", „poziom życia", czy „stopień gospodarczego rozwoju kraju". Jednak rozszerzenie liczby zjawisk, które umiemy mierzyć jest niezbędnym warunkiem badania naukowego.

W jaki sposób mierzy się zmiany wielkości ekonomicznych?.

Liczba bezrobotnych w województwie wrocławskim w styczniu 1994 roku wynosiła 67101 osób, a w listopadzie tego samego roku 64234 osoby. Absolutną zmianę liczby bezrobotnych mierzymy za pomocą różnicy między liczbą bezrobotnych w listopadzie i w styczniu. Zatem absolutna zmiana liczby bezrobotnych jest równa –2867 osób, co oznacza spadek liczby bezrobotnych w tym okresie.

Procentową zmianę liczby bezrobotnych obliczamy dzieląc absolutną zmianę przez liczbę bezrobotnych w miesiącu wyjściowym i mnożąc wynik przez 100. Zatem procentowa zmiana liczby bezrobotnych w tym okresie wyniosła: $[(-2867)/67101]\ 100 = (-4.3)\%$.

Zmiany absolutne wyrażane są zawsze w jednostkach fizycznych (tutaj: liczba bezrobotnych). Przy zmianach procentowych nie podaje się jednostek miary.

Następnym miernikiem jest stopa wzrostu danej zmiennej, którą jest procentowa zmiana jej poziomu w danym okresie (najczęściej w ciągu roku). Ekonomiści używają pojęcia wzrost gospodarczy na określenie procentowej rocznej zmiany dochodu narodowego danego kraju.

Załóżmy, że umiemy opisywać stan obiektu ekonomicznego, tzn. przypisywać określone wartości zmiennym charakteryzującym obiekt w wyróżnionych okresach. Z praktyki wiemy, że wartości różnych zmiennych są jakoś ze sobą powiązane. Wydatki konsumenta na poszczególne dobra zależą od jego dochodu, nagromadzony majątek produkcyjny oddziałuje na rozmiary produkcji przedsiębiorstwa. Aby móc odkryć te powiązania między zmiennymi charakteryzującymi obiekt tworzymy pewien model matematyczny tego obiektu (rys. 1.1).

Do ustalenia faktów niezbędne jest przeprowadzenie badań empirycznych. Podobnie jak astronomowie nie mogą zatrzymać na chwilę planet, aby zbadać nie zakłóconą przez inne czynniki zależność między Słońcem a Ziemią, tak ekonomiści nie mogą zawiesić działania praw ekonomicznych dla przeprowadzenia kontrolnego eksperymentu. Na ogół badania empiryczne w ekonomii powinny opierać się na danych zebranych w takim okresie, w którym większość analizowanych czynników ulega równoczesnym zmianom. Powstaje jednak wtedy problem oddzielenia od siebie wpływu poszczególnych czynników.

Załóżmy, że mamy pewien obiekt czy zjawisko, które chcemy opisać. Wartości zmiennych opisujące stan zjawiska (obiektu) mogą mieć różne miana. Mianami są: [j/t], gdzie j jest pewną jednostką fizyczną, a t oznacza czas lub [zł/t] itp. Gdybyśmy chcieli zmierzyć poziom spożycia w danym kraju w danym okresie czasu, to poziom ten można scharakteryzować wskazaniem „koszyka" towarów spożywanych średnio przez jednego mieszkańca (w danym roku). Nie byłby to jednak pomiar, ponieważ obiektowi (krajowi) przyporządkowuje nie liczbę, ale wektor liczb, którego składowe wyrażone są w różnych mianach.

Większość wielkości ekonomicznych wyrażona jest w pieniądzu. Pieniądz jest wielkością mierzoną na skali ilorazowej i jak widzieliśmy w poprzednim podpunkcie można na nim wykonywać praktycznie wszystkie operacje arytmetyczne. Jednak z poprzedniego podpunktu warto przypomnieć stwierdzenie, że porównywanie CPI (indeksu cen konsmpcyjnych) jest możliwe tylko wtedy, gdy wszystkie ceny mierzone są w tych samych jednostkach. Problemy zatem pojawiają się wtedy, gdy chcemy porównywać (na przykład CPI) dla różnych krajów i w różnych okresach. Problem ten będzie rozwiązany, gdy we wszystkich krajach będzie jeden pieniądz.

Gdy chcemy mierzyć użyteczność pewnych obiektów czy zjawisk pojawia się problem bardziej podstawowy związany z teorią pomiaru. Mianowicie problem reprezentacji. Warunkiem koniecznym pomiaru użyteczności jest porządek liniowy na zbiorze obiektów. Obiekty i zjawiska ekonomiczne są tak „złożone", że „wprowadzenie" porządku liniowego jest czasami rzeczą bardzo trudną.

Przyjrzyjmy się jeszcze problemowi pomiaru jakości. Załóżmy, że mamy zmierzyć jakość pewnego dobra, które jest opisane przez wektor pewnych cech. Aby to zrobić musimy znać obowiązujące normy (standardy) dotyczące tego dobra. Jedna z podstawowych reguł teorii pomiaru mówi, że jedynie rezultaty mierzone w skali mocniejszej mogą być transponowane na rezultaty mierzone w skali słabszej. Druga reguła mówi, że dopuszczlnymi statystykami określonymi na wynikach danego pomiaru są statystyki, które dostarczają wyników (w sensie relacji) niezmiennych względem dopuszczalnych przekształceń danej skali. Ze względu na obydwie reguły zauważmy, że jeżeli chcemy znaleźć miarę jakości to mamy dwie możliwości. Pierwsza to znalezienie miernika syntetycznego. Jeżeli cechy mierzone są na różnych skalach, to wartość tego miernika będzie wyrażona w skali najsłabszej, a to wiąże się ze stratą informacji „zawartą" w skalach mocniejszych. Druga to przedstawienie miary jakości w postaci wektorowej. Na każdej „współrzędnej" byłyby funkcje jakości poszczególnych cech opisujących dane dobro.

Przyjrzyjmy się pierwszej propozycji. Jeżeli jedna z cech ma wartości na skali porządkowej, to wartość miernika syntetycznego będzie też na skali porządkowej.

Jeżeli najsłabsza skala cech opisujących dane dobro jest skalą przedziałową, to na przykład funkcjami jakości cech mogą być bezwzględne różnice między wartościami cech i wartościami norm, i funkcją jakości dobra może być na przykład suma jakości cech (jako dopuszczalna statystyka tej skali). Powszechnie stosowaną funkcją jakości cech jest funkcja, która cesze przypisuje wartość 1, gdy cecha spełnia standardy i 0 w przeciwnym przypadku i wtedy funkcją jakości jest iloczyn wartości cech.

Przykładem charakteryzującym te dwa podejścia jest pomiar jakości zdrowia. Osoba, która chce zbadać jakość swego zdrowia robi badania laboratoryjne. Karta wyników badań zawiera: „jednnostkę miary", „wartość" i „zakres referencyjny" – czyli normę. Dla ułatwienia odczytu wartości, które nie są w normie oznaczone są „*". Osoba, która nie ma „*" uważa, że jakość jej zdrowia jest dobra. Osoba, która ma „*" stwierdza, że jakość jej zdrowia nie jest dobra. Zauważmy, że taka miara jakości jest dobra dla początkowej diagnozy, aby jednak postawić diagnozę szczegółową wyniki badań musi zobaczyć specjalista i zastosować odpowiednią funkcję jakości, której prawdopodobnie wartością będzie jednostka chorbowa i stan zaawansowania choroby.

Na koniec tego podpunktu zostanie podany przykład bezpieniężnej miary. Załóżmy, że mamy konsumenta, który ma do wyboru dwa dobra (*x* i *y*) i, że ów konsument potrafi uszeregować różne koszyki (kombinacje) dóbr według poziomu satysfakcji, czyli użyteczności, które one przynoszą. Załóżmy też, że woli on mieć więcej, a nie mniej. Jeżeli na osi odciętych oznaczymy ilość dobra *x*, a na osi rzędnych ilość dobra *y*, to gdy połączymy wszystkie punkty, które konsument ocenia jako jednakowo dobre, to otrzymamy krzywą obojętności. Zauważmy, że krzywe obojętności nie mogą się przecinać, poza tym jeżeli krzywa obojętności danego konsumenta jest bardziej „spłaszczona" do osi odciętych, to oznacza, że preferuje on bardziej dobro *x* niż *y*. Możemy zatem przedstawić „gusty" konsumenta, wykreślając mapę krzywych obojętności (mapę wzgórza użyteczności).

2. ASPEKTY UBÓSTWA

2.1. Istota i przyczyny. Przegląd definicji

„Ubóstwo odnosi się do osób, rodzin lub grup osób, których środki (materialne, kulturalne i socjalne) są ograniczone w takim stopniu, że poziom ich życia obniża się poza akceptowane minimum w kraju zamieszkania.” – jest to definicja ubóstwa przyjęta w grudniu 1984 r. przez Radę EWG i obowiązująca obecnie w Unii Europejskiej. Pojęcie „akceptowane minimum” jest bardziej znane jako linia (granica) ubóstwa. Oficjalną linią ubóstwa Unii jest 50% średniej arytmetycznej ekwiwalentnych wydatków lub dochodów netto. Stąd linia ubóstwa jest wzorcowym dochodem (lub wydatkiem), który wyznacza czy dane gospodarstwo domowe zaliczyć do ubogich. Przypomnijmy, że ubóstwo ma dwa znaczenia: Może to być sytuacja w której jest trudno przeżyć w dosłownym tego słowa znaczeniu (głód i bezdomność) i może to być sytuacja, w której jest trudno osiągnąć standard życia w danej społeczności. W Polsce mamy raczej do czynienia z ubóstwem drugiego typu.

Kilka cech ubóstwa:

1. Ubóstwo ma charakter względny w czasie i w przestrzeni – to znaczy, że sytuację, którą dzisiaj uznajemy za ubóstwo dawniej mogłaby być uznana za dostatnią; oraz sytuacja, która w danym kraju uznana jest ubóstwem w drugim może być uznana za dostatek.

2. Ubóstwo ma charakter subiektywny. Różne osoby mają różne potrzeby i różnie odczuwają ich niezaspokojenie. Różne gospodarstwa przy tym samym dochodzie mogą być w skrajnie różnych sytuacjach (rozrzutność w pierwszych dniach po wypłacie, alkoholizm itp.).

3. Dochód jest podstawowym kryterium oceny stopnia niezaspokojenia potrzeb – nie bierze się pod uwagę stanu majątkowego – jest to istotne przy mierzeniu ubóstwa jako niemożności dojścia do standardu danej populacji. Gdy mierzy się ubóstwo absolutne, to dochód jest wystarczającym kryterium.

4. Jest to pojęcie polityczne, które często wykorzystuje się w walce politycznej.

Fizycy badający na przykład przyciąganie ciał znajdują zależności jakie między tymi ciałami zachodzą, jednak na pytanie dlaczego tak jest odsyłają pytającego do filozofii. Aby przybliżyć odpowiedź na pytanie dlaczego jest ubóstwo przedstawiono kilka myśli.

Ubóstwo (łac.: *paupertas*) to sytuacja, w której brak jest dostatecznych środków do życia. Jest ono źródłem niesprawiedliwości społecznej uniedostępniającej człowiekowi to, co jest mu niezbędne do normalnej egzystencji.(Słownik teologiczny Katowice, 1998).

Organem kierującym społeczeństwem jest władza państwowa i z definicji powinna ona służyć całemu społeczeństwu.

Platon (427–347) stawiał państwu i jego obywatelom wspólny pożytek za największy obowiązek. Sprawdzianem sztuki rządzenia jest jego zdaniem służba dla społecznego interesu, gdyż zainteresowania wspólne w przeciwieństwie do dążeń prywatnych utrzymują obywateli w jedności.

Arystoteles (384-322) sprowadził zadania państwowe do dobrego ukształtowania całości obywatelskiego życia. Wysunął w tym celu po raz pierwszy wyraźną ideę sprawiedliwości, która miała państwu przynosić szczęście.

Cyceron (106-43) uważał, że pociągnięcia władców są przydatne tylko o tyle, o ile przynoszą korzyść państwu i jego wszystkim członkom.

Św. Augustyn (354-430) pogłębił utrwalony przez Arystotelesa ideał dobrobytu, łącząc go z nakazem ewangelicznej miłości i dobroci.

Wróćmy do czasów współczesnych: Jerzy Gilder w książce *Bogactwo i ubóstwo* napisał: „Jednak źródło bogactwa jest oczywiste: twórczy ludzie z pieniędzmi. Podobnie prosta jest przyczyna ubóstwa: jest nią pozbawienie twórczych jednostek środków finansowych."

Największym obrońcą ubogich naszych czasów jest niewątpliwie Jan Paweł II. W encyklice „Centesimus annus" napisał: "Istotnie, wielu, może nawet znaczna większość ludzi, nie rozporządza takimi narzędziami, które pozwoliłyby im rzeczywiście i w sposób godny przeniknąć do wnętrza systemu przedsiębiorstwa, w którym praca zajmuje miejsce centralne. Nie jest dla nich dostępne zdobycie podstawowych wiadomości, które pozwoliłyby im wyrazić ich zdolność tworzenia i rozwinąć swe możliwości. Nie mają oni możliwości wejścia w układ znajomości i wzajemnych powiązań, które by im pozwoliły cieszyć się uznaniem i wykorzystać posiadane przymioty. Krótko mówiąc, są oni, jeśli nie wyzyskiwani, to w znacznej mierze pozostawieni na marginesie, i rozwój gospodarczy dokonuje się, rzec można, ponad ich głowami".

W połowie lat 80-tych prof. Maria Jarosz w książce „Nierówności społeczne" pokazała, że kto urodził się biedakiem, ten prawdopodobnie biedakiem umrze: dzieci z rodzin o najniższym wykształceniu poprzestawały też na szkole podstawowej, czasami zasadniczej. Na studia trafiał wtedy maturzysta co siódmy z rodziny robotniczej i co czternasty z chłopskiej. Z badań GUS wiadomo, że dziś studiuje co 140 dziecko chłopskie.

Według nieoficjalnych szacunków kilkaset osób w Polsce zarabia ponad 50 tys. zł miesięcznie. Z drugiej strony prawie 2 miliony ludzi żyje poniżej minimum egzystencji, a kilkanaście milionów poniżej minimum socjalnego (w roku bieżącym 485 zł na osobę za „Polityką" z maja 1998). Jak z powyższego widać zjawisko ubóstwa jest ważnym problemem naszego kraju.

Głównym wskaźnikiem ubóstwa jest „dysponowanie zasobami ekonomicznymi". Tradycyjnie przyjmowano dochód, a także wydatki konsumpcyjne. Dla ludzi ubogich te dwie zmienne można traktować równoważnie, gdyż ich dochody i wydatki nie powinny się różnić.

Następnym krokiem po wybraniu zmiennej, która ma być wykorzystana do pomiaru stanu ubóstwa jest ustalenie linii ubóstwa. Można wyodrębnić cztery podejścia:

– obiektywne: na podstawie poziomu dochodów lub wydatków gospodarstw domowych ,

– subiektywne: na podstawie subiektywnych ocen gospodarstw domowych, tj. możliwości zaspokojenia potrzeb przy uzyskiwaniu określonych dochodów,

– przy zastosowaniu niepieniężnych wskaźników charakteryzujących warunki mieszkaniowe i zasobność gospodarstwa domowego.

– absolutne: oparte na kosztach „podstawowych potrzeb" takich jak: żywność, mieszkanie i odzież.

W ostatnim czasie zasięg pojęcia „ubóstwa" znacznie się rozszerzył: od prostego ubóstwa ekonomicznego (w znaczeniu dochodów lub konsumpcji) do aspektów działowych (edukacja, mieszkanie, zdrowie, kultura) aż do relacji zjawiska w całej strukturze społeczeństwa. Warto zauważyć za Hugh (1994), że ludzie biedni na ogół nie cieszą się takimi wpływami politycznymi, które mogłyby pozwolić im – jako grupie społecznej – na określenie własnych potrzeb, a polityka walki z ubóstwem jest ustalana poza nimi. Zauważmy też, że ubodzy mają małe szanse na uczestnictwie w życiu zbiorowym, a nawet na korzystaniu z infrastruktury społecznej. Ubodzy rodzice rzadko mogą pozwolić sobie na to, aby wysłać ich dzieci do szkół ponadpodstawowych. Ubogi chory ma małe szanse na szybki powrót do zdrowia (ubogi człowiek po wylewie nie miał i nie ma żadnej szansy na rehabilitacje). Tak samo ma mały dostęp do wymiaru sprawiedliwości. Zatem „ubóstwo to nie tylko brak pieniędzy, to raczej takie szczególne okoliczności, które nie pozwalają ludziom nimi dotkniętymi na uczestnictwo w życiu zbiorowym i – zwłaszcza – w istotny sposób pomniejszają ich możliwości uczestnictwa w podstawowych instytucjach społecznych, od rodziny poczynając, na wymiarze sprawiedliwości kończąc." Frieske (1996) (por. Golinowska).

2.2. Linia ubóstwa

Jeżeli mamy wybrany zbiór zmiennych, którymi będziemy opisywać zjawisko ubóstwa, to następnym krokiem jest ustalenie dla każdej zmiennej linii ubóstwa, czyli takiego poziomu zmiennej, który oddziela ubogich od pozostałych.

1. Linie ubóstwa z podejścia obiektywnego nazywane są liniami relatywnymi, ponieważ wartość realna tej linii zmienia się wraz z przeciętnym poziomem życia w danym kraju. Linie ubóstwa obiektywnego (relatywne) ustalono na poziomie 40%, 50% i 60% przeciętnych wydatków na jedną osobę. Jeżeli badana populacja jest bogata, to linie relatywne bardziej wyrażają zjawisko nierówności niż biedy.

Według danych GUS-u w 1993 r. 12% osób żyło w gospodarstwach domowych, w których bieżące wydatki były niższe od relatywnej linii ubóstwa, ustalonej na poziomie 50% przeciętnych wydatków ekwiwalentnych ogółu gospodarstw domowych w kraju. W 1994 r. poniżej relatywnej linii ubóstwa znalazło się 13,5% populacji (tj. około 5 mln osób).

Tabela 2.1

Nierówność i ubóstwo w Polsce

Współczynnik Gini'ego	1987	1988	1989	1990
	0,2303	0,2333	0,2607	0,2422
procent ubogich: linia ubóstwa jako % średniego dochodu ekwiwalentnego				
40%	2,3	2,2	5,1	2,8
50%	6,3	6,7	10,6	9,0
60%	14,0	14,6	19,8	17,4

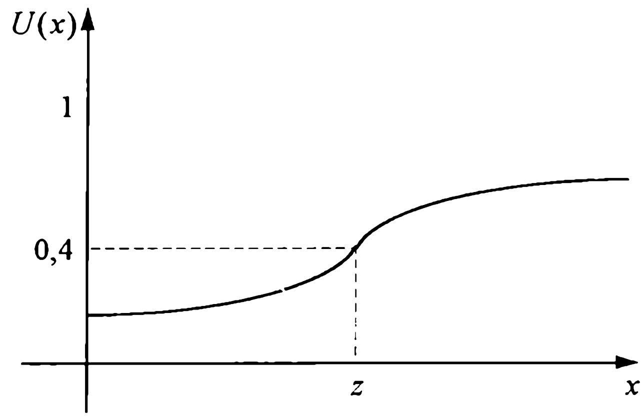
Źródło: N. Ott, G. Wagner, *Income Inequality and poverty in Eastern and Western Europe*, Heidelberg: Physica-Verl., 1997 (dane do tej tabeli zostały zebrane na podstawie rozmów panelowych).

2. W Polsce od 1992 r. subiektywne linie ubóstwa są szacowane za pomocą metody LPL (*Leyden Poverty Line*). Metoda ta zakłada wyznaczanie linii ubóstwa na podstawie odpowiedzi gospodarstw domowych na pytanie oceniające dochód. W przypadku polskich badań budżetów domowych pytanie to sformułowano następująco: „Proszę podać poziom miesięcznych dochodów swojego gospodarstwa domowego, który uznaliby Państwo jako: 1 – bardzo dobry, 2 – dobry, 3. ledwo wystarczający, 4 – niewystarczający (zły), 5 – bardzo zły."

Odpowiedzi na to pytanie służą do estymacji indywidualnej dochodowej funkcji dobrobytu $U_i(x)$, przedstawiającej zależność osiąganej przez gospodarstwo domowe użyteczności (satysfakcji z konsumpcji, dobrobytu) od poziomu dochodu i-tego gospodarstwa domowego (x). Dochodowa funkcja dobrobytu ma charakter liczbowy, można zatem przyjąć pewną niską wartość tej funkcji jako kryterium ubóstwa. Dochód, przy którym funkcja dobrobytu osiąga tę krytyczną wartość dobrobytu, traktuje się jako indywidualną linię ubóstwa.

Zgodnie z sugestią autorów tej metody przyjmuje się, że użyteczność U dochodu może być mierzona wartościami z przedziału [0, 1], a same indywidualne dochodowe funkcje dobrobytu mogą być aproksymowane za pomocą dystrybuanty rozkładu logarytmiczno-normalnego z parametrami μ i σ.

Dystrybuanta jest postaci



z – linia ubóstwa.

Rys. 2.1

Parametr μ_i tej funkcji, szacowany na podstawie danych próby jako średnia arytmetyczna logarytmów wszystkich dochodów podanych w odpowiedzi na pytanie oceniające dochód, określa potrzeby danego gospodarstwa dochodowego, im wyższa jest jego wartość tym wyższego dochodu potrzebuje gospodarstwo do osiągnięcia określonego poziomu dobrobytu. Parametr σ_i określa prędkość zmian funkcji $U_i(x)$, czyli określa „wrażliwość" reakcji gospodarstwa domowego na zmianę dochodu. Im większa wartość σ_i, tym większa zmiana dochodu jest potrzebna, aby gospodarstwo domowe odczuło zmianę poziomu dobrobytu.

Gospodarstwo domowe jest uznane za ubogie, gdy jego ocena własnego dochodu, mierzona wartością funkcji dobrobytu, jest niższa od pewnej krytycznej wartości. Jako wartość krytyczną przyjmuje się najczęściej 0,4. Wartość ta odpowiada, w odpowiedziach na pytanie oceniające dochód, poziomowi dochodu usytuowanemu pomiędzy dochodami określonymi jako niewystarczające i ledwo wystarczające.

W celu wyznaczenia linii ubóstwa dla ogółu gospodarstw domowych należy znaleźć strukturalną zależność wartości μ_i dla wszystkich gospodarstw domowych od rzeczywistego dochodu gospodarstwa domowego i cech demograficzno-społecznych oddziałujących na poziom potrzeb gospodarstwa (najważniejszą cechą jest niewątpliwie wielkość gospodarstwa).

W tablicach poniżej mamy subiektywne linie ubóstwa w zależności od cech demograficzno-społecznych (przy wartości dochodowej funkcji dobrobytu równej 0.4).

Tabela 2.2

Subiektywne linie ubóstwa (miesięczny dochód w tys. zł na gospodarstwo domowe) według wielkości gospodarstwa

Liczba osób	1993		1994
	II kwartał	IV kwartał	II kwartał
1	2674	2964	3231
2	3573	3927	4392
3	4233	4629	5256
4	4773	5203	5971
5	5240	5696	6591
6	5655	6133	7146

Tabela 2.3

Subiektywne linie ubóstwa (miesięczny dochód w tys. zł na gospodarstwo domowe) według grup społeczno-ekonomicznych i wielkości gospodarstwa w II kwartale 1994

Liczba osób	Typ gospodarstwa domowego					
	pracownicze	chłopskie	pracowniczo--chłopskie	emerytów i rencistów	pracujących na własny rachunek	inne źródła utrzymania
1	3393	3444	3095	2985	3758	2792
2	4613	4682	4207	4057	5109	3796
3	5521	5604	5035	4856	6114	4543
4	6271	6366	5719	5516	6945	5161
5	6923	7027	6314	6089	7667	5697
6	7506	7618	6845	6602	8312	6176

Tabela 2.4

Zasięg ubóstwa wśród gospodarstw domowych objętych badaniami budżetów domowych według ważniejszych cech społeczno-ekonomicznych – na podstawie subiektywnych linii ubóstwa

Klasyfikacja	Udział gospodarstw domowych poniżej linii ubóstwa (w %) w kwartale		
	II 1993	IV 1993	II 1994
1	2	3	4
Ogółem	42,6	40,0	39,3
Gospodarstwa domowe według głównego źródła utrzymania			
pracownicze	32,8	29,2	30,3
chłopskie	50,7	42,3	54,1
pracowniczo-chłopskie	34,8	29,9	31,6
emerytów i rencistów	55,7	55,8	48,3
pracujących na własny rachunek i wykonujących wolne zawody	18,0	11,8	18,1
utrzymujących się z innych niezarobkowych źródeł	88,7	78,1	79,4
Liczba osób w gospodarstwie domowym			
1	68,6	70,8	66,7
2	42,1	40,1	33,9
3	35,0	31,0	29,6
4	35,0	32,6	34,5
5	43,2	36,9	45,2
6 i więcej	41,4	36,4	41,3
Liczba czynnych zawodowo			
0	63,6	63,6	54,4
1	44,9	40,3	42,6
2	25,3	21,2	24,2
3 i więcej	24,6	16,6	27,5

cd. tab. 2.4

1	2	3	4
Typ rodziny biologicznej			
małżeństwo bez dzieci	36,0	36,0	28,2
małżeństwo z 1 dzieckiem	32,5	29,4	27,9
małżeństwo z 2 dzieci	37,3	34,6	35,8
małżeństwo z 3 dzieci	52,3	46,2	51,5
małżeństwo z 4 dzieci i więcej	58,5	62,0	60,0
ojciec z dziećmi	42,3	48,2	54,4
matka z dziećmi	58,0	57,7	54,4
pozostałe rodziny	46,7	43,2	43,9
Klasy miejscowości*			
miasta 300 tys. i więcej	30,9	31,9	27,7 (500 tys. i więcej)
miasta 100-300 tys.	33,8	33,1	28,8 (200-500 tys.)
			31,5 (100-200 tys.)
miasta 20-100 tys.	44,5	37,1	38,2
miasta poniżej 20 tys.	44,9	45,2	41,5
wieś	51,7	47,2	49,5
Płeć głowy gospodarstwa domowego			
mężczyzna	37,3	33,6	33,6
kobieta	52,8	52,5	50,5
Wiek głowy gospodarstwa domowego*			
poniżej 35 lat	42,4	39,4	36,6 (poniżej 25)
			39,0 (25-34 lata)
35-44 lata	39,0	34,5	38,4
45-54 lata	35,0	30,0	33,9
55-64 lata	43,8	42,1	38,3
65 lat i więcej	57,8	60,6	49,1
Wykształcenie głowy gospodarstwa domowego			
wyższe ukończone	11,2	10,0	9,5
średnie	31,6	28,2	28,1
zasadnicze zawodowe	45,0	40,8	41,6
podstawowe pełne i niepełne	60,1	60,3	57,6
uczący się	45,5	29,6	27,3

Źródło: J. Podgórski, w: S. Golinowski (1996).

* W II kwartale 1994 r. zmienione zostały zasady klasyfikacji tych zmiennych.

3. Ubóstwo jest niewątpliwie zjawiskiem wielowymiarowym. Dochód jest tylko jednym z wymiarów tego zjawiska. Dlatego należy uwzględnić niepieniężne wskaźniki ubóstwa takie jak warunki mieszkaniowe gospodarstw domowych i ich zasobność. W tej metodzie analizy ubóstwa nie występuje pojęcie granicy ubóstwa. Liczy się w niej wartość funkcji przynależności gospodarstwa domowego do sfery ubóstwa. Jeżeli wartość funkcji jest bliższa 1, to gospodarstwo domowe jest bardziej ubogie, jeżeli wartość jest bliska 0, to gospodarstwu ubóstwo nie zagraża.

Jak już podano we wstępie, ubóstwo jest kategorią nieostrą. Zatem możemy gospodarstwom domowym przypisać wartość funkcji przynależności do sfery ubóstwa.

Zmienne opisujące aspekty ubóstwa mogą mieć charakter dychotomiczny lub niedychotomiczny. Gdy zmienna posiada charakter dychotomiczny, to funkcja przynależności gospodarstwa domowego do zbioru ubogich ze względu na tę zmienną przyjmuje postać:

$$\mu_A(i) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } 0 \le x_i \le x_{\min}, \\ 0, & \text{gdy } x_i \ge x_{\max}. \end{cases}$$

Gdy zmienna posiada charakter niedychotomiczny, to

$$\mu_A(i) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x_i \le x_{\min}, \\ \dfrac{x_{\max} - x_i}{x_{\max} - x_{\min}}, & \text{gdy } x_{\min} \le x_i \le x_{\max}, \\ 0, & \text{gdy } x_i \ge x_{\max}. \end{cases}$$

Wartości $x_{\min}$ i $x_{\max}$ są określone przez ekspertów:

$x_{\min}$ – zdecydowane ubóstwo,

$x_{\max}$ – brak ubóstwa.

Gdyby była zadana linia ubóstwa – z, wtedy wystarczy przyjąć $x_{\min} = x_{\max} = z$. Przykłady $x_{\min}$ i $x_{\max}$ dla warunków mieszkaniowych i dochodowych są podane w tabeli 2.5.

Wtedy funkcja przynależności danego gospodarstwa domowego do zbioru ubogich jest postaci:

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i u_A(i)}{\sum_{i=1}^{k} w_i}.$$

Tutaj $\mathbf{x}$ jest wektorem cech danego gospodarstwa.

Jeżeli przez f_i oznaczymy frakcję gospodarstw domowych w badanej populacji, dla których funkcja przynależności do zbioru ubogich ze względu na i-tą zmienną przyjmuje wartość 1, to

$$w_i = \log \frac{1}{f_i}, \quad f_i > 0.$$

Tabela 2.5

Zmienne j	Zmienne typu niedychotomicznego			
	niemierzalne		wartości progowe	
	warianty	rangi	maksimum	minimum
	x_{kj_N}	$x^R_{kj_N}$	$x^{max}_{kj_N}$	$x^{min}_{kj_N}$
UJĘCIE OBIEKTYWNE				
Warunki mieszkaniowe:				
2.8 – liczba izb na osobę			1,5	1,0
2.9 – powierzchnia użytkowa mieszkania w m² na osobę			25,0	5,0
Sytuacja dochodowa:				
3.1 – dochody ekwiwalentne gospodarstwa domowego			2z	0,7z
UJĘCIE SUBIEKTYWNE				
4.1 – subiektywna ocena sytuacji materialnej	**ocena:**			
	bardzo dobra	1,00	1,00	0,00
	raczej dobra	0,75		
	średnia	0,50		
	raczej zła	0,25		
	bardzo zła	0,00		

Źródło: T. Panek, zeszyt 218 GUS-u (1994).

Wtedy

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mu_A(i) \log \frac{1}{f_i}}{\sum_{i=1}^{k} \log \frac{1}{f_i}}$$

jest funkcją przynależności gospodarstwa x do zbioru ubogich.

W pracy S. Zani i A Cerioli (1989) (prekursorów tej metody) były też dodatkowe pytania badające zasobność gospodarstw domowych:

– czy płacicie z opóźnieniem rachunki za prąd, gaz i mieszkanie?

– czy byliście w zeszłym roku na urlopie poza domem?

– czy cały dochód wydajecie na zakupy (czy macie oszczędności)?

– czy w waszym domu jest osoba kaleka (niezdolna)?

Tabela 2.6

Zmienne charakteryzujące obszary ubóstwa oraz zasady definicji funkcji przynależności gospodarstw domowych do podzbioru ubogich ze względu na te zmienne

Zmienne	Zmienne typu dychotomicznego	
	warianty	wartości funkcji przynależności
j	x_{kj_D}	$f\left(x_{kj_D}\right)$
UJĘCIE OBIEKTYWNE		
Zasobność:		
Posiadanie przez gospodarstwo domowe:		
1.1 – telewizora kolorowego	tak	0,00
	nie	1,00
1.2 – automatu pralniczego	tak	0,00
	nie	1,00
1.3 – chłodziarki lub zamrażarki	tak	0,00
	nie	1,00
1.4 – samochodu osobowego	tak	0,00
	nie	1,00
1.5 – magnetowidu	tak	0,00
	nie	1,00
Warunki mieszkaniowe:		
Posiadanie przez mieszkania:		
2.1 – wody bieżącej	tak	0,00
	nie	1,00
2.2 – ustępu spłukiwanego bieżącą wodą	tak	0,00
	nie	1,00
2.3 – centralnego ogrzewania	tak	0,00
	nie	1,00
2.4 – łazienki	tak	0,00
	nie	1,00
2.5 – ciepłej bieżącej wody	tak	0,00
	nie	1,00
2.6 – gazu	tak	0,00
	nie	1,00
2.7 – telefonu	tak	0,00
	nie	1,00

Źródło: T. Panek, zeszyt 218 GUS-u, Warszawa 1994.

4. Angielska tradycja poszukiwania uzasadnionej naukowo granicy ubóstwa, oparta była na określonym koszyku dóbr i usług zaspokajającym niezbędne potrzeby. Wyrażona w pieniądzach wartość tego koszyka służy do wyznaczania linii ubóstwa bezwzględnego.

W celu określenia standardu minimum egzystencji zastosowano metodykę wyznaczania potrzeb podstawowych i odpowiadającego im koszyka towarów i usług. W koszyku uwzględniono tylko te potrzeby, których zaspokajanie nie może być odłożone w czasie. Koszyk ten obejmuje wydatki na towary i usługi bieżącej konsumpcji, a mianowicie na:

– żywność,

– utrzymanie i eksploatację małego mieszkania,

– leki i środki higieny osobistej,

– drobne naprawy posiadanej odzieży i obuwia oraz niezbędne uzupełnianie bielizny i obuwia,

– książki i artykuły szkolne związane z realizacją obowiązku szkolnego (tylko w rodzinach z dziećmi w wieku 7-17 lat).

W koszyku minimum egzystencji dominująca część wydatków przypada na żywność oraz na utrzymanie mieszkania.

Minimum socjalne jest to taki poziom niskich dochodów, który pozwala ludziom normalnie uczestniczyć w życiu społeczeństwa. Ustala się ją także przez zdefiniowanie koszyka dóbr i usług, którego zawartość jest z jednej strony określona naukowo (jak w minimum egzystencji), a z drugiej – przez odniesienie do tradycji i poziomu kulturowego danego społeczeństwa, co wynika z założenia, że minimum socjalne nie może dopuścić do wykluczenia ze społeczeństwa. Dobra kulturowe stanowią tu około 0,3 wartości całego koszyka.

Tabela 2.7

Wydatki wybranych typów gospodarstw domowych na poziomie minimum egzystencji w warunkach 1994 r. (w tys. zł)

Grupy potrzeb	Typ gospodarstwa domowego								
	1-osobowe	2-osobowe	3-osobowe	3-osobowe	4-osobowe	4-osobowe	5-osobowe	osób starszych 1-osobowe	osób starszych 2-osobowe
	M	M+K	M+K+Dm	M+K+Ds	M+K+Dm+Ds	M+K+2×Ds	M+K+Dm+2×Ds	Ms	Ms+Ks
1. Żywność	620,1	1142,7	1568,0	1838,3	2263,9	2533,9	2959,3	559,6	1041,8
2. Mieszkanie	453,9	599,2	836,6	836,6	1068,5	1068,5	1438,9	453,9	599,2
– koszty użytkowania	431,0	573,5	803,5	803,5	1028,3	1028,3	1292,0	431,0	573,5
– wyposażenie	22,9	25,7	33,1	33,1	40,2	40,2	46,9	22,9	25,7
3. Artykuły medycz.-farmac.	8,4	16,9	22,6	23,1	28,8	29,4	35,1	16,9	33,8
4. Higiena	24,5	58,0	77,2	82,5	101,6	106,9	126,1	24,5	43,6
5. Odzież,	65,0	118,3	206,6	209,0	297,2	299,6	387,9	65,0	118,3
obuwie	8,9	13,3	14,1	14,1	14,8	14,8	15,5	8,9	13,3
6. Naprawy	–	–	–	46,8	46,8	93,5	93,5	–	–
7. Oświata dzieci									
Razem 1-7	1180,8	1948,4	2725,1	3050,4	3821,4	4146,6	4956,3	1128,8	1850
Na 1 osobę w gosp. domowym	1180,8	974,2	908,4	1016,8	955,4	1036,7	991,3	1128,8	925,0

M – mężczyzna 25-60, K – kobieta 25-60, Dm – dziecko młodsze 4-6, Ds – dziecko starsze 13-15, Ms – mężczyzna powyżej 60 lat, Ks – kobieta powyżej 60 lat.

Źródło: L. Deniszczuk, S. Sajkiewicz, w: S. Golinowska (1996).

W tabeli 2.8 wymienionych jest siedem linii ubóstwa szacowane dla Polski w latach 1993-94.

Tabela 2.8

Linie ubóstwa szacowane dla Polski w latach 1993-94

Linie	Wartość na osobę w gospodarstwie domowym	Odsetek ludności poniżej linii ubóstwa
Minimum egzystencji (L. Deniszczuk, B. Sajkiewicz, M. Dziubińska-Michalewicz – IPiSS)	95,5-113,0 zł w zależności od wielkości gospodarstwa domowego – szacunek dla 1994 r.	ok. 8-9% – 1994 r.
Linia relatywna – 50% przeciętnych wydatków ekwiwalentnych (skala OECD) na osobę (A. Szukiełojć-Bieńkuńska – GUS)	96,2 zł – I kw. 1993 r. 127,3 zł – IV kw. 1993 r. 171,0 zł – I kw. 1994 r.	12,0% – 1993 r. 13,5% – 1994 r.
Linia urzędowa – minimalna emerytura wg Raportu Banku Światowego	35% przeciętnego wynagrodzenia do 1994 r. 39% przeciętnego wynagrodzenia od 1994 r.	14,4% w 1993 r. 18,9% w 1994 r.
120$ (B. Milanowic dane dla 1993 r.)	120$ wg siły nabywczej 1990 r.	26% lub 16% po doszacowaniu dochodów ze statystyki makro – 1993 r.
Linia subiektywna (L. Beskid) – dane dla 1993 r.	106,5 zł – marzec 1993 r.	35% – marzec 1993 41% – opinia o zakresie biedy w 1993 r.
Linia subiektywna wg metody LPL (J. Podgórski)		42,6% – II kw. 1993 r. 40,0% – IV kw. 1993 r. 39,3% – II kw. 1994 r.
Minimum socjalne (IPiSS)	168 zł dla gospodarstw pracowniczych czteroosobowych – 1993 r.	34,8 % – 1993 r.

2.3. Skale ekwiwalentne

Badanie ubóstwa powinno być prowadzone na poziomie indywidualnym. Należy jednak wziąć pod uwagę, że jednostki żyją w gospodarstwach domowych, gdzie środki na utrzymanie są łączone, a dostępne towary i usługi są dzielone.

Skale ekwiwalentności określają wielkości dochodu niezbędne dla utrzymania rodzin o danej wielkości i strukturze demograficznej. Użyte tu słowo skala nie ma nic wspólnego z definicją skali podanej w 1.2. Jednak ponieważ termin ten jest ogólnie przyjęty wobec tego nie będzie zmieniany w tej pracy[1]. Mając daną linię ubóstwa dla ustalonego gospodarstwa domowego będącego odniesieniem musimy zróżnicować tę linię dla innych gospodarstw domowych. Ogólnie skale ekwiwalentości umożliwiają porównanie różnych gospodarstw domowych oraz obliczanie ich relatywnego kosztu utrzymania na tym samym poziomie życiowym.

Metody obliczania skal ekwiwalentności można podzielić na statystyczne i normatywne. Skale ekwiwalentności pierwszego typu są szacowane metodami ekonometrycznymi, na podstawie rzeczywistych wydatków gospodarstw. Skale ekwiwalentności drugiego typu opierają się na ocenach ekspertów określających potrzeby gospodarstw danego typu na tle gospodarstwa uznanego za standardowe.

Skale ekwiwalentne gospodarstw domowych, zapewniają porównywalność między wydatkami i granicami ubóstwa gospodarstw różnych typów. Są one parametrami oceniającymi wpływ, jaki na koszty utrzymania mają potrzeby konsumpcyjne gospodarstwa wynikające z jego obiektywnych charakterystyk, przede wszystkim demograficznych. Dzięki ich znajomości można w sposób bardziej adekwatny ocenić zamożność gospodarstwa o określonej strukturze demograficznej, dysponującego daną sumą pieniędzy. Oczywiste jest bowiem, że suma 1000 zł jest czym innym dla rodziny 2 + 2 i dla dwóch osób bez dzieci, a także dla czterech osób dorosłych. Przykładem najprostszej charakterystyki dla skali ekwiwalentności jest liczba osób w rodzinie. Zauważmy, że suma pieniędzy na głowę jest niedoskonałym miernikiem zamożności, gdyż po pierwsze nie uwzględnia wpływu innych charakterystyk demograficznych, po drugie wiele wydatków gospodarstwa (np. mieszkaniowych) nie wzrasta proporcjonalnie do liczby osób. Skale ekwiwalentne są konstruowane dla potrzeb praktyki, a w szczególności dla polityki społecznej.

Ponieważ chcemy porównać różne typy gospodarstw domowych porównuje się funkcje użyteczności tych gospodarstw. Ponieważ funkcje użyteczności są trudno mierzalne, to zakłada się, że użyteczność zachowuje się podobnie jak popyt. Wydaje się, że jest to założenie sensowne bo jeżeli przy ustalonym dochodzie gospodarstwa domowego popyt na dane dobro maleje, to znaczy, że użyteczność tego dobra też maleje w tym gospodarstwie. Przypatrzmy się jak Blundell i Lewbel (1991) podeszli do problemu skal ekwiwalentnych.

---

[1] W literaturze używa się także terminu „skale ekwiwalentności" (por. A. Szulc, w: S. Golinowska (1996).

Niech $\mathbf{q} = D(\mathbf{P}, X, \mathbf{A})$ oznacza wektor ilości dóbr, na które zgłasza zapotrzebowanie gospodarstwo domowe mające łączne wydatki X, przy zadanym wektorze cen $\mathbf{P}$ i wektorze charakterystyk demograficznych $\mathbf{A}$. Przyjęli oni, że popyt D jest typu Marshala, i jest otrzymany przez maksymalizację funkcji użyteczności $U(\mathbf{q}, \mathbf{A})$. Autorzy zdefiniowali funkcję wydatków (kosztów) następująco:

$c(\mathbf{P}, X, \mathbf{A}) = \min\{(\mathbf{P} \times \mathbf{q}) : U(\mathbf{q}, \mathbf{A}) = u\}$, gdzie minimum jest brane po $\mathbf{q}$.

Zauważmy, że znalezienie funkcji kosztów matematycznie jest równoważne znalezieniu minimum warunkowego, które rozwiązuje się między innymi za pomocą reguły Lagrange'a.

Przjmując standardowe założenia co do postaci funkcji $U()$, popyt D może być jednoznacznie określony na podstawie funkcji kosztów c. Przyjęto ponadto, że użyteczność (poziom dobrobytu) osiągana przez każde gospodarstwo domowe jest dana za pomocą tej samej (choć nie znanej) funkcji użyteczności $U(\mathbf{q}, \mathbf{A})$. Dla ustalonego wektora cen $\mathbf{P}$, wektora charakterystyk demograficznych $\mathbf{A}$ oraz demograficznych charakterystyk odniesienia $\mathbf{A}_0$, można zdefiniować rodzinę skal ekwiwalentnych $I(\mathbf{P}, \mathbf{A}, \mathbf{A}_0)$, indeksowaną po zbiorze wszystkich wartości użyteczności u:

$$I(\mathbf{P}, \mathbf{A}, \mathbf{A}_0) = \frac{c(\mathbf{P}, u, \mathbf{A})}{c(\mathbf{P}, u, \mathbf{A}_0)}.$$

Każdy element rodziny $I(\mathbf{P}, \mathbf{A}, \mathbf{A}_0)$ równy jest minimum kosztów (wydatków) gospodarstwa domowego o charakterystyce $\mathbf{A}$, jakie jest konieczne do osiągnięcia ustalonego poziomu użyteczności u, podzielone przez odpowiedni koszt osiągnięcia tego poziomu użteczności u przez gospodarstwo domowe o charakterystykach odniesienia $\mathbf{A}_0$.

Podstawową trudność stanowi konieczność oszacowania parametrów funkcji wydatków. Wykorzystuje tu się fakt, że gospodarstwa domowe o różnym składzie inaczej dysponują swoimi wydatkami konsumpcyjnymi. Na przykład osoby starsze więcej wydają na ochronę zdrowia niż osoby młodsze o zbliżonym dochodzie, mniej natomiast na żywność.

W pracy Szulca (1993) skale ekwiwalentności zostały obliczone jako funkcje parametrów oszacowanych na podstawie indywidualnych równań popytu. Uwzględniały one zróżnicowanie gospodarstw domowych pod względem liczby osób, liczby dzieci w dwóch grupach wiekowych (1–9 lat i 10–16 lat), oraz wieku głowy gospodarstwa (16–29, 30–65 i ponad 65 lat). Dzieląc dodatkowo gospodarstwa pod względem zamożności na trzy grupy kwantylowe (do 30%, 30–80% i ponad 80%) otrzymano 554 typy gospodarstw, z których każde miało własną skalę ekwiwalentności.

Za indywidualny miernik dobrobytu przyjęto sumę wydatków na konsumpcję podzieloną przez skalę ekwiwalentności gospodarstwa. Gospodarstwo zostało uznane za ubogie, jeżeli jego suma wydatków podzielona przez skalę ekwiwalentności odpowiednią dla danego typu demograficznego jest mniejsza od przeniesionego na dany typ gospodarstwa (również za pomocą skali ekwiwalentności) minimum społecznego wyznaczonego przez Instytut Pracy i Spraw Socjalnych. W obliczeniach wykorzystano skalę ekwiwalentności Bartena (1964), Deatona i Muellbauera (1980):

$$m(\mathbf{P}, u, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_r) = \frac{C(\mathbf{P}, u, \mathbf{A}_k)}{C(\mathbf{P}, u, \mathbf{A}_r)},$$

gdzie: C – funkcja wydatków i-tego ($i = k, r$) gospodarstwa,
$\mathbf{P} = [p_1 \;\; p_2 \;\; \ldots \;\; p_n]$ – wektor cen,
u – poziom użyteczności,
$\mathbf{A}_i = [A_{1i} \;\; A_{2i} \;\; \ldots \;\; A_{mi}]$ – wektor charakterystyk demograficznych i-tego gospodarstwa.

W tym badaniu skale ekwiwalentności zostały obliczone zgodnie z koncepcją tzw. skal quasi-dokładnych i oblicza się je za pomocą wzoru:

$$\ln\frac{C_*(\mathbf{P}, u_*, \mathbf{A}_k)}{C_*(\mathbf{P}, u_*, \mathbf{A}_r)} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{il}(w_{ik} + w_{ir})\ln\frac{A_{lk}}{A_{lr}},$$

gdzie: C_* – translogarytmiczna funkcja wydatków i-tego ($i = k, r$) gospodarstwa,
u_* – średnia geometryczna użyteczności osiągniętych przez oba gospodarstwa,
w_{it} – udział wydatków na i-te dobro ($i = 1, 2, \ldots, n$) w budżecie t-tego ($t = k, r$) gospodarstwa,
m_{il} – parametr reprezentujący wpływ l-tego elementu $\mathbf{A}_t$ ($l = 1, 2, \ldots, m$) na konsumpcję i-tego dobra.

Lewa strona równania jest skalą ekwiwalentności k-tego gospodarstwa porównującą je z gospodarstwem r-tym.

Szulc (1992) udowodnił, że powyższe wyrażenie jest równe zdefiniowanej przez Deatona i Muellbauera skali, jeżeli użyteczność u jest równa średniej geometrycznej użyteczności osiągniętej przez oba porównywane gospodarstwa.

Parametry m_{il} uzyskuje się przez estymację modelu popytu konsumpcyjnego. Estymowane równania popytu (tzw. równania Hicksa) mają następującą postać:

$$w_{it} = a_i + \sum_{l=1}^{m} a_{ij}\left(\ln p_j + \sum_{l=1}^{m} m_{il} \ln A_{lt}\right) + d_i \ln u_t,$$

gdzie: t – numer gospodarstwa,
p_j – indeks cen j-tego dobra,
u – oszacowanie funkcji użyteczności.

Za pomocą potrójnej metody najmniejszych kwadratów Szulc uzyskał oszacowania parametrów a_i, a_{ij}, d_i, m_{il}.

W badaniu zastosowano dwie koncepcje wyznaczania linii ubóstwa: absolutną i relatywną. Pierwsza z nich to minimum społeczne (obliczone przez Instytut Pracy i Spraw Socjalnych). Druga jest wyznaczana jako pewien procent średniego dobrobytu.

Tabela 2.9

Skale ekwiwalentne wybranych gospodarstw domowych

Typ gospodarstwa					Skala ekwiwalentności	
Liczba osób	Dzieci do 10 lat	Dzieci 10–16 lat	Wiek głowy do 30 lat	Wiek głowy ponad 65 lat	1990	1991
1	0	0	0	0	1,00	1,00
2	0	0	0	0	1,66	1,62
3	0	0	0	0	2,20	2,16
4	0	0	0	0	2,68	2,63
5	0	0	0	0	3,14	3,07
6	0	0	0	0	3,57	3,45
7	0	0	0	0	3,92	3,92
8	0	0	0	0	5,83	4,52
2	1	0	0	0	1,66	1,63
2	0	1	0	0	1,70	1,69
3	1	0	0	0	2,21	2,17
3	0	1	0	0	2,28	2,24
3	1	1	0	0	2,32	2,27
1	0	0	1	0	1,02	1,02
1	0	0	0	1	0,95	0,97

Źródło: A. Szulc, zeszyt 214 GUS-u, Warszawa 1993.

Tabela 2.10

Granice ubóstwa trzech typów

Typ gospodarstwa	Granica absolutna		Granica relatywna	
	1990	1991	1990	1991
1 osoba, pracownik	496	913	337	607
2 + 2	1360	2473	923	1646
1 osoba, emeryt	467	876	317	583
2 osoby, emeryci	784	1460	532	972

Źródło: A. Szulc, zeszyt 214 GUS-u, Warszawa 1993.

W następnej tabeli zastosowano oznaczenia:

1) grupa społeczno-zawodowa (nr – nierobotnicze),

2) wiek głowy gospodarstwa (16–24, 25–29, 30–39, 40–49, 50–59, ponad 60 lat),

3) wykształcenie głowy gospodarstwa (np, niepełne),

4) płeć głowy gospodarstwa,

5) typ biologiczny rodziny,

6) liczba osób w gospodarstwie (0d 1 do 9),

7) miejsce zamieszkania.

Wszystkie parametry były szacowane metodami statystyki.

Tabela 2.11

Procent gospodarstw poniżej granicy absolutnej

Typ grupy	1990				1991			
	max		min		max		min	
1	emer., ren.	0,410	prac., nr.	0,198	chłopi	0,392	prac., nr.	0,149
2	60+	0,384	50–59	0,267	30–39	0,367	50–59	0,228
	30–39	0,381						
3	podst., np.	0,481	wyższe	0,154	podst., np.	0,484	wyższe	0,076
4	kobieta	0,346	mężczyzna	0,340	kobieta	0,325	mężczyzna	0,323
5	2 + 4 +	0,632	2 + 1	0,227	2 + 4 +	0,673	2 + 1	0,232
6	9	0,600	3	0,269	9	0,673	3	0,232
7	wieś	0,362	miasto	0,331	wieś	0,387	miasto	0,288
Polska	0,342				0,324			

Źródło: A. Szulc, zeszyt 214 GUS-u, Warszawa 1993.

Skale normatywne: OECD i LIS

Skale OECD są najbardziej znanymi skalami typu normatywnego, oblicza się je za pomocą wzoru:

$$SK = 1 + 0,7(LA - 1) + 0,5LD,$$

gdzie LA i LD oznaczają odpowiednio liczbę osób dorosłych i dzieci. Pierwszej osobie dorosłej przypisuje się 1, następnej 0,7 i każdemu dziecku 0,5.

Skale LIS (por. Buchman i in. (1988)) zakładają wykładniczą zależność potrzeb konsumpcyjnych od liczby osób w gospodarstwie domowym:

$$SK = (LA + LD)^{\delta}.$$

Parametr δ można interpretować jako elastyczność wydatków konsumpcyjnych względem liczby osób.

Chcąc na przykład zmierzyć ekwiwalentny dobrobyt ekonomiczny rodziny można zastosować następujący wzór:

$$W = D/S^{\delta},$$

gdzie: D oznacza dochód rodziny, S – wielkość rodziny, a parametr δ jest elastycznoscią wydatków.

Zaletą obu metod jest ich prostota oraz niezmienność w czasie i w porównaniach międzynarodowych. Skale normatywne nazywane są też skalami „programów pomocy społecznej" (por. A. Szulc, w: S. Golinowska 1996).

3. AKSJOMATYCZNE PODEJŚCIE DO TEORII UBÓSTWA

3.1. Istota i rys historyczny

Istota podejścia aksjomatycznego ogólnie mówiąc polega na znalezieniu miernika, który będzie spełniał zbiór pewnych aksjomatów – warunków, które uważa się za konieczne w opisie zjawiska ubóstwa. Zauważmy, że poprzez te warunki chcemy w populacji ubogich wprowadzić relację preferencji, która uporządkowałaby ubogich.

A. Kundu i T. E. Smith w 1983 r. pokazali, że większość znanych mierników ubóstwa nie spełnia trzech następujących warunków:

1. Wprowadzenie osoby ubogiej do populacji powiększa ubóstwo całej populacji.
2. Zabranie osoby ubogiej z populacji pomniejsza ubóstwo całej populacji.
3. Zabranie pewnej kwoty ubogiemu i przekazanie jej osobie bogatszej powiększa miarę ubóstwa.

Problem pomiaru ubóstwa jest tak złożony, że istnienie numerycznej reprezentacji wymaga wielu uproszczeń.

Ponieważ pomiar ubóstwa jest pierwszym ważnym krokiem do udzielenia pomocy ubogim, zatem szukanie „coraz lepszych" mierników ubóstwa pozwoli na dokładniejsze przybliżenie wielkości ubóstwa. Pierwszą znaczącą pracę na temat pomiaru ubóstwa opublikował A. Sen w 1976 r. Wprowadził w niej dwa podstawowe aksjomaty: monotoniczności i transferu. Przy czym aksjomat transferu wprowadził Dalton w 1920 r. w teorii nierówności ekonomicznych

W 1979 r. Takayama wprowadzając pojęcie „ocenzurowanego" rozkładu dochodów całej populacji chciał pokazać, że problem ubóstwa dotyczy całej społeczności.

W 1980 r. Kakwani wprowadził nowy warunek uczuciowego transferu, który zwracał uwagę na nierówność ekonomiczną wśród ubogich. Uogólniając indeks Sena otrzymał rodzinę indeksów ubóstwa.

Także w 1980 r. Blackorby i Donaldson wprowadzając pojęcie reprezentatywnego dochodu ubogich – czyli takiego dochodu, który zapewnia taki sam dobrobyt całej populacji ubogich, jak rzeczywiste dochody ubogich.

W 1981 r. Clark, Heming i Ulph skonstruowali indeks ubóstwa wychodząc nie od wektora rozkładu dochodów, ale od wektora luk dochodów ubogich.

W 1984 r. Foster, Greer i Thorbecke zaproponowali nową klasę indeksów ubóstwa, która spełnia aksjomaty Sena i uczuciowy aksjomat transferu Kakwaniego. Ich indeks ma własności rozkładalności.

3.2. Przegląd mierników ubóstwa

Gospodarstwo domowe jest ubogie, gdy jego sytuacja jest poniżej linii ubóstwa. Dla danej populacji i jej rozkładu dochodów $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz zadanej linii ubóstwa z chcemy zbudować indeks mierzący ubóstwo tej populacji. Załóżmy, że wektor rozkładu dochodów jest wektorem uporządkowanym niemalejąco, tzn. $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Wtedy

$$m = \max_i \{x_i \leq z\}$$

jest liczbą osób (gospodarstw domowych) ubogich.

W rozdziale tym jest dokonany przegląd indeksów ubóstwa wraz z ich aksjomatycznym pochodzeniem (w miarę możności w porządku chronologicznym).

Najstarszym, najprostszym i chyba najczęściej stosowanym miernikiem ubóstwa jest procent ubogich. Jest to stosunek liczby osób o dochodach poniżej linii ubóstwa do liczby osób całej populacji:

$$H = \frac{m}{n}.$$

Indeks ubóstwa Sena

Po raz pierwszy aksjomatyczne podejście do problemu pomiaru ubóstwa ukazało się w pracy Amartya Sena w 1976 r. Wprowadził on dwa następujące aksjomaty:

A1. Aksjomat monotoniczności: *redukcja dochodu osoby poniżej linii ubóstwa musi powiększać miarę ubóstwa.*

A2. Aksjomat transferu: *przeniesienie pewnej sumy z dochodu osoby poniżej linii ubóstwa do dochodu bogatszej osoby powiększa miarę ubóstwa.*

Jeżeli $r > 0$ i $x_i < z$, to

Ad A1. $P(x_1, \ldots, x_i - r, \ldots, x_n) > P(x_1, \ldots, x_n)$,

Ad A2. $P(x_1, \ldots, x_i - r, \ldots, x_j + r, \ldots, x_n) > P(x_1, \ldots, x_n)$.

Zauważmy, że procent ubogich jest nieczuły na rozkład dochodów oraz nie spełnia aksjomatów Sena.

Drugim pod względem częstości stosowania miernikiem jest stosunek luk dochodów I, który liczy średnią lukę dochodów ubogich:

$$I = \sum_{i=1}^{m} (z - x_i)/z.$$

Indeks I spełnia aksjomat A1, lecz nie spełnia A2. Jeżeli $\mathbf{x}' = \left(x_1, \ldots, x_i - r, \ldots, x_j + r, \ldots, x_n\right)$ i $x_j + r < z$ (zakładamy, że wektor rozkładu $\mathbf{x}$ ma uporządkowane współrzędne od najmniejszej do największej $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$), to

$$I(x) = I(x').$$

Przypatrzmy się teraz w jaki sposób Sen wyprowadził swój indeks.

Luką dochodu i-tej osoby jest różnica między linią ubóstwa z i jej dochodem x_i:

$$g_i = z - x_i. \tag{1}$$

g_i jest nieujemne dla ubogich i ujemne dla pozostałych. Sen swego indeksu szukał w postaci:

$$P(x) = A(z, x) \cdot \sum_{i=1}^{m} g_i v_i(z, x), \tag{2}$$

gdzie A jest stałą normującą i v_i są pewnymi nieujemnymi wagami.

Zaproponował on następujące aksjomaty dla wyprowadzenia indeksu ubóstwa.

Aksjomat E (*Relative Equity*): dla dowolnej pary i, j:

jeśli

$$W_i(x) < W_j(x), \text{ to } v_i(z, x) > v_j(z, x),$$

gdzie $W_i(x)$ jest poziomem dobrobytu i-tej osoby dla rozkładu dochodów $\mathbf{x}$.

Aksjomat R (*Ordinal Rank Weights*): waga $v_i(z, x)$ luki dochodu i-tej osoby jest równa indeksowi i w uporządkowanym międzyosobowym dobrobycie ubogich.

Jeśli m jest liczbą ubogich, to $v_i = m + 1 - i$.

Ponieważ w indeksie Sena różnym osobom przypisane są różne wagi, powstał problem z osobami mającymi taki sam dochód. Stąd

Aksjomat M (*Monotonic Welfare*): relacja > (większy niż) zdefiniowana na zbiorze indywidualnych dobrobytów $\{W_i(x)\}$ dla dowolnego rozkładu dochodów $\mathbf{x}$ jest ściśle spójnym porządkiem, oraz relacja > zdefiniowana na zbiorze indywidualnych dochodów $\{x_i\}$ jest postaci: dla dowolnych i, j, jeśli $x_i > x_j$, to $W_i(x) > W_j(x)$.

Aksjomat N (*Normalized Poverty Value*): jeśli wszyscy ubodzy mają ten sam dochód, to $P = H \cdot I$.

Według Sena aksjomaty te jednoznacznie dają indeks ubóstwa. Tak jak poprzednio jest dana n-osobowa populacja z uporządkowanym niemalejąco wektorem dochodów, oraz linia ubóstwa z.

Twierdzenie 3.1. Dla dużej liczby ubogich aksjomaty A1, A2, R, M i N spełnia tylko indeks postaci

$$P = H \cdot [I + (1 - I)G], \tag{3}$$

gdzie G jest współczynnikiem Giniego rozkładu dochodu ubogich.

Dowód.

Z aksjomatu M dla danego rozkładu dochodów x

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ i } x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$$

jest

$$W_1(\mathbf{x}) < W_2(\mathbf{x}) < \ldots < W_n(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Dla pewnej osoby i: $i \le m$ jest dokładnie $m+1-i$ osób ubogich, które mają większy poziom dobrobytu niż osoba i. Zatem z aksjomatu R:

$$v_i(z, \mathbf{x}) = m + 1 - i. \tag{5}$$

Podstawiając (5) do (2)

$$P = A(z, \mathbf{x}) \sum_{i=1}^{m} g_i (m + 1 - i). \tag{6}$$

W przypadku, gdy wszyscy ubodzy mają ten sam dochód x^* i zatem tę samą lukę dochodów $g^* = z - x^*$, jest:

$$P = A(z, \mathbf{x}) g^* m(m+1)/2 \tag{7}$$

i zgodnie z aksjomatem N:

$$P = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{g^*}{2}\right). \tag{8}$$

Stąd z (7) i (8):

$$A(z, \mathbf{x}) = 2/(m+1)nz. \tag{9}$$

Z (6) i (9) jest:

$$P = \frac{2}{(m+1)nz} \sum_{i=1}^{m} (z - x_i)(m + 1 - i). \tag{10}$$

Współczynnik Giniego dla wektora dochodów ubogich jest zdefiniowany następująco:

$$G = \frac{1}{2m^2 \mu} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left| x_i - x_j \right|, \tag{11}$$

gdzie μ jest średnim dochodem ubogich.

Ponieważ

$$\left| x_i - x_j \right| = x_i + x_j - 2 \min(x_i, x_j),$$

więc

$$G = 1 - \frac{1}{m^2 \mu} \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \min\left(x_i,\, x_j\right) = 1 + \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2 \mu} \sum_{i=1}^{m} x_i (m+1-i). \tag{12}$$

Z (10) i (12) wynika, że:

$$P = \frac{1}{(m+1)nz}\left[2m(m+1) + m^2 \mu\left(G - \frac{m+1}{m}\right)\right],$$

który można zapisać w postaci:

$$P = H\left[1-(1-I)\left(1-G\cdot\frac{m}{m+1}\right)\right]. \tag{13}$$

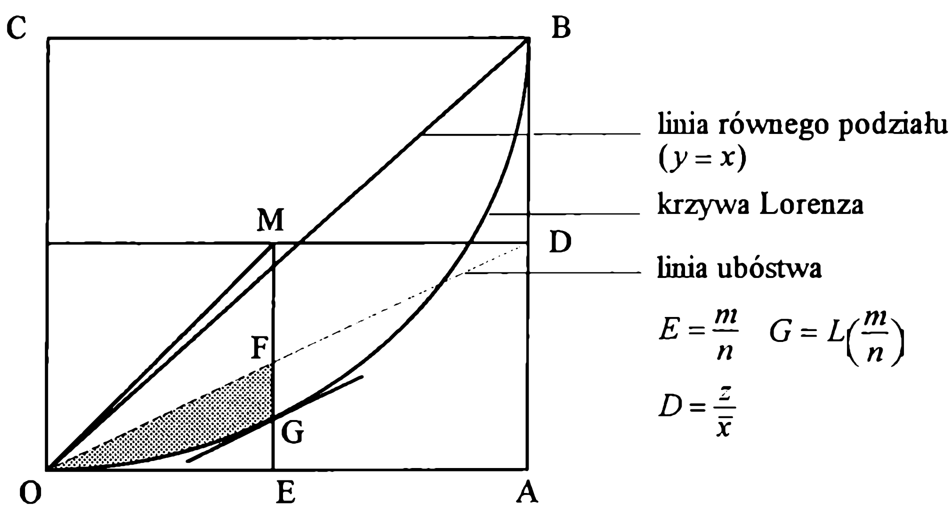
Dla dużych m (13) sprowadza się do (3), co kończy dowód.

W 1983 r. Thon pokazał, że indeks Sena nie spełnia aksjomatu transferu w przypadku, gdy transfer „przenosi" osobę ubogą do populacji nie-ubogich.

Sen w swojej pracy z indeksu ubóstwa wyprowadził indeks nierówności dochodów zastępując m (liczbę ubogich) przez n (liczbę całej populacji) i zamieniając z (poziom ubóstwa) przez μ^* (średni dochód populacji).

Twierdzenie 3.2. Miara nierówności N odpowiadająca indeksowi ubóstwa dla dużych n aproksymuje współczynnik Giniego G.

Dowód jest oczywisty z (10) i (12), gdy zastąpimy m przez n i z przez μ^*, ($H = 1$ i $I = 0$). Zatem P – miara ubóstwa Sena jest przeniesieniem współczynnika Giniego z pomiaru nierówności do pomiaru ubóstwa. Można to zaobserwować na rysunku poniżej.



Współczynnik Giniego G jest stosunkiem pola OGB (pola koncentracji) do pola OAB (równego $\frac{1}{2}$). Pochyłość OD daje nam „linię ubóstwa" w naszej unormowanej jednostce, i OE jest unormowaną liczbą ubogich. Miara ubóstwa P jest stosunkiem pola OGF do pola OEM. Różnica między nimi leży w:

1) różnych kątach nachylenia linii OD i OB,

2) zasięgu (podpopulacja ubogich i cała populacja).

Ponieważ w literaturze nie znalazłem uzasadnienia tej zależności, to spróbuję pokazać, że indeks ubóstwa $P=H[I+(1-I)G]$, który otrzymaliśmy z indeksu nierówności dochodów po zastąpieniu G_n przez G_m jest stosunkiem pola OGF do pola trójkąta OEM.

$$H=\frac{m}{n},\ I=\sum_{i=1}^{m}\frac{z-x_i}{mz},$$

$$G_m=\frac{1}{2m^2\mu}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|x_i-x_j\right|=\frac{\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|x_i-x_j\right|}{\sum_{j=1}^{m}x_j}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(x_j-x_j\right)}{m\sum_{j=1}^{m}x_j}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}x_j-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{j}x_i}{m\sum_{j=1}^{m}x_j}=\frac{2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}x_i}{m\sum_{j=1}^{m}x_j}.$$

Pole trójkąta OGF:

$$|\Delta\mathrm{OGF}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{n}\cdot\left[\frac{m}{n}\cdot\frac{z}{\bar{x}}-L\left(\frac{m}{n}\right)\right].$$

Pole trójkąta OEM:

$$|\Delta\mathrm{OEM}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{z}{\bar{x}}=\frac{1}{2}\frac{mz}{\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

$$\frac{|\Delta\mathrm{OGF}|}{|\Delta\mathrm{OEM}|}=\frac{\bar{x}}{z}\cdot\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{z}{\bar{x}}-L\left(\frac{m}{n}\right)\right)=\frac{m}{n}-\frac{\bar{x}}{z}\cdot L\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{nz}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=$$

$$=\frac{m}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{nz}=\frac{mz-\sum_{i=1}^{m}x_i}{nz}=\frac{\sum_{i=1}^{m}(z-x_i)}{nz}=H\cdot I.$$

L = pole między $\overline{\mathrm{OG}}$, a krzywą Lorenza OG $=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\cdot L\left(\frac{m}{n}\right)-L\left(\frac{k}{n}\right)\right)=$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i}-\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)=\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}x_i}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{i=1}^{k}x_i\right).$$

$$\frac{L}{|\Delta\mathrm{OEM}|}=\frac{2}{nmz}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{k}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{i=1}^{k}x_i\right)=\frac{2}{nmz}\left(\frac{m(m+1)}{2m}\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}x_i\right)=$$

$$=\frac{2}{nmz}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}x_i\right)=\frac{2}{nmz}\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=k+1}^{m}x_i-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}x_i\right)=$$

$$=\frac{1}{nmz}\left(2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}x_j+\sum_{i=1}^{m}x_i\right)=\frac{1}{nmz}\left(2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}x_i\right).$$

$$H(1-I)=H\left[1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z-x_i}{mz}\right)\right]=H\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}z}{mz}-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z-x_i}{mz}\right)\right]=H\cdot\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{mz}\right]=\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{mz}\cdot\sum_{i=1}^{m}x_i=$$

$$=\frac{1}{nz}\sum_{i=1}^{m}x_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{nz},$$

$$H(1-I)\cdot G_m=\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{nz}\cdot\frac{2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}x_i}{m\cdot\sum_{i=1}^{m}x_i}=\frac{2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{m}x_j-\sum_{i=1}^{m}x_i}{mnz}.$$

Zatem pokazaliśmy, że jeżeli indeks Sena rozbijemy na sumę dwóch składników:

$$P=H[I+(1-I)G_m]=HI+H(1-I)G_m,$$

to pierwszy składnik HI jest równy stosunkowi pól trójkątów:

$$HI=\left|\frac{\Delta\mathrm{OGF}}{\Delta\mathrm{OEM}}\right|,$$

a drugi składnik jest równy stosunkowi pola między odcinkiem $\overline{\mathrm{OG}}$ a krzywą Lorenza OG (L) do pola trójkąta OEM. Ponieważ $\Delta\mathrm{OGF}\cup L$ jest równy zakreskowanemu obszarowi, to kończy dowód.

Indeks ubóstwa Takayamy

Drugim indeksem wyprowadzonym na podstawie teorii aksjomatycznej był indeks Takayamy (1979). Takayama zwrócił uwagę na dwa problemy w procedurze Sena. Pierwszy to aksjomat R, który bazuje na obciętym rozkładzie dochodów, a raczej na rozkładzie ubogich i zaniedbuje istnienie osób nad linią ubóstwa. Według niego problem ubóstwa jest problemem całej populacji. Drugi, to aksjomat N, który nie daje pełnej aksjomatyzacji wraz z aksjomatami M i R dla miary nierówności, która u Sena dawała współczynnik Giniego.

Tak jak w poprzednim podpunkcie jest zadana n-osobowa populacja z uporządkowanym wektorem rozkładu dochodów **x** i dana jest linia ubóstwa z. Dla wyprowadzenia swego indeksu ubóstwa Takayama wprowadził pojęcie ocenzurowanego rozkładu dochodów:

$$\mathbf{x}^*(z) = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right),$$

gdzie: $x_i^* = x_i$ jeśli $x_i < z$ i $x_i^* = z$ jeśli $x_i \geq z$, z – linia ubóstwa.

Oznaczenia:

μ_z – średni dochód ubogich,

μ – średni dochód ocenzurowanego rozkładu:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^* = H\mu_z + (1-H)z. \tag{14}$$

Definicja 3.1. Miarą ubóstwa jest indeks nierówności dochodów ocenzurowanego rozkładu dochodów – obciętego nad linią ubóstwa.

Swojego indeksu ubóstwa szukał w postaci

$$P = D \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i\left(\mu - x_i^*\right) + E, \tag{15}$$

gdzie: D i E – stałe normujące, w_i – nieujemne wagi.

Zaproponowane przez Takayamę aksjomaty są odpowiednikami aksjomatów Sena:

Aksjomat N_2. Jeśli nie ma osób poniżej linii ubóstwa, to indeks ubóstwa równa się zero.

Jeśli liczba ubogich $m = 0$, to $\mu = z$ i wtedy $P = E$. Z aksjomatu N_2 mamy, że wtedy $P = 0$ i $E = 0$. Teraz (15) możemy zapisać w postaci:

$$P = D \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i\left(z - x_i^*\right) = D \cdot \sum_{i=1}^{m} w_i\left(z - x_i^*\right) + F, \tag{16}$$

gdzie $F = D \cdot (\mu - z)\sum_{i=1}^{n} w_i$.

Dla znalezienia w_i i D wprowadził dwa aksjomaty:

Aksjomat R_1. Waga w_i luki dochodu i-tej osoby jest równa randze i w uporządkowanym dobrobycie całej populacji, czyli $w_i = n + 1 - i$.

Aksjomat N_1. Jeśli wszyscy ubodzy są bez dochodów, to $P = H$.

Jeśli ubodzy są bez dochodów, to $\mu = z(n-m)/n$, i

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i^* = \sum_{i=m+1}^{n} i \cdot x_i^* = \frac{\mu \cdot n(m+n+1)}{2}. \tag{17}$$

Z (16) i (17)

$$P = D\left[-\frac{\mu n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} i x_i^*\right] = D\mu mn/2. \tag{18}$$

Zgodnie z aksjomatem N_1 wtedy $P = H = \frac{m}{n}$, czyli

$$D = 2/\mu n^2. \tag{19}$$

Podstawiając (19) do (16) otrzymamy

$$F = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{\mu}\right), \tag{20}$$

czyli

$$P = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i^*. \tag{21}$$

Łatwo zauważyć, że P jest równe współczynnikowi Giniego ocenzurowanego rozkładu dochodów. Jest on taki sam jak indeks Sena (patrz (13)). Zatem:

Twierdzenie 3.3. Jedynym indeksem ubóstwa spełniającym aksjomaty M (Sena), R_1, N_1 i N_2 jest współczynnik Giniego ocenzurowanego rozkładu dochodów obciętego nad linią ubóstwa.

Indeks Kakwaniego

Tego samego typu co indeks Sena i Takayamy jest indeks Kakwaniego (1980). Aksjomaty Kakwaniego są dopełnieniem aksjomatów Sena, i są bardziej czułe na głębokość ubóstwa.

Aksjomat 1. Jeśli $(\Delta P)_i$ reprezentuje wzrost miary ubóstwa powstałej przez małą redukcję dochodu i-tego ubogiego, to $(\Delta P)_i > (\Delta P)_j$ dla $j > i$.

Tak jak do tej pory zakładamy, że wektor rozkładu dochodów jest uporządkowany, tzn. $\mathbf{x} = (x_1 \ \ x_2 \ \ \dots \ \ x_n)$ i $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

Zauważmy, że aksjomat A1 Sena i aksjomat 1 Kakwaniego implikują aksjomat A2 Sena.

Aksjomat 2. Dla pewnej naturalnej liczby g i pary i, j takich, że $i < j < m$, $(\Delta P)_{i,i+g} > (\Delta P)_{j,j+g}$, gdzie $(\Delta P)_{i,j}$ jest wzrostem miary ubóstwa spowodowanym przeniesieniem pewnej stałej sumy z dochodu i-tego ubogiego do j-tego ubogiego.

Aksjomat 2 Kakwaniego jest odpowiednikiem aksjomatu R Sena o rangach, ale jest bardziej wrażliwy na głębokość ubóstwa. Z aksjomatu R wynika, że przeprowadzenie małego transferu od osoby i-tej do osoby $(i+1)$-ej powiększa miarę ubóstwa o tyle samo dla wszystkich wartości i. Można powiedzieć, że aksjomat R Sena jest nieczuły na najuboższych (nieczuły na nierówność wśród ubogich).

Aksjomat 3. Jeśli ma miejsce przeniesienie pewnej sumy od i-tego ubogiego o dochodzie x_i do ubogiego o dochodzie $x_i + h$, to wtedy dla danego ustalonego $h > 0$ wielkość wzrostu miary ubóstwa maleje ze wzrostem i.

Kakwani aksjomaty 1, 2 i 3 nazywa odpowiednio: *monotoniczność wrażliwa*, *transfer wrażliwy I* i *transfer wrażliwy II*.

Miara Sena nie spełnia tych aksjomatów.

Kakwani dla swego indeksu ubóstwa przyjął tę samą ogólną formułę co Sen, czyli:

$$P = \sum_{i=1}^{m} g_i v_i(z, \mathbf{x}). \tag{22}$$

Aby wyprowadzić swój indeks ubóstwa Kakwani wprowadził dwa dodatkowe aksjomaty:

Aksjomat 4. Jeśli wszyscy ubodzy mają ten sam dochód, to

$$P = \frac{m}{n} \frac{z - \mu_z}{z},$$

gdzie μ_z – średni dochód ubogich.

Aksjomat 5. Dla i-tego ubogiego

$$v_i(z, \mathbf{x}) = A(z)[q + 1 - i]^k. \tag{23}$$

Jeśli $k = 1$, to jest on identyczny z aksjomatem R Sena.

Twierdzenie 3.4. Jedyną klasą ubóstwa spełniającą aksjomaty A1, A2 Sena oraz aksjomaty 1, 4 i 5 jest

$$P(k) = \frac{m}{nz\Phi_m(k)} \sum_{i=1}^{m} (z - x_i)(m + 1 - i)^k, \tag{24}$$

gdzie $\Phi_m(k) = \sum_{i=1}^{m} i^k$.

Dowód. $A(z)$ w (23) spełniające aksjomat 4 jest dane przez

$$A(z) = m/(nz\Phi_m(k)), \tag{25}$$

które podstawiając do (22) wraz z (23) implikuje (24), co kończy dowód.

Kakwani w swojej pracy sam zauważa, że jego indeks nawet dla $k > 1$ nie spełnia aksjomatu 3. Gdy $k > 1$, indeks Kakwaniego spełnia aksjomat 2.

Uwaga 3.1. Z aksjomatu 1 mamy:

Jeśli $i < j$, to przeniesienie stałej Δ ($\Delta > 0$) z dochodu i-tej osoby do dochodu j-tej osoby daje mniejszy przyrost ubóstwa niż zmniejszenie dochodu i-tego ubogiego o Δ:

$$-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_j} < -\frac{\partial P}{\partial x_i} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x_j} < 0.$$

Prawa strona równoważności to aksjomat A1.

Uwaga 3.2. Gdyby był dany ciągły rozkład dochodów (ciągła funkcja gęstości), to wtedy miarę ubóstwa Kakwaniego można zapisać w postaci:

$$P_k(D)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^k D(x)dx=\int_0^1 (z-D(x))(1-x)^k dx,$$

gdzie $D(x)$ – funkcja gęstości rozkładu dochodów.

Indeks Blackorby'ego i Donaldsona

W 1980 r. Blackorby i Donaldson wyprowadzili etyczny indeks ubóstwa, którego konstrukcja bazuje na pojęciu reprezentatywnego dochodu ubogich.

Niech $\mathbf{x}^p$ będzie uporządkowanym wektorem dochodów ubogich i W^p będzie ich (ubogich) porządkową (*ordinal*) funkcją użyteczności wyceny społecznej. Porządkowe funkcje użyteczności (w przeciwieństwie do kardynalnych funkcji użyteczności) nie są zdefiniowane jednoznacznie. Jeżeli na porządkową funkcję użyteczności nałożymy dowolną funkcję rosnącą, to otrzymamy dalej funkcję porządkowej użyteczności.

Przypomnę, że koncepcję użyteczności porządkowej wprowadził Pareto w 1909 r. Dziedziną porządkowej funkcji użyteczności jest zbiór krzywych obojętności, tzn. krzywych jednakowej użyteczności.

Wektorowi dochodów ubogich można zatem przypisać nie jedną funkcję użyteczności $W^p\left(x^p\right)$, lecz całą rodzinę takich funkcji (warto zauważy, że wartości dla porządkowej funkcji użyteczności mierzone są na skali porządkowej; dla użyteczności kardynalnej, z której korzystaliśmy w wyprowadzeniu poprzednich indeksów – wartości mierzone są na skali ilorazowej). Stąd

$$W^p\left(x^p\right)=\Phi\left(\widetilde{W}^p\left(\mathbf{x}^p\right)\right), \tag{26}$$

gdzie Φ jest funkcją rosnącą i $\widetilde{W}^p$ jest dodatnio jednorodna.

Reprezentatywnym dochodem ubogich jest taki dochód ξ^p (taki poziom biedy), który jest akceptowany przez wszystkich ubogich (funkcję wyceny społecznej buduje się na podstawie przeprowadzonych ankiet w danej populacji), i jest społecznie obojętny z bieżącym rozkładem dochodów wśród ubogich. Stąd ξ^p jest zdefiniowany poprzez:

$$W^p\left(\xi^p\mathbf{1}\right)=W^p\left(\mathbf{x}^p\right)$$

lub

$$\widetilde{W}^p\left(\xi^p\cdot\mathbf{1}\right)=\widetilde{W}^p\left(\mathbf{x}^p\right). \tag{27}$$

1 jest to wektor jedynek. Ponieważ $\widetilde{W}^p$ jest dodatnio jednorodna, więc

$$\xi^p = \frac{\widetilde{W}^p\left(\mathbf{x}^p\right)}{\widetilde{W}^p(1)} = \Theta^p\left(\mathbf{x}^p\right). \tag{28}$$

Ponieważ W jest funkcją porządkowa, więc Θ^p i W^p są porządkowo równoważne.

Indeks relatywnej nierówności wśród ubogich odpowiadający funkcji W^p dany jest przez

$$I^p\left(\mathbf{x}^p\right) = \frac{\mu^p - \xi^p}{\mu^p} = \frac{\mu^p - \Theta^p\left(\mathbf{x}^p\right)}{\mu^p}, \tag{29}$$

gdzie μ^p jest średnim dochodem ubogich.

Załóżmy, że mamy zadaną linię ubóstwa z, populację składającą się z n członków, m – liczbę ubogich (osób o dochodach mniejszych niż z). Niech W_g^p, Θ_g^p i I_g^p będą odpowiednio funkcją dobrobytu społecznego Giniego, funkcją reprezentatywnego dochodu i indeksem nierówności wśród ubogich. Wtedy indeks ubóstwa Sena można zapisać w postaci:

$$P_g\left(x^p\right) = \frac{m}{n}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z - x_i}{m \cdot z}\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z - x_i}{m \cdot z}\right)\right)I_g^p\left(x^p\right)\right] = \frac{m}{n}\left(\frac{z - \xi_g^p}{z}\right), \tag{30}$$

gdzie

$$\xi_g^p = \Theta_g^p\left(x^p\right) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}(2i - 1)x_{m+1-i}, \tag{31}$$

ξ^p jest reprezentatywnym dochodem dla funkcji dobrobytu społecznego Giniego wśród ubogich.

Zauważmy, że $\xi_g^p \leq \mu^p$ z równością tylko wtedy, gdy wszyscy ubodzy mają ten sam dochód.

Blackorby i Donaldson zaproponowali, aby uogólnić tak „przerobiony przez dochód reprezentatywny" relatywny indeks nierówności Sena dla społecznej funkcji wyceny dobrobytu społecznego. Czyli

$$P\left(x^p\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{z - \xi^p}{z}\right). \tag{32}$$

Na przykład, jeśli społeczna funkcja wyceny dobrobytu społecznego jest średnią symetryczną porządku r, to

$$\xi^p = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}x_i^r\right]^{1/r}, & r \leq 1 \text{ i } r \neq 0, \\ \prod_{i=1}^{m} x_i^{\frac{1}{m}}, & r = 0. \end{cases} \tag{33}$$

W książce *The Perception of Poverty* Hagenaars zauważył, że indeks ten nie spełnia aksjomatu transferu Sena. Zauważmy, że jeśli społeczna funkcja wyceny dobrobytu społecznego jest średnią arytmetyczną porządku r, to

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}-1} \cdot r x_i^{r-1} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}-1} \cdot x_i^{r-1}.$$

Niech $x_i > x_j$, wtedy

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^r\right)^{\frac{1}{r}-1}\left(x_i^{r-1} - x_j^{r-1}\right).$$

Różnica ta jest większa od 0 $\Leftrightarrow$ $r < 1$ (tutaj m jest liczbą ubogich). Stąd dla tej funkcji dobrobytu społecznego aksjomat transferu jest spełniony dla $r < 1$.

Z (32) mamy, że dla różnych funkcji dobrobytu społecznego otrzymamy różne relatywne indeksy ubóstwa.

Blackorby i Donaldson zaproponowali także absolutny indeks ubóstwa w postaci

$$P\left(x^p\right) = m\left(z - \xi^p\right). \tag{34}$$

W przypadku funkcji dobrobytu Giniego

$$P_g\left(x^p\right) = m\left[z - \xi_g^p\right], \tag{35}$$

gdzie ξ_g^p jest zdefiniowana przez (31).

Innym przykładem może być indeks wyprowadzony z funkcji dobrobytu społecznego Kolma-Pollaka:

$$P_{kp}\left(x^p\right) = m\left(z - \xi_{kp}^p\right), \tag{36}$$

gdzie

$$\xi_{kp}^p = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{e^{-\gamma x_i}}{p}\right), \tag{37}$$

$\gamma > 0$ – ustalony parametr.

Autorzy usprawiedliwiają słowo etyczny tym, że funkcja dobrobytu społecznego określona na zbiorze ubogich musi być symetryczna, tzn. że każdy ubogi dostanie tyle samo (dochód reprezentatywny).

Indeks ubóstwa Clarka, Hemminga i Ulpha

W 1981 r. Clark, Hemming i Ulph skonstruowali nowy indeks ubóstwa. W swojej konstrukcji wyszli oni nie od wektora rozkładu dochodów, ale od wektora luk dochodów ubogich ($g_i = z - x_i$). Wychodząc od indeksu Sena a następnie korzystając z kardynalnej funkcji dobrobytu społecznego (określonej na lukach dochodów ubogich) i z obciętego rozkładu dochodów (Takayamy) otrzymali indeks ubóstwa.

Indeks ubóstwa Sena dany jest wzorem (3)

$$S = HI[1+(1-I)G/I].$$

Indeks Giniego G jest postaci (11)

$$G = \left(2m^2\bar{x}_p\right)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|x_i - x_j\right|,$$

gdzie $\bar{x}_p$ jest średnim dochodem ubogich.

Ponieważ

$$(1-I)/I = \bar{x}_p/\bar{g},$$

gdzie $\bar{g}$ jest średnią luką dochodu (ubogich) i $\left|x_i - x_j\right| = \left|g_i - g_j\right|$ dla wszystkich i, j, więc

$$(1-I)G/I = \left(2m^2\bar{g}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|g_i - g_j\right|, \tag{38}$$

który jest indeksem Giniego rozkładu luk dochodów.

Oznaczając go przez G^* indeks Sena można zapisać w postaci

$$S = HI\left(1+G^*\right). \tag{39}$$

Następnym krokiem była konstrukcja funkcji dobrobytu społecznego, której argumentami są luki dochodów, czyli raczej funkcji niedoboru społecznego. Autorzy założyli, że funkcja niedoboru dla pojedynczej osoby jest postaci:

$$d(g_i) = (1-\alpha)g_i^{\alpha} \tag{40}$$

(tutaj litera d jest od *deprivation* – nie mylić z symbolem pochodnej), gdzie α jest parametrem awersji do nierówności w danej społeczności, i $\alpha \geq 1$. Jeżeli funkcja niedoboru społecznego jest malejąca, symetryczna i addytywna, to można ją zapisać w postaci

$$-w(\mathbf{g}, \alpha) = \sum_{i=1}^{m} d(g_i), \tag{41}$$

gdzie **g** jest wektorem nieujemnych luk dochodów.

Zakładamy, że dobrobyt ubogich jest oddzielony od dobrobytu nie-ubogich. Jeśli $\alpha = 1$, to dobrobyt ubogich zależy tylko od agregatowej luki dochodów; jeśli $\alpha > 1$, wtedy większe wagi są przy większych lukach (mniejszych dochodach) i w granicy gdy $\alpha \to \infty$ istotne są tylko największe luki (najmniejsze dochody).

Dla danego rozkładu luk dochodów zdefiniowano „reprezentatywną lukę dochodów", czyli taką, która dawałaby taki sam poziom dobrobytu dla wszystkich ubogich:

$$g^* = \left[\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{i=1}^{m} g_i^{\alpha}\right]^{1/\alpha} \tag{42}$$

Wtedy ubóstwo może być mierzone następującym indeksem:

$$P = HI\left(\frac{g^*}{\bar{g}}\right). \tag{43}$$

Łatwo zauważyć, że $P = mg^*/nz$.

Indeks P ma następujące własności:

– jest rosnący ze względu na H, I i $(g^*/\bar{g})$ – miary relatywnej luki,

– jest rosnący ze względu na α,

– gdy $\alpha = 1$, to $P = HI$,

– jeśli $\alpha > 1$, to P spełnia aksjomat transferu,

– spełnia aksjomat monotoniczności.

Druga konstrukcja wyprowadzona została z indeksu Takayamy. Indeks ubóstwa Takayamy jest postaci:

$$T = H\left[(1-\xi)I + \xi G\right], \tag{44}$$

gdzie

$$\xi = 1 - (1-H)z/\bar{x},$$

gdzie: $\bar{x}$ – średni dochód ocenzurowanego wektora dochodów,

G – indeks Giniego rozkładu dochodów ubogich.

Niech funkcja wyceny społecznej dobrobytu dla indywidualnego dochodu jest postaci:

$$u(x_i) = \frac{1}{\beta}\left[\min(z, x_i)\right]^{\beta},\ \beta \le 1, \tag{45}$$

gdzie β jest parametrem awersji do nierówności.

Jeśli $\beta \le 1$, to funkcja ta jest wklęsła ze względu na dochód i stąd spełniony jest aksjomat transferu. Funkcja dobrobytu społecznego jest rosnąca, symetryczna i addytywna, czyli że może być postaci:

$$w\left(\mathbf{x}_p, z, \beta\right) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m} x_i^{\beta} + \left[(n-m)/\beta\right] z^{\beta}, \tag{46}$$

gdzie $\mathbf{x}_p$ jest wektorem dochodów ubogich.

Jeśli x^* jest reprezentatywnym dochodem dla całej populacji z ocenzurowanego rozkładu dochodów, wtedy z definicji

$$(n/\beta)x^{*\beta} = (n/\beta)x_p^{*\beta} + \left[(n-m)/\beta\right] z^{\beta},$$

gdzie x_p^* jest reprezentatywnym dochodem ubogich.

Po prostym przekształceniu:

$$x^* = \left\{H\left[(1-A)\bar{x}_p\right]^{\beta} + z^{\beta}(1-H)\right\}^{1/\beta}, \tag{47}$$

gdzie $A = 1 - \left(x_p^* / \bar{x}_p\right)$ jest indeksem nierówności dochodów Atkinsona wśród ubogich.

Zatem indeks ubóstwa generowany dochodem reprezentatywnym $\mathbf{x}^*$ jest postaci:

$$P^* = 1 - x^*/z = 1 - \left\{H[(1-A)(1-I)]^{\beta} + (1-H)\right\}^{1/\beta}. \tag{48}$$

Indeks ten ma następujące własności:

– jest rosnący względem H, I i A (jeśli rośnie procent ubogich, to indeks też rośnie, jeśli rośnie luka dochodów, to indeks też rośnie),

– jest malejący względem β (czyli jeśli rośnie awersja do nierówności, to indeks ubóstwa maleje),

– spełnia aksjomat monotoniczności,

– jeśli $\beta = 1$, to $P^* = HI$,

– jeśli wszyscy ubodzy mają ten sam dochód, to

$$P^* = 1 - \left[H(1-I)^{\beta} + (1-H)\right]^{1/\beta},$$

– jeśli $\beta < 1$, to spełnia aksjomat transferu,

– P^* jest rosnący ze względu na z.

Indeks Fostera, Greera i Thorbecke

W 1984 r. Foster, Greer i Thorbecke zaproponowali nową klasę indeksów ubóstwa, która spełnia dwa aksjomaty Sena oraz aksjomat transferu wrażliwego Kakwaniego.

Punktem wyjścia do znalezienia klasy indeksów ubóstwa była ich miara ubóstwa postaci:

$$P(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{nz^2}\sum_{i=1}^{m} g_i^2. \tag{49}$$

Indeks ten spełniał obydwa aksjomaty Sena (monotoniczności i transferu). Ponadto ich miara P jest stowarzyszona z dobrze znaną miarą nierówności, jaką jest kwadrat współczynnika zmienności C_p^2:

$$C_p^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\bar{x}_p - x_i\right)^2 / \left(m\bar{x}_p^2\right),$$

gdzie

$$\bar{x}_p = \sum_{i=1}^{m} x_i / n.$$

Indeks P można zapisać w postaci:

$$P(\mathbf{x}, z) = H\left[I^2 + (1-I)^2 C_p^2\right]. \tag{50}$$

Kwadrat współczynnika zmienności C^2 jest miarą nierówności odpowiadającą P w tym sensie, że C^2 otrzymamy wtedy, gdy n i $\bar{x}$ podstawimy zamiast m i z w definicji P.

Autorzy chcieli, aby ich indeks spełniał oprócz aksjomatów Sena także aksjomat transferu Kakwaniego, który akcentuje transfery wśród najuboższych (aksjomat 3).

Jeśli ma miejsce przeniesienie pewnej sumy od i-tego ubogiego o dochodzie x_i do ubogiego o dochodzie $x_i + h$, to wtedy dla danego $h > 0$ wielkość wzrostu miary ubóstwa maleje ze wzrostem i.

Ponieważ ich indeks nie spełniał tego aksjomatu, uogólniając go znaleźli klasę indeksów ubóstwa, która także spełniała ten aksjomat. Dla $\alpha \geq 0$ P_α jest zdefiniowany przez

$$P_\alpha(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{g_i}{z}\right)^\alpha. \tag{51}$$

P_0 jest procentem ubogich H, $P_1 = HI$ – unormowana luka dochodów. Miarę P otrzymamy podstawiając $\alpha = 2$. Parametr α może być interpretowany jako miara awersji do ubóstwa. Im większe α, tym P_α bardziej akcentuje najuboższych.

Lemat 3.1. Miara ubóstwa P_α spełnia aksjomat monotoniczności Sena (A1) dla $\alpha > 0$, aksjomat transferu Sena (A2) dla $\alpha > 1$ i aksjomat transferu Kakwaniego dla $\alpha > 2$.

Indeks ten ma jeszcze jedną ważną własność – jest rozkładalny.

Załóżmy, że dana n-osobowa populacja zawiera w sobie p podgrup o liczebności n_j:

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^1 \;\; \mathbf{x}^2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{x}^p\right),$$

gdzie $\mathbf{x}^i$ jest wektorem rozkładu dochodów i-tej podgrupy.

Wtedy

$$P_\alpha\left(\mathbf{x}, z\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{n} P_\alpha\left(\mathbf{x}^i, z\right). \tag{52}$$

Indeks $P_\alpha(\mathbf{x}, z)$ jest także zgodny na podgrupach, tzn. jeśli $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ i $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2)$ oraz $n(\mathbf{x}^1) = n(\mathbf{y}^1)$ i $n(\mathbf{x}^2) = n(\mathbf{y}^2)$, $n(\mathbf{x})$ – liczebność populacji, to $P(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, z) > P(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, z)$, gdy $P(\mathbf{x}^1, z) > P(\mathbf{y}^1, z)$ i $P(\mathbf{x}^2, z) > P(\mathbf{y}^2, z)$.

Przykład ilustrujący wykorzystanie własności rozkładalności indeksu: indeks P_2 zastosowano do danych z 1970 r. w Nairobi. Wszyscy ubodzy zostali podzieleni na podgrupy w zależności od czasu przebywania w tym kraju. Linia ubóstwa wynosiła 515 szylingów kenijskich rocznie, czyli 72$ na rok.

Tabela 3.1

Lata w Nairobi	Liczba osób n_j	Ubóstwo $P_2(\mathbf{x}^j, z)$ (a)	Średni dochód ubogich (b)	Proporcje ubogich w każdej grupie
0	29	0,4267	93,3	0,55
0,1 – 1	117	0,1237	221,9	0,30
2	116	0,1264	140,0	0,20
3 – 5	438	0,0257	295,1	0,09
6 – 10	793	0,0343	273,8	0,11
11 – 15	719	0,0291	286,6	0,10
16 – 20	565	0,0260	329,3	0,11
21 – 70	954	0,0555	198,8	0,12
okresowi rezydenci	116	0,1659	203,3	0,35
nieznani	140	0,2461	93,0	0,34
całość	3987	0,0558		

a) $P_2(\mathbf{x}^j, z) = 1/(n_j z^2) \cdot \sum_{i=1}^{m_j} g_i^2$, gdzie m_j – liczba ubogich w grupie j,

b) w szylingach kenijskich na rok.

Niezgodność aksjomatów

W 1983 r. pojawiły się dwie prace, które pokazywały, że kilka z istniejących indeksów nie spełniają pewnych podstawowych aksjomatów. Thon w swojej krótkiej pracy wykazał, że pierwszy indeks Clarka, Hemminga i Ulpha (46)

$$P = \frac{m}{n} \cdot \frac{g^*}{z},$$

gdzie

$$g^* = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} g_i^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

nie spełnia aksjomatu transferu. Dla $z = 2{,}1$ niech $\mathbf{x} = (1,\ 2,\ 3)$ będzie transponowany w $\mathbf{x}' = \left(\frac{4}{5},\ 2\frac{1}{5},\ 3\right)$. Jeżeli $\alpha = 2$, to

$$P(\mathbf{x}) = 0{,}24 \text{ i } P(\mathbf{x}') = 0{,}21, \text{ czyli } P(\mathbf{x}) > P(\mathbf{x}').$$

Z aksjomatu transferu nierówność powinna być przeciwna. Zauważmy, że ubogi, który otrzymał transfer „przeszedł" ze zbioru ubogich do zbioru nie-ubogich.

Ten sam przykład pokazuje, że aksjomatu transferu Sena (A2) nie spełniają indeksy: Sena, Kakwaniego dla $k = 1$, procent ubogich, stosunek luk dochodów i indeks Takayamy. Drugi indeks Clarka, Hemminga i Ulpha (51) ten aksjomat spełnia.

W drugiej pracy Kundu i Smith udowadniają, że indeksy: procent ubogich, stosunek luk dochodów, indeks Sena i Takayamy nie spełniają grupy 3 aksjomatów, które według nich powinny spełniać indeksy ubóstwa:

KS1 (transformacja w górę). Dla dowolnych z, $\Delta \in \Re_+$ i $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $\mathbf{x}' = (x_1,\ \ldots,\ x_i - \Delta,\ \ldots,\ x_j + \Delta,\ \ldots,\ x_n)$ jeśli $x_i < z$, to $P(z, \mathbf{x}') \geq P(z, \mathbf{x})$.

KS2 (wzrost ubóstwa). Dla dowolnego $z \in \Re_+$, $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \Re_+^n$ i $\mathbf{x}' = (x_1,\ \ldots,\ x_i,\ y,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n) \in \Re_+^{n+1}$ jeśli $y < z$, to $P(z, \mathbf{x}') > P(z, \mathbf{x})$.

KS3 (wzrost bogactwa). Założenie jak w KS2 i jeśli $y > z$, to $P(z, \mathbf{x}') < P(z, \mathbf{x})$.

Aksjomat KS3 jest wyraźnym warunkiem na ubóstwo subiektywne.

Dla wymienionych indeksów i aksjomatów otrzymali oni następującą tabelę:

	H	I	S	T	– indeksy
KS1	N	S	N	N	
KS2	S	S	N	N	
KS3	S	N	S	N	

gdzie: S oznacza, że indeks aksjomat spełnia,
N – nie spełnia.

Indeksy ubóstwa zgodne na podgrupach

W 1991 r. Foster i Shorrocks zaproponowali nową własność indeksów ubóstwa, którą nazwali zgodnością na podgrupach. W swoim artykule zrobili przegląd znanych indeksów ubóstwa pod względem tej własności.

Rozważamy dyskretny rozkład dochodów reprezentowany przez wektor ze zbioru $D=\bigcup_{h=1}^{\infty}D^n$, gdzie $D=[a,\ b]$, $b>a>0$. Ubogimi są te osoby, których dochód jest nie większy od z. Załóżmy też, że indeks ubóstwa posiada następujące własności dla danej linii ubóstwa $z \in D$:

1. Symetria: $P(x;z)=P(y;z)$, $x,\ y \in D$ i y jest permutacją x.

2. Replikacja: $P(x;z)=P(y;z)$ jeśli y jest replikacją x: $y=(x,\ x,\ \ldots,\ x)$ oraz $n(y)=k\cdot n(x)$, gdzie $n(x)$ jest liczebnością populacji x; $x,\ y \in D$.

3. Monotoniczność: $P(x;z)\le P(y;z)$ jeśli $x \in D$ jest otrzymany z $y \in D$ przez wzrost dochodu osoby ubogiej.

4. $P(x;z)=P(y;z)$ jeśli $x \in D$ jest otrzymany z $y \in D$ przez wzrost osoby nieubogiej.

5. Ciągłość: $P(x;z)$ jest ciągłą funkcją x_i dla $x_i \le z$.

Definicja. Indeks ubóstwa P jest zgodny na podgrupach, jeśli dla wszystkich $z \in D$ i $x,\ x',\ y,\ y' \in D$, dla których $n(x)=n(x')$ i $n(y)=n(y')$ mamy

$$P(x,\ y;\ z)>P(x',\ y';\ z), \tag{53}$$

gdy $P(x;\ z)>P(x';\ z)$ i $P(y;\ z)=P(y',\ z)$.

Zakładamy, że liczebność podgrup jest stała, tzn. że nie ma migracji (także zejść i narodzin). Założenie to jest istotne, bo gdyby ubóstwo było większe w regionie B niż w regionie A i reprezentatywna rodzina z regionu B przeniosła się do regionu A, to ubóstwo w regionie B by się nie zmieniło, a w regionie A by się powiększyło i wtedy zwiększyłoby się ubóstwo w całej populacji (choć obiektywnie jest takie samo).

Własność zgodności na podgrupach jest silniejszym warunkiem niż rozkładalność indeksu zdefiniowana przez Fostera i innych (1984):

Definicja. Indeks ubóstwa jest rozkładalny (*decomposable*), jeśli dla $K\ge 2$ i $x^k \in D$ $k=1,\ 2,\ \ldots,\ K$

$$P\left(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^K;\ z\right)=\sum_{k=1}^{K} w_k P\left(x^k;\ z\right), \tag{54}$$

gdzie $w_k=n\left(x^k\right)/n(x)$.

Zauważmy, że gdy liczebność podgrup jest stała, to wagi w_k są stałe i wzrost ubóstwa w jednej podgrupie (przy innych stałych) powoduje wzrost ubóstwa w całej populacji. Stąd własność rozkładalności pociąga za sobą własność zgodności na podgrupach. W drugą stronę nie jest to prawda.

Dla rodziny indeksów ubóstwa zaproponowanych przez Clarka, Hemminga i Ulpha.

$$C_\beta(x;z)=1-\left[f_\beta(x;z)\right]^{1/\beta},\ \beta<1, \tag{55}$$

gdzie $f_\beta(x;z)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\min\left(\frac{x_i}{z},\ 1\right)^{\beta}$.

Żeby zobaczyć, że jest zgodna na podgrupach, zauważmy że

$$C_\beta(x,y;z)=1-\left[\frac{n(x)}{n(x,y)}f_\beta(x;z)+\frac{n(y)}{n(x,y)}f_\beta(y;z)\right]^{1/\beta}.$$

Więc jeśli $C_\beta(x;z)$ rośnie i $C_\beta(y;z)$ jest takie samo, to $f_\beta(y;z)$ pozostaje takie samo, czyli że $C_\beta(x,y;z)$ też rośnie.

Indeksy ubóstwa „postaci Sena" (z wagami zależnymi od rankingu) nie są zgodne na podgrupach, i nie są też rozkładalne.

Stosunek luk dochodów nie jest zgodny na podgrupach: $I(x;z)=(z-\mu_r)/z=$ $=(1/m)\sum_{i=1}^{m}(z-x_i)/z$. Niezgodność sprawia czynnik $\frac{1}{m}$, który jest czynnikiem normującym. Indeks ten ogranicza się tylko do podgrupy ubogich – nie do całej populacji. Ponieważ średni dochód ubogich μ_p może rosnąć i dochody ponad z maleć, stąd może nie być zgodności na podgrupach. Przykład: $z=10$, $x=(1,\ 20)$, $x'=(2,\ 2)$ i $y=(10,\ 10)$. Wtedy $I(x;z)=0{,}9$, $I(x';z)=0{,}8$, ale $I(x,y;z)=0{,}3<I(x',y;z)=0{,}4$. Niezgodność nie powstanie, jeśli luki dochodów będą normalizowane przez czynnik $\frac{1}{m}$. Indeks $G=H\cdot I$ jest już zgodny na podgrupach.

Indeks Blackorbiego i Donaldsona jest niezgodny z tego samego powodu. Dla $\varepsilon=-1$ mamy

$$B(x;z)=H\cdot\left(z-\mu_p^h\right)/z, \tag{56}$$

gdzie $\mu_p^h=\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}\right]^{-1}$.

Wykorzystując x i y z poprzedniego przykładu otrzymamy: $B(x;z)=0{,}45$, $B(y;z)=0$. Zatem powinniśmy oczekiwać, że $B(x,x;z)>B(x,y;z)$. Jednak

$$B(x,x;z)=0{,}45 \text{ i } B(x,y;z)=0{,}56.$$

Zatem eliminacja ubóstwa w drugiej podgrupie sprawiła wzrost miary ubóstwa w całej populacji. Tak jak w poprzednim indeksie, indeks BD też można poprawić usuwając H z definicji $B(x;z)$ i w definicji μ_p^h zastępując $\frac{1}{m}$ przez $\frac{1}{n}$.

Niech $x,\ x'\in D^k$ i $y,\ y'\in D^l$ i $k+l=n$. Wtedy

$$P(x,y)\geq P(x',y)\Rightarrow P(x,y')\geq P(x',y'). \tag{57}$$

Jeżeli $P(x,y) \geq P(x',y)$, to ze zgodności na podgrupach mamy $P(x) \geq P(x')$. Jeśli $P(x) > P(x')$, to $P(x,y') > P(x',y')$ ze zgodności na podgrupach. Gdyby $P(x) = P(x')$ i $P(x,y') < P(x',y')$ to $P(x,y',x') < P(x',y',x)$ ze zgodności na podgrupach, ale to byłoby sprzeczne z warunkiem symetrii, co dowodzi (57).

Wykorzystując wyniki Blackorbiego i innych (1978) do (57) autorzy znaleźli postać ciągłych indeksów dla $n \geq 3$ zgodnych na podgrupach

$$P(x) = \widetilde{F}_n\left[\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_n(x_i)\right], \; x \in D^n, \tag{58}$$

gdzie $\widetilde{\Phi}_n$ jest ciągła, $\widetilde{F}_n$ jest ciągła i rosnąca.

Spróbujmy udowodnić ten fakt dla $n = 3$. Jeśli $P \in C^1$, to (57) $\Leftrightarrow$ pochodna w kierunkach x ma znak niezależny od y. Zatem

$$\begin{aligned} &\text{a) } \partial_1 P(x_1,x_2,x_3) = \lambda_3(x_1,x_2)\cdot \partial_2 P(x_1,x_2,x_3),\\ &\text{b) } \partial_1 P(x_1,x_2,x_3) = \lambda_2(x_1,x_3)\cdot \partial_3 P(x_1,x_2,x_3),\\ &\text{c) } \partial_2 P(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1(x_2,x_3)\cdot \partial_3 P(x_1,x_2,x_3),\end{aligned} \tag{59}$$

stąd

$$\partial_2 P(x_1,x_2,x_3) = \frac{\lambda_2(x_1,x_3)}{\lambda_3(x_1,x_2)}\cdot \partial_3 P(x_1,x_2,x_3). \tag{60}$$

Z (59c) i z (60)

$$\lambda_1(x_2,x_3) = \frac{\lambda_2(x_1,x_3)}{\lambda_3(x_1,x_2)}. \tag{61}$$

Jeśli

$$\lambda_1(x_2,x_3) = \eta_2^{-1}(x_2)\cdot \eta_3(x_3)$$

(bo $\lambda_1(x_2,x_3)$ nie zależy od x_1), to

$$\eta_1(x_1)\cdot \partial_1 P(x_1,x_2,x_3) = \eta_3(x_3)\partial_3 P(x_1,x_2,x_3)$$

i

$$\eta_2(x_2)\cdot \partial_2 P(x_1,x_2,x_3) = \eta_3(x_3)\partial_3 P(x_1,x_2,x_3).$$

Zatem

d) $\eta_1(x_1)\cdot \partial_1 P(x_1,x_2,x_3) = \eta_2(x_2)\cdot \partial_2 P(x_1,x_2,x_3) = \eta_3(x_3)\cdot \partial_3 P(x_1,x_2,x_3)$.

Niech

$$\Phi_i'(x_i) = \eta_i(x_i)^{-1}$$

i

$$G(x_1,x_2,x_3) = P\left(\Phi_1^{-1}(x_1),\ \Phi_2^{-1}(x_2),\ \Phi_3^{-1}(x_3)\right),$$

$$\partial_i G(x_1,x_2,x_3) = \eta_i(x_i)\cdot \partial_i P\left(\Phi_1^{-1}(x_1),\ \Phi_2^{-1}(x_2),\ \Phi_3^{-1}(x_3)\right).$$

Z d)

$$\partial_1 G = \partial_2 G = \partial_3 G,$$

i stąd

$$G(x_1, x_2, x_3) = F(x_1 + x_2 + x_3).$$

Ostatecznie

$$P(x_1, x_2, x_3) = G(\Phi_1(x_1),\ \Phi_2(x_2),\ \Phi_3(x_3)) = F\left(\sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x_i)\right),$$

co kończy dowód.

Jeśli w (58) położymy $\Phi_n(t) = [\widetilde{\Phi}_n(t) - \widetilde{\Phi}_n(z)]$ dla $t \in D$ i $F_n(u) = \widetilde{F}_n[u + \widetilde{\Phi}_n(z)]$ dla $u \in \Phi_n(D)$, to otrzymamy

$$P(x) = F_n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi_n(x_i)\right] \text{ dla } n \geq 3 \text{ i } x \in D^n, \tag{62}$$

gdzie $\Phi_n : D \to \Re$ jest ciągła, $\Phi_n(z) = 0$ i $F_n : \Phi_n(D) \to \Re$ jest ciągła i rosnąca. Następnie autorzy korzystając z warunku 2 (replikacji) dochodzą do następującej postaci indeksu P:

$$P(x) = F\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\right] \text{ dla } n \geq 1 \text{ i } x \in D^n, \tag{63}$$

gdzie $\Phi : D \to \Re$ jest ciągła, $\Phi(z) = 0$ i $F : \Phi(D) \to \Re$ jest ciągła i rosnąca. Warunki (3) i (4) implikują, że Φ jest malejąca na D i $\Phi(t) = 0$ dla $t \geq z$.

Te warunki na F i Φ są konieczne i wystarczające na to, aby indeks $P(x)$ (63) był ciągłym i zgodnym na podgrupach indeksem ubóstwa.

Łatwo zobaczyć, że

$$P^{\Phi}(x) = \frac{1}{n(x)}\sum_{i=1}^{n(x)} \Phi(x_i) \text{ dla } x \in D \tag{64}$$

jest rozkładalny i zatem $P = F(P^{\Phi})$ jest zgodny na podgrupach.

Wniosek 3.1. P jest ciągłym rozkładalnym indeksem ubóstwa $\Leftrightarrow$ $P = P^{\Phi} + c$ dla pewnego P^{Φ} i stałej c.

Wniosek 3.2. P jest ciągłym zgodnym na podgrupach indeksem ubóstwa $\Leftrightarrow$ P jest ciągłym rosnącym przekształceniem ciągłego, rozkładalnego indeksu ubóstwa.

Z (63) indeks P zgodny na podgrupach możemy zapisać w postaci:

$$P(x; z) = F\left[\frac{1}{n(x)}\sum_{i=1}^{n(x)} \Phi(x_i; z),\ z\right] \text{ dla } x \in D \text{ i } z \in D, \tag{65}$$

gdzie F i Φ mają własności takie jak w (63).

Będziemy mówić, że $(x';z') \in D \times D$ jest otrzymany z $(x;z) \in D \times D$ przez relatywną zamianę, jeśli $(x';z') = \lambda(x;z)$ dla pewnego $\lambda > 0$, i przez absolutną zamianę, jeśli $(x';z') = (x;z) + (\lambda \cdot \mathbf{1}; \lambda)$ dla pewnego $\lambda > 0$, gdzie **1** jest wektorem jedynek.

Korzystając z tych dwóch własności zdefiniujemy:

Skale niezmiennicze: $P(x';z') = P(x;z)$, gdy $(x';z') \in D \times D$ jest otrzymany z $(x;z) \in D \times D$ przez zamianę relatywną.

Przesunięcie niezmiennicze: $P(x';z') = P(x;z)$, gdy $(x';z') \in D \times D$ jest otrzymany z $(x;z) \in D \times D$ przez zamianę absolutną.

Zgodnie z Blackorby i Donaldsonem relatywne indeksy ubóstwa są skalami niezmienniczymi, podczas gdy absolutny indeks ubóstwa jest przesunięciem niezmienniczym.

Dla dowolnego relatywnego indeksu ubóstwa musi zachodzić $P(x;z) = P(x/z;\ 1)$ dla wszystkich $(x;z) \in D \times D$. Połóżmy $\Phi(t) = \Phi(t;1)$ i $F_R(u) = F(u;1)$ i podstawmy do (65)

$$P_R(x;z) = F_R\left[\frac{1}{n(x)}\sum_{i=1}^{n(x)} \Phi(x_i/z)\right] \text{ dla } (x;z) \in D \times D, \tag{66}$$

gdzie F_R jest ciągła i rosnąca, Φ jest ciągła i malejąca i $\Phi(t) = 0$ dla $t \geq 1$.

Wtedy P_R jest ciągłym, zgodnym na podgrupach relatywnym indeksem ubóstwa.

Absolutny indeks ubóstwa jest otrzymany z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.5. $P_A : D \to \Re$ jest ciągłym, zgodnym na podgrupach absolutnym indeksem ubóstwa $\Leftrightarrow$ istnieje $\Psi : \Re \to \Re$ i $F_A : \Psi(\Re) \to \Re$ takie, że

$$P_A(x;z) = F_A\left[\frac{1}{n(x)}\sum_{i=1}^{n(x)} \Psi(x - z)\right] \text{ dla } (x;z) \in D \times D, \tag{67}$$

gdzie P_A jest ciągła i rosnąca, Ψ jest ciągła i niemalejąca i $\Psi(t) = 0$ dla $t \leq 0$.

Definicja 3.4. Indeksy ubóstwa P i P' są porównywalne, jeśli dla wszystkich $z \in D$ i $x, y \in D$

$$P(x;z) \geq P(y;z) \Leftrightarrow P'(x;z) \geq P'(y;z). \tag{68}$$

Przykład. Relatywny indeks

$$P(x;z) = 1 - \frac{\min\{x_1, \ldots, x_n, z\}}{z}$$

i jego porównywalny absolutny indeks

$$P(x;z) = z - \min\{x_1, \ldots, x_n, z\}.$$

Oba indeksy nie są zgodne na podgrupach.

3.3. Mierniki ubóstwa według Hagenaarsa

W 1986 r. ukazała się książka A. J. M. Hagenaarsa *The Perception of Poverty – postrzeganie ubóstwa*. Hagenaars przyglądał się znanym miernikom ubóstwa poprzez pryzmat następujących aksjomatów:

1. **Monotoniczność**: zmniejszenie dochodu osoby ubogiej powiększa miarę ubóstwa.
2. **Transfer**: transfer od osoby ubogiej do bogatszej powiększa miarę ubóstwa.
3. **Symetria**: jeśli połączymy kilka identycznych populacji, to miara ubóstwa się nie zmieni.
4. **Proporcje ubogich**: względny wzrost liczby ubogich powiększa miarę ubóstwa.

Czwarty aksjomat jest najbardziej problematyczny i przysparza najwięcej kłopotów w wyprowadzeniu indeksu ubóstwa.

Załóżmy, że władze pewnej społeczności otrzymały pieniądze na wsparcie sfery ubogich. Wtedy, gdyby brali pod uwagę warunek czwarty przyznali by te pieniądze „najbogatszym" ubogim w taki sposób, aby ich dochód był wyższy od linii ubóstwa. W ten sposób zmniejszyliby indeks ubóstwa. Byłoby to najlepsze posunięcie z punktu widzenia polityki. Jednak z punktu widzenia etycznego (por. Blackorby-Donaldson) byłoby to posunięcie najbardziej szkodliwe dla ubogich.

Przypatrzmy się w jaki sposób może wzrosnąć liczba ubogich. Pierwszy przypadek, gdy liczba osób całej populacji, n, nie zmieni się. Wtedy wzrost relatywnej liczby ubogich może być spowodowany następującymi czynnikami:

a) dochód bogatej osoby x_r zmniejszy się poniżej linii ubóstwa: $x_r - a < z < x_r$,

b) bogata osoba dokona transferu ze swego dochodu do pewnej innej osoby, tak że $x_r - a < z < x_r$,

c) wzrośnie linia ubóstwa (np. z powodu inflacji), tak że $z < x_r < z + a$.

Pierwszy czynnik nie wprowadza żadnego problemu. W drugim przypadku (b) jeśli transfer jest do osoby bogatszej, to też nie ma problemu. Jednak jeżeli transfer jest do osoby ubogiej, to może powstać konflikt aksjomatów. Relatywny wzrost liczby ubogich powinien spowodować wzrost miary ubóstwa, ale z aksjomatu transferu wynika, że transfer „wyrównawczy" od osoby bogatej do osoby biednej powinien spowodować zmniejszenie miary ubóstwa. Ten konflikt był opisany w pracy Thona (1979).

Trzecia możliwość wzrostu relatywnej liczby ubogich jest rezultatem powiększenia linii ubóstwa. Tutaj też może powstać konflikt aksjomatów. Jak długo $z < \bar{x}$ (średni dochód całej populacji), to problemu nie ma. Jednak jeżeli z wzrośnie powyżej średniego dochodu ($z > \bar{x}$), to wtedy jest trudno wyrównać „nierówność dochodów wśród ubogich" z aksjomatu monotoniczności. Zmniejszenie dochodu osoby pomiędzy średnim dochodem i linią ubóstwa pomniejsza nierówność dochodu całej populacji, zatem powoduje wzrost dobrobytu społecznego. Ponadto takie zmniejszenie nie jest zgodne z aksjomatem monotoniczności. Stąd taka zmiana w dochodach spowodowałaby wzrost dobrobytu społecznego i wzrost miary ubóstwa.

Drugi przypadek, gdy liczba osób całej populacji zmienia się. Wtedy wzrost relatywnej liczby ubogich może być spowodowany przez to, że:

a) osoba uboga została dodana do populacji,

b) bogata osoba opuściła populację.

Ten przypadek jest opisany w pracy Knuda i Smitha w ich twierdzeniu o niemożliwości. Aksjomaty transferu, symetrii populacji i proporcji ubogich nie mogą być spełnione jednocześnie, gdy zmienia się liczba populacji.

Załóżmy, że liczebność populacji jest stała. Wtedy relatywna liczba ubogich może wzrosnąć jako rezultat zmniejszenia dochodów osoby bogatej (MON), transferu od osoby bogatej do biednej (TRANS) i poprzez wzrost linii ubóstwa (Z). W tabeli 3.2 mamy przegląd indeksów pod względem zadanych kryteriów. Wyróżniają się dwa indeksy: CHU – P_5 i FGT – P_7.

Oznaczenia do tabeli 3.2:

m – liczba ubogich,

n – liczebność całej populacji,

z – linia ubóstwa,

$\bar{x}_p$ – średni dochód ubogich,

x^* – wektor obciętych dochodów: $x_i^* = z$ jeśli $x_i \geq z$ oraz $x_i^* = x_i$ jeśli $x_i < z$,

μ^* – średni dochód obciętych dochodów,

$x_{\text{EDE P}}$ – jest to jednakowy dochód wszystkich ubogich, przy czym taki, że dobrobyt społeczny jest taki sam, jak przy różnych dochodach,

$x_{\text{EDE P}}^{\text{A}}$ – równy rozkład równoważnych dochodów ubogich zgodny z uogólnioną funkcją wyceny społecznej Atkinsona.

Uogólnienie indeksu Clarka, Hemminga i Ulpha

Punktem wyjścia jest indeks nierówności dochodów Daltona (1920) i Atkinsona (1970):

$$D = 1 - \frac{SW(x)}{SW(\tilde{x})}, \tag{69}$$

gdzie: SW – funkcja dobrobytu społecznego,

x – wektor reperezentacyjny aktualnego rozkładu dochodów,

$\tilde{x}$ – wektor optymalny reprezentujący rozkład dochodów,

tzn. taki rozkład, który maksymalizuje funkcję dobrobytu i który jest osiągalny z dochodu całej populacji.

Niech funkcja dobrobytu społecznego będzie zdefiniowana tradycyjnie poprzez użyteczności następująco:

$$SW(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(x_i). \tag{70}$$

Jeśli użyteczności dochodu dla każdego ubogiego są takie same i U jest wklęsła, to optymalny rozkład jest otrzymany, gdy dochody są rozłożone równomiernie, tzn. jest równy $\bar{x}$, czyli

Tabela 3.2

Przegląd indeksów ubóstwa

Przypadek, gdy liczebność populacji nie zmienia się			Monotoniczność	Transfer	Symetria	Proporcje ubogich		
						MON	TRANS	Z
H	Procent ubogich	$\frac{m}{n}$	nie	nie	tak	tak	tak	tak
I	Stosunek luk dochodów	$\frac{z-\bar{x}_p}{z}$	tak	nie	tak	nie	nie	nie
P_1	Sen	$\frac{2}{(m+1)nz}\sum_{i=1}^{m}\left((m+1-i)(z-x_i)\right)$	tak	nie	nie[1]	tak	tak	tak
P_2	Takayama	$+\frac{1}{n}-\frac{z}{\mu^* n^z}\sum_{i=1}^{n}(m+1-i)^k(z-x_i)$	nie	nie	tak	nie	nie	nie
P_3	Kakwani	$\frac{2}{(m+1)nz}\sum_{i=1}^{m}(m+1-i)^k(z-x_i)$	tak	nie	nie[1]	tak	tak	tak
P_4	Blackorby	$\frac{m}{n}\frac{z-x_{\text{EDE P}}}{z}$	tak	nie	tak	tak	tak	tak
P_5	Clark, Hemming i Ulph	$-\left\{\frac{m}{n}\left[\frac{x^{\text{A}}_{\text{EDE P}}}{z}\right]^{\beta}+\left(1-\frac{m}{n}\right)\right\}^{1/\beta}$	tak	tak	tak	tak	nie	tak
P_6	Thon	$\frac{2}{n(n+1)z}\sum_{i=1}^{m}(n+1-i)(z-x_i)$	tak	tak	nie[2]	tak	nie	tak
P_7	Foster, Greer i Thorbecke	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z-x_i}{z}\right)^{\alpha}$	tak	tak	tak	tak	nie	tak

[1] Podstawiając $m = m+1$.

[2] Podstawiając $n = n+1$.

$$D = 1 - \frac{SW(x)}{U(\bar{x})}.$$

Atkinson (1970) przekształcając miarę Daltona z powrotem do przestrzeni dochodów funkcją $\Phi(SW) = U^{-1}(SW)$ otrzymał swój indeks nierówności:

$$A = 1 - \frac{x_{\text{EDE}}}{\bar{x}}, \tag{71}$$

gdzie $x_{\text{EDE}} = U^{-1}(SW(x))$.

Oczywiście koniecznym warunkiem dla tego przekształcenia jest monotoniczność funkcji U.

Aby otrzymać indeks ubóstwa autor zdefiniował funkcję dobrobytu społecznego następująco:

$$SW(x^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \min\{U(x_i),\ U(z)\}. \tag{72}$$

Jeżeli $z < \bar{x}$, to optymalny rozkład ocenzurowanego wektora dochodów jest wektorem, którego wszystkie współrzędne równe są poziomowi linii ubóstwa:

$$D_p = 1 - \frac{SW(x^*)}{U(z)} \tag{73}$$

i odpowiednio miara ubóstwa Atkinsona jest dana przez

$$A_p = 1 - \frac{x^*_{\text{EDE}}}{U(z)}, \tag{74}$$

gdzie $x^*_{\text{EDE}} = U^{-1}\left(SW(x^*)\right) = U^{-1}\left\{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i) + (n-m)U(z)\right]\right\}$.

Otrzymano klasę indeksów ubóstwa zależną od funkcji U. Aksjomaty implikują warunki konieczne i wystarczające dla funkcji U.

1. Monotoniczność: jeśli $U(x)$ jest ciągłą, rosnącą funkcją, D_p i A_p spełniają aksjomat monotoniczności.

2. Transfer: jeśli $U(x)$ jest ciągłą, rosnącą i ściśle wklęsłą funkcją, D_p i A_p spełniają aksjomat transferu.

3. Symetria populacji: z własności funkcji dobrobytu społecznego jest zawsze spełniony.

4. Proporcje ubogich:

a) D_p i A_p rosną wraz ze wzrostem relatywnej liczby ubogich, który jest rezultatem zmniejszania dochodu osoby bogatej tak, że spadł poniżej linii ubóstwa, dla wszystkich ciągłych, rosnących funkcji U (MON).

b) D_p i A_p rosną wraz ze wzrostem relatywnej liczby ubogich, który jest rezultatem wzrostu linii ubóstwa z dla wszystkich ciągłych, rosnących funkcji U (Z).

Zatem koniecznymi i wystarczającymi założeniami dla funkcji U, aby D_p i A_p spełniały pożądane aksjomaty w przypadku pierwszym, jest żeby U było ściśle wklęsłą, ciągłą i rosnącą funkcją.

Dowód. Oznaczenia: D_p – indeks ubóstwa, gdy n jest stałe, D_p^a – indeks ubóstwa po zmianie (odpowiadający D_p^b), D_p^b – indeks ubóstwa przed zmianą.

1. Monotoniczność. Załóżmy, że dochód j-tej osoby maleje o sumę a. Wtedy indeks ubóstwa wzrośnie, gdy

$$1-\frac{1}{nz}\left[\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*\right)-U\left(x_j\right)+U\left(x_j-a\right)\right]>1-\frac{1}{nz}\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*\right).$$

Zatem

$$D_p^a > D_p^b$$

jeśli

$$\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*\right)-U\left(x_j\right)+U\left(x_j-a\right)\right]<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*\right),$$

czyli

$$-U\left(x_j\right)+U\left(x_j-a\right)<0$$

i

$$U\left(x_j-a\right)<U\left(x_j\right).$$

To zachodzi dla $x_j < z$, gdy U jest funkcją rosnącą.

2. Transfer. Załóżmy, że pewna suma a jest transferowana od osoby ubogiej j do bogatszej osoby l.

$$D_p^a = 1-\frac{1}{nz}\left[\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*\right)-U\left(x_j\right)+U\left(x_j-a\right)-U\left(x_l^*\right)+U\left(x_l^*+a\right)\right],$$

$$D_p^b = 1-\frac{1}{nz}\left[\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*\right)\right].$$

Zatem $D_p^a > D_p^b$, gdy

$$U\left(x_j-a\right)-U\left(x_j\right)+U\left(x_l^*+a\right)-U\left(x_l^*\right)<0.$$

Jeśli $x_l > z$, to $U\left(x_j-a\right)<U\left(x_j\right)$ i stąd

U powinno być funkcją rosnąca.

Jeśli $x_l + a < z$, to $U(x_l+a)-U(x_l+a-a)<U\left(x_j\right)-U\left(x_j-a\right)$ i stąd

U powinno być ściśle wklęsłą funkcją.

Jeśli $x_l + a > z$ (w wyniku transferu l przekroczył linię ubóstwa z), to $U(z) - U(x_l) < U(x_j) - U(x_j - a)$, $U(x_l) > U(z-a)$ (U jest rosnąca) i stąd

$$U(z) - U(x_l) < U(z) - U(z-a)$$

i

$$U(z) - U(z-a) < U(x_j) - U(x_j - a),$$

jeśli U jest ściśle wklęsła.

Stąd aksjomat transferu jest równoważny temu, że U jest rosnącą, ściśle wklęsłą funkcją.

3. Symetria populacji. Załóżmy, że wektor rozkładu dochodów jest powtarzany T razy. Zatem

$$D_p^a = 1 - \frac{1}{nTz} \sum_{k=1}^{n} U(x_k^*) \cdot T = 1 - \frac{1}{nz} \sum_{k=1}^{n} U(x_k^*) = D_p^b.$$

4. Proporcje ubogich.

a) Względna liczba ubogich może się zwiększyć poprzez zmniejszenie dochodu osoby bogatej x_l w taki sposób, że jej dochód spadnie poniżej linii ubóstwa

$$D_p^a = 1 - \frac{1}{nz} \left[\sum_{k=1}^{n} U(x_k^*) + U(x_l - a) - U(z) \right],$$

gdzie $z < x_l < z + a$,

$$D_p^b = 1 - \frac{1}{nz} \sum_{k=1}^{n} U(x_k^*),$$

$$D_p^a > D_p^b, \text{ gdy } U(x_l - a) < U(z)$$

to zachodzi dla wszystkich rosnących funkcji U;

b) Względna liczba ubogich może się zwiększyć poprzez wzrost o ε linii ubóstwa z, taki że $z < x_{m+1} < z + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$D_p^a = 1 - \frac{\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{m+1} U(x_i) + (n-m-1) U(z+\varepsilon) \right]}{U(z+\varepsilon)},$$

$D_p^a > D_p^b$, gdy

$$\frac{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{m+1} U(x_i) + (n-m-1)U(z+\varepsilon)\right]}{U(z+\varepsilon)} < \frac{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{m} U(x_i) + (n-m)U(z)\right]}{U(z)},$$

$$\Updownarrow$$

$$U(z)\left[\sum_{i=1}^{m+1} U(x_i) + (n-m-1)U(z+\varepsilon)\right] < U(z+\varepsilon)\left[\sum_{i=1}^{m} U(x_i) + (n-m)U(z)\right],$$

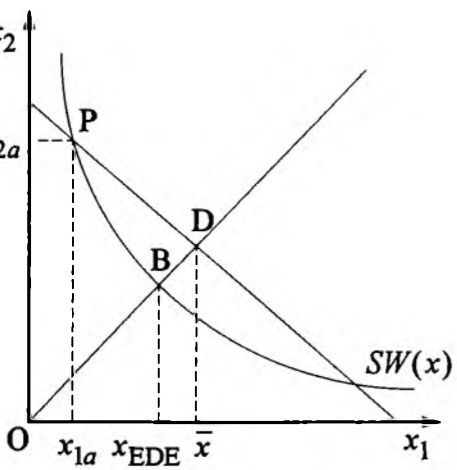
$$\Updownarrow$$

$$U(z)\left[\sum_{i=1}^{m} U(x_i) + U(x_{m+n}) - U(z+\varepsilon)\right] < U(z+\varepsilon)\left[\sum_{i=1}^{m} U(x_i)\right]$$

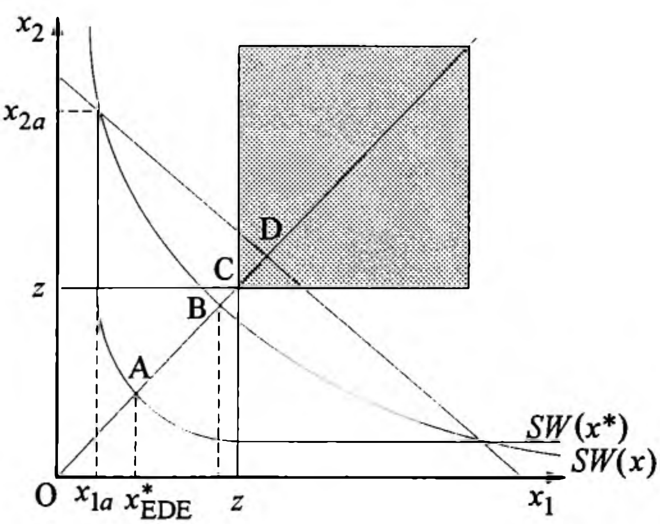
to zachodzi dla wszystkich ε, gdy $U(x_{m+1}) < U(z+\varepsilon)$, czyli dla rosnących funkcji U, co kończy dowód tego faktu.

Na rysunkach poniżej jest ilustracja miar ubóstwa Atkinsona. Autor założył, że w danej społeczności są dwie osoby o dochodach (x_{1a}, x_{2a}), oraz że w tej społeczności jest awersja do nierówności, która jest reprezentowana przez wklęsłe krzywe obojętności społecznej. Jeśli każdy z nich chciałby mieć ten sam dochód, dobrobyt społeczny powinien znaleźć się w punkcie B, danym przez $(x_{\mathrm{EDE}}, x_{\mathrm{EDE}})$. Zatem ta społeczność powinna poświęcić co najwyżej $\bar{x} - x_{\mathrm{EDE}}$, aby otrzymać równy rozkład dochodów. BD reprezentuje tę stratę dobrobytu społecznego spowodowaną tą nierównością. Miara nierówności Atkinsona jest równa $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{OD}}$.

Na rysunku drugim funkcja dobrobytu społecznego jest obcięta nad linią ubóstwa; wyższy dochód niż linia ubóstwa każdego z nich nie daje wyższego poziomu dobrobytu. Optymalna wartość funkcji dobrobytu jest zatem osiągnięta w punkcie C, i różnica między C i A repre-



Rys. 3.1. Miara nierówności Atkinsona



Rys. 3.2. Miara ubóstwa Atkinsona (powierzchnia zaciemniona jest niedefiniowalna)

zentuje stratę w dobrobycie społecznym spowodowanym ubóstwem. Indeks ubóstwa Atkinsona jest równy $\frac{AC}{OC}$.

Przypatrzmy się teraz sytuacji, gdy $z > \bar{x}$. Wtedy musimy dokonać wyboru między pożądanymi własnościami indeksu ubóstwa i pożądanymi własnościami indeksu generowanego funkcją dobrobytu. Jak zauważyliśmy z opisu indeksu nierówności Daltona i Atkinsona maksymalna wartość funkcji dobrobytu społecznego całej populacji jest osiągana dla równomiernego rozkładu dochodów, tzn. $x_i = \bar{x}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zatem jeśli każdy z nich ma dochód równy linii ubóstwa, to maksymalna wartość funkcji dobrobytu społecznego obciętego rozkładu dochodów jest większa niż maksymalna wartość funkcji dobrobytu społecznego całej populacji. Stąd mierząc ubóstwo musimy wybierać pomiędzy $SW(z)$ i $SW(\bar{x})$. Jeśli wybierzemy $SW(z)$, to będziemy mierzyć niemożliwość społeczności do złagodzenia ubóstwa. Z drugiej strony jeśli wybierzemy $SW(\bar{x})$, to będziemy mierzyć ubóstwo przez porównanie ubogich do reszty społeczności. W drugim przypadku mamy

$$\lim_{z\to\infty} D_p = \lim_{z\to\infty}\left(1-\frac{SW\left(x^*\right)}{SW(\bar{x})}\right) = 1-\frac{SW(x)}{SW(\bar{x})} = D$$

i

$$\lim_{z\to\infty} A_p = \lim_{z\to\infty}\left(1-\frac{U^{-1}SW\left(x^*\right)}{\bar{x}}\right) = 1-\frac{U^{-1}SW(x)}{\bar{x}} = A.$$

Czyli miary ubóstwa Daltona i Atkinsona dążą do miary nierówności odpowiednio Daltona i Atkinsona, gdy z – linia ubóstwa dąży do ∞. Większe obiekcje mamy do wyboru $SW(\bar{x})$ niż $SW(z)$, ponieważ wybierając $SW(\bar{x})$ indeks ubóstwa nie będzie spełniał aksjomatu monotoniczności. Jeśli dochód pewnej osoby maleje, to $\bar{x}$ maleje i w rezultacie indeks ubóstwa może przyjąć wartość ujemną.

Uwagi.

Po pierwsze, klasa indeksów Clarka, Hemminga i Ulpha jest indeksem typu Atkinsona z

$$U(x) = \frac{1}{\beta}x^{\beta}.$$

U spełnia wszystkie wymagania aksjomatów dla $\beta < 1$.

Po drugie, zauważmy, że indeks Forstera, Greera i Thorbecke jest indeksem typu Daltona z

$$U(x) = z^{\alpha} - (z-x)^{\alpha}$$

i wtedy

$$D_p^{\mathrm{FGT}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(z^{\alpha} - \left(z - x_i^*\right)^{\alpha}\right)}{nz^{\alpha}} = \frac{nz^{\alpha} - nz^{\alpha} + \sum_{i=1}^{m}\left(z - x_i\right)^{\alpha}}{nz^{\alpha}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z - x_i}{z}\right)^{\alpha}.$$

U spełnia wszystkie wymagania aksjomatów dla $\alpha > 1$.

Po trzecie, zdefiniujmy nowy indeks ubóstwa z

$$U(x) = \ln x \qquad (x > 0)$$

czyli

$$D_p = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^*}{\sum_{i=1}^{n}\ln z} = \frac{n\ln z - \sum_{i=1}^{m}\ln x_i - (n-m)\ln z}{n\ln z} = \frac{m}{n}\left[\frac{\ln z - \ln \bar{\bar{x}}_p}{\ln z}\right],$$

gdzie $\bar{\bar{x}}_p$ jest średnią geometryczną dochodów ubogich, i

$$P_8 = A_p = 1 - \frac{\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^*\right]}{z} = 1 - \left(\frac{\bar{\bar{x}}_p}{z}\right)^{m/n}. \tag{75}$$

Obydwa indeksy są prostymi funkcjami średniego geometrycznego dochodu ubogich, linii ubóstwa i relatywnej liczby ubogich. $U(x)$ spełnia wszystkie wymagania aksjomatów dla $x > 0$.

Obszar (sferę) ubóstwa można mierzyć różnymi metodami. Pierwsza metoda korzysta z różnych funkcji U dla osób z różnymi charakterystykami γ, np. γ może być liczebnością rodziny. Wtedy miara ubóstwa Daltona może być zapisana w postaci:

$$D_p = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{n(l)} U\left(x_k^*|\gamma_l\right)}{\max\limits_{x}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{n(l)} U\left(x_k^*|\gamma_l\right)}, \tag{76}$$

gdzie $n(l)$ jest liczbą osób z charakterystyki γ_l, L jest liczbą wszystkich charakterystyk i $n = \sum_{l=1}^{L} n(l)$.

Niech $z(\gamma_l)$ będzie linią ubóstwa dla rodziny o charakterystyce γ_l. Linie ubóstwa $(z(\gamma_l))$ są tak dobrane, żeby

$$U\left(z(\gamma_l)|\gamma_l\right) = \overline{U} \text{ dla wszystkich } l = 1, 2, \ldots, L.$$

Zatem, jeśli skale ekwiwalentności mogą być wyprowadzone przez transformacje wszystkich dochodów w pewien γ_0 – dochód ekwiwalentny:

$$U\left(xe|\lambda_0\right)=U\left(x|\lambda_l\right), \tag{77}$$

gdzie $xe=\dfrac{z(\gamma_0)}{z(\gamma_l)}x$, to

$$D_p=1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U\left(x^*e_k|\gamma_0\right)}{U\left(z(\gamma_0)|\gamma_0\right)} \tag{78}$$

oraz

$$A_p=1-\frac{U^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U\left(x^*e_k|\gamma_0\right)\right]}{z(\gamma_0)}. \tag{79}$$

Druga możliwość szukania obszaru ubóstwa prowadzi do wielowymiarowej granicy ubóstwa. Jeżeli oprócz dochodu weźmiemy pod uwagę czas wolny, to otrzymamy dwuwymiarową granicę ubóstwa. W tym przypadku otrzymamy

$$D_p(x,t)=1-\frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*,t_l\right)}{\max\limits_{x,t}\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{n}U\left(x_k^*,t_l\right)}. \tag{80}$$

Trzecia możliwość wypływa z faktu, że indeksy typu Daltona są indeksami rozkładanymi na podgrupach. Jeżeli **x** wektor rozkładu dochodów jest kompozycją m wektorów $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, ..., $\mathbf{x}^{(m)}$ z n_j, $j=1, 2, \ldots, m$ osobami w każdej podgrupie, to

$$D_p(x,z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{n_j}{n}D_p\left(x^{(j)}, z\right). \tag{81}$$

Możemy też mierzyć ubóstwo poprzez indywidualne funkcje dobrobytu (określone na dochodach).

Jeżeli znajdziemy empiryczne funkcje dobrobytu i będą one miały wklęsłe wykresy, to indeks ubóstwa D_p można otrzymać z indeksu Clarka, Hemminga i Ulpha (P_5). Jeżeli wykresy funkcji dobrobytu psują wklęsłość w linii ubóstwa, to indeks ubóstwa można wyprowadzić typu Sena.

3.4. Zmodyfikowany indeks ubóstwa

Rozważmy n-osobową populację. Niech $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ będzie uporządkowanym niemalejąco wektorem dochodów, oraz z – będzie „linią ubóstwa" dla tej populacji. Wtedy

$$m = \max\{i: x_i \le z\}$$

jest linią ubogich w tej populacji.

Należy znaleźć funkcję (statystykę) $P(\mathbf{x}, z)$: $\mathfrak{R}^{n+1} \to [0, 1]$ taką, że

1° $\left(\mathbf{x}^m \to z \cdot \mathbf{1}\right) \Rightarrow P\left(\mathbf{x}^n, z\right) \to 0$,

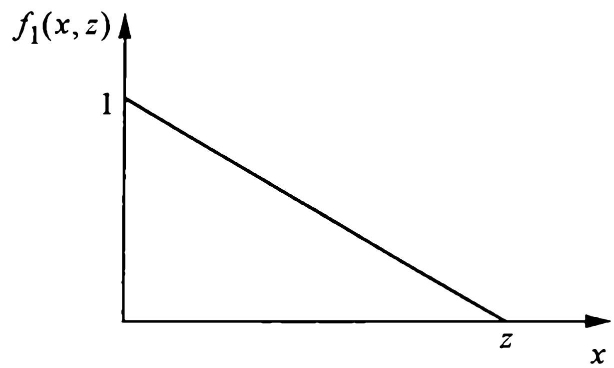
2° $\left(\mathbf{x}^m \to 0 \cdot \mathbf{1}\right) \Rightarrow P\left(\mathbf{x}^n, z\right) \to 1$

(tutaj $\mathbf{x}^m$ jest uporządkowanym wektorem dochodów ubogich).

Oprócz tego funkcja ta powinna spełniać aksjomaty monotoniczności i transferu Sena oraz aksjomat wrażliwego transferu Kakwaniego.

Na początek rozpatrzmy przypadek jednowymiarowy. Najprostszą funkcją spełniającą warunki 1° i 2° jest funkcja postaci:

$$f_1(x, z) = \frac{z - x}{z}, \quad z > 0.$$



Rys. 3.3. Wykres funkcji $f_1(x, z)$

Uogólniając ją na przypadek n-wymiarowy otrzymamy

$$P_1(\mathbf{x}, z) = I(\mathbf{x}, z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{z - x_i}{z} = \frac{mz - \sum_{i=1}^{n} x_i}{mz} = \frac{z - \bar{x}_p}{z}, \tag{82}$$

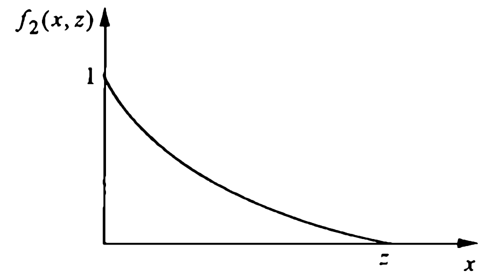
gdzie $\bar{x}_p$ jest średnim dochodem ubogich.

Indeks I jest znany pod nazwą: stosunek lud dochodów. Indeks ten nie spełnia aksjomatu transferu Sena (jeżeli przeniesiemy pewną kwotę od ubogiego do „bogatszego" ubogiego, to średni dochód ubogich nie zmieni się i indeks ten się nie zmieni – a powinien w tym przypadku wzrosnąć). Aksjomat monotoniczności spełnia, ponieważ jest funkcją malejącą.

Aby indeks spełniał aksjomat transferu wystarczy aby był funkcją wypukłą.

Powróćmy do przypadku jednowymiarowego. Wtedy „uwypukleniem” funkcji $f_1(x, z)$ będzie np. funkcja postaci

$$f_2(x,\ z) = \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha},\ \text{gdzie } \alpha > 1,\ z > 0.$$



Rys. 3.4. Wykres funkcji $f_2(x, z)$

Uogólniając ją na przypadek n-wymiarowy otrzymamy

$$P_2(\mathbf{x},\ z) = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z-x_i}{z}\right)^{\alpha}. \tag{83}$$

Łatwo zauważyć podobieństwo tej funkcji do indeksu ubóstwa Fostera i innych:

$$P_{\mathrm{FGT}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z-x_i}{z}\right)^{\alpha}.$$

W tym wzorze stała $\frac{1}{n}$ jest czynnikiem normującym. Dla ustalonych z, n i m

$$\left(\mathbf{x}^m \to 0\cdot\mathbf{1}\right) \Rightarrow \left(P_{\mathrm{FGT}}(\mathbf{x},\ z)\right) \to \frac{m}{n},$$

Jeżeli lukę ubogich i-tego ubogiego $z - x_i$ oznaczymy przez g_i, to indeksy ubóstwa Sena, Kakwaniego i Thona można zapisać w postaci (por. (2)):

$$P(\mathbf{x},\ z) = \sum_{i=1}^{m} w_i g_i, \tag{84}$$

gdzie w_i są dodatnimi wagami zależnymi od i (miejsca w uporządkowanym wektorze dochodów).

Aby „połączyć” te dwa typy indeksów (znany jest jeszcze trzeci typ, którego kluczowym pojęciem jest dochód reprezentatywny) wagi w_i należy uzależnić nie od miejsca w uporządkowanym wektorze dochodów, ale od samego dochodu.

W przypadku jednowymiarowym zaproponowana funkcja jest postaci:

$$f_3(x,\ z) = \frac{z-x}{x+z} = -1 + \frac{2z}{x+z} = \frac{1}{x+z}\cdot(z-x).$$

Zauważmy, że $f_3'(x) < 0$ i $f_3''(x) > 0$. Te dwie nierówności są warunkami wystarczającymi na to, aby indeks ubóstwa generowany tą funkcją spełniał aksjomaty monotoniczności i transferu Sena oraz aksjomat wrażliwego transferu Kakwaniego.

Po unormowaniu i przejściu do przypadku n-wymiarowego indeks P_3 jest postaci:

$$P_3(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z - x_i}{x_i + z}\right). \tag{85}$$

Własności indeksu P_3.

Ponieważ po współrzędnych indeks ten maleje i jest wypukły, zatem spełnia on aksjomaty monotoniczności i transferu Sena oraz aksjomat wrażliwego transferu Kakwaniego. Zauważmy, że monotoniczność równoważna jest następującej nierówności:

$$\text{jeżeli } \varepsilon > 0,\text{ to } \forall_i \frac{z - x_i}{x_i + z} < \frac{z - (x_i - \varepsilon)}{x_i - \varepsilon + z},$$

gdzie $0 < x_i < z$.

Aby pokazać, że indeks ten spełnia aksjomat transferu Sena, wystarczy pokazać, że jeżeli

$$x_i < x_j < z \text{ i } \varepsilon > 0,$$

to

$$\frac{z - (x_i - \varepsilon)}{x_i - \varepsilon + z} + \frac{z - (x_j + \varepsilon)}{z + x_j + \varepsilon} > \frac{z - x_i}{z + x_i} + \frac{z - x_j}{z + x_j}.$$

$$L = \frac{z - x_i + \varepsilon}{x_i + z - \varepsilon} + \frac{z - x_j + \varepsilon}{z + x_j + \varepsilon} =$$

$$= \frac{z^2 + zx_j + z\varepsilon - x_i\varepsilon - x_ix_j - z\varepsilon + \varepsilon x_j + \varepsilon^2}{z^2 + x_iz + x_jz + x_i\varepsilon - x_j\varepsilon + x_ix_j} + \frac{zx_i - x_ix_j - x_i\varepsilon + z^2 - zx_j - z\varepsilon - \varepsilon z + \varepsilon x_j + \varepsilon^2}{z^2 + x_iz + x_jz + x_i\varepsilon - x_j\varepsilon + x_ix_j} =$$

$$= \frac{2z^2 - 2x_ix_j - 2x_i\varepsilon + 2x_j\varepsilon + 2\varepsilon^2}{z^2 + x_ix_j + 2x_i + zx_j - x_j\varepsilon},$$

$$P = \frac{2z^2 - 2x_ix_j}{z^2 + x_ix_j + zx_i + zx_j}.$$

Jeżeli $P = \frac{a}{b}$, to $L = \dfrac{a + 2\varepsilon(x_j - x_i) + 2\varepsilon^2}{b - x_j\varepsilon}$. Zatem $L > P$, co kończy dowód.

Indeks P_3 spełnia też aksjomat symetrii. Jeżeli $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to przez $T\mathbf{x}$ oznaczymy wektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (T-krotna replikacja $\mathbf{x}$). Wtedy

$$P_3(T\mathbf{x}, z) = \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{z - x_i}{x_i + z}\right) = \frac{1}{nT}\cdot T\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{z - x_i}{x_i + z}\right) = P_3(\mathbf{x}, z).$$

Teraz należy sprawdzić aksjomat proporcji ubogich (który sprawia najwięcej kłopotów, a który nie jest naturalny, gdy chodzi o ubóstwo egzystencjalne – gdy głębokość ubóstwa, często zagrażająca życiu, jest ważniejsza od rozpiętości sfery ubóstwa).

A. Zmiana liczby ubogich spowodowana zmniejszeniem lub zwiększeniem dochodu (MON). Możliwe są dwa przypadki:

1° Dochód i-tego ubogiego zwiększył się ponad linię ubóstwa i wtedy liczba ubogich zmalała i zmalał tez nasz indeks ubóstwa, ponieważ pomniejszony został o $\frac{z - x_i}{z + x_i}(> 0)$.

2° Dochód nie-ubogiego zmniejszył się poniżej linii ubóstwa. Wtedy liczba ubogich wzrosła i wzrósł także indeks o stały dodatni składnik.

B. Zmiana liczby ubogich spowodowana zmniejszeniem lub zwiększeniem linii ubóstwa.

Zauważmy, że dla ustalonego $\mathbf{x}$ $f(\mathbf{x}, z)$ jest funkcją rosnąca. Jeżeli powiększy się z tak, że zwiększy się liczba ubogich, to indeks nasz powiększy się o wzrost z i o „kilka" nowych dodatnich składników. Jeżeli z pomniejszy się tak, że liczba ubogich zmaleje, to nasz indeks też pomniejszy się o składnik spowodowany zmniejszeniem z o składniki, które „przeskoczyły" linię ubóstwa.

C. Zmiana liczby ubogich spowodowana transferem. Ponieważ przejście to nie jest ciągłe, indeks P_3 nie spełnia tego warunku. Przykład:

$\mathbf{x} = (1;\ 2;\ 3)$ jest przekształcony w $\mathbf{x}' = (0{,}8;\ 2{,}2;\ 3)$ i $z = 2{,}1$. Wtedy

$$P_3(\mathbf{x}, z) = 0{,}187 \text{ i } P_3(\mathbf{x}', z) = 0{,}22.$$

W $\mathbf{x}'$ zmniejszyła się liczba ubogich, czyli według tego warunku indeks ubóstwa powinien zmaleć. Nasz indeks wzrósł, ale warto zauważyć, że w $\mathbf{x}'$ ubóstwo się pogłębiło.

Uwaga 3.3. Zaproponowany indeks P_3 w tabelach występuje pod nazwą indeksu ciągłego, jako że jego wartości w sposób ciągły zależą od dochodów.

4. POMIAR NIERÓWNOŚCI EKONOMICZNYCH

4.1. Wstęp

Aksjomatyczna teoria ubóstwa bierze swoje początki w aksjomatycznej teorii nierówności. W 1920 r. Dalton w sposób formalny wprowadził warunek na miarę nierówności rozkładu dochodów. Brzmi on następująco:

„Jeżeli od bogatszej osoby przeniesiemy pewną kwotę do biedniejszej osoby, to nierówność dochodów zmaleje pod warunkiem, że po tym transferze bogatsza osoba będzie dalej bogatsza."

Jest to aksjomat transferu Sena dla aksjomatycznej teorii ubóstwa.

Drugim powodem umieszczenia w tej pracy kilku uwag o nierówności ekonomicznej jest spostrzeżenie, że nierówność dochodów wśród ubogich ma wpływ na wielkość ubóstwa.

Trzeci powód to fakt, że badanie ubóstwa jako sytuacji niemożliwości dojścia do pewnego standardu danej społeczności pokrywa się z badaniem nierówności dochodów tejże społeczności.

Czwarty powód to hipoteza Kuznetsa, która mówi, że z kształtu krzywej Lorenza można wnioskować o sytuacji rozwojowej kraju, która to implikuje zmiany w sferze ubóstwa.

Piąty powód to twierdzenie Shorrocksa, które pokazuje, że porównywanie uogólnionych krzywych Lorenza różnych populacji jest równoważne porównywaniu dobrobytu tychże populacji, a zatem porównywaniu ubóstwa tych populacji.

4.2. Przegląd znanych indeksów nierówności

Najbardziej znanym miernikiem nierówności dochodów jest indeks Giniego (znany także pod nazwą współczynnika koncentracji Lorenza).

Załóżmy, że wektor dochodów $\mathbf{x} = (x_1 \;\; \ldots \;\; x_n)$ jest realizacją zmiennej losowej X o rozkładzie F i jest uporządkowany niemalejąco: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Empiryczną krzywą Lorenza generują punkty, których pierwszymi współrzędnymi są liczby $\frac{i}{n}$, gdzie $i = 0, 1, \ldots, n$; n – ustalona liczba, a drugie współrzędne są zdefiniowane następująco: $L(0) = 0$ i $L\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{s_i}{s_n}$, gdzie $s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$. Krzywa Lorenza $L(p)$ jest zdefiniowana dla wszystkich punktów $p \in (0, 1)$ poprzez liniową interpolację. $L(p)$ reprezentuje p-tą frakcję z najmniejszymi wartościami (np. najmniejszymi dochodami).

Załóżmy, że rozważane liczby x_i są próbką losową z rozkładu $F(x)$, który jest funkcją ściśle rosnącą, $0 < F(x) < 1$, oraz że średnia μ rozkładu $F(x)$ istnieje. Pierwsze założenie implikuje, że $F^{-1}(p)$ jest dobrze zdefiniowane i jest to populacja p-tego kwantylu. Teoretyczna krzywa Lorenza odpowiadająca temu rozkładowi jest zdefiniowana następująco:

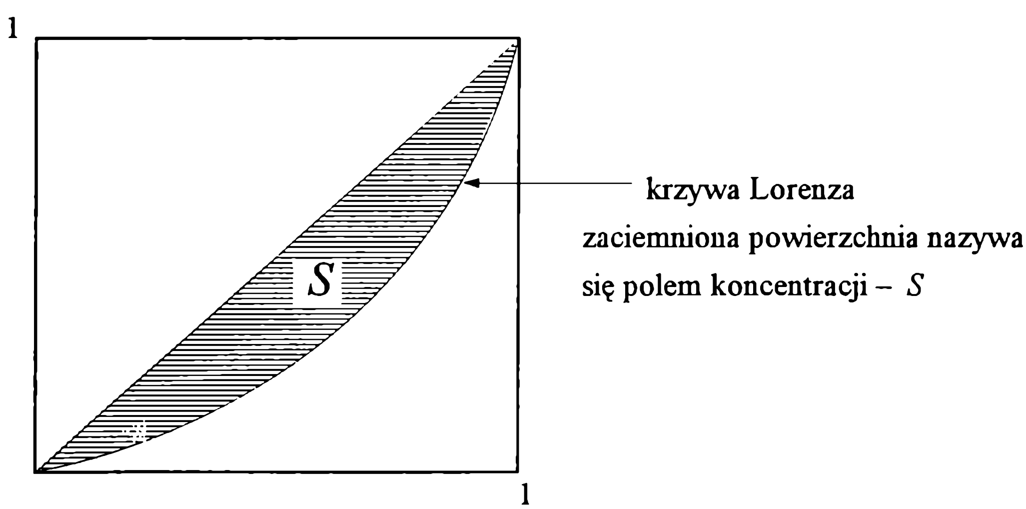
$$L(p) = \mu^{-1} \int_0^p F^{-1}(t)dt \tag{1}$$

W tabeli 4.1 mamy krzywe Lorenza generowane przez pewne znane rozkłady (patrz J. Gastwirth (1972)).

Tabela 4.1

Rozkład	Dystrybuanta	Krzywa Lorenza
jednostajny	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \mu \\ 1, & x \geq \mu \end{cases}$	$L(p) = p$
wykładniczy	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0$	$p + (1-p)\ln(1-p)$
przesunięty wykładniczy	$F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-a)},\ x > a$	$p + (1+\lambda a)^{-1}(1-p)\ln(1-p)$
Pareto	$F(x) = 1 - (a/x)^{\alpha},\ x > a,\ \alpha > 1$	$1-(1-p)^{(a-1)/\alpha}$

Jeśli $L(p)$ jest krzywą Lorenza odpowiadającą rozkładowi $F(x)$, to $L(p)$ jest wypukła i jej pochodna $L'(p) = 1$ dla $p = F(\mu)$.



Indeks Giniego G jest to stosunek pola koncentracji do pola połowy kwadratu jednostkowego (czyli do $\frac{1}{2}$).

Alternatywny wzór dla indeksu Giniego G bazuje na średniej różnicy (Δ) odpowiadającej rozkładowi $F(x)$:

$$G = \Delta/(2\mu),$$

gdzie

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|dF(x)dF(y) = 2\int_{-\infty}^{\infty}F(x)[1-F(x)]dx = 4\int_{-\infty}^{\infty}x\left[F(x)-\frac{1}{2}\right]dF(x).$$

Wzór $G = \Delta/(2\mu)$ pokazuje, że indeks Giniego mierzy relatywną nierówność – jako stosunek miary rozproszenia średniej różnicy do wartości średniej (μ).

Ponieważ w literaturze nie znalazłem dowodu równoważności tych dwu definicji współczynnika Giniego, spróbowałem pokazać tę równoważność.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - y_j\right| = 2\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}x_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}x_i\right),$$

$$n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}x_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}x_i - \sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right| = 2\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}x_i - \left((n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right] = 4\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}x_i - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$G_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|}{2n\sum_{i=1}^{n}x_i} = \frac{2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i} - \frac{2(n+1)\sum_{i=1}^{n}x_i}{2n\sum_{i=1}^{n}x_i} \approx \frac{2}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i} - 1.$$

Ponieważ

$$L\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k}y_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i},$$

stąd

$$G_n \approx \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - L\left(\frac{i}{n}\right)\right) - 1.$$

Jeśli S jest polem koncentracji, to

$$G_n = 2\left(S + \frac{1}{2}\right) - 1 = 2S + 1 - 1 = 2S,$$

czyli

$$G_n = \frac{S}{\frac{1}{2}}.$$

Inną miarą jest połowa relatywnego średniego odchylenia $\delta/2\mu$, gdzie

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu| dF(x) = 2\int_{\mu}^{\infty} (x-\mu) dF(x)$$

jest średnim odchyleniem.

Ponieważ funkcja $L(p)$ jest wypukła, to funkcja $p - L(p)$ jest wklęsła i równa się 0 w punktach 0 i 1. Zatem istnieje punkt p', w którym funkcja ta przyjmuje wartość maksymalną, która jest równa $\delta/2\mu$. Indeks ten $S = \delta/2\mu$ wprowadził Schutz w 1951 r., choć był już znany w latach trzydziestych naszego stulecia.

$$S = \sup_{p\in[0,1]} (p - L(p)). \tag{2}$$

Miarę tę zaproponowali Yntema (1933) i Pietra (1930) (por. J. Gastwirth (1972)).

Estymacja indeksu Giniego

Pierwsza metoda polega na obliczaniu pola koncentracji za pomocą wzoru na pole trapezu. Ponieważ krzywa Lorenza jest wypukła, zatem ta metoda daje przybliżenia G z niedomiarem:

$$G \geq 1 - \sum_{i=0}^{k} (p_{i+1} - p_i)\left[L(p_i) + L(p_{i+1})\right], \tag{3}$$

gdzie $0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_k < p_{k+1} = 1$.

Druga metoda bazuje na wzorze $G = \Delta/(2\mu)$.

Załóżmy, że mamy n uporządkowanych liczb, które są pogrupowane (z zachowaniem porządku) w $k+1$ podgrupach:

$$x_1, \ldots, x_{m_1};\; x_{m_1+1}, \ldots, x_{m_2};\; \ldots;\; x_{m_k+1}, \ldots, x_n$$

oraz $m_1 = n \cdot p_1$, $m_2 = n \cdot p_2$, ..., $m_k = n \cdot p_k$ i $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k < p_{k+1} = 1$. Wtedy empiryczna średnia różnica Δ^* jest równa (Yntema 1933)

$$\Delta^* = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i<j}\sum \left|x_i - x_j\right| = \sum_{i\neq j}\sum \gamma_i \gamma_j \left|\mu_i - \mu_j\right| + \sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i^2 \Delta_i^*, \tag{4}$$

gdzie μ_i jest średnią i-tej podgrupy i Δ_i^* jest średnią różnicą i-tej podgrupy; γ_i jest proporcją obserwacji w i-tej podgrupie (tzn. $\gamma_1 = p_1$, $\gamma_2 = p_2 - p_1$, ..., $\gamma_{k+1} = 1 - p_k$). Wtedy $G = \Delta^*/(2\mu)$.

Współczynnik Giniego jest relatywnym indeksem nierówności mierzącym skale proporcji dochodów, a nie efektywną miarę nierówności. Krzywa Lorenza nie zmieni się, jeżeli wektor dochodów pomnożymy przez dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą. Indeks Giniego ma jednak ważną własność: jeżeli zrobimy transfer od osoby bogatszej do biedniejszej, to indeks się pomniejszy i na odwrót. Zatem możemy powiedzieć, że współczynnik Giniego jest indeksem relatywnej nierówności.

Korzystając z tego, że jest on równy stosunkowi pola koncentracji do pola połowy kwadratu jednostkowego, czyli że jest równy podwojonemu polu koncentracji, możemy napisać:

$$G^R = 2\int_0^1 (p - L(p))dp. \tag{5}$$

W 1988 r. Satya R. Chakravarty zaproponował uogólnienie indeksu Giniego:

$$I_\alpha^R = 2 \cdot \left[\int_0^1 (p - L(p))^\alpha dp \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{6}$$

Gdy $\alpha \to \infty$

$$I_\alpha^R \to 2 \cdot \sup_{p \in [0,1]} (p - L(p)) \tag{7}$$

– jest to podwojony indeks nierówności Pietra.

W literaturze przedmiotu występują następujące indeksy nierówności:

Indeks nierówności Atkinsona (1970):

$$A_e = \begin{cases} 1 - \dfrac{\left[\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{1-e} \right]^{1/(1-e)}}{\mu}, & e > 0,\ e \neq 1, \\ 1 - \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n} (x_i)^{\frac{1}{n}}}{\mu}, & e = 1, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie e jest parametrem zależnym od stopnia awersji do nierówności.

Gdy $e \to \infty$, $A_e \to 1 - \min\limits_i \{y_i\} / \mu$.

Indeks nierówności Kakwaniego (1980):

$$K_r = \frac{1}{\mu \Phi_n(r)} \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)(n + 1 - i)^r, \tag{9}$$

gdzie $r \geq 1$ i $\Phi_n(r) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^r$.

Gdy $k = 1$ i $n \to \infty$, to $K_r \to G^R$ – współczynnik Giniego.

Indeks nierówności Shorrocka (1980):

$$S_c = \begin{cases} \frac{1}{n}\frac{1}{c(c-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^c - 1\right], & c \neq 0,\ c \neq 1, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{\mu}{x_i}\right), & c = 0, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)\cdot\log\left(\frac{x_i}{\mu}\right), & c = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Wychodząc od funkcji dobrobytu społecznego Kai-Yuen Tsun wyprowadził absolutny indeks nierówności (1995). W przypadku jednowymiarowym:

$$I_A(x) = \frac{1}{c}\ln\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\left[c(\mu - x_i)\right]\right],\ c > 0. \tag{11}$$

W przypadku wielowymiarowym

$$I_A = \frac{1}{\sum c_k}\ln\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp\left(\sum_{k=1}^{K}c_k\left(\mu_k - x_{i_k}\right)\right)\right]. \tag{12}$$

Parametry c_k są zmienne i dobiera się je tak, aby funkcja dobrobytu:

$$U(x) = a\prod_{k=1}^{K}\exp(c_k x_k) + b$$

była rosnąca i wklęsła.

W fizyce do pomiaru równomierności rozkładu wykorzystuje się pojęcie entropii.

Entropia wektora prawdopodobieństw $\mathrm{x} = (x_1\ \ldots\ x_n)$: $x_k \geq 0$ i $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$

$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\sum_{k=1}^{n} x_k \log x_k$ (13). Im większe jest $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tym bardziej rozkład jest równomierny. Można pokazać, że

$$H(1, 0, \ldots, 0) \leq H(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{n} = -\log\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

Ponieważ wyniki rozkładu wynagrodzeń GUS podaje w formie frakcji dla danych przedziałów wynagrodzeń, zatem można do tych wyników zastosować wzór na entropię – zastępując prawdopodobieństwa frakcjami – do pomiaru absolutnej nierówności rozkładu (lub uporządkowania wektorów wynagrodzeń względem wielkości nierównomierności rozkładu).

Do pomiaru nierówności ekonomicznej stosowano różne wskaźniki. Niektóre z nich wymienione są niżej.

1. Wariancja

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \tag{14}$$

1. Współczynnik zmienności

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = [\varphi_1(x)]^{1/2} / \bar{x}. \tag{15}$$

2. Mierniki Simpsona

$$\varphi_3(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{16}$$

$$\varphi_4(\mathbf{x}) = \frac{\sum x_i(x_i - 1)}{T(T-1)}. \tag{17}$$

Propozycja indeksu nierówności ekonomicznej

Metodą przejścia od indeksu ubóstwa do indeksu nierówności społecznej jest zamiana linii ubóstwa z na średni dochód μ i liczby ubogich m przez liczbę całej populacji n. W przypadku propozycji indeksu ubóstwa indeks nierówności byłby postaci

$$I(x, \mu) = I(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu - x_i}{x_i + \mu}. \tag{18}$$

Ale wtedy I mógłby przyjmować wartości ujemne. Dlatego propozycja indeksu nierówności jest następująca:

$$I(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu - x_i}{x_i + \mu}\right)^2. \tag{19}$$

Indeks ten ma następując własności:

– spełnia aksjomat Daltona,

– gdy rozkład jest równomierny, tzn. $\forall i\ x_i = \mu$, to $I(x) = 0$,

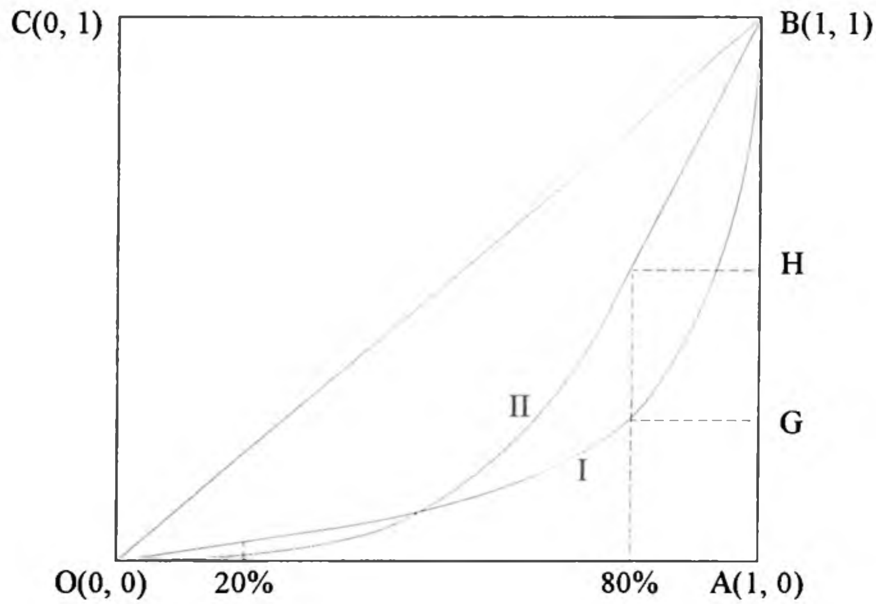
– $\lim\limits_{x_i \to 0}\left(\frac{\mu - x_i}{x_i + \mu}\right) = 1$ i $\lim\limits_{x_i \to \infty}\left(\frac{\mu - x_i}{x_i + \mu}\right)^2 = 1$, czyli skrajne ubóstwo i skrajne bogactwo ma tę samą wagę,

– $0 \le I(x) \le 1$.

4.3. Dobrobyt a indeksy ubóstwa i indeksy nierówności ekonomicznych

Hipoteza Kuznetsa (1955): rozkład dochodów krajów rozwijających się jest bardziej nierównomierny niż krajów rozwiniętych. Duża nierówność dochodów jest rezultatem koncentracji dochodu w najwyższej grupie dochodowej. To znaczy, że osoby w średnich grupach dochodowych w krajach rozwijających się mają mniejszy procent całego dochodu niż w takiej samej grupie w krajach rozwiniętych.

Aby zademonstrować hipotezę Kuznetsa będziemy sprawdzać skośność krzywych Lorenza.



Krzywa Lorenza I jest bardziej skośna w kierunku (0, 0), podczas gdy krzywa Lorenza II jest bardziej skośna w kierunku (1, 1).

Porównując grupę o najniższych dochodach (poniżej 20%) widać, że część dochodu jest większa w krzywej Lorenza I niż w krzywej Lorenza II. Podobnie porównując grupę o najwyższych dochodach (powyżej 80%) widać, że ta grupa w krzywej Lorenza I ma część całkowitego dochodu daną przez długość BG, podczas gdy w krzywej Lorenza II ma część dochodu daną przez długość BH. Część dochodu grupy o najwyższych dochodach jest większa w krzywej Lorenza I niż w krzywej Lorenza II. To pokazuje, że środkowa grupa ma mniejszą część dochodu z krzywą Lorenza, która jest bardziej skośna w kierunku (0, 0) niż z krzywą Lorenza bardziej skośną w kierunku (1, 1).

Podsumowując: hipoteza Kuznetsa mówi tyle, że w krajach rozwijających się dochód środkowej grupy rośnie. To implikuje rzeczywisty rozwój ekonomiczny. Wtedy krzywa Lorenza zmienia swój kształt ze względu na skośność z (0, 0) w kierunku (1, 1). Jeśli dwa kraje mają krzywe Lorenza bardziej skośne w kierunku (0, 0), to ten, który ma większy stopień skośności jest rzeczywiście (z tej hipotezy) mniej rozwinięty. Analogicznie, jeśli dwie krzywe Lorenza są skośne w kierunku (1, 1), to ta z większym stopniem skośności będzie reprezentowała region bardziej rozwinięty.

Idealny stan według tej hipotezy (dla regionów rozwiniętych) to taki, w którym krzywa Lorenza jest symetryczna względem prostej AC.

Musimy tu zauważyć, że z tej hipotezy wynika, iż rozwój ekonomiczny jest równoważny wzrostowi ubóstwa (mała skośność w kierunku (0, 0)) dla krajów rozwijających się.

Wiadomo, że współczynnik Giniego i krzywa Lorenza są miarami względnymi (tzn. nieczułymi na przekształcenia jednorodne dodatnie). Zatem porównywanie za ich pomocą poziomu dobrobytu różnych populacji może doprowadzić do mylnych wniosków. Czy można poprawić te miary, aby móc nimi mierzyć dobrobyt populacji (lub porównywać dobrobyty różnych populacji).

Załóżmy, że mamy 2 krzywe Lorenza dla dwóch różnych populacji A i B. Będziemy mówić, że rozkład populacji A dominuje nad rozkładem populacji B w sensie Lorenza $L_{\mathrm{A}}(x) \geq L_{\mathrm{B}}(x) \Leftrightarrow$ krzywa Lorenza dla populacji A jest nad krzywą Lorenza dla populacji B (jeżeli się przecinają, to są nieporównywalne).

Jeżeli $U(x)$ jest użytecznością dochodu x, a $f(x)$ jest gęstością rozkładu dochodów, to średnią użyteczność oblicza się ze wzoru:

$$SW = \int_0^{\infty} U(x) f(x) dx \tag{20}$$

i można ją nazwać dobrobytem społecznym.

Twierdzenie Atkinsona (1970). Niech $F(x)$ i $G(x)$ będą dystrybuantami dwóch rozkładów dochodów o takich samych dochodach przeciętnych $\mu_F = \mu_G$. Wtedy

$$L_F(p) \geq L_G(p) \Leftrightarrow \int_0^{\infty} U(x) f(x) dx \geq \int_0^{\infty} U(x) g(x) dx \tag{21}$$

dla każdej $U(x)$ takiej, że $U(x)$ rośnie wklęśle ($U'(x) > 0$ i $U''(x) < 0$).

Czyli dobrobyt populacji A (o rozkładzie dochodów $F(x)$) jest nie mniejszy niż dobrobyt populacji B (przy takich samych dochodach przeciętnych) wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład populacji A dominuje w sensie Lorenza nad rozkładem populacji B.

Twierdzenie Atkinsona uogólnił Shorrocks (1983) wprowadzając „uogólnioną krzywą Lorenza" $GL(x)$ (por. S. Kot (1995):

$$GL(x) = \mu \cdot L(x), \tag{22}$$

gdzie $L(x)$ jest krzywą Lorenza, μ jest dochodem przeciętnym.

Twierdzenie Shorrocksa. Niech $F(x)$ i $G(x)$ będą dystrybuantami dwóch rozkładów dochodów ($f(x)$ i $g(x)$ odpowiednio ich gęstości). Wówczas

$$GL_F(p) \geq GL_G(p) \Leftrightarrow \int_0^\infty U(x)f(x)dx \geq \int_0^\infty U(x)g(x)dx \tag{23}$$

dla wszystich $U(x)$ takich, że $U'(x) > 0$ i $U''(x) < 0$, oraz dla każdego $p \in [0,\ 1]$.

Zauważmy, że aby otrzymać uogólnioną krzywą Lorenza mnożymy krzywą Lorenza przez średni dochód μ. Zatem wykres jej będzie wewnątrz prostokąta $[0,\ 1] \times [0,\ \mu]$.

Kontynuacją tego podejścia jest praca Fostera i Shorrocksa (1988). W tej pracy rozkłady dochodów są reprezentowane przez dystrybuanty ze zbioru:

$$\mathscr{F} = \{F\colon \Re_+ \to [0,\ 1]\colon F \text{ niemalejąca i prawostronnie ciągła; } F(0) = 0 \text{ i } F(s_F) = 1 \text{ dla pewnego } s_F < \infty\},$$

$$\mu_F = \int_0^\infty s dF(s) \text{ i } F^{-1}(p) = \inf\{s \geq 0\colon F(s) \geq p\},\ p \in [0,\ 1].$$

Indeks ubóstwa jest funkcją $P\colon \mathscr{F} \times \Re_+ \to \Re$, której wartości $P(F; z)$ są stowarzyszone z dystrybuantą F przy ustalonej linii ubóstwa z.

Przykłady:

1. $P_1(F;\ z) = F(z)$ – jest to procent ubogich.
2. Luka dochodów ubogich

$$P_2(F;\ z) = \frac{1}{z}\int_0^{F(z)} \left[z - F^{-1}(p)\right]dp. \tag{24}$$

3. Indeks typu Fostera:

$$P_3(F;\ z) = \frac{1}{z^2}\int_0^{F(z)} \left[z - F^{-1}(p)\right]^2 dp. \tag{25}$$

4. Uogólnienie indeksu P_3

$$P_\alpha(F;\ z) = \frac{1}{z^{\alpha-1}}\int_0^{F(z)} \left[z - F^{-1}(p)\right]^{\alpha-1} dp,\ \alpha \geq 1, \tag{26}$$

który zawiera P_1, P_2 i P_3.

Na zbiorze $\mathscr{F}$ określa się relację porządku, którą określa się symbolem $P(z)$, gdzie z jest ustalone, i $z \in Z$. „Z" oznacza pewien ustalony przedział możliwych progów ubóstwa. Relacja ta zdefiniowna jest następująco (por. J. Foster, A. Shorroks (1988)):

$$F\,\mathbf{P}(z)\,G \Leftrightarrow P(F;z) \le P(G;z),\ \forall z \in Z \qquad (27)$$
$$\text{i } P(F;z) < P(G;z) \text{ dla pewnego } z \in Z.$$

Zapis $F\,\mathbf{P}(z)\,G$ oznacza, że populacja z rozkładem dochodów F ma mniejsze ubóstwo niż populacja z rozkładem dochodów G ze względu na indeks ubóstwa P i zbiór linii ubóstwa Z.

Dla danego $F \in \mathscr{F}$ niech $F_1 = F$ oraz F_α będzie zdefiniowane rekurencyjnie dla $\alpha \ge 2$

$$F_\alpha(s) = \int_0^s F_{\alpha-1}(t)dt$$
$$\text{i } F_1(s) = F(s). \qquad (28)$$

Wówczas możemy zdefiniować relację dominacji stochastycznej $\mathbf{D}_\alpha$ stopnia α dla $\alpha \in N$ następująco:

$$F\,\mathbf{D}_\alpha\,G \Leftrightarrow F_\alpha(s) \le G_\alpha(s) \text{ dla wszystkich } s > 0$$
$$\text{i } F_\alpha(s) < G_\alpha(s) \text{ dla pewnego } s > 0. \qquad (29)$$

Zauważmy, że

$$z^{\alpha-1}\mathbf{P}_\alpha(F;z) = \int_0^z (z-y)^{\alpha-1}dF(y). \qquad (30)$$

Całkując przez części prawą stronę otrzymamy:

$$\int_0^z (z-y)^{\alpha-1}dF(y) = (\alpha-1)!\,F_\alpha(z), \qquad (31)$$

skąd mamy

Wniosek 4.1. Dla dowolnego $\alpha \in N$

$$F\,\mathbf{P}_\alpha\,G \Leftrightarrow F\,\mathbf{D}_\alpha\,G. \qquad (32)$$

Zauważmy też, że jeśli $\alpha \le \beta$, to $F\,\mathbf{P}_\alpha\,G \Rightarrow F\,\mathbf{P}_\beta\,G$. Zatem jeśli dystrybuanta dochodów F ma mniejsze ubóstwo niż G dla procentu ubogich P_1, to musi też mieć mniejsze ubóstwo dla luki dochodów P_2 i dla $\mathbf{P}_\alpha$.

Odpowiedniość pomiędzy porządkami ubóstwa $\mathbf{P}_\alpha$ i dominacjami stochastycznymi $\mathbf{D}_\alpha$ daje możliwość otrzymania interesującej interpretacji $\mathbf{P}_\alpha$ w terminach funkcji dobrobytu społecznego. Załóżmy, że $\mathscr{U}$ jest klasą funkcji dobrobytu postaci $U(F) = \int u(x)dF(x)$, gdzie $u\colon \Re_+ \to \Re$ jest funkcją ciągłą. Niech $\mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}$ będzie klasą tych funkcji, dla których $u'(x) > 0$ i $\mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}_1$ klasą tych funkcji, dla których $u'' < 0$ i $\mathscr{U}_3 \subset \mathscr{U}_2$ takich funkcji, że $u''' > 0$.

Dla $\alpha = 1,\ 2,\ 3$ $\mathscr{U}_\alpha$ będą częściowymi porządkami zdefiniowanymi następująco:

$$F\,\mathscr{U}_\alpha\,G \Leftrightarrow U(F) > U(G) \text{ dla wszystkich } U \in \mathscr{U}_\alpha. \qquad (33)$$

Wykorzystując znany wynik z dominacji stochastycznych (Brawa 1975) otrzymamy
Wniosek 4.2. Dla $\alpha = 1,\ 2,\ 3$ $F\ \mathbf{P}_\alpha\ G \Leftrightarrow F\ \mathcal{U}_\alpha\ G$.

Zatem stwierdzenie, że F ma mniejsze ubóstwo niż G dla $\mathbf{P}_\alpha$ jest równoważne stwierdzeniu, że F ma lepszy dobrobyt niż G dla wszystkich funkcji dobrobytu z $\mathcal{U}_\alpha$.

Uogólniona krzywa Lorenza dla populacji o rozkładzie F jest definiowana następująco:

$$GL(F;p) = \int_0^p F^{-1})q)dq, \text{ dla } p \in [0,\ 1] \tag{34}$$

i stowarzyszony z nią częściowy porządek GL jest zdefiniowany następująco:

$$F\ GL\ P \Leftrightarrow GL(F;p) \geq GL(G;p),\ \forall p \in [0,\ 1]$$

i (35)

$$GL(F;p) > GL(G;p) \text{ dla pewnego } p \in [0,\ 1].$$

5. ANALIZA UBÓSTWA W POLSCE

5.1. Analiza wartości indeksów ubóstwa

Wykresy poniżej przedstawiają sytuację ubóstwa w Polsce w latach 1992–1997. Z1 jest linią ubóstwa względnego (poziom standardu życia w społeczeństwie). Z3 jest linią ubóstwa absolutnego (minimum socjalne). Do szczegółowej analizy zostały wybrane trzy mierniki ubóstwa: frakcja ubogich, która mierzy rozległość zjawiska; indeks Blackorby'ego-Donaldsona, który mierzy lukę „reprezentatywnego" dochodu ubogich i indeks ciągły, który jest „uczulony" zarówno na głębokość zjawiska, jak i na nierówność ekonomiczną wśród ubogich.

Pierwsze dwa wykresy (rys. 7.1 a i b) przedstawiają frakcję ubogich, która stanowi o rozległości obszaru ubóstwa w Polsce w tym okresie. Łatwo zauważyć, że w marcu 1994 r. zjawiskiem ubóstwa była dotknięta największa liczba osób – nie tylko ubóstwem absolutnym, ale także ubóstwem relatywnym. Od września 1995 r. sytuacja w obszarze ubóstwa jest ustabilizowana.

Następne dwa wykresy (rys. 7.2 a i b) przybliżają zjawisko ubóstwa za pomocą indeksu ciągłego. Na pierwszym wykresie można zaobserwować ogólną tendencję wzrostową (po lekkiej korekcie w wrześniu 1994 r.). Świadczy to o tym, że pogłębia się ubożenie warstwy średniej, co nie jest dobrym wskaźnikiem dla naszej gospodarki. Z hipotezy Kuznetsa taki stan prognozuje słaby rozwój gospodarki, a co za tym idzie pogłębianie się bezrobocia i ubóstwa. „Pozytywniejszy" obraz daje nam wykres drugi, ponieważ od września 1995 r. pokazuje stały poziom dla ubóstwa absolutnego (na wysokości 5%).

Następne sześć wykresów (rys. 7.3 a, b, c, d, e, f) przedstawiają wartości indeksu Blackorby'ego-Donaldsona. Współczynnik r jest parametrem opisującym społeczną awersję do ubóstwa. Warto zauważyć, że dla $r = 1/2$ przedziały monotoniczności wykresu pokrywają się z przedziałami monotoniczności wykresu indeksu ciągłego, a dla $r = 2/3$ przedziały monotoniczności wykresu pokrywają się z przedziałami monotoniczności wykresu frakcji ubogich. Można stąd wnioskować, że społeczeństwo nie troszczy się o ludzi ubogich, tylko boi się wielkości zjawiska, które, jak uczy historia, może doprowadzić do następnej krwawej rewolucji.

W tabelach 7.1 do 7.9 można znaleźć wartości niektórych indeksów ubóstwa i nierówności ekonomicznych dla wybranych działów gospodarki i wybranych województw. Przypatrzmy się zjawisku ubóstwa w województwach (tabele 7.6, 7.7 i 7.9 dla roku 1995 i 1997 odpowiednio).

Dla Warszawy obszar ubóstwa relatywnego i absolutnego zmalał. Zmalała też luka dochodu „reprezentacyjnego" ubogich, ale niestety wzrósł indeks ciągły, czyli wzrosła nierówność ekonomiczna wśród ubogich.

Dla Ciechanowa zmalał obszar ubóstwa relatywnego, ale niestety powiększył się obszar ubóstwa absolutnego. Zmalała luka dochodu reprezentatywnego i zmalała też nierówność wśród ubogich, ale zwiększyła się nierówność wśród warstwy średniej.

Dla Legnicy wzrósł obszar ubóstwa relatywnego i absolutnego. Wzrosła też luka dochodu reprezentacyjnego ubogich i wzrosła znacząco nierówność wśród warstwy średniej, przy czym zmalała minimalnie nierówność wśród ubogich.

Dla Katowic wzrósł obszar ubóstwa relatywnego i absolutnego. Wzrosła też luka dochodu reprezentacyjnego ubogich i warstwy średniej. Nierówność wśród warstwy średniej powiększyła się, ale minimalnie zmniejszyła się wśród ubogich.

Dla Krakowa zmalał obszar ubóstwa relatywnego, ale powiększył się obszar ubóstwa absolutnego. Powiększyła się luka dochodu najbiedniejszych oraz powiększyła się nierówność wśród warstwy średniej i zmalała wśród ubogich.

Dla Nowego Sącza obszar ubóstwa nie zmienił się – mimo swej wielkości. Zmalała luka dochodu reprezentacyjnego warstwy średniej oraz wzrosła nierówność w warstwie średniej.

Dla Opola obszar ubóstwa zmalał. Wzrosła luka dochodu reprezentacyjnego warstwy średniej i ubogich. Wzrosła też nierówność wśród warstwy średniej.

Dla Przemyśla wzrósł obszar ubóstwa relatywnego i absolutnego. Wzrosła luka dochodu reprezentacyjnego i wzrosła też nierówność wśród warstwy średniej.

Dla Wałbrzycha obszar ubóstwa absolutnego i relatywnego powiększył się. Nieznacznie powiększyła się luka dochodu reprezentacyjnego i powiększyła się nierówność w warstwie średniej.

Dla Wrocławia obszar ubóstwa absolutnego i relatywnego powiększył się. Nieznacznie wzrosła też luka dochodu reprezentacyjnego ubogich i warstwy średniej. Wzrosła także nierówność ekonomiczna wśród warstwy średniej i nieznacznie zmalała wśród ubogich.

We wrześniu 1997 r. w wybranych województwach kolejność pod względem obszaru ubóstwa (od najmniejszego) była następująca:

Dla ubóstwa relatywnego: Warszawa, Katowice, Kraków, Legnica, Opole, Wrocław, Wałbrzych, Przemyśl, Ciechanów, Nowy Sącz.

Dla ubóstwa absolutnego: Warszawa, Katowice, Opole, Legnica, Kraków–Wałbrzych, Wrocław, Nowy Sącz, Przemyśl, Ciechanów.

We wrześniu 1995 r. kolejność była następująca:

Dla ubóstwa relatywnego: Katowice, Warszawa, Legnica, Kraków, Wrocław, Opole, Wałbrzych, Przemyśl, Nowy Sącz, Ciechanów.

Dla ubóstwa absolutnego: Katowice, Kraków–Opole, Warszawa, Legnica, Wrocław, Wałbrzych, Przemyśl, Ciechanów, Nowy Sącz.

Z tabel 7.5-1 i 7.6-1 porównamy zjawisko ubóstwa w wybranych działach gospodarki we wrześniu 1994 i wrześniu 1995 r.

Dla górnictwa obszar relatywnego i absolutnego ubóstwa pomniejszył się. Luka dochodu reprezentacyjnego też się pomniejszyła. Nierówność wśród warstwy średniej powiększyła się, a wśród ubogich pomniejszyła się.

Dla edukacji obszar ubóstwa absolutnego i relatywnego pomniejszył się. Luka dochodu reprezentacyjnego też zmalała. Nierówność ekonomiczna wśród warstwy średniej wzrosła, a wśród ubogich zmalała.

Dla ochrony zdrowia obszar ubóstwa absolutnego i relatywnego, podobnie jak dla edukacji, pomniejszył się. Luka dochodu reprezentacyjnego też zmalała.

Dla rolnictwa obszar ubóstwa absolutnego i relatywnego pomniejszył się. Luka dochodu reprezentacyjnego też się pomniejszyła. Nierówność wśród warstwy średniej powiększyła się, a wśród ubogich pomniejszyła się.

We wrześniu 1994 r. kolejność była następująca (od najmniejszego):

Dla ubóstwa absolutnego: górnictwo, transport, edukacja, ochrona zdrowia, administracja, działalność produkcyjna, budownictwo, rolnictwo, handel i hotele.

Dla ubóstwa relatywnego: górnictwo, administracja, transport, działalność produkcyjna, budownictwo, edukacja, handel, rolnictwo, hotele, ochrona zdrowia.

5.2. Analiza ubóstwa i nierówności ekonomicznych

Rysunki 7.4 do 7.35 przedstawiają krzywe Lorenza i uogólnione krzywe Lorenza dla Polski oraz wybranych województw i działów gospodarki narodowej naszego kraju.

Na rys. 7.4 można zauważyć tendencje do zmniejszania ubóstwa w Polsce (skośność w kierunku (0, 0) maleje) i zmniejszanie sfery najbogatszych (skośność w kierunku (1, 1) rośnie). Druga tendencja według hipotezy Kuznetsa prognozuje zastój gospodarczy, a co za tym idzie zubożenie społeczeństwa.

Na rysunkach 7.5 a i b można zauważyć powiększanie się nierówności ekonomicznych w sektorze prywatnym i zmniejszanie nierówności w sektorze publicznym. Z następnych rysunków (c, d, e, f) wynika zmniejszanie się nierówności ekonomicznych w górnictwie i powiększanie nierówności w działalności produkcyjnej. W handlu i budownictwie sytuacja wynagrodzeń pod względem nierówności wygląda na ustabilizowaną. W następnej serii wykresów (g–l) można zauważyć powiększanie się nierówności ekonomicznych w hotelarstwie i rolnictwie (spowodowanych prywatyzacją). Z wykresów 7.6 widać, że w sektorze publicznym pod względem nierówności ekonomicznych jest tendencja stała z wyjątkiem górnictwa, gdzie jest tendencja malejąca. W sektorze publicznym dla administracji, edukacji i ochrony zdrowia pod względem nierówności ekonomicznych sytuacja jest stała, a w rolnictwie powiększa się. Rys. 7.7 opisuje sytuację w sektorze prywatnym działów gospodarki. Powiększenie nierówności występuje w hotelarstwie, edukacji i w ochronie zdrowia. Rys. 7.8 przedstawia sytuację dobrobytową Polski. Od 1992 r. do marca 1994 r. dobrobyt w Polsce malał, a następnie powoli wzrastał. Rys. 7.9 przedstawia sytuację dobrobytu dla działów gospodarki ogółem (sektor publiczny i państwowy) w czasie (marzec 1994, wrzesień 1994 i wrzesień 1995), W budownictwie, hotelarstwie, transporcie, edukacji, ochronie zdrowia i w rolnictwie był wzrost, a w pozostałych działach (górnictwo, produkcja, handel, administracja) sytuacja była stała. Z następnego rysunku możemy dowiedzieć się o sytuacji w sektorze publicznym. Wzrost dobrobytu był w handlu i w służbie zdrowia, mały spadek w górnictwie i stała sytuacja w edukacji (przy wzroście w edukacji prywatnej). Sektor prywatny jest opisany na rys. 7.11. Można zaobserwować wzrost dobrobytu w budownictwie, administracji i w edukacji. Spadek w handlu, hotelarstwie i w ochronie zdrowia. Rys. 7.13 przedstawia porównania pod względem nierówności ekonomicznych dla różnych gałęzi gospodarki ogółem we wrześniu 1995 r., a rys. 7.14 w sektorze publicznym i w sektorze prywatnym rys. 7.15. Z rys. 7.16 i 7.21 możemy porównać nierówności ekonomiczne dla różnych województw we wrześniu 1995 r. Rys. 7.17 pokazuje sytuację dobrobytową we wrześniu 1995 r. w Polsce. Dobrobyt sektora publicznego jest większy niż dobrobyt sektora prywatnego. Rys. 7.18 daje możliwość porównania sytuacji dobrobytu dla różnych gałęzi gospodarki ogółem, rys. 7.19 w sektorze publicznym i rys. 7.20 w sektorze prywatnym. Pozostałe wykresy (rys. 7.22 do 7.37) pozwalają na porównania działów gospodarki Polski w sektorze publicznym i prywatnym we wrześniu i w marcu 1994 r.

5.3. Ubóstwo w Polsce powiązane z polityką podatkową

Załóżmy, że wektor dochodów $\mathbf{x} = (x_1 \ \ldots \ x_n)$ jest realizacją zmiennej losowej X o rozkładzie $F(X)$, i jest uporządkowany niemalejąco; z jest zadaną linią ubóstwa. Wtedy $F(z)$ jest procentem ubogich (H).

Jeśli μ jest średnim dochodem całej populacji i μ^* jest średnim dochodem ubogich, to indeks ubóstwa może być postaci:

$$P = F(z)\frac{z - \mu^*}{\mu}, \tag{1}$$

gdzie P jest interpretowane jako procent całego dochodu jaki musi być transferowany do ubogich, aby każdy z nich miał dochód równy z.

Następnie jeżeli podzielimy populację na k rozdzielnych podgrup, to oznaczając
- μ_i jako średni dochód i-tej podgrupy,
- f_i jako proporcję i-tej podgrupy do całej populacji,
- $F_i(z)$ jako proporcję ubogich w i-tej podgrupie,
- μ_i^* jako średni dochód ubogich w i-tej podgrupie,

mamy

$$F(z)=\sum_{i=1}^{k}F_i(z)\cdot f_i \tag{2}$$

i

$$\mu^*=\frac{1}{F(z)}\sum_{i=1}^{k}F_i(z)\mu_i^* f_i . \tag{3}$$

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymamy

$$P=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{k}\mu_i f_i P_i , \tag{4}$$

gdzie $P_i=F_i(z)\frac{z-\mu_i^*}{\mu_i}$ jest indeksem ubóstwa i-tej podgrupy.

Ubóstwo jest maksymalne, jeżeli wszyscy ubodzy mają zerowe dochody, w tym przypadku $\mu^*=0$. Zatem górna granica dla indeksu ubóstwa powinna wynosić $F(z)\cdot z/\mu$. Jeśli G^* jest indeksem Ginii nierówności wśród ubogich, to indeks ubóstwa powinien spełniać następujące warunki:

$$\begin{aligned}
&1)\ G^*=0,\ \widetilde{P}=\frac{F(z)\left(z-\mu^*\right)}{\mu},\\
&2)\ \widetilde{P}\le\frac{F(z)\cdot z}{\mu}\\
&3)\ \frac{\partial\widetilde{P}}{\partial G^*}>0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Dowolny indeks ubóstwa spełniający powyższe warunki powinien też spełniać aksjomaty monotoniczności i transferu. Klasa indeksów ubóstwa spełniająca te warunki może być zapisana w postaci:

$$P_g=\frac{F(z)}{\mu}\left[z-\mu^* g\left(G^*\right)\right], \tag{6}$$

gdzie $g\left(G^*\right)$ jest monotoniczną funkcją G^*, taką że

$$0\le g\left(G^*\right)\le 1,. \tag{7}$$

$$g\left(G^*\right)=1 \text{ jeśli } G^*=0, \tag{8}$$

$$g'\left(G^*\right) < 0. \tag{9}$$

Najprostszym przykładem funkcji g spełniającym te trzy warunki jest

$$g\left(G^*\right) = 1 - G^*,$$

którą podstawiając do (6) mamy

$$P_1 = \frac{F(z)}{\mu}\left[z - \mu^*\left(1 - G^*\right)\right]. \tag{10}$$

Współczynnik elastyczności indeksu P_1 ze względu na G^* jest postaci:

$$\eta_1 = \frac{G^*}{P_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial G^*} = \frac{\mu^* G^*}{\left(z - \mu^*\right) + \mu^* G^*},$$

który jest oczywiście mniejszy od jedności. Zatem jeśli indeks Giniego wśród ubogich zredukujemy o 1%, to indeks ubóstwa zredukuje się o mniej niż 1%. Elastyczność daje nam informacje, jaki wpływ na indeks ubóstwa ma indeks nierówności wśród ubogich.

Alternatywny indeks ubóstwa otrzymamy biorąc

$$g\left(G^*\right) = \frac{1}{1 + G^*},$$

i wtedy

$$P_2 = \frac{F(z)}{\mu}\left[z - \frac{\mu^*}{1 + G^*}\right],$$

$$\eta_2 = \frac{G^*}{P_2}\frac{\partial P_2}{\partial G^*} = \frac{\mu^* G^*}{\left(1 + G^*\right)\left(z - \mu^* + zG^*\right)},$$

który jest także mniejszy od 1.

Porównując elastyczności zauważamy, że $\eta_2 < \eta_1$, co pokazuje, że indeks ubóstwa P_1 jest bardziej czuły na zmiany w nierówności wśród ubogich niż indeks P_2.

Funkcja poziomu dobrobytu społecznego dla ubogich może być zapisana w postaci

$$W = F(z)\mu^*\left(1 - G^*\right).$$

Gdy P jest procentem dochodu transferowanego od bogatych do ubogich (tak by zlikwidować ubóstwo), to dochód wszystkich ubogich wzrasta do z, i zatem funkcja dobrobytu ubogich po transferze ma postać

$$W^* = F(z)\cdot z.$$

Maksymalny dobrobyt całej populacji jest równy μ. Zatem indeks ubóstwa P_1 jest równy zyskowi w dobrobycie ubogich (uzyskanego przez transfer od bogatych) w stosunku do maksymalnego dobrobytu całej populacji.

Gdy funkcja dobrobytu będzie postaci

$$W = \frac{F(z)\mu^*}{1+G^*},$$

wtedy otrzymamy taką samą interpretację „dobrobytową" dla indeksu P_2, jak dla indeksu P_1.

Załóżmy, że pewna rodzina ma dochód na głowę powyżej linii ubóstwa z, i jest ona opodatkowana na ustalony procent β. Po potrąceniu podatku dochód jej spadł poniżej linii ubóstwa. Rodzina ta otrzymała zasiłek o ustalonej stopie β procent dochodu poniżej z. Zatem dochód rozporządzalny rodziny, o dochodzie przed opodatkowaniem x jest równy

$$d(x) = \beta z + (1-\beta)x \tag{11}$$

ze średnim rozporządzalnym dochodem

$$\mu_d = \beta z + (1-\beta)\mu. \tag{12}$$

Zauważmy, że

$$d'(x) > 0 \text{ dla } 0 < \beta < 1.$$

Średni rozporządzalny dochód rodzin poniżej linii ubóstwa jest równy

$$\mu_d^* = \frac{1}{F(z)}\int_0^z d(x)f(x)dx,$$

który z (11) można zapisać w postaci

$$\mu_d^* = \mu^* + \beta\left(z - \mu^*\right). \tag{13}$$

Ponieważ $z > \mu^*$, również to implikuje, że po opodatkowaniu średni dochód rodzin ubogich wzrośnie (przy założeniu, że podatek przeznaczony dla ubogich dotrze do ubogich). Teraz pokażemy, że krzywa Lorenza dla całej populacji po opodatkowaniu „podniesie się do góry", czyli zbliży się do rozkładu równomiernego (czego należało oczekiwać).

Jeśli przez $F_1[d(x)]$ oznaczymy procent rozporządzalnych dochodów rodzin mających przed opodatkowaniem dochód mniejszy bądź równy x, to

$$F_1[d(x)] = F_1(x) + \frac{\beta \cdot z}{\mu_d}[F(x) - F_1(x)]. \tag{14}$$

Ponieważ krzywa Lorenza jest wypukła, $F(x) > F_1(x)$, to rozkład dochodów rozporządzalnych $d(x)$, jest większy w sensie Lorenza od rozkładu dochodów x. Współczynnik Giniego rozkładu dochodów rozporządzalnych wśród ubogich jest dany przez

$$\widetilde{G}^* = 1 - \frac{2\int_0^z F_1[d(x)]f(x)dx}{F(z)F_1[d(z)]}.$$

Ponieważ $F_1[d(z)] = \frac{F(z)\mu_d^*}{\mu_d}$, to

$$\widetilde{G}^* = \frac{(1-\beta)\mu^* G^*}{\mu_d^*}. \tag{15}$$

Podstawiając (12), (13) i (15) do (10) z μ, μ^* i G^* zastąpionych przez μ_d, μ_d^* i $\widetilde{G}^*$ odpowiednio, mamy indeks ubóstwa po opodatkowaniu

$$\widetilde{P}_1 = \frac{(1-\beta)}{\mu_d} F(z)\left[z - \mu^*\left(1 - G^*\right)\right].$$

Zatem procentowa zmiana w indeksie ubóstwa wynosi

$$\frac{\widetilde{P}_1 - P_1}{P_1} = -\frac{\beta z}{\beta z + (1-\beta)\mu}.$$

To równanie jest funkcją dwóch parametrów $\frac{z}{\mu}$ i β.

W powyższym planie stopa podatku była równa stopie zasiłku, co nie gwarantowało, że suma dochodów po opodatkowaniu jest równa sumie dochodów przed opodatkowaniem. Jest to efekt nieczystej redystrybucji. Aby całkowity dochód był stały, stopa podatku musi być inna od stopy zasiłku. Załóżmy, że stopa zasiłku jest λ, a β jest stopą podatku, wtedy rozporządzalny dochód rodziny o dochodzie przed opodatkowaniem x jest równy

$$d(x) = x + \lambda(z - x), \text{ gdy } x < z,$$

$$d(x) = x - \beta(x - z), \text{ gdy } x > z,$$

gdzie β i λ spełniają równanie

$$\frac{\beta}{\lambda} = \frac{P}{\left(1 - \frac{z}{\mu}\right) + P}, \tag{16}$$

P jak w (1). Zauważmy, że ta relacja była opisana przy założeniu, że średni dochód całej populacji przed opodatkowaniem jest równy średniemu dochodowi populacji po opodatkowaniu (tzn. że $\mu = \mu_d$). Jeśli $\lambda = 1$, to ubóstwo zostałoby zupełnie wyeliminowane. Równanie (16) pokazuje, że jeśli $\lambda = 1$, β będzie mniejsze od jedności tylko wtedy, gdy $z < \mu$. Zatem koniecznym warunkiem dla zlikwidowania ubóstwa poprzez międzyosobową redystrybucję jest to, aby poziom ubóstwa był mniejszy niż średni dochód populacji. Ponadto mamy relację pomiędzy indeksami ubóstwa przed i po opodatkowaniu:

$$\widetilde{P}_1 = (1-\lambda)P_1. \tag{17}$$

Zatem

$$\lambda = \frac{P_1 - \widetilde{P}_1}{P_1}.$$

Czyli 100λ jest równa procentowej zmianie ubóstwa (określonej indeksem P_1) spowodowanej planem transferów dochodów.

Dla Polski w roku 1997, P=0,046, μ = 1046 zł, i z=485 zł (linia ubóstwa absolutnego). Z (16) stosunek stopy podatkowej do stopy zasiłku jest równy 0,046/[1 – (485/1046) + 0,046] = = 0,094, co oznacza, że 9,4% stopy podatkowej wystarczy do eliminacji ubóstwa absolutnego w Polsce. Żeby zredukować indeks ubóstwa tylko o 50%, korzystając z równania (17), w którym λ=0.5, otrzymamy β=0,047. To oznacza, że 4,7% stopy podatkowej powinno zredukować ubóstwo absolutne w Polsce o 50%.

6. ZAKOŃCZENIE

Główne zagadnienie ninijszej pracy dotyczy analizy ubóstwa i próby pomiaru tego zjawiska w Polsce. Koniecznym warunkiem pomiaru na zadanym zbiorze obiektów jest znajomość relacji porządku w tym zbiorze. W wielu przypadkach trudno jest porównać osoby lub rodziny pod względem ubóstwa czy dobrobytu, zatem możliwość pomiaru związana jest z pewną arbitralnością ze strony mierzącego. Dla ubóstwa absolutnego (osób poniżej absolutnej linii ubóstwa) nie ma różnicy pomiędzy dochodem a wynagrodzeniem, więc wybranie wynagrodzenia jako czynnika preferencji wydaje się być dobrym rozwiązaniem. Autor jest świadom, że wybór ten jest daleki od doskonałości, ale jest to rozwiązanie praktyczne z powodu dostępu do informacji.

Punktem wyjścia dla analizy jest rozkład dochodów badanej populacji. Wszystkie wartości są zaczerpnięte z oficjalnych danych GUS-u.

Z przeprowadzonych obliczeń można zaobserwować ścisłą zależność pomiędzy wielkościami mierników ubóstwa a uogólnionymi krzywymi Lorenza. Okazuje się, że „porządek dobrobytowy" indukowany na zbiorze populacji za pomocą uogólnionych krzywych Lorenza jest „odwrotny" do porządku indukowanego za pomocą indeksów ubóstwa. Porównując rysunki 7.1, 7.2, 7.3, i 7.8 można zauważyć tę zgodność dla ubostwa relatywnego dla wszystkich badanych indeksów. Niezgodność występuje tylko w przypadku ubóstwa absolutnego we wrześniu 1993 r. Z danych GUS-u wynika, że wtedy nie było w Polsce ubóstwa absolutnego. Autor podejrzewa, że w tym okresie dane GUS-u zostały obcięte.

Z hipotezy Kuznetsa można próbować prognozować wzrost gospodarczy (a co za tym idzie możliwośc zmniejszania ubóstwa) i wzrost ubóstwa. Hipoteza Kuznetsa nie sprawdza się jednak dla sektorow publicznych państwa, ponieważ wysokości wynagrodzeń nie zależą od wypracowanego dochodu. Poza tym dochód ten jest często niemierzalny (na przykład w edukacji i służbie zdrowia). Dlatego zastosowano ją dla Polski ogólem. Analizując rysunek 7.4 ilustrujący krzywe Lorenza dla Polski w różnych latach można zauważyć, że funkcja nachylenia krzywej Lorenza w kierunku (1, 1) jest malejąca. Hipoteza ta dowodzi, że wzrost polskiej gospodarki jest hamowany (przy wzroście ogólnego dobrobytu), co daje małe szanse na poprawę sytuacji ubogich. Niestety funkcja nachylenia krzywej Lorenza w kierunku (0, 0) jest funkcją rosnącą, co świadczy o relatywnym pogłębianiu się ubóstwa absolutnego. Uzyskane wyniki są zgodne z wykresami wielkości ubóstwa absolutnego dla indeksu ciągłego, dla indeksu Blackorby'ego-Donaldsona (dla $r = 0{,}5$ i $r = 0{,}33$), oraz dla frakcji ubogich absolutnie.

Wnioski z tej pracy są niestety smutne. Różnica pomiędzy warstwą bogatych i biednych relatywnie się powiększa, a potencjał ubogich naszego kraju jest wciąż niezauważany przez Państwo.Instytucje społeczne mają za małe możliwości na konkretną pomoc w sferze ubóstwa. Warstwa bogata na której leży odpowiedzialność za rozwój gospodarczy i tym samym za powstawanie nowych miejsc pracy niestety bardziej zainteresowana jest konsumpcją niż produkcją. Rozważając przykrą rzeczywistość naszego kraju warto przypomnieć zdanie Joshuy Hechela „niektórzy są winni, wszyscy są odpowiedzialni”.

6. ANEKS

W analizie podane są wartości indeksów ubóstwa, indeksów nierówności, wykresy krzywych Lorenza oraz wykresy uogólnionych krzywych Lorenza. W celu łatwiejszego czytania przedstawonych tabel, niżej wymienia się wszystkie zawarte w tych tabelach indeksy ze wskazaniem stron pracy, gdzie są omówione.

Użyte są następujące symbole:

– Z1 – linia ubóstwa względnego (s. 53–54),

– Z2 – linia ubóstwa subiektywnego (s. 54–58),

– Z3 – linia ubóstwa absolutnego (minimum socjalne) (s. 62–64),

– Y_pśr – średni dochód ubogich,

– stosunek luk dochodów $I = \sum_{i=1}^{n}(z - x_i)/z$ (s. 72–73),

– P_{FGT} – indeks Fostera, Greera i Thorbecke

$$P_{FGT} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{g_i}{z}\right)^{\alpha} \text{ (wzór (51), s. 87),}$$

gdzie $g_i = z - x_i$, α – parametr zależny od awersji populacji do ubóstwa,

– P_s – indeks Sena

$$P_s = H[I + (1 - I)G] \text{ (wzór (3), s. 73),}$$

gdzie H – procent ubogich, G – współczynnik Giniego,

– P_{BD} – indeks Blackorby'ego i Donaldsona

$$P_{BD} = \frac{m}{n}\left(\frac{z - \xi^p}{z}\right) \text{ (wzór (32), s. 82),}$$

gdzie ξ^p jest to jednakowy dochód wszystkich ubogich, przy czym taki, że dobrobyt społeczny jest taki sam, jak przy różnych dochodach.

Ciągły indeks ubóstwa:

– $P_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{z - x_i}{x_i + z}\right)$ (wzór (85), s. 107).

Indeks Kai-Yuen Tsuna (wzór (11), s. 114)

– $I_A = \frac{1}{c}\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp[c(\mu - x_i)]\right]$, $c > 0$,

gdzie μ – średni dochód populacji,

c – parametr zależny od awersji populacji do nierówności.

Indeks Pietra

– $S = \sup\limits_{p \in [0,1]} \left(p - L(p)\right)$ (wzór (2), s. 112).

Indeks Atkinsona (wzór (8), s. 113)

$$- A_e = \begin{cases} 1 - \dfrac{\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{1-e}\right]^{1/(1-e)}}{\mu}, & e > 0,\ e \neq 1, \\ 1 - \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i)^{\frac{1}{n}}}{\mu}, & e = 1, \end{cases}$$

gdzie e – parametr zależny od stopnia awersji do nierówności.

Entropia

– $G = \dfrac{1}{2m^2\mu}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\left|x_i - x_j\right|$ (wzór (11), s. 74 lub (12), s. 75),

gdzie μ – średni dochód ubogich.

Ciągły indeks nierówności

– $I(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\mu - x_i}{x_i + \mu}\right)^2$ (wzór (19), s. 115)

gdzie μ – średni dochód populacji.

– Krzywa Lorenza $L(x)$ (s. 109–110).

– Uogólniona krzywa Lorenza $GL(x) = \mu L(x)$ (wzór (34), s. 120),

gdzie μ – średni dochód populacji.

Tabela 7.1

Ubóstwo w Polsce we wrześniu 1992 roku określone według indeksów ubóstwa oraz indeksów nierówności ekonomicznej

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1 270	Z2 197	Z3 152		Ogółem
Procent ubogich			Z1	44,6%
			Z2	13,0%
			Z3	3,4%
Y_pśr			Z1	200,63
			Z2	150,31
			Z3	117,65
Stosunek luk dochodów			Z1	0,2569
			Z2	0,2370
			Z3	0,2260
			α	
P_{FGT}		Z1	1,00	0,0970
		Z2	1,00	0,0227
		Z3	1,00	0,0035
		Z1	0,50	0,1954
		Z2	0,50	0,0525
		Z3	0,50	0,0106
		Z1	0,33	0,2544
		Z2	0,33	0,0709
		Z3	0,33	0,0157
P_S			Z1	0,0289
			Z2	0,0105
			Z3	0,0032
			r	
P_{BD}		Z1	0,33	0,1423
		Z2	0,33	0,0452
		Z3	0,33	0,0170
		Z1	0,50	0,1388
		Z2	0,50	0,0427
		Z3	0,50	0,0151
		Z1	0,67	0,1361
		Z2	0,67	0,0410
		Z3	0,67	0,0137
Ciągły indeks ubóstwa			Z1	0,1536
			Z2	0,0793
			Z3	0,0406
Dochody średnie				308,75
			c	
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)			0,01	0,0500
			1	5,4419
			2	6,7382
Indeks Pietra				0,1700
			e	
Indeks Atkinsona			0,50	0,0464
			1,00	0,9883
			2,00	0,1662
			∞	0,8057
Entropia				3,094439983
Indeks GIniego				0,2395
Ciągły indeks nierówności				0,9234

Tabela 7.2

Ubóstwo w Polsce we wrześniu 1993 roku określone według indeksów ubóstwa oraz indeksów nierówności ekonomicznej
(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
380	296,4	168

			Ogółem
Procent ubogich		Z1	56,7%
		Z2	28,0%
		Z3	0,0%
Y_pśr		Z1	272,36
		Z2	214,43
		Z3	-
Stosunek luk dochodów		Z1	0,2833
		Z2	0,2766
		Z3	1,0000
		α	
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1903
	Z2	1,00	0,0572
	Z3	1,00	-
	Z1	0,50	0,3071
	Z2	0,50	0,1209
	Z3	0,50	-
	Z1	0,33	0,3722
	Z2	0,33	0,1590
	Z3	0,33	-
P_S		Z1	0,0368
		Z2	0,0157
		Z3	-
		r	
P_{BD}	Z1	0,33	0,2289
	Z2	0,33	0,1354
	Z3	0,33	-
	Z1	0,50	0,2113
	Z2	0,50	0,1208
	Z3	0,50	-
	Z1	0,67	0,1992
	Z2	0,67	0,1105
	Z3	0,67	-
Ciągły indeks ubóstwa		Z1	0,2129
		Z2	0,1169
		Z3	-
Dochody średnie			398,63
		c	
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)		0,01	0,0854
		1	8,5444
		2	10,4103
Indeks Pietra			0,1806
		e	
Indeks Atkinsona		0,50	0,0553
		1,00	0,9872
		2,00	0,2147
		∞	0,7742
Entropia			3,26610446
Indeks Giniego			0,2572
Ciągły indeks nierówności			0,9224

Tabela 7.3-1

Ubóstwo w marcu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej ogółem

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
5760	3231	2719

			Ogółem	Ogółem sektor publiczny	Ogółem sektor prywatny	Ogółem: Górnictwo i kopalnictwo	Ogółem: Działalność produkcyjna	Ogółem: Handel	Ogółem: Budownictwo	Ogółem: Hotele i restauracje	Ogółem: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Ogółem: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Ogółem: Edukacja	Ogółem: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Ogółem: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich	Z1		74,1%	72,0%	77,7%	15,0%	76,1%	78,5%	79,7%	89,1%	73,5%	84,5%	82,6%	88,1%	90,9%
	Z2		24,4%	19,3%	33,2%	1,9%	24,8%	39,8%	25,8%	52,8%	9,8%	14,7%	24,6%	33,0%	41,9%
	Z3		14,9%	10,2%	22,9%	0,9%	15,1%	27,9%	16,2%	40,4%	5,0%	7,9%	15,2%	17,2%	26,3%
Y_pśr	Z1		3 499,49	3 650,69	3 265,99	4 146,17	3 506,11	3 096,94	3 470,14	2 818,21	3 940,78	3 785,27	3 633,08	3 361,18	3 151,60
	Z2		2 353,79	2 483,42	2 232,76	2 501,32	2 326,41	2 237,94	2 360,08	2 097,40	2 425,26	2 448,30	2 446,04	2 524,85	2 265,39
	Z3		2 069,30	2 200,98	1 977,62	2 169,44	2 022,19	1 998,21	2 099,38	1 881,75	2 065,50	2 145,57	2 227,14	2 272,09	1 948,29
Stosunek luk dochodów	Z1		0,3924	0,3662	0,4330	0,2802	0,3913	0,4623	0,3975	0,5107	0,3158	0,3428	0,3693	0,4165	0,4528
	Z2		0,2715	0,2314	0,3090	0,2258	0,2800	0,3074	0,2698	0,3509	0,2494	0,2422	0,2429	0,2186	0,2989
	Z3		0,2389	0,1905	0,2727	0,2021	0,2563	0,2651	0,2279	0,3079	0,2403	0,2109	0,1809	0,1644	0,2835
		α													
P_{FGT}	Z1	1,00	0,2623	0,2378	0,3036	0,0367	0,2679	0,3292	0,2867	0,4105	0,2056	0,1976	0,2755	0,3359	0,3716
	Z2	1,00	0,0461	0,0311	0,0715	0,0029	0,0479	0,0862	0,0492	0,1282	0,0165	0,0245	0,0430	0,0509	0,0842
	Z3	1,00	0,0187	0,0100	0,0331	0,0009	0,0203	0,0398	0,0198	0,0658	0,0061	0,0085	0,0145	0,0146	0,0373
	Z1	0,50	0,4258	0,3995	0,4702	0,0703	0,4354	0,4948	0,4632	0,5925	0,3746	0,3425	0,4595	0,5319	0,5668
	Z2	0,50	0,1011	0,0739	0,1474	0,0071	0,1037	0,1775	0,1076	0,2505	0,0381	0,0572	0,0987	0,1241	0,1786
	Z3	0,50	0,0488	0,0295	0,0812	0,0027	0,0513	0,0984	0,0525	0,1535	0,0161	0,0239	0,0434	0,0467	0,0916
	Z1	0,33	0,5094	0,4836	0,5529	0,0898	0,5214	0,5746	0,5524	0,6769	0,4667	0,4203	0,5555	0,6277	0,6611
	Z2	0,33	0,1348	0,1013	0,1921	0,0098	0,1378	0,2311	0,1433	0,3196	0,0519	0,0779	0,1334	0,1714	0,2358
	Z3	0,33	0,0700	0,0442	0,1135	0,0040	0,0727	0,1378	0,0756	0,2099	0,0232	0,0352	0,0654	0,0716	0,1286
P_B	Z1		0,0420	0,0416	0,0428	0,0470	0,0424	0,0428	0,0415	0,0437	0,0424	0,0428	0,0421	0,0395	0,0417
	Z2		0,0108	0,0112	0,0104	0,0141	0,0109	0,0103	0,0106	0,0101	0,0119	0,0114	0,0106	0,0110	0,0108
	Z3		0,0061	0,0067	0,0056	0,0084	0,0060	0,0056	0,0060	0,0053	0,0067	0,0067	0,0066	0,0067	0,0059
		r													
P_{BD}	Z1	0,33	0,3542	0,3084	0,4258	0,0503	0,3677	0,4550	0,3801	0,5929	0,2764	0,2641	0,3570	0,4147	0,5212
	Z2	0,33	0,1142	0,0696	0,1846	0,0069	0,1234	0,2181	0,1160	0,3428	0,0429	0,0588	0,0891	0,1030	0,2354
	Z3	0,33	0,0791	0,0399	0,1405	0,0039	0,0872	0,1643	0,0795	0,2802	0,0273	0,0363	0,0532	0,0512	0,1736
	Z1	0,50	0,3405	0,3017	0,4030	0,0493	0,3518	0,4314	0,3672	0,5551	0,2698	0,2569	0,3492	0,4091	0,4927
	Z2	0,50	0,1023	0,0646	0,1634	0,0064	0,1096	0,1920	0,1047	0,3026	0,0383	0,0535	0,0836	0,0988	0,2068
	Z3	0,50	0,0681	0,0351	0,1211	0,0034	0,0750	0,1416	0,0688	0,2433	0,0235	0,0314	0,0476	0,0470	0,1498
	Z1	0,67	0,3314	0,2969	0,3881	0,0485	0,3413	0,4160	0,3586	0,5303	0,2652	0,2519	0,3434	0,4048	0,4743
	Z2	0,67	0,0948	0,0616	0,1496	0,0060	0,1009	0,1764	0,0978	0,2752	0,0355	0,0503	0,0803	0,0963	0,1881
	Z3	0,67	0,0609	0,0321	0,1078	0,0031	0,0668	0,1263	0,0619	0,2165	0,0209	0,0283	0,0442	0,0446	0,1328
Ciągły indeks ubóstwa	Z1		0,3387	0,3384	0,3393	0,3625	0,3378	0,3405	0,3367	0,3396	0,3357	0,3406	0,3341	0,3347	0,3356
	Z2		0,1358	0,1378	0,1323	0,1471	0,1357	0,1293	0,1350	0,1250	0,1429	0,1403	0,1353	0,1309	0,1284
	Z3		0,1032	0,1053	0,0996	0,1106	0,1032	0,0972	0,1024	0,0924	0,1084	0,1067	0,1025	0,1014	0,0982
Dochody średnie			4632,325	4829,9	4287,975	8727,425	4421,35	4241,2	4265,3	3361,325	4777,275	5265	4150,625	3851,2	3520,7

Tabela 7.3-2

Nierówności ekonomiczne w marcu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej ogółem

	c	Ogółem	Ogółem sektor publiczny	Ogółem sektor prywatny	Ogółem: Górnictwo i kopalnictwo	Ogółem: Działalność produkcyjna	Ogółem: Handel	Ogółem: Budownictwo	Ogółem: Hotele i restauracje	Ogółem: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Ogółem: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Ogółem: Edukacja	Ogółem: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Ogółem: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	0,3319	0,3322	0,3646	0,7239	0,2547	0,5024	0,2352	0,3243	0,1784	0,4012	0,1864	0,1858	0,1869
	1	15,3649	15,5082	16,4494	9,1539	13,0807	20,1560	13,5789	24,1470	10,9705	13,9898	15,0893	15,4107	14,3258
	1,5	16,2633	16,3820	17,4545	9,6739	13,9206	21,1964	14,6039	25,2455	11,8944	14,7742	16,1845	16,4122	15,3769
Indeks Pietra		0,1903	0,1803	0,2039	0,1400	0,1745	0,2278	0,1703	0,2035	0,1359	0,1813	0,1414	0,1492	0,1617
	e													
Indeks Atkinsona	0,50	0,0579	0,0510	0,0674	0,0313	0,0505	0,0800	0,0483	0,0722	0,0322	0,0519	0,0320	0,0375	0,0479
	1,00	0,9704	0,9715	0,9710	0,9817	0,9737	0,9699	0,9752	0,9781	0,9787	0,9712	0,9832	0,9797	0,9820
	2,00	0,2148	0,1811	0,2523	0,1439	0,1993	0,2794	0,1816	0,2619	0,1282	0,1913	0,1281	0,1275	0,1960
	∞	0,7895	0,7981	0,7726	0,8883	0,7795	0,7701	0,7714	0,7099	0,7959	0,8148	0,7651	0,7468	0,7231
Entropia		2,907411575	2,896755457	2,864879847	3,108760861	2,844838142	2,844466209	2,766266584	2,547426462	2,729322672	2,985215187	2,63800621	2,509763479	2,528582573
Indeks Giniego		0,2873	0,2523	0,2876	0,1923	0,2476	0,3153	0,2413	0,2947	0,1950	0,2548	0,1983	0,2099	0,2344
Ciągły indeks nierówności		0,8659	0,8660	0,8681	0,8693	0,8673	0,8659	0,8684	0,8701	0,8704	0,8657	0,8718	0,8728	0,8729

Ubóstwo w marcu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze publicznym

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
5760	3231	2719

			Sektor publiczny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor publiczny: Działalność produkcyjna	Sektor publiczny: Handel	Sektor publiczny: Budownictwo	Sektor publiczny: Hotele i restauracje	Sektor publiczny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor publiczny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor publiczny: Edukacja	Sektor publiczny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor publiczny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich	Z1		14,1%	74,4%	67,0%	82,8%	84,2%	74,0%	64,5%	82,6%	88,1%	90,1%
	Z2		1,7%	18,6%	21,2%	22,8%	23,7%	7,3%	14,7%	24,4%	32,9%	34,3%
	Z3		0,8%	9,3%	11,4%	11,4%	11,0%	3,1%	7,9%	15,0%	17,1%	17,7%
Y_Dśr	Z1		4 178,19	3 695,87	3 527,54	3 537,86	3 574,88	4 021,35	3 785,27	3 638,11	3 365,98	3 362,15
	Z2		2 489,71	2 488,69	2 431,37	2 439,60	2 545,38	2 501,37	2 448,30	2 453,59	2 529,56	2 445,77
	Z3		2 140,63	2 173,39	2 114,47	2 085,53	2 251,36	2 096,77	2 145,57	2 236,50	2 279,68	2 113,56
Stosunek luk dochodów	Z1		0,2746	0,3584	0,3876	0,3858	0,3794	0,3018	0,3428	0,3684	0,4156	0,4163
	Z2		0,2294	0,2304	0,2475	0,2449	0,2122	0,2258	0,2422	0,2406	0,2171	0,2430
	Z3		0,2127	0,2007	0,2223	0,2330	0,1720	0,2288	0,2109	0,1775	0,1616	0,2227
		α										
P_{POT}	Z1	1,00	0,0337	0,2397	0,2347	0,2885	0,2897	0,1971	0,1976	0,2749	0,3353	0,3408
	Z2	1,00	0,0027	0,0294	0,0362	0,0374	0,0347	0,0109	0,0245	0,0423	0,0505	0,0569
	Z3	1,00	0,0009	0,0096	0,0132	0,0135	0,0098	0,0036	0,0085	0,0140	0,0144	0,0201
	Z1	0,50	0,0653	0,4069	0,3837	0,4752	0,4801	0,3684	0,3425	0,4591	0,5314	0,5398
	Z2	0,50	0,0064	0,0704	0,0833	0,0872	0,0866	0,0267	0,0572	0,0975	0,1235	0,1327
	Z3	0,50	0,0025	0,0275	0,0358	0,0361	0,0304	0,0097	0,0239	0,0425	0,0461	0,0550
	Z1	0,33	0,0837	0,4948	0,4598	0,5697	0,5768	0,4628	0,4203	0,5552	0,6273	0,6381
	Z2	0,33	0,0088	0,0969	0,1131	0,1191	0,1207	0,0372	0,0779	0,1319	0,1708	0,1811
	Z3	0,33	0,0036	0,0408	0,0521	0,0524	0,0463	0,0141	0,0352	0,0642	0,0710	0,0803
P_B	Z1		0,0475	0,0418	0,0415	0,0404	0,0402	0,0425	0,0428	0,0421	0,0395	0,0405
	Z2		0,0143	0,0115	0,0112	0,0115	0,0115	0,0125	0,0114	0,0106	0,0110	0,0112
	Z3		0,0085	0,0067	0,0063	0,0064	0,0068	0,0071	0,0067	0,0068	0,0067	0,0063
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,0466	0,3137	0,3094	0,3787	0,3652	0,2621	0,2841	0,3551	0,4129	0,4447
	Z2	0,33	0,0064	0,0688	0,0878	0,0957	0,0740	0,0282	0,0588	0,0866	0,1008	0,1409
	Z3	0,33	0,0037	0,0396	0,0553	0,0599	0,0358	0,0160	0,0363	0,0507	0,0489	0,0875
	Z1	0,50	0,0456	0,3065	0,3000	0,3677	0,3598	0,2577	0,2569	0,3478	0,4077	0,4309
	Z2	0,50	0,0058	0,0633	0,0795	0,0860	0,0704	0,0255	0,0535	0,0816	0,0971	0,1274
	Z3	0,50	0,0032	0,0345	0,0478	0,0515	0,0324	0,0138	0,0314	0,0457	0,0453	0,0754
	Z1	0,67	0,0449	0,3013	0,2938	0,3604	0,3558	0,2545	0,2519	0,3423	0,4037	0,4217
	Z2	0,67	0,0055	0,0600	0,0744	0,0800	0,0683	0,0239	0,0503	0,0785	0,0949	0,1191
	Z3	0,67	0,0029	0,0313	0,0430	0,0460	0,0303	0,0123	0,0283	0,0428	0,0432	0,0676
Ciągły indeks ubóstwa	Z1		0,3629	0,3370	0,3414	0,3350	0,3341	0,3350	0,3406	0,3341	0,3346	0,3338
	Z2		0,1472	0,1382	0,1370	0,1363	0,1354	0,1441	0,1403	0,1353	0,1309	0,1308
	Z3		0,1106	0,1058	0,1048	0,1049	0,1047	0,1094	0,1067	0,1026	0,1014	0,1016
Dochody średnie			8791,125	4592,425	5092,65	4230,75	4101,45	4758,3	5265	4152,775	3852,625	3710,1

Tabela 7.3-4

Nierówności ekonomiczne w marcu 1994 roku w różnych dzialach gospodarki polskiej w sektorze publicznym

	c	Sektor publiczny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor publiczny: Działalność produkcyjna	Sektor publiczny: Handel	Sektor publiczny: Budownictwo	Sektor publiczny: Hotele i restauracje	Sektor publiczny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor publiczny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor publiczny: Edukacja	Sektor publiczny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor publiczny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	0,7142	0,2315	0,5327	0,1981	0,1753	0,1599	0,4012	0,1861	0,1858	0,1533
	1	9,2211	13,5926	19,2040	12,9745	13,2954	11,1168	13,9898	15,1118	15,4295	12,1753
	1,5	9,7979	14,5338	20,2734	13,9083	14,3403	12,0893	14,7742	16,2070	16,4306	13,0797
Indeks Pietra		0,1371	0,1582	0,2069	0,1583	0,1393	0,1232	0,1813	0,1407	0,1486	0,1414
	e										
Indeks Atkinsona	0,50	0,0302	0,0400	0,0632	0,0430	0,0321	0,0257	0,0519	0,0316	0,0370	0,0345
	1,00	0,9822	0,9757	0,9695	0,9758	0,9826	0,9824	0,9712	0,9834	0,9800	0,9853
	2,00	0,1390	0,1515	0,2265	0,1593	0,1170	0,1004	0,1913	0,1257	0,1255	0,1373
	∞	0,8891	0,7877	0,8085	0,7695	0,7623	0,7951	0,8148	0,7652	0,7469	0,7372
Entropia		3,096613169	2,804345846	2,992735386	2,681445837	2,573230743	2,648833752	2,985215187	2,632470131	2,506199598	2,491232872
Indeks Giniego		0,1887	0,2221	0,2829	0,2247	0,1967	0,1752	0,2548	0,1971	0,2088	0,2002
Ciągły indeks nierówności		0,8695	0,8681	0,8651	0,8702	0,8723	0,8720	0,8657	0,8719	0,8728	0,8741

Tabela 7.3-5

Ubóstwo w marcu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze prywatnym

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
5760	3231	2719

			Sektor prywatny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor prywatny: Działalność produkcyjna	Sektor prywatny: Handel	Sektor prywatny: Budownictwo	Sektor prywatny: Hotele i restauracje	Sektor prywatny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor prywatny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor prywatny: Edukacja	Sektor prywatny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor prywatny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich		Z1	54,1%	77,5%	80,3%	78,3%	91,2%	70,7%	37,4%	79,8%	86,9%	93,0%
		Z2	12,8%	30,5%	43,0%	27,0%	65,1%	27,5%	5,1%	27,7%	36,7%	58,4%
		Z3	7,8%	20,5%	30,7%	18,1%	52,9%	18,1%	2,6%	17,7%	19,4%	44,3%
Y_pśr		Z1	3 729,81	3 339,90	3 033,06	3 441,54	2 520,75	3 361,92	4 257,42	3 479,39	3 205,84	2 718,12
		Z2	2 258,01	2 228,28	2 222,21	2 330,09	2 026,00	2 279,55	2 232,84	2 279,24	2 421,46	2 049,08
		Z3	1 910,58	1 949,39	1 990,72	2 099,03	1 847,50	2 009,25	1 687,50	1 985,03	2 083,89	1 810,05
Stosunek luk dochodów		Z1	0,3525	0,4202	0,4734	0,4025	0,5624	0,4163	0,2609	0,3959	0,4434	0,5281
		Z2	0,3011	0,3103	0,3122	0,2788	0,3730	0,2945	0,3089	0,2946	0,2506	0,3658
		Z3	0,2973	0,2830	0,2678	0,2280	0,3205	0,2610	0,3794	0,2699	0,2336	0,3343
		α										
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1692	0,2928	0,3450	0,2854	0,4619	0,2654	0,0828	0,2837	0,3513	0,4388
	Z2	1,00	0,0258	0,0653	0,0947	0,0539	0,1680	0,0560	0,0095	0,0564	0,0623	0,1418
	Z3	1,00	0,0118	0,0305	0,0443	0,0224	0,0897	0,0245	0,0042	0,0252	0,0229	0,0731
	Z1	0,50	0,2898	0,4600	0,5130	0,4573	0,6404	0,4191	0,1654	0,4587	0,5417	0,6268
	Z2	0,50	0,0546	0,1347	0,1936	0,1156	0,3201	0,1185	0,0206	0,1190	0,1436	0,2765
	Z3	0,50	0,0282	0,0738	0,1090	0,0591	0,2060	0,0617	0,0096	0,0621	0,0613	0,1683
	Z1	0,33	0,3544	0,5442	0,5933	0,5443	0,7198	0,4963	0,2151	0,5485	0,6329	0,7132
	Z2	0,33	0,0720	0,1758	0,2513	0,1526	0,4039	0,1560	0,0276	0,1568	0,1952	0,3529
	Z3	0,33	0,0391	0,1026	0,1523	0,0850	0,2796	0,0873	0,0132	0,0871	0,0889	0,2298
P_S		Z1	0,0436	0,0430	0,0430	0,0419	0,0451	0,0425	0,0485	0,0427	0,0398	0,0442
		Z2	0,0114	0,0108	0,0102	0,0104	0,0098	0,0106	0,0131	0,0107	0,0112	0,0104
		Z3	0,0061	0,0056	0,0055	0,0059	0,0051	0,0059	0,0074	0,0058	0,0063	0,0055
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,2424	0,4152	0,4780	0,3802	0,6712	0,3685	0,1320	0,3973	0,4577	0,6594
	Z2	0,33	0,0731	0,1733	0,2377	0,1245	0,4490	0,1453	0,0337	0,1472	0,1599	0,4127
	Z3	0,33	0,0535	0,1315	0,1827	0,0879	0,3801	0,1074	0,0227	0,1079	0,1029	0,3403
	Z1	0,50	0,2301	0,3922	0,4528	0,3665	0,6285	0,3503	0,1237	0,3775	0,4422	0,6131
	Z2	0,50	0,0641	0,1530	0,2110	0,1125	0,3978	0,1288	0,0291	0,1303	0,1433	0,3640
	Z3	0,50	0,0463	0,1135	0,1575	0,0762	0,3314	0,0923	0,0205	0,0929	0,0884	0,2987
	Z1	0,67	0,2222	0,3773	0,4361	0,3574	0,5996	0,3385	0,1186	0,3647	0,4322	0,5819
	Z2	0,67	0,0582	0,1398	0,1938	0,1051	0,3618	0,1182	0,0259	0,1194	0,1331	0,3290
	Z3	0,67	0,0411	0,1009	0,1404	0,0687	0,2953	0,0821	0,0185	0,0827	0,0789	0,2661
Ciągły indeks ubóstwa		Z1	0,3456	0,3387	0,3405	0,3375	0,3422	0,3412	0,3510	0,3368	0,3368	0,3394
		Z2	0,1417	0,1335	0,1280	0,1346	0,1209	0,1346	0,1456	0,1346	0,1298	0,1233
		Z3	0,1071	0,1009	0,0959	0,1014	0,0876	0,1018	0,1099	0,1020	0,1009	0,0915
Dochody średnie			5770,725	4285,425	4103,55	4285,725	3043,425	4885,275	6056,575	4258,65	3838,375	3088,95

Nierówności ekonomiczne w marcu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze prywatnym

		Sektor prywatny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor prywatny: Działalność produkcyjna	Sektor prywatny: Handel	Sektor prywatny: Budownictwo	Sektor prywatny: Hotele i restauracje	Sektor prywatny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor prywatny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor prywatny: Edukacja	Sektor prywatny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor prywatny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
	c										
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	0,4757	0,3072	0,4984	0,2571	0,3853	0,5823	0,1998	0,2291	0,2214	0,3297
	1	14,3358	14,2915	20,2221	15,1950	30,2126	19,6070	8,3669	12,5618	14,9478	30,3160
	1,5	15,3119	15,0839	21,1869	16,2833	31,3113	20,6723	9,1492	13,4092	15,8783	31,4146
Indeks Pietra		0,1929	0,1924	0,2294	0,1752	0,2176	0,2231	0,1220	0,1719	0,1725	0,1966
	e										
Indeks Atkinsona	0,50	0,0573	0,0610	0,0817	0,0505	0,0846	0,0756	0,0281	0,0501	0,0520	0,0710
	1,00	0,9680	0,9723	0,9706	0,9750	0,9790	0,9682	0,9826	0,9747	0,9767	0,9802
	2,00	0,2352	0,2387	0,2823	0,1912	0,2817	0,2746	0,1358	0,2047	0,1831	0,2647
	∞	0,8310	0,7725	0,7624	0,7725	0,6796	0,8004	0,8390	0,7711	0,7460	0,6844
Entropia		3,138782978	2,859010458	2,799271345	2,784846535	2,371239185	2,991521597	2,840919495	2,812898397	2,561285734	2,420890093
Indeks Giniego		0,2674	0,2724	0,3182	0,2477	0,3207	0,3082	0,1770	0,2458	0,2438	0,2934
Ciągły indeks nierówności		0,8641	0,8665	0,8664	0,8678	0,8723	0,8652	0,8701	0,8680	0,8717	0,8726

Tabela 7.4

Ubóstwo i nierówności ekonomiczne w Polsce w marcu 1994 roku wraz z bezrobotnymi
(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3		
5760	3231	2719		Ogółem

Procent ubogich		Z1	78,2%
		Z2	36,5%
		Z3	28,5%
Y_pśr		Z1	2 878,76
		Z2	1 525,28
		Z3	1 168,57
Stosunek luk dochodów		Z1	0,5002
		Z2	0,5279
		Z3	0,5702
		α	
P_{FGT}	Z1	1,00	0,3599
	Z2	1,00	0,1623
	Z3	1,00	0,1324
	Z1	0,50	0,5067
	Z2	0,50	0,2240
	Z3	0,50	0,1752
	Z1	0,33	0,5805
	Z2	0,33	0,2587
	Z3	0,33	0,2007
P_S		Z1	0,0674
		Z2	0,0325
		Z3	0,0251
		r	
P_{BD}	Z1	0,33	0,5498
	Z2	0,33	0,3121
	Z3	0,33	0,2615
	Z1	0,50	0,5001
	Z2	0,50	0,2831
	Z3	0,50	0,2425
	Z1	0,67	0,4658
	Z2	0,67	0,2583
	Z3	0,67	0,2234
Ciągły indeks ubóstwa		Z1	0,3387
		Z2	0,1358
		Z3	0,1032
Dochody średnie			3965,388
		c	
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)		0,01	0,4750
		1	28,3586
		1,5	29,4783
		e	
Indeks Atkinsona		0,50	0,1530
		1,00	0,9754
		2,00	0,9969
		∞	1,0000
Entropia			2,992799044
Indeks Giniego			0,8336
Ciągły indeks nierówności			0,8458

Tabela 7.5-1

Ubóstwo we wrześniu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej ogółem

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
5760	3231	2719

						Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:	Ogółem:
			Ogółem	Ogółem sektor publiczny	Ogółem sektor prywatny	Górnictwo i kopalnictwo	Działalność produkcyjna	Handel	Budownictwo	Hotele i restauracje	Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Edukacja	Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich	Z1		62,3%	58,8%	69,1%	9,3%	61,9%	73,0%	70,9%	78,9%	57,4%	47,8%	72,2%	81,6%	78,4%
	Z2		15,0%	10,1%	25,0%	0,7%	15,2%	28,9%	17,6%	36,7%	4,7%	11,5%	18,1%	18,1%	24,1%
	Z3		8,1%	4,2%	16,2%	0,3%	9,3%	18,1%	10,1%	25,9%	2,2%	7,2%	6,2%	6,3%	13,6%
$Y_D śr$	Z1		3 720,71	3 905,95	3 401,59	4 338,71	3 706,95	3 308,63	3 663,19	3 105,45	4 245,47	3 772,80	3 845,43	3 672,37	3 519,52
	Z2		2 341,33	2 517,82	2 192,40	2 442,66	2 230,26	2 230,10	2 304,55	2 028,88	2 419,15	2 255,85	2 581,37	2 603,31	2 299,17
	Z3		1 950,82	2 121,43	1 862,35	1 966,67	1 868,62	1 690,06	1 938,63	1 707,34	1 986,36	1 930,56	2 232,26	2 234,92	1 912,50
Stosunek luk dochodów	Z1		0,3540	0,3219	0,4094	0,2466	0,3564	0,4256	0,3640	0,4609	0,2629	0,3450	0,3324	0,3624	0,3890
	Z2		0,2754	0,2207	0,3214	0,2439	0,3097	0,3098	0,2867	0,3721	0,2513	0,3019	0,2011	0,1943	0,2684
	Z3		0,2826	0,2198	0,3151	0,2767	0,3127	0,3049	0,2877	0,3721	0,2695	0,2900	0,1790	0,1760	0,2966
		α													
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1946	0,1674	0,2485	0,0198	0,1932	0,2742	0,2279	0,3147	0,1299	0,1443	0,2137	0,2668	0,2696
	Z2	1,00	0,0242	0,0135	0,0462	0,0010	0,0271	0,0519	0,0295	0,0754	0,0070	0,0204	0,0202	0,0217	0,0404
	Z3	1,00	0,0077	0,0032	0,0169	0,0003	0,0097	0,0164	0,0097	0,0316	0,0020	0,0070	0,0039	0,0039	0,0135
	Z1	0,50	0,3346	0,3013	0,4002	0,0404	0,3316	0,4342	0,3876	0,4631	0,2607	0,2507	0,3766	0,4546	0,4442
	Z2	0,50	0,0577	0,0354	0,1034	0,0025	0,0615	0,1176	0,0691	0,1603	0,0173	0,0465	0,0549	0,0604	0,0944
	Z3	0,50	0,0233	0,0106	0,0491	0,0009	0,0281	0,0540	0,0293	0,0856	0,0062	0,0210	0,0148	0,0150	0,0401
	Z1	0,33	0,4091	0,3743	0,4774	0,0529	0,4058	0,5140	0,4715	0,5660	0,3371	0,3085	0,4646	0,5512	0,5339
	Z2	0,33	0,0790	0,0501	0,1382	0,0035	0,0829	0,1581	0,0940	0,2105	0,0240	0,0627	0,0784	0,0870	0,1265
	Z3	0,33	0,0351	0,0170	0,0726	0,0013	0,0416	0,0803	0,0440	0,1230	0,0094	0,0314	0,0239	0,0242	0,0596
P_S	Z1		0,0353	0,0350	0,0358	0,0401	0,0358	0,0354	0,0349	0,0369	0,0369	0,0364	0,0352	0,0331	0,0350
	Z2		0,0062	0,0066	0,0058	0,0094	0,0060	0,0058	0,0060	0,0056	0,0070	0,0060	0,0065	0,0066	0,0060
	Z3		0,0025	0,0029	0,0022	0,0041	0,0023	0,0023	0,0024	0,0019	0,0030	0,0025	0,0030	0,0030	0,0023
		r													
P_{BD}	Z1	0,33	0,2632	0,2277	0,3866	0,0284	0,2944	0,4180	0,3332	0,5276	0,1855	0,2190	0,2842	0,3427	0,3986
	Z2	0,33	0,0664	0,0416	0,1714	0,0035	0,1007	0,1903	0,1061	0,2919	0,0242	0,0730	0,0548	0,0590	0,1473
	Z3	0,33	0,0603	0,0245	0,1310	0,0022	0,0748	0,1430	0,0783	0,2315	0,0157	0,0547	0,0277	0,0279	0,1052
	Z1	0,50	0,2681	0,2214	0,3580	0,0276	0,2751	0,3887	0,3146	0,4615	0,1803	0,2051	0,2779	0,3368	0,3744
	Z2	0,50	0,0749	0,0371	0,1495	0,0031	0,0875	0,1655	0,0921	0,2589	0,0210	0,0635	0,0503	0,0544	0,1277
	Z3	0,50	0,0523	0,0208	0,1156	0,0019	0,0659	0,1254	0,0663	0,2110	0,0136	0,0476	0,0237	0,0239	0,0919
	Z1	0,67	0,2585	0,2171	0,3396	0,0271	0,2629	0,3699	0,3026	0,4506	0,1767	0,1964	0,2733	0,3325	0,3590
	Z2	0,67	0,0673	0,0343	0,1336	0,0028	0,0783	0,1462	0,0826	0,2327	0,0190	0,0569	0,0476	0,0516	0,1144
	Z3	0,67	0,0461	0,0183	0,1026	0,0017	0,0586	0,1112	0,0586	0,1914	0,0119	0,0421	0,0212	0,0214	0,0813
Ciągły indeks ubóstwa	Z1		0,3050	0,3054	0,3045	0,3282	0,3053	0,3036	0,3018	0,3033	0,3042	0,3111	0,2998	0,2973	0,2996
	Z2		0,1034	0,1055	0,0993	0,1107	0,1037	0,0974	0,1023	0,0953	0,1085	0,1054	0,1022	0,1011	0,0993
	Z3		0,0699	0,0717	0,0664	0,0739	0,0695	0,0655	0,0690	0,0630	0,0729	0,0704	0,0705	0,0704	0,0674
Dochody średnie			5385,8	5648	4869,8	9818,6	5248,5	4687,8	4924,4	4080,8	5539,2	6329,5	4611,3	4398,9	4318,5

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej ogółem

		Ogółem	Ogółem sektor publiczny	Ogółem sektor prywatny	Ogółem: Górnictwo i kopalnictwo	Ogółem: Działalność produkcyjna	Ogółem: Handel	Ogółem: Budownictwo	Ogółem: Hotele i restauracje	Ogółem: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Ogółem: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Ogółem: Edukacja	Ogółem: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Ogółem: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
	c													
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	0,4452	0,4408	0,5363	0,8654	0,3605	0,5717	0,3469	0,6070	0,2123	0,8929	0,2080	0,2293	0,2569
	1	15,0175	15,3049	22,1163	9,2517	13,3909	22,5578	13,9004	37,8392	10,8782	15,0303	14,6457	15,8534	14,0523
	2	16,2683	16,5502	23,6234	10,0341	14,4503	23,8735	14,9859	39,4871	12,1486	16,4380	16,2840	17,2694	15,1602
Indeks Pietra		0,1926	0,1819	0,2117	0,1322	0,1818	0,2189	0,1849	0,2161	0,1341	0,2035	0,1353	0,1507	0,1678
	e													
Indeks Atkinsona	0,50	0,0586	0,0508	0,0724	0,0275	0,0549	0,0762	0,0566	0,0795	0,0309	0,0649	0,0287	0,0390	0,0484
	1,00	0,9679	0,9692	0,9682	0,9834	0,9688	0,9693	0,9696	0,9748	0,9758	0,9691	0,9846	0,9770	0,9761
	2,00	0,2238	0,1844	0,2766	0,1249	0,2239	0,2788	0,2154	0,3024	0,1207	0,2559	0,1160	0,1323	0,1965
	∞	0,7958	0,8052	0,7741	0,8856	0,7904	0,7643	0,7766	0,7304	0,8014	0,8262	0,7615	0,7499	0,7453
Entropia		3,025398254	3,023335218	2,95247221	3,050002098	3,007477283	2,880981684	2,911044598	2,72643733	2,845351934	3,132847786	2,684319019	2,61820364	2,741149426
Indeks Giniego		0,2698	0,2532	0,2988	0,1817	0,2582	0,3068	0,2619	0,3131	0,1918	0,2845	0,1887	0,2137	0,2395
Ciągły indeks nierówności		0,8645	0,8647	0,8648	0,8709	0,8650	0,8655	0,8658	0,8670	0,8685	0,8665	0,8708	0,8706	0,8686

Tabela 7.5-3

Ubóstwo we wrześniu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze publicznym

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
5780	3231	2719

			Sektor publiczny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor publiczny: Działalność produkcyjna	Sektor publiczny: Handel	Sektor publiczny: Budownictwo	Sektor publiczny: Hotele i restauracje	Sektor publiczny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor publiczny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor publiczny: Edukacja	Sektor publiczny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor publiczny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich	Z1		8,4%	57,7%	62,9%	71,5%	65,6%	57,7%	47,8%	72,1%	81,7%	75,1%
	Z2		0,4%	7,3%	17,1%	11,4%	12,8%	3,3%	11,5%	15,9%	17,9%	17,6%
	Z3		0,1%	3,1%	8,7%	5,0%	5,1%	1,3%	7,2%	6,1%	6,1%	8,8%
Y_pśr	Z1		4 428,57	4 009,01	3 650,72	3 872,17	3 817,84	4 316,12	3 772,80	3 652,57	3 677,97	3 706,79
	Z2		2 700,00	2 487,67	2 436,84	2 464,91	2 569,53	2 484,85	2 255,65	2 589,31	2 612,85	2 378,41
	Z3		2 400,00	2 064,52	2 086,21	2 036,00	2 221,57	2 000,00	1 930,56	2 250,82	2 250,82	1 956,82
Stosunek luk dochodów	Z1		0,2312	0,3040	0,3662	0,3277	0,3372	0,2507	0,3450	0,3312	0,3815	0,3565
	Z2		0,1643	0,2301	0,2458	0,2371	0,2047	0,2309	0,3019	0,1986	0,1913	0,2639
	Z3		0,1173	0,2407	0,2327	0,2512	0,1829	0,2644	0,2900	0,1722	0,1722	0,2803
		α										
P_{FGT}	Z1	1,00	0,0165	0,1541	0,2052	0,2073	0,1973	0,1240	0,1443	0,2126	0,2659	0,2369
	Z2	1,00	0,0004	0,0100	0,0256	0,0161	0,0163	0,0045	0,0204	0,0198	0,0212	0,0272
	Z3	1,00	0,0000	0,0025	0,0069	0,0042	0,0033	0,0012	0,0070	0,0037	0,0037	0,0083
	Z1	0,50	0,0353	0,2861	0,3465	0,3714	0,3469	0,2558	0,2507	0,3754	0,4535	0,4064
	Z2	0,50	0,0012	0,0259	0,0635	0,0409	0,0440	0,0116	0,0465	0,0540	0,0594	0,0661
	Z3	0,50	0,0002	0,0083	0,0230	0,0136	0,0123	0,0036	0,0210	0,0144	0,0144	0,0252
	Z1	0,33	0,0469	0,3593	0,4203	0,4598	0,4267	0,3337	0,3085	0,4635	0,5501	0,4959
	Z2	0,33	0,0018	0,0365	0,0881	0,0574	0,0627	0,0164	0,0627	0,0773	0,0857	0,0913
	Z3	0,33	0,0004	0,0128	0,0357	0,0209	0,0197	0,0055	0,0314	0,0233	0,0233	0,0380
P_S	Z1		0,0404	0,0353	0,0349	0,0343	0,0344	0,0369	0,0364	0,0352	0,0330	0,0348
	Z2		0,0102	0,0068	0,0081	0,0065	0,0065	0,0075	0,0060	0,0065	0,0066	0,0062
	Z3		0,0045	0,0030	0,0027	0,0028	0,0030	0,0033	0,0025	0,0030	0,0030	0,0025
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,0230	0,2118	0,2847	0,2841	0,2601	0,1747	0,2190	0,2817	0,3403	0,3383
	Z2	0,33	0,0009	0,0328	0,0819	0,0538	0,0450	0,0153	0,0730	0,0525	0,0565	0,0967
	Z3	0,33	0,0002	0,0199	0,0540	0,0335	0,0235	0,0091	0,0547	0,0257	0,0257	0,0651
	Z1	0,50	0,0228	0,2060	0,2730	0,2751	0,2547	0,1712	0,2051	0,2759	0,3349	0,3220
	Z2	0,50	0,0009	0,0288	0,0719	0,0470	0,0410	0,0134	0,0635	0,0484	0,0524	0,0839
	Z3	0,50	0,0002	0,0170	0,0459	0,0287	0,0201	0,0079	0,0478	0,0221	0,0221	0,0564
	Z1	0,67	0,0227	0,2021	0,2654	0,2692	0,2509	0,1688	0,1964	0,2715	0,3309	0,3116
	Z2	0,67	0,0009	0,0263	0,0658	0,0428	0,0387	0,0122	0,0569	0,0460	0,0500	0,0755
	Z3	0,67	0,0002	0,0149	0,0404	0,0252	0,0179	0,0069	0,0421	0,0198	0,0198	0,0497
Ciągły indeks ubóstwa	Z1		0,3286	0,3053	0,3052	0,3000	0,3029	0,3037	0,3111	0,2998	0,2973	0,2997
	Z2		0,1109	0,1071	0,1021	0,1049	0,1040	0,1093	0,1054	0,1023	0,1012	0,1021
	Z3		0,0740	0,0724	0,0694	0,0714	0,0711	0,0734	0,0704	0,0705	0,0705	0,0696
Dochody średnie			9724,8	5526,9	5397,7	5081,7	5001,1	5519,9	6329,5	4618,2	4406,6	4544,3

Tabela 7.5-4

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze publicznym

	c	Sektor publiczny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor publiczny: Działalność produkcyjna	Sektor publiczny: Handel	Sektor publiczny: Budownictwo	Sektor publiczny: Hotele i restauracje	Sektor publiczny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor publiczny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor publiczny: Edukacja	Sektor publiczny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor publiczny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	0,8678	0,2985	0,5493	0,3168	0,2828	0,1946	0,8929	0,2076	0,2305	0,2182
	1	9,2133	13,4773	18,7070	14,5186	14,8894	11,1661	15,0303	14,5340	15,9499	12,3607
	2	9,9874	14,7974	20,1834	15,7778	16,2620	12,4572	16,4380	16,1705	17,3625	13,7439
Indeks Pietra		0,1291	0,1585	0,2036	0,1718	0,1578	0,1258	0,2035	0,1347	0,1504	0,1537
	e										
Indeks Atkinsona	0,50	0,0259	0,0399	0,0623	0,0479	0,0386	0,0269	0,0649	0,0284	0,0387	0,0403
	1,00	0,9845	0,9718	0,9678	0,9711	0,9756	0,9779	0,9691	0,9847	0,9771	0,9770
	2,00	0,1140	0,1513	0,2268	0,1710	0,1438	0,1027	0,2559	0,1141	0,1306	0,1643
	∞	0,8869	0,8010	0,7982	0,7835	0,7800	0,8007	0,8262	0,7618	0,7504	0,7579
Entropia		3,023516893	2,981558342	3,024372101	2,858184099	2,845279894	2,786997795	3,132847788	2,682053089	2,616792679	2,757222891
Indeks Giniego		0,1772	0,2227	0,2807	0,2408	0,2192	0,1793	0,2845	0,1879	0,2131	0,2185
Ciągły indeks nierówności		0,8713	0,8858	0,8843	0,8668	0,8673	0,8895	0,8665	0,8708	0,8706	0,8690

Tabela 7.5-5

Ubóstwo we wrześniu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze prywatnym

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
5760	3231	2719

			Sektor prywatny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor prywatny: Działalność produkcyjna	Sektor prywatny: Handel	Sektor prywatny: Budownictwo	Sektor prywatny: Hotele i restauracje	Sektor prywatny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor prywatny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor prywatny: Edukacja	Sektor prywatny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor prywatny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich		Z1	33,1%	66,9%	75,3%	70,7%	86,4%	57,1%	32,5%	69,6%	81,9%	63,0%
		Z2	6,3%	24,2%	31,7%	20,3%	50,0%	18,4%	2,1%	18,7%	32,4%	32,5%
		Z3	3,4%	16,3%	20,3%	12,3%	37,5%	10,9%	0,6%	11,4%	19,5%	19,8%
Y_pśr		Z1	3 994,86	3 412,41	3 238,91	3 572,14	2 805,32	3 558,84	4 339,08	3 557,90	3 283,88	3 300,46
		Z2	2 315,87	2 149,17	2 203,47	2 269,46	1 954,00	2 287,50	2 314,29	2 215,51	2 250,31	2 244,31
		Z3	1 902,94	1 833,74	1 868,47	1 924,39	1 672,00	1 934,86	1 100,00	1 841,23	1 886,67	1 887,88
Stosunek luk dochodów		Z1	0,3064	0,4076	0,4377	0,3798	0,5130	0,3821	0,2467	0,3823	0,4299	0,4270
		Z2	0,2832	0,3348	0,3180	0,2976	0,3952	0,2920	0,2837	0,3143	0,3035	0,3054
		Z3	0,3001	0,3256	0,3128	0,2922	0,3851	0,2884	0,5954	0,3228	0,3061	0,3057
		α										
P_{FGT}	Z1	1,00	0,0879	0,2383	0,2905	0,2370	0,3804	0,1923	0,0680	0,2343	0,3116	0,3134
	Z2	1,00	0,0103	0,0463	0,0581	0,0353	0,1082	0,0315	0,0030	0,0335	0,0568	0,0574
	Z3	1,00	0,0034	0,0176	0,0211	0,0120	0,0473	0,0105	0,0011	0,0122	0,0199	0,0201
	Z1	0,50	0,1617	0,3847	0,4546	0,3950	0,5596	0,3186	0,1433	0,3903	0,4917	0,4951
	Z2	0,50	0,0244	0,1019	0,1304	0,0813	0,2250	0,0730	0,0074	0,0759	0,1301	0,1310
	Z3	0,50	0,0101	0,0503	0,0614	0,0360	0,1263	0,0317	0,0026	0,0350	0,0583	0,0592
	Z1	0,33	0,2036	0,4598	0,5357	0,4771	0,6443	0,3846	0,1677	0,4710	0,5807	0,5855
	Z2	0,33	0,0333	0,1354	0,1747	0,1099	0,2926	0,0990	0,0104	0,1021	0,1757	0,1767
	Z3	0,33	0,0150	0,0739	0,0908	0,0538	0,1803	0,0475	0,0035	0,0515	0,0866	0,0879
P_S		Z1	0,0375	0,0362	0,0355	0,0351	0,0380	0,0359	0,0371	0,0348	0,0350	0,0353
		Z2	0,0066	0,0057	0,0057	0,0059	0,0055	0,0060	0,0084	0,0060	0,0058	0,0058
		Z3	0,0027	0,0022	0,0022	0,0024	0,0019	0,0024	0,0033	0,0023	0,0023	0,0023
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,1337	0,3795	0,4478	0,3527	0,6502	0,2895	0,1018	0,3533	0,4686	0,4735
	Z2	0,33	0,0379	0,1731	0,2150	0,1274	0,4162	0,1130	0,0143	0,1265	0,2096	0,2113
	Z3	0,33	0,0265	0,1348	0,1634	0,0941	0,3408	0,0825	0,0060	0,0938	0,1545	0,1567
	Z1	0,50	0,1260	0,3496	0,4151	0,3309	0,5948	0,2707	0,0976	0,3301	0,4372	0,4412
	Z2	0,50	0,0329	0,1514	0,1873	0,1107	0,3730	0,0981	0,0122	0,1100	0,1821	0,1837
	Z3	0,50	0,0232	0,1196	0,1439	0,0820	0,3130	0,0718	0,0060	0,0830	0,1356	0,1375
	Z1	0,67	0,1211	0,3303	0,3941	0,3170	0,5556	0,2588	0,0953	0,3155	0,4169	0,4205
	Z2	0,67	0,0294	0,1357	0,1677	0,0992	0,3370	0,0880	0,0108	0,0984	0,1630	0,1644
	Z3	0,67	0,0206	0,1067	0,1279	0,0725	0,2854	0,0634	0,0060	0,0740	0,1203	0,1220
Ciągły indeks ubóstwa		Z1	0,3169	0,3053	0,3035	0,3026	0,3036	0,3083	0,3162	0,3032	0,3006	0,3000
		Z2	0,1076	0,0999	0,0964	0,1011	0,0908	0,1020	0,1100	0,1021	0,0958	0,0958
		Z3	0,0723	0,0664	0,0646	0,0680	0,0589	0,0686	0,0739	0,0686	0,0648	0,0647
Dochody średnie			7123,4	4921,8	4498,5	4863,5	3575,3	5625,6	6453,5	4827,9	4157,6	4017,9

Tabela 7.5-6

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1994 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze prywatnym

	c	Sektor prywatny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor prywatny: Działalność produkcyjna	Sektor prywatny: Handel	Sektor prywatny: Budownictwo	Sektor prywatny: Hotele i restauracje	Sektor prywatny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor prywatny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor prywatny: Edukacja	Sektor prywatny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor prywatny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	0,5849	0,5148	0,5822	0,3822	0,8309	0,6332	0,2966	0,3549	0,3585	0,3079
	1	12,3589	23,8583	24,9592	16,0894	48,6855	19,5128	15,8421	15,1593	20,3088	19,4991
	2	13,6922	25,4871	26,5608	17,5749	50,3334	20,9616	17,4502	16,6263	21,8974	21,1123
Indeks Pietra		0,1747	0,2082	0,2203	0,1914	0,2367	0,2100	0,1247	0,1872	0,1943	0,1815
	e										
Indeks Atkinsona	0,50	0,0475	0,0706	0,0784	0,0605	0,0962	0,0680	0,0257	0,0577	0,0658	0,0576
	1,00	0,9693	0,9677	0,9706	0,9693	0,9784	0,9665	0,9831	0,9710	0,9729	0,9764
	2,00	0,2057	0,2794	0,2844	0,2322	0,3283	0,2665	0,1094	0,2287	0,2427	0,2241
	∞	0,8456	0,7765	0,7555	0,7738	0,6923	0,8045	0,8295	0,7722	0,7354	0,7262
Entropia		3,225485563	2,980364561	2,827519178	2,91980195	2,488659382	3,105060339	2,866852283	2,905826092	2,70429039	2,660576582
Indeks Giniego		0,2423	0,2945	0,3106	0,2715	0,3523	0,2917	0,1760	0,2642	0,2798	0,2613
Ciągły indeks nierówności		0,8642	0,8644	0,8661	0,8655	0,8698	0,8640	0,8684	0,8658	0,8679	0,8691

Tabela 7.6-1

Ubóstwo we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej ogółem

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
699,1	387,7	327,3

			Ogółem	Ogółem sektor publiczny	Ogółem sektor prywatny	Ogółem: Górnictwo i kopalnictwo	Ogółem: Działalność produkcyjna	Ogółem: Handel	Ogółem: Budownictwo	Ogółem: Hotele i restauracje	Ogółem: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Ogółem: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Ogółem: Edukacja	Ogółem: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Ogółem: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich		Z1	56,2%	52,5%	62,7%	6,2%	54,8%	69,4%	58,8%	73,4%	51,4%	46,3%	65,6%	77,7%	63,2%
		Z2	12,7%	7,7%	22,7%	0,5%	13,9%	26,7%	15,7%	34,1%	3,8%	12,6%	12,1%	11,4%	16,6%
		Z3	4,0%	1,3%	9,4%	0,1%	5,2%	10,2%	5,0%	17,4%	1,0%	5,3%	1,2%	0,8%	5,2%
Y_Dśr		Z1	465,27	491,94	419,43	541,13	456,28	410,46	453,50	383,24	525,56	456,74	487,26	478,56	454,30
		Z2	282,20	312,60	261,41	302,00	269,64	268,09	280,38	242,52	294,21	260,24	326,94	334,39	281,69
		Z3	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00
Stosunek luk dochodów		Z1	0,3345	0,2963	0,4000	0,2260	0,3473	0,4129	0,3513	0,4518	0,2462	0,3467	0,3030	0,3155	0,3502
		Z2	0,2721	0,1937	0,3257	0,2210	0,3045	0,3085	0,2768	0,3745	0,2411	0,3288	0,1567	0,1375	0,2734
		Z3	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417
		α													
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1645	0,1381	0,2154	0,0121	0,1650	0,2477	0,1804	0,2783	0,1110	0,1374	0,1778	0,2214	0,1936
	Z2	1,00	0,0146	0,0066	0,0307	0,0005	0,0177	0,0344	0,0186	0,0518	0,0038	0,0172	0,0087	0,0071	0,0194
	Z3	1,00	0,0033	0,0011	0,0078	0,0001	0,0043	0,0085	0,0042	0,0145	0,0008	0,0044	0,0010	0,0007	0,0043
	Z1	0,50	0,2915	0,2582	0,3542	0,0257	0,2880	0,4016	0,3126	0,4372	0,2279	0,2403	0,3270	0,4021	0,3357
	Z2	0,50	0,0390	0,0200	0,0773	0,0015	0,0458	0,0881	0,0494	0,1248	0,0108	0,0430	0,0288	0,0252	0,0517
	Z3	0,50	0,0116	0,0038	0,0271	0,0003	0,0150	0,0295	0,0144	0,0503	0,0029	0,0153	0,0035	0,0023	0,0150
	Z1	0,33	0,3605	0,3252	0,4259	0,0342	0,3544	0,4796	0,3834	0,5168	0,2971	0,2968	0,4098	0,4990	0,4118
	Z2	0,33	0,0567	0,0307	0,1090	0,0022	0,0650	0,1254	0,0713	0,1723	0,0161	0,0606	0,0456	0,0410	0,0749
	Z3	0,33	0,0176	0,0057	0,0414	0,0004	0,0229	0,0449	0,0220	0,0767	0,0044	0,0233	0,0053	0,0035	0,0229
P_B		Z1	0,0372	0,0365	0,0383	0,0428	0,0377	0,0378	0,0374	0,0397	0,0378	0,0388	0,0366	0,0346	0,0373
		Z2	0,0043	0,0048	0,0039	0,0063	0,0041	0,0040	0,0041	0,0038	0,0050	0,0040	0,0049	0,0051	0,0042
		Z3	0,0003	0,0007	0,0002	0,0015	0,0003	0,0001	0,0003	0,0001	0,0008	0,0003	0,0008	0,0009	0,0003
		r													
P_{BD}	Z1	0,33	0,2551	0,1914	0,3677	0,0176	0,2689	0,4117	0,2845	0,5088	0,1592	0,2365	0,2389	0,2833	0,3034
	Z2	0,33	0,0857	0,0365	0,1764	0,0026	0,1028	0,1994	0,1069	0,2908	0,0232	0,0986	0,0430	0,0339	0,1119
	Z3	0,33	0,0399	0,0130	0,0937	0,0010	0,0518	0,1017	0,0498	0,1735	0,0100	0,0528	0,0120	0,0080	0,0518
	Z1	0,50	0,2377	0,1843	0,3362	0,0170	0,2478	0,3783	0,2640	0,4634	0,1533	0,2156	0,2318	0,2782	0,2818
	Z2	0,50	0,0748	0,0314	0,1575	0,0023	0,0909	0,1767	0,0934	0,2657	0,0200	0,0882	0,0374	0,0299	0,0977
	Z3	0,50	0,0399	0,0130	0,0937	0,0010	0,0518	0,1017	0,0498	0,1735	0,0100	0,0528	0,0120	0,0080	0,0518
	Z1	0,67	0,2260	0,1794	0,3141	0,0166	0,2334	0,3548	0,2500	0,4294	0,1493	0,2013	0,2268	0,2744	0,2672
	Z2	0,67	0,0662	0,0277	0,1411	0,0020	0,0809	0,1575	0,0827	0,2417	0,0176	0,0791	0,0336	0,0273	0,0865
	Z3	0,67	0,0399	0,0130	0,0937	0,0010	0,0518	0,1017	0,0498	0,1735	0,0100	0,0528	0,0120	0,0080	0,0518
Prop. indeksu ubóstwa		Z1	0,3438	0,3442	0,3436	0,3668	0,3449	0,3414	0,3433	0,3417	0,3434	0,3487	0,3383	0,3334	0,3413
		Z2	0,1045	0,1068	0,1003	0,1108	0,1042	0,0983	0,1030	0,0964	0,1090	0,1050	0,1039	0,1042	0,1026
		Z3	0,0357	0,0368	0,0340	0,0370	0,0353	0,0337	0,0354	0,0316	0,0367	0,0353	0,0366	0,0368	0,0353
Dochody średnie			701,19	734,36	638,92	1210,32	692,37	603,08	667,3	532,75	706,86	773,73	606,89	577,43	631,64

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej ogółem

	c	Ogółem	Ogółem sektor publiczny	Ogółem sektor prywatny	Ogółem: Górnictwo i kopalnictwo	Ogółem: Działalność produkcyjna	Ogółem: Handel	Ogółem: Budownictwo	Ogółem: Hotele i restauracje	Ogółem: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Ogółem: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Ogółem: Edukacja	Ogółem: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Ogółem: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	0,7960	0,7394	1,1228	1,4867	0,7258	1,1591	0,6748	1,3502	0,3260	1,4186	0,2648	0,3006	0,5209
	1	18,7761	15,6291	42,6626	9,0726	24,9074	42,9183	22,5697	63,3027	11,8777	29,7619	14,5383	15,9714	21,7500
	2	20,3998	16,7435	44,3106	9,7213	26,5553	44,5662	24,2171	64,9506	13,0533	31,4098	16,1297	17,5175	23,3974
Indeks Pietra		0,1906	0,1782	0,2155	0,1199	0,1878	0,2240	0,1884	0,2233	0,1347	0,1996	0,1335	0,1417	0,1782
	e													
Indeks Atkinsona	0,50	0,0574	0,0478	0,0748	0,0222	0,0575	0,0795	0,0575	0,0828	0,0304	0,0643	0,0293	0,0342	0,0533
	1,00	0,9662	0,9678	0,9654	0,9884	0,9655	0,9666	0,9655	0,9673	0,9719	0,9681	0,9748	0,9738	0,9662
	2,00	0,2299	0,1805	0,2968	0,1026	0,2414	0,2982	0,2343	0,3186	0,1213	0,2735	0,1183	0,1182	0,2188
	∞	0,7861	0,7957	0,7652	0,8761	0,7834	0,7513	0,7752	0,7184	0,7878	0,8061	0,7528	0,7402	0,7625
Entropia		3,169285059	3,162676096	3,1084373	2,798202753	3,183077335	3,019315481	3,15092802	2,896466494	3,028347731	3,202989101	2,92530036	2,799428463	3,091628028
Indeks Giniego		0,2666	0,2461	0,3046	0,1605	0,2651	0,3153	0,2658	0,3245	0,1913	0,2801	0,1892	0,2000	0,2543
Prop. indeksu nierówności		0,8640	0,8641	0,8639	0,8795	0,8635	0,8646	0,8634	0,8642	0,8656	0,8672	0,8668	0,8680	0,8637

Tabela 7.6-3

Ubóstwo we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze publicznym

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
699,1	387,7	327,3

			Sektor publiczny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor publiczny: Działalność produkcyjna	Sektor publiczny: Handel	Sektor publiczny: Budownictwo	Sektor publiczny: Hotele i restauracje	Sektor publiczny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor publiczny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor publiczny: Edukacja	Sektor publiczny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor publiczny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich		Z1	5,5%	48,6%	50,4%	58,0%	57,9%	51,3%	46,3%	65,5%	77,7%	55,3%
		Z2	0,3%	6,1%	11,2%	9,1%	8,1%	2,4%	12,6%	12,1%	11,2%	10,0%
		Z3	0,1%	1,0%	2,5%	2,0%	0,9%	0,4%	5,3%	1,1%	0,7%	2,4%
Y_pśr		Z1	548,18	499,22	469,27	487,31	490,97	535,91	456,74	487,34	479,24	484,41
		Z2	276,67	313,11	300,27	300,66	324,81	313,33	260,24	328,68	336,16	296,40
		Z3	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00
Stosunek luk dochodów		Z1	0,2159	0,2859	0,3288	0,3029	0,2977	0,2334	0,3467	0,3029	0,3145	0,3071
		Z2	0,2864	0,1924	0,2255	0,2245	0,1622	0,1918	0,3288	0,1522	0,1329	0,2355
		Z3	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417
		α										
P_{FGT}	Z1	1,00	0,0101	0,1232	0,1468	0,1554	0,1541	0,1043	0,1374	0,1776	0,2208	0,1495
	Z2	1,00	0,0004	0,0052	0,0111	0,0090	0,0059	0,0020	0,0172	0,0085	0,0068	0,0103
	Z3	1,00	0,0001	0,0008	0,0021	0,0017	0,0008	0,0003	0,0044	0,0009	0,0006	0,0020
	Z1	0,50	0,0222	0,2344	0,2608	0,2880	0,2868	0,2213	0,2403	0,3267	0,4016	0,2748
	Z2	0,50	0,0010	0,0159	0,0317	0,0258	0,0195	0,0062	0,0430	0,0285	0,0244	0,0290
	Z3	0,50	0,0003	0,0029	0,0072	0,0058	0,0026	0,0012	0,0153	0,0032	0,0020	0,0069
	Z1	0,33	0,0298	0,2970	0,3228	0,3616	0,3604	0,2913	0,2966	0,4093	0,4986	0,3445
	Z2	0,33	0,0014	0,0244	0,0473	0,0385	0,0307	0,0095	0,0606	0,0453	0,0399	0,0430
	Z3	0,33	0,0004	0,0044	0,0110	0,0088	0,0040	0,0018	0,0233	0,0048	0,0031	0,0106
P_B		Z1	0,0433	0,0367	0,0369	0,0365	0,0361	0,0378	0,0388	0,0366	0,0346	0,0372
		Z2	0,0066	0,0049	0,0045	0,0045	0,0050	0,0054	0,0040	0,0049	0,0052	0,0045
		Z3	0,0015	0,0008	0,0005	0,0006	0,0009	0,0012	0,0003	0,0008	0,0010	0,0005
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,0152	0,1697	0,2143	0,2219	0,2053	0,1431	0,2365	0,2373	0,2813	0,2199
	Z2	0,33	0,0021	0,0285	0,0625	0,0504	0,0305	0,0113	0,0986	0,0411	0,0316	0,0582
	Z3	0,33	0,0010	0,0100	0,0249	0,0199	0,0090	0,0040	0,0528	0,0110	0,0070	0,0239
	Z1	0,50	0,0146	0,1639	0,2026	0,2117	0,1999	0,1402	0,2156	0,2306	0,2766	0,2081
	Z2	0,50	0,0018	0,0245	0,0539	0,0434	0,0264	0,0097	0,0862	0,0359	0,0280	0,0503
	Z3	0,50	0,0010	0,0100	0,0249	0,0199	0,0090	0,0040	0,0528	0,0110	0,0070	0,0239
	Z1	0,67	0,0142	0,1600	0,1947	0,2048	0,1960	0,1381	0,2013	0,2259	0,2731	0,2002
	Z2	0,67	0,0016	0,0217	0,0475	0,0383	0,0236	0,0086	0,0791	0,0324	0,0257	0,0443
	Z3	0,67	0,0010	0,0100	0,0249	0,0199	0,0090	0,0040	0,0528	0,0110	0,0070	0,0239
Prop. indeksu ubóstwa		Z1	0,3672	0,3458	0,3463	0,3419	0,3417	0,3430	0,3487	0,3383	0,3334	0,3433
		Z2	0,1110	0,1075	0,1049	0,1060	0,1063	0,1097	0,1050	0,1039	0,1043	0,1056
		Z3	0,0370	0,0367	0,0362	0,0364	0,0367	0,0369	0,0353	0,0367	0,0368	0,0362
Dochody średnie			1219,4	740,56	767,35	685,01	663,61	704,44	774,21	607,18	577,96	687,82

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze publicznym

	c	Sektor publiczny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor publiczny: Działalność produkcyjna	Sektor publiczny: Handel	Sektor publiczny: Budownictwo	Sektor publiczny: Hotele i restauracje	Sektor publiczny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor publiczny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor publiczny: Edukacja	Sektor publiczny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor publiczny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	1,4763	0,5697	1,1676	0,5042	0,3882	0,2898	1,4347	0,2665	0,3013	0,4642
	1	9,1226	14,5058	18,5073	14,0094	15,0731	12,0749	29,7873	14,7939	16,0280	12,8802
	2	9,7868	15,6735	19,8073	15,1679	16,5535	13,2626	31,4352	16,3972	17,5747	14,0009
Indeks Pietra		0,1172	0,1645	0,2037	0,1678	0,1506	0,1255	0,1998	0,1334	0,1413	0,1642
	e										
Indeks Atkinsona	0,50	0,0211	0,0414	0,0599	0,0448	0,0362	0,0259	0,0644	0,0291	0,0339	0,0445
	1,00	0,9894	0,9681	0,9673	0,9674	0,9700	0,9742	0,9682	0,9749	0,9740	0,9670
	2,00	0,0971	0,1603	0,2340	0,1744	0,1373	0,0984	0,2738	0,1168	0,1164	0,1796
	∞	0,8770	0,7975	0,8045	0,7810	0,7740	0,7871	0,8063	0,7530	0,7405	0,7819
Entropia		2,770801783	3,16922307	3,212916613	3,114147425	3,047864437	2,97243762	3,201414347	2,92391181	2,795460939	3,132793188
Indeks Giniego		0,1568	0,2288	0,2761	0,2355	0,2122	0,1775	0,2804	0,1889	0,1992	0,2335
Prop. indeksu nierówności		0,8800	0,8637	0,8652	0,8640	0,8647	0,8663	0,8673	0,8668	0,8680	0,8639

Tabela 7.6-5

Ubóstwo we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze prywatnym

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
699,1	387,7	327,3

			Sektor prywatny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor prywatny: Działalność produkcyjna	Sektor prywatny: Handel	Sektor prywatny: Budownictwo	Sektor prywatny: Hotele i restauracje	Sektor prywatny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor prywatny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor prywatny: Edukacja	Sektor prywatny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor prywatny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich	Z1		32,7%	61,4%	73,0%	59,0%	82,4%	52,0%	20,6%	60,2%	78,6%	84,4%
	Z2		7,4%	22,1%	29,7%	18,4%	48,9%	15,0%	0,9%	18,5%	31,8%	34,2%
	Z3		3,1%	8,7%	11,8%	8,2%	26,7%	5,6%	0,0%	7,8%	11,8%	12,8%
Y_Dśr	Z1		476,73	420,70	402,05	440,51	340,79	444,92	549,51	436,01	404,38	403,63
	Z2		261,22	256,43	265,12	276,63	235,19	271,73	320,00	263,35	272,33	270,47
	Z3		150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	-	150,00	150,00	150,00
Stosunek luk dochodów	Z1		0,3181	0,3982	0,4249	0,3699	0,5125	0,3636	0,2140	0,3783	0,4216	0,4226
	Z2		0,3262	0,3386	0,3162	0,2865	0,3934	0,2991	0,1746	0,3207	0,2976	0,3024
	Z3		0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	1,0000	0,5417	0,5417	0,5417
		α										
P_{FGT}	Z1	1,00	0,0669	0,2068	0,2673	0,1698	0,3491	0,1638	0,0362	0,1952	0,2673	0,3091
	Z2	1,00	0,0099	0,0309	0,0390	0,0224	0,0776	0,0184	0,0011	0,0243	0,0393	0,0435
	Z3	1,00	0,0026	0,0081	0,0098	0,0052	0,0223	0,0047	-	0,0063	0,0097	0,0105
	Z1	0,50	0,1614	0,3444	0,4287	0,3215	0,5234	0,2801	0,0655	0,3294	0,4624	0,4964
	Z2	0,50	0,0250	0,0768	0,0992	0,0589	0,1843	0,0476	0,0032	0,0616	0,1021	0,1122
	Z3	0,50	0,0090	0,0280	0,0341	0,0179	0,0771	0,0162	-	0,0219	0,0335	0,0364
	Z1	0,33	0,2024	0,4149	0,5097	0,3910	0,6066	0,3420	0,1143	0,4001	0,5499	0,5900
	Z2	0,33	0,0353	0,1077	0,1406	0,0848	0,2525	0,0685	0,0045	0,0873	0,1464	0,1600
	Z3	0,33	0,0137	0,0427	0,0520	0,0273	0,1176	0,0247	-	0,0335	0,0511	0,0555
P_e	Z1		0,0394	0,0386	0,0379	0,0378	0,0411	0,0377	0,0368	0,0379	0,0374	0,0376
	Z2		0,0042	0,0038	0,0039	0,0041	0,0035	0,0042	0,0051	0,0040	0,0040	0,0039
	Z3		0,0004	0,0002	0,0001	0,0002	0,0001	0,0003	0,0017	0,0002	0,0001	0,0001
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,1524	0,3638	0,4488	0,3070	0,6462	0,2690	0,0510	0,3286	0,4716	0,5085
	Z2	0,33	0,0578	0,1765	0,2262	0,1290	0,4281	0,1104	0,0020	0,1430	0,2318	0,2510
	Z3	0,33	0,0309	0,0967	0,1176	0,0618	0,2662	0,0558	-	0,0758	0,1156	0,1256
	Z1	0,50	0,1392	0,3316	0,4120	0,2833	0,5946	0,2474	0,0508	0,3009	0,4343	0,4682
	Z2	0,50	0,0518	0,1586	0,2011	0,1132	0,3950	0,0975	0,0020	0,1274	0,2044	0,2218
	Z3	0,50	0,0309	0,0967	0,1176	0,0618	0,2662	0,0558	-	0,0758	0,1156	0,1256
	Z1	0,67	0,1302	0,3088	0,3859	0,2670	0,5530	0,2327	0,0505	0,2818	0,4082	0,4399
	Z2	0,67	0,0462	0,1425	0,1796	0,1005	0,3617	0,0866	0,0020	0,1139	0,1817	0,1974
	Z3	0,67	0,0309	0,0967	0,1176	0,0618	0,2662	0,0558	-	0,0758	0,1156	0,1256
Prop. indeksu ubóstwa	Z1		0,3543	0,3440	0,3406	0,3439	0,3419	0,3467	0,3589	0,3436	0,3382	0,3360
	Z2		0,1075	0,1008	0,0971	0,1018	0,0911	0,1036	0,1106	0,1022	0,0958	0,0948
	Z3		0,0360	0,0339	0,0332	0,0350	0,0290	0,0352	0,0370	0,0345	0,0333	0,0330
Dochody średnie			872,4	841,7	571,42	660,99	458,23	720,77	1003,97	651,63	534,57	479,68

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej w sektorze prywatnym

	c	Sektor prywatny: Górnictwo i kopalnictwo	Sektor prywatny: Działalność produkcyjna	Sektor prywatny: Handel	Sektor prywatny: Budownictwo	Sektor prywatny: Hotele i restauracje	Sektor prywatny: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Sektor prywatny: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Sektor prywatny: Edukacja	Sektor prywatny: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Sektor prywatny: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Indeks Kai-Yuen Tsuna	0,01	1,0551	1,0963	1,1353	0,7833	1,9443	0,9885	1,3558	0,8379	0,8090	0,5425
(Absolutny)	1	19,0991	44,3991	48,4317	28,3858	79,0018	28,6673	29,6185	34,8280	41,3143	38,2438
	2	20,7465	46,0470	48,0796	30,0335	80,6495	30,3152	31,2621	36,4760	42,9622	39,8918
Indeks Pietra		0,1786	0,2115	0,2232	0,1968	0,2505	0,2016	0,1366	0,1992	0,2057	0,1752
	e										
Indeks Atkinsona	0,50	0,0505	0,0734	0,0804	0,0625	0,1012	0,0639	0,0287	0,0651	0,0725	0,0564
	1,00	0,9702	0,9652	0,9676	0,9651	0,9709	0,9654	0,9860	0,9653	0,9690	0,9739
	2,00	0,2332	0,2974	0,2984	0,2552	0,3438	0,2663	0,1199	0,2683	0,2702	0,2282
	∞	0,8281	0,7662	0,7375	0,7731	0,6727	0,7919	0,8506	0,7698	0,7194	0,6873
Entropia		3,249465227	3,119448662	2,950350285	3,152174711	2,607254267	3,215067387	2,791038752	3,133535862	2,861563444	2,725321293
Indeks Giniego		0,2464	0,3009	0,3170	0,2776	0,3759	0,2809	0,1685	0,2823	0,2981	0,2597
Prop. indeksu nierówności		0,8659	0,8637	0,8650	0,8634	0,8665	0,8638	0,8761	0,8635	0,8655	0,8677

Tabela 7.6-7

Ubóstwo we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej dla wybranych województw

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
699,1	387,7	327,3

			Ogółem: Warszawa	Ogółem: Ciechanów	Ogółem: Legnica	Ogółem: Katowice	Ogółem: Kraków	Ogółem: Nowy Sącz	Ogółem: Opole	Ogółem: Przemyśl	Ogółem: Wałbrzych	Ogółem: Wrocław
Procent ubogich		Z1	42,0%	72,7%	49,2%	40,0%	52,5%	71,8%	57,5%	66,6%	62,2%	56,4%
		Z2	8,5%	21,6%	11,5%	8,8%	10,5%	19,7%	11,5%	15,7%	13,1%	11,0%
		Z3	2,9%	6,8%	3,0%	2,4%	2,8%	7,3%	2,8%	4,5%	3,7%	3,3%
Y_Dśr		Z1	474,64	443,58	463,70	470,50	474,51	447,23	474,09	463,59	470,79	476,86
		Z2	278,47	281,30	293,04	290,45	291,81	271,42	297,04	287,83	287,86	285,73
		Z3	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00	150,00
Stosunek luk dochodów		Z1	0,3211	0,3655	0,3367	0,3270	0,3212	0,3603	0,3219	0,3369	0,3266	0,3179
		Z2	0,2817	0,2744	0,2441	0,2508	0,2473	0,2999	0,2338	0,2576	0,2575	0,2630
		Z3	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417	0,5417
		α										
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1174	0,2323	0,1460	0,1149	0,1484	0,2246	0,1634	0,1969	0,1785	0,1570
	Z2	1,00	0,0098	0,0253	0,0121	0,0095	0,0112	0,0244	0,0116	0,0173	0,0146	0,0122
	Z3	1,00	0,0024	0,0057	0,0025	0,0020	0,0023	0,0061	0,0023	0,0038	0,0031	0,0028
	Z1	0,50	0,2121	0,3955	0,2575	0,2052	0,2673	0,3862	0,2941	0,3478	0,3193	0,2848
	Z2	0,50	0,0261	0,0675	0,0336	0,0261	0,0309	0,0633	0,0327	0,0470	0,0397	0,0331
	Z3	0,50	0,0084	0,0198	0,0087	0,0069	0,0081	0,0211	0,0081	0,0130	0,0107	0,0095
	Z1	0,33	0,2644	0,4816	0,3176	0,2546	0,3325	0,4721	0,3654	0,4292	0,3962	0,3553
	Z2	0,33	0,0379	0,0976	0,0496	0,0384	0,0455	0,0907	0,0487	0,0689	0,0580	0,0484
	Z3	0,33	0,0128	0,0300	0,0132	0,0106	0,0123	0,0322	0,0123	0,0198	0,0163	0,0145
P_B		Z1	0,0377	0,0373	0,0369	0,0374	0,0371	0,0372	0,0368	0,0369	0,0370	0,0372
		Z2	0,0045	0,0041	0,0044	0,0045	0,0044	0,0041	0,0045	0,0043	0,0043	0,0044
		Z3	0,0004	0,0002	0,0004	0,0005	0,0004	0,0002	0,0004	0,0003	0,0004	0,0004
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,1847	0,3670	0,2169	0,1741	0,2217	0,3649	0,2400	0,3012	0,2700	0,2396
	Z2	0,33	0,0597	0,1461	0,0700	0,0549	0,0647	0,1447	0,0673	0,1007	0,0835	0,0722
	Z3	0,33	0,0289	0,0678	0,0299	0,0239	0,0279	0,0728	0,0279	0,0449	0,0369	0,0329
	Z1	0,50	0,1717	0,3402	0,2055	0,1632	0,2087	0,3363	0,2268	0,2815	0,2532	0,2244
	Z2	0,50	0,0523	0,1276	0,0605	0,0476	0,0560	0,1277	0,0580	0,0874	0,0725	0,0628
	Z3	0,50	0,0289	0,0678	0,0299	0,0239	0,0279	0,0728	0,0279	0,0449	0,0369	0,0329
	Z1	0,67	0,1630	0,3219	0,1966	0,1559	0,1999	0,3169	0,2179	0,2683	0,2419	0,2142
	Z2	0,67	0,0483	0,1129	0,0534	0,0420	0,0494	0,1136	0,0511	0,0772	0,0641	0,0555
	Z3	0,67	0,0289	0,0678	0,0299	0,0239	0,0279	0,0728	0,0279	0,0449	0,0369	0,0329
Prop. indeksu ubóstwa		Z1	0,3500	0,3378	0,3471	0,3510	0,3450	0,3380	0,3428	0,3392	0,3408	0,3431
		Z2	0,1067	0,1002	0,1049	0,1064	0,1054	0,1014	0,1048	0,1029	0,1042	0,1053
		Z3	0,0361	0,0348	0,0360	0,0362	0,0361	0,0346	0,0361	0,0355	0,0358	0,0359
Dochody średnie			825,04	575,7	807,49	846,88	716,35	574,99	679,87	613,57	641,91	694,89

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1995 roku w różnych działach gospodarki polskiej dla wybranych województw

		Ogółem: Warszawa	Ogółem: Ciechanów	Ogółem: Legnica	Ogółem: Katowice	Ogółem: Kraków	Ogółem: Nowy Sącz	Ogółem: Opole	Ogółem: Przemyśl	Ogółem: Wałbrzych	Ogółem: Wrocław
	c										
Indeks Kai-Yuen Tsuna	0,01	1,4832	0,4991	1,8919	1,3257	0,6709	0,4545	0,5550	0,4128	0,4325	0,6553
(Absolutny)	1	16,6760	25,6518	19,8816	16,1201	16,1002	27,7284	15,2426	17,5810	15,1064	15,0372
	2	17,9715	27,2997	21,0952	17,0524	17,6510	29,3764	16,5871	19,2128	16,5681	16,3651
Indeks Pietra		0,1967	0,1761	0,2217	0,1979	0,1799	0,1689	0,1740	0,1653	0,1658	0,1781
	e										
Indeks Atkinsona	0,50	0,0582	0,0544	0,0683	0,0574	0,0509	0,0513	0,0485	0,0471	0,0464	0,0514
	1,00	0,9693	0,9688	0,9697	0,9689	0,9662	0,9691	0,9667	0,9682	0,9673	0,9671
	2,00	0,2416	0,2193	0,2661	0,2401	0,2057	0,2163	0,1933	0,1939	0,1905	0,2066
	∞	0,8182	0,7394	0,8142	0,8229	0,7906	0,7391	0,7794	0,7555	0,7663	0,7841
Entropia		3,218113661	2,96973443	3,179484367	3,258136511	3,188414335	2,989156742	3,13628149	3,032523632	3,082662582	3,143609782
Indeks Giniego		0,2696	0,2546	0,2940	0,2682	0,2518	0,2456	0,2449	0,2372	0,2367	0,2512
Prop. indeksu nierówności		0,8679	0,8651	0,8695	0,8663	0,8636	0,8653	0,8637	0,8647	0,8642	0,8642

Tabela 7.7-1

Ubóstwo we wrześniu 1995 roku w Polsce ogółem oraz w wybranych województwach, wraz z bezrobotnymi

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z2 - linia ubóstwa subiektywnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z2	Z3
699,1	387,7	327,3

			Ogółem	Warszawa	Ciechanów	Legnica	Katowice	Kraków	Nowy Sącz	Opole	Przemyśl	Wałbrzych	Wrocław
Procent ubogich	Z1		62,8%	45,2%	78,4%	59,0%	45,6%	56,3%	75,9%	63,5%	72,3%	71,6%	61,6%
	Z2		25,8%	13,5%	37,8%	28,5%	17,4%	17,7%	31,4%	23,9%	30,1%	34,7%	21,6%
	Z3		18,4%	8,2%	26,1%	21,6%	11,6%	10,7%	20,8%	16,4%	20,8%	27,7%	14,8%
Y_pśr	Z1		371,80	429,27	346,88	333,49	388,96	418,29	379,40	384,61	371,28	328,78	399,39
	Z2		161,20	206,68	169,82	138,61	173,66	196,70	189,25	163,14	165,99	126,24	170,09
	Z3		88,14	117,85	92,54	73,53	88,76	99,46	111,15	80,50	87,00	71,18	90,46
Stosunek luk dochodów	Z1		0,4682	0,3860	0,5038	0,5230	0,4436	0,4017	0,4573	0,4499	0,4689	0,5297	0,4287
	Z2		0,5842	0,4669	0,5620	0,6425	0,5521	0,4926	0,5119	0,5792	0,5719	0,6744	0,5613
	Z3		0,7307	0,6399	0,7173	0,7753	0,7288	0,6961	0,6604	0,7541	0,7342	0,7825	0,7236
		α											
P_{FGT}	Z1	1,00	0,2679	0,1580	0,3610	0,2820	0,1844	0,2056	0,3165	0,2601	0,3093	0,3467	0,2400
	Z2	1,00	0,1229	0,0498	0,1726	0,1513	0,0779	0,0699	0,1285	0,1131	0,1403	0,1944	0,0984
	Z3	1,00	0,1061	0,0401	0,1470	0,1342	0,0665	0,0579	0,1057	0,0984	0,1208	0,1737	0,0843
	Z1	0,50	0,3859	0,2511	0,5042	0,3849	0,2725	0,3202	0,4643	0,3818	0,4458	0,4691	0,3605
	Z2	0,50	0,1598	0,0711	0,2282	0,1892	0,1030	0,0968	0,1773	0,1463	0,1834	0,2400	0,1296
	Z3	0,50	0,1309	0,0523	0,1826	0,1619	0,0821	0,0728	0,1358	0,1199	0,1488	0,2089	0,1044
	Z1	0,33	0,4483	0,3019	0,5777	0,4383	0,3196	0,3822	0,5413	0,4467	0,5176	0,5331	0,4256
	Z2	0,33	0,1818	0,0848	0,2618	0,2111	0,1185	0,1140	0,2075	0,1666	0,2095	0,2653	0,1486
	Z3	0,33	0,1443	0,0595	0,2023	0,1762	0,0906	0,0812	0,1534	0,1313	0,1639	0,2270	0,1154
P_S	Z1		0,0629	0,0624	0,0625	0,0638	0,0629	0,0620	0,0617	0,0626	0,0626	0,0644	0,0628
	Z2		0,0228	0,0251	0,0229	0,0218	0,0236	0,0246	0,0237	0,0231	0,0230	0,0211	0,0233
	Z3		0,0148	0,0173	0,0148	0,0138	0,0152	0,0159	0,0160	0,0144	0,0146	0,0135	0,0151
		r											
P_{BD}	Z1	0,33	0,4314	0,2446	0,5685	0,4534	0,2959	0,3215	0,4938	0,4199	0,4960	0,5614	0,3872
	Z2	0,33	0,2335	0,1078	0,3361	0,2683	0,1534	0,1472	0,2645	0,2161	0,2703	0,3320	0,1920
	Z3	0,33	0,1801	0,0779	0,2545	0,2138	0,1132	0,1034	0,1988	0,1615	0,2041	0,2740	0,1447
	Z1	0,50	0,3908	0,2239	0,5188	0,4128	0,2679	0,2928	0,4507	0,3796	0,4496	0,5112	0,3500
	Z2	0,50	0,2194	0,0980	0,3136	0,2565	0,1427	0,1345	0,2434	0,2027	0,2530	0,3202	0,1791
	Z3	0,50	0,1773	0,0750	0,2497	0,2121	0,1114	0,1010	0,1926	0,1597	0,2010	0,2722	0,1422
	Z1	0,67	0,3602	0,2093	0,4803	0,3801	0,2473	0,2727	0,4191	0,3497	0,4148	0,4700	0,3230
	Z2	0,67	0,2044	0,0893	0,2907	0,2423	0,1319	0,1228	0,2237	0,1884	0,2349	0,3052	0,1660
	Z3	0,67	0,1731	0,0717	0,2430	0,2094	0,1087	0,0978	0,1849	0,1568	0,1964	0,2690	0,1386
Ciągły indeks ubóstwa	Z1		0,4206	0,4245	0,4167	0,4242	0,4261	0,4204	0,4152	0,4195	0,4171	0,4204	0,4194
	Z2		0,1775	0,1800	0,1734	0,1778	0,1795	0,1787	0,1743	0,1780	0,1760	0,1771	0,1784
	Z3		0,1075	0,1090	0,1058	0,1076	0,1088	0,1087	0,1061	0,1082	0,1071	0,1068	0,1081
Dochody średnie			607,1295	785,26311	472,587348	664,7164	774,285168	665,081314	504,846344	594,28436	521,17564	497,607684	621,232536

Tabela 7.7-2

Nierówności ekonomiczne we wrześniu 1995 roku w Polsce ogółem oraz w wybranych województwach, wraz z bezrobotnymi

	c	Ogółem	Warszawa	Ciechanów	Legnica	Katowice	Kraków	Nowy Sącz	Opole	Przemyśl	Wałbrzych	Wrocław
Indeks Kai-Yuen Tsuna (Absolutny)	0,01	1,1620	1,3850	0,9681	2,7104	1,4809	0,7074	0,6281	0,8924	0,8455	1,5075	0,8616
	1	42,1679	18,2915	45,5455	60,4455	33,0324	23,5844	33,4871	38,2334	41,1934	58,5849	33,5984
	2	43,8511	19,9129	47,2291	62,1291	34,7078	25,2523	35,1701	39,9163	42,8769	60,2685	35,2797
	e											
Indeks Atkinsona	0,50	0,1431	0,0890	0,1666	0,1821	0,1136	0,0971	0,1279	0,1301	0,1434	0,1910	0,1198
	1,00	0,9705	0,9742	0,9723	0,9734	0,9734	0,9711	0,9728	0,9709	0,9719	0,9709	0,9714
	2,00	0,9787	0,9564	0,9801	0,9847	0,9735	0,9646	0,9737	0,9767	0,9782	0,9842	0,9739
	∞	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Entropia		3,220573425	3,292222738	3,008435726	3,191217661	3,328723431	3,267502785	3,052567005	3,199206114	3,089958668	3,048907042	3,216932535
Indeks Giniego		0,3559	0,3010	0,3725	0,4088	0,3263	0,3004	0,3252	0,3325	0,3414	0,3945	0,3237
Ciągły indeks nierówności		0,8790	0,8914	0,8727	0,8957	0,8890	0,8765	0,8710	0,8741	0,8714	0,8714	0,8775

Tabela 7.8

Ubóstwo w Polsce we wrześniu 1996 roku określone według indeksów ubóstwa oraz indeksów nierówności ekonomicznej

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z3
873	407

			Ogółem
Procent ubogich		Z1	58,7%
		Z3	4,5%
Y_pśr		Z1	592,62
		Z3	190,00
Stosunek luk dochodów		Z1	0,3212
		Z3	0,5332
		α	
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1663
	Z3	1,00	0,0030
	Z1	0,50	0,2945
	Z3	0,50	0,0116
	Z1	0,33	0,3659
	Z3	0,33	0,0184
P_S		Z1	0,0474
		Z3	0,0002
		r	
P_{BD}	Z1	0,33	0,2620
	Z3	0,33	0,0449
	Z1	0,50	0,2415
	Z3	0,50	0,0449
	Z1	0,67	0,2277
	Z3	0,67	0,0449
Ciągły indeks ubóstwa		Z1	0,3494
		Z3	0,0274
Dochody średnie			901,86

Tabela 7.9-1

Ubóstwo we wrześniu 1997 roku w różnych działach gospodarki polskiej ogółem

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

Z1	Z3
1046	485

			Ogółem	Ogółem: Górnictwo i kopalnictwo	Ogółem: Działalność produkcyjna	Ogółem: Handel	Ogółem: Budownictwo	Ogółem: Hotele i restauracje	Ogółem: Transport, gospodarka magazynowa i łączność	Ogółem: Administracja publiczna i obrona narodowa; gwarantowana prawnie opieka socjalna	Ogółem: Edukacja	Ogółem: Ochrona zdrowia i opieka socjalna	Ogółem: Rolnictwo, łowiectwo i leśnictwo
Procent ubogich	Z1		56,8%	6,5%	57,6%	66,4%	57,1%	77,7%	50,0%	44,0%	63,6%	78,4%	59,0%
	Z3		4,6%	0,1%	6,5%	9,7%	5,8%	19,6%	1,3%	5,8%	1,0%	1,0%	5,4%
Y_pśr	Z1		706,51	831,85	684,22	635,77	687,46	564,99	799,90	682,50	761,35	734,06	685,32
	Z3		230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00
Stosunek luk dochodów	Z1		0,3246	0,2047	0,3459	0,3922	0,3428	0,4599	0,2353	0,3475	0,2721	0,2982	0,3448
	Z3		0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258
		α											
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1643	0,0119	0,1752	0,2282	0,1732	0,3031	0,1055	0,1328	0,1589	0,2168	0,1813
	Z3	1,00	0,0024	0,0001	0,0034	0,0050	0,0030	0,0101	0,0007	0,0030	0,0005	0,0005	0,0028
	Z1	0,50	0,2899	0,0257	0,3015	0,3732	0,2981	0,4700	0,2161	0,2283	0,3004	0,3969	0,3116
	Z3	0,50	0,0104	0,0002	0,0148	0,0220	0,0132	0,0445	0,0030	0,0132	0,0023	0,0023	0,0123
	Z1	0,33	0,3591	0,0345	0,3703	0,4485	0,3662	0,5524	0,2828	0,2809	0,3817	0,4951	0,3818
	Z3	0,33	0,0173	0,0004	0,0244	0,0365	0,0218	0,0737	0,0049	0,0218	0,0038	0,0038	0,0203
P_S	Z1		0,0554	0,0618	0,0564	0,0568	0,0566	0,0594	0,0555	0,0579	0,0542	0,0509	0,0556
	Z3		0,0002	0,0009	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0004	0,0002	0,0005	0,0005	0,0002
		r											
P_{BD}	Z1	0,33	0,2567	0,0165	0,2911	0,3821	0,2804	0,5519	0,1493	0,2320	0,2051	0,2683	0,2840
	Z3	0,33	0,0459	0,0010	0,0649	0,0968	0,0579	0,1956	0,0130	0,0579	0,0100	0,0100	0,0539
	Z1	0,50	0,2356	0,0158	0,2640	0,3469	0,2556	0,5003	0,1414	0,2086	0,1984	0,2618	0,2605
	Z3	0,50	0,0459	0,0010	0,0649	0,0968	0,0579	0,1956	0,0130	0,0579	0,0100	0,0100	0,0539
	Z1	0,67	0,2216	0,0154	0,2457	0,3227	0,2389	0,4617	0,1363	0,1926	0,1937	0,2573	0,2448
	Z3	0,67	0,0459	0,0010	0,0649	0,0968	0,0579	0,1956	0,0130	0,0579	0,0100	0,0100	0,0539
Ciągły indeks ubóstwa	Z1		0,5279	0,5517	0,5284	0,5265	0,5285	0,5254	0,5282	0,5347	0,5225	0,5165	0,5277
	Z3		0,0355	0,0370	0,0348	0,0338	0,0351	0,0307	0,0366	0,0351	0,0367	0,0367	0,0352
Dochody średnie			1046,76	1736,7	1015,35	941,87	1024,39	759,25	1099,47	1165,18	957,52	877,68	1006,5

Tabela 7.9-2

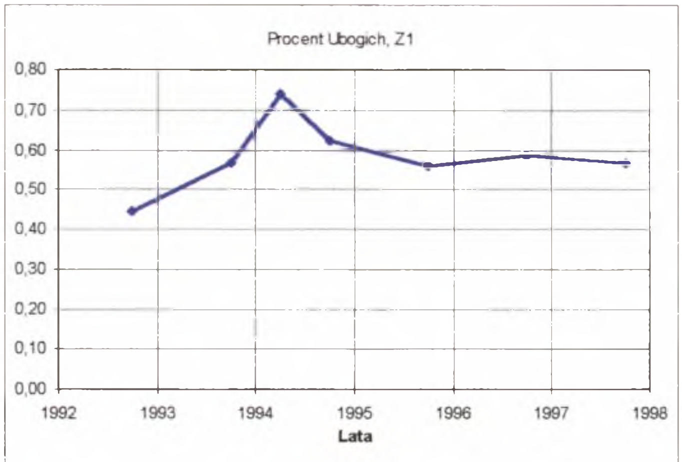
Ubóstwo we wrześniu 1997 roku w różnych działach gospodarki polskiej dla wybranych województw

(Z1 - linia ubóstwa względnego, Z3 - linia ubóstwa absolutnego)

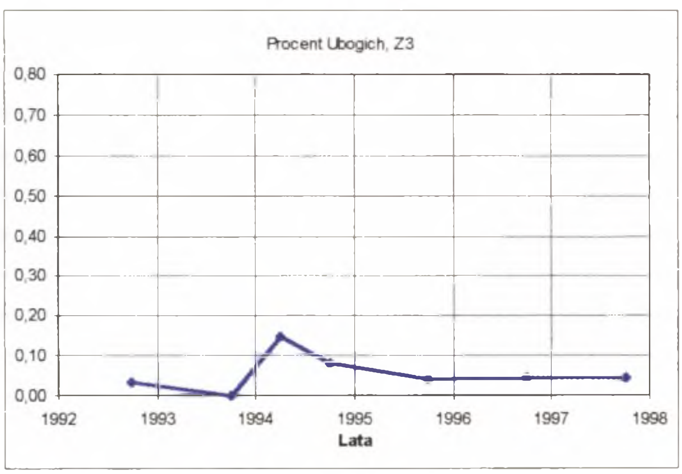
Z1	Z3
1046	485

			Ogółem: Warszawa	Ogółem: Ciechanów	Ogółem: Legnica	Ogółem: Katowice	Ogółem: Kraków	Ogółem: Nowy Sącz	Ogółem: Opole	Ogółem: Przemyśl	Ogółem: Wałbrzych	Ogółem: Wrocław
Procent ubogich		Z1	40,7%	71,1%	52,7%	42,3%	51,7%	71,6%	58,1%	68,9%	66,5%	58,6%
		Z3	2,6%	9,3%	3,7%	3,1%	3,9%	7,3%	3,3%	7,4%	3,9%	4,0%
Y_pśr		Z1	727,13	664,96	699,26	714,26	716,23	690,15	715,44	688,74	719,71	720,89
		Z3	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00	230,00
Stosunek luk dochodów		Z1	0,3049	0,3643	0,3315	0,3172	0,3153	0,3402	0,3160	0,3416	0,3119	0,3108
		Z3	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258	0,5258
		α										
P_{FGT}	Z1	1,00	0,1111	0,2267	0,1572	0,1198	0,1453	0,2152	0,1659	0,2073	0,1869	0,1629
	Z3	1,00	0,0013	0,0048	0,0019	0,0016	0,0020	0,0038	0,0017	0,0038	0,0020	0,0021
	Z1	0,50	0,2000	0,3832	0,2746	0,2130	0,2590	0,3742	0,2953	0,3594	0,3354	0,2928
	Z3	0,50	0,0059	0,0211	0,0084	0,0070	0,0089	0,0166	0,0075	0,0168	0,0089	0,0091
	Z1	0,33	0,2502	0,4667	0,3383	0,2649	0,3225	0,4605	0,3666	0,4422	0,4175	0,3652
	Z3	0,33	0,0098	0,0350	0,0139	0,0117	0,0147	0,0274	0,0124	0,0278	0,0147	0,0150
P_S		Z1	0,0564	0,0562	0,0547	0,0558	0,0559	0,0551	0,0545	0,0559	0,0542	0,0550
		Z3	0,0003	0,0001	0,0002	0,0003	0,0002	0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	0,0002
		r										
P_{BD}	Z1	0,33	0,1690	0,3829	0,2348	0,1847	0,2263	0,3496	0,2416	0,3416	0,2753	0,2489
	Z3	0,33	0,0259	0,0928	0,0369	0,0309	0,0389	0,0728	0,0329	0,0738	0,0389	0,0399
	Z1	0,50	0,1561	0,3465	0,2176	0,1701	0,2079	0,3183	0,2254	0,3102	0,2562	0,2296
	Z3	0,50	0,0259	0,0928	0,0369	0,0309	0,0389	0,0728	0,0329	0,0738	0,0389	0,0399
	Z1	0,67	0,1476	0,3217	0,2062	0,1604	0,1957	0,2974	0,2147	0,2891	0,2436	0,2169
	Z3	0,67	0,0259	0,0928	0,0369	0,0309	0,0389	0,0728	0,0329	0,0738	0,0389	0,0399
Ciągły indeks ubóstwa		Z1	0,5350	0,5231	0,5301	0,5346	0,5300	0,5217	0,5270	0,5230	0,5228	0,5265
		Z3	0,0361	0,0339	0,0358	0,0360	0,0357	0,0346	0,0359	0,0345	0,0357	0,0357
Dochody średnie			1245,77	877,48	1120,94	1227,82	1076,22	884,05	1019,94	907,31	947,78	1022,4

Ubóstwo w Polsce (1992-1997) jako procent ubogich (rys. 7.1a i 7.1b)



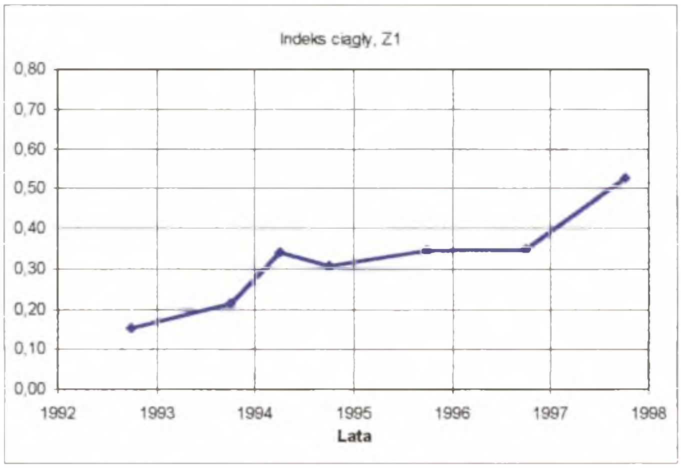
Rys. 7.1a



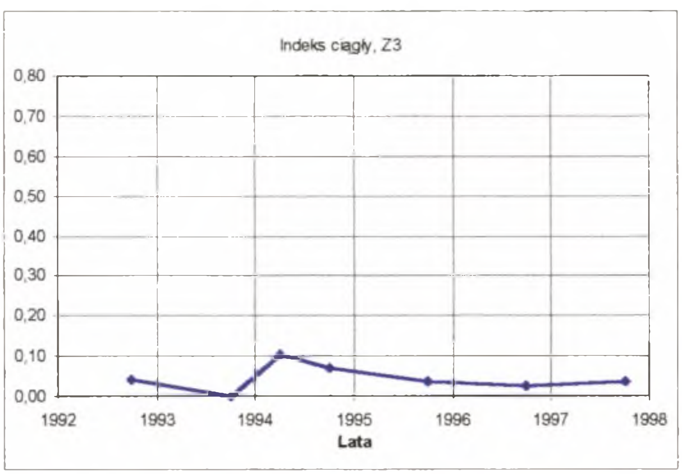
Rys. 7.1b

Z1 - Linia ubóstwa względnego
Z3 - Linia ubóstwa absolutnego

Ubóstwo w Polsce (cd.), określone według indeksu ciągłego (rys. 7.2a i 7.2b)



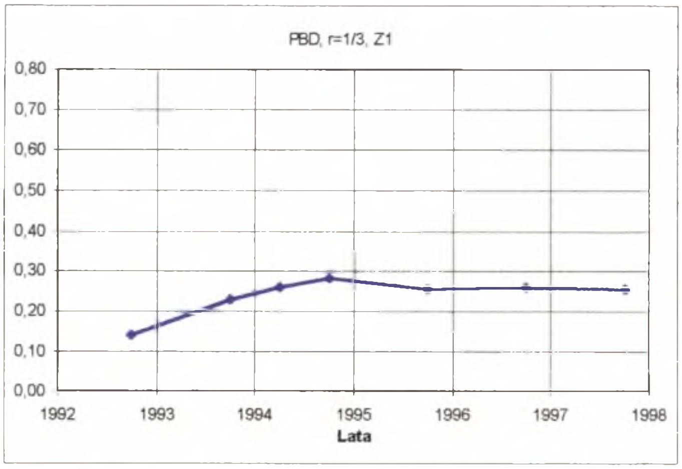
Rys. 7.2a



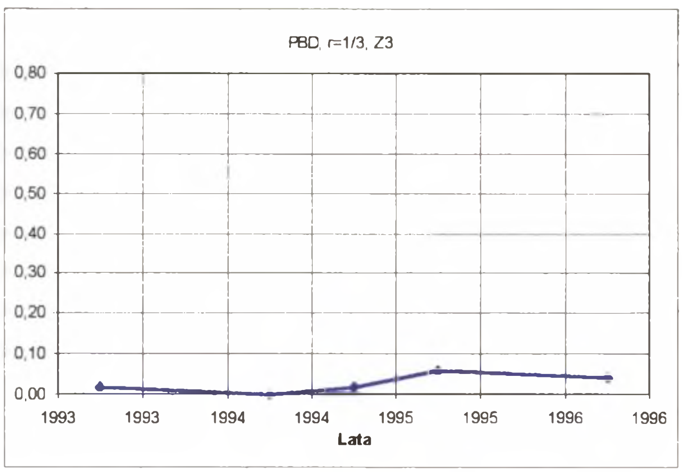
Rys. 7.2b

Z1 - Linia ubóstwa względnego
Z3 - Linia ubóstwa absolutnego

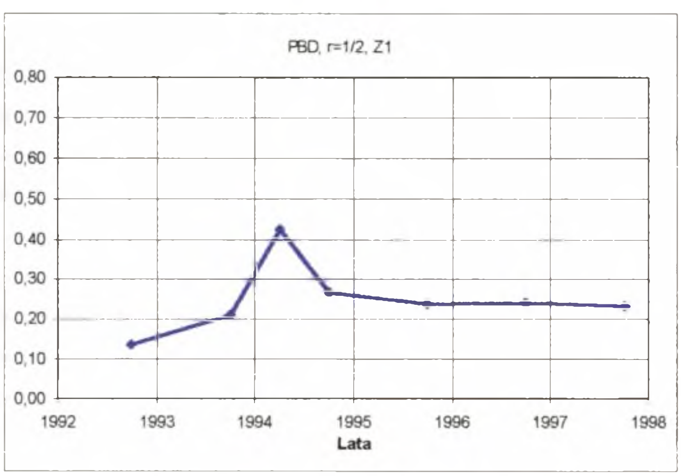
Ubóstwo w Polsce (cd.), określone według indeksu Blackorby'ego-Donaldsona



Rys. 7.3a



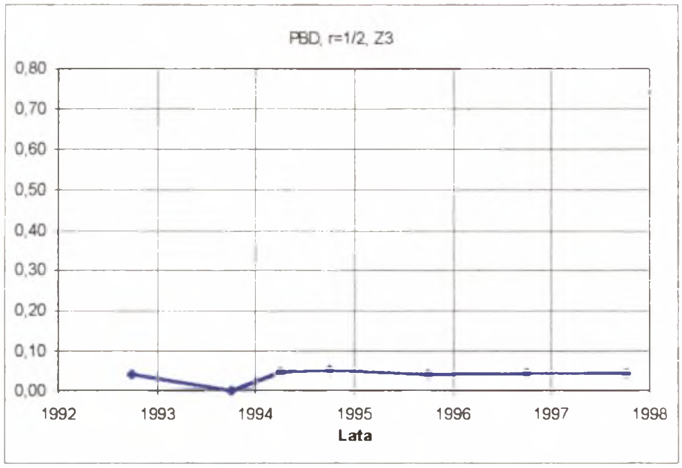
Rys. 7.3b



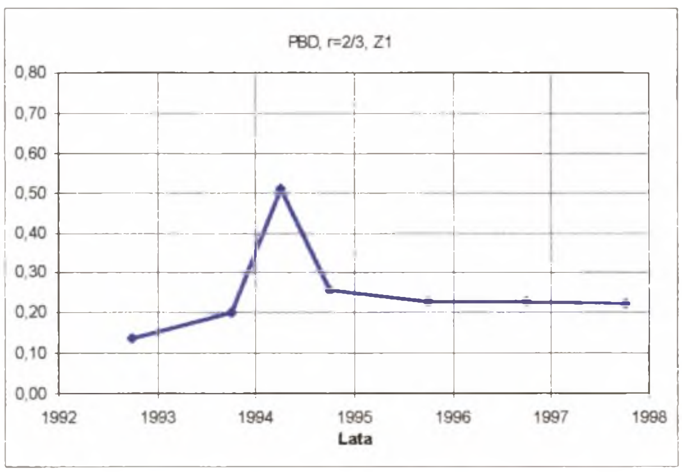
Rys. 7.3c

Z1 - Linia ubóstwa względnego
Z3 - Linia ubóstwa absolutnego

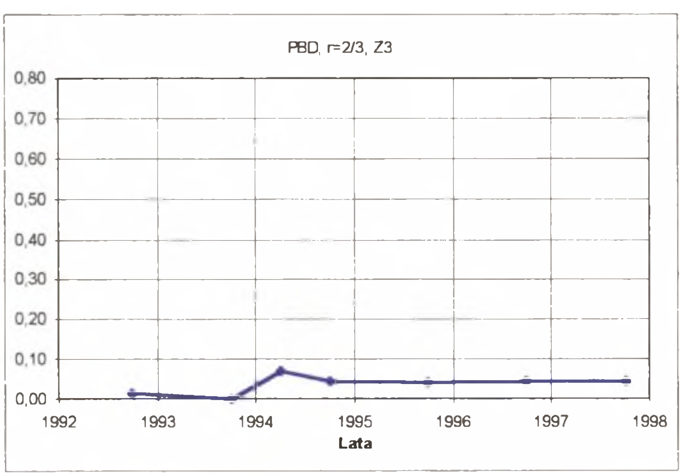
Ubóstwo w Polsce (cd.), określone według indeksu Blackorby'ego-Donaldsona



Rys. 7.3d

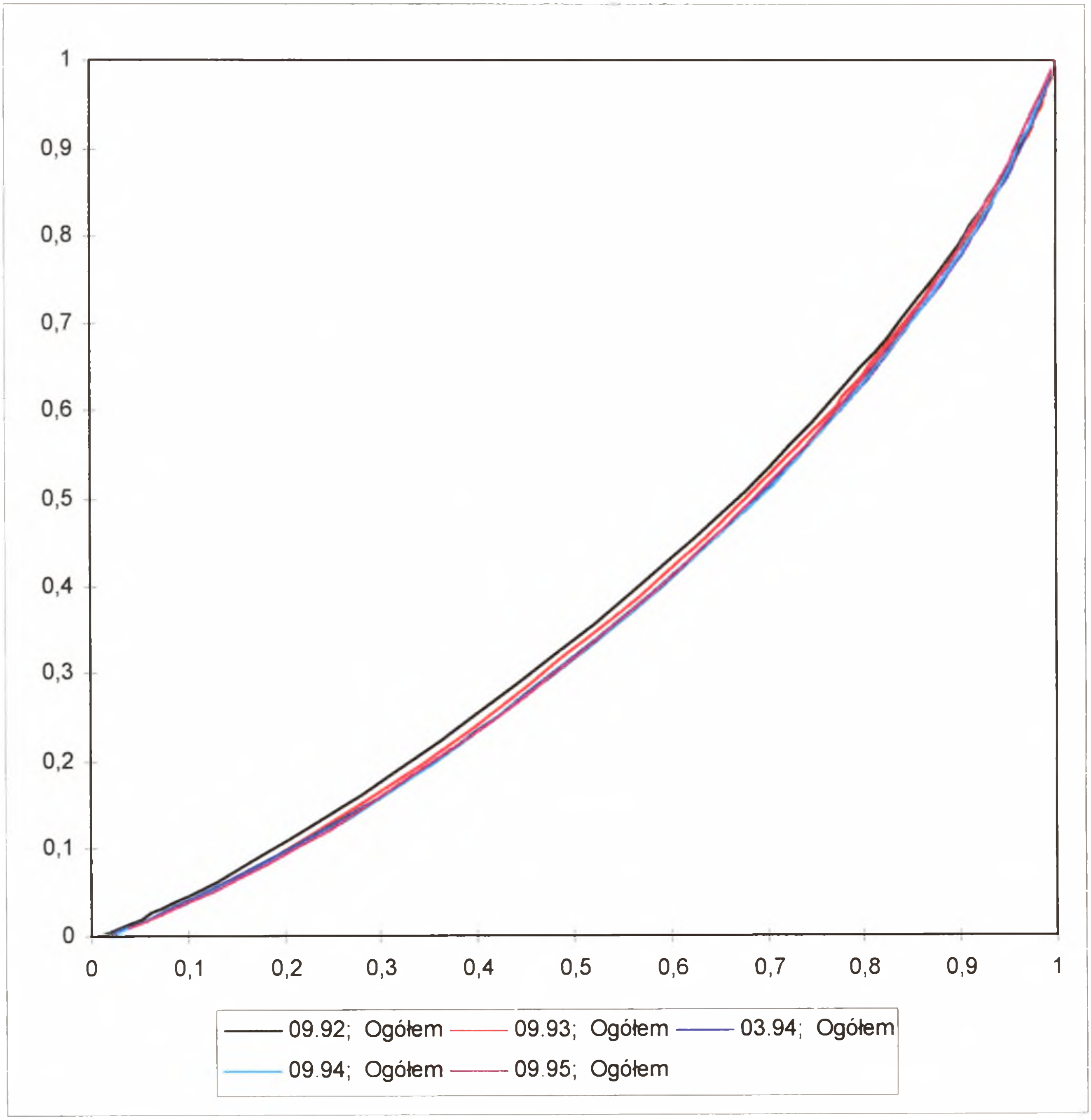


Rys. 7.3e



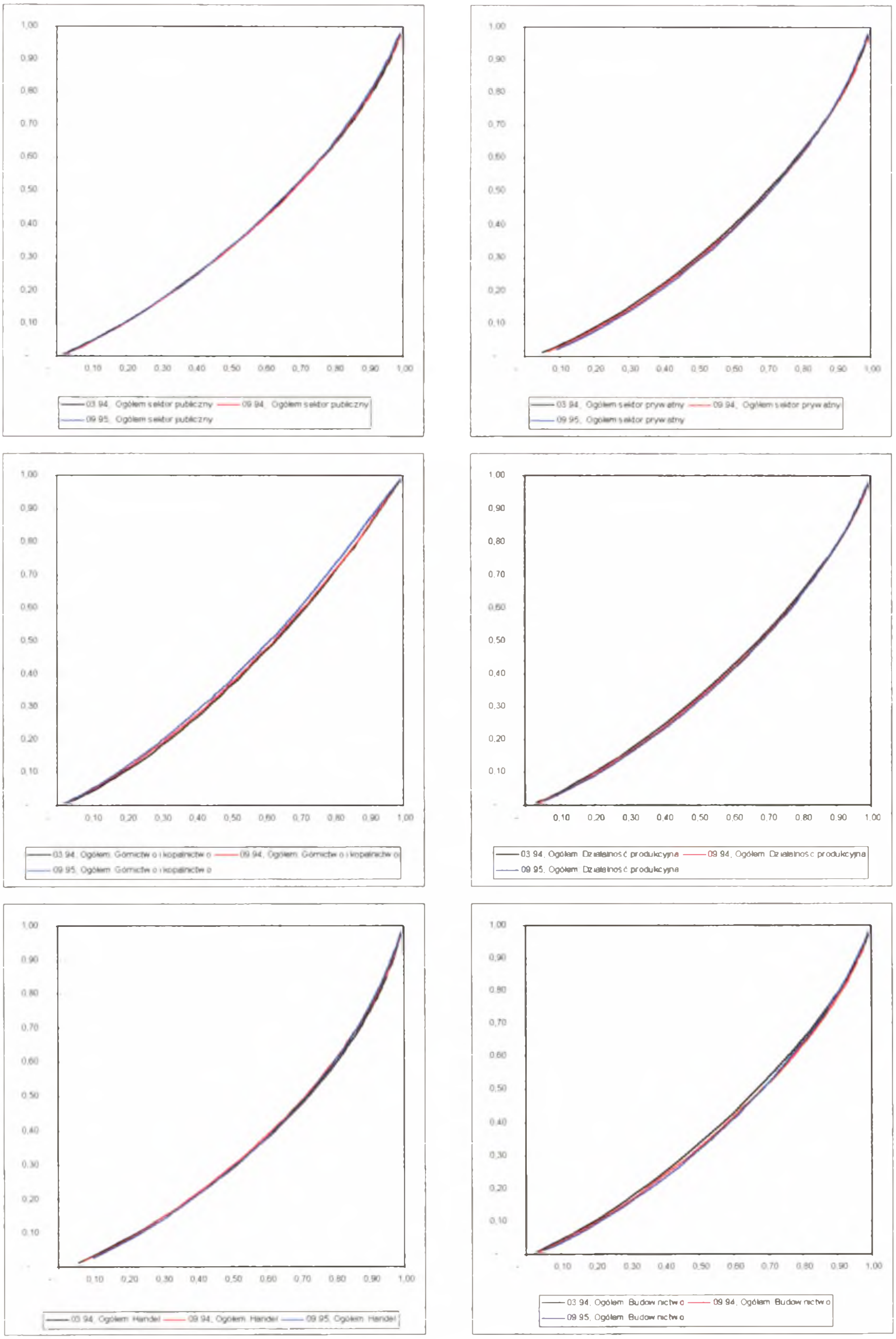
Rys. 7.3f

Z1 - Linia ubóstwa względnego
Z3 - Linia ubóstwa absolutnego



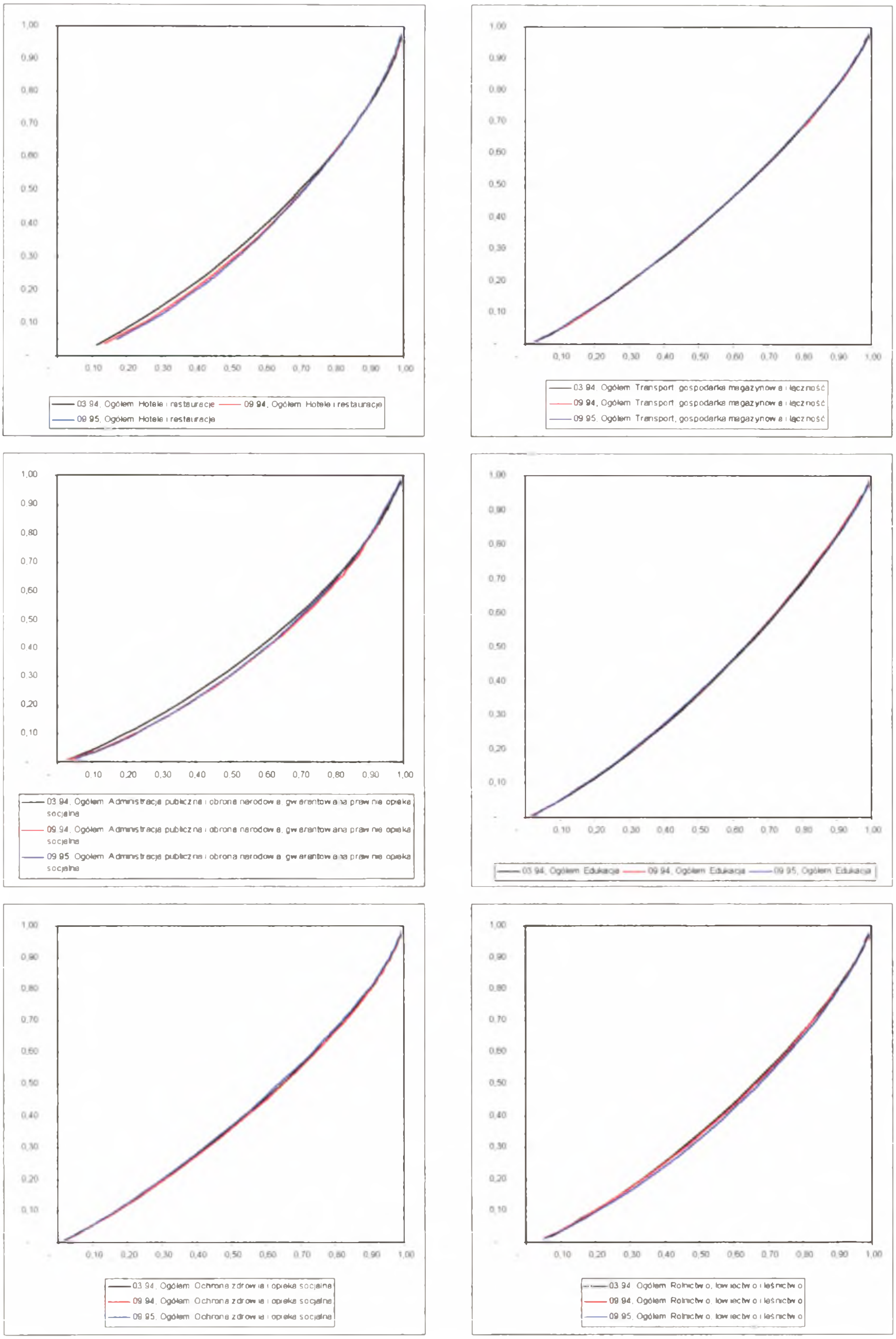
Rys. 7.4

Krzywe Lorenza dla Polski w latach 1992-1995



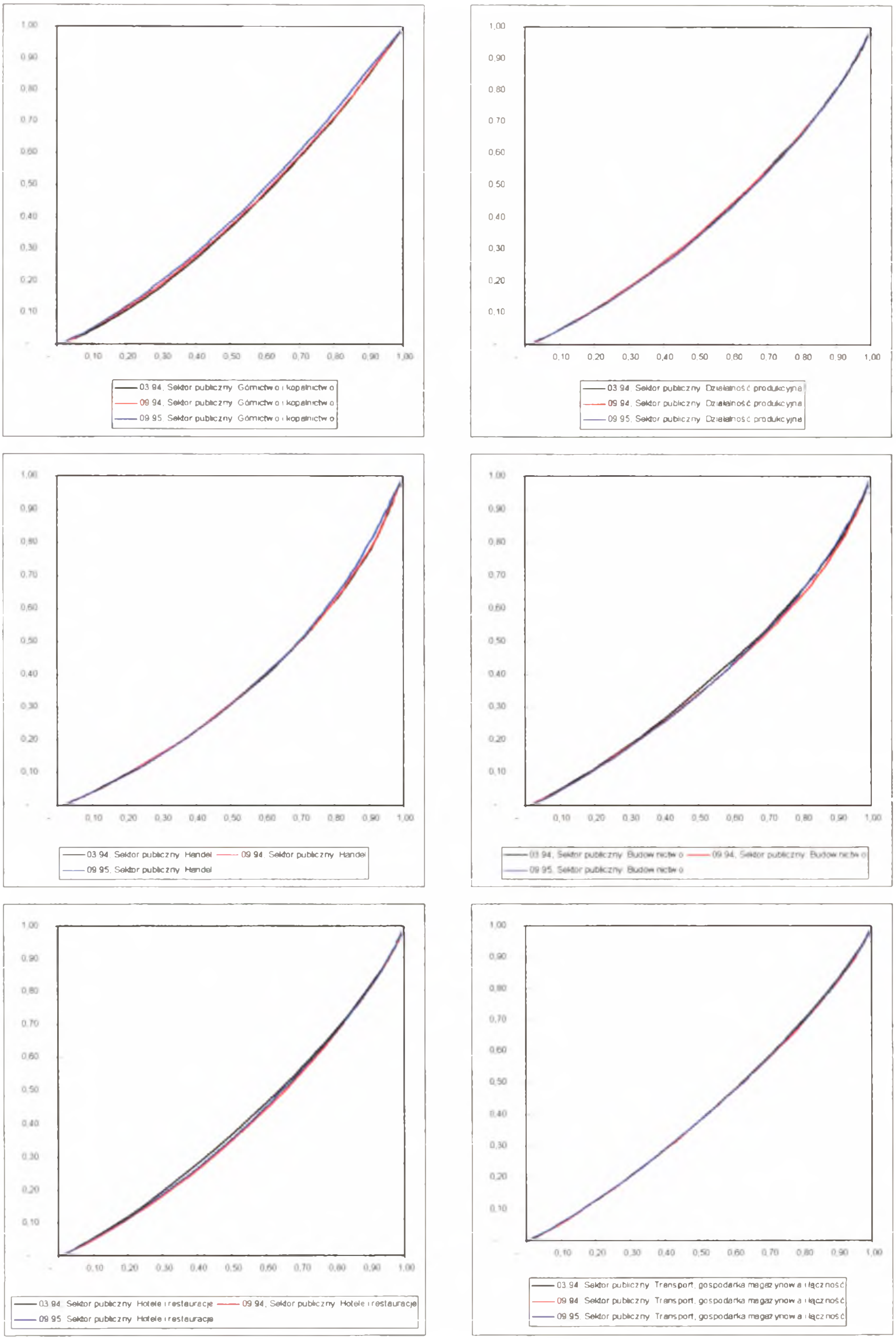
Rys. 7.5

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 ogółem



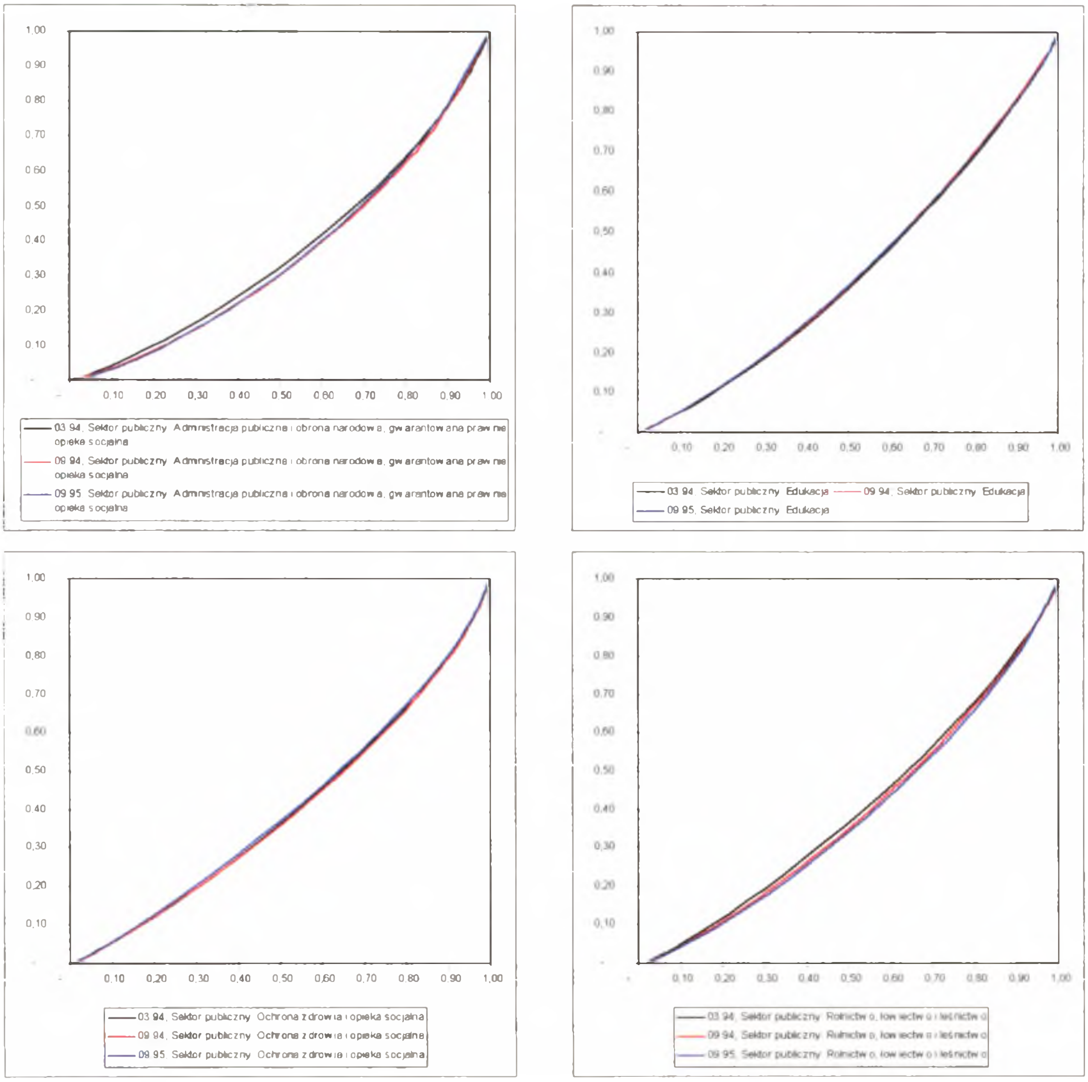
Rys. 7.5

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 ogółem (c.d.)



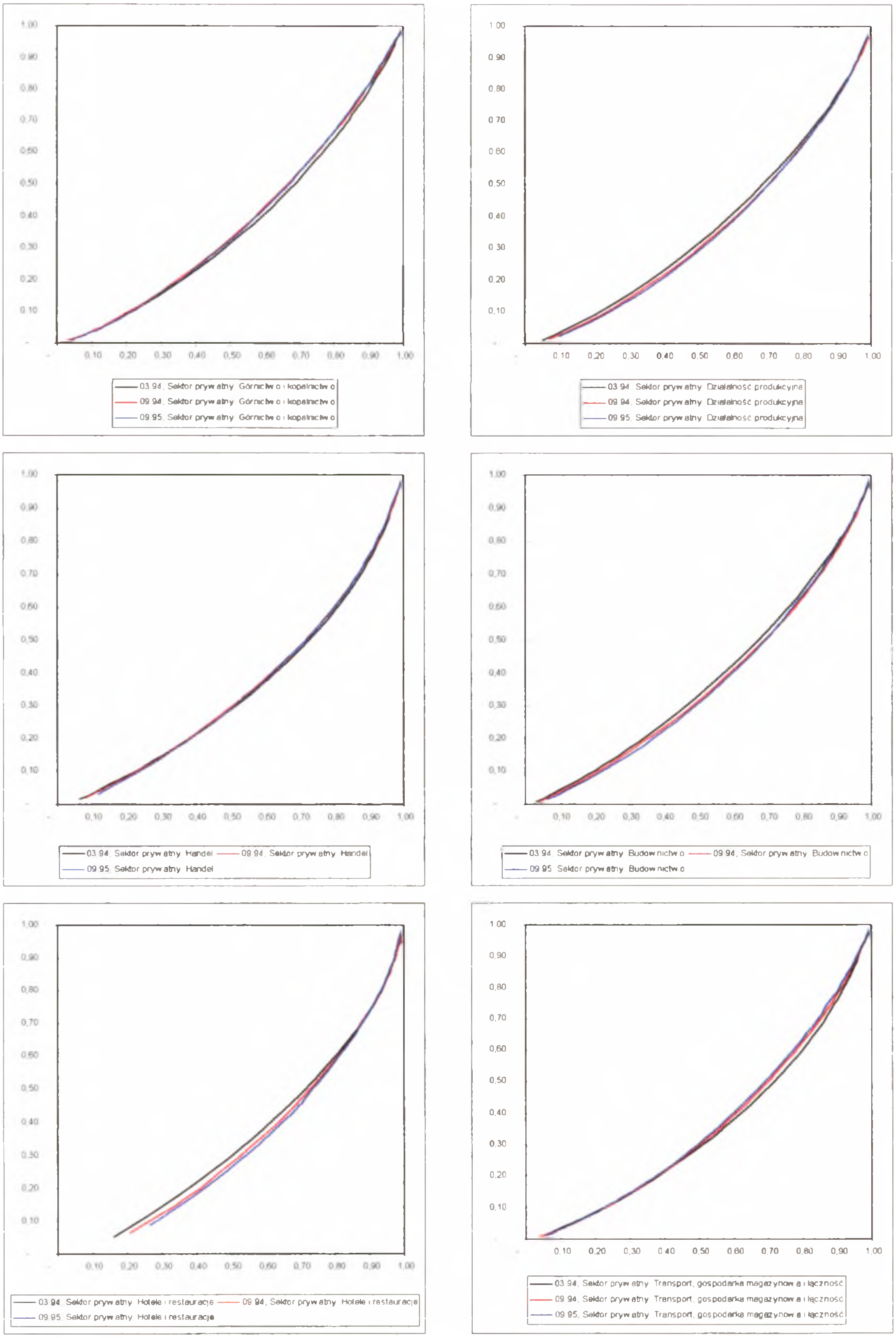
Rys. 7.6

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 w sektorze publicznym



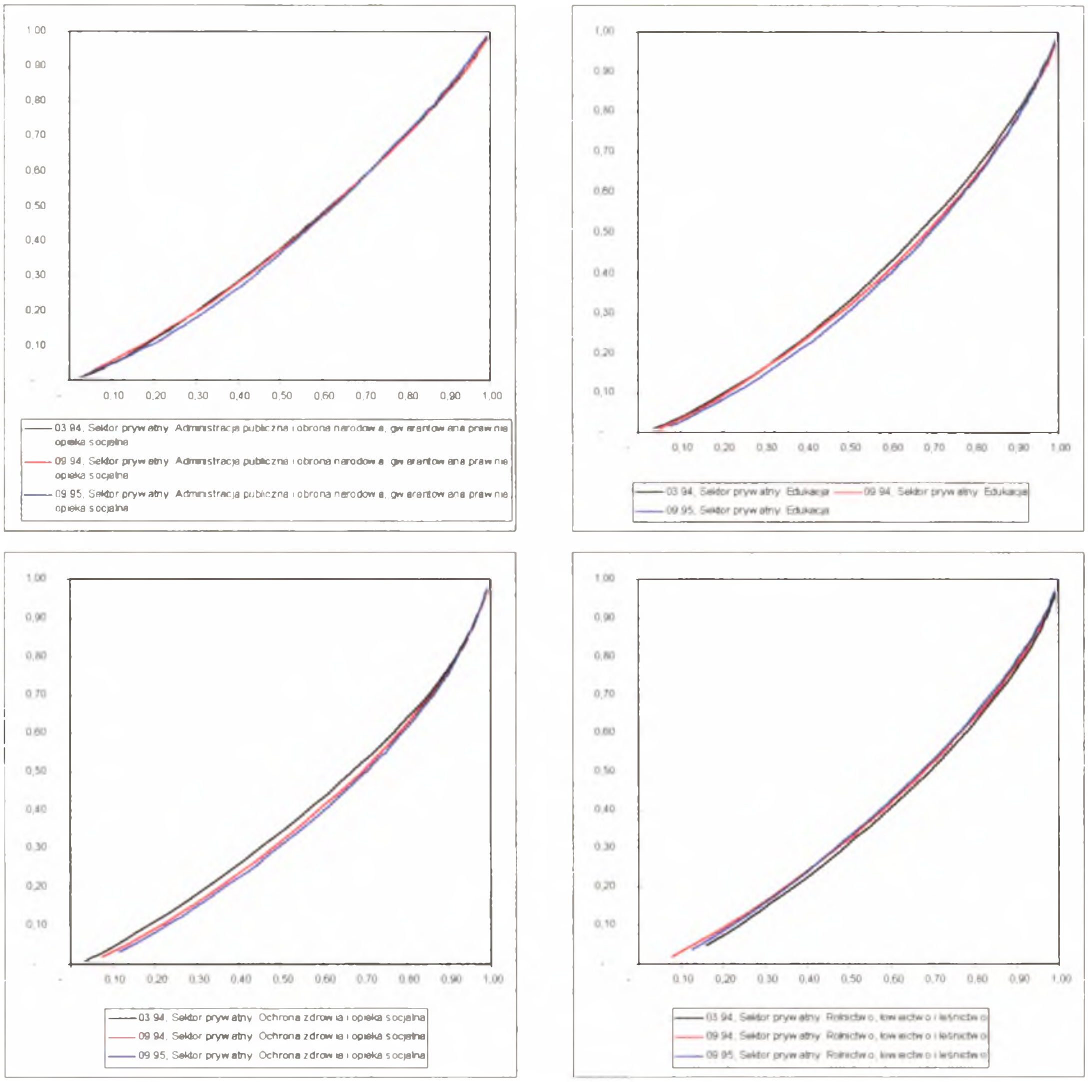
Rys. 7.6

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 w sektorze publicznym (c.d.)



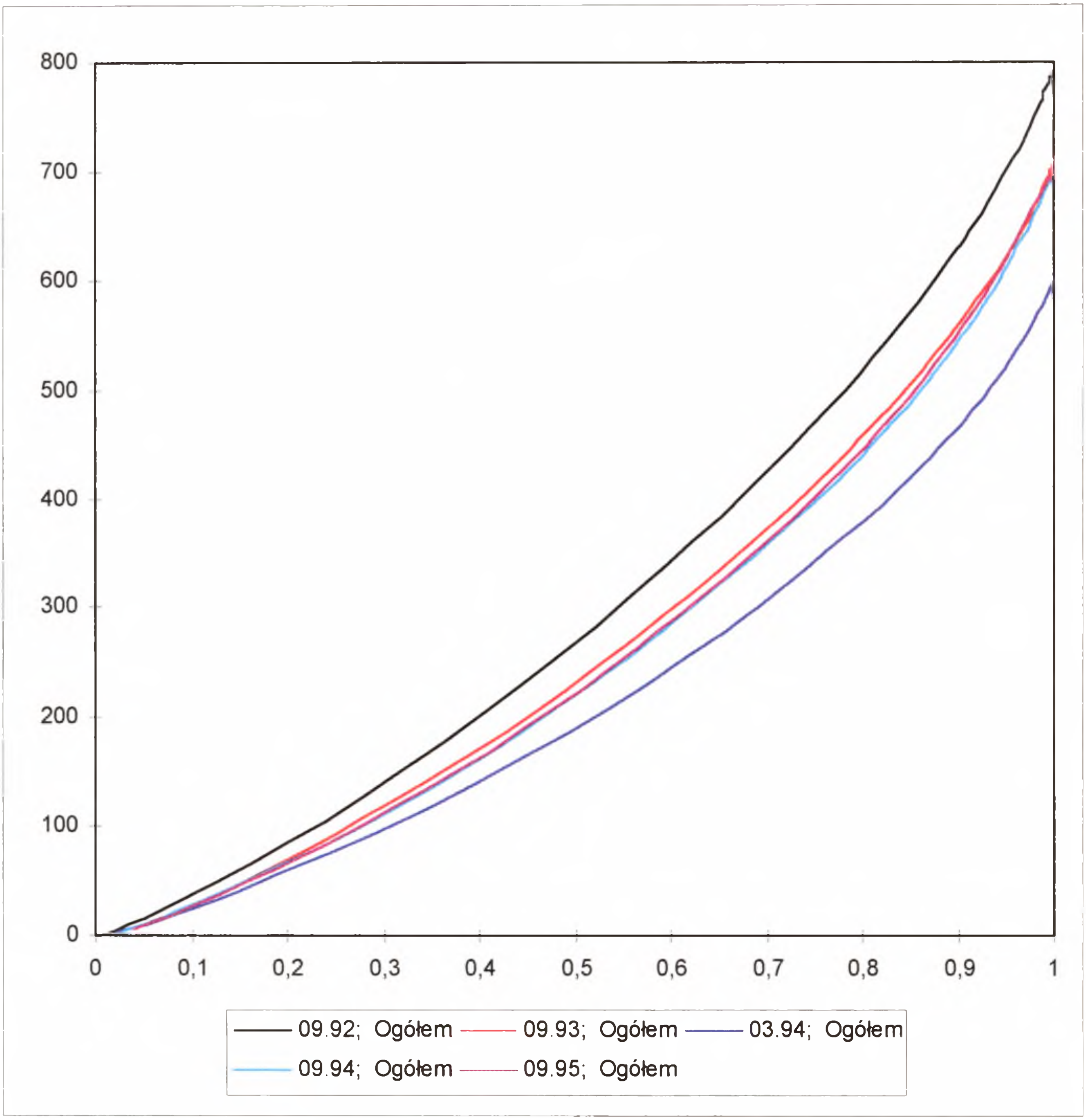
Rys. 7.7

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 w sektorze prywatnym



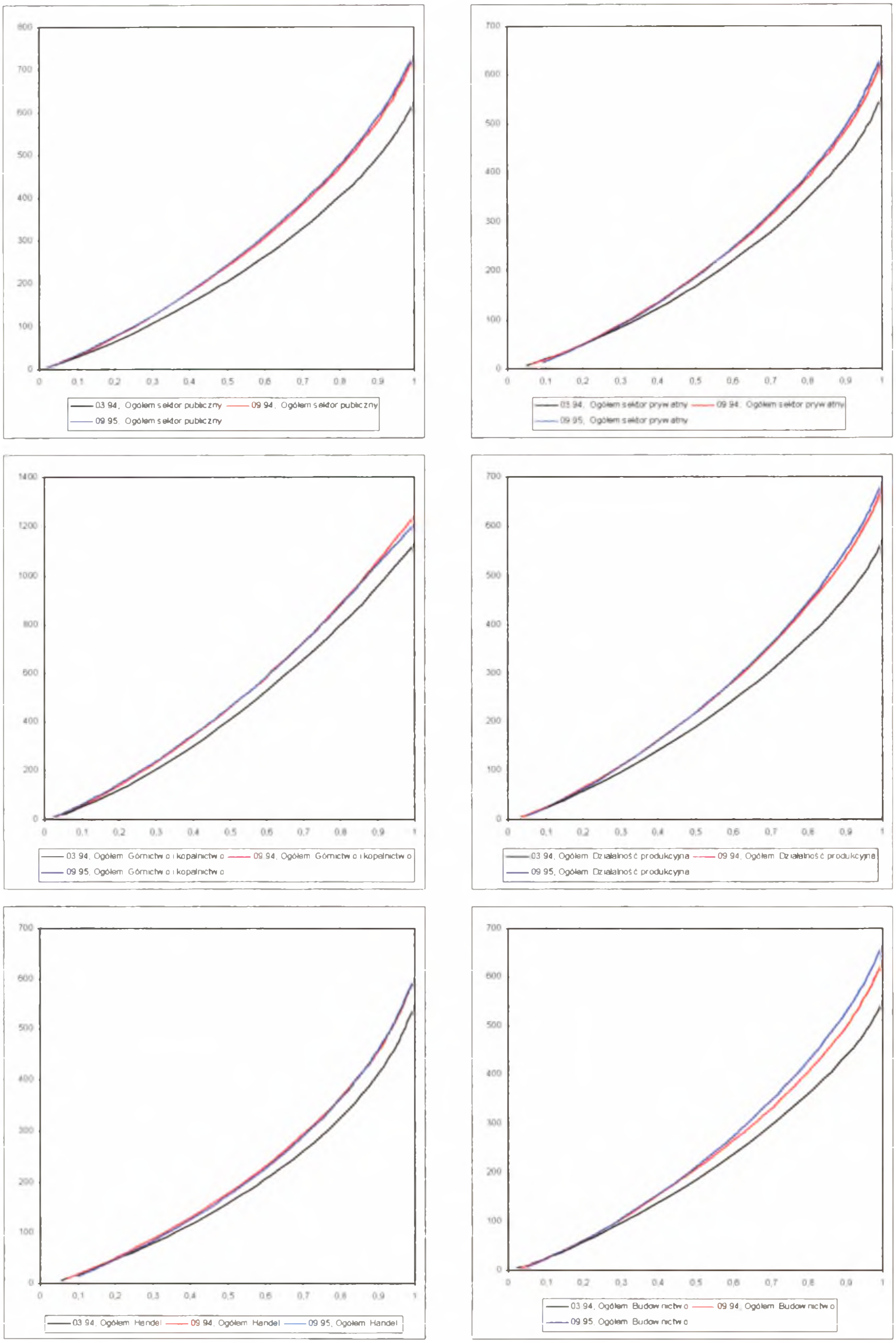
Rys. 7.7

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 w sektorze prywatnym (c.d.)



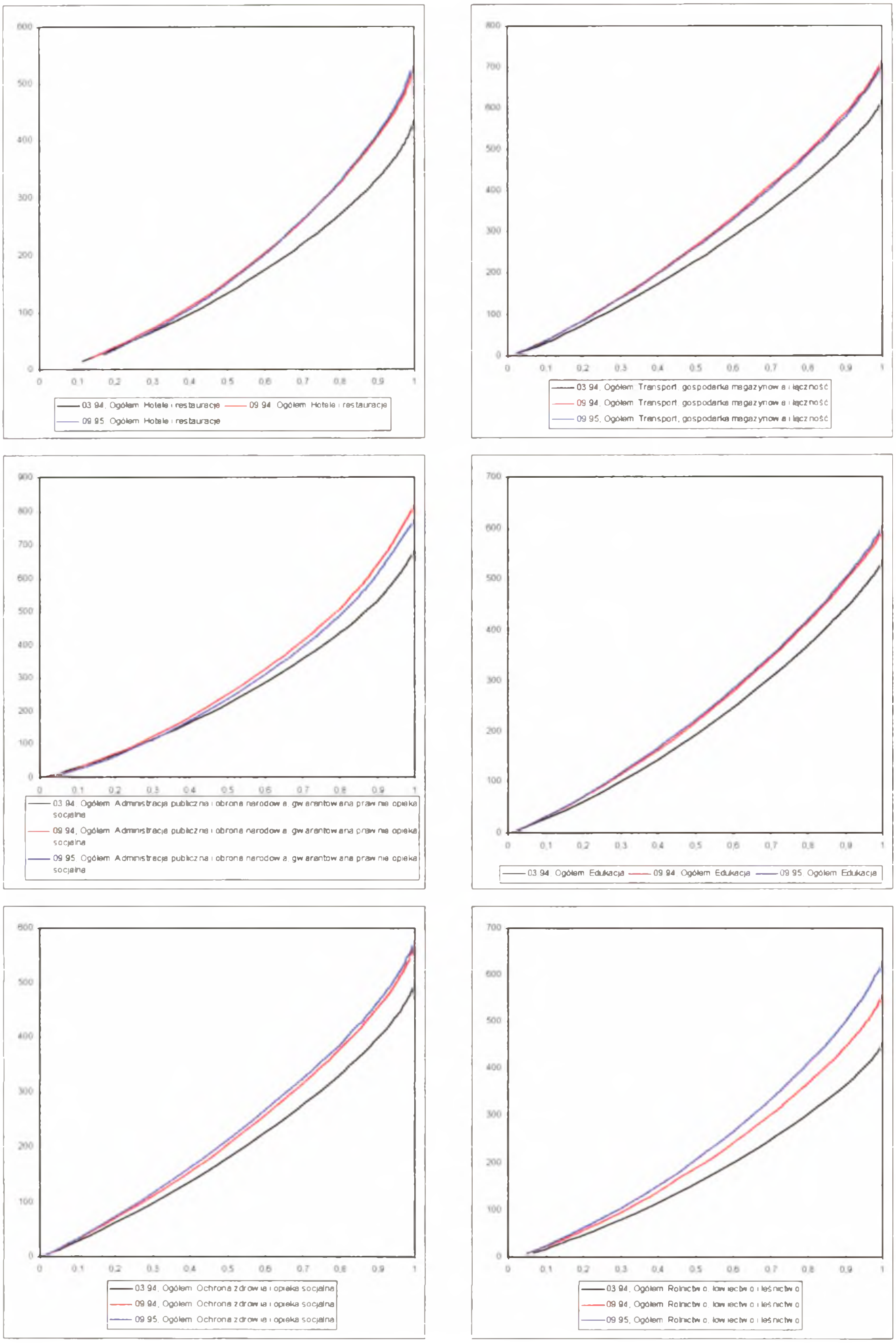
Rys. 7.8

Uogólnione krzywe Lorenza dla Polski w latach 1992-1995



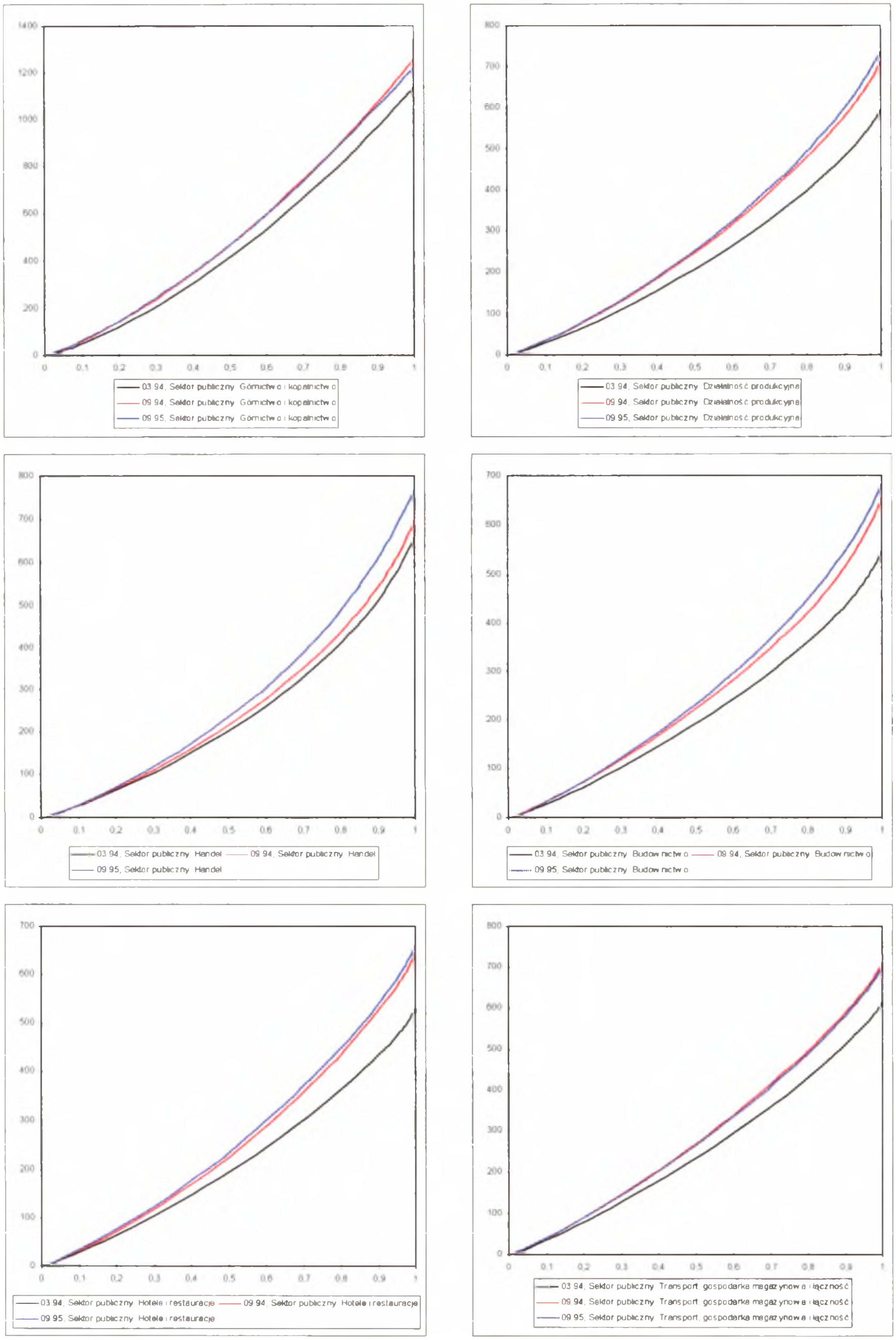
Rys. 7.9

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 ogółem



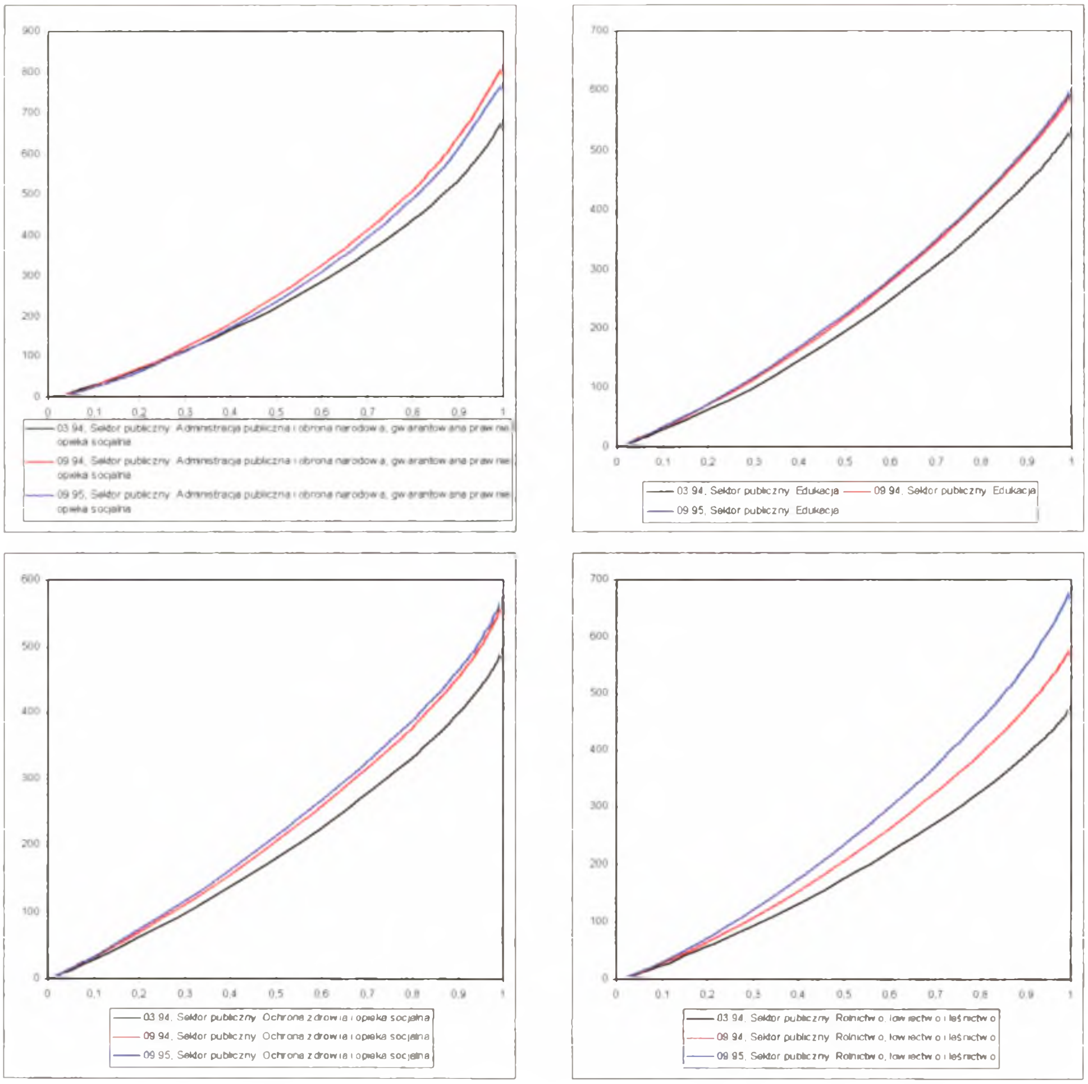
Rys. 7.9

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki w 03.94, 09.94 i 09.95 ogółem (c.d.)



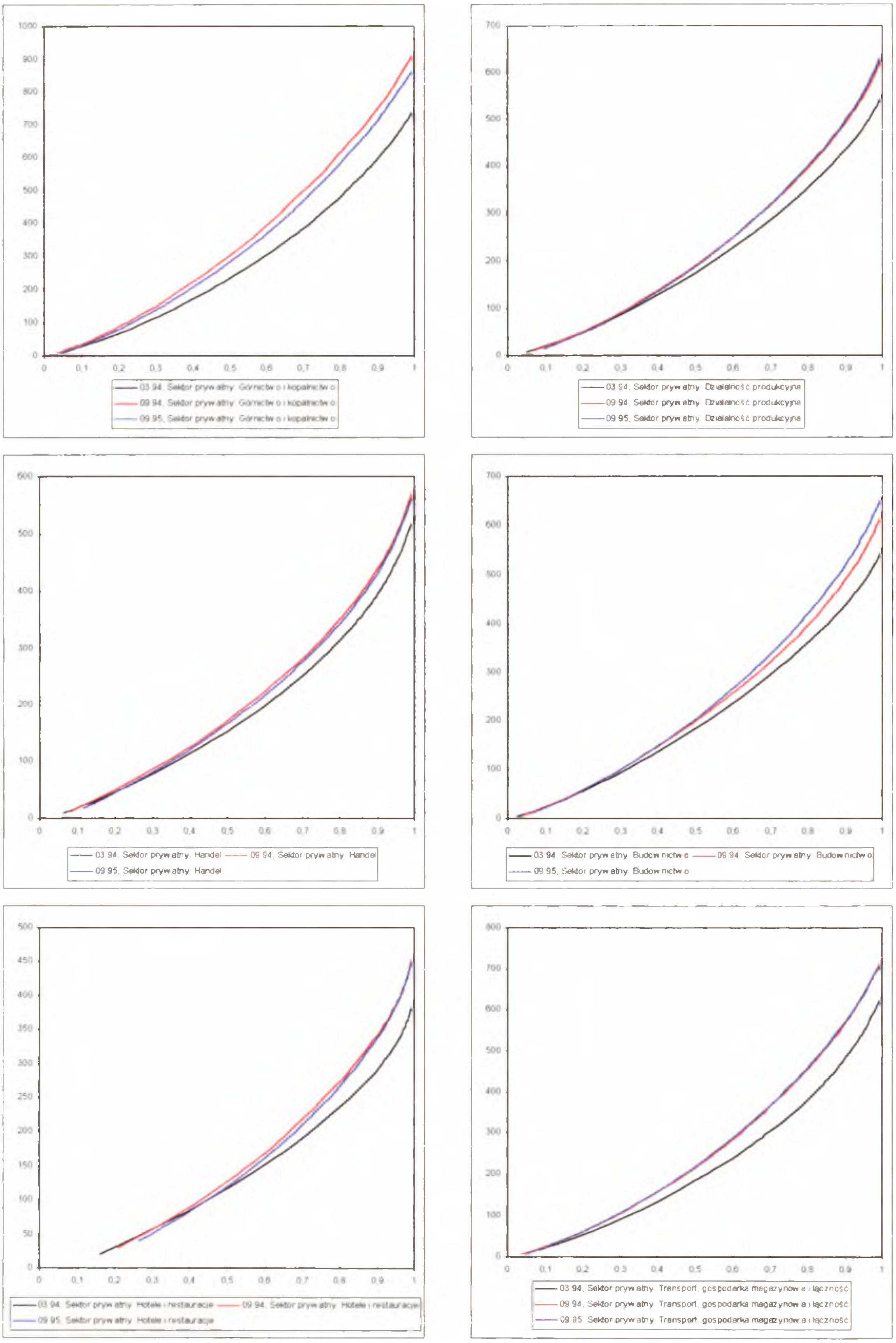
Rys. 7.10

Uogólnione krzywe Lorenza w działach gospodarki w sektorze publicznym w 03.94, 09.94 i 09.95



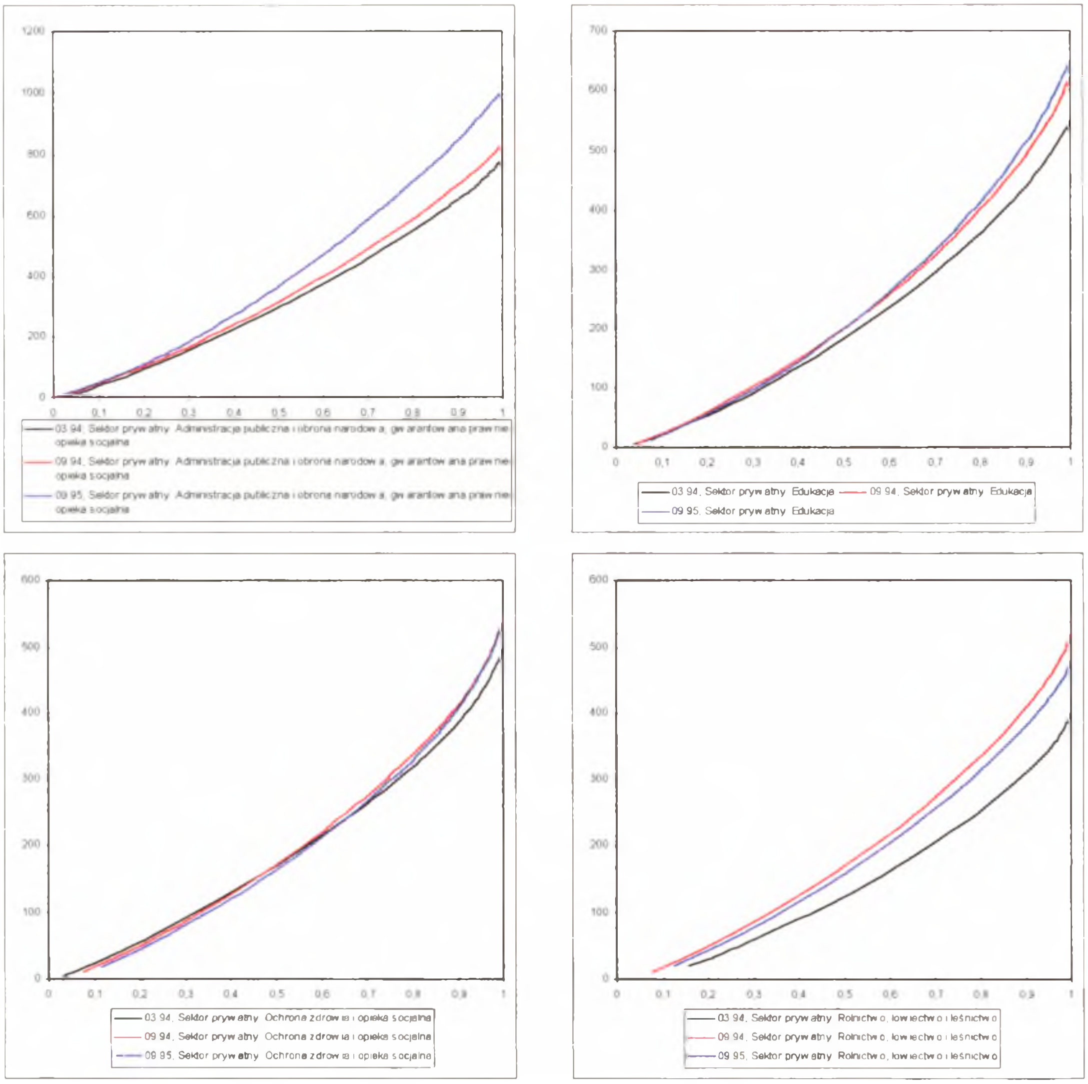
Rys. 7.10

Uogólnione krzywe Lorenza w działach gospodarki w sektorze publicznym w 03.94, 09.94 i 09.95 (c.d.)



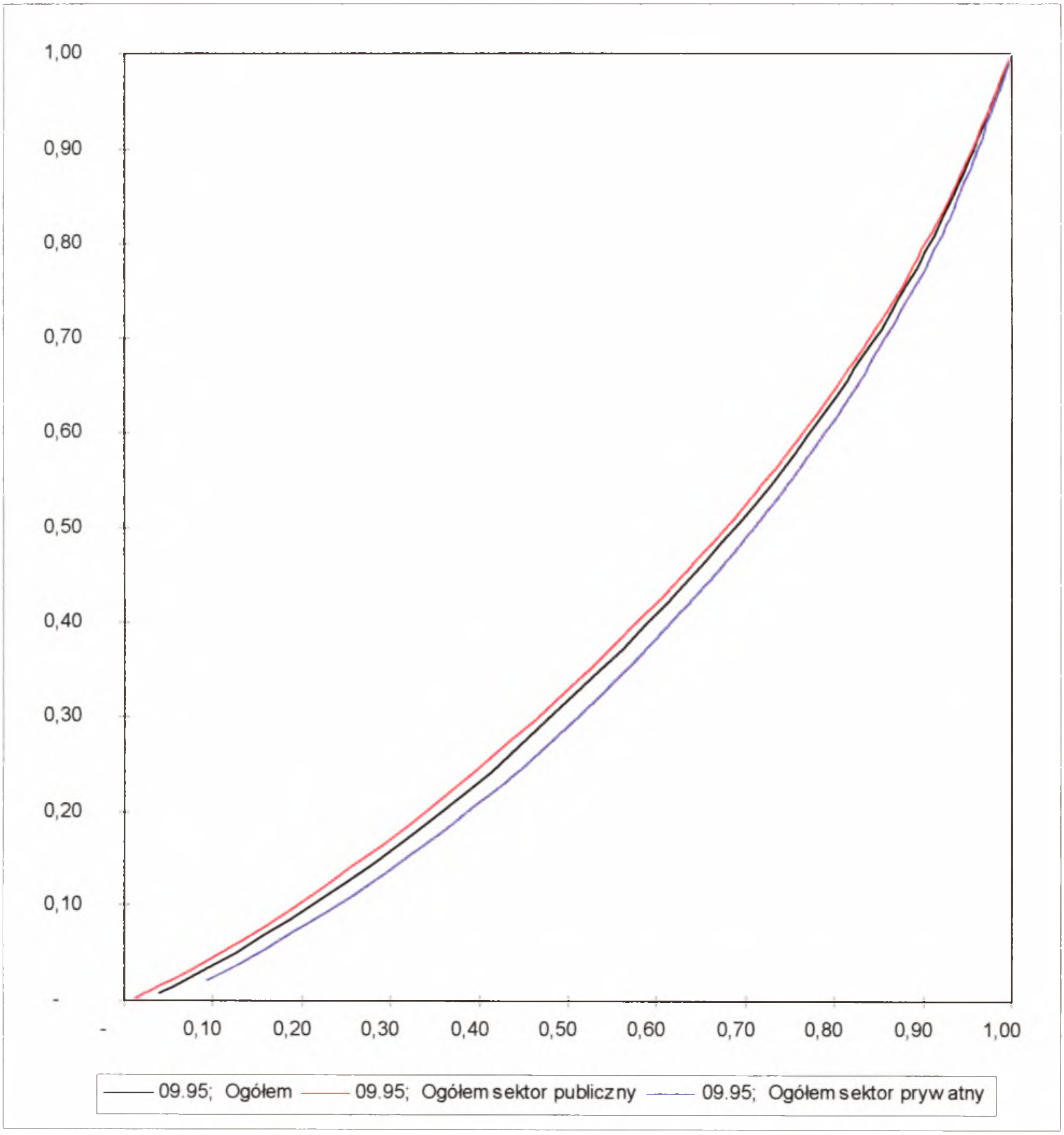
Rys. 7.11

Uogólnione krzywe Lorenza w działach gospodarki w sektorze prywatnym w 03.94, 09.94 i 09.95



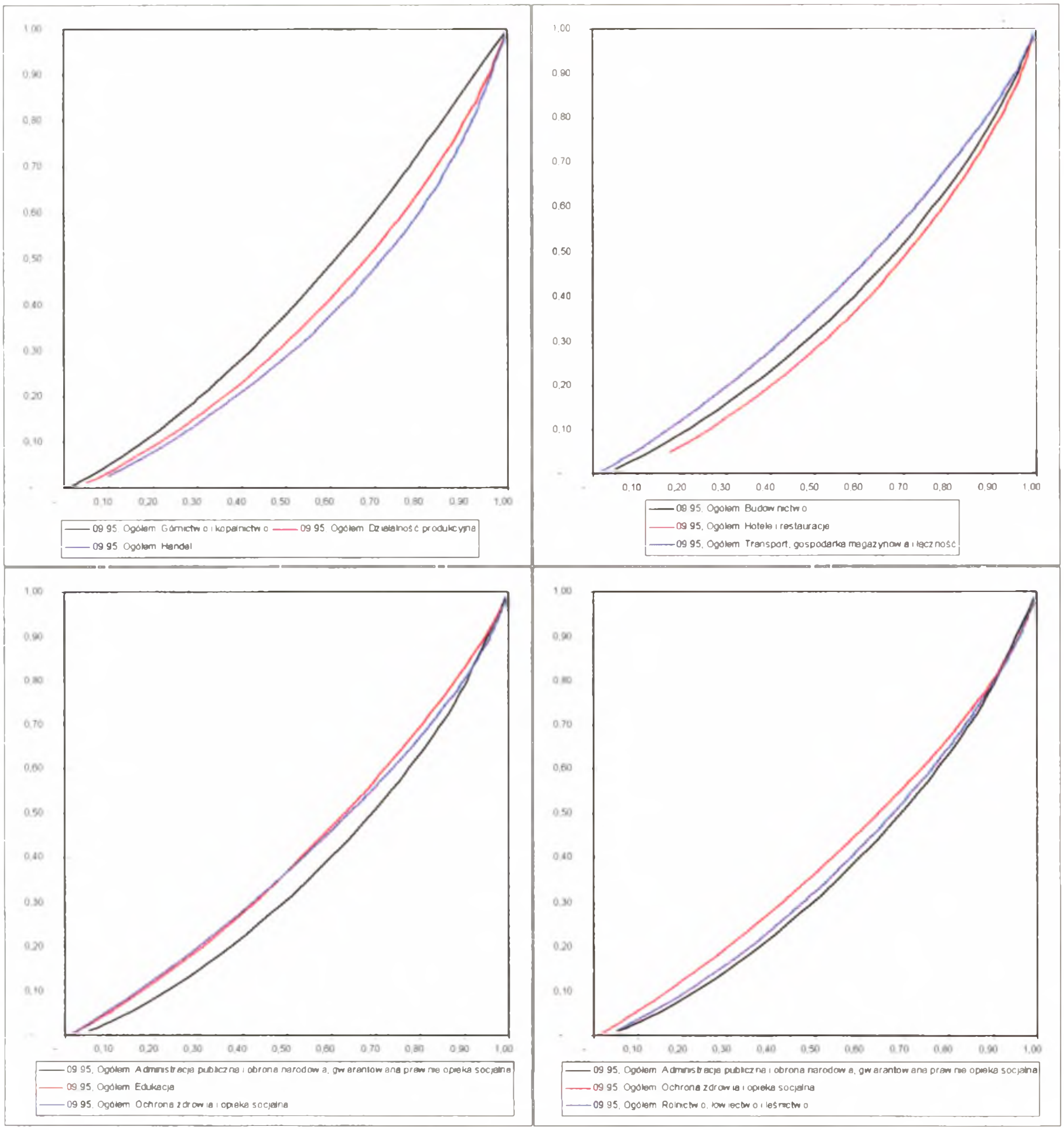
Rys. 7.11

Uogólnione krzywe Lorenza w działach gospodarki w sektorze prywatnym w 03.94, 09.94 i 09.95 (c.d.)



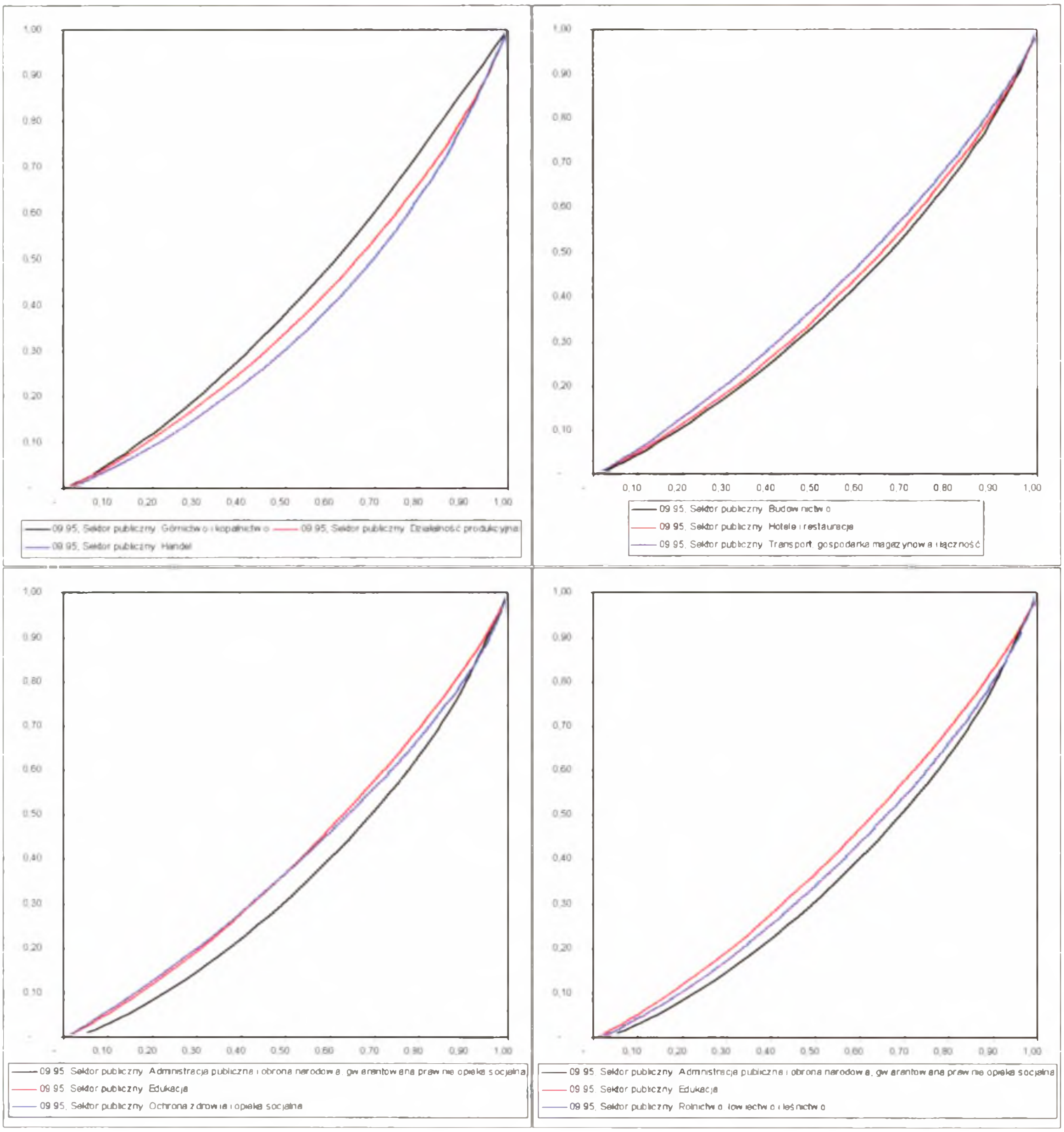
Rys. 7.12

Krzywe Lorenza dla Polski w 09.95 ogólnie, w sektorze publicznym oraz prywatnym



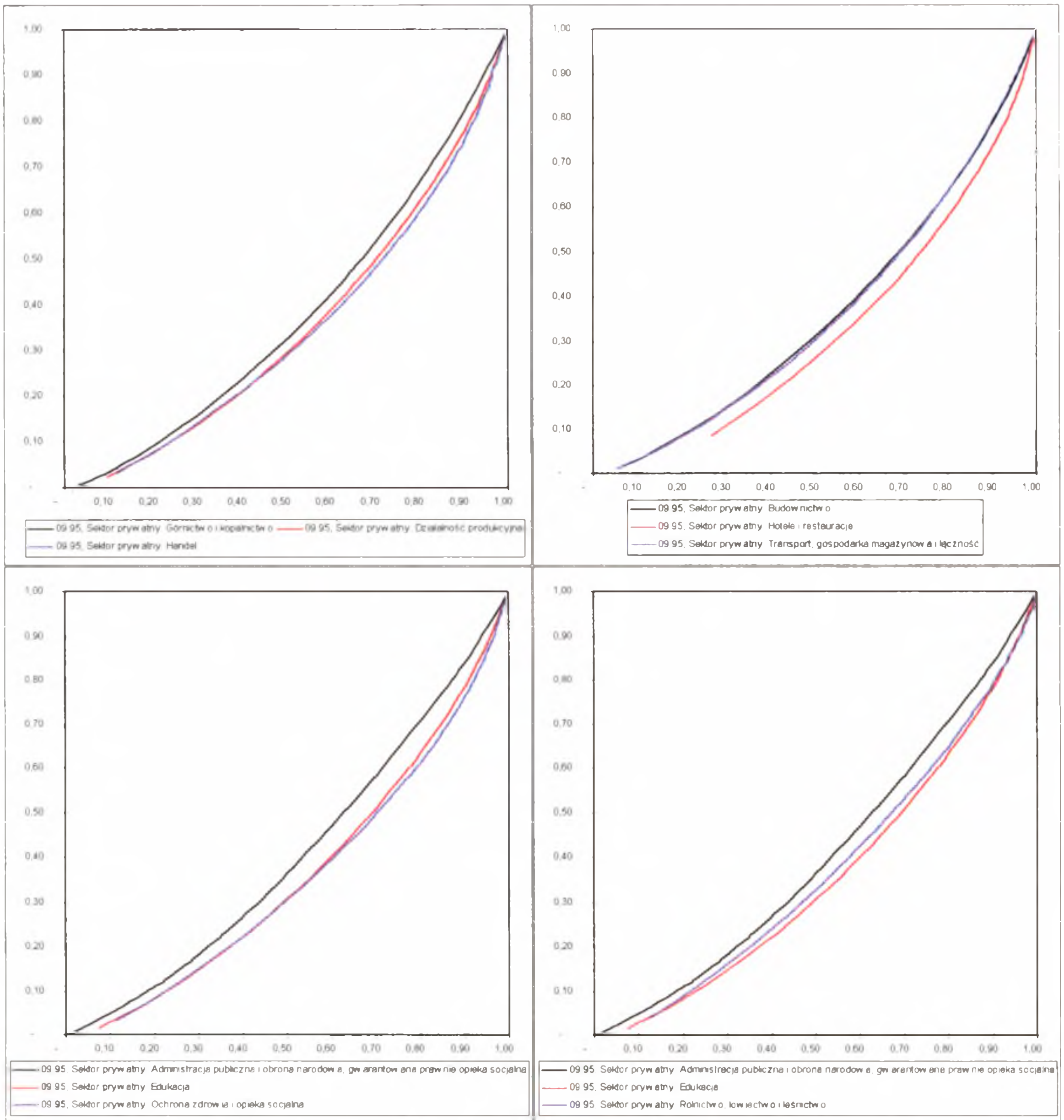
Rys. 7.13

Krzywe Lorenza w 09.95 dla różnych gałęzi gospodarki ogółem



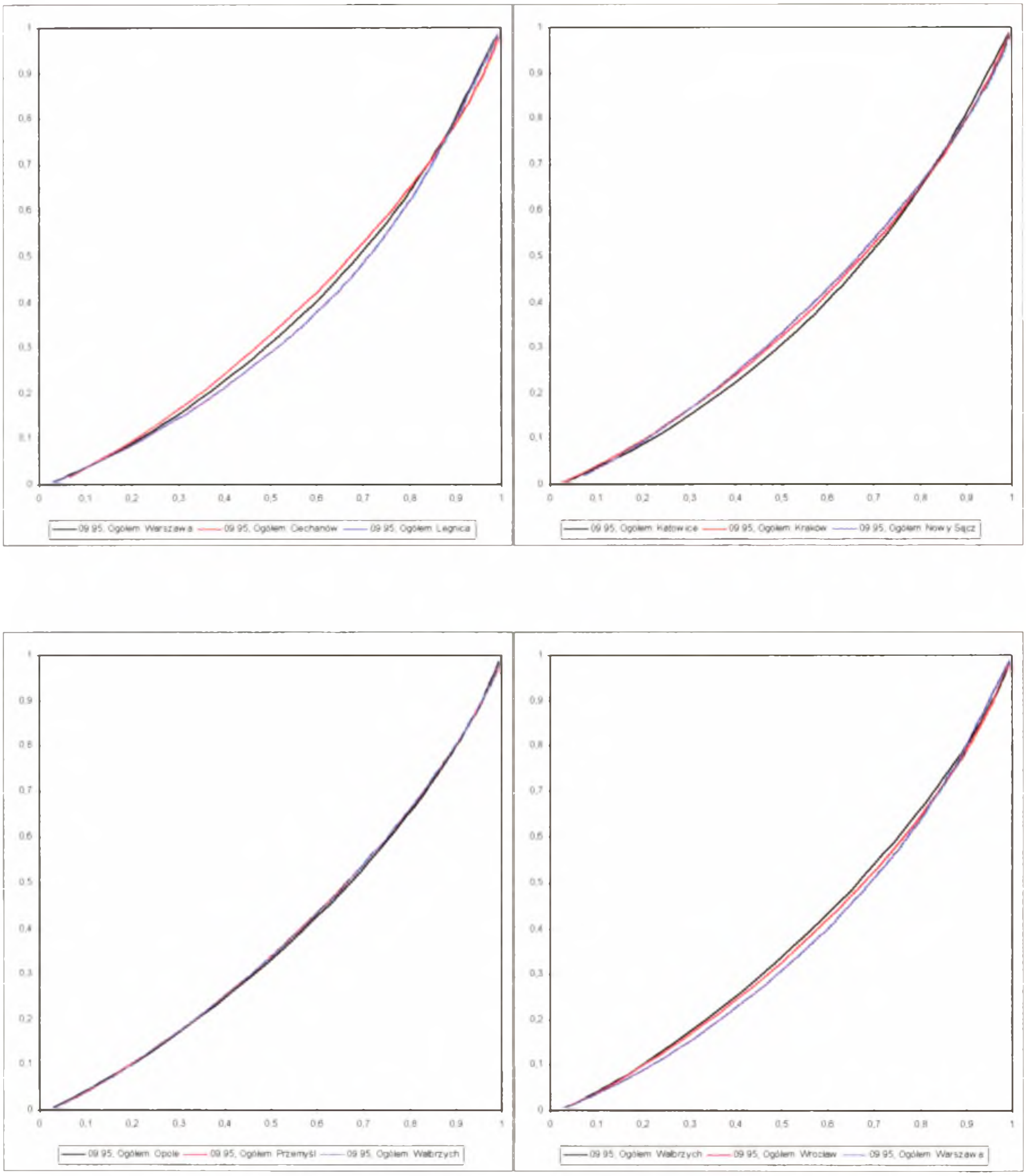
Rys. 7.14

Krzywe Lorenza w 09.95 dla różnych gałęzi gospodarki w sektorze publicznym



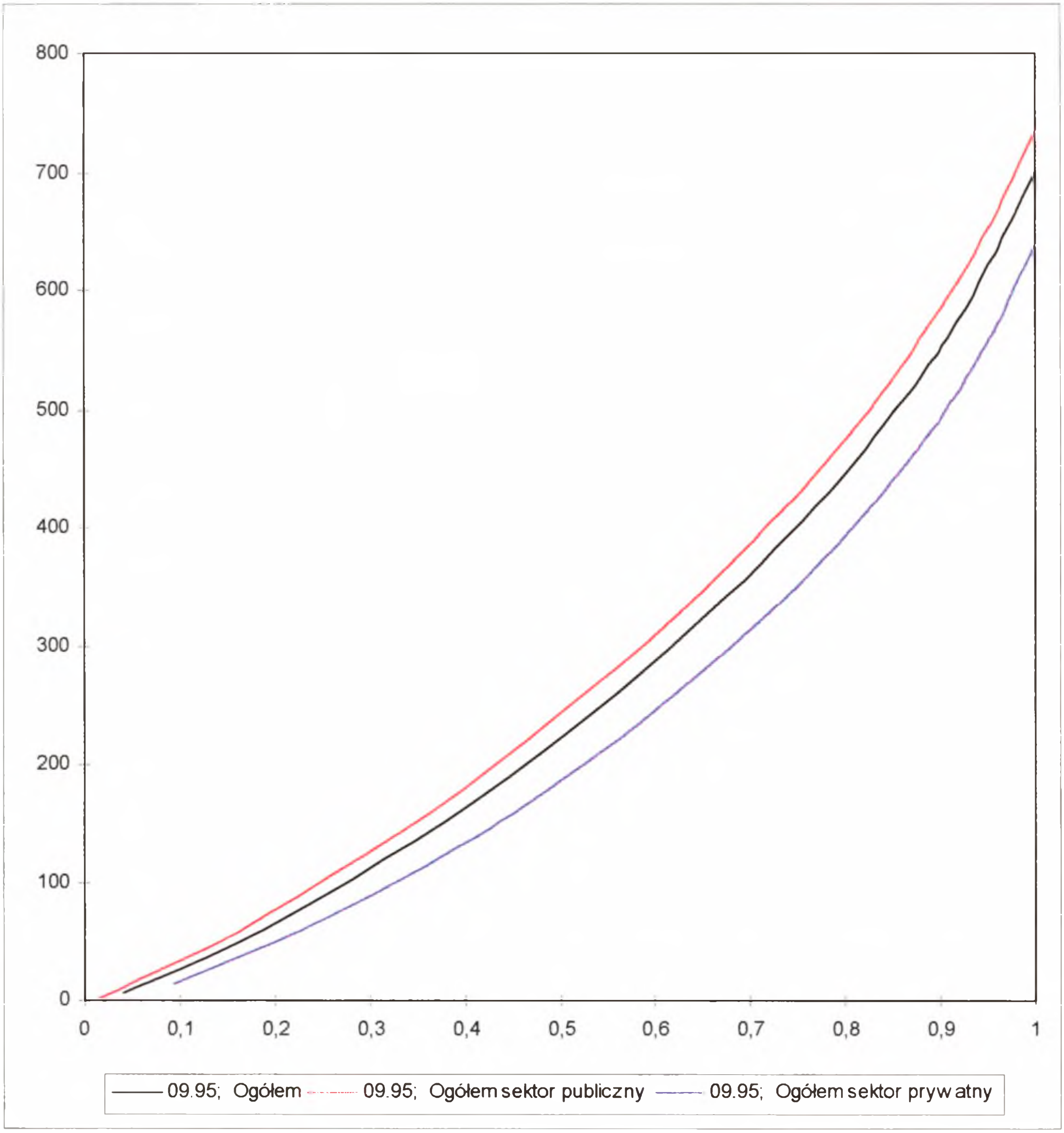
Rys. 7.15

Krzywe Lorenza w 09.95 dla różnych gałęzi gospodarki w sektorze prywatnym



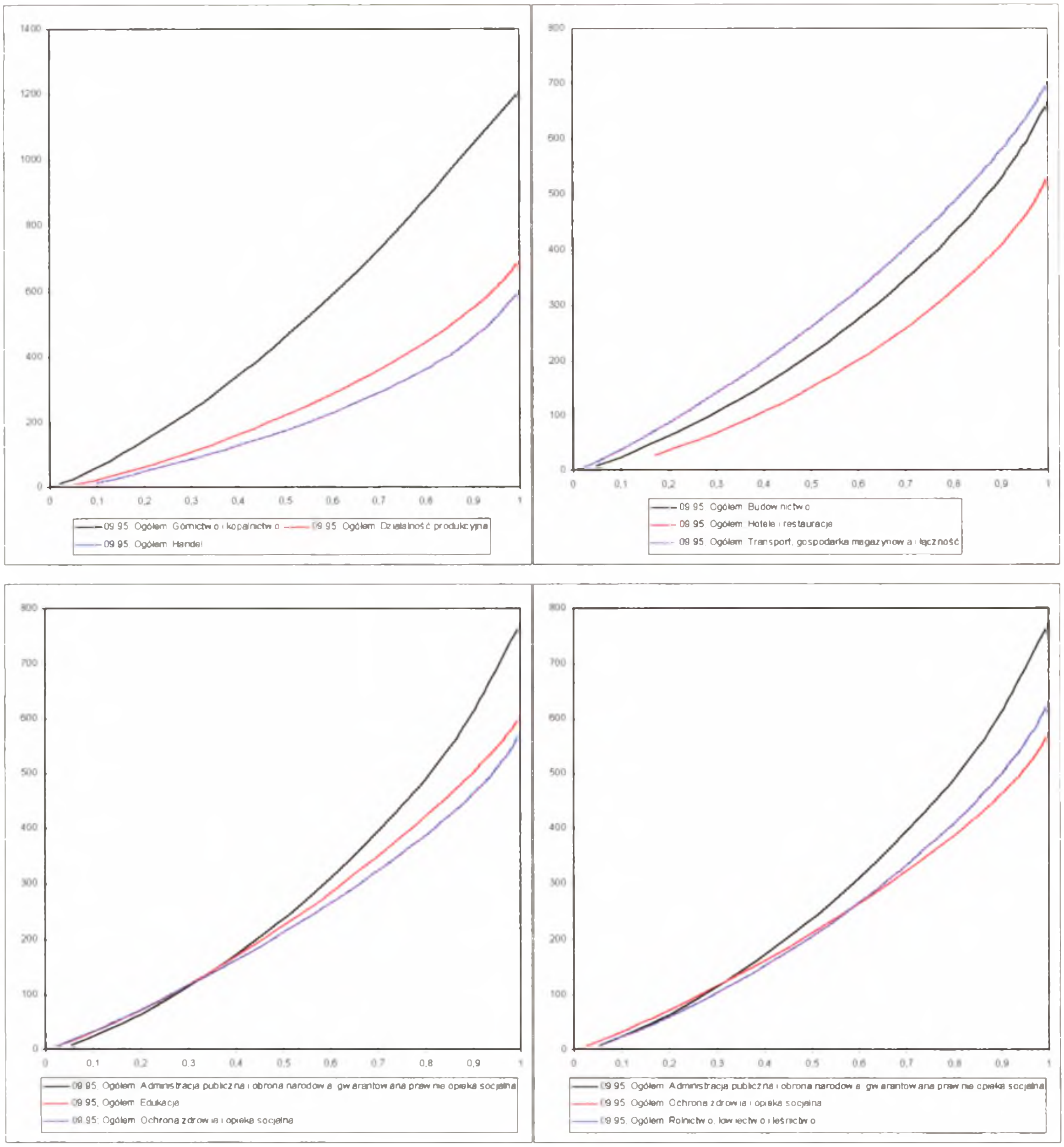
Rys. 7.16

Krzywe Lorenza w 09.95 dla różnych województw



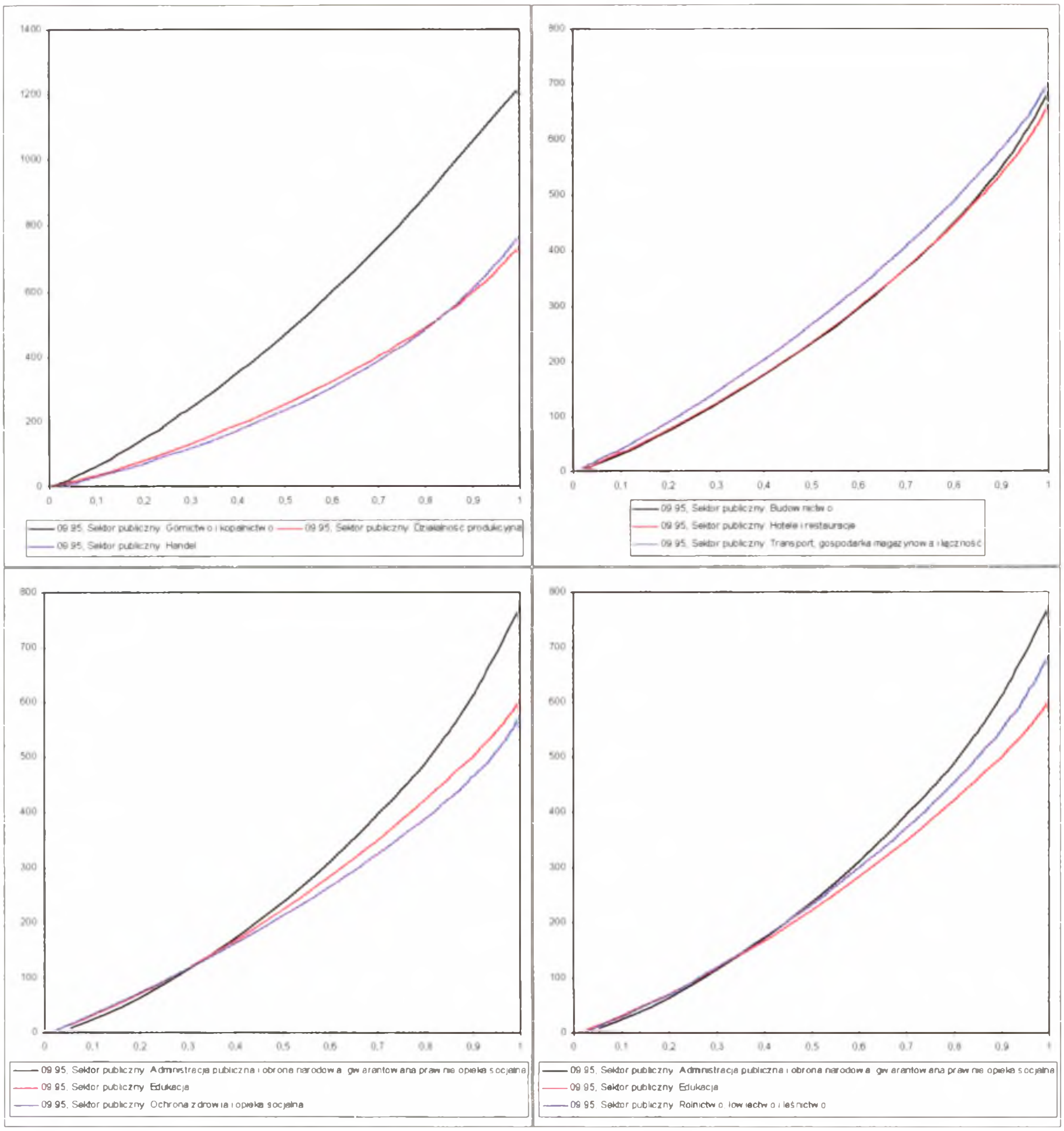
Rys 7.17

Uogólnione krzywe Lorenza dla Polski w 09.95 ogólnie, w sektorze publicznym oraz prywatnym



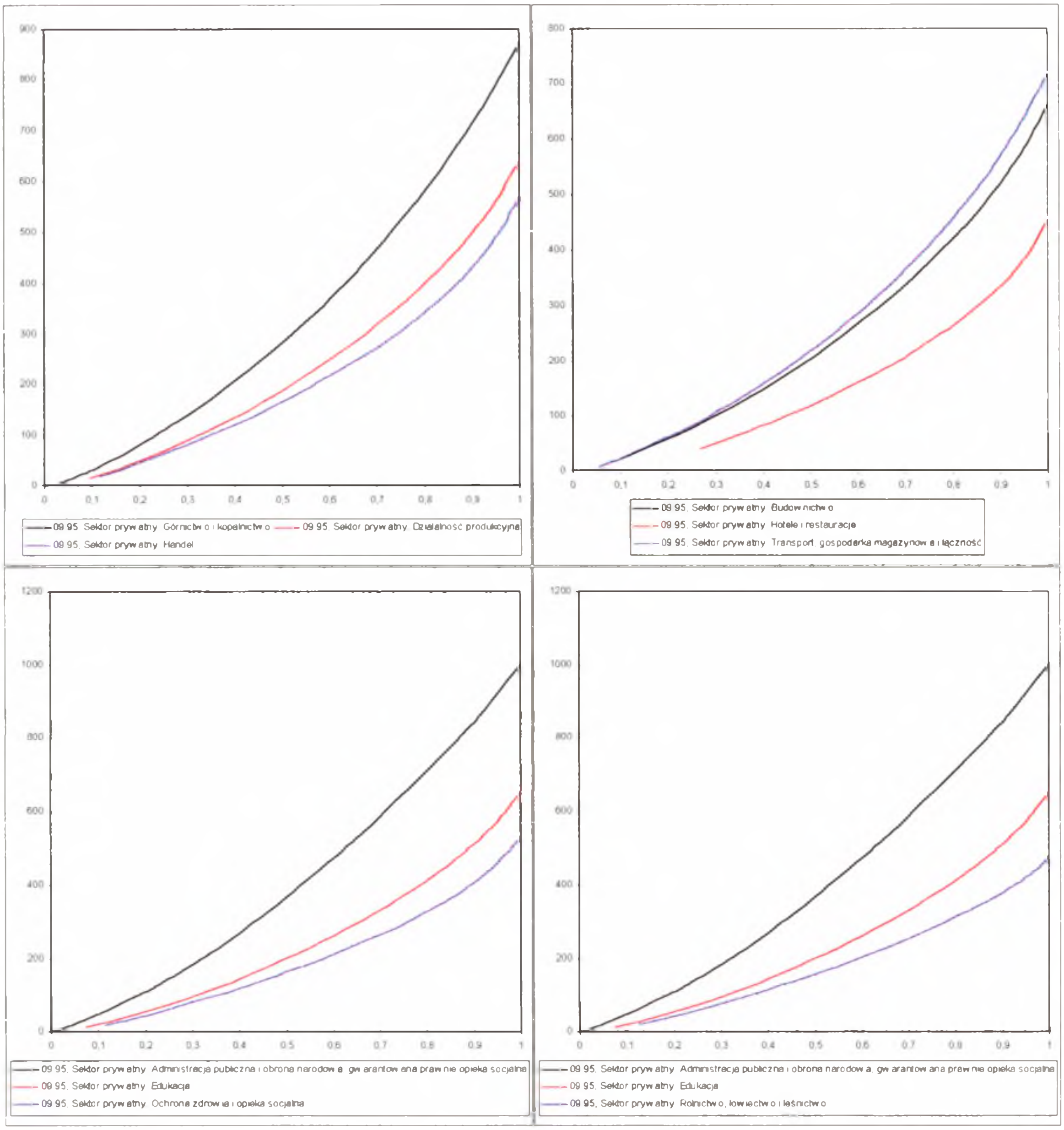
Rys. 7.18

Uogólnione krzywe Lorenza w 09.95 dla różnych gałęzi gospodarki ogółem



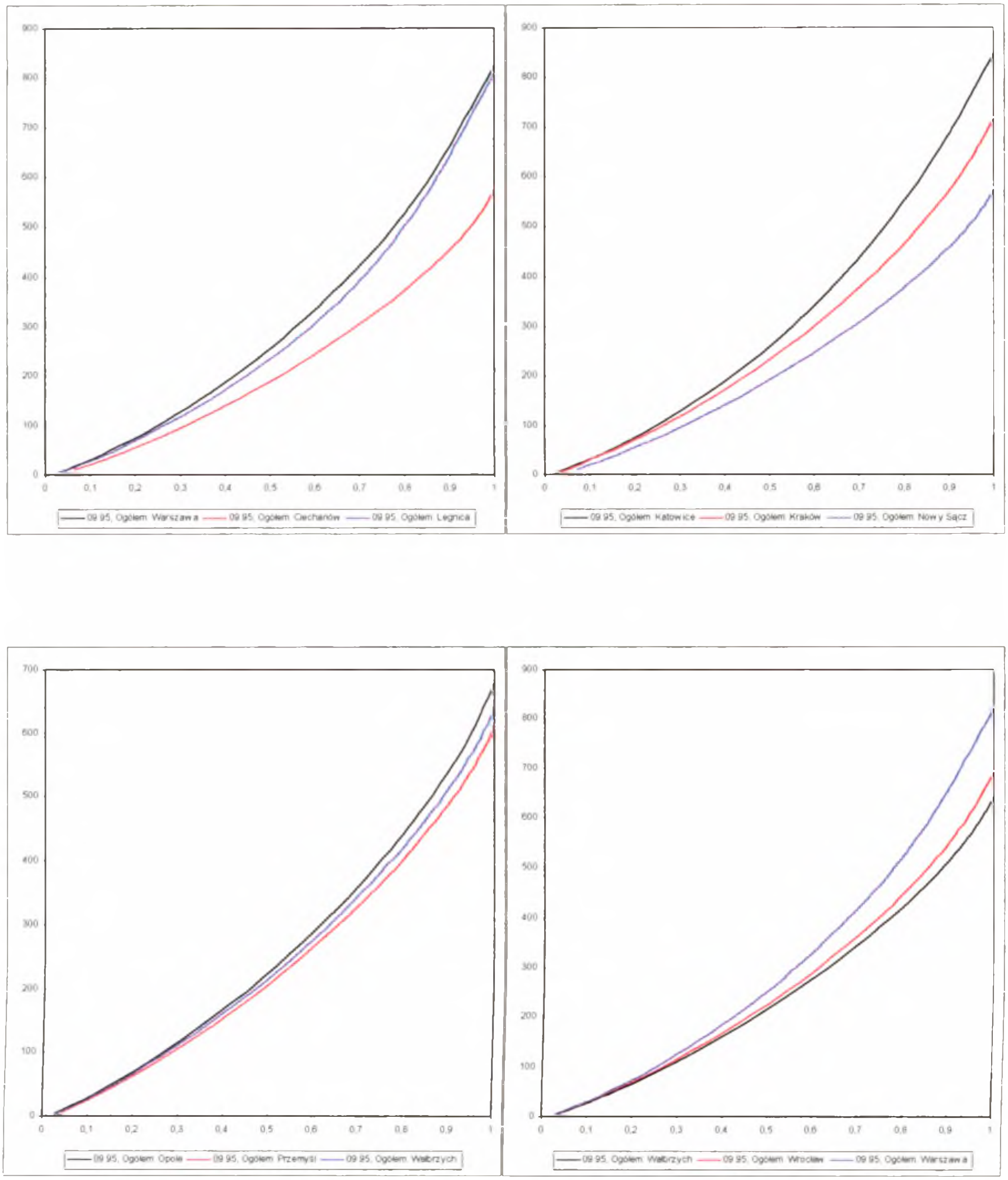
Rys. 7.19

Uogólnione krzywe Lorenza w 09.95 dla różnych gałęzi gospodarki w sektorze publicznym



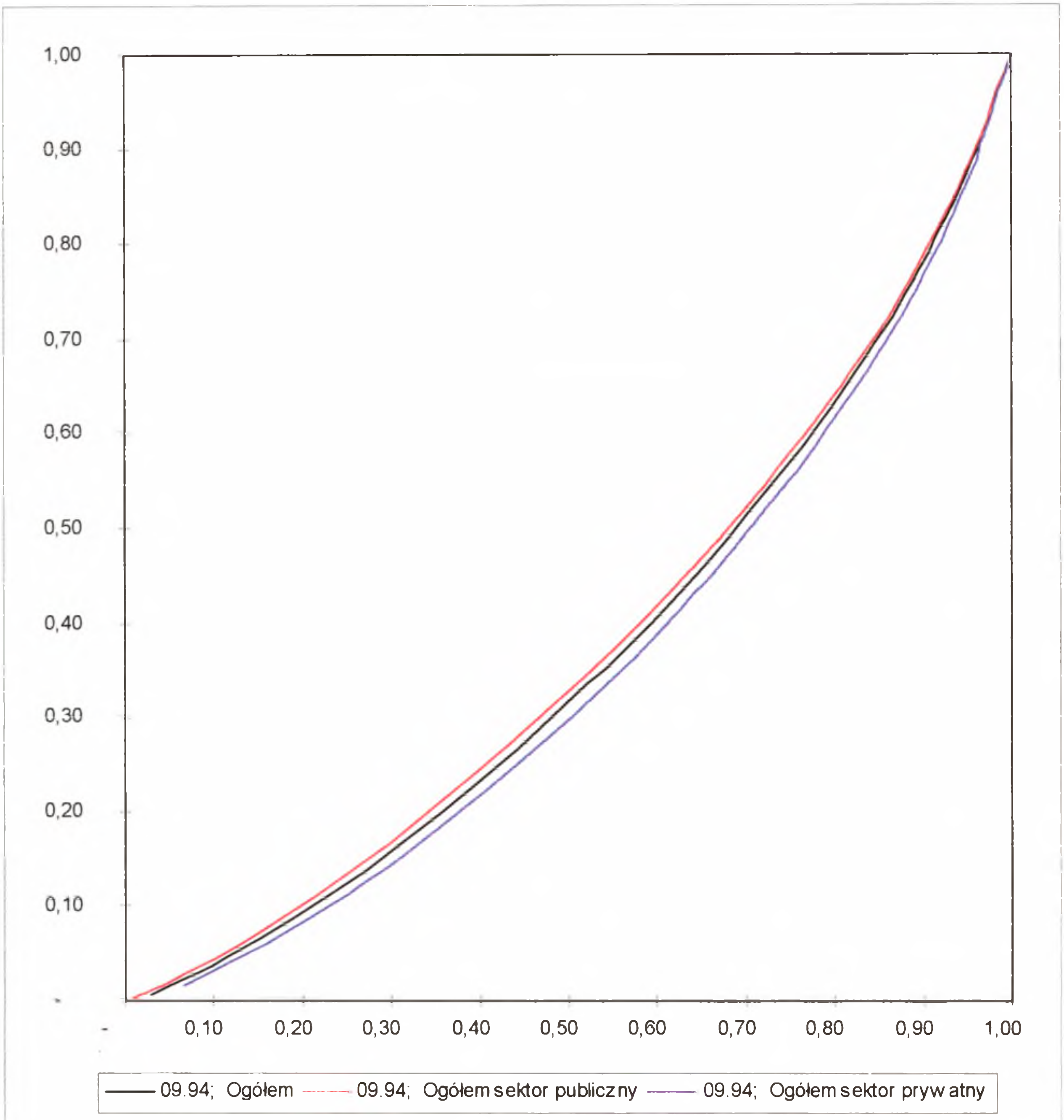
Rys. 7.20

Uogólnione krzywe Lorenza w 09.95 dla różnych gałęzi gospodarki w sektorze prywatnym



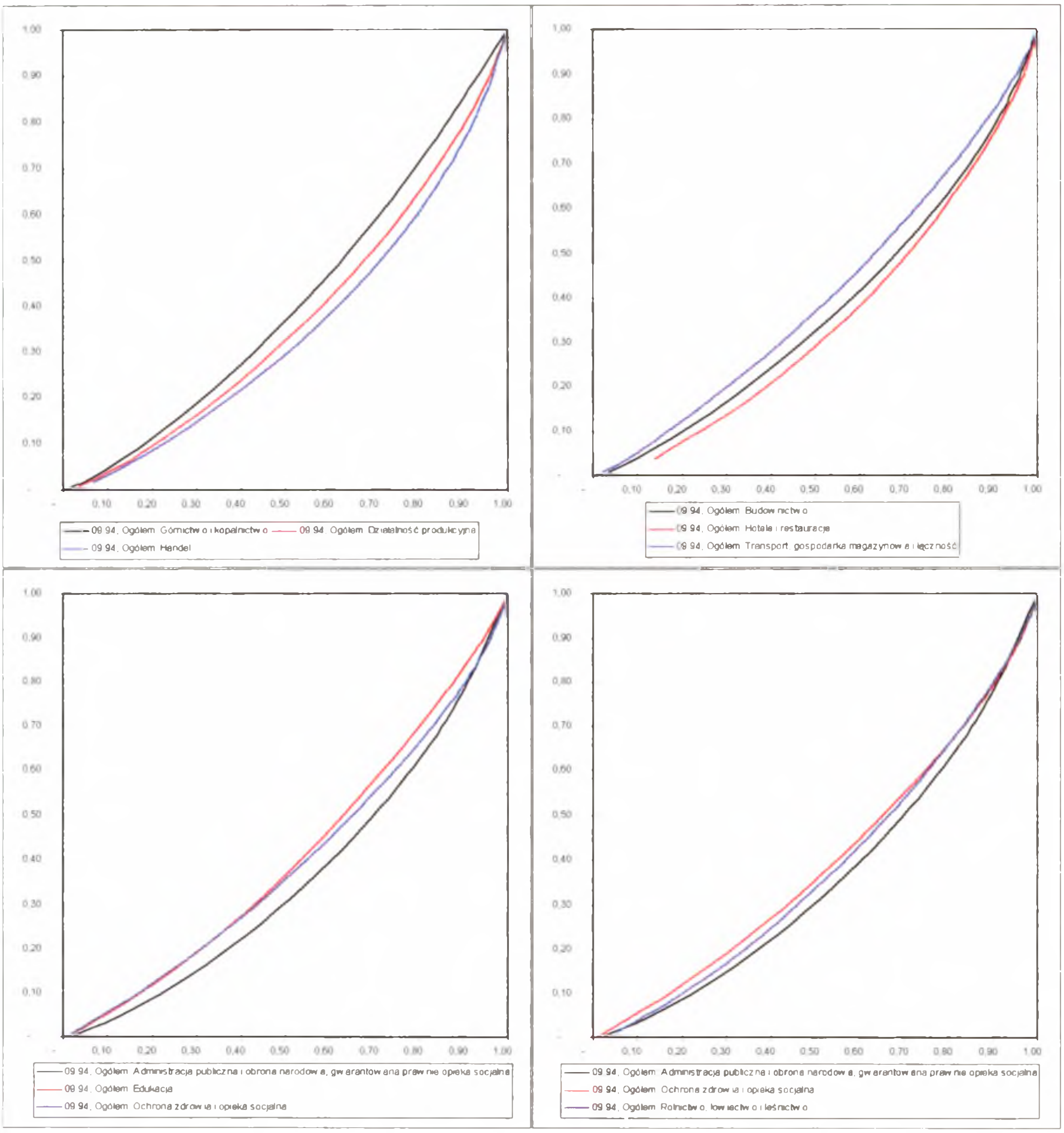
Rys. 7.21

Uogólnione krzywe Lorenza dla województw w 09.95



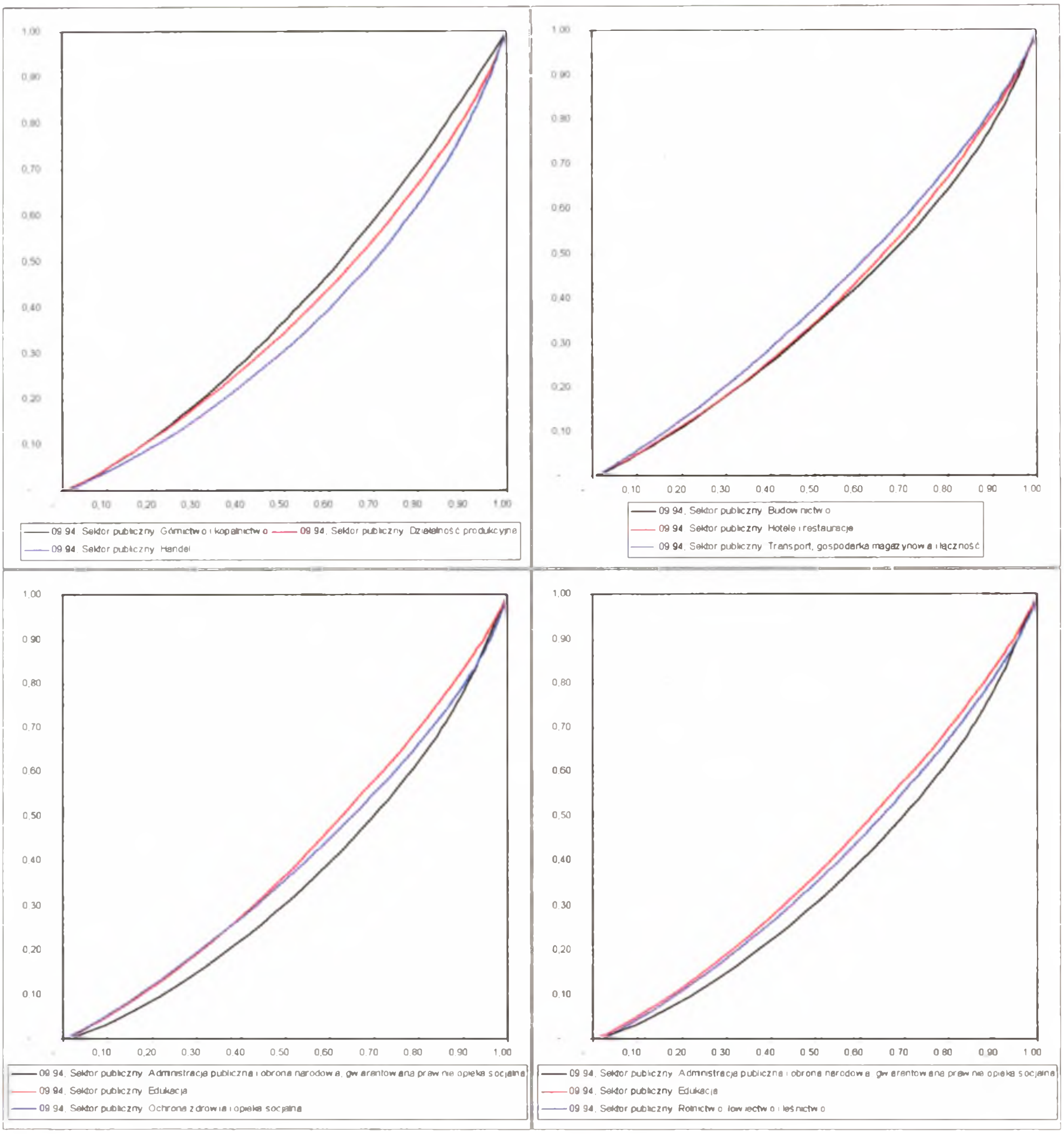
Rys. 7.22

Krzywe Lorenza dla Polski ogółem,
dla sektora publicznego i prywatnego w 09.94



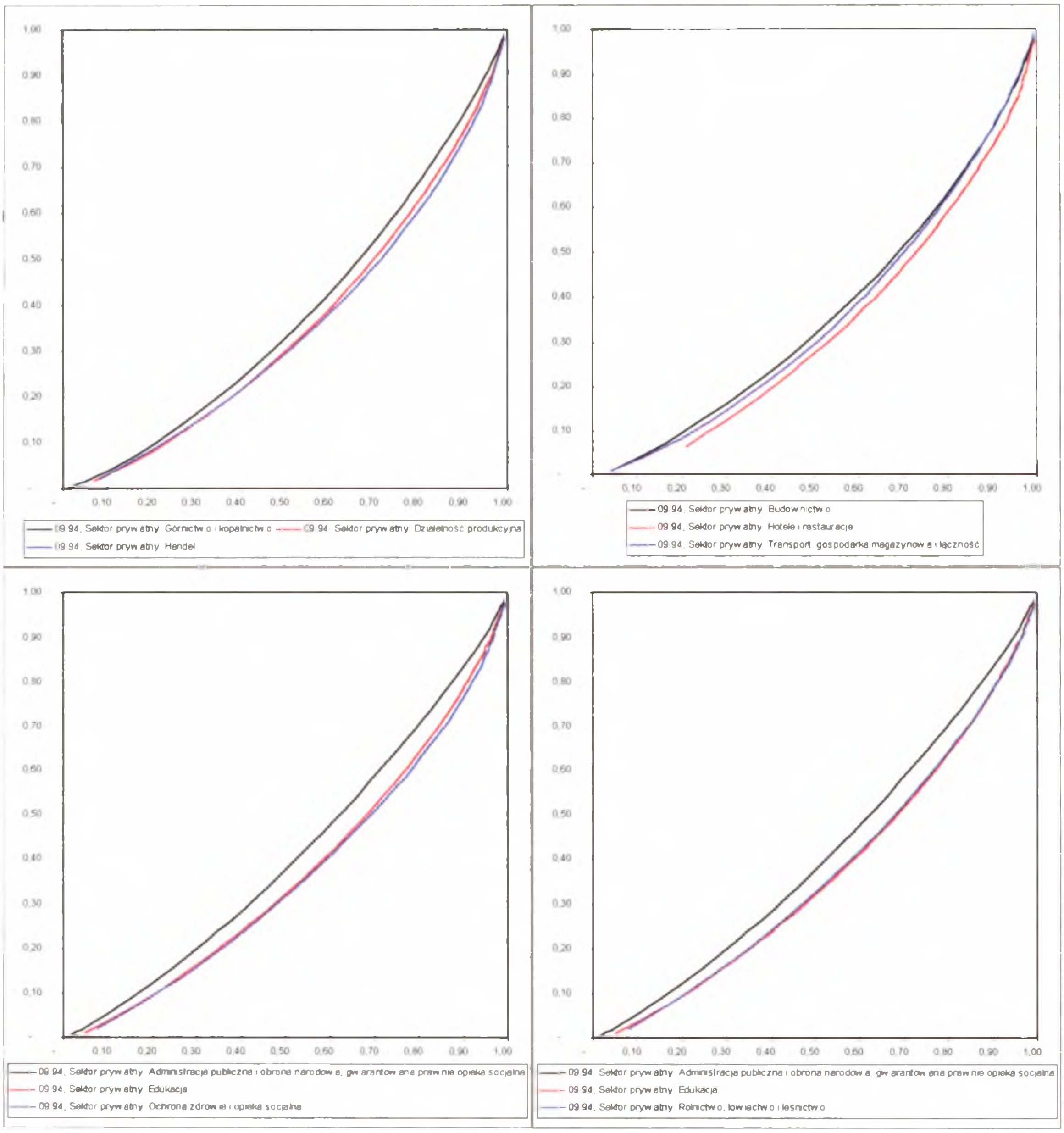
Rys. 7.23

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki ogółem w 09.94



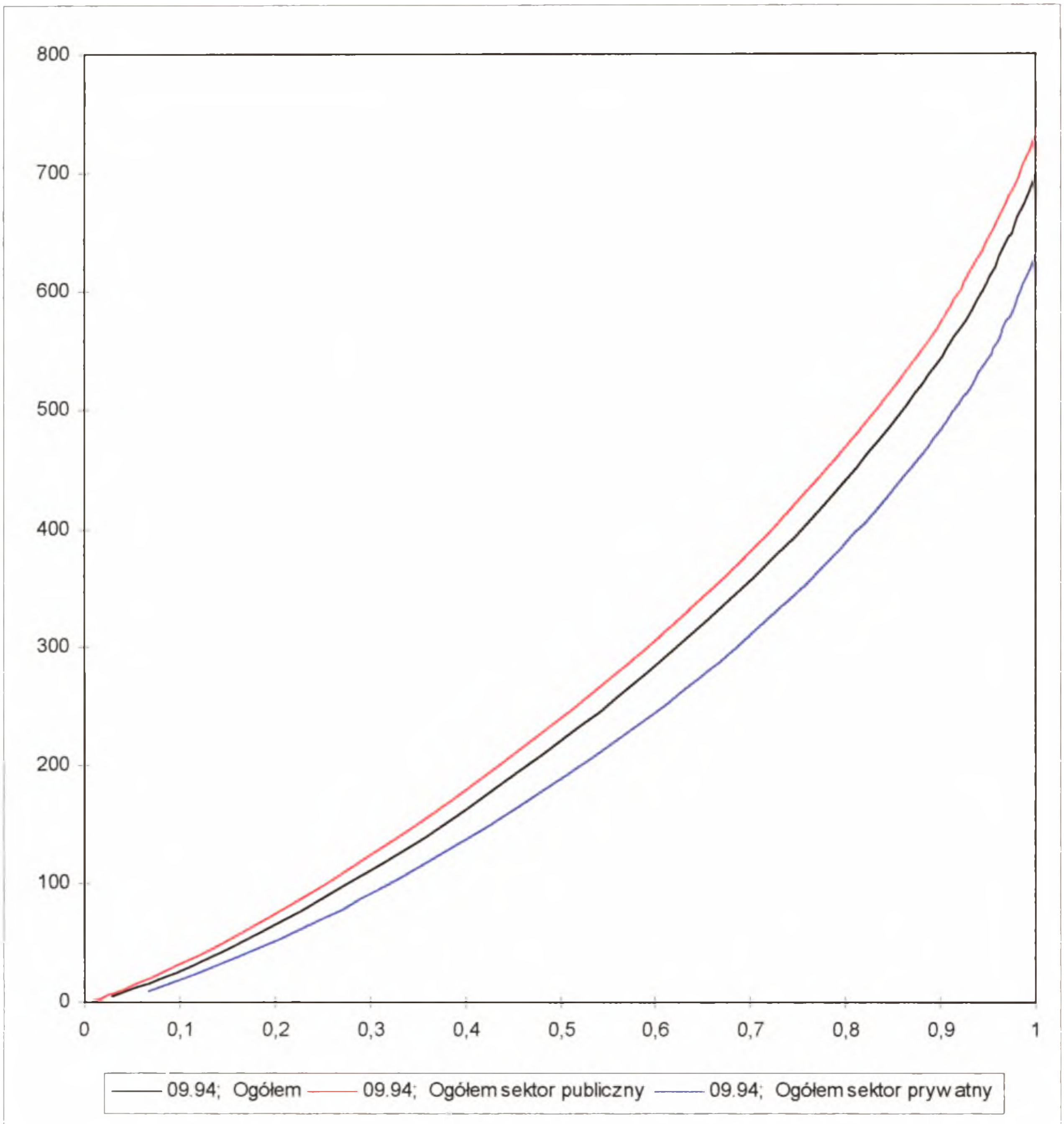
Rys. 7.24

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki dla sektora publicznego w 09.94



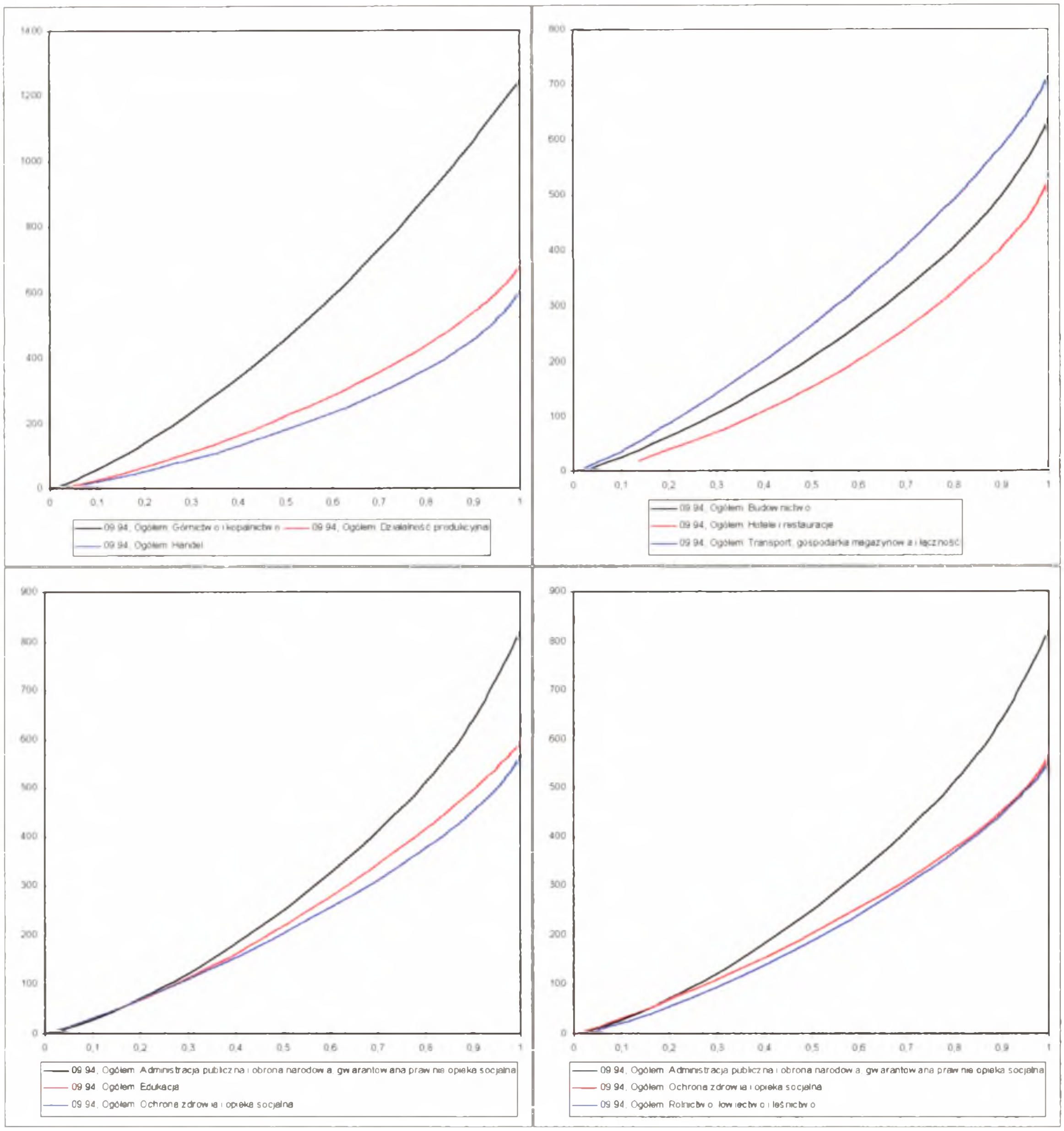
Rys. 7.25

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki dla sektora prywatnego w 09.94



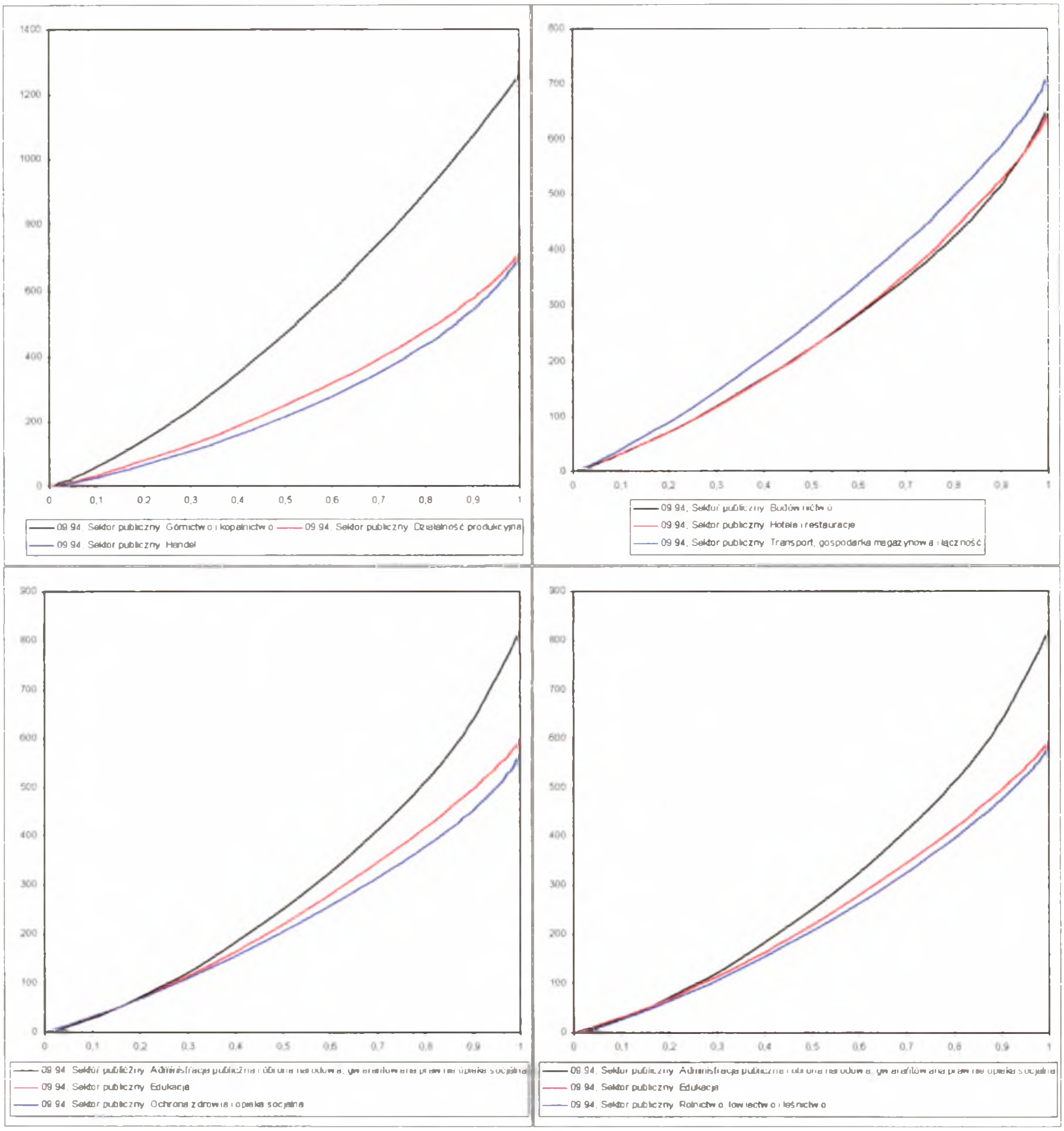
Rys. 7.26

Uogólnione krzywe Lorenza dla Polski ogółem, sektora publicznego i prywatnego w 09.94



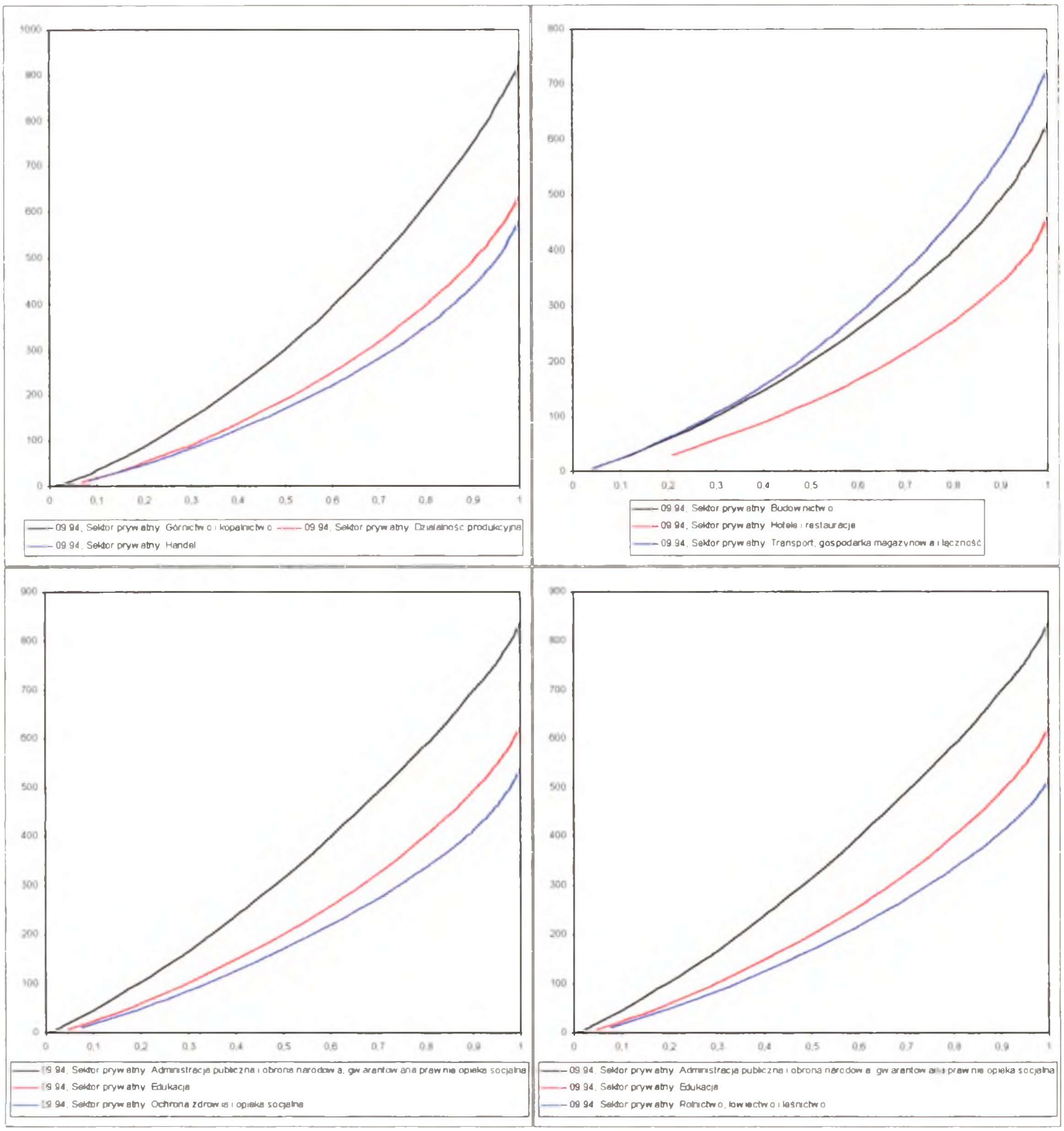
Rys. 7.27

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki ogółem w 09.94



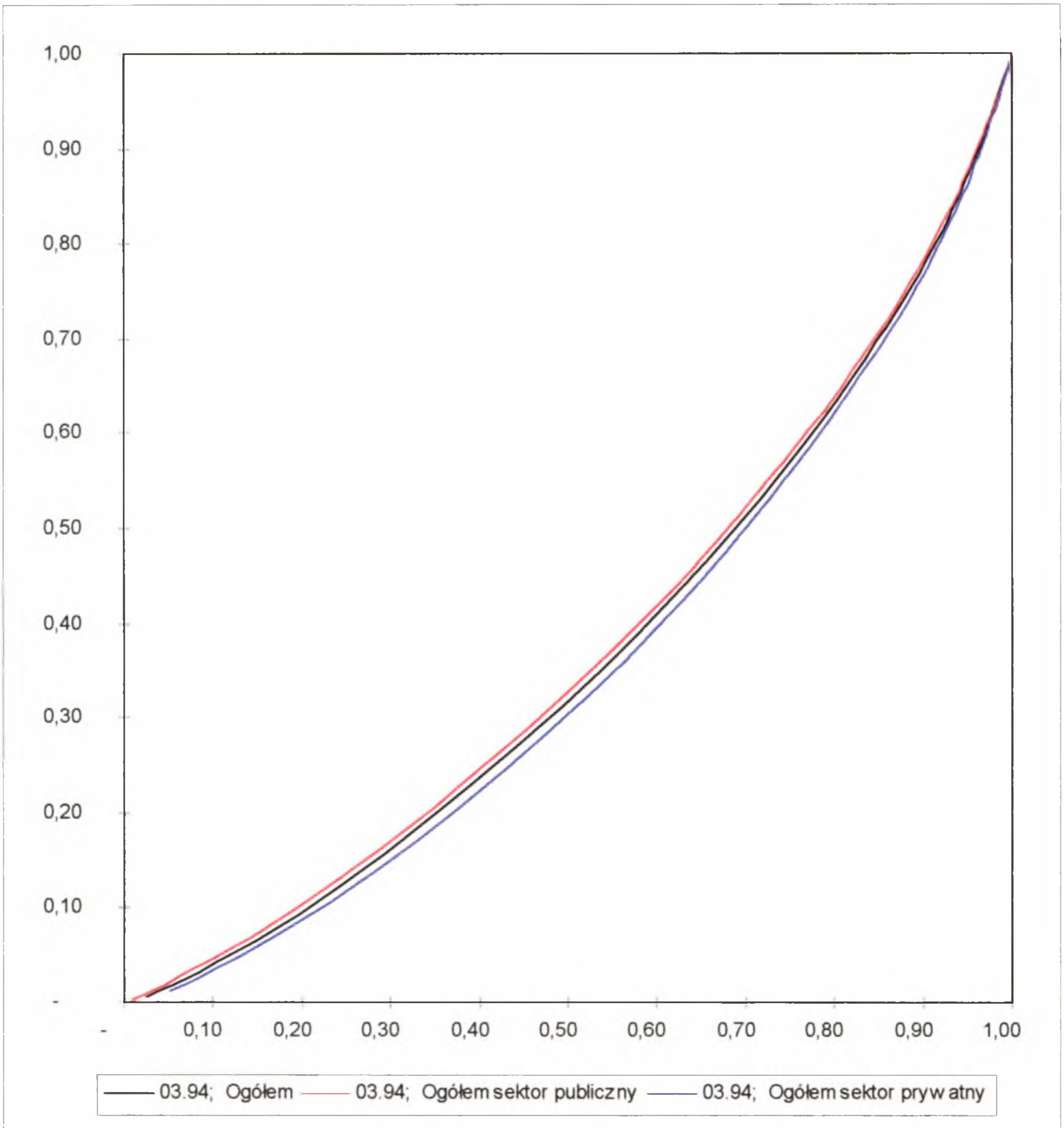
Rys. 7.28

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki w sektorze publicznym w 09.94



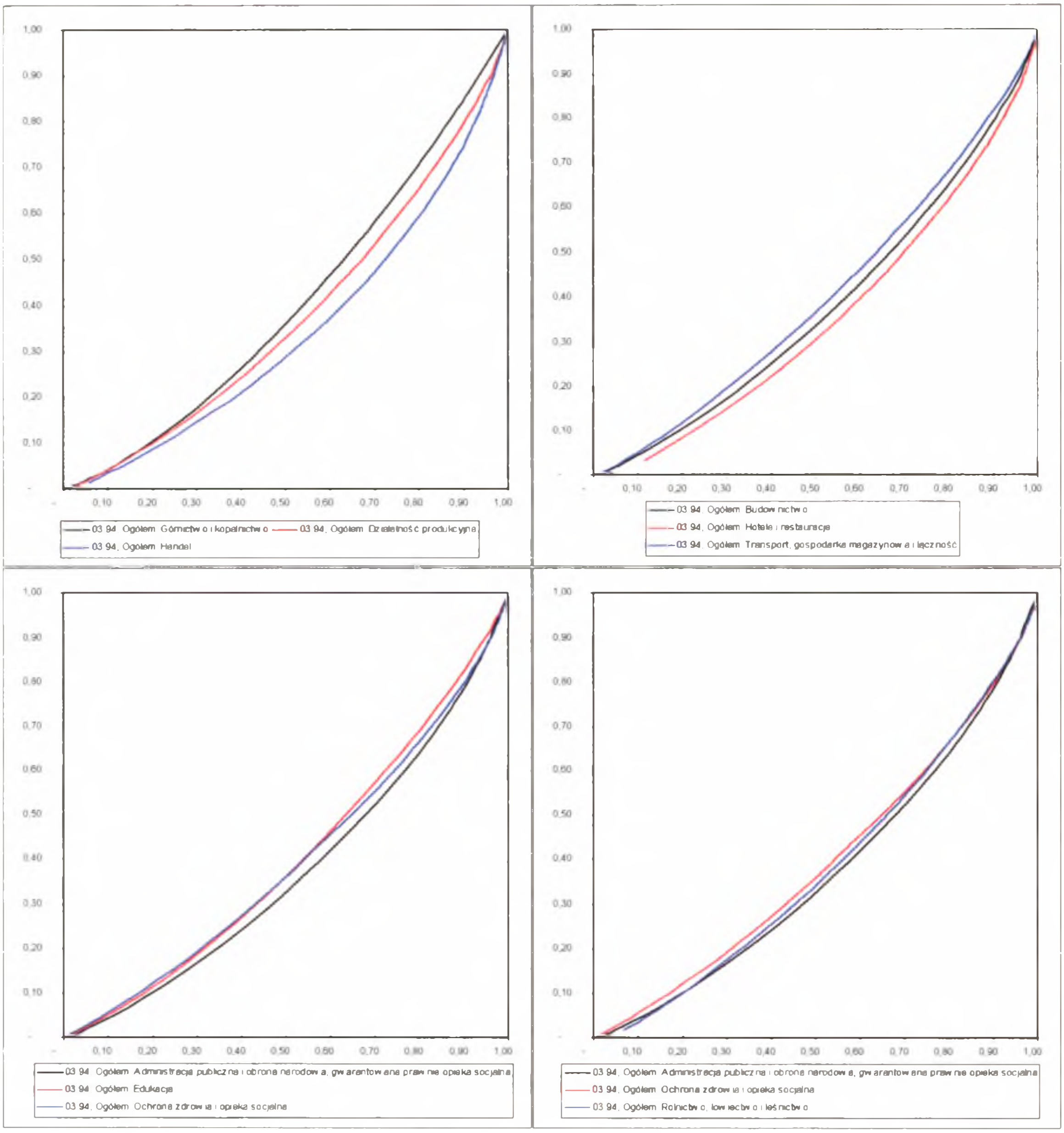
Rys. 7.29

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki w sektorze prywatnym w 09.94



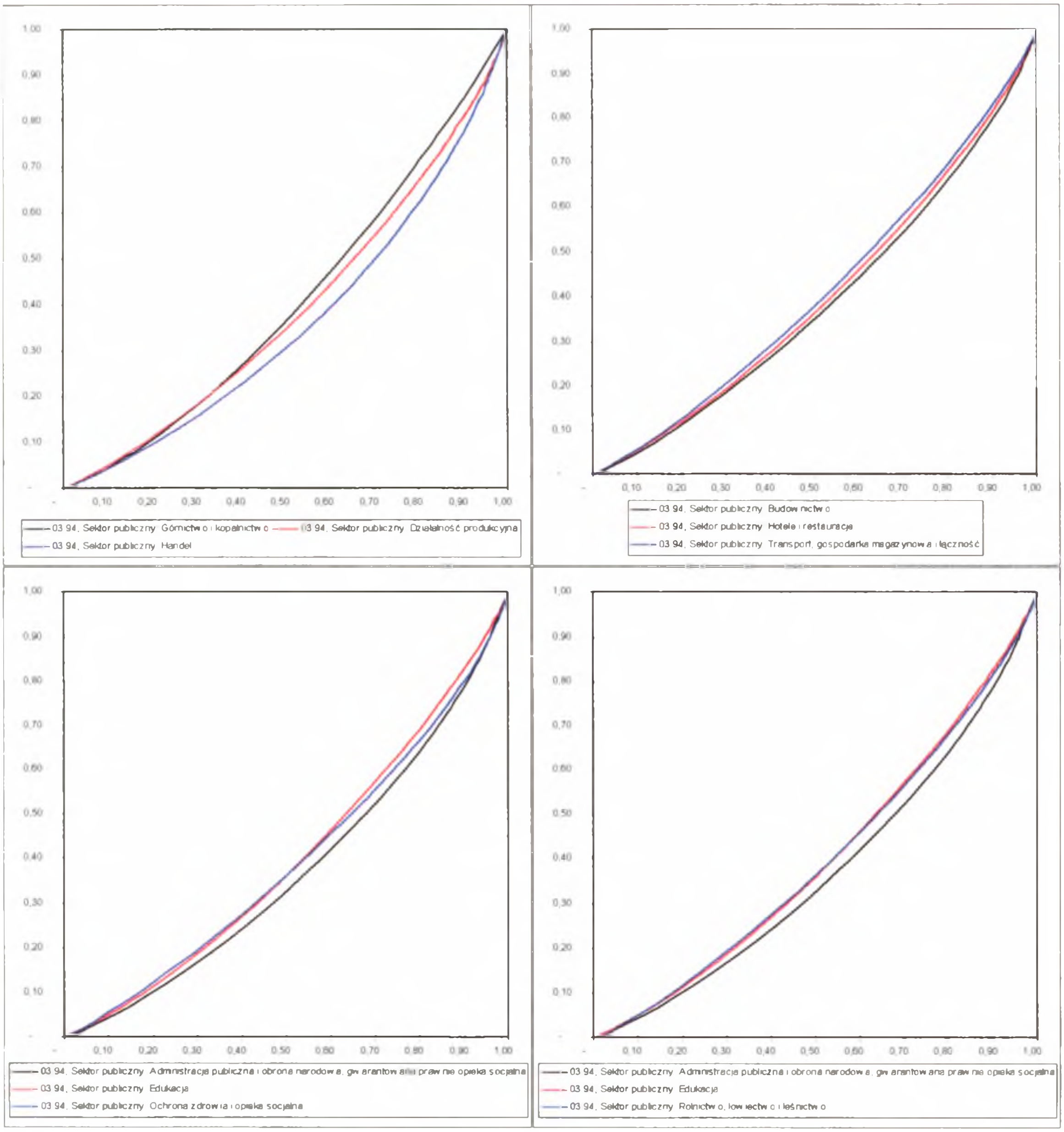
Rys. 7.30

Krzywe Lorenza dla Polski ogółem, dla sektora publicznego i prywatnego w 03.94



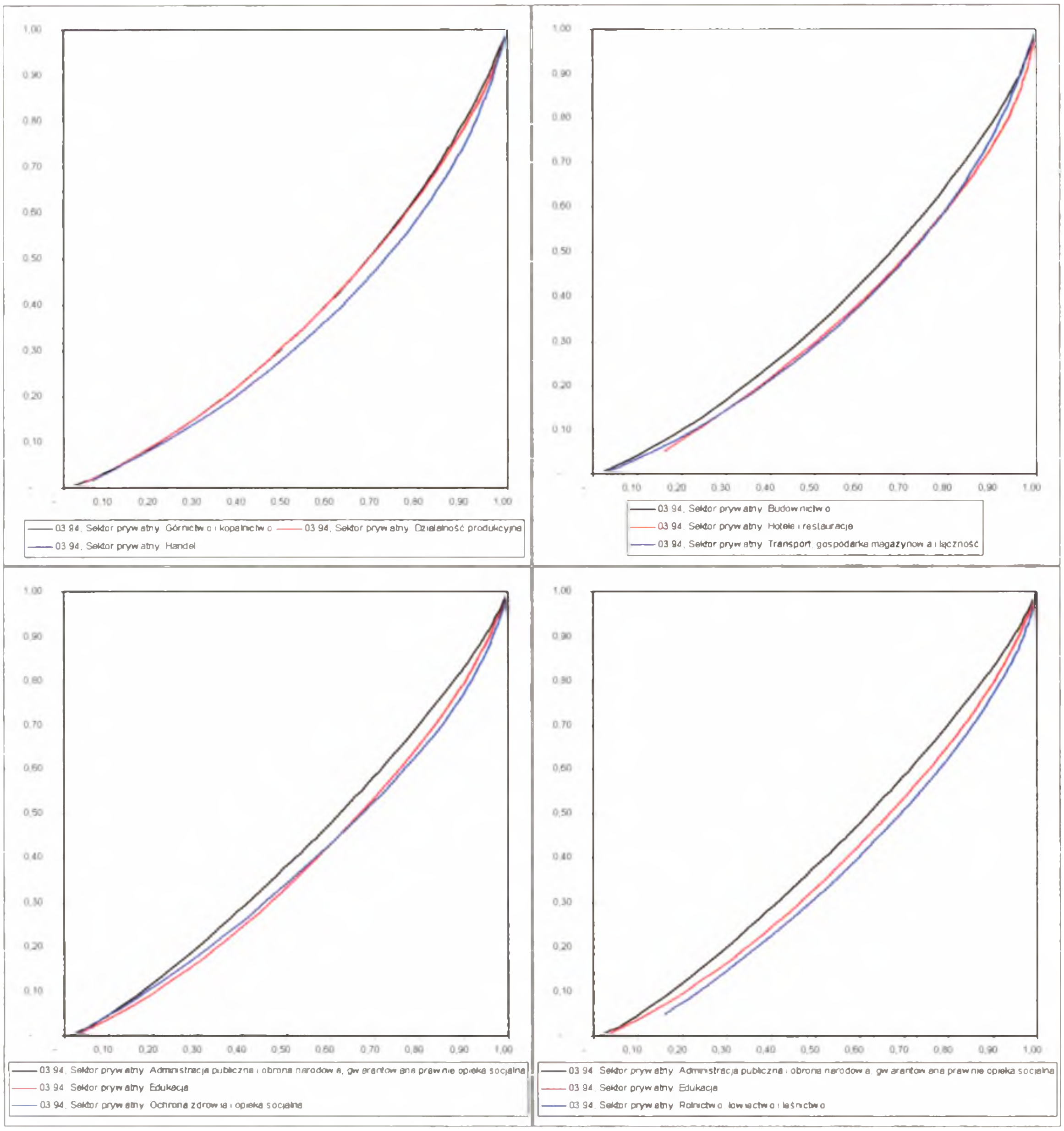
Rys. 7.31

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki ogółem w 03.94



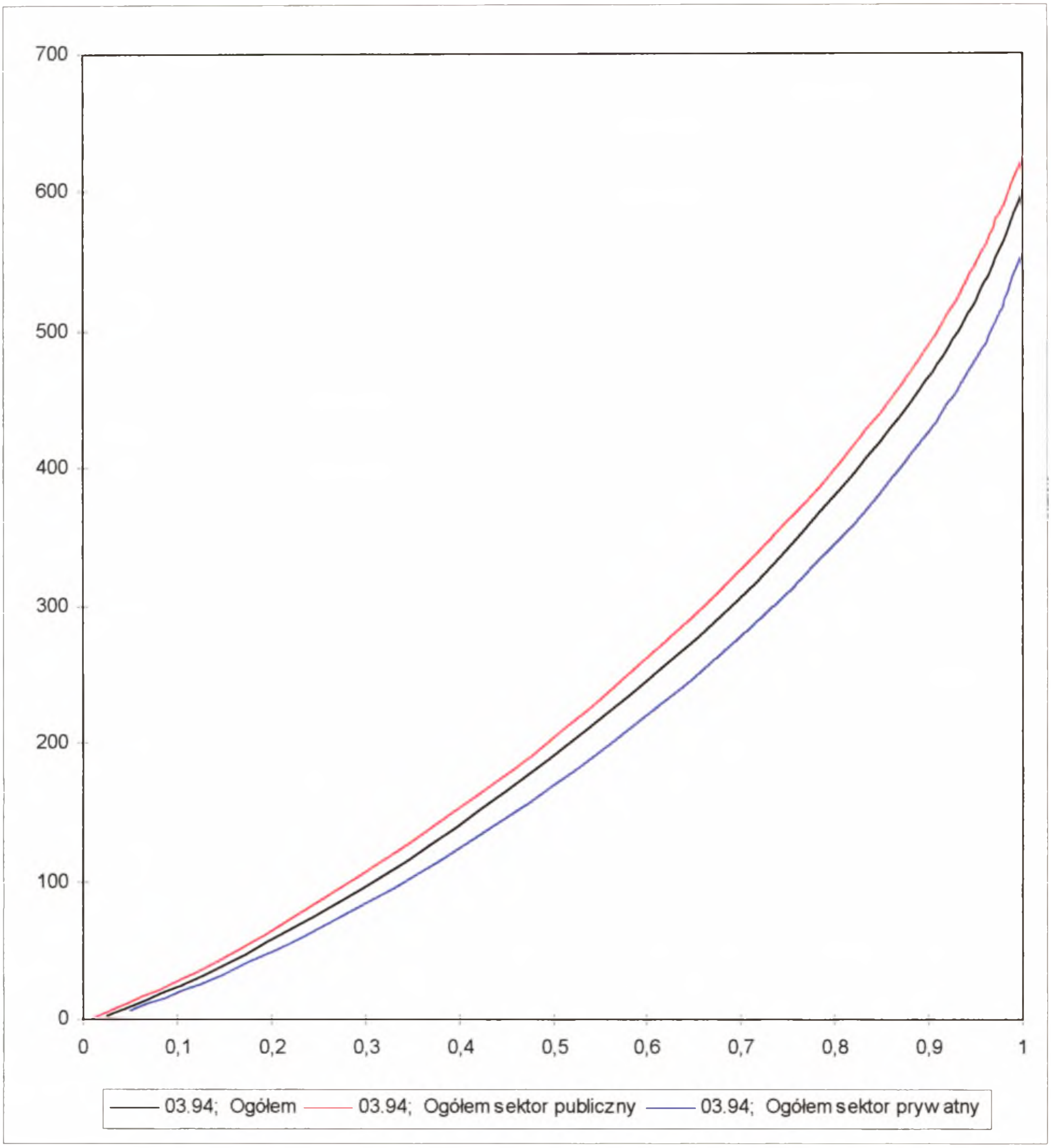
Rys. 7.32

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w sektorze publicznym w 03.94



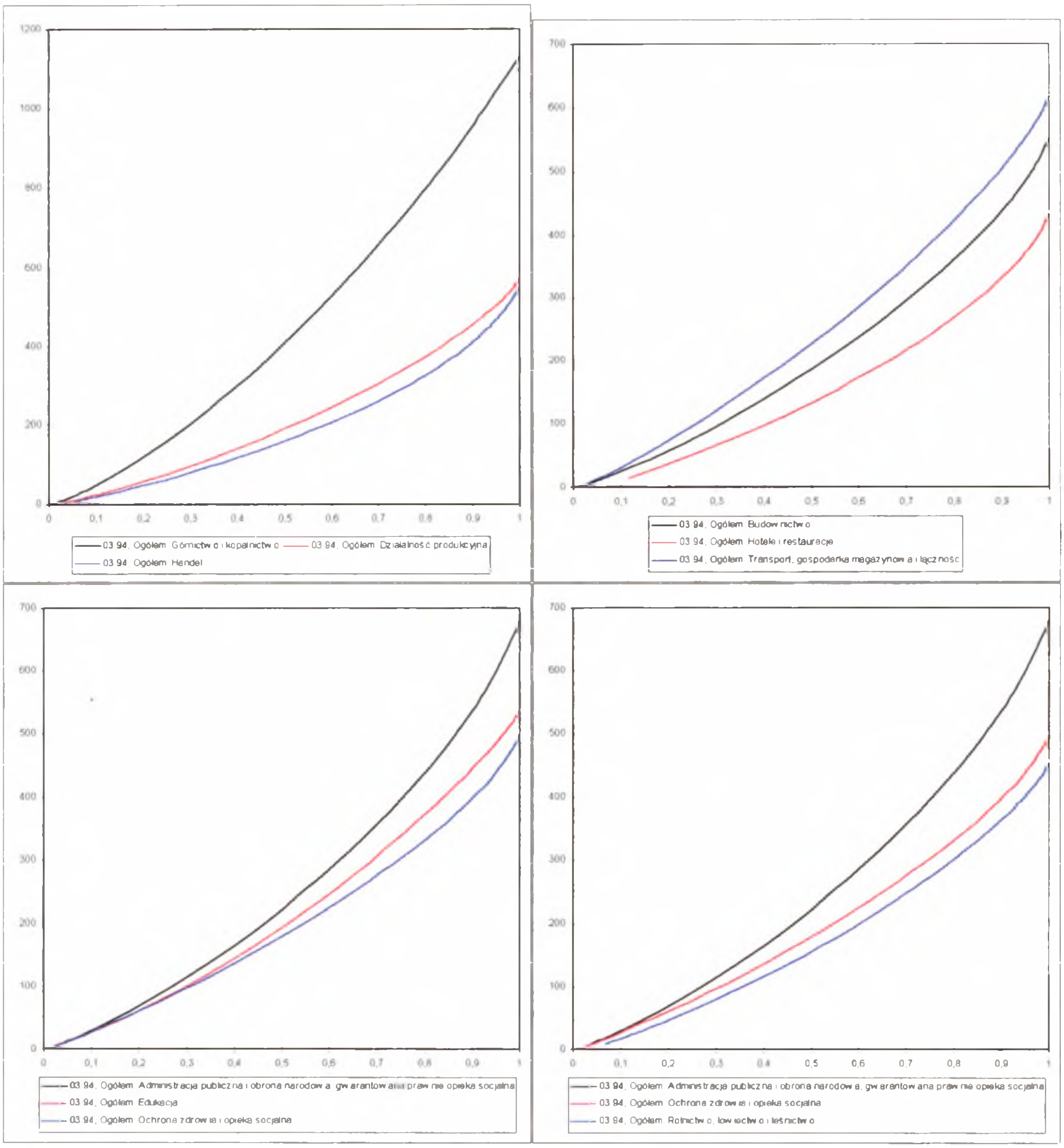
Rys. 7.33

Krzywe Lorenza dla działów gospodarki w sektorze prywatnym w 03.94



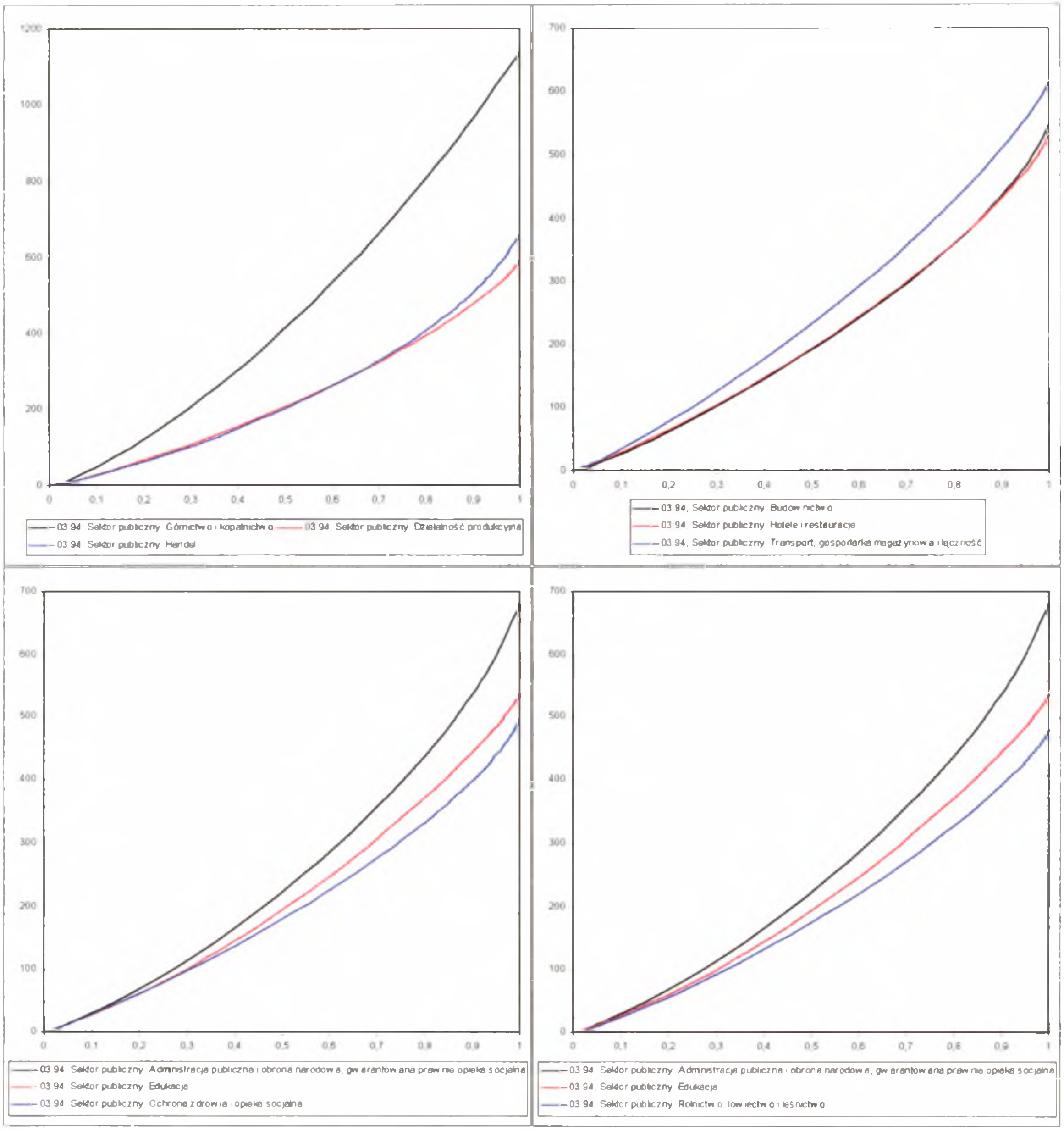
Rys. 7.34

Uogólnione krzywe Lorenza dla Polski ogółem, dla sektora publicznego i prywatnego w 03.94



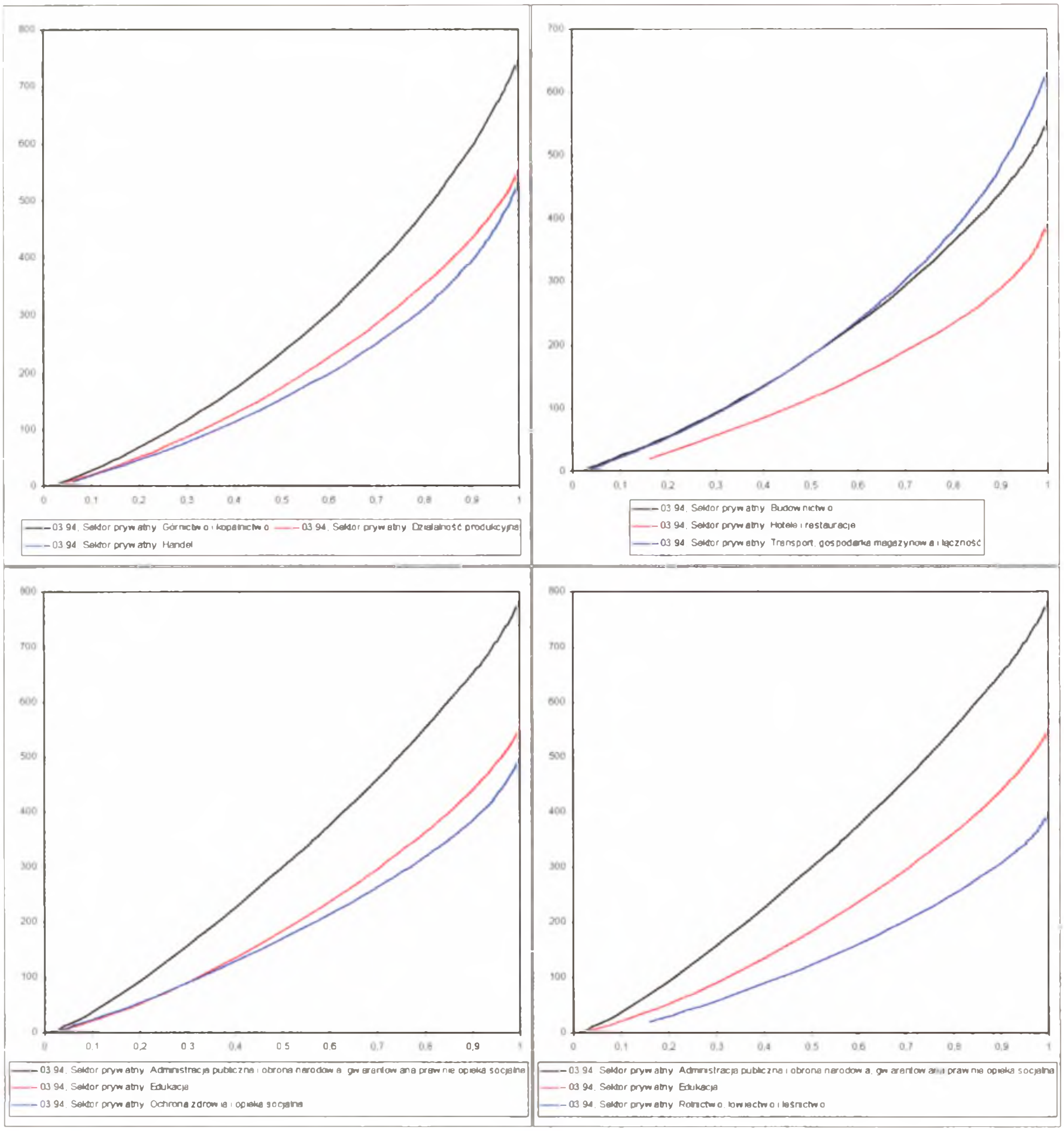
Rys. 7.35

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki ogółem w 03.94



Rys. 7.36

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki w sektorze publicznym w 03.94



Rys. 7.37

Uogólnione krzywe Lorenza dla działów gospodarki w sektorze prywatnym w 03.94

Literatura

R. L. Ackoff (1969). *Decyzje optymalne w badaniach stosowanych.* PWN. Warszawa.

A. B. Atkinson (1970). *On the Measurement of Inequality.* Journal of Economic Theory, nr 2.

A.B. Atkinson (1987). *On the Measurement of Poverty.* Econometrca. Vol. 55, No. 4, s. 749–764.

D. Begg (1995). *Ekonomia.* PWE.

A. Białynicki-Birula (1977). *Algebra.* PWN. Warszawa.

M. Biernacki (1996). *Aksjomatyczne podejście do teorii ubóstwa. Ekonomia matematyczna.* Prace Naukowe AE we Wrocławiu 748. s. 21–36.

M. Biernacki (1997). *Pomiar. Ekonomia matematyczna.* Wydawnictwo AE we Wrocławiu. s. 63–70.

C. Blackorby, D. Donaldson (1980). *Etihcal Indices for the Meaurement of Poverty.* Econometrica. Nr 48.

C. Blackorby, D. Donaldson(1978). *Measures of Relative Equality and Thei Meaning in Terms of Social Welfare.* Journal of Economic Theory. Nr 18, s. 59–80.

C. Blackorby, D. Primont, R. Russel (1978). *Duality, Separability, and Functional Structure: Theory and Economic Applications.* New York. North-Holland.

B. Buchman, L. Rainwater, G. Schmaus, T. Smeeding (1988). *Equivalence Scales, Wellbeing, Inequality and Poverty: Sensitive Estimates Across Ten Countries Using the Luxembourg Income Study Database.* „The Review of Income and Wealth", No. 34.

V. Brawwa (1975). *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects.* Journal of Financial Economics. No 2.

S. R. Chakravarty, B. Dutta (1987) *A Note on Measures of Distance between Income Distributions.* Journal of Economic Theory. Nr 41, s. 185–188.

S.R. Chakravarty (1988) *Extended Gini Indices of Inequality.* International Economic Review Vol. 29., No 1, s. 147–156.

Clark, Hemming i Ulph (1981). *On Indices for the Measurement of Poverty.* The Economic Journal. No. 91, S. 515–526.

C. H Coombs, R.M. Dawes, A. Tversky (1977). *Wprowadzenie do psychologii matematycznej.* Warszawa.

C. H. Coombs, H. Raiffa, R. M. Thrall (1954). *Some Views on Mathematical Models and Measurement Theory.* Psychological Review Vol. 61. No.2, S. 132– 144.

J. Czapiński (1994). *Polski menedżer w świetle badań.* „Rzeczpospolita", dodatek nr 11/25.

Z. Czerwiński (1992). *Dylematy ekonomiczne.* Warszawa. PWN.

Z. Czerwiński (1982). *Matematyczne modelowanie procesów ekonomicznych.* Warszawa. PWN.

M. Desai, A. Shah (1988). *An Econometric Approach to the Measurement of Poverty.* Oxford Economic Papers. Vol. 40, s. 505–522.

W. E. Diewert (1976) *Exact and Superlative Index Numbers.* Journal of Econometrics Nr 4, s. 115–145. North-Holland.

P. Fishburn (1970). *Utility Theory for Decision Making.* John Wiley. New York.

J. E. Foster, J. Greer, E. Thorbecke (1984) *A Class of Decomposable Poverty Measures.* Econometrica, Vol. 52, No. 3, s. 761–765.

J. E. Foster, A. F. Shorrocks(1988). *Poverty Orderings and Welfare Dominance.* Social Choice and Welfare. Nr 5.

J. E. Foster, A. F. Shorrocks (1988). *Poverty Orderings.* Econometrica. Vol.56, s. 173–177.

J. E. Foster, A. F.Shorrocks (1991). *Subgroup Consistent Poverty Indices.* Econometrica, Vol. 59, No. 3, s. 687–709.

L. Frąckiewicz (1997). *Zagrożenia społeczne– miejsce polityki społecznej w systemie nauk. Materiały z ogólnopolskiej konferencji naukowej.* Katowice.

S. Fred, S. Roberts (1976). *Discrete Mathematical Models. Prentice-Hall.* Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.

L. Gastwirth (1972). *The estimation of the Lorenz curve and Gini index.* The Review of Economics and Statistics 63, no.3.

L. Gastwirth (1975). *The estimation of a family of measures of economic inequality.* Journal of Economics Nr 3, s. 61–70. North-Holland.

J. Gilder (1988). *Bogactwo i ubóstwo.* Officyna liberałów. Warszawa.

S. Golinowska (1996). *Polska bieda. Kryteria. Ocena. Przeciwdziałanie.* Instytut Pracy i Spraw Socjalnych. Warszawa.

Gospodarstwa domowe. Wybrane elementy warunków życia ludności w I–II kwartale 1995 r. Główny Urząd Statystyczny. Warszawa 1995.

A. J. M. Hagenaars (1986). *The Perception of Poverty.* North-Holland.

Z. Hellwig (1997). *Czas oczekiwania (na przyjęcie Polski do struktur europejskich).* Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 743.

H. Hugh (1994). *Poverty Politic.* w: S.Danziger, G.Sandefur, D.Weineberg. *Confronting Poverty, Prescriptions for Change.* Sage. New York.

Jan Paweł II (1991). *Centesimus annus.* w: *Encykliki Ojca świętego Jana Pawła II.Kraków. 1996.*

N. Kakwani (1980). *On a Class of Poverty Measures.* Econometrica, Vol. 48, No.2, s. 437–446.

N. Kakwani (1990). *School of Econmics Discussion Paper. Poverty and economic growth.* The University of New South Wales.

J. Kordos (1991). *Pomiar ubóstwa w Polsce.* Wiadomości Statystyczne. Nr 1.

J. Kordos, A. Ochocki (1993). *Problemy pomiaru ubóstwa w krajach EWG i w Polsce.* Wiadomości Statystyczne. Nr 1,3–8.

S. M. Kot (1995). *Modelowanie poziomu dobrobytu. Teoria i zastosowania.* Wrocław.

S. M. Kot (1998). *Cracow Poverty Line.* TR-4. Katedra Statystyki. AE. Wrocław.

J. Kozielecki (1971). *Problemy psychologii matematycznej.* Warszawa. PWN.

A. Kubów (1996). *Infrastruktura społeczna w okresie transformacji.* Wydawnictwo AE we Wrocławiu.

A. Kundu, T.E. Smith (1983).*An Impossibillity Theorem on Poverty Indices.* Int. Econ. Rev. Nr 2.

A. Luszniewicz (1978). *Statystyka społeczna.* PWE.Warszawa.

E. Maasoumi (1986). *The Measurement and Decomposition of Multi-dimensional Inequality.* Econometrica, Vol. 54, No. 4, s. 991–997.

A. Marshall, I. Olkin (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* Academic Press, Inc.

G. D. Myles (1990). *Measurment and Modelling in Economics.* North-Holland.

R. J. Neuhaus (1993). *Biznes i ewangelia.* W drodze. Poznań.

S. R. Osmani (1994). *Economic Reform and Social Welfare: The Case of Nutrition in Sri Lanka.* The University of Ulster at Jordanstown.

W. Ostasiewicz (1990). *O miernikach.* Prace naukowe AE, Wrocław nr 513.

S. Ostasiewicz, W. Ostasiewicz (1996). *Dobrobyt i złobyt.* Badania operacyjne i decyzje. Nr 2.

N. Ott, G. Wagner (1997). *Income Inequality and Poverty in Eastern and Western Europe.* Heidelberg: Physica-Verl.

T. Panek (1994). *Zmiany w sferze ubóstwa w Polsce w okresie transformacji gospodarczej.* Z Prac Zakładu Badań Statystyczno-Ekonomicznych. Zeszyt nr 218 GUS-u.

J. Pfanzagl (1971). *Theory of Measurement.* Physica-Verlag. Wurzburg-Wien.

Z. Pisz. (1995). *Wybrane problemy polityki społecznej.* Wydawnictwo AE we Wrocławiu.

B. M. S. Praag (1991). *Ordinal and Cardinal Utility.* Journal of Econometrics 50. s. 69–89. North-Holland.

Problemy ubóstwa. (1995) Polityka społeczna nr 8.

G. Pyatt (1987) *Measuring Welfare, Poverty and Inequality.*The Economic Journal No. 97, s. 459–467.

B. Sajkiewicz (1995). *Minimum socjalne.* Polityka społeczna nr 10.

B. Sajkiewicz (1996). *Minimum socjalne.* Polityka społeczna nr 9.

B. Sajkiewicz (1997). *Minimum socjalne.* Polityka społeczna nr 10.

A. Sen (1991). *Welfare, Preference and Freedom.* Journal of Econometrics 50. s. 15–29. North-Holland.

A. Sen (1976). *Poverty: An Ordinal Approach to Measurement.* Econometrica, Vol. 44, No. 2, s. 219–229.

A. F. Shorrocks (1983). *Ranking income distributions.* Economica. Nr 50.

S. K. Singh, G. S. Maddala (1976). *A Function for Size Distribution of Incomes.* Econometrica, Vol. 47, No. 5, S. 963–969.

A. Smoluk (1996). *Pomiar jako zbiór rozmyty.* W: A. Zeliaś: Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych. AE w Krakowie.

A. Smoluk (1997). *Preferencja a wartość i jej pomiar. Informatyka i ekonometria.* Prace Naukowe AE we Wrocławiu 743. s. 117–122.

A. Szulc (1993). Zeszyt GUS-u nr 214. Warszawa.

N. Takayama (1979). *Poverty, Income Inequality, and Their Measures: Professor Sen's Axiomatic Approach Reconsidered.* Econometrica, Vol. 47, No. 3, s. 747–459.

D. Thon (1983). *A Note on a Troublesome Axiom for Poverty Indices.* The Economic Journal. No. 93, s. 199–200.

P. Townsend (1985). *A Sociological Approach to the Measurenent of Poverty – a Rejoinder to Professor Amartya Sen.* Oxford Economic Papers. Vol. 37, s. 659–668.

K. Tsui. (1995). *Multidimensional Generalizations of the Relative and Absolte Inequality Indices:The Atkinson-Kolm-Sen Approach.* Journal of Economic Theory. Nr 67, s. 251–265

Informacja o sytuacji społeczno-gospodarczej województwa wrocławskiego wrzesień 1994 r.

M. Walesiak (1993). *Statystyczna analiza wielowymiarowa w badaniach marketingowych.* Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 654. Wojewódzki Urząd Statystyczny we Wrocławiu. Nr 9.

Zatrudnienie i wynagrodzenia w gospodarce narodowej w 1996 roku. Główny Urząd Statystyczny. Warszawa 1997.

Zatrudnienie w gospodarce narodowej według wysokości wynagrodzenia za marzec 1994. Główny Urząd Statystyczny. Warszawa 1994.

Zatrudnienie w gospodarce narodowej według wysokości wynagrodzenia za wrzesień 1994. Główny Urząd Statystyczny. Warszawa 1995.

Zatrudnienie w gospodarce narodowej według wysokości wynagrodzenia za wrzesień 1995. Główny Urząd Statystyczny. Warszawa 1996.

Zatrudnienie w gospodarce narodowej według wysokości wynagrodzenia za wrzesień 1997. Główny Urząd Statystyczny. Warszawa 1998.