

*mosty wiszące, teoria drgań, drgania liniowe i nieliniowe, drgania losowe, teoria korelacyjna, symulacja numeryczna, losowy ruch drogowy, niezawodność, aerodynamika mostów*

Danuta BRYJA \*

## **DETERMINISTYCZNE I STOCHASTYCZNE METODY ANALIZY DRGAŃ MOSTÓW WISZĄCYCH**

W rozprawie sformułowano uściśloną teorię przestrzennych nieliniowych drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących, prowadzącą do uogólnienia wcześniej stosowanych, ciągłych modeli obliczeniowych. Przedstawiona teoria uwzględnia specyficzne cechy drgań mostów wiszących i może być stosowana do analizy zagadnień dynamiki nowoczesnych mostów wiszących o typowych schematach konstrukcyjnych, z dźwigarami usztywniającymi typu komorowego. Na podstawie sformułowanej teorii opracowano efektywny algorytm analizy drgań deterministycznych, dostosowany do potrzeb stochastycznej analizy drgań wymuszonych ruchem drogowym i działaniem wiatru. Omówiono przykład zastosowania algorytmu do analizy zagadnienia własnego oraz analizy dynamicznych i statycznych funkcji wpływu naciągów ciągien i przemieszczeń w wybranych przekrojach przykładowego mostu. Wyniki badań numerycznych wykazały zasadność uściśleń modelu obliczeniowego konstrukcji, wynikających z uwzględnienia poziomych przemieszczeń ciągien. Szczególną uwagę zwrócono na zagadnienie doboru modelu tłumienia. Opisano specyficzne cechy tłumienia drgań w mostach wiszących i dokonano analizy numerycznej rozwiązań problemu drgań rezonansowych, przy wymuszeniu okresową serią ruchomych sił skupionych, z zastosowaniem kilku wariantów opisu tłumienia w równaniach ruchu konstrukcji. W drugiej części rozprawy przedstawiono metody analizy drgań stochastycznych. Sformułowano dwie, całkowicie odmienne metody wyznaczania charakterystyk momentowych drgań losowych, spowodowanych ruchem drogowym. Pierwsza z nich jest przykładem podejścia analitycznego i dotyczy drgań liniowych. W drugiej metodzie, przeznaczonej do analizy drgań nieliniowych, zastosowano podejście symulacyjne z wykorzystaniem zasad symulacji zjawisk losowych w ujęciu metod typu Monte Carlo. Za pomocą metody symulacyjnej przeprowadzono analizę efektów nieliniowych oraz oceniono wpływ inercji i resorowania pojazdów na charakterystyki drgań przykładowego mostu. W sformułowaniu metody analitycznej wykorzystano teorię procesów Poissona i dynamiczne funkcje wpływu odpowiedzi mostu. Na podstawie analiz funkcji gę-

---

\* Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław.

stości rozkładu prawdopodobieństwa zbadano możliwość aproksymowania efektów obciążenia ruchem drogowym w stanie ustalonym, przez stacjonarne procesy gaussowskie. Przedstawiono metody badania niezawodności mostów wiszących, w sensie pierwszego przekroczenia poziomu granicznego i w aspekcie zmęczenia materiału. Rozważania skoncentrowano na problemie wyboru sposobu modelowania procesów opisujących w zagadnieniu niezawodności stacjonarne drgania konstrukcji w stanie ustalonym. W ostatniej części rozprawy przedstawiono oryginalne, probabilistyczne ujęcie problemu drgań spowodowanych turbulentnym przepływem wiatru. Sformułowano stochastyczny, niestacjonarny model porywistego wiatru i odpowiadające mu formuły obciążeń aerodynamicznych mostu. Wyprowadzono rozwiązania problemu drgań losowych w zakresie teorii korelacyjnej, korzystając z aparatu matematycznego procesów stochastycznych. Pole ciśnienia wiatru podzielono na segmenty wzdłuż rozpiętości mostu, dzięki czemu uzyskano możliwość uwzględnienia przestrzennej korelacji procesów opisujących turbulencje. Przedstawiony w rozprawie zbiór metod i algorytmów, przeznaczonych do analizy drgań mostów wiszących wzbudzanych dynamicznym oddziaływaniem ruchu drogowego i działaniem wiatru, charakteryzuje się jednolitością podejścia w dziedzinie czasu, co stwarza dobre podstawy do łącznej analizy drgań, spowodowanych równoczesnym działaniem obu wymienionych obciążeń.

### Podstawowe oznaczenia

$a_i$	– współrzędna mierzona wzdłuż osi $z_i$ , określająca położenie punktu $O_i$ względem środka ścinania $A_i$ ,
$a_j$	– stała, której wartość zależy od kierunku ruchu pojazdów na pasie $j$ ,
$a_{jk}$	– odległość oscylatora $jk$ od frontu strumienia $j$ ,
$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{ci}$ itp.	– wektory mnożników funkcyjnych zależnych od zmiennej $\xi_i$ ,
$A_i$	– środek ścinania przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara,
$\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{ci}$ itp.	– macierze mnożników funkcyjnych zależnych od zmiennej $\xi_i$ ,
$b$	– stała materiałowa,
$b_i$	– współrzędna mierzona wzdłuż osi $z_i$ , określająca położenie punktu $B_i$ względem środka ścinania $A_i$ ,
$b_i^o$	– masa modalna (główna) układu,
$B$	– szerokość przekroju dźwigara usztywniającego,
$B_i$	– środek masy przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara z balastem,
$B_{\omega_i}(x_i, t)$	– bimoment w przekroju $x_i$ , w $i$ -tym przęsle dźwigara,
$\mathbf{B}, \widehat{\mathbf{B}}, \mathbf{B}_{bb}$ itp.	– macierze i bloki macierzy bezwładności,
$c$	– stała materiałowa,
$c_i$	– współrzędna mierzona wzdłuż osi $z_i$ , określająca położenie punktu $C$ względem środka ścinania $A_i$ ,
$c_i^o$	– tłumienie modalne (głównie) układu,

$c_{jk}$	– charakterystyka więzi tłumiącej w zawieszeniu masy oscylatora $jk$ ,
$\text{coh}(\delta_{jk}, \omega)$	– koherencja turbulencji wiatru w punktach $x_j, x_k$ odległych o $\delta_{jk}$ ,
$\mathbf{c}_o$	– macierz diagonalna zawierająca charakterystyki $c_{jk}$ , odpowiadające oscylatorom znajdującym się na moście w chwili $t$ ,
$\mathbf{c}_{ui}, \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_{ci}$ itp.	– wektory funkcji typu cosinus (funkcje zmiennej $x_i$ , odpowiedniki sinusowych funkcji aproksymacyjnych),
$\tilde{\mathbf{c}}_{ijk}$	– wektor funkcji typu cosinus, odpowiedników funkcji aproksymacyjnych $\tilde{\mathbf{s}}_{ijk}$ , śledzących położenie oscylatora $jk$ ,
$C, C_1, C_2$	– centrum podwieszenia dźwigara i punkty zamocowania wieszaków,
$C_D, C_L, C_M$	– współczynniki oporu aerodynamicznego,
$C_{XX}(t_1, t_2)$	– funkcja kowariancyjna procesu stochastycznego $X(t)$ ,
$C_{XY}(t_1, t_2)$	– funkcja kowariancji wzajemnej procesów $X(t)$ i $Y(t)$ ,
$\mathbf{C}_{1i}, \dots, \mathbf{C}_{7i}$	– współczynniki macierzowe o elementach zapisanych w postaci całek oznaczonych, obliczanych numerycznie,
$\mathbf{C}_c, \mathbf{C}_s$	– współczynniki macierzowe o elementach liczbowych,
$\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{C}_{bb}$ itp.	– macierze i bloki macierzy tłumienia,
$\tilde{\mathbf{C}}_{ji}$	– macierz, której kolumny są wybranymi wektorami $\tilde{\mathbf{c}}_{ijk}$ ,
$d$	– stała odległość między ruchomymi siłami skupionymi,
$d_j$	– długość $j$ -tego segmentu dźwigara obciążonego wiatrem,
$d_{\min}, d_{\max}$	– minimalny i maksymalny odstęp między pojazdami,
$\mathbf{d}, \mathbf{d}_c$ itp.	– macierze diagonalne typu $\text{diag}(\pi, 2\pi, \dots)$ ,
$\mathbf{D}(t)$	– losowe uszkodzenie skumulowane w jednostce czasu,
$D, D_m, D_b, D_{se}$	– pozioma siła aerodynamiczna w przekroju $x_i$ : całkowita, średnia, wynikająca z turbulencji, samowzbudna,
$D_j^s(t)$	– poziome obciążenie aerodynamiczne $j$ -tego segmentu dźwigara,
$e$	– odległość płaszczyzny podwieszenia od osi podłużnej mostu,
$e_j, e_p$	– współrzędna typu $y_i$ , określająca położenie $j$ -tego toru ruchu pojazdów i serii ruchomych sił skupionych,
$E_c A_c$	– sztywność osiowa ciągnąca,
$E_i A_i$	– sztywność osiowa $i$ -tego przęsła dźwigara usztywniającego,
$E_i J_{yi}, E_i J_{zi}$	– sztywności na zginanie $i$ -tego przęsła dźwigara,
$E_i J_{oi}$	– sztywność wycinkowa $i$ -tego przęsła dźwigara,
$f$	– strzałka krzywej zwisu statycznego ciągnąca,

- $f_{li}(\xi_i)$  itp. – mnożniki funkcyjne zależne od geometrii ciągu,  
 $f_j(t)$  – funkcja losowa, opisująca zależność od czasu obciążeń aerodynamicznych  $j$ -tego segmentu dźwigara,  
 $f_1, f_i$  – podstawowa oraz  $i$ -ta częstość własna drgań, mierzona w Hz,  
 $\tilde{f}_i$  –  $i$ -ta częstość własna drgań, mierzona w Hz, obliczona z pominięciem poziomych przemieszczeń ciągów,  
 $f_{\mathbf{M}}(\xi, t)$  – gęstość rozkładu zmiennej losowej  $\xi$  odpowiadającej wartości procesu naprężeń w punkcie, w którym występuje maksimum lokalne (pik) naprężenia,  
 $f_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}, t)$  – jednowymiarowa funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa procesu  $\mathbf{S}$  w chwili  $t$ ,  
 $f_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  – gęstość rozkładu łącznego procesu  $\mathbf{S}$  i jego pochodnej w chwili  $t$ ,  
 $F_s(s_i)$  – funkcja określająca rozkład naprężeń stycznych de Saint-Venanta wzdłuż konturu przekroju cienkościennego,  
 $\mathbf{F}, \widehat{\mathbf{F}}, \mathbf{F}_{wi}$  itp. – wektory i bloki wektorów sił wzbudzających,  
 $g_{\mathbf{S}}(\omega)$  – gęstość widmowa procesu stochastycznego  $\mathbf{S}$ ,  
 $\mathbf{g}$  – wektor współrzędnych uogólnionych opisujących ruch układu: most i zbiór oscylatorów,  
 $\mathbf{g}_c$  – wektor mnożników liczbowych,  
 $G_i I_i$  – sztywność  $i$ -tego przęsła dźwigara na czyste skręcania de Saint-Venanta,  
 $G_{jk}$  – ciężar oscylatora  $jk$ ,  
 $\mathbf{G}_o$  – macierz diagonalna zawierająca ciężary  $G_{jk}$  oscylatorów znajdujących się na moście w chwili  $t$ ,  
 $h$  – symbol poziomej składowej przemieszczenia przekroju dźwigara usztywniającego, stosowany w inżynierii wiatrowej,  
 $h_C$  – odległość punktu zamocowania wieszaków w dźwigarze od punktu podparcia ciągu na najwyższym pylonie,  
 $h_{ci}(x_i)$  – odległość punktu zamocowania wieszaków w dźwigarze od cięciwy ciągu w  $i$ -tym przęśle mostu,  
 $h_i$  – odległość punktu początkowego  $i$ -tego odcinka przelotu ciągu od punktu podparcia ciągu na najwyższym pylonie,  
 $h_{ijk}$  – współrzędna mierzona wzdłuż osi  $z_i$ , określająca położenie środka masy oscylatora  $jk$  względem środka ścinania  $A_i$ ,  
 $\mathbf{h}_o$  – macierz diagonalna zawierająca współrzędne  $h_{ijk}$ , które odpowiadają oscylatorom znajdującym się na moście w chwili  $t$ ,

$H_j(x_i, t)$	– naciąg, czyli pozioma składowa siły w ciągu $j$ ,
$H_{0j}(x_i)$	– początkowy (statyczny) naciąg ciągu $j$ ,
$\Delta H_j(x_i, t)$	– dynamiczny przyrost naciągu ciągu $j$ ,
$H_i^*, A_i^*, P_i^*$	– współczynniki (pochodne) aerodynamiczne, $i = 1-6$ ,
$\mathbf{H}_{R_j}(t - \tau)$	– odpowiedź konstrukcji $\mathbf{R}_j(t)$ na działanie impulsu jednostkowego, działającego w chwili $\tau$ ,
$\mathbf{H}_S(x_i, t)$	– dynamiczna funkcja wpływu odpowiedzi mostu $\mathbf{S}(x_i, t)$ ,
$i$	– numer przęsła dźwigara usztywniającego ( $i = 1, \dots, n$ ) i odcinka przelotu ciągu ( $i = 0, \dots, n + 1$ ), numer charakterystyk drgań głównych,
$\mathbf{I}, \mathbf{I}_u$ itp.	– macierze jednostkowe,
$j$	– numer ciągu ( $j = 1, 2$ ), pasa ruchu pojazdów ( $j = 1, \dots, n_p$ ), segmentu obciążenia aerodynamicznego ( $j = 1, \dots, n_s$ ),
$j_{Bi}$	– moment bezwładności obrotowej masy $i$ -tego przęsła dźwigara, mierzony na jednostkę długości względem środka masy przekroju z balastem,
$k_c$	– stała dotycząca ciągu,
$k_i^o$	– sztywność modalna (główna) układu,
$k_{jk}$	– charakterystyka więzi sprężystej w zawieszeniu masy oscylatora $jk$ ,
$\mathbf{k}_o$	– macierz diagonalna zawierająca charakterystyki $k_{jk}$ , które odpowiadają oscylatorom znajdującym się na moście w chwili $t$ ,
$K$	– zmienna losowa opisująca rodzaj (klasę) pojazdu,
$K(\bar{U})$	– częstość zredukowana zależna od prędkości wiatru,
$K_{XX}(t_1, t_2)$	– funkcja korelacyjna procesu stochastycznego $X(t)$ ,
$K_{XY}(t_1, t_2)$	– funkcja korelacji wzajemnej procesów $X(t)$ i $Y(t)$ ,
$\mathbf{K}, \hat{\mathbf{K}}, \mathbf{K}_{bb}$ itp.	– macierze i bloki macierzy sztywności,
$l_i, l$	– rozpiętość $i$ -tego przęsła mostu i rozpiętość przęsła z narzuconą konstrukcyjnie strzałką zwisu $f$ ,
$L$	– całkowita rozpiętość dźwigara usztywniającego ( $l_1 + \dots + l_n$ ) lub ciągu ( $l_0 + l_1 + \dots + l_n + l_{n+1}$ ),
$L_i$	– częściowa suma rozpiętości dźwigara usztywniającego ( $l_1 + \dots + l_i$ ) lub ciągu ( $l_0 + l_1 + \dots + l_i$ ),
$L_c$	– całkowita długość ciągu,
$L, L_m, L_b, L_{se}$	– pionowa (unosząca) siła aerodynamiczna w przekroju $x_i$ : całkowita, średnia, wynikająca z turbulencji, samowzbudna,

$L_j^s(t)$	– pionowe obciążenie aerodynamiczne $j$ -tego segmentu dźwigara,
$m_1(\mathbf{S}, t)$	– empiryczny moment pierwszego rzędu, dotyczący procesu $\mathbf{S}$ ,
$m_2(\mathbf{S}, t)$	– empiryczny moment zwykły drugiego rzędu, dotyczący procesu $\mathbf{S}$ ,
$m_{bi}, m_{bi}^s$	– stała intensywność rozkładu masy $i$ -tego przęsła dźwigara usztywniającego: z balastem, bez balastu,
$m_c$	– masa jednostki długości ciągu,
$\tilde{m}_{ci}, \tilde{m}_{wi}$	– uśredniona intensywność rozkładu masy ciągu i masy wieszaków w $i$ -tym przęśle mostu,
$\tilde{m}_i, \tilde{m}$	– uśredniona intensywność rozkładu masy $i$ -tego przęsła mostu i przęsła z narzuconą konstrukcyjnie strzałką zwisu $f$ ,
$m_{xi}$	– rozłożone obciążenie momentowe, wynikające z redukcji do środka ścinania składowych $p_{yi}, p_{zi}$ obciążenia $i$ -tego przęsła dźwigara,
$m_{yi}, m_{zi}, m_{\omega i}$	– rozłożone obciążenie momentowe, wynikające z redukcji do środka ścinania składowej $p_{xi}$ obciążenia $i$ -tego przęsła dźwigara,
$\mathbf{m}_{xi}$	– rozłożone obciążenie momentowe, wynikające z redukcji do środka ścinania składowych $\mathbf{p}_{yi}, \mathbf{p}_{zi}$ obciążenia czynnego w przęśle $i$ ,
$\mathbf{m}_{yi}, \mathbf{m}_{zi}, \mathbf{m}_{\omega i}$	– rozłożone obciążenie momentowe, wynikające z redukcji do środka ścinania składowej $\mathbf{p}_{xi}$ obciążenia czynnego w przęśle $i$ ,
$M, M_m$	– moment aerodynamiczny (odchylający) w przekroju $x_i$ : całkowity, średni,
$M_b, M_{se}$	– moment aerodynamiczny (odchylający) w przekroju $x_i$ : wynikający z turbulencji, samowzbudny,
$M_{jk}$	– masa resorowana oscylatora $jk$ ,
$\mathbf{M}_o$	– macierz diagonalna zawierająca masy $M_{jk}$ oscylatorów znajdujących się na moście w chwili $t$ ,
$M_{jk}^{nr}$	– masa nieresorowana oscylatora $jk$ ,
$M_r^t$	– losowa masa ładunku pojazdu klasy $K_r$ ,
$M_{yi}, M_{zi}(x_i, t)$	– momenty zginające w przekroju $x_i$ , w $i$ -tym przęśle dźwigara,
$M_{si}(x_i, t)$	– moment czystego skręcania de Saint-Venanta w przekroju $x_i$ , $i$ -tym przęśle dźwigara,
$M_{\omega i}(x_i, t)$	– moment giętno-skrętny w przekroju $x_i$ , w $i$ -tym przęśle dźwigara,
$M_j^s(t)$	– momentowe obciążenie aerodynamiczne $j$ -tego segmentu dźwigara,

$M(t)$	– losowa częstotliwość występowania pików naprężeń,
$n$	– liczba przęseł mostu,
$n_b$	– liczba funkcji aproksymujących przemieszczenia $w_i, v_i, \varphi_i$ ,
$n_c$	– liczba funkcji aproksymujących poziome przemieszczenia ciągna,
$n_o$	– liczba funkcji aproksymujących pionowe przemieszczenia skrajnych odcinków ciągien (odciągów),
$n_p$	– liczba pasów ruchu pojazdów,
$n_s$	– liczba segmentów dźwigara, wydzielonych w trakcie opisu obciążenia aerodynamicznego,
$n_u$	– liczba funkcji aproksymujących poziome, podłużne przemieszczenia dźwigara,
$N_j(x_i, t)$	– całkowita siła w cięgni $j$ ,
$N_{0j}(x_i)$	– początkowa (statyczna) siła w cięgni $j$ ,
$\Delta N_j(x_i, t)$	– dynamiczny przyrost siły w cięgni $j$ ,
$N_i(x_i, t)$	– siła osiowa w przekroju $x_i$ , w $i$ -tym przęśle dźwigara,
$N_a^+(t)$	– proces stochastyczny opisujący liczbę przekroczeń poziomu granicznego $a$ , w przedziale czasu $(0, t)$ ,
$\mathbf{N}_j(t)$	– stochastyczny proces Poissona, opisujący zgłoszenia pojazdów poruszających się po $j$ -tym pasie ruchu,
$O_i$	– środek masy przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara bez balastu,
$p$	– symbol pionowej składowej przemieszczenia przekroju dźwigara usztywniającego, stosowany w inżynierii wiatrowej,
$P_{xi}, P_{yi}, P_{zi}$	– składowe łącznego obciążenia dźwigara w przekroju $x_i$ (obciążenie rozłożone wzdłuż konturu przekroju),
$\mathbf{p}_{xi}, \mathbf{p}_{yi}, \mathbf{p}_{zi}$	– składowe czynnego obciążenia dźwigara w przekroju $x_i$ (obciążenie rozłożone wzdłuż konturu przekroju),
$P(t - t_i)$	– funkcja deterministyczna opisująca długookresowy poryw wiatru,
$P_k, P_{jk}$	– siła skupiona,
$q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}$	– składowe łącznego obciążenia dźwigara w przekroju $x_i$ (obciążenie sprowadzone do środka ścinania przekroju),
$\mathbf{q}_{xi}, \mathbf{q}_{yi}, \mathbf{q}_{zi}$	– składowe czynnego obciążenia dźwigara w przekroju $x_i$ (obciążenie sprowadzone do środka ścinania przekroju),
$\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_b$ itp.	– wektory i bloki wektorów współrzędnych uogólnionych Lagrange’a,
$r$	– liczba porywów wiatru, tworzących serię okresową,

$r_{xj}, r_{yj}, r_{zj}$	– składowe rozłożonej reakcji wieszaków w $j$ -tej płaszczyźnie podwieszenia,
$r_{zj}^0(x_i)$	– początkowa (statyczna), pionowa reakcja wieszaków w $j$ -tej płaszczyźnie podwieszenia,
$\Delta r_{zj}(x_i, t)$	– dynamiczny przyrost pionowej reakcji wieszaków w $j$ -tej płaszczyźnie podwieszenia,
$\mathbf{R}(t)$	– ogólny symbol odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążenia aerodynamicznego,
$\mathbf{R}_j(t)$	– odpowiedź konstrukcji na obciążenie aerodynamiczne działające na $j$ -ty segment dźwigara,
$\mathbf{R}, \widehat{\mathbf{R}}, \mathbf{R}_{wi}$ itp.	– wektory i bloki wektorów nieliniowych reakcji sprężystych,
$s_i, n_i$	– współrzędne krzywoliniowe mierzone wzdłuż linii środkowej konturu przekroju $x_i$ dźwigara cienkościennego,
$\mathbf{s}_{ui}, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_c$	– wektory funkcji typu sinusowego (funkcje aproksymacyjne),
$\widetilde{\mathbf{s}}_i, \widetilde{\mathbf{s}}_{ik}, \widetilde{\mathbf{s}}_{ijk}$	– wektory funkcji aproksymacyjnych $\mathbf{s}_i$ , śledzących położenie: siły jednostkowej, ruchomej siły skupionej $P_k$ , oscylatora $jk$ ,
$S(\omega)$	– funkcja gęstości widmowej, dotycząca prędkości wiatru,
$S_{\hat{u}_j, \hat{u}_k}(\omega)$	– funkcja wzajemnych gęstości widmowych, dotycząca procesów opisujących turbulencje wiatru,
$\mathbf{S}(x_i, t)$	– ogólny symbol odpowiedzi mostu w przekroju $x_i$ ,
$\mathbf{S}_d$	– dynamiczna odpowiedź mostu,
$\mathbf{S}_s$	– quasi-statyczna odpowiedź mostu,
$\widetilde{\mathbf{S}}_{ji}$	– macierz, której kolumny są wybranymi wektorami $\widetilde{\mathbf{s}}_{ijk}$ ,
$t$	– zmienna czasowa,
$t_{jk}$	– chwila pojawienia się na moście pojazdu (siły $P_{jk}$ , oscylatora $jk$ ),
$T$	– czas trwania długookresowego porywu wiatru,
$T_i$	– $i$ -ty okres własny drgań mostu,
$T_{yi}, T_{zi}(x_i, t)$	– siły tnące w przekroju $x_i$ , w $i$ -tym przęśle dźwigara,
$T_s$	– „czas życia” konstrukcji,
$\mathbf{T}_s$	– zastępcza miara „czasu życia” konstrukcji,
$\mathfrak{I}(x_i)$	– funkcja jednostkowa Heaviside’a,
$u(t)$	– składowa turbulencji o kierunku zgodnym z kierunkiem wiatru,
$u_{cj}(x_i, t)$	– pozioma składowa przemieszczenia cięgna $j$ ,



$u_i(x_i, t)$	– poziome, podłużne przemieszczenie (bez spaczenia) przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara usztywniającego,
$\bar{u}(t)$	– zmienny w czasie składnik średniej prędkości wiatru,
$\hat{u}(t)$	– losowa turbulencja wiatru,
$\hat{u}_j(t)$	– losowa turbulencja wiatru działającego na $j$ -ty segment mostu,
$U_j(x, t)$	– funkcja opisująca poziome przemieszczenia ciągu $j$ , zdefiniowana w przedziale $0 \leq x \leq L$ obejmującym całą rozpiętość ciągu,
$U(t)$	– chwilowa prędkość wiatru,
$\bar{U}$	– średnia prędkość wiatru,
$w(t)$	– składowa turbulencji o kierunku poprzecznym do kierunku wiatru,
$w_{c_j}(x_i, t)$	– pionowa składowa przemieszczenia ciągu $j$ ,
$w_i(x_i, t)$	– pionowa składowa przemieszczenia środka ścinania przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara usztywniającego,
$\tilde{w}_i(s_i, x_i, t)$	– pionowa składowa drgań dźwigara w punkcie o współrzędnej konturowej $s_i$ , w przekroju $x_i$ ,
$w_{B_i}, v_{B_i}, \varphi_{B_i}$	– przemieszczenia lokalne w środku masy przekroju balastowanego, w $i$ -tym przęsle dźwigara,
$w_{1i}, w_{2i}(x_i, t)$	– pionowe przesunięcia punktów zamocowania wieszaków, w $i$ -tym przęsle dźwigara,
$W_{jk}[x_{ijk}(t), t]$	– pionowa składowa przemieszczenia przekroju dźwigara, śledząca położenie oscylatora $jk$ ,
<b>W</b>	– macierz własna,
$v$	– prędkość ruchu pojazdów (sił, oscylatorów),
$v(t)$	– składowa turbulencji o kierunku poprzecznym do kierunku wiatru,
$v_i(x_i, t)$	– pozioma, poprzeczna składowa przemieszczenia środka ścinania przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara usztywniającego,
$\tilde{v}_i(s_i, x_i, t)$	– pozioma składowa drgań dźwigara w punkcie o współrzędnej konturowej $s_i$ , w przekroju $x_i$ ,
$v_j$	– prędkość ruchu pojazdów (sił, oscylatorów) poruszających się po $j$ -tym pasie ruchu,
$v_1, v_2, v$	– liczba porywów wiatru, zarejestrowanych do chwili: $t_1, t_2, t$ ,
$V_{jk}[x_{ijk}(t), t]$	– pozioma składowa przemieszczenia przekroju dźwigara, śledząca położenie oscylatora $jk$ ,
$x$	– zmienna geometryczna mierzona wzdłuż łącznej rozpiętości przęseł dźwigara lub łącznej rozpiętości ciągu,

$x_i$	– lokalna współrzędna geometryczna, mierzona wzdłuż rozpiętości $i$ -tego przęsła mostu (lub odcinka przelotu ciągu),
$x_j^c$	– współrzędna $x$ punktu centralnego $j$ -tego segmentu dźwigara obciążonego wiatrem,
$x_{ik}(t)$	– współrzędna $x_i$ opisująca położenie siły skupionej $P_k$ w chwili $t$ ,
$x_{ijk}(t)$	– współrzędna $x_i$ opisująca położenie oscylatora $jk$ w chwili $t$ ,
$x_{jk}(t)$	– współrzędna $x$ opisująca położenie siły skupionej $P_{jk}$ lub oscylatora $jk$ w chwili $t$ ,
$y_i, z_i$	– główne centralne osie bezwładności przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara usztywniającego,
$z_{ci}(x_i)$	– funkcja opisująca krzywą zwisu statycznego ciągu w obrębie $i$ -tego odcinka przelotu,
$\alpha$	– liczba tłumienia miarodajna dla konstrukcji (ułamek tłumienia krytycznego) lub współczynnik regularności stacjonarnego procesu stochastycznego, lub kąt natarcia wiatru,
$\alpha_i$	– liczba tłumienia odpowiadająca $i$ -tym drganiom głównym,
$\alpha_j(x_i, t)$	– kąt nachylenia wieszaków spowodowany poziomym przemieszczeniem $j$ -tego ciągu,
$\alpha_0$	– średni kąt natarcia wiatru,
$\beta_{0i}(x_i)$	– kąt nachylenia stycznej do krzywej zwisu statycznego ciągu, mierzony w obrębie $i$ -tego odcinka przelotu,
$\gamma$	– bezwymiarowy współczynnik tłumienia, miarodajny dla konstrukcji,
$\gamma_i$	– bezwymiarowy współczynnik tłumienia odpowiadający $i$ -tym drganiom głównym,
$\gamma_{s,x}(s_i, x_i, t)$	– odkształcenie postaciowe powierzchni środkowej dźwigara cienkościennego,
$\delta(s_i)$	– grubość ścianki przekroju cienkościennego,
$\delta(x), \delta(t)$	– funkcja delta Diraca,
$\Delta$	– odstęp czasowy między siłami skupionymi lub między porywami wiatru, tworzącymi serię okresową,
$\varepsilon$	– szerokość pasma stacjonarnego procesu stochastycznego,
$\varepsilon_j(x_i, t)$	– odkształcenie podłużne ciągu $j$ , liczone względem odkształcenia początkowego $\varepsilon_{0j}$ ,
$\varepsilon_{0j}$	– początkowe (statyczne) odkształcenie podłużne ciągu $j$ ,
$\zeta_{\mathbf{S}}^{(1)}$	– współczynnik asymetrii procesu $\mathbf{S}$ ,

$\zeta_{\mathbf{S}}^{(2)}$	– eksces procesu $\mathbf{S}$ ,
$\eta_1(t), \eta_2(t)$	– bezwymiarowe funkcje czasu reprezentujące symetryczny i antysymetryczny składnik dynamicznych przyrostów naciągu cięgien,
$\vartheta$	– logarytmiczny dekrement tłumienia, miarodajny dla konstrukcji,
$\vartheta_j$	– losowy odstęp czasowy między pojazdami w strumieniu $j$ ,
$\kappa$	– wymiarowy współczynnik tłumienia, używany w definicji tłumienia Voigta–Kelvina (czas retardacji),
$\kappa_{\mathbf{S}^r}(x_i, t)$	– kumulanta (pólnieziennik) rzędu $r$ , dotycząca procesu $\mathbf{S}(x_i, t)$ ,
$\lambda$	– skala długookresowego porywu wiatru,
$\lambda_j, \lambda$	– intensywność zgłoszeń pojazdów poruszających się po $j$ -tym pasie,
$\lambda_{\mathbf{S}^k}$	– moment widmowy rzędu $k$ , procesu stochastycznego $\mathbf{S}$ ,
$\mu$	– wymiarowy współczynnik tłumienia, używany w definicji tłumienia masowego,
$\mu_i$	– względna masa $i$ -tego przęsła mostu,
$v_a^+(t)$	– intensywność przekroczeń poziomu granicznego $a$ ,
$\xi_i$	– bezwymiarowa zmienna geometryczna mierzona wzdłuż przęsła $i$ ,
$\rho$	– gęstość powietrza,
$\rho_j$	– parametr bezwymiarowy specyfikujący kierunek ruchu pojazdów po $j$ -tym pasie ruchu,
$\sigma_i(s_i, x_i, t)$	– naprężenie normalne w $i$ -tym przęśle dźwigara, w punkcie o współrzędnej konturowej $s_i$ , w przekroju $x_i$ ,
$\sigma_0(x_i)$	– składnik statyczny (początkowy) naprężeń normalnych w cięgnach,
$\Delta\sigma_j(x_i, t)$	– dynamiczny przyrost naprężenia normalnego w cięgnie $j$ ,
$\tau_i(s_i, x_i, t)$	– naprężenie styczne w $i$ -tym przęśle dźwigara, w punkcie o współrzędnej konturowej $s_i$ , w przekroju $x_i$ ,
$\tau_i^s(s_i, x_i, t)$	– naprężenie styczne wywołane czystym skręcaniem w $i$ -tym przęśle dźwigara, w punkcie o współrzędnej konturowej $s_i$ , w przekroju $x_i$ ,
$x_i$	– współczynnik dynamiczny dotyczący odpowiedzi mostu $\mathbf{S}(x_i, t)$ ,
$\varphi_{\mathbf{S}}$	– obrót przekroju $i$ -tego przęsła dźwigara usztywniającego względem środka ścinania,
$\varphi_i(x_i, t)$	– przemieszczenie rotacyjne (obróć) przekroju dźwigara, śledzące położenie oscylatora $jk$ ,
$\Phi_{jk}[x_{ijk}(t), t]$	– funkcje admitancji aerodynamicznej,
$\chi_{Du}, \chi_{Lu}$ itp.	

$\omega$	– zmienna o wymiarze częstości kołowej, używana w analizie widmowej procesów stochastycznych,
$\omega_i(s_i)$	– współrzędna wycinkowa w przekroju $x_i$ dźwigara cienkościennego,
$\omega_1, \omega_i$	– podstawowa oraz $i$ -ta częstość własna drgań, mierzona w rad/s (częstość kołowa),
$\Omega$	– najistotniejsza, kołowa częstość własna układu,
$(\cdot)^T$	– symbol transpozycji wektora lub macierzy,
$(\cdot)' = \partial/\partial x_i$	– symbol pochodnej cząstkowej liczonej względem lokalnej zmiennej geometrycznej,
$(\cdot) = \partial/\partial t$	– symbol pochodnej cząstkowej liczonej względem czasu,
$\hat{(\cdot)}$	– symbol losowej fluktuacji,
$E[\cdot], \overline{(\cdot)}$	– symbol wartości oczekiwanej,
$D[\cdot], \sigma_{(\cdot)}$	– symbol odchylenia standardowego,
$\text{Var}[\cdot], \sigma_{(\cdot)}^2$	– symbol wariancji,
bU	– symbol rozwiązań wyznaczonych z pominięciem poziomych przemieszczeń ciągien,
U	– symbol rozwiązań wyznaczonych z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń ciągien.

# 1. Wstęp

## 1.1. Charakterystyka i historia budowy mostów wiszących

Mosty wiszące są łatwo rozpoznawalną i często najpiękniejszą wizytówką wielu miast i regionów. Ich przejrzysta, czytelna, a równocześnie stosunkowo wiotka konstrukcja w połączeniu z dużymi rozmiarami sprawia, że wyróżniają się w otoczeniu i w każdym miejscu usytuowania nadają krajobrazowi niepowtarzalny charakter i specyficzny urok. Wielkie, nowoczesne konstrukcje mostów wiszących są postrzegane jako świadectwo sztuki inżynierskiej, spektakularny dowód rozwoju myśli technicznej. Cechą charakterystyczną tych konstrukcji jest wyjątkowa zdolność do przekraczania jednym przęsłem dużych rozpiętości. Ta cecha wyróżnia mosty wiszące spośród innych obiektów mostowych i stanowi ich główną zaletę. Dzięki niej mosty wiszące mogą być zlokalizowane w szczególnych miejscach – łączą brzegi cieśnin i zatok morskich, wyspy ze stałym lądem, przekraczają szerokie ujścia rzek. Możliwość zawieszenia przęsła wysoko nad poziomem wody pozwala na lokalizację mostów w pobliżu terminali portowych obsługujących ruch dużych statków. Są to zazwyczaj miejsca o strategicznym znaczeniu z punktu widzenia polityki transportowej danego regionu. Mosty wiszące, ze względu na usytuowanie w obrębie ważnych szlaków komunikacyjnych i wielkie rozmiary, są często obciążone bardzo dużą liczbą pojazdów. Zapewnienie bezpieczeństwa tego typu obiektów ma ogromne znaczenie.

Projektowanie mostów wiszących zawsze było i nadal jest ogromnym wyzwaniem dla projektantów. Kolejno powstające obiekty stymulują rozwój metod obliczeniowych. Metody te są ciągle doskonalone dzięki nowym możliwościom, jakie oferują nowoczesne techniki komputerowe. Coraz dokładniejsze modele obliczeniowe umożliwiają optymalizację kształtu mostów, przy zachowaniu warunków bezpiecznego użytkowania, ale też skłaniają projektantów i inwestorów do budowania coraz śmielszych konstrukcji – tym ciekawszych, im bardziej odbiegają od wskazań intuicji i doświadczenia. Bezpieczeństwo takich konstrukcji całkowicie zależy od poprawności obliczeń, jeśli pominiemy, jako warunek konieczny, na przykład kwestię jakości materiałów lub jakości wykonania. Tymczasem każdy model

obliczeniowy mostu i jego obciążeń jest nadal tylko pewną idealizacją, która nie obejmuje całej różnorodności zjawisk zachodzących w rzeczywistości. W przypadku mostów wiszących zjawiska te są wyjątkowo złożone i powodują duże trudności obliczeniowe. W projektowaniu ostatecznego kształtu tych mostów wskazana jest zatem daleko idąca ostrożność. Analiza ewolucji kształtu i historii użytkowania mostów wiszących pokazuje, że nadmierne zaufanie do ciągle niedoskonałych metod obliczeniowych może mieć fatalne skutki. Świadczą o tym katastrofy mostów wiszących – Tacoma Bridge w 1940 r. [59, 83] i Silver Bridge w 1967 r. [80] oraz problemy wynikające w trakcie użytkowania – na przykład nadmierne drgania Millennium Bridge w 2000 r. [91].

Pierwszym wielkim mostem wiszącym, według Gimsinga [59] słusznie uważanym za pierwowzór nowoczesnych mostów o dużych rozpiętościach, był nowojorski Brooklyn Bridge, oddany do użytku w 1883 roku. W tym okresie projektowanie mostów było raczej sztuką niż nauką. Projektant mostu, J.A. Roebling, kierował się głównie intuicją i wieloletnim doświadczeniem, które poparte stosunkowo prostymi obliczeniami umożliwiło zaprojektowanie bezpiecznego, trójprzęsłowego mostu o rekordowej na ówczesne czasy rozpiętości przęsła głównego ok. 500 m. Następne po Roeblingu pokolenie inżynierów zdecydowanie bardziej skupiło uwagę na sposobach obliczeń. Początkowo korzystano głównie z uproszczonej teorii pierwszego rzędu, w której pomijano przemieszczenia cięgien wywołane obciążeniem użytkowym i która prowadziła do znacznego przewymiarowania konstrukcji. Nazywano ją teorią „sprężystą” – Gimsing [59]. Przykładem tego podejścia jest teoria Rankina z 1858 r., rozwinięta w 1886 r. przez Levy’ego [59]. Coraz większe zaufanie projektantów do uzyskiwanych wyników obliczeń spowodowało zmiany schematu konstrukcyjnego mostów. Uproszczono system podwieszenia przęseł – zrezygnowano z zastosowanych w Brooklyn Bridge dodatkowych ukośnych want, wspomagających pracę cięgien głównych. Zaczęto także częściej stosować schematy jednoprzęsłowe (bez podwieszonych przęseł bocznych), sprawiające mniej trudności obliczeniowych. Jednak przede wszystkim pojawiła się ogólna tendencja do zwiększania wymiarów zasadniczych elementów konstrukcji, głównie pylonów i dźwigarów głównych. Efekt finalny był często mało satysfakcjonujący. Przykładem może być nowojorski Williamsburg Bridge, oddany do użytku w 1903 roku. Gimsing [59] opisuje Williamsburg Bridge, cytując Steinmana [112]: „z niezgrabnie zaprojektowanymi pylonami i nadmiernie wysokimi kratownicami konstrukcja ma wygląd kanciasty i pokraczny”.

Kolejne 40 lat projektowania mostów wiszących pogłębiło skłonność projektantów do: „ślepego zaufania wynikom obliczeń, bez intuicji właściwej inżynierom poprzedniego wieku”, jak to komentuje Gimsing [59] w swojej monografii. Jednak tym razem nastąpiła ewolucja kształtu konstrukcji w odwrotnym kierunku – budowano mosty coraz dłuższe, ale równocześnie coraz smuklejsze. Był to bezpośredni rezultat zastosowania nowych metod obliczeniowych, które formułowano na podstawie tzw. teorii

„deformacyjnej”, uwzględniającej wpływ przemieszczeń ciężna w stanie użytkowym na stan statycznego wyężenia dźwigarów. Pierwsze sformułowanie teorii opublikował Melan w 1888 roku (Gimsing [59]), a pierwszym mostem tak zaprojektowanym był Manhattan Bridge, oddany do użytku w 1909 roku.

Początkowo teorię „deformacyjną” stosowano wyłącznie do analizy płaskiego zagadnienia statycznego, sformułowanego w płaszczyźnie pionowej, zgodnie z kierunkiem obciążenia pojazdami (Steinman [113]). Takie podejście umożliwiło zmniejszenie nadmiernej, do tej pory, wysokości dźwigarów, dzięki czemu forma architektoniczna mostów przybrała z powrotem budzący podziw wygląd. Tendencja do zwiększania smukłości i rozpiętości mostów zaowocowała w latach trzydziestych pojawieniem się mostów wiszących o rekordowych długościach, dwukrotnie przewyższających rozpiętości mostów budowanych wcześniej. Pierwszym „gigantem” był most Waszyngtona przez rzekę Hudson, którego budowę zakończono w roku 1931. Most, o ponad kilometrowej rozpiętości przęsła centralnego (1066 m), powinien mieć według projektu dwa pomosty. Jednak z uwagi na trudności finansowe wykonano tylko pomost górny, co spowodowało znaczne zmniejszenie sztywności podwieszanej konstrukcji. Mimo braku dolnego pomostu okazało się, że konstrukcja mostu jest stateczna, o czym zdecydował ciężki betonowy pomost górny o dużej szerokości (osiem pasów ruchu), wysokie dźwigary kratowe (w zamierzeniu projektowym obejmujące dwa pomosty) i stosunkowo krótkie przęsła boczne (efektywniejszy system podwieszenia). W 1937 roku oddano do użytku kolejny, jeszcze dłuższy most, niekwestionowany symbol San Francisco – sławny Golden Gate o rozpiętości przęsła głównego 1280 m. Stosunkowo wąski most (szerokość pomostu =  $1/47$  rozpiętości) wyróżniał się wyjątkową smukłością kratowego dźwigara usztywniającego (wysokość dźwigara =  $1/168$  rozpiętości), złożonego z dwóch kratownic pionowych, położonych w płaszczyznach podwieszenia, i poziomej kratownicy pomostowej. Most wykazywał w trakcie eksploatacji nadmierną wrażliwość na dynamiczne oddziaływanie obciążeń, szczególnie na działanie wiatru (Gimsing [59]).

Już w przypadku mostu Golden Gate wydawało się, że trend do budowania coraz smuklejszych konstrukcji osiągnął punkt kulminacyjny. Jednak krytyczną kulminacją tego trendu okazał się most Tacoma Narrows o rozpiętości przęsła głównego 853 m. Most ten, zlokalizowany niedaleko Seattle, zbudowano w rekordowym tempie. Budowa trwała od listopada 1938 roku do 1 lipca 1940 roku. Most Tacoma zaprojektowano wykorzystując w pełni nowe, rozszerzone sformułowanie teorii „deformacyjnej”, opublikowane w 1932 roku przez Moisseiffa i Lienharda [87] i obejmujące analizę statyczną mostu poddanego działaniu sił poprzecznych. W efekcie znacznie zredukowano parametry sztywnościowe mostu w obu płaszczyznach: pionowej i poziomej. Wymiary dźwigara były ekstremalnie małe, nawet w porównaniu z mostem Golden Gate (wysokość =  $1/350$  rozpiętości, szerokość =  $1/72$  rozpiętości). Dodatkową, niefortunną okolicznością było zaprojektowanie podwieszanej konstrukcji mostu w postaci dźwigara pełnościennego o przekroju otwartym, niekorzystnym ze względu na

małą sztywność skrętną. Po czterech miesiącach eksploatacji, 7 listopada 1940 r., nastąpiła katastrofa mostu spowodowana narastającymi drganiami skrętnymi typu flutter, które pojawiły się przy niezbyt silnym wietrze, wiejącym z prędkością 18,7 m/s (Matsumoto [83]). Katastrofa mostu Tacoma była trudną lekcją, która przypomniła projektantom o konieczności zachowania takiego marginesu bezpieczeństwa, który obejmuje niefortunne zbiegi okoliczności użytkowych oraz zjawiska niepewne, nierozpoznane teoretycznie i nieuwzględnione w obliczeniach. W owym czasie do tej grupy zjawisk należały wszelkie oddziaływania dynamiczne. Katastrofa mostu Tacoma zwróciła uwagę projektantów na zagadnienia dynamiki, co spowodowało w następnych latach intensywny rozwój metod eksperymentalnych i metod obliczeniowych, służących do analizy drgań mostów wiszących, szczególnie drgań spowodowanych działaniem wiatru. Metody te będą szczegółowo opisane w następnych rozdziałach rozprawy (rozdziały 2.1, 4.1, 5.1, 5.2). Po katastrofie mostu Tacoma przeprowadzono weryfikację wcześniej zbudowanych obiektów. Niektóre obiekty wzmocniono – na przykład Bronx-Whitestone Bridge, skonstruowany podobnie do mostu Tacoma oraz Golden Gate Bridge, którego konstrukcję uzupełniono dodatkowym systemem stężeń umieszczonych w płaszczyźnie poziomej, na wysokości pasa dolnego kratownic głównych.

Analiza przyczyn awarii mostu Tacoma i badania dotyczące stateczności aerodynamicznej spowodowały istotny zwrot w kształtowaniu konstrukcji mostów. Na podstawie testów wykonywanych w tunelach aerodynamicznych stwierdzono, że zagrożenie niestatecznością typu flutter zależy w dużym stopniu od kształtu dźwigara usztywniającego. Poszukiwanie optymalnego kształtu dźwigara doprowadziło do wyodrębnienia dwóch głównych kierunków w projektowaniu mostów wiszących (Matsumoto [84]). Pierwszy z nich obejmuje mosty z kratowym dźwigarem usztywniającym („truss-stiffened girder”), złożonym z dwóch głównych kratownic pionowych, połączonych dwoma pomostami – górnym i dolnym, lub tylko pomostem górnym, ale wówczas na poziomie pasa dolnego kratownic głównych instaluje się poziomą kratownicę stężającą, która zamyka przekrój dźwigara. Początkowo ten kierunek projektowania był rozwijany głównie w Stanach Zjednoczonych (New Tacoma Bridge 1950 r., Mackinac Bridge 1957 r., Verrazano Narrows Bridge 1964 r.). W latach siedemdziesiątych i późniejszych, w budowie tego typu obiektów wyspecjalizowali się projektanci japońscy (Ochnaruto Bridge 1985 r., Bisan Seto Bridges 1988 r., Akashi Kaikyo Bridge 1998 r.). Drugi kierunek rozwoju konstrukcji mostów wiszących, praktykowany głównie przez projektantów europejskich, obejmuje mosty z pełnościennym dźwigarem usztywniającym, o przekroju opływowym typu skrzynkowego („stream-line box girder”). Przykładami takich konstrukcji są dwa wielkie mosty zbudowane w Wielkiej Brytanii – Severn Bridge (1966 r.) i Humber Bridge (1981 r.), most zbudowany nad Cieśniną Bosfor – Second Bosphorus Bridge (1988 r.) oraz drugi pod względem rozpiętości most wiszący na świecie – Great Belt East Bridge (1998 r.).



Większość mostów zbudowanych w drugiej połowie XX wieku, w tym najdłuższy most wiszący – Akashi Kaikyo Bridge, ma typowy, trójprzęsłowy schemat konstrukcyjny z dwiema płaszczyznami podwieszenia (Gimsing [59]). Wieszaki łączące dźwigar z cięgnami są zazwyczaj pionowe. Dźwigar usztywniający składa się z trzech odrębnych przęseł, swobodnie podpartych na pylonach i przyczółkach. Rozwiązanie w postaci dźwigara ciągłego jest bardzo rzadko stosowane z uwagi na duże momenty zginające w obrębie podparcia na pylonach oraz ze względu na wpływ temperatury, który może powodować duże przemieszczenia podłużne w strefie przypodporowej obok przyczółka, gdzie wieszaki są najkrótsze. Niepożądanym skutkiem dużych przemieszczeń podłużnych jest między innymi nadmierne pochylenie wieszaków. Wyjątkową konstrukcją jest Great Belt East Bridge – dźwigar mostu jest ciągły, ale pozbawiony pionowego podparcia na pylonach (podparcie wyłącznie w płaszczyźnie poziomej), co znacząco redukuje momenty zginające w obrębie pylonów. Dodatkowo, w środku rozpiętości mostu wykonano specjalne połączenie, które uniemożliwia wzajemny przesuw dźwigara i cięgien, dzięki czemu maleje niekorzystny efekt związany z dużymi przemieszczeniami podłużnymi dźwigara.

W ostatnich latach obserwuje się ponownie tendencję do zwiększania rozpiętości mostów wiszących – Humber Bridge (główne przęsło o długości 1410 m), Great Belt East Bridge (1624 m), Akashi Kaikyo Bridge (1990 m). Obecnie planowana jest budowa gigantycznego mostu nad Cieśniną Messyńską, pomiędzy stałym lądem Włoch i Sycylią (Messina Strait Bridge). Rozpiętość centralnego przęsła ma wynosić 3300 m, czyli w przybliżeniu tyle, ile wynosiłaby łączna rozpiętość przęsła mostów Akashi Kaikyo i Golden Gate. Przewiduje się w przyszłości możliwość budowy jeszcze większych obiektów, o rozpiętościach dochodzących do 5000 m (przekroczenie Cieśniny Gibraltarskiej). Przy tak dużych rozpiętościach zasadniczym problemem jest zapewnienie odpowiednich charakterystyk aerodynamicznych projektowanych konstrukcji. Od kilku lat trwają intensywne badania, których celem jest właściwe, tzn. bezpieczne i ekonomiczne ukształtowanie przekroju poprzecznego superdługich mostów. Rozważane są różne nowe kształty przekroju, między innymi przekrój wielokomorowy lub tzw. „twin deck”, czyli przekrój złożony z dwóch dźwigarów typu skrzynkowego, rozdzielonych dużą luką powietrzną. Pierwszym efektem tych badań jest planowany kształt dźwigara mostu Messina Strait Bridge, którego przekrój poprzeczny ma składać się z trzech odrębnych, półowalnych komór skrzynkowych połączonych skrutowaniami (Matsumoto [84]). Proponowane są różne dodatkowe rozwiązania konstrukcyjne poprawiające stateczność aerodynamiczną, takie jak osłony przeciwwiatrowe montowane na krawędziach dźwigara lub skrzydełka z ruchomymi klapkami mocowane do wieszaków lub do dźwigara (Cobo del Arco i Aparicio [46]). Niektóre rozwiązania zastosowano już w Akashi Kaikyo Bridge – wzmocniono przekrój dźwigara dodatkowymi partiami skratowań, a w środku rozpiętości zainstalowano pionową płytę usztywniającą przekrój. Wszystkie te innowacje są wynikiem badań modelowych w tunelach aerodynamicznych.

Mimo bardzo zaawansowanych badań dotyczących metod stabilizacji drgań mostów wiszących, mechanizm stabilizacji drgań typu flutter nadal nie jest do końca wyjaśniony. Podobnie jak nie wyjaśniono ostatecznie zagadki mostu Tacoma, na co zwrócił uwagę Matsumoto w swoich najnowszych publikacjach [83, 84]. Wiadomo, że przy prędkości wiatru równej 18,7 m/s nastąpiła nagła zmiana drgań pionowych mostu, odpowiadających piątej, symetrycznej formie własnej (0,6 Hz), na antysymetryczne drgania skrętne o niższej częstotliwości, wynoszącej 0,23 Hz (pierwsza antysymetryczna forma skrętna). Nie wiadomo jednak, dlaczego most Tacoma mógł przetrwać prędkości wiatru mniejsze od 18,7 m/s, jeśli krytyczna prędkość flutteru skrętnego wynosiła ok. 6 m/s, co wykazały badania modelowe Farquharsona. Matsumoto [83] przedstawił w 2003 roku wyniki badań modelu starego mostu Tacoma. Badania wykonane w tunelu aerodynamicznym wykazały, że pionowe drgania pomostu spowodowane wirami mogły wywołać stabilizację flutteru skrętnego, czyli zwiększenie prędkości krytycznej wiatru do około 18–19 m/s. Na podstawie przedstawionych wyników badań Matsumoto sformułował hipotezę, w której stwierdził, że zaobserwowane zjawiska mogły być skutkiem interferencji dwóch wpływów aerodynamicznych: wzbudzenia wirowego, które spowodowało pionowe drgania pomostu i flutteru skrętnego. Podkreślił jednak, że przedstawione przez niego wyjaśnienie przebiegu katastrofy jest nadal tylko hipotezą, ponieważ mechanizm niestateczności typu flutter powinien być dokładniej wyjaśniony w zakresie charakterystyk ciśnienia wiatru w stanie nieustalonym i roli tzw. pochodnych aerodynamicznych, sformułowanych w odniesieniu do zagadnienia flutteru.

Jak wynika z powyższych rozważań, ciągle istnieje pewien margines niewiedzy, który należy brać pod uwagę w projektowaniu mostów wiszących. Być może ta świadomość spowodowała wieloletni brak ostatecznych decyzji w sprawie budowy mostu nad Cieśniną Messyńską. Pierwszy projekt Messina Strait Bridge, nigdy nie zrealizowany, opracował Steinman już w 1950 roku. Ideę budowy podjęto w latach siedemdziesiątych, lecz dopiero po około trzydziestu latach zapadły ostateczne decyzje – budowa ma być rozpoczęta pod koniec 2005 roku, zakończenie przewiduje się w 2011 roku. Można przypuszczać, że dzięki supernowoczesnym technologiom XXI wieku przekroczenie magicznej bariery trzech kilometrów rozpiętości będzie rzeczywiście możliwe, ale czy będzie też bezpieczne?

## 1.2. Motywy i cele rozprawy

Prace projektowe związane z planowaną budową mostu nad Cieśniną Messyńską spowodowały w ostatnich dziesięciu latach bardzo duże zainteresowanie problematyką mostów wiszących o wielkich rozpiętościach. Pojawiło się wiele nowych publikacji, przy czym większość z nich dotyczy zagadnień aerodynamiki. Najnowsze prace na temat metod stabilizacji drgań typu flutter skupiły uwagę badaczy na zjawisku interferencji efektów aerodynamicznych [46, 83, 84]. Z badań Matsumoto [83, 84] wynika,

że interferencja efektów aerodynamicznych może powodować zwiększenie prędkości krytycznej flatteru (stabilizację drgań mostu), ale może też wywoływać skutek odwrotny. Zjawisko to pokazuje, jak ważne dla bezpieczeństwa konstrukcji jest nakładanie się drgań różnego pochodzenia. Łączny efekt nakładania się drgań spowodowanych równoczesnym działaniem różnego typu obciążeń jest trudny do oszacowania. Na ogół poszczególne wpływy ruchu pojazdów, drgań podłoża, działań wiatru, często połączonego z deszczem i nagłą zmianą temperatury otoczenia, wzajemnie się „wytłumiają”. Jednak nie można wykluczyć możliwości pojawienia się skutków wyjątkowo niekorzystnych dla konstrukcji.

Badania związane z interferencją efektów aerodynamicznych ujawniły potrzebę łącznego analizowania różnych typów wzbudzenia drgań mostów wiszących. Zagadnienia te nie są jeszcze dostatecznie rozpoznane, ponieważ w praktyce obliczeniowej analizuje się poszczególne typy wzbudzenia odrębnie. Opisy teoretyczne podstawowych obciążeń dynamicznych znacznie się różnią, często są bardzo złożone, szczególnie w przypadku wzbudzenia aerodynamicznego. To utrudnia kompleksową analizę drgań, przy czym największa trudność wynika z zupełnie odmiennego podejścia, stosowanego do opisu obciążenia użytkowego ruchem pojazdów i do opisu obciążeń spowodowanych działaniem wiatru. W pierwszym przypadku analizuje się obciążenie i drgania konstrukcji w dziedzinie czasu – w drugim powszechnie stosuje się metodę analizy widmowej, czyli w dziedzinie częstości. Dodatkowym utrudnieniem jest bardzo rozbudowany opis modelu obliczeniowego konstrukcji mostów wiszących. Obecnie model obliczeniowy złożonych konstrukcji budowlanych tworzy się najczęściej za pomocą metody elementów skończonych. Zastosowanie tej metody do dyskretyzacji mostów wiszących prowadzi do zadań o wielu tysiącach stopni swobody. Z tego powodu w zagadnieniach dynamicznych metodę elementów skończonych stosuje się zazwyczaj do rozwiązania zagadnienia własnego. Wyniki rozwiązania zagadnienia własnego umożliwiają przekształcenie równań, opisujących drgania wymuszone konstrukcji, do postaci modalnej. Do dalszych badań wybiera się ograniczoną liczbę form własnych kształtujących ostateczne rozwiązanie. Wybór liczby i rodzaju form własnych istotnie zależy od rodzaju analizowanego wymuszenia. To podejście jest stosowane głównie do rozwiązywania problemów z zakresu aerodynamiki mostów wiszących. Przykładem są prace Chena, Matsumoto i Kareema [44], Boonyapinyo, Miyaty i Yamady [17], Cobo del Arco i Aparicio [46], Scanlana [99]. Opisaną metodę stosuje się także do analizy zagadnień sejsmicznych (Dumanoglu i Severn [53], Hyun, Yun i Lee [67], Harichandran, Hawwari, Sweiden [64], Adanur, Dumanoglu, Soyluk [9]), rzadziej do analizy drgań mostów wiszących obciążonych ruchem kolejowym (Xia, Xu i Chan [121]). W ostatnim przypadku jest raczej stosowane podejście półanalityczne, w którym układ most – pociąg dzieli się na podukłady (Biondi, Muscolino, Sofi [13]).

Odrębny problem stanowią zagadnienia dotyczące drgań spowodowanych ruchem drogowym, który ma z natury charakter losowy i powinien być analizowany

w ujęciu stochastycznym. Problem ten jest rzadko rozważany w literaturze w sposób teoretyczny, pomimo tego, że ruch drogowy stanowi zasadnicze obciążenie mostów wiszących. Są to generalnie mosty drogowe, tylko niektóre z nich, głównie mosty japońskie, są drogowo-kolejowe. Efekty dynamiczne wywołane ruchem drogowym są najczęściej badane na podstawie pomiarów dynamicznych przeprowadzanych na rzeczywistych obiektach (Buckland i in. [38], Nowak i Hong [89]). Przy zastosowaniu podejścia teoretycznego problem drgań jest analizowany zazwyczaj jako deterministyczny, a do analizy są stosowane metody, w których wykorzystuje się analityczny opis drgań konstrukcji (Hayashikawa i Watanabe [66], Bryja [18]), Chatterjee, Datta i Surana [42]). Jeśli obciążenie ruchem drogowym analizuje się jako losowe, to na ogół są rozpatrywane wyłącznie statyczne efekty obciążenia, a metody stochastyczne służą do wyznaczania efektów ekstremalnych (Dietlevsen [52], Cremona [47]). Bardzo niewiele prac dotyczy stochastycznego modelowania drgań wywołanych ruchem drogowym, działającym na mosty o bardzo dużych rozpiętościach. Przykładem jest publikacja Calçada, Cunha i Delgado [40], dotycząca mostu wantowego oraz prace autorki i Śniadego [31–34], w których analizuje się drgania mostów wiszących, ale tylko jednoprzęsłowych, z dźwigarami usztywniającymi typu otwartego.

W obecnym stanie badań z zakresu dynamiki mostów wiszących łączna analiza efektów dynamicznych różnego pochodzenia jest bardzo trudna. Jest to równocześnie najnowszy kierunek badań. W 2003 roku pojawiła się publikacja Xu, Xia i Yana [123], która dotyczy drgań mostu wiszącego, wywołanych jednoczesnym przejazdem pociągu i działaniem wiatru. W 2004 roku opublikowano prace Cai i Chena [39] oraz Xu i Guo [122], których tematem są łączne drgania układu most – pojazd drogowy – wiatr. Zasadniczym celem przedstawionych badań jest analiza drgań pojazdu, z czym wiąże się możliwość zastosowania wielu uproszczeń w sposobie modelowania konstrukcji i jej obciążeń. Opracowanie podobnego algorytmu, ale ukierunkowanego na analizę drgań konstrukcji, jest zdecydowanie trudniejsze. Nowy punkt widzenia – z perspektywy kombinacji obciążenia wiatrem i ruchem drogowym – wymusza konieczność weryfikacji stosowanych do tej pory metod. Celem tej weryfikacji powinno być ujednoczenie sposobu modelowania konstrukcji i ujednoczenie formuł opisujących obciążenia dynamiczne, z uwzględnieniem możliwości adaptacji metod do zastosowań w dziedzinie analizy stochastycznej. Ta idea będzie rozwijana w niniejszej rozprawie.

Zasadniczym celem rozprawy jest opracowanie zbioru metod i algorytmów przeznaczonych do analizy drgań nowoczesnych mostów wiszących, poddanych działaniu podstawowych obciążeń o charakterze użytkowym i środowiskowym. Zakres badań ograniczono do analizy drgań wymuszonych swobodnym ruchem drogowym i drgań wywołanych działaniem porywistego wiatru, z uwzględnieniem losowej natury obu zjawisk. Uwagę skoncentrowano na takich sformułowaniach metod, które mogłyby w przyszłości umożliwić łączną analizę drgań spowodowanych równo-

czesnym działaniem wiatru i ruchu drogowego. Szczegółowe cele rozprawy określono następująco:

- Sformułowanie teorii przestrzennych drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących z uwzględnieniem uściśleń teorii klasycznej, prowadzących do uogólnienia wcześniej stosowanych, ciągłych modeli obliczeniowych.
- Opracowanie efektywnego algorytmu analizy drgań deterministycznych, dostosowanego do potrzeb stochastycznej analizy drgań wymuszonych ruchem drogowym i działaniem wiatru.
- Sformułowanie stochastycznego modelu swobodnego ruchu drogowego na mostach o dużych rozpiętościach i opracowanie metody analizy momentowej procesów stochastycznych opisujących drgania konstrukcji.
- Opracowanie numerycznego generatora służącego do symulacji wielopasmowego, losowego ruchu drogowego i towarzyszących temu obciążeniu drgań konstrukcji. Sformułowanie symulacyjnej metody wyznaczania charakterystyk drgań losowych.
- Weryfikacja modelu obciążenia pojazdami drogowymi pod kątem istotności efektów spowodowanych inercją i resorowaniem pojazdów.
- Ilościowa i jakościowa ocena efektów nieliniowych, wynikających z deformacji ciągłych spowodowanej obciążeniem użytkowym.
- Określenie metody badania niezawodności mostów wiszących obciążonych swobodnym ruchem drogowym w aspekcie pierwszego przekroczenia poziomu granicznego i zmęczenia materiału.
- Sformułowanie stochastycznego modelu obciążenia mostu porywistym wiatrem, dostosowanego do analizy drgań w dziedzinie czasu.
- Opracowanie podstawowej struktury algorytmu analizy korelacyjnej drgań stochastycznych, spowodowanych turbulentnym przepływem wiatru.

Jak wynika z przedstawionych celów szczegółowych, rozprawa obejmuje szeroki zakres zagadnień, a mimo to nie wyczerpuje obszernego tematu, jakim jest dynamika mostów wiszących. W rozprawie nie rozważa się problemów związanych z drganiami incydentalnymi o charakterze ekstremalnym, które mogą być spowodowane na przykład trzęsieniami ziemi, tajfunami itp. Nie rozpatruje się drgań konstrukcji w czasie montażu i szczegółowych problemów aerodynamiki, takich jak wzbudzenie wirowe, galopowanie, problem flatteru. Rozprawa stanowi podsumowanie i uogólnienie dotychczasowych prac badawczych autorki, które dotyczyły głównie drgań mostów wiszących wzbudzanych ruchem drogowym, w mniejszym zaś stopniu – drgań wywołanych działaniem wiatru. Metody analizy drgań, przedstawione przez autorkę w cyklu publikacji [18–21, 26–37], odnosiły się do mostów jednoprzęsłowych, z dźwigarami usztywniającymi typu otwartego. Metody te zostały w niniejszej rozprawie tak uogólnione, że zakres ich zastosowań obejmuje nowoczesne mosty wiszące o dużych rozpiętościach. Ten cel osiągnięto przede wszystkim dzięki opracowaniu oryginalnej teorii drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących, z dźwigarami usztywniającymi typu komorowego.

### 1.3. Treść rozprawy

Rozprawa zawiera sześć rozdziałów. W rozdziale 1 omówiono charakterystyczne cechy konstrukcji i ewolucję metod kształtowania mostów wiszących na tle historii ich budowy. Przedstawiono motywy wyboru treści rozprawy i jej cele. Rozdział 2 zawiera teorię i algorytm analizy deterministycznych drgań mostów wiszących, przy dowolnym wymuszeniu, rozdział 3 – prezentację i analizę wyników badań numerycznych, dotyczących wybranych, deterministycznych zagadnień dynamiki. Rozdział 4 dotyczy drgań stochastycznych spowodowanych losowym ruchem drogowym, rozdział 5 – drgań stochastycznych spowodowanych działaniem porywistego wiatru. W rozdziale 6 przedstawiono wnioski i uwagi końcowe oraz podsumowanie pracy. Z uwagi na różnorodność tematyki w każdym rozdziale znajduje się odrębne wprowadzenie, w którym omówiono zakres badań w odniesieniu do literatury tematu, oraz odrębne podsumowanie zawierające zasadnicze wnioski wynikające z badań przedstawionych w danym rozdziale. Wyjątkiem jest rozdział 2, który podsumowano po przedstawieniu wyników analiz numerycznych, zawartych w rozdziale 3. Szczegółowa treść głównych rozdziałów rozprawy jest następująca.

W rozdziale 2 zdefiniowano model fizyczny wieloprzęsłowych mostów wiszących i sformułowano dwa ciągłe modele obliczeniowe – model zasadniczy i model uproszczony, które różnią się sposobem opisu drgań ciężna. W modelu zasadniczym ruch wieloprzelotowego ciężna jest opisany w płaszczyźnie zawieszenia dwiema składowymi – poziomą i pionową. W modelu uproszczonym pomija się poziome podłużne przemieszczenia ciężen, co wynika z zastosowania klasycznej teorii drgań ciężna o małym zwisie. Model zasadniczy jest ogólniejszy, obejmuje nie tylko mosty z ciężnami o małym zwisie, ale również mosty z ciężnami, których geometria nie spełnia warunku małego zwisu, nazywane dalej skrótowo ciężnami o dużym zwisie. W obu przypadkach wyprowadzono oryginalne równania różniczkowe, opisujące nieliniowe, przestrzenne drgania mostu. Wyprowadzenie równań opiera się na teorii drgań wiotkiego ciężna (Hajduk i Osiecki [62]), połączonej z uogólnioną teorią giętno-skrętnych drgań dźwigarów cienkościennych, która obejmuje profile otwarte i zamknięte (Gjelsvik [61]). W równaniach uwzględniono efekt wahadłowy drgań podwieszonoego dźwigara. Do opisu efektu wahadłowego zastosowano metodę przedstawioną przez autorkę w pracy [18]. Równania drgań mostu rozwiązano metodą przybliżoną, w której opis ruchu układu w ujęciu Lagrange’a jest powiązany z aproksymacją przemieszczeń w sensie Ritza (Langer [75]). Idea metody Lagrange’a–Ritza prowadzi, po wyprowadzeniu formuł bilansu energetycznego, do sformułowania równań opisujących ruch mostu w dziedzinie czasu. Rozważono kilka przypadków szczegółowych. W punkcie 2.5.2 wyprowadzono równania ruchu mostów wieloprzęsłowych, w których skrajne odcinki ciężen (odciągi) mogą być traktowane w przybliżeniu jako poziome. Zapis równań umożliwia automatyczne przejście do opisu drgań mostów, w których nie ma technicznej potrzeby wyróżniania odciągow. W punkcie 2.5.3

przedstawiono zmodyfikowaną postać równań ruchu, dotyczącą mostów z odciągami ukośnymi. Równania te obejmują przypadek mostów jednoprzęsłowych, w których odciąg jest zawsze ukośny. Punkt 2.5.4 zawiera rozwiązania związane z uproszczonym modelem obliczeniowym, zatem wyprowadzone w tym rozdziale równania ruchu odnoszą się wyłącznie do mostów z ciągami o małych zwisach. W sformułowaniu równań ruchu zwrócono szczególną uwagę na dobór modelu tłumienia, analizując różne warianty na tle opisu rzeczywistych cech tłumienia drgań w mostach wiszących. W ostatnim punkcie omawianego rozdziału przedstawiono wzory służące do obliczania przemieszczeń i sił wewnętrznych oraz naprężeń w ciągach i w dźwigarze usztywniającym mostu. Formuły te wraz z wyprowadzonymi równaniami ruchu tworzą algorytm umożliwiający analizę numeryczną drgań rozważanych obiektów.

W rozdziale 3 przedstawiono wyniki i analizy testów numerycznych. Głównym celem tych badań było porównanie dwóch rozważanych w pracy modeli obliczeniowych mostu. Oceniono skutki stosowania modelu uproszczonego i na tym tle oszacowano możliwości wykorzystania do dalszych badań uproszczonej wersji algorytmu, efektywniejszej w sensie numerycznym. Zakres badań numerycznych obejmuje rozwiązania zagadnienia własnego oraz analizę przebiegów funkcji wpływu (dynamicznych i quasi-statycznych), które w dalszej części pracy wykorzystano do budowania rozwiązań w zakresie drgań stochastycznych. W trakcie badania zbieżności rozwiązań ustalono miarodajną liczbę funkcji aproksymujących stan przemieszczenia konstrukcji. Na przykładzie drgań konstrukcji obciążonej okresową serią ruchomych sił skupionych przedstawiono obszerną analizę skutków stosowania różnych modeli tłumienia. Analizowano drgania w strefach rezonansowych, gdzie wpływ tłumienia jest największy, zatem i różnice między przyjętymi modelami tłumienia ujawniają się w sposób najbardziej widoczny. Przedstawione w rozdziale 3 wyniki badań obejmują weryfikację rozwiązań, polegającą na porównaniu wyników obliczeń z danymi eksperymentalnymi, które dotyczą rzeczywistego obiektu mostowego. Do tego porównania wykorzystano dostępne w literaturze wyniki pomiarów dynamicznych mostu Vincenta Thomasa, zbudowanego w latach sześćdziesiątych w Los Angeles (Abdel-Ghaffar i Housner [5]). W podsumowaniu rozdziału 3 przedstawiono wnioski służące ocenie algorytmu sformułowanego w rozdziale 2.

Rozdział 4 jest poświęcony analizie probabilistycznej drgań spowodowanych swobodnym ruchem drogowym, o charakterze losowym. Jego treść składa się z trzech zasadniczych wątków. Dwa z nich to sformułowanie dwóch metod analizy: metody analityczno-numerycznej, w której wykorzystuje się aparat matematyczny dotyczący procesów stochastycznych i metody symulacyjnej, opartej na technikach typu Monte Carlo. Pierwsza metoda jest zdecydowanie skuteczniejsza, ale może być stosowana wyłącznie do analizy drgań liniowych. Jej podstawą merytoryczną są wspólne publikacje autorki i Śniadego [31–34], dotyczące losowych drgań jednoprzęsłowych mostów wiszących. Sformułowanie metody obejmuje opracowanie stochastycznego modelu obciążenia ruchem drogowym mostów o dużych rozpiętościach oraz wypro-

wadzenie formuł niezbędnych do analizy momentowej procesów stochastycznych, które opisują przestrzenne drgania wieloprzęsłowych mostów wiszących. Alternatywną metodę symulacyjną opracowano w celu oszacowania poziomu istotności wpływów nieliniowych, pomijanych w metodzie analityczno-numerycznej. Przedstawiona w rozprawie metoda symulacyjna służy do wyznaczania charakterystyk drgań probabilistycznych, liniowych i nieliniowych. Jej koncepcja wynika z założenia, że losowe drgania mostu w stanie ustalonym są stacjonarnym procesem ergodycznym. Do symulacji przebiegów drgań mostu opracowano oryginalny algorytm współpracujący z numerycznym generatorem losowego ruchu drogowego. Generator ten umożliwia jednoczesną symulację kilku niezależnych, losowych potoków pojazdów drogowych, modelowanych za pomocą zbioru oscylatorów jednomasowych. Przytoczono wyniki eksperymentów symulacyjnych, które potwierdziły zasadność założeń metody analityczno-numerycznej. Trzeci wątek rozdziału jest związany z badaniem niezawodności mostów wiszących w sensie problemu pierwszego przekroczenia i w aspekcie zmęczenia materiału. Przedstawiono metodę badania niezawodności, przykłady analiz prawdopodobieństwa przekroczenia pewnego stanu granicznego przemieszczeń oraz przykłady wyznaczania czasu życia mostu, określonego z uwagi na zmęczenie materiału przęseł bocznych mostu, przęseła głównego i cięgien. Przeprowadzono dyskusję rozwiązań pod kątem oceny możliwości modelowania procesów naprężeń za pomocą procesów wąskopasmowych i szerokopasmowych. Na podstawie analizy funkcji gęstości widmowej i momentów widmowych przedstawiono metodę i przykłady oszacowań rzeczywistej szerokości pasma procesów.

Tematyka rozdziału 5 rozprawy jest związana z zagadnieniami aerodynamiki. W uwagach wstępnych omówiono zwięźle rodzaje zjawisk aerodynamicznych, które pojawiają się podczas eksploatacji mostów wiszących. Szczególną uwagę zwrócono na zjawisko wzbudzenia turbulentnym przepływem wiatru<sup>1</sup> i nowoczesne metody analizy drgań wywołanych tego rodzaju wymuszeniem. Na podstawie najnowszych danych literaturowych, przedstawiono obowiązujące definicje obciążeń aerodynamicznych mostów o dużych rozpiętościach. Na tym tle sformułowano oryginalny, stochastyczny model obciążenia porywistym wiatrem z losową turbulencją, w którym działanie wiatru jest opisane niestacjonarnym procesem stochastycznym o okresowo zmiennej w czasie wartości oczekiwanej. Opracowano metodę analizy probabilistycznej drgań mostów wiszących, wywołanych działaniem wiatru, przy czym – zgodnie z najnowszymi trendami – w analizie drgań zastosowano podejście polegające na poszukiwaniu rozwiązań w dziedzinie czasu, zamiast metod spektralnych, określonych w dziedzinie częstości. Pole ciśnienia wiatru podzielono na segmenty wzdłuż rozpiętości mostu, uwzględniając przestrzenną korelację turbulencji. Przedstawiono rozwią-

---

<sup>1</sup> W literaturze anglojęzycznej zjawisko wzbudzenia turbulentnym przepływem wiatru jest określane terminem „buffeting”.



zania w zakresie teorii korelacyjnej, służące probabilistycznej ocenie drgań konstrukcji. Przytoczono też wyniki testów obliczeniowych, które ilustrują charakter losowej odpowiedzi mostu na działanie przyjętego procesu obciążenia. W podsumowaniu rozdziału omówiono różne warianty zastosowań modelu wiatru sformułowanego w rozprawie. Omówiono także możliwość uwzględnienia w podstawowej strukturze algorytmu sił samowzbudnych, wynikających z ruchu konstrukcji.

## **2. Teoria drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących**

### **2.1. Wprowadzenie**

W ostatnich latach w obliczeniach statycznych i dynamicznych różnych konstrukcji, w tym także mostów wiszących, najczęściej stosuje się metodę elementów skończonych. Metoda ta jest narzędziem, które służy zarówno do obliczeń inżynierskich, jak i do rozwiązywania zaawansowanych problemów badawczych. W większości prac dotyczących zagadnień dynamiki mostów wiszących metodę elementów skończonych stosuje się do rozwiązania zagadnienia własnego. Następnie wykorzystuje się formy własne (wektory własne), aby zapisać równania ruchu w postaci modalnej, co pozwala formułować szczegółowe metody rozwiązywania problemów drgań wymuszonych w odniesieniu do parametrów modalnych konstrukcji [43, 64, 67, 70, 73, 99, 121]. W analizach nieliniowych standardową procedurę dekompozycji modalnej stosuje się zwykle po obliczeniu stycznej macierzy sztywności, określonej w nieliniowym zagadnieniu statycznym. Takie podejście do analizy nieliniowych drgań mostów wiszących prezentują między innymi Chen [44], Boonyapinyo [17] oraz Cobo del Arco i Aparicio [46].

Modelowanie za pomocą metody elementów skończonych umożliwia stosunkowo dokładny opis konstrukcji, ale zwykle prowadzi do bardzo dużych zadań, o wielu tysiącach stopni swobody. Zazwyczaj po wyznaczeniu form własnych wybiera się do dalszych badań kilka lub kilkanaście postaci drgań kształtujących ostateczne rozwiązania. Właściwy wybór liczby i rodzaju postaci drgań opisujących z dostateczną dokładnością ruch konstrukcji ma bardzo istotne znaczenie. Jak sugeruje Abdel-Ghaffar [4], obliczenia dynamiczne mostów wiszących metodą elementów skończonych powinny być zawsze poprzedzone obliczeniami analitycznymi, które umożliwiają rozpoznanie specyficznych cech drgań konstrukcji oraz ułatwiają wyodrębnienie tych form własnych, które rzeczywiście istotnie wpływają na globalną odpowiedź mostu, poddanego działaniu analizowanego obciążenia dynamicznego. Z tego względu nadal aktualne jest rozwijanie metod analitycznego opisu ruchu konstrukcji, które pozwalają na

budowanie efektywnych algorytmów w niewielkiej, w porównaniu z metodą elementów skończonych, bazie współrzędnych. Początkowo stosowanie metod analitycznych wiązało się z koniecznością wprowadzania wielu, czasem dość radykalnych uproszczeń modelu obliczeniowego, głównie z powodu ograniczonych możliwości poszukiwania rozwiązań ścisłych. Obecnie, dzięki wielkiemu postępowi w dziedzinie metod komputerowych, poszukuje się raczej rozwiązań analityczno-liczbowych, co umożliwia przyjęcie bardziej złożonego modelu konstrukcji. Ten kierunek badań będzie rozwijany w niniejszym rozdziale.

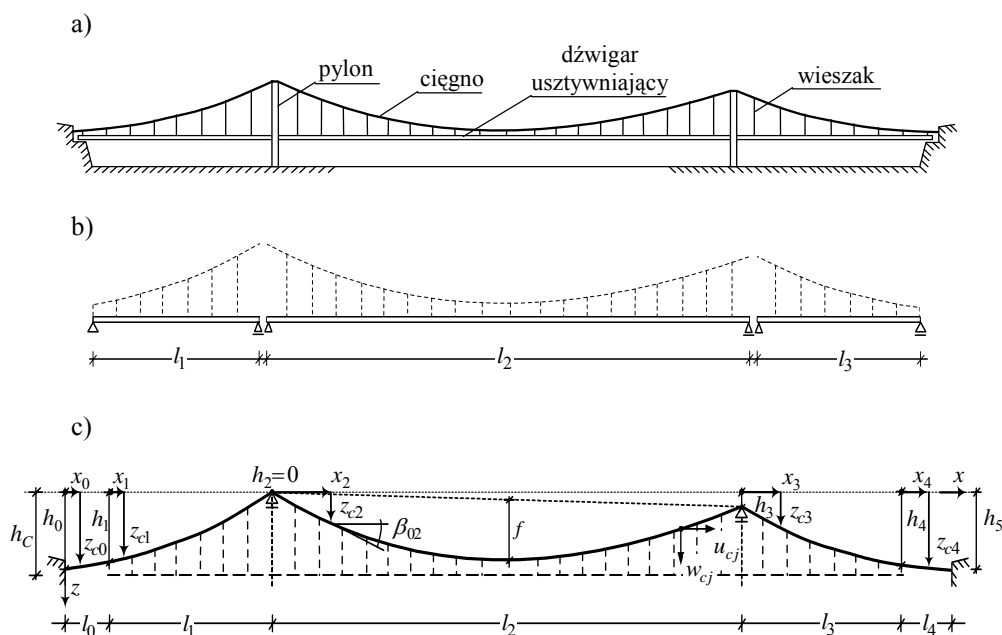
Pierwsze znaczące prace, traktujące o dynamice mostów wiszących, zostały opublikowane po spektakularnej katastrofie mostu Tacoma Narrows. Pojawiło się wówczas wiele publikacji, w których stopniowo doskonalono model obliczeniowy mostu i stosowano różne, ścisłe i przybliżone metody rozwiązań, np. fundamentalne opracowanie Bleicha [14], prace Steinmana [113, 114], Hawranka [65], Selberga [100, 101]. Wykorzystanie nowych technik obliczeniowych z użyciem maszyn cyfrowych spowodowało w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych znaczący przełom w badaniach. Z tego okresu pochodzą między innymi prace Irvina [68], Hayashikawy [66], Maedy [82] i Smirnova [106], przy czym na szczególną uwagę zasługuje obszerny cykl publikacji Abdel-Ghaffara [1–7]. W Polsce zagadnieniem drgań mostów wiszących zajmowało się niewielu autorów. Znaczącą pozycję stanowią tu prace autorki [18, 19, 27, 76, 77], dotyczące drgań jednoprzęsłowych mostów wiszących z cienkościenną belką usztywniającą o monosymetrycznym przekroju otwartym. Wybrane zagadnienia drgań układów belkowo-ciężnowych badali Nguyen van Tinh [88] oraz Rakowski [93].

Przedmiotem rozważań autorów cytowanych prac były drgania pionowe lub drgania przestrzenne mostów. W przypadku analizy drgań przestrzennych jako model dźwigara usztywniającego przyjmowano zazwyczaj belkę cienkościenną [4, 65, 88, 106]. Na ogół autorzy rozważali szczególny przypadek drgań dźwigara o przekroju bisymetrycznym, zwłaszcza w przypadku profili zamkniętych. Bisymetria przekroju prowadzi do separacji poziomych drgań poprzecznych i drgań skrętnych belek cienkościennych. W rzeczywistości dźwigar usztywniający mostu jest obciążony dodatkową masą nawierzchni i wyposażenia mostu (balast). Masa balastu powoduje zróżnicowanie położenia środka masy przekroju sprężystego belki i przekroju balasto-wanego, którego skutkiem jest bezwładnościowe sprzężenie drgań poziomych i skrętnych. Ponadto punkty zamocowania wieszaków na ogół nie leżą w poziomej płaszczyźnie symetrii bisymetrycznego dźwigara, co generuje dodatkowe, statyczne sprzężenie drgań związane z efektem wahadłowym [18, 76]. Opisane sprzężenia pojawiają się niezależnie od typu przekroju (profile otwarte i zamknięte, bisymetryczne i monosymetryczne) i nie powinny być z założenia pomijane.

We wszystkich znanych autorce pracach, w których stosowane było ujęcie analityczne, równania drgań mostów wiszących wyprowadzono przy założeniu, że zwis ciężarów jest mały. Założenie to, znane w teorii ciężka wiotkiego pod nazwą hipotezy

## 2.2. Model fizyczny konstrukcji

Przedmiotem rozważań są mosty wiszące o typowych, najczęściej stosowanych systemach konstrukcyjnych. Są to mosty wieloprzęsłowe, zazwyczaj trójprzęsłowe, z przęsłami swobodnie podpartymi i podwieszonymi za pośrednictwem pionowych wieszaków do dwóch ciągów opartych przesuwnie na pylonach i zakotwionych na końcach w blokach kotwiących. Ideowy schemat przykładowego mostu trójprzęsłowego pokazano na rys. 2.1.

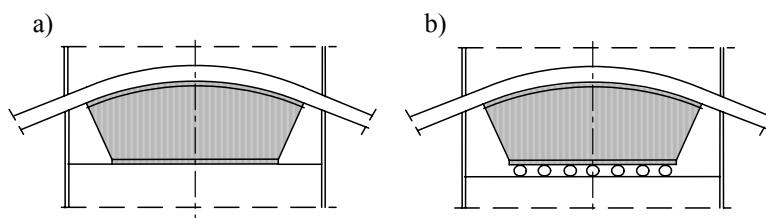


Rys. 2.1. Ideowy schemat mostu  
Fig. 2.1. Schematic of an idealized bridge

Na rysunku 2.1a przedstawiono elementy nośne mostu. Zakładamy, że most jest symetryczny względem pionowej płaszczyzny podłużnej. Dźwigar usztywniający jest podwieszony do dwóch wiotkich ciągów. Składa się z kilku odrębnych przęseł swobodnie podpartych ze względu na zginanie w obu płaszczyznach – pionowej i poziomej (rys. 2.1b). Zakładamy, że sposób podparcia uniemożliwia skręcenie przekrojów przypodporowych, ale zapewnia swobodę ich deplanacji. Model fizyczny dźwigara usztywniającego przyjmujemy w postaci pryzmatycznej cienkościennej belki o przekroju monosymetrycznym otwartym lub zamkniętym, zamkniętym częściowo lub całkowicie. Przekroje poszczególnych przęseł dźwigara mogą być różne. Krzywiznę wstępną dźwigara pominiemy jako małą wobec jego rozpiętości.

Cięgna są ciągle, idealnie wiotkie, mają jednakowy przekrój wzdłuż całej rozpiętości. W warunkach statycznych przenoszą całkowicie ciężar własny całego układu, przy czym krzywa zwisu statycznego jest kształtowana głównie przez równomiernie rozłożony ciężar dźwigara usztywniającego. Wieszaki są pionowe, zamocowane obustronnie przegubowo i rozmieszczone dostatecznie gęsto, aby ich reakcja mogła być traktowana jako obciążenie rozłożone. Zakładamy, że przy poprzecznych wychyleniach belki wieszaki obracają się wokół górnej części cięgiwa cięgna oraz – że zasadnicze odkształcenia wieszaków powstają pod wpływem obciążenia stałego, zatem długości wieszaków nie ulegają zmianie pod obciążeniem użytkowym.

Na rysunku 2.1c przedstawiono trasę cięgien w statycznie zrównoważonej konfiguracji, gdy jedynym obciążeniem mostu jest ciężar własny i ciężar wyposażenia. Trasa cięgna składa się z kilku odcinków oznaczonych numerami  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ . Odcinki, czyli skrajne odcinki przelotu cięgna, oznaczone numerami  $i = 0$ ,  $i = n + 1$ , doprowadzają cięgno do bloków kotwiących i nie są bezpośrednio połączone wieszakami z dźwigarem. Pozostałe odcinki przelotu o numerach  $i = 1, \dots, n$  odnoszą się do kolejnych przęseł mostu. W przypadku mostu trójprzęsłowego  $n = 3$ . Krzywa zwisu statycznego cięgna  $z_{c,i}(x_i)$  jest funkcją lokalnej współrzędnej geometrycznej  $x_i$ , przy czym  $0 \leq x_i \leq l_i$  oraz  $z_i(0) = h_i$  oraz  $z_i(l_i) = h_{i+1}$ . Odległość dolnych punktów zamocowania wieszaków od najwyższej położonego punktu podparcia cięgna jest jednakowa we wszystkich przęsłach i wynosi  $h_c$ . Symbol  $f$  w przęśle środkowym oznacza strzałkę zwisu cięgna, mierzoną od jego cięciwy w połowie rozpiętości przęsła.



Rys. 2.2. Podstawowe sposoby podparcia cięgien na pylonie  
Fig. 2.2. Basic types of connection between cables and pylon

Skrajne punkty podparcia cięgien są nieprzesuwne pionowo i poziomo, co wynika z pełnego zamocowania w blokach kotwiących. Pośrednie podparcie cięgien na pylonach konstruuje się zazwyczaj w dwu postaciach, przedstawionych schematycznie na rys. 2.2. W rozwiązaniu 2.2a cięgno jest opasane na siodle zamocowanym do pylonu, w rozwiązaniu 2.2b siodło ma możliwość poziomego przesuwu. Sposób podparcia cięgna pokazany na rys. 2.2b był powszechnie stosowany we wcześniejszych konstrukcjach mostów z masywnymi pylonami. W nowoczesnych mostach stosuje się go zazwyczaj jedynie w trakcie montażu. Po całkowitym zakończeniu fazy montażowej

siodło oparcia cięgna jest centrowane i następnie całkowicie mocowane do wierzchołka pylonu. Wtedy ostateczne połączenie cięgna z pylonem ma postać jak na rys. 2.2a. Takie rozwiązanie pozwala zminimalizować efekt niecentrycznego przekazywania się pionowych nacisków cięgna na pylon, co jest szczególnie istotne w przypadku mostów o dużych rozpiętościach, w których pylony są wysokie i stosunkowo wiotkie. W rozwiązaniu 2.2a swobodny przesuw cięgna po siodle jest ograniczony jedynie niewielkim tarcie. Jeśli wymagane jest nieprzesuwne połączenie cięgna z pylonem, to stosuje się specjalne zaciski, obejmujące cięgno w obrębie siodła, dalej pozostaje jednak możliwy przesuw cięgna w punkcie podparcia, ze względu na odkształcalność giętą pylonu. Według Gimsinga [59], w obu przypadkach sposób podparcia cięgna na pylonie najlepiej idealizuje podpora przegubowa, poziomo-przesuwna. Założymy zatem, że pylony są nieodkształcalne, a opasanie cięgna na pylonie modeluje się za pomocą podpory punktowej, przegubowo-przesuwnej, bez tarcia.

W analizie dynamicznej uwzględnimy ciągły rozkład masy konstrukcji i równomiernie rozłożoną masę balastu w postaci nawierzchni i wyposażenia mostu. Pominiemy wpływ bezwładności obrotowej przekrojów dźwigara przy zginaniu i wpływ bezwładności deplanacyjnej. Pominiemy także poziome, poprzeczne do osi mostu składowe siły inercji cięgien i siły bezwładności masy wieszaków jako małe wobec głównych składników inercji. Stan równowagi statycznej mostu pod działaniem obciążeń stałych przyjmijmy jako konfigurację odniesienia w opisie drgań układu. Założymy, że przemieszczenia dynamiczne konstrukcji są małe wobec jej wymiarów, a właściwości mechaniczne materiału cięgien i dźwigara opisuje prawo Hooke'a. Rozpatrywane będą obciążenia o charakterze dynamicznym, działające wyłącznie na dźwigar usztywniający mostu. Nie będą uwzględniane wpływy niemechaniczne.

### 2.3. Równania różniczkowe drgań cięgna

Stan przemieszczenia cięgna w jego płaszczyźnie określają dwie składowe – pionowa  $w_{c_j}(x_i, t)$  i pozioma  $u_{c_j}(x_i, t)$ , gdzie  $j = 1, 2$  oznacza numer cięgna (rys. 2.1c). Są to przemieszczenia wywołane obciążeniem użytkowym, mierzone względem krzywej zwisu statycznego. Całkowita siła w cięgnie  $N_j(x_i, t) = N_{0j}(x_i) + \Delta N_j(x_i, t)$  jest sumą siły statycznej i przyrostu dynamicznego, przy czym dynamiczny przyrost siły w cięgnie jest określony relacją  $\Delta N_j = E_c A_c \varepsilon_j$ , gdzie  $E_c A_c$  jest sztywnością osiową cięgna. Odkształcenie podłużne  $\varepsilon_j$ , obliczone względem statycznej wartości odkształcenia  $\varepsilon_{0j} = N_{0j} / E_c A_c$ , jest według Hajduka i Osieckiego [62] określone wzorem

$$\varepsilon_j(x_i, t) = (u'_{c_j} + \frac{1}{2} u'^2_{c_j}) \cos^2 \beta_{0i} + (w'_{c_j} z'_{ci} + \frac{1}{2} w'^2_{c_j}) \cos^2 \beta_{0i}. \quad (2.1)$$

W przypadku małych przemieszczeń człony nieliniowe we wzorze (2.1) są pomijane i otrzymuje się

$$\varepsilon_j = (u'_{cj} + w'_{cj}z'_{ci}) \cos^2 \beta_{0i}, \quad (2.2)$$

gdzie  $(\cdot)' = \partial/\partial x_i$ ,  $\cos \beta_{0i} = (1 + z'_{ci})^{-1/2}$ . Funkcje  $z_{ci}(x_i)$ , gdzie  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , określają kolejne odcinki krzywej zwisu statycznego ciężna.

Równania równowagi dynamicznej, wyprowadzone na podstawie analizy stanu równowagi odkształconego elementu ciężna [19, 62], mają postać:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ N_j \left( \sin \beta_{0i} + \frac{w'_{cj} - \varepsilon_j z'_{ci}}{1 + \varepsilon_j} \cos \beta_{0i} \right) \right] + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{w}_{cj} &= \frac{m_c g}{\cos \beta_{0i}} + \tilde{m}_{wi} g + r_{zj}, \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ N_j \left( \cos \beta_{0i} + \frac{u'_{cj} - \varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j} \cos \beta_{0i} \right) \right] + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{u}_{cj} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie  $(\dot{\cdot}) = \partial/\partial t$ . Masę wieszaków, jako małą wobec masy całego mostu, uśredniono na długości przęsła przyjmując w uproszczeniu, że  $m_{wi}(x_i) = \tilde{m}_{wi} = \text{const}$ . Symbol  $m_c$  oznacza masę jednostki długości ciężna,  $r_{zj}(x_i, t) = r_{zj}^0(x_i) + \Delta r_{zj}(x_i, t)$  jest rozłożoną pionową reakcją wieszaków. W równaniach odpowiadających skrajnym odcinkom ciężnia, które nie są obciążone wieszakami, należy przyjąć  $r_{zj} = 0$ ,  $\tilde{m}_{wi} = 0$ . W stanie równowagi statycznej ciężna całkowicie przenoszą ciężar własny mostu, zatem uwzględniając symetrię układu mamy  $r_{zj}^0(x_i) = m_{bi} g / 2$ , gdzie  $m_{bi}$  jest stałą intensywnością rozkładu masy belki usztywniającej z balastem, w przęsle  $i$ .

W dynamice ciężnia operuje się zazwyczaj pojęciem naciągu  $H_j = H_{0j} + \Delta H_j$ , który jest poziomą składową siły w ciężnie  $N_j$ . Po podstawieniu do równań (2.3) zależności  $H_j(x_i, t) = N_j(x_i, t) \cos \beta_{0i}$  otrzymuje się

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( H_j z'_{ci} + H_j \frac{w'_{cj} - \varepsilon_j z'_{ci}}{1 + \varepsilon_j} \right) + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{w}_{cj} &= \frac{m_c g}{\cos \beta_{0i}} + \tilde{m}_{wi} g + r_{zj}, \\ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( H_j + H_j \frac{u'_{cj} - \varepsilon_j}{1 + \varepsilon_j} \right) + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{u}_{cj} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

W dalszym ciągu przyjęto, że dynamiczny przyrost odkształcenia podłużnego  $\varepsilon_j$

jest znacznie mniejszy od jedności, można zatem też przyjąć, że  $1 \pm \varepsilon_j \approx 1$ . Równania (2.4) przyjmują wówczas postać

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} [(H_{0j} + \Delta H_j) z'_{ci} + (H_{0j} + \Delta H_j) w'_{cj}] + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{w}_{cj} = \frac{m_c g}{\cos \beta_{0i}} + \tilde{m}_{wi} g + r_{zj}, \quad (2.5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} [(H_{0j} + \Delta H_j) + (H_{0j} + \Delta H_j) u'_{cj}] + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{u}_{cj} = 0.$$

W warunkach statycznych, tj. gdy  $w_{cj} = 0$ ,  $u_{cj} = 0$ ,  $\Delta H_j = 0$ ,  $\Delta r_{zj} = 0$ , otrzymuje się na podstawie wzorów (2.5) równania równowagi statycznej ciężna

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} (H_{0j} z'_{ci}) = \frac{m_c g}{\cos \beta_{0i}} + \tilde{m}_{wi} g + r_{zj}^0, \quad (2.6)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} (H_{0j}) = 0.$$

Z równania (2.6)<sub>2</sub> wynika, że naciąg statyczny jest stały w każdym przęśle. Ponadto z warunku równowagi poziomych składowych sił działających w punktach podparć ciężna wynika, że naciągi statyczne każdego odcinka ciężna są jednakowe. Naciąg jest też jednakowy dla obu ciężen, co z kolei jest skutkiem symetrii układu, zatem  $H_{0j} = H_0 = \text{const}$ .

Równanie (2.6)<sub>1</sub> opisuje statyczną trasę ciężna, która jest kształtowana głównie przez równomiernie rozłożony ciężar dźwigara, przekazywany na ciężno przez pionowe oddziaływanie wieszaków  $r_{zj}^0(x_i) = m_{bi} g / 2$ . Można przyjąć w przybliżeniu, że krzywa zwisu statycznego ciężna jest odcinkami paraboliczną, określona zbiorem równań (2.6)<sub>1</sub>, uproszczonych do postaci

$$H_0 z''_{ci} + 0,5 \tilde{m}_i g = 0, \quad (2.7)$$

gdzie  $\tilde{m}_i = 2(\tilde{m}_{ci} + \tilde{m}_{wi}) + m_{bi}$ . Symbol  $\tilde{m}_{ci}$  oznacza intensywność rozkładu uśrednionej, zastępczej masy ciężna, rozłożonej równomiernie na odcinku  $l_i$ . Można ją obliczyć według wzoru



$$\tilde{m}_{ci} = \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} m_c \cos^{-1} \beta_{0i} dx_i . \quad (2.8)$$

W przypadku skrajnych odcinków ciężna, które nie są związane wieszakami z belką usztywniającą, należy przyjąć  $\tilde{m}_i = 2\tilde{m}_{ci}$ .

Zazwyczaj w jednym z przęseł mostu wieloprzęsłowego narzuca się konstrukcyjnie strzałkę zwisu ciężna  $f$ . Naciąg wstępny ciężien jest wówczas zdeterminowany i można go wyznaczyć całkując dwukrotnie równanie (2.7) z uwzględnieniem warunków brzegowych. W przypadku trójprzęsłowego schematu mostu pokazanego na rys. 2.1 otrzymuje się w przęśle środkowym

$$z_{c2}(x_2) = \frac{\tilde{m}_2 g}{4H_0} (l_2 x_2 - x_2^2) + \frac{h_3}{l_2} x_2 , \quad (2.9)$$

$$z_{c2}(l_2 / 2) = f + 0,5h_3 \rightarrow H_0 = \frac{\tilde{m}_2 g l_2^2}{16f} .$$

Wówczas trasa każdego odcinka ciężien w stanie równowagi statycznej jest parabolą opisaną równaniem

$$z_{ci}(x_i) = h_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{l_i} x_i + \frac{4f}{l_i^2} \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}_2} (l_i x_i - x_i^2) , \quad (2.10)$$

zatem  $z_{ci}'' = -8f\tilde{m}_i / l_i^2 \tilde{m}_2$ . Wzory te są słuszne również w przypadku mostów o wielu przęsłach, przy czym za  $l_2, \tilde{m}_2$  należy podstawić odpowiednio rozpiętość  $l$  i masę  $\tilde{m}$  przęsła z narzuconą konstrukcyjnie strzałką zwisu ciężna. Możemy zapisać ogólnie, że

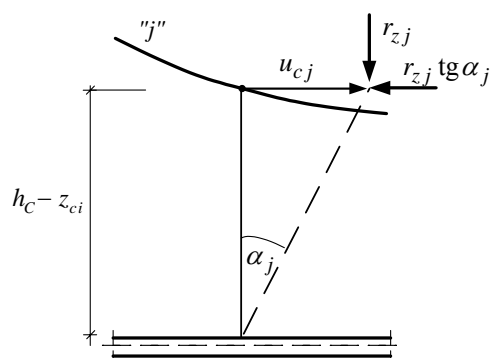
$$z_{ci}(x_i) = h_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{l_i} x_i + \frac{4f}{l_i^2} \mu_i (l_i x_i - x_i^2) , \quad z_{ci}'' = -\frac{8f}{l_i^2} \mu_i , \quad (2.11)$$

$$\mu_i = \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}} , \quad H_0 = \frac{\tilde{m} g l^2}{16f} . \quad (2.12)$$

Uśrednioną masę ciężna potrzebną do wyznaczenia masy przęsła  $\tilde{m}_i$  oblicza się bezpośrednio według wzoru (2.8) tylko w przęśle o parametrach  $l, \tilde{m}$ , gdzie  $\mu_i = 1$  i funkcja (2.11) jest w pełni określona. Zastosowanie wzoru (2.8) do wyznaczenia uśrednionej masy ciężna w pozostałych przęsłach prowadzi do procedury iteracyjnej,

ustalającej wartość parametru  $\mu_i$  i postać równania (2.11). W pierwszym kroku iteracji można przyjąć, że  $\mu_i = 0$ .

W przypadku odciągów, tzn. gdy  $i = 0$  lub  $i = n + 1$ , krzywizna trasy statycznej jest pomijalnie mała, ponieważ  $\tilde{m}_i = 2\tilde{m}_{ci} \ll \tilde{m}$ . Wobec tego w dalszym ciągu przyjmujemy, że odciągi są prostoliniowe i  $z_{ci}'' = -(8f/l^2)(\tilde{m}_i/\tilde{m}) \cong 0$ .



Rys. 2.3. Reakcja wieszaków w odkształconej konfiguracji cięgna  
Fig. 2.3. Reaction of hangers in a deformed state of cable

Równania (2.5) nie uwzględniają, że poziomy ruch cięgna w jego płaszczyźnie nie jest całkowicie swobodny, jeżeli cięgno współpracuje z belką usztywniającą mostu. Efekt ten można opisać uzupełniając równanie (2.5)<sub>2</sub> składnikiem drugiego rzędu, wyprowadzonym przy odrzuceniu zasady zeszywnienia. Następnym poziomym przemieszczeniem przekroju cięgna jest wychylenie wieszaków o kąt  $\alpha_j$  (rys. 2.3), przy czym  $\text{tg } \alpha_j = u_{cj}/(h_C - z_{ci})$ . Wychylenie wieszaków powoduje pojawienie się poziomej składowej reakcji wieszaków i dodatkowe obciążenie cięgna, które wynosi  $r_{xj}(x_i, t) = r_{zj} \text{tg } \alpha_j = (r_{zj}^0 + \Delta r_{zj}) u_{cj}/(h_C - z_{ci})$ . Obciążenie to jest efektem drugiego rzędu, można więc przyjąć, że istotny jest tylko jego składnik liniowy, który w analizowanym przypadku jest określony wzorem

$$r_{xj}(x_i, t) \cong \frac{r_{zj}^0 u_{cj}}{(h_C - z_{ci})} = \frac{m_{bi} g}{2(h_C - z_{ci})} u_{cj} . \quad (2.13)$$

Po wyeliminowaniu z równań (2.5) warunków równowagi statycznej (2.6) i po uwzględnieniu obciążenia (2.13) otrzymuje się ostateczną postać równań, opisujących drgania cięgna współpracującego z dźwigarem usztywniającym mostu wiszącego. Są to następujące równania:

$$\begin{aligned}
-H_0 w''_{cj} - \frac{\partial}{\partial x_i} [\Delta H_j (z'_{ci} + w'_{cj})] + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{w}_{cj} &= \Delta r_{zj}, \\
-H_0 u''_{cj} - \frac{\partial}{\partial x_i} [\Delta H_j (1 + u'_{cj})] + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{u}_{cj} &= -r_{xj},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ , przy czym należy przyjąć, że  $\Delta r_{zj} = 0$  i  $r_{xj} = 0$ , gdy  $i = 0$  lub  $i = n+1$ . Równania (2.14) są nieliniowe, ponieważ dynamiczny przyrost naciągu, określony wzorem

$$\Delta H_j(x_i, t) = \Delta N_j(x_i, t) \cos \beta_{0i} = E_c A_c \varepsilon_j \cos \beta_{0i} = E_c A_c (u'_{cj} + w'_{cj} z'_{cj}) \cos^3 \beta_{0i}, \tag{2.15}$$

zależy od aktualnego stanu przemieszczenia cięgna. Formułę (2.15) wyprowadzono przy założeniu, że stan odkształcenia cięgna jest opisany zależnością (2.2).

Układ równań (2.14) opisuje drgania cięgna wieloprzelotowego, którego geometria nie musi spełniać warunku małego zwisu o postaci  $f/l < 0,125$  [62]. Te równania będziemy nazywali krótko „równaniami drgań cięgna o dużym zwisie”, co w istocie oznacza, że w opisie drgań cięgna są uwzględnione poziome, podłużne składowe stanu przemieszczenia. Skrótowe określenie „duży zwis” nie oznacza tu, że zwis cięgna może znacznie przekraczać warunek małego zwisu  $f/l < 0,125$ . W mostach wiszących nie stosuje się cięgien o bardzo dużych zwisach, ponieważ pylony nie mogą być nadmiernie wysokie. Ponadto w przypadku bardzo dużych zwisów, przyjęcie parabolicznej aproksymacji krzywej zwisu statycznego cięgna byłoby obciążone zbyt dużym błędem, pomimo założenia o dominującym wpływie równomiernie rozłożonego ciężaru własnego podwieszanej konstrukcji.

W klasycznej teorii drgań mostów wiszących stosuje się w opisie drgań cięgna hipotezę Kirchhoffa [4, 18, 65]. Na podstawie tej hipotezy zakłada się, że w przypadku małego zwisu cięgna wpływ poziomych przemieszczeń na poprzeczne drgania cięgien jest pomijalnie mały. Pominięcie poziomych składowych stanu przemieszczenia cięgna prowadzi do zależności  $\Delta H'_j(x_i, t) = 0$ , którą uzyskuje się z równania (2.14)<sub>2</sub>. Stąd wynika wniosek, że dynamiczny przyrost naciągu cięgien nie zależy od zmiennej geometrycznej  $x_i$ , jest tylko funkcją czasu  $\Delta H_j = \Delta H_j(t)$ . Jest on ponadto jednaki na całej długości cięgna, ponieważ naciągi z lewej i prawej strony punktów podparcia na pylonach są sobie równe, co wynika z warunku równowagi poziomych składowych sił działających na poziomo-przesuwny węzeł podporowy.

Relację określającą dynamiczny przyrost naciągu można wyznaczyć pamiętając, że – ze względu na sposób zamocowania – suma poziomych składowych odkształceń cięgna wzdłuż całej jego rozpiętości musi być równa zeru. Na podstawie (2.15) otrzymuje się

$$\sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} u'_{c_j} dx_i = \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \left( \frac{\Delta H_j}{E_c A_c} \cos^{-3} \beta_{0i} - w'_{c_j} z'_{ci} \right) dx_i = 0, \quad (2.16)$$

co prowadzi, po wykonaniu całkowania przez części z uwzględnieniem warunków brzegowych  $w_{c_j}(x_i, t) = 0$  dla  $x_i = 0$  i  $x_i = l_i$ , do zależności

$$\begin{aligned} \Delta H_j(t) &= \frac{E_c A_c}{L_c} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} w'_{c_j} z'_{ci} dx_i = \\ &= -\frac{E_c A_c}{L_c} \sum_{i=0}^{n+1} z''_{ci} \int_0^{l_i} w_{c_j} dx_i = \frac{E_c A_c}{L_c} \frac{8f}{l^2} \sum_{i=1}^n \mu_i \int_0^{l_i} w_{c_j} dx_i, \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdzie  $L_c = \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \cos^{-3} \beta_{0i} dx_i$ . W rozważanym przypadku równanie (2.14)<sub>1</sub> przybiera znaną w literaturze postać [3, 18]

$$-H_0 w''_{c_j} - \Delta H_j (z''_{ci} + w''_{c_j}) + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{w}_{c_j} = \Delta r_{z_j}. \quad (2.18)$$

Równanie (2.18) może być stosowane wyłącznie do analizy drgań mostów z ciągłymi o małym zwisie, w odróżnieniu od równań (2.14), które dotyczą zarówno cięgien o małym, jak i o dużym zwisie. Skutki zastosowania hipotezy Kirchhoffa w odniesieniu do wieloprzelotowych cięgien współpracujących z dźwigarem usztywniającym będą przedmiotem badań w dalszej części rozprawy.

## 2.4. Analityczny opis drgań mostów wieloprzęsłowych

### 2.4.1. Ogólna postać równań różniczkowych opisujących drgania dźwigara usztywniającego

Celem niniejszych rozważań jest sformułowanie równań różniczkowych opisujących drgania wieloprzęsłowych mostów wiszących. Równania te wyprowadzimy w dwóch wersjach – zasadniczej, w której będą uwzględnione poziome przemieszczenia cięgien i uproszczonej, w której przemieszczenia te będą pominięte. W obu wersjach drgania dźwigara usztywniającego mostu będą opisane takimi samymi, ogólnymi równaniami, które wyprowadzimy na podstawie teorii zginania i nieswobodnego skręcania prętów cienkościennych.

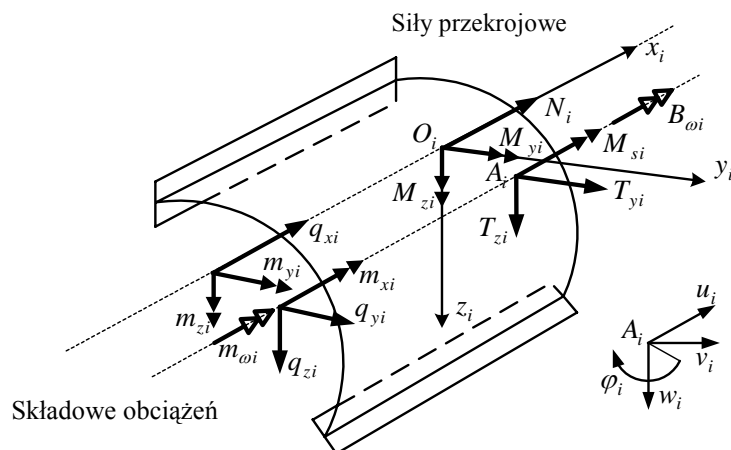
Dźwigar usztywniający mostu składa się z kilku przęseł, a każde z nich jest pojedynczą, przyrządczą, swobodnie podpartą belką cienkościenną. Przyjmijmy wstępnie, że  $i$ -te przęsło mostu stanowi belka cienkościenna o przekroju otwartym. Sztywności belki na zginanie w kierunkach głównych i na czyste skręcanie wynoszą odpowiednio  $E_i J_{y_i}$ ,  $E_i J_{z_i}$ ,  $G_i I_i$ . Symbolem  $E_i J_{\omega_i}$  oznaczono sztywność wycinkową,  $E_i A_i$  oznacza sztywność podłużną belki. Układ równań równowagi belki stanowią cztery niezależne równania różniczkowe [61, 71, 96]:

$$\begin{aligned} E_i A_i u_i'' &= -q_{xi}, \\ E_i J_{y_i} w_i'''' &= q_{zi} + m'_{yi}, \\ E_i J_{z_i} v_i'''' &= q_{yi} - m'_{zi}, \\ E_i J_{\omega_i} \varphi_i'''' - G_i I_i \varphi_i'' &= m_{xi} - m'_{\omega_i}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

jeśli charakterystyki geometryczne przekroju są określone w tzw. głównym układzie współrzędnych, który tworzą współrzędne  $y_i$ ,  $z_i$  odpowiadające głównym centralnym osiom bezwładności przekroju oraz współrzędna wycinkowa  $\omega_i(s_i)$  liczona względem bieguna głównego (środek ścinania  $A_i$ ) i głównego punktu zerowego. Przez  $s_i$  oznaczono krzywoliniową współrzędną mierzoną wzdłuż linii środkowej konturu przekroju, którą oznaczono dalej symbolem  $C_i$ . Symbol  $( )'$  w równaniach (2.19) oznacza różniczkowanie po zmiennej  $x_i$ . Pierwsze trzy równania układu (2.19) są znane z elementarnej teorii rozciągania i zginania belek. Czwarte równanie opisuje nieswobodne skręcanie belki cienkościennej o otwartym przekroju, sformułowane przy założeniu Własowa, w którym przyjmuje się, że odkształcenie postaciowe  $\gamma_{sx}(s_i, x_i, t)$  powierzchni środkowej jest równe zeru.

Obciążenia rozłożone  $q_{y_i}(x_i, t)$ ,  $q_{z_i}(x_i, t)$ ,  $m_{x_i}(x_i, t)$  są wynikiem redukcji do środka ścinania  $A_i$  poprzecznych składowych obciążeń zewnętrznych belki  $p_{y_i}(s_i, x_i, t)$ ,  $p_{z_i}(s_i, x_i, t)$ . Składowe obciążenia:  $q_{x_i}(x_i, t)$ ,  $m_{y_i}(x_i, t)$ ,  $m_{z_i}(x_i, t)$ ,  $m_{\omega_i}(x_i, t)$  wynikają z działania obciążeń  $p_{x_i}(s_i, x_i, t)$  równoległych do osi belki i wynoszą:

$$\begin{aligned} m_{y_i} &= \int_{C_i} p_{x_i}(s_i, x_i, t) z_i(s_i) ds_i, & m_{z_i} &= - \int_{C_i} p_{x_i}(s_i, x_i, t) y_i(s_i) ds_i, \\ m_{\omega_i} &= - \int_{C_i} p_{x_i}(s_i, x_i, t) \omega_i(s_i) ds_i, & q_{x_i} &= \int_{C_i} p_{x_i}(s_i, x_i, t) ds_i. \end{aligned} \tag{2.20}$$



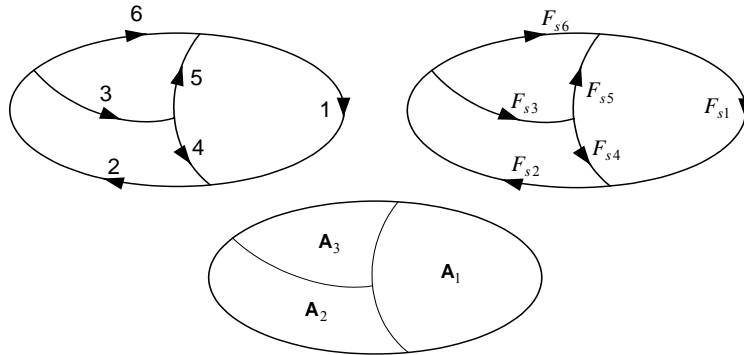
Rys. 2.4. Obciążenia belki i siły przekrojowe (Gjelsvik [61])  
 Fig. 2.4. Beam loads and internal forces (Gjelsvik [61])

Konfigurację obciążeń belki i sił przekrojowych w zdefiniowanym układzie współrzędnych pokazano na rys. 2.4. Jest ona zgodna z konfiguracją przedstawioną przez Gjelsvika w pracy [61]. Oznaczone na rysunku zwroty wektorów sił, momentów oraz przemieszczeń należy uważać za dodatnie.

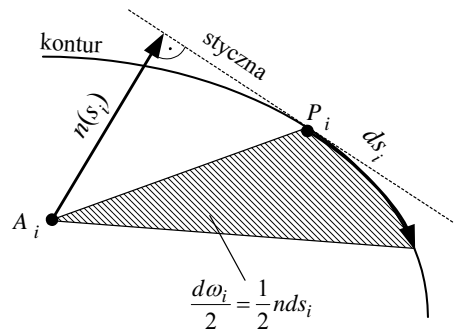
W przypadku belek cienkościennych o przekroju zamkniętym całkowicie lub częściowo, gdy tylko fragmenty konturu tworzą komory zamknięte, można sformułować teorię zginania i nieswobodnego skręcania prowadzącą do równań o postaci analogicznej do równań (2.19), co pokazuje Gjelsvik w pracy [61]. Podstawą tej teorii jest założenie, że odkształcenie postaciowe  $\gamma_{sx}(s_i, x_i, t)$  powierzchni środkowej ma taki sam rozkład w kierunku współrzędnej  $s_i$  jak przy czystym skręcaniu de Saint-Venanta. Założenie to jest uogólnieniem założenia Własowa i może być stosowane zamiast niego. Przyjmuje się, że

$$\gamma_{sx}(s_i, x_i, t) = \varphi_i'(x_i, t) \frac{F_s(s_i)}{\delta(s_i)}, \quad (2.21)$$

gdzie  $\delta(s_i)$  jest grubością ścianki przekroju a funkcja  $F_s(s_i)$  określa rozkład naprężeń stycznych de Saint-Venanta  $\tau_i^s$  wzdłuż konturu:  $\tau_i^s \delta(s_i) = G_i \varphi_i' F_s(s_i)$ . Można wykazać, że przy czystym skręcaniu zachodzi  $\partial(\tau_i^s \delta) / \partial s_i = 0$  [61, 96]. Wobec tego wartość funkcji  $F_s(s_i)$  musi być stała dla każdej gałęzi  $g = 1, 2, 3, \dots$  konturu:  $F_s(s_i) = F_{sg} = \text{const}$ , ale w ogólnym przypadku jest różna dla różnych gałęzi.



Rys. 2.5. Znakowanie współrzędnej konturowej  $s_i$  i funkcji  $F_s(s_i)$   
 Fig. 2.5. Sign convention for contour coordinate  $s_i$  and  $F_s(s_i)$  function



Rys. 2.6. Interpretacja geometryczna współrzędnej wycinkowej  $\omega(s_i)$   
 Fig. 2.6. Geometrical interpretation of contour warping function  $\omega(s_i)$

Znakowanie funkcji  $F_s(s_i)$  musi być zgodne ze znakiem współrzędnej konturowej (rys. 2.5). Dla gałęzi konturu tworzących graf otwarty mamy  $F_s(s_i) = 0$ . W każdej komorze  $k = 1, 2, 3, \dots$  zamkniętego konturu wieloobwodowego musi być spełnione równanie

$$\oint_k \frac{F_s(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i = 2\mathbf{A}_k, \quad (2.22)$$

gdzie  $2\mathbf{A}_k = \oint_k n(s_i) ds_i$  jest podwojonym polem komory – rys. 2.5, [61]. Całkowanie w każdej komorze powinno być wykonywane w obiegu prawoskrętnym. Znaczenie funkcji  $n(s_i)$  wyjaśnia rys. 2.6. Równania (2.22) oraz warunki ciągłości naprężeń, za-

pisane w punktach połączeń gałęzi, umożliwiają wyznaczenie stałych  $F_{sg}$ . W praktycznych obliczeniach wprowadza się pomocnicze obwodowe funkcje naprężeń  $F_{sk}$ , których zastosowanie pozwala automatycznie spełnić warunki ciągłości [61].

Równania (2.19) będziemy w dalszym ciągu odnosić do belek cienkościennych o profilach zarówno otwartych, jak i zamkniętych, przy czym współrzędną wycinkową zdefiniujemy, według [61], uogólnioną relacją o postaci

$$\omega_i(s_i) = \int_{C_i(s_i)} \left[ n(s_i) - \frac{F_s(s_i)}{\delta(s_i)} \right] ds_i. \quad (2.23)$$

Symbol  $C_i(s_i)$  oznacza fragment konturu mierzony współrzędną  $s_i$  od punktu początkowego do bieżącego. Łatwo zauważyć, że wszędzie tam, gdzie przekrój jest otwarty,  $\omega_i(s_i)$  jest zwykłą współrzędną wycinkową (rys. 2.6) – dodatnią, gdy ruch promienia wodzącego od położenia początkowego punktu do położenia końcowego jest prawo-skrętny. Podobnie należy uogólnić pojęcie charakterystyki przekrojowej de Saint-Venanta, określającej sztywność belki na czyste skręcanie  $G_i I_i$ . Oblicza się ją według wzoru

$$I_i = \frac{1}{3} \int_{C_i} \delta^3(s_i) ds_i + \int_{C_i} \frac{F_s^2(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i, \quad (2.24)$$

w którym pierwszy składnik dotyczy gałęzi konturu tworzących graf otwarty, drugi natomiast obejmuje fragmenty konturu o charakterze komorowym (zamkniętym). Szczegółowe wyprowadzenia oraz interpretację fizyczną wzorów (2.22)–(2.24), a także przykłady obliczeń można znaleźć w monografii Gjelsvika [61].

Rozważmy teraz przęsło dźwigara usztywniającego o przekroju monosymetrycznym, przedstawionym schematycznie na rys. 2.7. Wyróżnimy cztery punkty charakterystyczne:  $O_i$  – środek masy przekroju sprężystego belki,  $B_i$  – środek masy przekroju balastowanego,  $A_i$  – środek ścinania oraz  $C$  – punkt określający poziom zawieszenia belki (jednakowy w każdym przęsle).

Stan przemieszczenia cienkościennej belki usztywniającej jest określony w płaszczyźnie przekroju dwiema składowymi –  $w_i(x_i, t)$ ,  $v_i(x_i, t)$  translacji środka ścinania oraz współrzędną rotacyjną  $\varphi_i(x_i, t)$  opisującą obrót przekroju. Równoległe przemieszczenie całego przekroju belki wzdłuż osi  $x_i$  (przemieszczenie podłużne, bez spazczenia) określa funkcja  $u_i(x_i, t)$ . Potrzebne do dalszych wyprowadzeń przemieszczenia charakterystycznych punktów przekroju wyznaczymy uwzględniając obowiązujące w teorii prętów cienkościennych założenie o nieodkształcalności przekrojów poprzecznych w swoich płaszczyznach.



Przemieszczenia środka bezwładności przekroju belki wynoszą zatem

$$w_{Bi} = w_i, \quad v_{Bi} = v_i - b_i \varphi_i, \quad \varphi_{Bi} = \varphi_i. \quad (2.25)$$

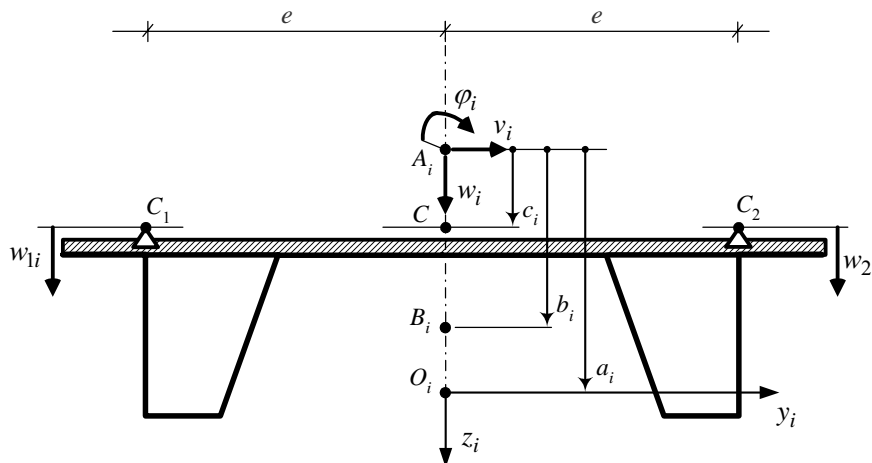
Pionowe przesunięcia belki w punktach zawieszń oblicza się według relacji

$$w_{1i} = w_i - e \varphi_i, \quad w_{2i} = w_i + e \varphi_i. \quad (2.26)$$

Wzory (2.26) określają jednocześnie pionowe przesunięcia cięgien, które są równe pionowym przesunięciom belki w punktach zawieszń

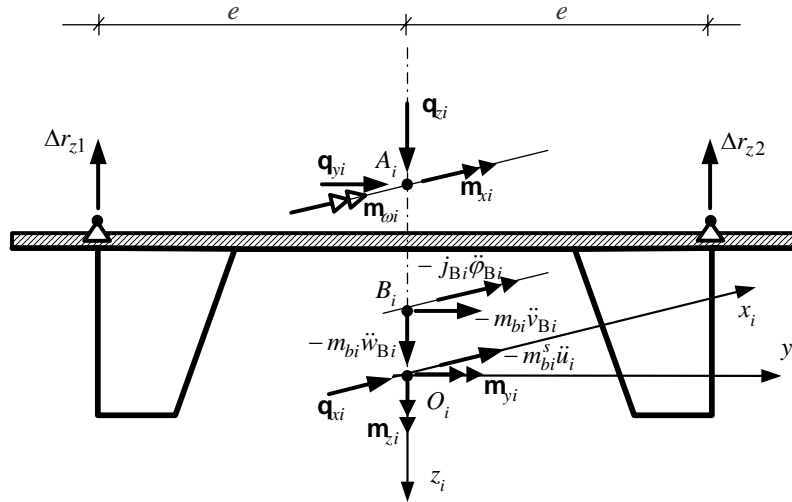
$$w_{c1}(x_i, t) = w_{1i}(x_i, t), \quad w_{c2}(x_i, t) = w_{2i}(x_i, t), \quad (2.27)$$

ponieważ przyjęliśmy, że długości wieszaków nie ulegają zmianie pod obciążeniem użytkowym.



Rys. 2.7. Przekrój poprzeczny i składowe stanu przemieszczenia dźwigara usztywniającego  
Fig. 2.7. Cross section and displacement components of a stiffness girder

W zagadnieniu dynamicznym obciążeniem zewnętrznym belki usztywniającej są siły bezwładności:  $-m_{bi}\ddot{v}_{Bi}$ ,  $-m_{bi}\ddot{w}_{Bi}$ ,  $-j_{Bi}\ddot{\varphi}_{Bi}$ ,  $-m_{bi}^s\ddot{u}_i$ , dynamiczne przyrosty pionowych reakcji wieszaków:  $\Delta r_{z1}$ ,  $\Delta r_{z2}$  oraz obciążenia użytkowe:  $\mathbf{p}_{xi}$ ,  $\mathbf{p}_{yi}$ ,  $\mathbf{p}_{zi}$ , przełiczone według wzorów (2.20) na składowe:  $\mathbf{q}_{xi}$ ,  $\mathbf{q}_{yi}$ ,  $\mathbf{q}_{zi}$ ,  $\mathbf{m}_{xi}$ ,  $\mathbf{m}_{yi}$ ,  $\mathbf{m}_{zi}$ ,  $\mathbf{m}_{\omega i}$ . Przyjęto, że składowa podłużna siły inercji belki wynika z ruchu masy  $m_{bi}^s$ , czyli masy belki bez balastu. Rozkład obciążeń w przekroju dźwigara przedstawiono na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Rozkład obciążeń i sił bezwładności w przekroju poprzecznym dźwigara usztywniającego  
Fig. 2.8. Distribution of loads and inertial forces in a cross section of stiffness girder

W wyniku redukcji wymienionych obciążeń do środka ścinania, otrzymuje się po uwzględnieniu relacji (2.25)

$$\begin{aligned}
 q_{xi} &= \mathbf{q}_{xi} - m_{bi}^s \ddot{u}_i, & q_{yi} &= \mathbf{q}_{yi} - m_{bi}(\ddot{v}_i - b_i \ddot{\phi}_i), & q_{zi} &= \mathbf{q}_{zi} - (\Delta r_{z1} + \Delta r_{z2}) - m_{bi} \ddot{w}_i, \\
 m_{xi} &= \mathbf{m}_{xi} - j_{Bi} \ddot{\phi}_i + m_{bi} b_i (\ddot{v}_i - b_i \ddot{\phi}_i) - e(\Delta r_{z2} - \Delta r_{z1}), & (2.28) \\
 m_{yi} &= \mathbf{m}_{yi}, & m_{zi} &= \mathbf{m}_{zi}, & m_{oi} &= \mathbf{m}_{oi}.
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu zależności (2.28) do (2.19) otrzymamy ogólną postać równań opisujących drgania dźwigara usztywniającego.

#### 2.4.2. Nieliniowe drgania mostów z ciągniami o dużym zwisie

Przejdźmy teraz do sformułowania szczegółowej postaci równań różniczkowych opisujących drgania wieloprzęsłowych mostów wiszących z ciągniami, których geometria nie musi spełniać warunku małego zwisu. W opisie drgań cięgna uwzględnimy zatem poziome składowe stanu przemieszczenia i do obliczeń zastosujemy równania (2.14). Na podstawie równania (2.14)<sub>1</sub> i zależności (2.26), (2.27) można wyznaczyć sumę i różnicę rozłożonej reakcji wieszaków  $\Delta r_{z1} + \Delta r_{z2}$ ,  $\Delta r_{z2} - \Delta r_{z1}$ , które są potrzebne do obliczenia składowych obciążeń dźwigara usztywniającego, określonych wzorami (2.28). Po wykonaniu stosownych działań otrzymuje się

$$\Delta r_{z1} + \Delta r_{z2} = \frac{2m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{w}_i - 2H_0 w_i'' - \frac{\partial}{\partial x_i} [z'_{ci} (\Delta H_1 + \Delta H_2)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [w'_i (\Delta H_1 + \Delta H_2) + e \varphi'_i (\Delta H_2 - \Delta H_1)], \quad (2.29)$$

$$\Delta r_{z2} - \Delta r_{z1} = \frac{2m_c e}{\cos \beta_{0i}} \ddot{\varphi}_i - 2H_0 e \varphi_i'' - \frac{\partial}{\partial x_i} [z'_{ci} (\Delta H_2 - \Delta H_1)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [w'_i (\Delta H_2 - \Delta H_1) + e \varphi'_i (\Delta H_1 + \Delta H_2)], \quad (2.30)$$

gdzie:  $\Delta H_1 + \Delta H_2 = E_c A_c \cos^3 \beta_{0i} (u'_{c1} + u'_{c2} + 2z'_{ci} w'_i)$ ,  $\Delta H_2 - \Delta H_1 = E_c A_c \cos^3 \beta_{0i} (u'_{c2} - u'_{c1} + 2ez'_{ci} \varphi'_i)$ . Ostatnie składniki we wzorach (2.29) i (2.30) są nieliniowe.

Obciążenia (2.28) określono przy założeniu nieruchomej konfiguracji sił w płaszczyźnie przekroju poprzecznego (zasada zeszywnienia). We wcześniejszych pracach autorki [18, 76] pokazano, że odrzucenie tej zasady pozwala ujawnić dodatkowe zależności, charakterystyczne dla mostów wiszących. Zależności te są związane z poprawkami drugiego rzędu i opisują efekt wahadłowy drgań podwieszanej belki. Z rozważań przedstawionych szczegółowo w wymienionych pracach wynika, że poprawki drugiego rzędu generują przyrosty obciążeń o charakterze liniowym i nieliniowym, przy czym te pierwsze wynikają wyłącznie z działania ciężaru własnego belki. Nieliniowe efekty drugiego rzędu są małe wobec liniowych i mogą być pominięte.

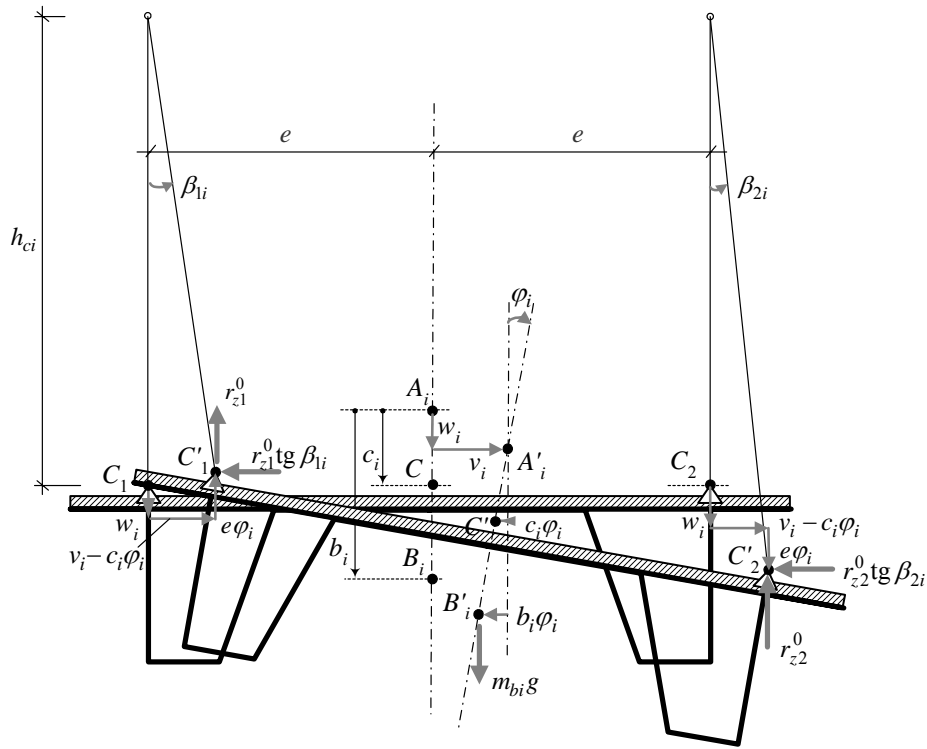
Na rysunku 2.9 przedstawiono konfigurację obciążeń stałych belki, zmienioną na skutek przemieszczenia przekroju. W wyniku poziomego poprzecznego przemieszczenia i obrotu przekroju następuje wychylenie wieszaków z płaszczyzny pionowej o niewielkie kąty  $\beta_{1i}$ ,  $\beta_{2i}$ , co powoduje powstanie poziomych reakcji wieszaków  $r_{y1}(x_i, t) = r_{z1}^0 \operatorname{tg} \beta_{1i}$ ,  $r_{y2}(x_i, t) = r_{z2}^0 \operatorname{tg} \beta_{2i}$ . Przy założeniu, że obrót wieszaków następuje wokół górnej cięciwy ciągien otrzymuje się  $\operatorname{tg} \beta_{1i} = v_{c1} / (h_{ci} + w_{1i})$  oraz  $\operatorname{tg} \beta_{2i} = v_{c2} / (h_{ci} + w_{2i})$ , gdzie  $v_{c1} = v_{c2} = v_i - c_i \varphi_i$  i  $h_{ci} = h_C - [h_i + (h_{i+1} - h_i) x_i / l_i]$  (por. rys. 2.1c). Uwzględniając, że zawsze  $w_{1i} \ll h_{ci}$  i  $w_{2i} \ll h_{ci}$ , przyjęto w dalszym ciągu  $\operatorname{tg} \beta_{1i} = \operatorname{tg} \beta_{2i} = \operatorname{tg} \beta_i$ , gdzie  $\operatorname{tg} \beta_i = (v_i - c_i \varphi_i) / h_{ci}$ , czyli

$$r_{y1}(x_i, t) = r_{y2}(x_i, t) = \frac{m_{bi} g (v_i - c_i \varphi_i)}{2h_{ci}}. \quad (2.31)$$

Po redukcji do środka ścinania obciążeń przedstawionych na rys. 2.9 uzyskujemy dodatkową poziomą składową obciążenia belki i dodatkowy moment skręcający

$$\Delta q_{yi} = -(r_{y1} + r_{y2}) = -\frac{m_{bi}g}{h_{ci}}v_i + \frac{m_{bi}gc_i}{h_{ci}}\varphi_i, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta m_{xi} &= -m_{bi}gb_i\varphi_i + r_{z1}^0(e + c_i\varphi_i) - r_{z2}^0(e - c_i\varphi_i) + r_{y1}(c_i - e\varphi_i) + r_{y2}(c_i + e\varphi_i) = \\ &= -m_{bi}gb_i\varphi_i + m_{bi}gc_i[\varphi_i(1 - c_i/h_{ci}) + v_i/h_{ci}] = \\ &= -m_{bi}g(b_i - c_i + \frac{c_i^2}{h_{ci}})\varphi_i + \frac{m_{bi}gc_i}{h_{ci}}v_i. \end{aligned} \quad (2.33)$$



Rys.2.9. Rozkład obciążeń stałych dźwigara w konfiguracji odkształconej  
Fig. 2.9. Distribution of dead loads in a deformed state

W wyniku podstawienia do równań (2.19) zależności (2.28) z uwzględnieniem (2.29), (2.32) i (2.33) otrzymuje się analityczne równania opisujące drgania przęsła dźwigara usztywniającego w moście wiszącym. Mają one następującą postać:

$$-E_i A_i u_i'' + m_{bi}^s \ddot{u}_i = \mathbf{q}_{xi}, \quad (2.34)$$

$$E_i J_{yi} w_i'''' - 2H_0 w_i'' - E_c A_c \frac{\partial}{\partial x_i} [\cos^3 \beta_{0i} z'_{ci} (u'_{c1} + u'_{c2} + 2z'_{ci} w'_i)] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} [w'_i (\Delta H_1 + \Delta H_2) + e \varphi'_i (\Delta H_2 - \Delta H_1)] + (m_{bi} + \frac{2m_c}{\cos \beta_{0i}}) \ddot{w}_i = \mathbf{q}_{xi} + \mathbf{m}'_{yi}, \quad (2.35)$$

$$E_i J_{zi} v_i'''' + \frac{m_{bi} g}{h_{ci}} v_i - \frac{m_{bi} g c_i}{h_{ci}} \varphi_i + m_{bi} \ddot{v}_i - m_{bi} b_i \ddot{\varphi}_i = \mathbf{q}_{yi} - \mathbf{m}'_{zi}, \quad (2.36)$$

$$E_i J_{\omega i} \varphi_i'''' - G_i I_i \varphi_i'' - 2H_0 e^2 \varphi_i'' - E_c A_c e \frac{\partial}{\partial x_i} [\cos^3 \beta_{0i} z'_{ci} (u'_{c2} - u'_{c1} + 2e z'_{ci} \varphi'_i)] - \\ - e \frac{\partial}{\partial x_i} [w'_i (\Delta H_2 - \Delta H_1) + e \varphi'_i (\Delta H_1 + \Delta H_2)] + \\ + m_{bi} g (b_i - c_i + \frac{c_i^2}{h_{ci}}) \varphi_i - \frac{m_{bi} g c_i}{h_{ci}} v_i + (j_{Bi} + m_{bi} b_i^2 + \frac{2m_c e^2}{\cos \beta_{0i}}) \ddot{\varphi}_i - m_{bi} b_i \ddot{v}_i = \mathbf{m}_{xi} - \mathbf{m}'_{\omega i}, \quad (2.37)$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  – liczba przęseł) oraz

$$\Delta H_1(x_i, t) = E_c A_c (u'_{c1} + z'_{ci} w'_i - e z'_{ci} \varphi'_i) \cos^3 \beta_{0i}, \quad (2.38)$$

$$\Delta H_2(x_i, t) = E_c A_c (u'_{c2} + z'_{ci} w'_i + e z'_{ci} \varphi'_i) \cos^3 \beta_{0i}.$$

Dla przejrzystości zapisu, w nieliniowych składnikach równań (2.35) i (2.37) pozostawiono  $\Delta H_1, \Delta H_2$  w niejawniej postaci. Funkcje  $u_{c1}(x_i, t), u_{c2}(x_i, t)$ , opisujące poziome przemieszczenia cięgien, muszą w każdym przęśle ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) spełniać równania typu (2.14)<sub>2</sub>, które przybierają postać

$$-H_0 u''_{cj} - \frac{\partial}{\partial x_i} [\Delta H_j (1 + u'_{cj})] + \frac{m_{bi} g}{2(h_c - z_{ci})} u_{cj} + \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{u}_{cj} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.39)$$

Drgania skrajnych odcinków cięgien (odciągów), oznaczonych numerami  $i = 0$  oraz  $i = n + 1$ , są określone układem równań (2.14), przy czym w tym przypadku należy pamiętać, że  $\Delta r_{zj} = 0$  i  $r_{xj} = 0$ . Jeśli kąt nachylenia odciągów jest mały, to

można w uproszczeniu założyć, że  $\cos\beta_{0i} \approx 1$  oraz  $z'_{ci} \approx 0$ , co sprowadza równania (2.14) do postaci

$$\begin{aligned} -H_0 w''_{cj} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta H_j w'_{cj}) + m_c \ddot{w}_{cj} &= 0, \\ -H_0 u''_{cj} - \frac{\partial}{\partial x_i} [\Delta H_j (1 + u'_{cj})] + m_c \ddot{u}_{cj} &= 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

przy czym  $\Delta H_j = E_c A_c u'_{cj}$ . Składnik nieliniowy w równaniu (2.40)<sub>1</sub> ma przy założeniu małych drgań mały wpływ i może być pominięty. Wówczas równanie (2.40)<sub>1</sub> opisuje niezależne drgania pionowe prostoliniowego cięgna i może być rozpatrywane oddzielnie, jako problem o znaczeniu lokalnym. Równanie (2.40)<sub>2</sub> natomiast, zapisane dla  $j = 1$  i  $j = 2$ , uzupełnia układ równań (2.34)–(2.39).

Ze względu na przyjęty sposób podparcia przeseł mostu poszukiwane funkcje przemieszczeń muszą spełniać następujące warunki brzegowe:  $w_i = 0$ ,  $w''_i = 0$ ,  $v_i = 0$ ,  $v''_i = 0$ ,  $\varphi_i = 0$ ,  $\varphi''_i = 0$  dla  $x_i = 0$ ,  $x_i = l_i$  oraz  $u_i = 0$  na podporze stałej i  $u'_i = 0$  na podporze przesuwnej. Z warunku zgodności poziomych przemieszczeń cięgna we wszystkich punktach jego podparcia wynika, że drgania poziome cięgna mogą być opisane jedną funkcją ciągłą, zdefiniowaną w przedziale  $0 \leq x \leq L$  wzorem

$$U_j(x, t) = u_{cj}(x_i, t), \quad x_i = x - L_{i-1}, \quad (2.41)$$

gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\partial / \partial x_i = \partial / \partial x$ ,  $L_i = \sum_{k=0}^i l_k$ , przy czym  $L_{-1} = 0$ ,

$L_{n+1} = L$ . Funkcja  $U_j(x, t)$  spełnia warunki brzegowe  $U_j = 0$  dla  $x = 0$  i  $x = L$ .

Równania (2.34)–(2.40) wraz z wymienionymi warunkami brzegowymi opisują przestrzenne, nieliniowe drgania wieloprzęsłowych mostów wiszących z cięgnami, które nie muszą spełniać warunku małego zwisu, ponieważ w opisie drgań uwzględniono poziome, podłużne przemieszczenia cięgien. Drgania osiowe dźwigara usztywniającego, opisane równaniem (2.34), są niezależne. Natomiast drgania giętkie pionowe i poziome (równania (2.35), (2.36)) oraz drgania skrętne (równanie (2.37)) są ogólnie sprzężone poprzez poziome przemieszczenia cięgien  $u_{c1}$ ,  $u_{c2}$ , zarówno w zadaniu nieliniowym, jak i liniowym.

### 2.4.3. Nieliniowe drgania mostów z cięgnami o małym zwisie

Rozważmy teraz przypadek mostu z cięgnami o małym zwisie i zastosujmy do opisu drgań cięgna hipotezę Kirchhoffa. Załóżmy zatem, że wpływ poziomych prze-

mieszceń cięgien jest pomijalnie mały, co powoduje zmianę postaci równań równowagi dynamicznej mostu. W tej sytuacji należy ponownie wyznaczyć przyrosty pionowych reakcji wieszaków  $\Delta r_{zj}$ , korzystając tym razem z równania (2.18), które opisuje drgania cięgna o małym zwisie. W rozpatrywanym przypadku dynamiczne przyrosty naciągu cięgien wywołane działaniem obciążenia użytkowego zależą tylko od czasu i są zdefiniowane wzorem (2.17). Po uwzględnieniu zależności (2.26) i (2.27) można je zapisać w postaci

$$\Delta H_1(t) = H_0(\eta_1 - \eta_2), \quad \Delta H_2(t) = H_0(\eta_1 + \eta_2). \quad (2.42)$$

$$\eta_1(t) = \frac{k_c}{H_0} \sum_{i=1}^n \mu_i \int_0^{l_i} w_i dx_i, \quad \eta_2(t) = \frac{ek_c}{H_0} \sum_{i=1}^n \mu_i \int_0^{l_i} \varphi_i dx_i, \quad (2.43)$$

gdzie  $k_c = (E_c A_c / L_c)(8f / l^2)$ . Parametry  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  są bezwymiarowymi funkcjami czasu, reprezentującymi odpowiednio symetryczny i antysymetryczny składnik dynamicznych przyrostów naciągu cięgien.

Formuły (2.29), które określają składniki obciążenia belki wynikające z reakcji wieszaków, mają teraz następującą postać:

$$\begin{aligned} \Delta r_{z1} + \Delta r_{z2} &= \frac{2m_c}{\cos \beta_{0i}} \ddot{w}_i - 2H_0 w_i'' + \\ &+ \frac{8f}{l^2} \mu_i (\Delta H_1 + \Delta H_2) - w_i'' (\Delta H_1 + \Delta H_2) - e \varphi_i'' (\Delta H_2 - \Delta H_1), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta r_{z2} - \Delta r_{z1} &= \frac{2m_c e}{\cos \beta_{0i}} \ddot{\varphi}_i - 2H_0 e \varphi_i'' + \\ &+ \frac{8f}{l^2} \mu_i (\Delta H_2 - \Delta H_1) - w_i'' (\Delta H_2 - \Delta H_1) - e \varphi_i'' (\Delta H_1 + \Delta H_2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Po podstawieniu relacji (2.42)–(2.45) do równań (2.19) i po uwzględnieniu, jak poprzednio, poprawek drugiego rzędu, otrzymuje się układ równań opisujących drgania wieloprzęsłowego mostu wiszącego z cięgna o małym zwisie, o postaci:

$$-E_i A_i u_i'' + m_{bi}^s \ddot{u}_i = \mathbf{q}_{xi}, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
& E_i J_{y_i} w_i'''' - 2H_0 w_i'' + \frac{16k_c f}{l^2} \mu_i \sum_{k=1}^n \mu_k \int_0^{l_k} w_k dx_k - \\
& - 2H_0 \eta_1 w_i'' - 2H_0 e \eta_2 \varphi_i'' + (m_{b_i} + \frac{2m_c}{\cos \beta_{0i}}) \ddot{w}_i = \mathbf{q}_{e_i} + \mathbf{m}'_{y_i}, \quad (2.47)
\end{aligned}$$

$$E_i J_{z_i} v_i'''' + \frac{m_{b_i} g}{h_{c_i}} v_i - \frac{m_{b_i} g c_i}{h_{c_i}} \varphi_i + m_{b_i} \ddot{v}_i - m_{b_i} b_i \ddot{\varphi}_i = \mathbf{q}_{y_i} - \mathbf{m}'_{z_i}, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
& E_i J_{\omega_i} \varphi_i'''' - G_i I_i \varphi_i'' - 2H_0 e^2 \varphi_i'' + \frac{16k_c f e^2}{l^2} \mu_i \sum_{k=1}^n \mu_k \int_0^{l_k} \varphi_k dx_k - 2H_0 e^2 \eta_1 \varphi_i'' - 2H_0 e \eta_2 w_i'' + \\
& + m_{b_i} g (b_i - c_i + \frac{c_i^2}{h_{c_i}}) \varphi_i - \frac{m_{b_i} g c_i}{h_{c_i}} v_i + (j_{B_i} + m_{b_i} b_i^2 + \frac{2m_c e^2}{\cos \beta_{0i}}) \ddot{\varphi}_i - m_{b_i} b_i \ddot{v}_i = \mathbf{m}_{x_i} - \mathbf{m}'_{\omega_i}, \quad (2.49)
\end{aligned}$$

gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ . W nieliniowych składnikach równań (2.47) i (2.49) funkcje  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  pozostawiono w niejawniej postaci.

Równania (2.46) i (2.48) mają taką samą postać jak równania (2.34) i (2.36), odnoszące się do mostów z cięgnami o dużych zwisach. Równanie drgań osiowych (2.46), podobnie jak (2.34), jest niezależne od pozostałych, zatem drgania osiowe dźwigara usztywniającego mogą być rozpatrywane jako oddzielny problem, indywidualny dla każdego przęsła. Równanie (2.48) dotyczy poziomych drgań giętnych. Nie zawiera ono składników nieliniowych, jest jednak sprzężone statycznie i bezwładnościowo z równaniem drgań skrętnych (2.49). Sprzężenie statyczne wynika z po-prawek drugiego rzędu, które opisują charakterystyczny dla mostów wiszących efekt wahadłowy. Sprzężenie bezwładnościowe jest skutkiem rozsunęcia środka masy przekroju belki względem środka ścinania. W przypadku mostów z belką usztywniającą o przekroju bisymetrycznym sprzężenie to jest zdecydowanie słabsze, gdyż wynika jedynie z niewielkiego rozsunęcia środków masy przekroju sprężystego belki i przekroju z balastem. Równanie pionowych drgań giętnych (2.47) jest sprzężone z (2.49), zatem także z (2.48), ale tylko poprzez składnik nieliniowy. Wobec tego, w zadaniu liniowym pionowe drgania giętne mostu z cięgnami o małym zwisie mogą być analizowane niezależnie od drgań skrętnych i poziomych drgań giętnych, przy czym problem ten musi być rozpatrywany łącznie dla wszystkich przęseł z uwagi na sprzężenie spowodowane podwieszeniem. Układ równań (2.46)–(2.49) obejmuje przypadek szczególny drgań mostu jednoprzęsłowego z cienkościenną belką usztywniającą o przekroju otwartym, który był przedmiotem wcześniejszych badań autorki [18, 27, 76, 77].



## 2.5. Zastosowanie metody Lagrange’a–Ritza do dyskretyzacji ciągłego modelu obliczeniowego

### 2.5.1. Bilans energii

Drgania wieloprzęsłowego mostu wiszącego są opisane układem sprzężonych, nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Poszukiwane funkcje przemieszczeń są funkcjami dwóch zmiennych: zmiennej geometrycznej  $x$  i zmiennej czasowej  $t$ . W rozwiązywaniu tego typu zagadnień stosuje się metody przybliżone, których podstawą jest dyskretyzacja obiektu w przestrzeni geometrycznej. Metody przybliżone umożliwiają sprowadzenie problemu sformułowanego dla ciągłego układu dynamicznego do zadania określonego dla układu dyskretnego, którego ruch jest opisany równaniami różniczkowymi zwyczajnymi względem czasu [45, 75]. Efektywnym sposobem dyskretyzacji układu rozważanego w rozprawie jest globalna aproksymacja stanu przemieszczenia [75]. Dyskretyzacja jest tu dokonywana w sferze opisu matematycznego, a rozwiązanie można uzyskiwać z dowolną dokładnością, zależnie od rozmiaru bazy funkcji aproksymacyjnych. Odpowiedni dobór funkcji aproksymacyjnych pozwala na znaczne ograniczenie rozmiaru zadania w porównaniu z metodą elementów skończonych, w której stosuje się lokalną aproksymację stanu przemieszczenia.

Do rozwiązania zagadnienia drgań opisanego równaniami (2.34)–(2.40) lub (2.46)–(2.49) zastosujemy metodę przybliżoną Lagrange’a–Ritza [75, 111]. Idea metody wiąże zasady aproksymacji globalnej w sensie Ritza z opisem ruchu za pomocą równań Lagrange’a. Punktem wyjścia metody Lagrange’a–Ritza jest bilans energetyczny rozważanego układu dynamicznego. Podstawowe formuły bilansu energetycznego wyprowadzimy na podstawie układu równań (2.34)–(2.40), który dotyczy mostów z ciągami o dużym zwisie. Założymy, że kąt nachylenia skrajnych odcinków ciągów (odciągów) jest niewielki i pominiemy problem poprzecznych drgań odciągów, który ma w tym przypadku znaczenie lokalne.

W rozważanym zagadnieniu nie można wyznaczyć energii potencjalnej odkształcenia układu ze znanych wzorów, ponieważ nie wszystkie reakcje sprężyste ujawniające się w równaniach (2.34)–(2.40), mają jasno określony sens fizyczny. W celu omięcia trudności interpretacyjnych energię potencjalną obliczymy korzystając z zasady, że wariacja energii potencjalnej odkształcenia układu jest równa pracy statycznych sił biernych na odpowiednich wariacjach przemieszczeń, jeśli tylko siły brzegowe nie wykonują pracy [75, 111]. Wariacje przemieszczeń mają tu sens przemieszczeń wirtualnych, to znaczy zgodnych z warunkami kinematycznymi nałożonymi na ustrój. Statyczne siły bierne są natomiast reakcjami sprężystymi układu, które można łatwo określić na podstawie sformułowanych równań równowagi dynamicznej.

Rozważmy przykładowo energię potencjalną wynikającą z odkształceń podłużnych belki, stanowiącej  $i$ -te przęsło dźwigara usztywniającego. Wariacja energii, obliczona na podstawie równania (2.34) z uwzględnieniem warunków brzegowych, wynosi

$$\delta E_p = \int_0^{l_i} (-E_i A_i u_i'') \delta u_i dx_i = -E_i A_i \left( u_i' \delta u_i \Big|_0^{l_i} - \int_0^{l_i} u_i' \delta u_i' dx_i \right) = \delta \left( \frac{1}{2} E_i A_i \int_0^{l_i} u_i'^2 dx_i \right), \quad (2.50)$$

skąd wynika znany w tym przypadku wzór  $E_p = \frac{1}{2} E_i A_i \int_0^{l_i} u_i'^2 dx_i$ .

Stosując opisaną wyżej procedurę, wyprowadzono na podstawie równań (2.34)–(2.37) formułę określającą energię potencjalną odkształcenia wieloprzęsłowego dźwigara usztywniającego, podwieszonoego do dwóch wiotkich ciągów. Formuła ma następującą postać:

$$\begin{aligned} E_p^d = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i A_i \int_0^{l_i} u_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i J_{yi} \int_0^{l_i} w_i''^2 dx_i + \frac{1}{2} 2H_0 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} w_i'^2 dx_i + \\ & + \frac{1}{2} E_c A_c \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \cos^3 \beta_{0i} z_{ci}' (u_{c1}' + u_{c2}' + 2z_{ci}' w_i') w_i' dx_i + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\Delta H_1 + \Delta H_2) w_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} 2e \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\Delta H_2 - \Delta H_1) \phi_i' w_i' dx_i + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i J_{zi} \int_0^{l_i} v_i''^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{bi} g \int_0^{l_i} \frac{v_i^2}{h_{ci}} dx_i - \frac{1}{2} 2 \sum_{i=1}^n m_{bi} g c_i \int_0^{l_i} \frac{\phi_i v_i}{h_{ci}} dx_i + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i J_{\omega i} \int_0^{l_i} \phi_i''^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (G_i I_i + 2H_0 e^2) \int_0^{l_i} \phi_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{bi} g (b_i - c_i + \frac{c_i^2}{h_{ci}}) \int_0^{l_i} \phi_i^2 dx_i + \\ & + \frac{1}{2} E_c A_c e \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \cos^3 \beta_{0i} z_{ci}' (u_{c2}' - u_{c1}' + 2e z_{ci}' \phi_i') \phi_i' dx_i + \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\Delta H_1 + \Delta H_2) \phi_i'^2 dx_i, \end{aligned} \quad (2.51)$$

przy czym należy podstawić  $u_{cj}(x_i, t) = U_j(x_i + L_{i-1}, t)$ , zgodnie z definicją (2.41).

Całkowitą energię potencjalną układu otrzymamy po dodaniu energii związanej z poziomymi składowymi odkształceń sprężystych obu ciągów. Sumując energię odkształcenia poszczególnych odcinków wieloprzelotowego ciągu na mostu, otrzymamy według (2.39) i (2.40)<sub>2</sub> relację

$$\begin{aligned}
E_p^{c,j} = & -\frac{1}{2}H_0 \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} u_{c,j}'' u_{c,j} dx_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \Delta H_j' u_{c,j} dx_i - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} (\Delta H_j u_{c,j}')' u_{c,j} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_{bi} g}{2} \int_0^{l_i} \frac{u_{c,j}^2}{h_c - z_{ci}} dx_i, \quad (2.52)
\end{aligned}$$

gdzie  $j = 1, 2$ . Relacja ta dotyczy mostów wiszących z odciągami poziomymi, przypadek mostów z odciągami ukośnymi będzie rozważony odrębnie w punkcie 2.5.3.

Uwzględnienie w (2.52) zależności (2.41) oraz całkowanie przez części daje wynik

$$\begin{aligned}
E_p^{c,j} = & \frac{1}{2}H_0 \int_0^L U_j'^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \Delta H_j u_{c,j}' dx_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \Delta H_j u_{c,j} \Big|_0^{l_i} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \Delta H_j u_{c,j}'^2 dx_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \Delta H_j u_{c,j}' u_{c,j} \Big|_0^{l_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_{bi} g}{2} \int_0^{l_i} \frac{u_{c,j}^2}{h_c - z_{ci}} dx_i, \quad (2.53)
\end{aligned}$$

gdzie, jak poprzednio,  $u_{c,j}(x_i, t) = U_j(x_i + L_{i-1}, t)$ . Dla pierwszego składnika wzoru (2.52) wykorzystano warunki brzegowe  $U_j = 0$  dla  $x = 0$  i  $x = L$ . We wszystkich, poza skrajnymi, punktach podparcia cięgna wieloprzelotowego spełniony jest warunek zgodności przemieszczeń  $u_{c,j}(x_i, t) \Big|_{x_i=l_i} = u_{c,j}(x_{i+1}, t) \Big|_{x_{i+1}=0}$  oraz warunek równowagi poziomych składowych sił  $\Delta H_j(x_i, t) \Big|_{x_i=l_i} = \Delta H_j(x_{i+1}, t) \Big|_{x_{i+1}=0}$ . Wówczas otrzymujemy  $\sum_{i=0}^{n+1} \Delta H_j u_{c,j} \Big|_0^{l_i} = 0$ . Przy obliczaniu składnika nieliniowego formuły (2.53) można przyjąć uproszczenie:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \Delta H_j u_{c,j}' u_{c,j} \Big|_0^{l_i} = \sum_{i=0}^n [u_{c,j}'(x_i, t) \Big|_{x_i=l_i} - u_{c,j}'(x_{i+1}, t) \Big|_{x_{i+1}=0}] [\Delta H_j(x_i, t) u_{c,j}(x_i, t) \Big|_{x_i=l_i}] \cong 0,$$

które jest równoznaczne z przyjęciem założenia, że  $u_{c,j}'(x_i, t) \Big|_{x_i=l_i}$  różni się niewiele od  $u_{c,j}'(x_{i+1}, t) \Big|_{x_{i+1}=0}$ .

Ostatecznie, po podstawieniu (2.38) do składników liniowych wzoru (2.53), energię potencjalną odkształcenia obu cięgien można zapisać wzorem o postaci

$$\begin{aligned}
E_p^c = & \frac{1}{2}H_0 \int_0^L (U_1'^2 + U_2'^2) dx + \frac{1}{2} E_c A_c \int_0^{l_0} (u_{c1}'^2 + u_{c2}'^2) dx_0 + \frac{1}{2} E_c A_c \int_0^{l_{n+1}} (u_{c1}'^2 + u_{c2}'^2) dx_{n+1} + \\
& + \frac{1}{2} E_c A_c \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \cos^3 \beta_{0i} [u_{c1}'^2 + u_{c2}'^2 + z_{ci}' w_i'(u_{c1}' + u_{c2}') + e z_{ci}' \phi_i'(u_{c2}' - u_{c1}')] dx_i +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} (\Delta H_1 u_{c1}'^2 + \Delta H_2 u_{c2}'^2) dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_{bi} g}{2} \int_0^{l_i} \frac{u_{c1}^2 + u_{c2}^2}{h_C - z_{ci}} dx_i. \quad (2.54)$$

Energię kinetyczną układu wyznaczmy korzystając bezpośrednio ze znanego rozkładu mas i przemieszczeń układu [18, 75]

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} [m_{bi} (\dot{w}_i^2 + \dot{v}_{Bi}^2) + j_{Bi} \dot{\varphi}_{Bi}^2] dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} (\dot{u}_{c1}^2 + \dot{u}_{c2}^2) dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} (\dot{w}_{c1}^2 + \dot{w}_{c2}^2) dx_i. \quad (2.55)$$

Po podstawieniu do wzoru (2.55) zależności (2.25)–(2.27), określających transformację przemieszczeń środka ścinania przekroju dźwigara  $w_i, v_i, \varphi_i$  na przemieszczenia lokalne  $v_{Bi}, \varphi_{Bi}, w_{c1}, w_{c2}$ , otrzymamy

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (m_{bi} + \frac{2m_c}{\cos \beta_{0i}}) \dot{w}_i^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} m_{bi} \dot{v}_i^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (j_{Bi} + m_{bi} b_i^2 + \frac{2m_c e^2}{\cos \beta_{0i}}) \dot{\varphi}_i^2 dx_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} m_{bi} b_i (\dot{v}_i \dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i \dot{v}_i) dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \frac{m_c}{\cos \beta_{0i}} (\dot{u}_{c1}^2 + \dot{u}_{c2}^2) dx_i. \quad (2.56)$$

Pracę wirtualną zewnętrznych sił czynnych oblicza się według wzoru

$$L = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \mathbf{q}_{xi} u_i dx_i + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\mathbf{q}_{zi} + \mathbf{m}'_{yi}) w_i dx_i + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\mathbf{q}_{yi} - \mathbf{m}'_{zi}) v_i dx_i + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\mathbf{m}_{xi} - \mathbf{m}'_{oi}) \varphi_i dx_i. \quad (2.57)$$

### 2.5.2. Równania ruchu mostów z odciegami poziomymi i cięgnami o dużym zwisie

Stan przemieszczenia mostu jest opisany ciągłymi funkcjami:  $u_i(x_i, t)$ ,  $w_i(x_i, t)$ ,  $v_i(x_i, t)$ ,  $\varphi_i(x_i, t)$ ,  $U_1(x, t)$ ,  $U_2(x, t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Zgodnie z ideą metody Lagrange'a –Ritza, funkcje te aproksymuje się szeregami o postaci  $\sum_j q_j(t) f_j(x)$ . Funkcje aproksymacyjne  $f_j(x)$  muszą spełniać kinematyczne warunki brzegowe i muszą tworzyć układ zupełny [75]. W rozważanym przypadku te warunki spełnia aproksymacja sinusowa o następującej postaci:

$$u_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_u} \sin[(2j-1)\pi x_i / 2l_i] q_{u_i j}(t) = \mathbf{s}_{ui}^T \mathbf{q}_{ui}, \quad (2.58)$$

$$w_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_b} \sin(j\pi x_i / l_i) q_{w_i j}(t) = \mathbf{s}_i^T \mathbf{q}_{wi}, \quad (2.59)$$

$$v_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_b} \sin(j\pi x_i / l_i) q_{v_i j}(t) = \mathbf{s}_i^T \mathbf{q}_{vi}, \quad (2.60)$$

$$\varphi_i(x_i, t) = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{n_b} \sin(j\pi x_i / l_i) q_{\varphi_i j}(t) = \frac{1}{e} \mathbf{s}_i^T \mathbf{q}_{\varphi i} \quad (2.61)$$

oraz

$$U_1(x, t) = \sum_{j=1}^{n_c} \sin(j\pi x / L) q_{c_1 j}(t) = \mathbf{s}_c^T \mathbf{q}_1, \quad (2.62)$$

$$U_2(x, t) = \sum_{j=1}^{n_c} \sin(j\pi x / L) q_{c_2 j}(t) = \mathbf{s}_c^T \mathbf{q}_2,$$

gdzie  $L = l_0 + l_1 + \dots + l_n + l_{n+1}$ . Symbol  $( )^T$  oznacza operację transpozycji macierzowej,  $\mathbf{q}_{ui}$ ,  $\mathbf{q}_{wi}$ ,  $\mathbf{q}_{vi}$ ,  $\mathbf{q}_{\varphi i}$ ,  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  są wektorami współmiernych wymiarowo współrzędnych uogólnionych. Wzór (2.58) dotyczy belek z nieprzesuwną podporą lewą, natomiast gdy nieprzesuwna jest podpora prawa, wtedy należy zastąpić (2.58) relacją

$$u_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_u} \cos[(2j-1)\pi x_i / 2l_i] q_{u_i j}(t) = \mathbf{c}_{ui}^T \mathbf{q}_{ui}. \quad (2.63)$$

Po podstawieniu (2.58)–(2.63) do formuł bilansu energetycznego (2.51), (2.54), (2.56), (2.57) i po wykonaniu obliczeń otrzymuje się na podstawie równań Lagrange’a drugiego rodzaju macierzowe równanie ruchu rozpatrywanego obiektu, które po uwzględnieniu tłumienia ma postać

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{R}^N(\mathbf{q}), \quad (2.64)$$

gdzie  $\mathbf{q} = \text{col}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$  jest „superwektorem” współrzędnych uogólnionych, złożonym z bloków  $\mathbf{q}_u = \text{col}(\mathbf{q}_{u1}, \dots, \mathbf{q}_{un})$ ,  $\mathbf{q}_b = \text{col}(\mathbf{q}_{w1}, \mathbf{q}_{v1}, \mathbf{q}_{\varphi1}, \dots, \mathbf{q}_{wn}, \mathbf{q}_{vn}, \mathbf{q}_{\varphi n})$ ,  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ , przy czym bloki  $\mathbf{q}_u$  i  $\mathbf{q}_b$  składają się z podbloków zawierających współrzędne odpowiadające poszczególnym przęslom dźwigara. Symbol  $\mathbf{B}$  oznacza macierz bezwładności układu,  $\mathbf{K}$  jest macierzą sztywności, opisującą liniowy model obiektu. Obie te macierze są stałe, niezależne od czasu. Wektor  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q})$  zawiera nieliniową część reakcji sprężystych układu i wyraża wpływ efektów nieliniowych związanych ze zmianą kształtu cięgien, spowodowaną obciążeniem użytkowym. Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  zostanie szczegółowo zdefiniowana w punkcie 2.6. Struktura podziału blokowego wektora obciążeń uogólnionych  $\mathbf{F}(t)$  jest identyczna z wektorem  $\mathbf{q}$ . Wektor  $\mathbf{F}$  składa się z bloków zdefiniowanych następującymi wzorami:

$$\mathbf{F}_{ui} = \int_0^{l_i} \mathbf{q}_{xi} \mathbf{s}_{ui} dx_i, \quad \mathbf{F}_{wi} = \int_0^{l_i} (\mathbf{q}_{zi} + \mathbf{m}'_{yi}) \mathbf{s}_i dx_i, \quad \mathbf{F}_{vi} = \int_0^{l_i} (\mathbf{q}_{yi} - \mathbf{m}'_{zi}) \mathbf{s}_i dx_i, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{F}_{\varphi i} = \frac{1}{e} \int_0^{l_i} (\mathbf{m}_{xi} - \mathbf{m}'_{\omega i}) \mathbf{s}_i dx_i, \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}.$$

W przypadku belek z nieprzesuwną prawą podporą  $\mathbf{F}_{ui} = \int_0^{l_i} \mathbf{q}_{xi} \mathbf{c}_{ui} dx_i$ .

Macierze  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{K}$  są symetryczne i mają postać blokową o następującej strukturze:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{b1} & \mathbf{K}_{b2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{1b} & \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{2b} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{bb} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Bloki obu macierzy są podzielone na podbloki, zgodnie ze strukturą wektora współrzędnych uogólnionych:

$$\mathbf{K}_{uu} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{uu})_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & (\mathbf{K}_{uu})_n \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{bb})_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & (\mathbf{K}_{bb})_n \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{K}_{bb})_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ww})_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{vv})_i & (\mathbf{K}_{v\varphi})_i \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{\varphi v})_i & (\mathbf{K}_{\varphi\varphi})_i \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{K}_{1b} = \mathbf{K}_{b1}^T = [(\mathbf{K}_1)_i \quad \dots \quad (\mathbf{K}_1)_n], \quad (\mathbf{K}_1)_i = [(\mathbf{K}_{1w})_i \quad \mathbf{0} \quad (\mathbf{K}_{1\varphi})_i], \quad (2.69)$$

$$\mathbf{K}_{2b} = \mathbf{K}_{b2}^T = [(\mathbf{K}_2)_1 \quad \dots \quad (\mathbf{K}_2)_n], \quad (\mathbf{K}_2)_i = [(\mathbf{K}_{2w})_i \quad \mathbf{0} \quad (\mathbf{K}_{2\varphi})_i]. \quad (2.70)$$

Struktura bloków macierzowych  $\mathbf{B}_{uu}$  i  $\mathbf{B}_{bb}$  jest analogiczna do przedstawionej wzorami (2.67) i (2.68). Poniżej zestawiono wzory definiujące poszczególne bloki macierzy  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{B}$ :

$$(\mathbf{K}_{uu})_i = \frac{E_i A_i}{8l_i} \mathbf{d}_u^2, \quad (\mathbf{K}_{ww})_i = \frac{E_i J_{yi}}{2l_i^3} \mathbf{d}^4 + \frac{H_0}{l_i} \mathbf{d}^2 + \frac{2E_c A_c}{l_i} \mathbf{d} \mathbf{C}_{1i} \mathbf{d}, \quad (2.71)$$

$$(\mathbf{K}_{vv})_i = \frac{E_i J_{zi}}{2l_i^3} \mathbf{d}^4 + m_{bi} g \mathbf{C}_{2i}, \quad (\mathbf{K}_{v\varphi})_i = (\mathbf{K}_{\varphi v})_i = -\frac{m_{bi} g c_i}{e} \mathbf{C}_{2i}, \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{\varphi\varphi})_i &= \frac{E_i J_{\omega i}}{2e^2 l_i^3} \mathbf{d}^4 + \left( \frac{G_i I_i}{2e^2 l_i} + \frac{H_0}{l_i} \right) \mathbf{d}^2 + \frac{m_{bi} g l_i (b_i - c_i)}{2e^2} \mathbf{I} + \\ &+ \frac{m_{bi} g c_i^2}{e^2} \mathbf{C}_{2i} + \frac{2E_c A_c}{l_i} \mathbf{d} \mathbf{C}_{1i} \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$(\mathbf{K}_{1w})_i = (\mathbf{K}_{2w})_i = \frac{E_c A_c}{L} \mathbf{d}_c \mathbf{C}_{3i} \mathbf{d}, \quad (\mathbf{K}_{1\varphi})_i = -(\mathbf{K}_{2\varphi})_i = -\frac{E_c A_c}{L} \mathbf{d}_c \mathbf{C}_{3i} \mathbf{d}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{22} = \frac{H_0}{2L} \mathbf{d}_c^2 + \frac{E_c A_c}{L^2} \sum_{i=1}^n l_i \mathbf{d}_c \mathbf{C}_{4i} \mathbf{d}_c + \sum_{i=1}^n \frac{m_{bi} g}{2} \mathbf{C}_{5i} + \frac{E_c A_c}{2L} \mathbf{d}_c \mathbf{C}_c \mathbf{d}_c, \quad (2.75)$$

$$(\mathbf{B}_{uu})_i = \frac{1}{2} m_{bi} l_i \mathbf{I}_u, \quad (\mathbf{B}_{ww})_i = \frac{1}{2} m_{bi} l_i \mathbf{I} + 2m_c l_i \mathbf{C}_{6i}, \quad (\mathbf{B}_{vv})_i = \frac{1}{2} m_{bi} l_i \mathbf{I}, \quad (2.76)$$

$$(\mathbf{B}_{\varphi\varphi})_i = \frac{(j_{Bi} + m_{bi}b_i^2)l_i}{2e^2} \mathbf{I} + 2m_c l_i C_{6i}, \quad (\mathbf{B}_{v\varphi})_i = (\mathbf{B}_{\varphi v})_i = -\frac{m_{bi}b_i l_i}{2e} \mathbf{I}, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = m_c \sum_{i=1}^n l_i C_{7i} + \frac{m_c L}{2} C_s. \quad (2.78)$$

Symbole  $\mathbf{d}$  oraz  $\mathbf{I}$  oznaczają macierze diagonalne o elementach:

$$(\mathbf{d}_u)_j = (2j-1)\pi, \quad j=1, \dots, n_u, \quad (\mathbf{d})_j = j\pi, \quad j=1, \dots, n_b, \quad (2.79)$$

$$(\mathbf{d}_c)_j = j\pi, \quad j=1, \dots, n_c, \quad (\mathbf{I}_u)_j = 1, \quad j=1, \dots, n_u, \quad (\mathbf{I})_j = 1, \quad j=1, \dots, n_b.$$

Elementy macierzy  $\mathbf{C}_c$ ,  $\mathbf{C}_s$  oblicza się według wzorów:

$$(\mathbf{C}_c)_{jk} = \frac{l_0 + l_{n+1}}{L} + \frac{1}{(j+k)\pi} (\sin[(j+k)\pi l_0 / L] - \sin[(j+k)\pi L_n / L]), \quad \text{gdzie } j = k,$$

$$(\mathbf{C}_c)_{jk} = \frac{1}{(j-k)\pi} (\sin[(j-k)\pi l_0 / L] - \sin[(j-k)\pi L_n / L]) + \frac{1}{(j+k)\pi} (\sin[(j+k)\pi l_0 / L] - \sin[(j+k)\pi L_n / L]), \quad \text{gdzie } j \neq k,$$

$$(\mathbf{C}_s)_{jk} = \frac{l_0 + l_{n+1}}{L} - \frac{1}{(j+k)\pi} (\sin[(j+k)\pi l_0 / L] - \sin[(j+k)\pi L_n / L]), \quad \text{gdzie } j = k,$$

$$(\mathbf{C}_s)_{jk} = \frac{1}{(j-k)\pi} (\sin[(j-k)\pi l_0 / L] - \sin[(j-k)\pi L_n / L]) - \frac{1}{(j+k)\pi} (\sin[(j+k)\pi l_0 / L] - \sin[(j+k)\pi L_n / L]), \quad \text{gdzie } j \neq k,$$

gdzie  $j, k = 1, \dots, n_c$ ,  $L_n = l_0 + l_1 + \dots + l_n$ . Elementy współczynników macierzowych  $\mathbf{C}_{1i}, \dots, \mathbf{C}_{7i}$  są zdefiniowane formułami całkowymi o postaci:

$$(\mathbf{C}_{1i})_{jk} = \int_0^1 f_{1i}(\xi_i) \cos(j\pi \xi_i) \cos(k\pi \xi_i) d\xi_i, \quad j, k = 1, \dots, n_b,$$

$$f_{1i}(\xi_i) = z_{ci}^2 / \sqrt{(1 + z_{ci}^2)^3}, \quad z'_{ci} = (h_{i+1} - h_i) / l_i + (4f\mu_i l_i / l^2)(1 - 2\xi_i), \quad \xi_i = x_i / l_i,$$



$$(\mathbf{C}_{2i})_{jk} = \int_0^1 f_{2i}(\xi_i) \sin(j\pi \xi_i) \sin(k\pi \xi_i) d\xi_i, \quad j, k = 1, \dots, n_b,$$

$$f_{2i}(\xi_i) = l_i h_{ci}^{-1} = l_i / [h_C - h_i - (h_{i+1} - h_i) \xi_i],$$

$$(\mathbf{C}_{3i})_{jk} = \int_0^1 f_{3i}(\xi_i) \cos[j\pi(l_i \xi_i + L_{i-1}) / L] \cos[k\pi \xi_i] d\xi_i, \quad j = 1, \dots, n_c, \quad k = 1, \dots, n_b,$$

$$f_{3i}(\xi_i) = z'_{ci} / \sqrt{(1 + z'^2_{ci})^3},$$

$$(\mathbf{C}_{4i})_{jk} = \int_0^1 f_{4i}(\xi_i) \cos[j\pi(l_i \xi_i + L_{i-1}) / L] \cos[k\pi(l_i \xi_i + L_{i-1}) / L] d\xi_i, \quad j, k = 1, \dots, n_c,$$

$$f_{4i}(\xi_i) = 1 / \sqrt{(1 + z'^2_{ci})^3},$$

$$(\mathbf{C}_{5i})_{jk} = \int_0^1 f_{5i}(\xi_i) \sin[j\pi(l_i \xi_i + L_{i-1}) / L] \sin[k\pi(l_i \xi_i + L_{i-1}) / L] d\xi_i, \quad j, k = 1, \dots, n_c,$$

$$f_{5i}(\xi_i) = l_i (h_C - z_{ci})^{-1} = l_i / [h_C - h_i - (h_{i+1} - h_i) \xi_i - (4f\mu_i l_i^2 / l^2)(\xi_i - \xi_i^2)],$$

$$(\mathbf{C}_{6i})_{jk} = \int_0^1 f_{6i}(\xi_i) \sin(j\pi \xi_i) \sin(k\pi \xi_i) d\xi_i, \quad j, k = 1, \dots, n_b,$$

$$f_{6i}(\xi_i) = \sqrt{(1 + z'^2_{ci})},$$

$$(\mathbf{C}_{7i})_{jk} = \int_0^1 f_{6i}(\xi_i) \sin[j\pi(l_i \xi_i + L_{i-1}) / L] \sin[k\pi(l_i \xi_i + L_{i-1}) / L] d\xi_i, \quad j, k = 1, \dots, n_c.$$

Można je wyznaczyć numerycznie stosując znane metody numerycznego obliczania całek oznaczonych (Legras [79]). W szczególnym przypadku mostu z pylonami o jednakowych wysokościach, współczynnik macierzowy  $\mathbf{C}_{2i}$  ma dla pręseł środkowych postać analityczną i wynosi  $\mathbf{C}_{2i} = (l_i / 2h_C) \mathbf{I}$ .

W celu wyznaczenia wektora nieliniowych reakcji sprężystych układu  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q})$  wyodrębniono ze wzorów (2.51) i (2.54) formułę określającą część nieliniową energii potencjalnej odkształcenia układu

$$\begin{aligned} E_p^N &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\Delta H_1 + \Delta H_2) w_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} 2e \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\Delta H_2 - \Delta H_1) \varphi_i' w_i' dx_i + \\ &+ \frac{1}{2} e^2 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\Delta H_1 + \Delta H_2) \varphi_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} (\Delta H_1 u_{c1}'^2 + \Delta H_2 u_{c2}'^2) dx_i. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Dynamiczne przyrosty naciągu cięgien  $\Delta H_1$  i  $\Delta H_2$  są określone wzorami (2.38). Po podstawieniu (2.59)–(2.62) do (2.80) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
E_p^N(\mathbf{q}) = & \frac{1}{2} \frac{E_c A_c}{L} \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} \int_0^1 f_{4i} [(\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2^T) \mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} + 2(\mathbf{q}_2^T - \mathbf{q}_1^T) \mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_{\varphi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} + \\
& + (\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2^T) \mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_{\varphi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{\varphi i}] d\xi_i + \frac{1}{2} \frac{E_c A_c}{L^3} \sum_{i=0}^{n+1} l_i \int_0^1 f_{4i} (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_1^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_2^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2) d\xi_i + \\
& + \frac{1}{2} \frac{E_c A_c}{L^2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_{3i} [\mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{a}_i (\mathbf{q}_1^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2) + \mathbf{q}_{\varphi i}^T \mathbf{a}_i (\mathbf{q}_2^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1)] d\xi_i + \\
& + \frac{1}{2} E_c A_c \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i^2} \int_0^1 f_{3i} [2 \mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{a}_i (\mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} + 3 \mathbf{q}_{\varphi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{\varphi i})] d\xi_i, \quad (2.81)
\end{aligned}$$

gdzie  $f_{4i}(\xi_i) = 1$ , gdy  $i = 0$  lub  $i = n + 1$  oraz

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_i = \mathbf{d} \mathbf{c}_i, \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{d} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{d}, \quad \mathbf{c}_i = [\cos \pi \xi_i, \cos 2\pi \xi_i, \dots, \cos n_i \pi \xi_i]^T, \\
\mathbf{a}_{ci} = \mathbf{d}_c \mathbf{c}_{ci}, \quad \mathbf{A}_{ci} = \mathbf{d}_c \mathbf{c}_{ci} \mathbf{c}_{ci}^T \mathbf{d}_c, \quad (2.82)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_{ci} = [\cos[\pi(l_i \xi_i + L_{i-1})/L], \cos[2\pi(l_i \xi_i + L_{i-1})/L], \dots, \cos[n_c \pi(l_i \xi_i + L_{i-1})/L]]^T.$$

Gradient pola skalarowego  $E_p^N(\mathbf{q})$  jest poszukiwanym wektorem nieliniowych reakcji sprężystych układu:  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q}) = \text{grad}_{\mathbf{q}}(E_p^N)$ . Obliczenie wektora gradientu pola skalarowego określonego formułą (2.81) jest dość trudne, ponieważ formułę tę wyraża się poprzez formy współrzędnych uogólnionych wyższego rzędu niż liniowe czy kwadratowe, dla których sposób obliczania gradientu jest powszechnie znany. Ogólne reguły obliczania wektora gradientu wyższych form, z uwzględnieniem blokowej struktury wektora współrzędnych uogólnionych, przedstawiono w Dodatku na końcu rozprawy. Zastosowanie tych reguł do obliczenia wektora nieliniowych reakcji sprężystych układu  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q})$  daje następujący rezultat:

$$\mathbf{R}^N(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_b^N \\ \mathbf{R}_1^N \\ \mathbf{R}_2^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_b^N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{b1}^N \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{bn}^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{bi}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wi}^N \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\varphi i}^N \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{wi}^N &= \frac{E_c A_c}{L} \frac{1}{l_i} \int_0^1 f_{4i} \mathbf{A}_i [\mathbf{q}_{wi} (\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2^T) + \mathbf{q}_{\phi i} (\mathbf{q}_2^T - \mathbf{q}_1^T)] \mathbf{a}_{ci} d\xi_i + \\
&\quad + \frac{E_c A_c}{2L^2} \int_0^1 f_{3i} \mathbf{a}_i (\mathbf{q}_1^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2) d\xi_i + \\
&\quad + \frac{E_c A_c}{l_i^2} \int_0^1 f_{3i} [\mathbf{a}_i (\mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} + 3 \mathbf{q}_{\phi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{\phi i}) + 2 \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} \mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{a}_i] d\xi_i, \quad (2.84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\phi i}^N &= \frac{E_c A_c}{L} \frac{1}{l_i} \int_0^1 f_{4i} \mathbf{A}_i [\mathbf{q}_{wi} (\mathbf{q}_2^T - \mathbf{q}_1^T) + \mathbf{q}_{\phi i} (\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2^T)] \mathbf{a}_{ci} d\xi_i + \\
&\quad + \frac{E_c A_c}{2L^2} \int_0^1 f_{3i} \mathbf{a}_i (\mathbf{q}_2^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1) d\xi_i + \frac{6E_c A_c}{l_i^2} \int_0^1 f_{3i} \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{\phi i} \mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{a}_i d\xi_i, \quad (2.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1^N &= \frac{E_c A_c}{2L} \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} \int_0^1 f_{4i} \mathbf{a}_{ci} (\mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} - 2 \mathbf{q}_{\phi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} + \mathbf{q}_{\phi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{\phi i}) d\xi_i + \\
&\quad + \frac{E_c A_c}{2L^3} \sum_{i=0}^{n+1} l_i \int_0^1 f_{4i} (\mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_1^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1 + 2 \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_{ci}) d\xi_i + \\
&\quad + \frac{E_c A_c}{L^2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_{3i} [\mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_{wi}^T - \mathbf{q}_{\phi i}^T) \mathbf{a}_i] d\xi_i, \quad (2.86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2^N &= \frac{E_c A_c}{2L} \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} \int_0^1 f_{4i} \mathbf{a}_{ci} (\mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} + 2 \mathbf{q}_{\phi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{wi} + \mathbf{q}_{\phi i}^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_{\phi i}) d\xi_i + \\
&\quad + \frac{E_c A_c}{2L^3} \sum_{i=0}^{n+1} l_i \int_0^1 f_{4i} (\mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_2^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2 + 2 \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_{ci}) d\xi_i + \\
&\quad + \frac{E_c A_c}{L^2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_{3i} [\mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_2 (\mathbf{q}_{wi}^T + \mathbf{q}_{\phi i}^T) \mathbf{a}_i] d\xi_i. \quad (2.87)
\end{aligned}$$

Wyprowadzone w postaci macierzowej równanie ruchu (2.64) dotyczy mostów wieloprzęsłowych, w których odcigi mogą być traktowane w przybliżeniu jako poziome. Przypomnijmy, że odcigami nazwaliśmy skrajne odcinki ciągłych cięgien, które nie są bezpośrednio połączone z dźwigarem usztywniającym za pomocą wieszaków. Założenie, że odcigi są w przybliżeniu poziome pozwoliło pominąć w rozważaniach problem pionowych drgań odcigów jako niezależny, o charakterze lokalnym.

Zapis równań (2.64) umożliwia automatyczne przejście do opisu drgań mostów, w których nie ma technicznej potrzeby wyróżniania odciągów. W takim przypadku wystarczy zadeklarować długość odciągów jako zerową.

### 2.5.3. Równania ruchu mostów z odciągami ukośnymi i cięgnami o dużym zwisie

We wszystkich jednoprzęsłowych mostach wiszących i w niektórych mostach wieloprzęsłowych odciągi są ukośne. Wówczas nie można pominąć pionowej składowej drgań odciągów, ponieważ jest ona sprzężona ze składową poziomą, mierzona w płaszczyźnie zawieszenia (wzory (2.14)). Aby wyprowadzić równania ruchu mostów z odciągami ukośnymi, należy skorygować formułę wyjściową (2.52) opisującą energię sprężystą odkształcenia cięgna i formułę wynikową (2.54) dotyczącą obu cięgien.

Energia potencjalna  $j$ -tego cięgna, wyliczona na podstawie równań (2.14) z uwzględnieniem pionowych przemieszczeń odciągów  $w_{c_j}(x_0, t)$  i  $w_{c_j}(x_{n+1}, t)$ , wynosi

$$\begin{aligned}
E_p^{c_j} = & -\frac{1}{2} H_0 \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} u_{c_j}'' u_{c_j} dx_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} \Delta H_j' u_{c_j} dx_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} (\Delta H_j u_{c_j}')' u_{c_j} dx_i + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_{bi} g}{2} \int_0^{l_i} \frac{u_{c_j}^2}{h_C - z_{ci}} dx_i - \frac{1}{2} H_0 \left[ \int_0^{l_0} w_{c_j}'' w_{c_j} dx_0 + \int_0^{l_{n+1}} w_{c_j}'' w_{c_j} dx_{n+1} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \left[ \int_0^{l_0} (\Delta H_j z_{c0}')' w_{c_j} dx_0 + \int_0^{l_{n+1}} (\Delta H_j z_{cn+1}')' w_{c_j} dx_{n+1} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \left[ \int_0^{l_0} (\Delta H_j w_{c_j}')' w_{c_j} dx_0 + \int_0^{l_{n+1}} (\Delta H_j w_{c_j}')' w_{c_j} dx_{n+1} \right], \quad (2.88)
\end{aligned}$$

gdzie  $j = 1, 2$ . Formułę wynikową wyznacza się jak poprzednio, tj. korzystając z całkowania przez części z uwzględnieniem warunków brzegowych. Wynik ma postać

$$\begin{aligned}
E_p^c = & \frac{1}{2} H_0 \int_0^L (U_1'^2 + U_2'^2) dx + \frac{1}{2} E_c A_c \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^{l_i} \cos^3 \beta_{0i} (u_{c1}'^2 + u_{c2}'^2) dx_i + \\
& + \frac{1}{2} E_c A_c \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \cos^3 \beta_{0i} z_{ci}' [w_i'(u_{c1}' + u_{c2}') + e \varphi_i'(u_{c2}' - u_{c1}')] dx_i + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{m_{bi} g}{2} \int_0^{l_i} \frac{u_{c1}^2 + u_{c2}^2}{h_C - z_{ci}} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n+1} \int_0^{l_i} (\Delta H_1 u_{c1}'^2 + \Delta H_2 u_{c2}'^2) dx_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(H_0 + E_c A_c b_0^3 z_0^2) \int_0^{l_0} (w'_{c1}{}^2 + w'_{c2}{}^2) dx_0 + \frac{1}{2}(H_0 + E_c A_c b_{n+1}^3 z_{n+1}^2) \int_0^{l_{n+1}} (w'_{c1}{}^2 + w'_{c2}{}^2) dx_{n+1} + \\
& + \frac{1}{2} 2E_c A_c \left[ b_0^3 z_0 \int_0^{l_0} (w'_{c1} u'_{c1} + w'_{c2} u'_{c2}) dx_0 + b_{n+1}^3 z_{n+1} \int_0^{l_{n+1}} (w'_{c1} u'_{c1} + w'_{c2} u'_{c2}) dx_{n+1} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \int_0^{l_0} (\Delta H_1 w'_{c1}{}^2 + \Delta H_2 w'_{c2}{}^2) dx_0 + \int_0^{l_{n+1}} (\Delta H_1 w'_{c1}{}^2 + \Delta H_2 w'_{c2}{}^2) dx_{n+1} \right], \quad (2.89)
\end{aligned}$$

przy czym uwzględniono, że w warunkach statycznych odciągi są prostoliniowe, zatem  $z'_{ci} = (h_{i+1} - h_i) / l_i = \text{const}$  i  $\cos \beta_{0i} = \text{const}$ , gdy  $i = 0$  oraz  $i = n + 1$ . Stałe te oznaczono w wyrażeniu (2.89) symbolami  $z_0 = z'_{c0}$ ,  $b_0 = \cos \beta_{0,0}$  oraz  $z_{n+1} = z'_{c,n+1}$ ,  $b_{n+1} = \cos \beta_{0,n+1}$ . Relacja (2.89) w połączeniu z (2.51) określa całkowitą energię potencjalną układu.

W bilansie energii układu należy konsekwentnie uwzględnić dodatkową energię kinetyczną, wynikającą z pionowych składowych ruchu odciągów

$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \frac{m_c}{\cos \beta_{0,0}} (\dot{w}_{c1}^2 + \dot{w}_{c2}^2) dx_0 + \frac{1}{2} \int_0^{l_{n+1}} \frac{m_c}{\cos \beta_{0,n+1}} (\dot{w}_{c1}^2 + \dot{w}_{c2}^2) dx_{n+1} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{m_c}{b_0} \int_0^{l_0} (\dot{w}_{c1}^2 + \dot{w}_{c2}^2) dx_0 + \frac{1}{2} \frac{m_c}{b_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} (\dot{w}_{c1}^2 + \dot{w}_{c2}^2) dx_{n+1}. \quad (2.90)
\end{aligned}$$

Całkowita energia kinetyczna jest sumą energii określonych wzorami (2.56) i (2.90).

Uzyskane wyniki bilansu energetycznego układu są podstawą wyprowadzenia macierzowego równania ruchu za pomocą metody Lagrange'a–Ritza. Funkcje opisujące stan przemieszczenia mostu aproksymuje się jak poprzednio szeregami o postaci (2.58)–(2.62). Dodatkowo trzeba określić kinetycznie dopuszczalną aproksymację pionowych przemieszczeń odciągów. Przyjęto następującą aproksymację sinusową:

$$w_{c,j}(x_0, t) = \sum_{k=1}^{n_o} \sin(k\pi x_0 / l_0) q_{j_0,k}(t) = \mathbf{s}_o^T \mathbf{q}_{j_0}, \quad (2.91)$$

$$w_{c,j}(x_{n+1}, t) = \sum_{k=1}^{n_o} \sin(k\pi x_{n+1} / l_{n+1}) q_{j_{n+1},k}(t) = \mathbf{s}_o^T \mathbf{q}_{j_{n+1}},$$

gdzie  $j = 1, 2$  (numer ciągną). Po wykonaniu stosownych obliczeń i uwzględnieniu

tłumienia otrzymuje się macierzowe równanie ruchu wieloprzęsłowego mostu wiszącego z ukośnymi odciągami, o postaci

$$\widehat{\mathbf{B}}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \widehat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \widehat{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \widehat{\mathbf{F}}(t) - \widehat{\mathbf{R}}^N(\mathbf{q}). \quad (2.92)$$

W celu uproszczenia opisu bloków, występujących we współczynnikach macierzowych równania (2.92), wprowadzimy indeksy  $l$  i  $p$ , oznaczające odpowiednio lewy i prawy odciąg. Oznaczenia  $i = 0, n + 1$  oraz  $i = l, p$  należy w dalszym ciągu uważać za równoznaczne. Równanie (2.92) jest zapisane w bazie współrzędnych uogólnionych  $\widehat{\mathbf{q}} = \text{col}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{1l}, \mathbf{q}_{1p}, \mathbf{q}_{2l}, \mathbf{q}_{2p})$ , poszerzonej w porównaniu z poprzednią bazą  $\mathbf{q} = \text{col}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$  o bloki współrzędnych opisujących pionowe drgania odciągów (por. z równaniem (2.64)). Macierze  $\widehat{\mathbf{B}}$  i  $\widehat{\mathbf{K}}$ , wektor uogólnionych sił czynnych  $\widehat{\mathbf{F}}$  i wektor nieliniowych reakcji sprężystych układu  $\widehat{\mathbf{R}}^N$  mają postać blokową o strukturze:

$$\widehat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{b1} & \mathbf{K}_{b2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{1b} & \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{1l} & \mathbf{K}_{1p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{2b} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{2l} & \mathbf{K}_{2p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{l1} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{l2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{p2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

$$\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{bb} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{ll} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{pp} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{ll} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{pp} \end{bmatrix}, \quad (2.94)$$

$$\widehat{\mathbf{F}}(t) = \text{col}(\mathbf{F}_u, \mathbf{F}_b, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad (2.95)$$

$$\widehat{\mathbf{R}}^N(\widehat{\mathbf{q}}) = \text{col}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_b^N, \mathbf{R}_1^N + \Delta\mathbf{R}_1^N, \mathbf{R}_2^N + \Delta\mathbf{R}_2^N, \mathbf{R}_{1l}^N, \mathbf{R}_{1p}^N, \mathbf{R}_{2l}^N, \mathbf{R}_{2p}^N). \quad (2.96)$$

Sformułowane w punkcie 2.5.2 definicje bloków macierzowych  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{bb}$ ,  $\mathbf{K}_{b1}$ ,  $\mathbf{K}_{b2}$ ,  $\mathbf{K}_{1b}$ ,  $\mathbf{K}_{2b}$ ,  $\mathbf{B}_{uu}$ ,  $\mathbf{B}_{bb}$ ,  $\mathbf{F}_u$ ,  $\mathbf{F}_b$  pozostają bez zmiany (wzory (2.65)–(2.74), (2.76), (2.77)), nieco inną postać mają natomiast definicje bloków opisujących sztywność i bezwładność cięgien. Nowa postać tych bloków jest następująca:

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{22} = \frac{H_0}{2L} \mathbf{d}_c^2 + \frac{E_c A_c}{L^2} \sum_{i=0}^{n+1} l_i \mathbf{d}_c \mathbf{C}_{4i} \mathbf{d}_c + \sum_{i=1}^n \frac{m_{bi} g}{2} \mathbf{C}_{5i}, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = m_c \sum_{i=0}^{n+1} l_i \mathbf{C}_{7i}.$$

Podczas obliczania elementów macierzy  $\mathbf{C}_{4i}$ ,  $\mathbf{C}_{7i}$  dla  $i = 0$  oraz  $i = n + 1$  należy podstawić  $f_{4i}(\xi_i) = b_i^3$  oraz  $f_{6i}(\xi_i) = b_i^{-1}$ . Dodatkowe bloki macierzy sztywności i bezwładności, związane z pionowymi drganiami odcinków, mają postać:

$$\mathbf{B}_{1l} = \frac{m_c l_0}{2b_0} \mathbf{I}_o, \quad \mathbf{B}_{pp} = \frac{m_c l_{n+1}}{2b_{n+1}} \mathbf{I}_o, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{K}_{1l} = \frac{(H_0 + E_c A_c b_0^3 z_0^2)}{2l_0} \mathbf{d}_o^2, \quad \mathbf{K}_{pp} = \frac{(H_0 + E_c A_c b_{n+1}^3 z_{n+1}^2)}{2l_{n+1}} \mathbf{d}_o^2, \quad (2.99)$$

$$\mathbf{K}_{1l} = \mathbf{K}_{l1}^T = \mathbf{K}_{2l} = \mathbf{K}_{l2}^T = \frac{E_c A_c}{L} \mathbf{d}_c \mathbf{C}_{3,0} \mathbf{d}_o, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{K}_{1p} = \mathbf{K}_{p1}^T = \mathbf{K}_{2p} = \mathbf{K}_{p2}^T = \frac{E_c A_c}{L} \mathbf{d}_c \mathbf{C}_{3,n+1} \mathbf{d}_o, \quad (2.101)$$

gdzie  $(\mathbf{d}_o)_j = j\pi$ ,  $(\mathbf{I}_o)_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, n_o$ . Jeśli  $i = 0$  lub  $i = n + 1$ , to elementy ma-

cierzy  $\mathbf{C}_{3i}$  oblicza się ze wzoru  $(\mathbf{C}_{3i})_{jk} = b_i^3 z_i \int_0^1 \cos[j\pi(l_i \xi_i + L_{i-1})/L] \cos(k\pi \xi_i) d\xi_i$ ,

gdzie  $j = 1, \dots, n_c$ ,  $k = 1, \dots, n_o$ .

Wektor nieliniowych reakcji sprężystych układu wyznacza się, jak poprzednio, jako gradient nieliniowych składników energii potencjalnej odkształcenia układu:

$\widehat{\mathbf{R}}^N(\bar{\mathbf{q}}) = \text{grad}_{\bar{\mathbf{q}}}(E_p^N)$ . W rozważanym przypadku należy uzupełnić formułę (2.80), określającą część nieliniową energii potencjalnej odkształcenia układu  $E_p^N$ , o dodatkowe składniki nieliniowe  $\Delta E_p^N$ , wyodrębnione z relacji (2.89)

$$\Delta E_p^N = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} (\Delta H_1 w_{c1}'^2 + \Delta H_2 w_{c2}'^2) dx_0 + \frac{1}{2} \int_0^{l_{n+1}} (\Delta H_1 w_{c1}'^2 + \Delta H_2 w_{c2}'^2) dx_{n+1}. \quad (2.102)$$

Po podstawieniu (2.91) do (2.102) i po zweryfikowaniu relacji (2.80) i (2.81) otrzymuje się poprawki uzupełniające formułę (2.81), definiującą pole skalarowe  $E_p^N(\bar{\mathbf{q}})$ . Poprawki te są zapisane wzorem

$$\begin{aligned} \Delta E_{pi}^N(\bar{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \frac{E_c A_c}{L^2} z_i b_i^3 \int_0^1 (\mathbf{q}_{1i}^T \mathbf{a}_{oi} \mathbf{q}_{1i}^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_{1i} + \mathbf{q}_{2i}^T \mathbf{a}_{oi} \mathbf{q}_{2i}^T \mathbf{A}_{ci} \mathbf{q}_{2i}) d\xi_i + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{E_c A_c}{L} \frac{b_i^3}{l_i} \int_0^1 (\mathbf{q}_{1i}^T \mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_{1i}^T \mathbf{A}_{oi} \mathbf{q}_{1i} + \mathbf{q}_{2i}^T \mathbf{a}_{ci} \mathbf{q}_{2i}^T \mathbf{A}_{oi} \mathbf{q}_{2i}) d\xi_i + \\ &+ \frac{1}{2} E_c A_c \frac{z_i b_i^3}{l_i^2} \int_0^1 (\mathbf{q}_{1i}^T \mathbf{a}_{oi} \mathbf{q}_{1i}^T \mathbf{A}_{oi} \mathbf{q}_{1i} + \mathbf{q}_{2i}^T \mathbf{a}_{oi} \mathbf{q}_{2i}^T \mathbf{A}_{oi} \mathbf{q}_{2i}) d\xi_i, \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{a}_{oi} = \mathbf{d}_o \mathbf{c}_{oi}, \quad \mathbf{A}_{oi} = \mathbf{d}_o \mathbf{c}_{oi} \mathbf{c}_{oi}^T \mathbf{d}_o, \quad \mathbf{c}_{oi} = [\cos \pi \xi_i, \cos 2\pi \xi_i, \dots, \cos n_o \pi \xi_i]^T, \quad (2.104)$$

gdzie  $i = 0, i = n + 1$ . W formule podstawowej (2.81) należy podstawić  $f_{4i}(\xi_i) = b_i^3$ , gdy  $i = 0$  lub  $i = n + 1$ .

Obliczenie  $\text{grad}_{\bar{\mathbf{q}}}(\Delta E_{pi}^N)$  daje następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R}_j^N &= \frac{E_c A_c}{L^2} z_0 b_0^3 \int_0^1 \mathbf{q}_{jl}^T \mathbf{a}_{o0} \mathbf{A}_{c0} \mathbf{q}_j d\xi_0 + \frac{E_c A_c}{L^2} z_{n+1} b_{n+1}^3 \int_0^1 \mathbf{q}_{jp}^T \mathbf{a}_{on+1} \mathbf{A}_{cn+1} \mathbf{q}_j d\xi_{n+1} + \\ &+ \frac{E_c A_c}{2L} \frac{b_0^3}{l_0} \int_0^1 \mathbf{a}_{c0} \mathbf{q}_{jl}^T \mathbf{A}_{o0} \mathbf{q}_{jl} d\xi_0 + \frac{E_c A_c}{2L} \frac{b_{n+1}^3}{l_{n+1}} \int_0^1 \mathbf{a}_{cn+1} \mathbf{q}_{jp}^T \mathbf{A}_{on+1} \mathbf{q}_{jp} d\xi_{n+1}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\mathbf{R}_{jl}^N = \frac{E_c A_c}{2L^2} z_0 b_0^3 \int_0^1 \mathbf{a}_{o0} \mathbf{q}_j^T \mathbf{A}_{c0} \mathbf{q}_j d\xi_0 + \frac{E_c A_c}{L} \frac{b_0^3}{l_0} \int_0^1 \mathbf{A}_{o0} \mathbf{q}_{jl} \mathbf{q}_j^T \mathbf{a}_{c0} d\xi_0 +$$



$$+ \frac{E_c A_c}{2} \frac{z_0 b_0^3}{l_0^2} \int_0^1 (\mathbf{a}_{o0} \mathbf{q}_{jl} \mathbf{A}_{o0} \mathbf{q}_{jl}^T + 2 \mathbf{A}_{o0} \mathbf{q}_{jl} \mathbf{q}_{jl}^T \mathbf{a}_{o0}) d\xi_0, \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{jp}^N = & \frac{E_c A_c}{2L^2} z_{n+1} b_{n+1}^3 \int_0^1 \mathbf{a}_{on+1} \mathbf{q}_j^T \mathbf{A}_{cn+1} \mathbf{q}_j d\xi_{n+1} + \frac{E_c A_c}{L} \frac{b_{n+1}^3}{l_{n+1}} \int_0^1 \mathbf{A}_{on+1} \mathbf{q}_{jp} \mathbf{q}_j^T \mathbf{a}_{cn+1} d\xi_{n+1} + \\ & + \frac{E_c A_c}{2} \frac{z_{n+1} b_{n+1}^3}{l_{n+1}^2} \int_0^1 (\mathbf{a}_{on+1} \mathbf{q}_{jp} \mathbf{A}_{on+1} \mathbf{q}_{jp}^T + 2 \mathbf{A}_{on+1} \mathbf{q}_{jp} \mathbf{q}_{jp}^T \mathbf{a}_{on+1}) d\xi_{n+1}, \quad (2.107) \end{aligned}$$

gdzie  $j = 1, 2$ . Formuły (2.105)–(2.107), w połączeniu z definicjami (2.83)–(2.87), określają w całości wektor nieliniowych reakcji sprężystych układu (2.96).

Należy zauważyć, że sformułowane równanie ruchu (2.92) jest uogólnieniem równania (2.64), obejmuje zatem wcześniej rozpatrzony przypadek szczególny drgań mostów wieloprzęsłowych z odciągami poziomymi. Dzięki zastosowaniu podejścia „od szczegółu do ogółu” uniknięto nadmiernej komplikacji algorytmu na początkowym, zasadniczym etapie rozważań. Wyodrębnienie wcześniejszych równań ruchu (2.64) umożliwia Ponadto automatyczne przejście do opisu drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących, w których odciągi są tak krótkie, że nie ma technicznej potrzeby ich wyróżniania. Tak prosta modyfikacja równań (2.92) nie jest możliwa, ponieważ pominięcie odciągów wymaga ograniczenia bazy współrzędnych uogólnionych, co w istocie prowadzi do równania zapisanego w postaci (2.64).

#### 2.5.4. Równania ruchu mostów z ciągnami o małym zwisie

Rozważmy teraz odrębny przypadek mostów z ciągnami o małym zwisie, których drgania są opisane równaniami (2.46)–(2.49), wyprowadzonymi przy założeniu, że obowiązuje hipoteza Kirchhoffa. Zaczniemy od stosownej modyfikacji formuł bilansu energetycznego. W tym przypadku istotnej zmianie ulega jedynie formuła określająca energię potencjalną odkształcenia układu. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymuje się wzór

$$\begin{aligned} E_p = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i A_i \int_0^{l_i} u_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i J_{yi} \int_0^{l_i} w_i''^2 dx_i + \frac{1}{2} 2H_0 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} w_i'^2 dx_i + \\ & + \frac{1}{2} \frac{16k_c f}{l^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \mu_i \mu_k \left( \int_0^{l_k} w_k dx_k \right) \left( \int_0^{l_i} w_i dx_i \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{16k_c f e^2}{l^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \mu_i \mu_k \left( \int_0^{l_k} \varphi_k dx_k \right) \left( \int_0^{l_i} \varphi_i dx_i \right) + \\
& + \frac{1}{2} 2H_0 \eta_1 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} w_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} 2H_0 e^2 \eta_1 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \varphi_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} 2H_0 e \eta_2 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\varphi_i' w_i' + w_i' \varphi_i') dx_i + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i J_{zi} \int_0^{l_i} v_i''^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{bi} g \int_0^{l_i} \frac{v_i^2}{h_{ci}} dx_i - \frac{1}{2} 2 \sum_{i=1}^n m_{bi} g c_i \int_0^{l_i} \frac{\varphi_i v_i}{h_{ci}} dx_i + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i J_{oi} \int_0^{l_i} \varphi_i''^2 dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (G_i I_i + 2H_0 e^2) \int_0^{l_i} \varphi_i'^2 dx_i + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{bi} g (b_i - c_i + \frac{c_i^2}{h_{ci}}) \int_0^{l_i} \varphi_i^2 dx_i. \tag{2.108}
\end{aligned}$$

Energia kinetyczna układu jest opisana wzorem (2.56), przy czym ostatni składnik należy przyjąć równy zero, natomiast wyrażenie (2.57) definiujące pracę wirtualną zewnętrznych sił czynnych nie ulega zmianie.

W dalszych rozważaniach pominiemy niezależny problem drgań osiowych dźwigara usztywniającego, opisany oddzielnym równaniem  $\mathbf{B}_{uu} \ddot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{C}_{uu} \dot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{q}_u = \mathbf{F}_u$ . Stan przemieszczenia przęsła mostu określają trzy ciągłe funkcje  $w_i(x_i, t)$ ,  $v_i(x_i, t)$ ,  $\varphi_i(x_i, t)$ , które aproksymuje się jak poprzednio, szeregami (2.59)–(2.61). Poziome przemieszczenia cięgien zostały tu pominięte jako małe wobec przemieszczeń pionowych. Macierzowe równanie ruchu, wyprowadzone na podstawie równań Lagrange'a z uwzględnieniem formuł bilansu energetycznego (2.56), (2.57), (2.108) i aproksymacji (2.59)–(2.61), ma ogólną postać typu (2.64). Wektor współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q} = \text{col}(\mathbf{q}_{b1}, \mathbf{q}_{b2}, \dots, \mathbf{q}_{bn})$  składa się z bloków  $\mathbf{q}_{bi} = \text{col}(\mathbf{q}_{wi}, \mathbf{q}_{vi}, \mathbf{q}_{\varphi i})$ , które zawierają podbloki współrzędnych reprezentujących przestrzeń konfiguracyjną ruchu poszczególnych przęseł.

Struktura macierzy bezwładności układu jest blokowo diagonalna, podobna do struktury macierzy bezwładności wyznaczonej w przypadku mostów z cięgnami o dużym zwisie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{bb})_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & (\mathbf{B}_{bb})_n \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{B}_{bb})_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{ww})_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_{vv})_i & (\mathbf{B}_{v\varphi})_i \\ \mathbf{0} & (\mathbf{B}_{\varphi v})_i & (\mathbf{B}_{\varphi\varphi})_i \end{bmatrix}, \tag{2.109}$$

Definicje (2.76)–(2.78) podbloków macierzy bezwładności nie ulegają zmianie, podobnie jak definicje (2.65) podbloków  $\mathbf{F}_{wi}$ ,  $\mathbf{F}_{vi}$ ,  $\mathbf{F}_{\varphi i}$  wektora uogólnionych sił czynnych  $\mathbf{F} = \text{col}(\mathbf{F}_{b1}, \mathbf{F}_{b2}, \dots, \mathbf{F}_{bn})$ , gdzie  $\mathbf{F}_{bi} = \text{col}(\mathbf{F}_{wi}, \mathbf{F}_{vi}, \mathbf{F}_{\varphi i})$ . Macierz sztywności opisująca liniowy model obiektu ma budowę blokowo sprzężoną o postaci

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{bb})_{11} & \dots & (\mathbf{K}_{bb})_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{K}_{bb})_{n1} & \dots & (\mathbf{K}_{bb})_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.110)$$

gdzie

$$(\mathbf{K}_{bb})_{ii} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ww})_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{vv})_i & (\mathbf{K}_{v\varphi})_i \\ \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{\varphi v})_i & (\mathbf{K}_{\varphi\varphi})_i \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{K}_{bb})_{ik} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{ww})_{ik} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{K}_{\varphi\varphi})_{ik} \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

przy czym  $\mathbf{K}_{ik} = \mathbf{K}_{ki}$ ,  $i \neq k$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, n$  oraz

$$(\mathbf{K}_{ww})_i = \frac{E_i J_{yi}}{2l_i^3} \mathbf{d}^4 + \frac{H_0}{l_i} \mathbf{d}^2 + \frac{64k_c f}{l^2} l_i^2 \mu_i^2 \mathbf{g}_c \mathbf{g}_c^T, \quad (\mathbf{K}_{vv})_i = \frac{E_i J_{zi}}{2l_i^3} \mathbf{d}^4 + m_{bi} g \mathbf{C}_{2i}, \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{\varphi\varphi})_i &= \frac{E_i J_{\omega i}}{2e^2 l_i^3} \mathbf{d}^4 + \left( \frac{G_i I_i}{2e^2 l_i} + \frac{H_0}{l_i} \right) \mathbf{d}^2 + \frac{m_{bi} g l_i (b_i - c_i)}{2e^2} \mathbf{I} + \\ &+ \frac{m_{bi} g c_i^2}{e^2} \mathbf{C}_{2i} + \frac{64k_c f}{l^2} l_i^2 \mu_i^2 \mathbf{g}_c \mathbf{g}_c^T, \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$(\mathbf{K}_{v\varphi})_i = (\mathbf{K}_{\varphi v})_i = -\frac{m_{bi} g c_i}{e} \mathbf{C}_{2i}, \quad (\mathbf{K}_{ww})_{ik} = (\mathbf{K}_{\varphi\varphi})_{ik} = \frac{64k_c f}{l^2} l_i l_k \mu_i \mu_k \mathbf{g}_c \mathbf{g}_c^T, \quad (2.114)$$

gdzie

$$\mathbf{g}_c = \left[ \frac{1}{\pi}, \quad 0, \quad \frac{1}{3\pi}, \quad 0, \quad \frac{1}{5\pi}, \quad \dots \right]^T. \quad (2.115)$$

Wektor nieliniowych reakcji sprężystych układu wylicza się, jak poprzednio, na podstawie relacji  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q}) = \text{grad}_{\mathbf{q}}(E_p^N)$ . Nieliniowa część energii potencjalnej odkształcenia układu (por. wzór (2.108)) wynosi

$$E_p^N = \frac{1}{2} 2H_0 \eta_1 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} w_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} 2H_0 e^2 \eta_1 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \varphi_i'^2 dx_i + \frac{1}{2} 2H_0 e \eta_2 \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (\varphi_i' w_i' + w_i' \varphi_i') dx_i. \quad (2.116)$$

Po podstawieniu relacji (2.43) i (2.59)–(2.61) do (2.116) otrzymuje się

$$E_p^N = \frac{1}{2} 2k_c \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} (\mathbf{q}_{wk}^T \mathbf{g}_c) (\mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{wi}) + \frac{1}{2} 2k_c \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} (\mathbf{q}_{wk}^T \mathbf{g}_c) (\mathbf{q}_{\varphi i}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\varphi i}) + \\ + \frac{1}{2} 2k_c \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} (\mathbf{q}_{\varphi k}^T \mathbf{g}_c) (\mathbf{q}_{wi}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\varphi i}) + \frac{1}{2} 2k_c \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} (\mathbf{q}_{\varphi k}^T \mathbf{g}_c) (\mathbf{q}_{\varphi i}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{wi}), \quad (2.117)$$

a następnie

$$\mathbf{R}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{b1}^N \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{bn}^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{bi}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wi}^N \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\varphi i}^N \end{bmatrix}, \quad (2.118)$$

gdzie:

$$\mathbf{R}_{wi}^N = 2k_c \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{wi} \mathbf{q}_{wk}^T \mathbf{g}_c + k_c \sum_{j=1}^n \frac{l_j \mu_j}{l_j} \mathbf{g}_c \mathbf{q}_{wj}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{wj} + \\ + k_c \sum_{j=1}^n \frac{l_j \mu_j}{l_j} \mathbf{g}_c \mathbf{q}_{\varphi j}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\varphi j} + 2k_c \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\varphi i} \mathbf{q}_{\varphi k}^T \mathbf{g}_c, \quad (2.119)$$

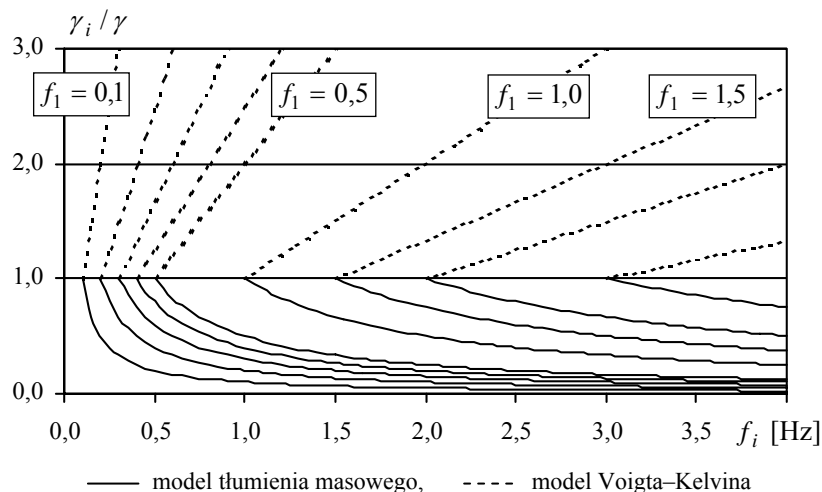
$$\mathbf{R}_{\varphi i}^N = 2k_c \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\varphi i} \mathbf{q}_{wk}^T \mathbf{g}_c + k_c \sum_{j=1}^n \frac{l_j \mu_j}{l_j} \mathbf{g}_c \mathbf{q}_{wj}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\varphi j} + \\ + 2k_c \sum_{k=1}^n \frac{l_k \mu_k}{l_i} \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{wi} \mathbf{q}_{\varphi k}^T \mathbf{g}_c + k_c \sum_{j=1}^n \frac{l_j \mu_j}{l_j} \mathbf{g}_c \mathbf{q}_{\varphi j}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{wj}. \quad (2.120)$$

Wyprowadzone równania ruchu dotyczą wyłącznie mostów z ciągniami o małym zwisie, przy czym mogą to być mosty jednoprzęsłowe lub wieloprzęsłowe – z odciągami poziomymi lub ukośnymi.

## 2.6. Tłumienie drgań

Jak wiadomo, zarówno charakter, jak i źródło własności tłumiących konstrukcji budowlanych nie są dostatecznie poznane, dlatego do opisu sił oporu w obliczeniach dynamicznych stosuje się różne modele. Na ogół przyjmuje się generalną hipotezę o wiskotycznym charakterze oporów ruchu. W ramach tego założenia możliwe jest stosowanie różnych wariantów. Jeśli główne znaczenie przypisuje się tłumieniu ze strony środowiska, to przyjmuje się model tłumienia masowego (zewnątrznego) – wówczas macierz tłumienia w równaniu ruchu jest zdefiniowana wzorem  $\mathbf{C} = \mu \mathbf{B}$ . Częściej zakłada się, że głównym źródłem tłumienia są opory wewnętrzne, czyli materiałowe i stosuje się model reologiczny Voigta–Kelvina, w którym opory ruchu są proporcjonalne do prędkości reakcji sprężystych. Macierz tłumienia jest wówczas określona wzorem  $\mathbf{C} = \kappa \mathbf{K}$ . Wymiarowe współczynniki tłumienia  $\mu, \kappa$  można oszacować według wzorów  $\mu = \gamma \Omega$ ,  $\kappa = \gamma / \Omega$  (Langer [75]). Symbol  $\Omega$  oznacza najistotniejszą w zadaniu, cykliczną częstość własną układu, z którą należy skojarzyć miarodajny dla danej konstrukcji bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\gamma = 2\alpha$ , równy podwojonej liczbie tłumienia  $\alpha$  (ułamek tłumienia krytycznego). Możliwe jest także założenie wariantu kombinowanego (tłumienie Rayleigha), gdzie  $\mathbf{C} = \mu \mathbf{B} + \kappa \mathbf{K}$ , lub specyfikacja współczynników tłumienia  $\gamma_i$  dla kolejnych głównych form drgań, możliwa w przypadku stosowania metody transformacji własnej [75]. W ostatnim przypadku można założyć, że tłumienie jest jednakowe dla wszystkich głównych form drgań  $\gamma_i = \gamma$ , co jest równoznaczne z przyjęciem hipotezy stałego dekrementu tłumienia [75].

Wybór właściwego dla analizowanej konstrukcji modelu tłumienia ma duże znaczenie, gdyż może istotnie wpłynąć na ocenę stanu dynamicznego wyteżenia. Kryteria wyboru nie są jednoznacznie określone. Można jedynie ogólnie stwierdzić, że wybrany model powinien odzwierciedlać rzeczywiste cechy tłumienia drgań danej konstrukcji. Rozważmy dwa powszechnie stosowane modele: tłumienia masowego i tłumienia Voigta–Kelvina. Na rysunku 2.10 przedstawiono wykresy zależności względnych modalnych współczynników tłumienia  $\gamma_i / \gamma$ , odpowiadających rozważanym modelom, od częstości drgań  $f_i$ , mierzonej w Hz (częstotliwość). Wykresy te odpowiadają hipotetycznym układom dynamicznym o różnych częstościach podstawowych  $f_1$ . Współczynnik  $\gamma$  skojarzony z częstością  $f_1$  określa wymiarowe parametry tłumienia  $\mu = \gamma 2\pi f_1$ ,  $\kappa = \gamma / (2\pi f_1)$ . Linie przerywane odpowiadają założeniu tłumienia materiałowego, gdzie  $\mathbf{C} = \kappa \mathbf{K}$ , co po przejściu do parametrów modalnych układu daje:  $c_i^o = \kappa k_i^o$ ,  $\gamma_i = \kappa \omega_i = \gamma f_i / f_1$ . Linie ciągłe odpowiadają założeniu tłumienia masowego  $\mathbf{C} = \mu \mathbf{B}$ , dla którego otrzymuje się:  $c_i^o = \mu b_i^o$ ,  $\gamma_i = \mu / \omega_i = \gamma f_1 / f_i$ .



Rys. 2.10. Zależność tłumienia od częstotliwości przy różnych częstotliwościach podstawowych  
 Fig. 2.10. Damping versus frequency for different fundamental frequencies

Przyjęcie modelu Voigta–Kelvina w odniesieniu do konstrukcji o niskich częstotliwościach podstawowych (0,1–0,5 Hz) powoduje nadmierne, szybko narastające tłumienie wyższych postaci drgań. Model ten powinien być stosowany raczej do konstrukcji o większych częstotliwościach podstawowych, ponieważ poziom tłumienia wyższych form drgań rośnie wtedy znacznie łagodniej. Duże tłumienie wysokich form drgań może być w tym przypadku korzystne, powoduje ono bowiem wygaszanie drgań kształtowanych przez formy, które są zazwyczaj obciążone dużym błędem wynikającym z dyskretyzacji układu ciągłego.

Model Voigta–Kelvina wydaje się wyjątkowo nieodpowiedni dla mostów wiszących, które charakteryzują się bardzo niskimi częstotliwościami podstawowymi. Spektakularnym przykładem może być widmo częstotliwości własnych najdłuższego na świecie mostu Akashi Kaikyo. Częstotliwości początkowej strefy widma tego mostu przedstawiono w tabeli 2.1, na podstawie wyników badań autorów pracy [16]. W najistotniejszej, początkowej strefie widma częstotliwości własne mostu Akashi Kaikyo są mało zróżnicowane i obejmują wąski zakres od około 0,04 Hz do 0,2 Hz. W tym zakresie częstotliwości model Voigta–Kelvina powoduje drastyczne narastanie tłumienia, co jest sprzeczne ze specyfiką tłumienia w mostach wiszących.

Rezultaty pomiarów drgań wskazują, że poziom tłumienia modalnego w mostach wiszących na ogół maleje ze wzrostem częstotliwości. Ta uwaga dotyczy głównie mostów starszych, które są sztywniejsze od nowoczesnych mostów o dużych rozpiętościach i mają nieco lepsze własności tłumiące. Przykładem mogą być wyniki identyfikacji pomiarowej tłumienia modalnego mostu Lions' Gate położonego w Vancouver, opublikowane przez Bucklanda i in. [38], a także badania Abdel-Ghaffara i Housnera [5] (most Vincenta Thomasa) i Scanlana [99] (model mostu Tacoma Narrows). Loga-

rytmiczny dekrement tłumienia podstawowej postaci drgań wynosi w tych mostach  $\mathcal{D} \cong 0,05-0,15$  i maleje w wyższych formach [5, 38, 99]. W przypadku takich mostów dobrym przybliżeniem rzeczywistego tłumienia może być model tłumienia masowego.

Tabela 2.1. Częstości własne mostu Akashi Kaikyo (Boonyapinyo i in. [16])  
Table 2.1. Natural frequencies of Akashi Kaikyo Bridge (Boonyapinyo i in. [16])

Drgania pionowe		Drgania skrętne		Drgania poziome	
Numer formy	Częstość $f$ [Hz]	Numer formy	Częstość $f$ [Hz]	Numer formy	Częstość $f$ [Hz]
1	0,0644	1	0,1467	1	0,0389
2	0,0834	2	0,2033	2	0,0779
3	0,1079			3	0,0925
4	0,1211			4	0,0926
5	0,1603			5	0,1286

Nowoczesne mosty wiszące, o smukłych konstrukcjach i dużych rozpiętościach, charakteryzują się bardzo niskim tłumieniem, trudnym do zidentyfikowania na podstawie pomiarów. Wielu autorów przyjmuje założenie, że poziom tłumienia modalnego w takich mostach jest jednakowy dla wszystkich postaci drgań. Przykładowo, do obliczeń aerodynamicznych mostu Akashi Kaikyo autorzy pracy [16] przyjęli stałą wartość tłumienia modalnego  $\mathcal{D} = 0,03$ . Również w pracach [44, 46] przyjęto stały logarytmiczny dekrement tłumienia o wartości  $\mathcal{D} = 0,02$ . Jednak badania mostu Great Belt wykazały, że tłumienie modalne w tym moście maleje w wyższych formach drgań, podobnie jak w starszych mostach o mniejszych rozpiętościach (Laigaard Jensen i in. [74]). Założenie stałego tłumienia w przypadku dużych, nowoczesnych mostów wiszących budzi zatem wątpliwości. Można sądzić, że lepsze przybliżenie tłumienia rzeczywistego daje model tłumienia masowego.

W rzeczywistości każdej formie drgań mostu odpowiada swoista wartość współczynnika tłumienia (Abdel-Ghaffar [5] i Buckland [38]). Stąd najbliższą rzeczywistości jest deklaracja bezwymiarowych współczynników tłumienia  $\gamma_i$  dla kolejnych głównych form drgań. Taka deklaracja jest oczywiście możliwa tylko wtedy, gdy dysponujemy dla danego mostu wynikami badań eksperymentalnych w zakresie tłumienia modalnego. W przypadku rozważanym w niniejszej pracy deklaracja tłumienia modalnego nastęrcza pewne trudności, ponieważ równania ruchu są nieliniowe, nie jest zatem możliwe poszukiwanie rozwiązań metodą transformacji własnej. Trudności te można pokonać zakładając w pewnym przybliżeniu, że własności tłumiące wynikają głównie z charakterystyk modelu liniowego, który jest opisany równaniem (2.64) lub (2.92), pozbawionym składnika nieliniowego. Następnie, na podstawie parametrów modalnych układu liniowego  $c_i^o = \gamma_i \sqrt{k_i^o b_i^o}$ , należy obliczyć macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  zapisaną w bazie współrzędnych wyjściowych  $\mathbf{q}$ . Obliczenie polega na wykonaniu

operacji powrotu z bazy współrzędnych głównych do wyjściowych, według wzoru:  $\mathbf{C} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{c} \mathbf{W}^{-1}$ , gdzie  $\mathbf{c}$  jest macierzą diagonalną o elementach  $c_i^o$ ,  $\mathbf{W}$  jest macierzą własną, uzyskaną w wyniku rozwiązania zagadnienia własnego  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Jest oczywiste, że wyznaczenie wymiarowych parametrów tłumienia  $c_i^o$  wymaga wcześniejszego obliczenia sztywności  $k_i^o$  i mas głównych  $b_i^o$  układu liniowego, które są elementami macierzy diagonalnych  $\mathbf{k} = \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W}$  oraz  $\mathbf{b} = \mathbf{W}^T \mathbf{B} \mathbf{W}$ . Alternatywnym sposobem obliczenia macierzy tłumienia, który nie wymaga odwracania macierzy własnej, jest zastosowanie wzoru  $\mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{W} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{B} = \mathbf{K} \mathbf{W} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{K}$ , w którym symbole  $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  oznaczają macierze diagonalne o elementach  $\gamma_i$ ,  $\omega_i$  (Langer [75]).

Z przedstawionych rozważań wynika, że tłumienie w równaniach ruchu mostów wiszących można uwzględnić albo przez deklarację macierzy tłumienia postaci  $\mathbf{C} = \mu \mathbf{B}$ , przy założeniu tłumienia zewnętrznego, albo przez deklarację bezwymiarowych współczynników tłumienia  $\gamma_i$  dla kolejnych głównych form drgań liniowego modelu mostu, wówczas  $\mathbf{C} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{c} \mathbf{W}^{-1}$ . W pierwszym przypadku tłumienie jest nieco zaniżone, ale obliczenie macierzy tłumienia jest łatwe. Ponadto określenie sił wewnętrznych nie nastręcza żadnych trudności, gdyż siły te wynikają wyłącznie z określonego stanu przemieszczenia układu. W drugim przypadku opis tłumienia jest najbliższy rzeczywistości, ale obliczenie macierzy tłumienia jest bardziej skomplikowane. Główną trudność stanowi tu jednak problem określenia sposobu wyznaczania sił wewnętrznych, ponieważ charakter sił oporu ruchu nie jest w tym przypadku jednoznacznie zdefiniowany. W mostach wiszących poziom tłumienia modalnego maleje dla kolejnych głównych form drgań, można więc założyć, że zasadnicze znaczenie mają opory o charakterze zewnętrznym (np. opór powietrza). Z praktycznego punktu widzenia można też przyjąć, że przy bardzo małym tłumieniu, jakim charakteryzują się mosty wiszące, wpływ ewentualnych sił oporów ruchu o charakterze wewnętrznym jest pomijalny (Chmielewski i Zembaty [45]). Te stwierdzenia umożliwiają sformułowanie jednakowych definicji sił wewnętrznych w obu rozpatrywanych przypadkach tłumienia.

## 2.7. Wyznaczanie przemieszczeń, sił wewnętrznych i naprężeń

Macierzowe równania ruchu (2.64) lub (2.92) są układami nieliniowych sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Rozwiązanie takiego układu równań może być wyznaczone numerycznie. Problem ten będzie omówiony szerzej w rozdziale 4.3.4. Wyznaczone numerycznie przebiegi czasowe współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}$  (rozwiązanie równania (2.64)) lub  $\bar{\mathbf{q}}$  (rozwiązanie równania (2.92))



stanowią podstawę obliczenia sił przekrojowych i naprężeń oraz stanu przemieszczenia dźwigara usztywniającego i ciągien.

Przemieszczenie dowolnego punktu dźwigara usztywniającego ma w płaszczyźnie przekroju dwie składowe, określone wzorami

$$\tilde{w}_i(s_i, x_i, t) = w_i(x_i, t) + y_i(s_i)\varphi_i(x_i, t) = \mathbf{s}_i^T[\mathbf{q}_{wi} + (y_i/e)\mathbf{q}_{\varphi i}], \quad (2.121)$$

$$\tilde{v}_i(s_i, x_i, t) = v_i(x_i, t) - [z_i(s_i) + a_i]\varphi_i(x_i, t) = \mathbf{s}_i^T(\mathbf{q}_{vi} - [(z_i + a_i)/e]\mathbf{q}_{\varphi i}). \quad (2.122)$$

Symbole  $\tilde{w}_i$  i  $\tilde{v}_i$  oznaczają odpowiednio składową pionową i poziomą przemieszczenia w punkcie o współrzędnej  $s_i$ , przekroju  $x_i$  belki stanowiącej  $i$ -te, swobodnie podparte przęsło dźwigara. Równoległe (tzn. bez spaczenia) przemieszczenie podłużne przekroju belki  $u_i(x_i, t)$  oblicza się ze wzoru (2.58) lub (2.63).

Stan przemieszczenia ciągną jest opisany dwiema składowymi, mierzonymi w pionowej płaszczyźnie zawieszenia. Poziome przemieszczenia ciągien  $U_1(x, t)$ ,  $U_2(x, t)$  oblicza się ze wzorów (2.62), przemieszczenia pionowe natomiast, wyliczone według wzorów (2.27), wynoszą:

$$w_{c1}(x_i, t) = w_{1i}(x_i, t) = \mathbf{s}_i^T[\mathbf{q}_{wi} - \mathbf{q}_{\varphi i}], \quad (2.123)$$

$$w_{c2}(x_i, t) = w_{2i}(x_i, t) = \mathbf{s}_i^T[\mathbf{q}_{wi} + \mathbf{q}_{\varphi i}]. \quad (2.124)$$

Pionowe przemieszczenia odciągów są określone wzorami (2.91).

Dynamiczne przyrosty sił naciągu ciągien, określone relacjami (2.38) dla mostów z ciągnami o dużych zwisach, wyznacza się według wzorów:

$$\Delta H_1(x_i, t) = E_c A_c \cos^3 \beta_{0i} \left( \frac{1}{L} \mathbf{c}_{ci}^T \mathbf{d}_c \mathbf{q}_1 + \frac{z'_{ci}}{l_i} \mathbf{c}_i^T \mathbf{d}(\mathbf{q}_{wi} - \mathbf{q}_{\varphi i}) \right), \quad (2.125)$$

$$\Delta H_2(x_i, t) = E_c A_c \cos^3 \beta_{0i} \left( \frac{1}{L} \mathbf{c}_{ci}^T \mathbf{d}_c \mathbf{q}_2 + \frac{z'_{ci}}{l_i} \mathbf{c}_i^T \mathbf{d}(\mathbf{q}_{wi} + \mathbf{q}_{\varphi i}) \right), \quad (2.126)$$

gdzie  $i = 1, \dots, n$  oraz

$$\Delta H_1(x_i, t) = E_c A_c b_i^3 \left( \frac{1}{L} \mathbf{c}_{ci}^T \mathbf{d}_c \mathbf{q}_1 + \frac{z_i}{l_i} \mathbf{c}_{oi}^T \mathbf{d}_o \mathbf{q}_{1i} \right), \quad (2.127)$$

$$\Delta H_2(x_i, t) = E_c A_c b_i^3 \left( \frac{1}{L} \mathbf{c}_{ci}^T \mathbf{d}_c \mathbf{q}_2 + \frac{z_i}{l_i} \mathbf{c}_{oi}^T \mathbf{d}_o \mathbf{q}_{2i} \right), \quad (2.128)$$

gdy  $i = 0$ ,  $i = n + 1$  i odciaży są ukośne ( $b_i = \cos \beta_{0,i}$ , por. rozdz. 2.5.3). Jeśli odciaży są poziome, to wzory (2.127) i (2.128) przyjmują postać

$$\Delta H_1(x_i, t) = \frac{E_c A_c}{L} \mathbf{c}_{ci}^T \mathbf{d}_c \mathbf{q}_1, \quad \Delta H_2(x_i, t) = \frac{E_c A_c}{L} \mathbf{c}_{ci}^T \mathbf{d}_c \mathbf{q}_2. \quad (2.129)$$

W przypadku mostów z cięgnami o małych zwisach, dynamiczne przyrosty sił naciągu cięgien oblicza się według (2.42) i (2.43), na podstawie parametrów  $\eta_1(t)$ ,  $\eta_2(t)$ , które wynoszą

$$\eta_1(t) = \frac{2k_c}{H_0} \sum_{i=1}^n \mu_i l_i \mathbf{g}_c^T \mathbf{q}_{wi}, \quad \eta_2(t) = \frac{2k_c}{H_0} \sum_{i=1}^n \mu_i l_i \mathbf{g}_c^T \mathbf{q}_{\phi i}. \quad (2.130)$$

Siły przekrojowe w belkach usztywniających mostu są wywołane zginaniem i nieswobodnym skręcaniem. Za dodatnie będziemy uważali siły przekrojowe, których wektory w przekroju o normalnej zewnętrznej dodatniej mają zwroty zgodne ze zwrotami osi układu współrzędnych  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  (rys. 2.4). Momenty zginające, siły tnące i siły osiowe są określone znanymi formułami różniczkowymi [61, 71], które dla przyjętej aproksymacji stanu przemieszczenia dają następujące wyniki:

$$M_{yi}(x_i, t) = -E_i J_{yi} w_i'' = \frac{E_i J_{yi}}{l_i^2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{wi}, \quad (2.131)$$

$$M_{zi}(x_i, t) = E_i J_{zi} v_i'' = -\frac{E_i J_{zi}}{l_i^2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{vi}, \quad (2.132)$$

$$T_{zi}(x_i, t) = -E_i J_{yi} w_i''' + \mathbf{m}_{yi} = \frac{E_i J_{yi}}{l_i^3} \mathbf{c}_i^T \mathbf{d}^3 \mathbf{q}_{wi} + \mathbf{m}_{yi}, \quad (2.133)$$

$$T_{yi}(x_i, t) = -E_i J_{zi} v_i''' - \mathbf{m}_{zi} = \frac{E_i J_{zi}}{l_i^3} \mathbf{c}_i^T \mathbf{d}^3 \mathbf{q}_{vi} - \mathbf{m}_{zi}, \quad (2.134)$$

$$N_i(x_i, t) = E_i A_i u_i' = \frac{E_i A_i}{l_i} \mathbf{c}_{ui}^T \mathbf{d}_u \mathbf{q}_{ui}. \quad (2.135)$$

Relacja (2.135) dotyczy belek z lewą podporą nieprzesuwną. Jeśli nieprzesuwna jest podpora prawa, to

$$N_i(x_i, t) = E_i A_i u_i' = -\frac{E_i A_i}{l_i} \mathbf{s}_{ui}^T \mathbf{d}_u \mathbf{q}_{ui}. \quad (2.136)$$

Moment czystego skręcania de Saint-Venanta, bimoment i moment giętno-skrętny są określone wzorami o postaci (por. [61, 71]):

$$M_{si}(x_i, t) = G_i I_i \varphi_i' = \frac{G_i I_i e}{l_i} \mathbf{c}_i^T \mathbf{d} \mathbf{q}_{\varphi_i}, \quad (2.137)$$

$$B_{\omega_i}(x_i, t) = -E_i J_{\omega_i} \varphi_i'' = \frac{E_i J_{\omega_i} e}{l_i^2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\varphi_i}, \quad (2.138)$$

$$M_{\omega_i}(x_i, t) = -E_i J_{\omega_i} \varphi_i''' - \mathbf{m}_{\omega_i} = \frac{E_i J_{\omega_i}}{l_i^3} \mathbf{c}_i^T \mathbf{d}^3 \mathbf{q}_{\varphi_i} - \mathbf{m}_{\omega_i}. \quad (2.139)$$

Rozłożone momenty  $\mathbf{m}_{y_i}$ ,  $\mathbf{m}_{z_i}$ ,  $\mathbf{m}_{\omega_i}$  obciążenia użytkowego  $\mathbf{p}_{x_i}$  wyznacza się za pomocą formuł (2.20). Powyższe wzory są słuszne dla belek cienkościennych o profilu otwartym i zamkniętym częściowo lub całkowicie, jeśli położenie środka ścinania i charakterystyka przekroju  $J_{\omega_i}$  są wyznaczone na podstawie uogólnionej definicji współrzędnych wycinkowych  $\omega_i$  (wzór (2.23)). Charakterystyka przekrojowa de Saint-Venanta  $I_i$  jest zdefiniowana wzorem (2.24).

Przejdźmy teraz do określenia naprężeń w elementach mostu. Stan naprężenia cięgien w przekroju  $x_i$  jest określony przez składnik statyczny naprężeń normalnych, jednakowy dla obu cięgien

$$\sigma_0(x_i) = \frac{H_0}{A_c \cos \beta_{0i}}, \quad (2.140)$$

oraz różny dla każdego z cięgien składnik dynamiczny

$$\Delta \sigma_j(x_i, t) = \frac{\Delta H_j(x_i, t)}{A_c \cos \beta_{0i}}, \quad j = 1, 2, \quad (2.141)$$

nazywany dalej dynamicznym przyrostem naprężenia w cięgnię.

Naprężenia normalne w przekroju  $x_i$  belki, w punkcie o współrzędnej  $s_i$ , są określone znanym wzorem [61, 71]

$$\sigma_i(s_i, x_i, t) = \frac{N_i(x_i, t)}{A_i} + \frac{M_{yi}(x_i, t)}{J_{yi}} z_i(s_i) - \frac{M_{zi}(x_i, t)}{J_{zi}} y_i(s_i) + \frac{B_{\omega i}(x_i, t)}{J_{\omega i}} \omega_i(s_i), \quad (2.142)$$

niezależnie od typu profilu [61]. Zakłada się, że naprężenia te są rozłożone równomiernie na grubości ścianki przekroju cienkościennego. Za dodatnie przyjmuje się naprężenia rozciągające.

Naprężenia styczne, w odróżnieniu od naprężeń normalnych, są różnie zdefiniowane dla cienkościennych profili otwartych i zamkniętych, ale w obu przypadkach mają ten sam kierunek – styczny do linii środkowej przekroju. Jednakowy jest także sposób rozkładu naprężeń stycznych  $\tau_i$  wywołanych zginaniem, nieswobodnym skręcaniem i wpływami osiowymi. Naprężenia te są rozłożone równomiernie na grubości ścianki przekroju. Naprężenia wywołane czystym skręcaniem rozważymy odrębnie.

Równomiernie rozłożone naprężenia styczne w profilach otwartych oblicza się według wzoru [61]

$$\tau_i(s_i, x_i, t) = -\frac{1}{\delta(s_i)} \left( \frac{N'_i}{A_i} \bar{A}(s_i) + \mathbf{q}_{ki} + \frac{M'_{yi}}{J_{yi}} \bar{S}_y(s_i) - \frac{M'_{zi}}{J_{zi}} \bar{S}_z(s_i) + \frac{M_{\omega i}}{J_{\omega i}} \bar{S}_\omega(s_i) \right), \quad (2.143)$$

gdzie  $\mathbf{q}_{ki} = \int_{C_i(s_i)} \mathbf{p}_{xi}(s_i, x_i, t) ds_i$ . W przypadku pręta, na którego poboczniczy nie działają

obciążenia równoległe do jego osi, mamy

$$\tau_i(s_i, x_i, t) = -\frac{1}{\delta(s_i)} \left( \frac{T_{zi}}{J_{yi}} \bar{S}_y(s_i) + \frac{T_{yi}}{J_{zi}} \bar{S}_z(s_i) + \frac{M_{\omega i}}{J_{\omega i}} \bar{S}_\omega(s_i) \right). \quad (2.144)$$

W definicjach (2.143) i (2.144) występują następujące funkcje:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s_i) &= \int_{C_i(s_i)} \delta(s_i) ds_i, & \bar{S}_y(s_i) &= \int_{C_i(s_i)} z_i(s_i) \delta(s_i) ds_i, \\ \bar{S}_z(s_i) &= \int_{C_i(s_i)} y_i(s_i) \delta(s_i) ds_i, & \bar{S}_\omega(s_i) &= \int_{C_i(s_i)} \omega_i(s_i) \delta(s_i) ds_i, \end{aligned} \quad (2.145)$$

które oznaczają pole i momenty statyczne części przekroju zawartej między punktem  $s_i = 0$  (przyjętym na krawędzi pręta, gdzie  $\tau_i = 0$ ) i punktem o współrzędnej  $s_i$ .

W profilach zamkniętych i częściowo zamkniętych, w których tylko fragmenty konturu tworzą komory zamknięte, naprężenia styczne są określone wzorem [61]

$$\begin{aligned} \tau_i(s_i, x_i, t) = & -\frac{1}{\delta(s_i)} \left( \frac{N'_i}{A_i} [\bar{A}(s_i) - F_x(s_i)] + \mathbf{q}_{vi} [\bar{S}_{\mathbf{q}}(s_i) - F_{\mathbf{q}}(s_i)] \right) - \\ & - \frac{1}{\delta(s_i)} \left( \frac{M'_{yi}}{J_{yi}} [\bar{S}_y(s_i) - F_y(s_i)] - \frac{M'_{zi}}{J_{zi}} [\bar{S}_z(s_i) - F_z(s_i)] + \frac{M'_{\omega i}}{J_{\omega i}} [\bar{S}_{\omega}(s_i) - F_{\omega}(s_i)] \right), \end{aligned} \quad (2.146)$$

gdzie  $\mathbf{q}_{vi} = \int_{C_i} \mathbf{p}_{xi}(s_i, x_i, t) ds_i$  jest wynikiem całkowania po całym konturze przekroju.

Jeśli  $\mathbf{p}_{xi}(s_i, x_i, t) = 0$ , to wzór (2.146) redukuje się do drugiego wiersza.

Charakterystykę  $\bar{S}_{\mathbf{q}}(s_i)$  wyznacza się za pomocą funkcji  $\mathbf{q}_{vi}$ , definiującej osiowe obciążenie użytkowe części odciętej przekroju, przy czym zakłada się, że przy obliczaniu funkcji  $\mathbf{q}_{vi}$  możliwe jest rozdzielanie zmiennych według wzoru:  $\mathbf{q}_{vi}(s_i, x_i, t) = \mathbf{q}_{vi}(x_i, t) \bar{S}_{\mathbf{q}}(s_i)$ . Funkcje  $F_x(s_i)$ ,  $F_y(s_i)$ ,  $F_z(s_i)$ ,  $F_{\omega}(s_i)$ ,  $F_{\mathbf{q}}(s_i)$  są analogiczne do funkcji  $F_s(s_i)$ , występującej w równaniu (2.22) i określającej rozkład naprężeń stycznych de Saint-Venanta  $\tau_i^s$  wzdłuż konturu. Są zatem odcinkami stałe (stałe w obrębie każdej gałęzi konturu), a w przypadku gałęzi „otwartych” są równe zeru. W każdej komorze zamkniętej ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) muszą być spełnione równania

$$\begin{aligned} \oint_k \frac{F_x(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i = \oint_k \frac{\bar{A}(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i, \quad \oint_k \frac{F_y(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i = \oint_k \frac{\bar{S}_y(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i, \quad \oint_k \frac{F_z(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i = \oint_k \frac{\bar{S}_z(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i, \\ \oint_k \frac{F_{\omega}(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i = \oint_k \frac{\bar{S}_{\omega}(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i, \quad \oint_k \frac{F_{\mathbf{q}}(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i = \oint_k \frac{\bar{S}_{\mathbf{q}}(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Poszukiwane stałe  $F_{xj}, F_{yj}, \dots, F_{\mathbf{q}j}$  są rozwiązaniem układu równań (2.129), uzupełnionego o warunki ciągłości naprężeń w punktach połączeń gałęzi, indeks  $j = 1, 2, 3, \dots$  oznacza numery gałęzi w zamkniętych komorach konturu. Charakterystyki geometryczne odciętej części przekroju oblicza się po dokonaniu pomocniczego, dowolnie zlokalizowanego rozcięcia każdej komory zamkniętej. Równania (2.147)

zostały sformułowane przez Benscotera, a szczegółowe wyprowadzenie formuły (2.146) można znaleźć w pracy Gjelsvika [61], przy czym Gjelsvik inaczej definiuje część odciętą przekroju – jako część, która pozostaje po odcięciu fragmentu zawartego między  $s_i = 0$  i danym  $s_i$ . Prowadzi to do zmiany znaku naprężeń stycznych  $\tau_i$ . Właściwą interpretację przytoczonych wzorów może ułatwić algorytm przedstawiony w pracy [61], który opracowano dla przykładowych profili cienkościennych w celu wyznaczenia i rozwiązania układu równań (2.147).

Rozkład naprężeń  $\tau_i^s$  wywołanych czystym skręcaniem de Saint-Venanta jest w przekrojach zamkniętych inny niż w przekrojach otwartych. W profilach zamkniętych naprężenia  $\tau_i^s$  są rozłożone tak, jak naprężenia  $\tau_i$ , czyli równomiernie na grubości ścianki przekroju. Oblicza się je ze wzoru

$$\tau_i^s(s_i, x_i, t) = -\frac{F_s(s_i)}{\delta(s_i)} \frac{M_{si}}{I_i}, \quad (2.148)$$

przy czym moment oporu przeciw skręcaniu, określony wzorem (2.24), redukuje się do postaci  $I_i = \int_{C_i} \frac{F_s^2(s_i)}{\delta(s_i)} ds_i$ . W profilach otwartych naprężenia  $\tau_i^s$  zmieniają się na grubości ścianki liniowo, zgodnie z relacją

$$\tau_i^s(s_i, x_i, t) = -2n_i \frac{M_{si}}{I_i}, \quad (2.149)$$

gdzie tym razem charakterystyka przekrojowa de Saint-Venanta (2.24) ogranicza się do pierwszego składnika  $I_i = \frac{1}{3} \int_{C_i} \delta^3(s_i) ds_i$ . Symbol  $n_i$  jest współrzędną krzywoliniowego, prawoskrętnego układu współrzędnych  $(n_i, s_i, x_i)$ .

Oś  $n_i$  jest osią normalną do  $s_i$  (rys. 2.6), współrzędna  $n_i$  zmienia się od  $-\delta_i/2$  do  $\delta_i/2$ . W dalszym ciągu pracy symbol  $\tau_i(s_i, x_i, t)$  będzie oznaczał łączne naprężenia styczne, tzn. naprężenia zdefiniowane wzorem (2.146), uzupełnione odpowiednio o naprężenia wywołane czystym skręcaniem, określone relacją (2.148) lub (2.149).

### **3. Analiza deterministyczna wybranych problemów dynamiki mostów wiszących**

#### **3.1. Zakres i cele badań**

Przedstawiona w poprzednim rozdziale teoria drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących będzie w dalszej części pracy zastosowana do wyznaczania rozwiązań w dziedzinie drgań losowych. Efektywność metod, algorytmów i procedur komputerowych służących do analizy stochastycznej w dużym stopniu zależy od rozmiaru zadania deterministycznego i stopnia złożoności algorytmu analizy drgań deterministycznych. Algorytm opracowany na podstawie teorii uwzględniającej poziome przemieszczenia cięgien jest zdecydowanie bardziej złożony obliczeniowo, zatem mniej efektywny niż algorytm uproszczony, zbudowany według teorii klasycznej opartej na hipotezie Kirchhoffa. Uwzględnienie poziomych przemieszczeń cięgien powoduje konieczność stosowania większej liczby funkcji aproksymacyjnych, a to bezpośrednio zwiększa rozmiar zadania. Ponadto wiele elementów macierzy sztywności układu jest generowana poprzez numeryczne obliczanie całek oznaczonych, co istotnie wydłuża czas obliczeń. Zastosowanie uproszczonego algorytmu drgań byłoby znacznie wygodniejsze z punktu widzenia analizy drgań losowych.

Wobec powyższego, zasadniczym celem analiz numerycznych przedstawionych w niniejszym rozdziale jest ocena jakościowa i ilościowa wpływu poziomych przemieszczeń cięgien na drgania mostów wiszących z cięgnami o małych i dużych zwisach. Ta ocena będzie podstawą odpowiedzi na pytanie, jakie skutki powoduje stosowanie algorytmu uproszczonego w odniesieniu do mostów o małych zwisach cięgien oraz – dla jakiej geometrii cięgien wpływ poziomych przemieszczeń jest na tyle istotny, że konieczne jest stosowanie pełnego algorytmu (Bryja [22]). W rozważaniach pominiemy niezależny problem drgań osiowych dźwigara usztywniającego. Analizie będą poddane wyniki rozwiązania zagadnienia własnego (rozd. 3.2) oraz drgania wymuszone, w postaci przebiegów czasowych wybranych odpowiedzi mostu na działanie jednostkowej siły skupionej, poruszającej się ze stałą prędkością po wybranym torze (rozd. 3.4). Wybór tego rodzaju drgań wymuszonych jako przed-

miotu analizy ma dwojakie uzasadnienie. Po pierwsze – rozważane przebiegi czasowe, nazywane dalej dynamicznymi funkcjami wpływu, będą bezpośrednio wykorzystywane w dalszej części pracy do wyznaczania rozwiązań w dziedzinie drgań stochastycznych. Po drugie – prosty przypadek wymuszenia w postaci ruchomej siły jednostkowej ułatwia analizę porównawczą rozwiązań w sferze jakościowej, a dodatkowo – quasi-statyczne tło przebiegów dynamicznych można interpretować jako statyczne funkcje wpływowe, które stosunkowo łatwo jest analizować i oceniać z punktu widzenia intuicji inżynierskiej.

Właściwa analiza drgań wymuszonych zostanie poprzedzona obszernymi badaniami numerycznymi, których celem będzie ostateczny wybór wariantu hipotezy tłumienia wiskotycznego (rozdz. 3.3). Przedmiotem badań będą drgania wymuszone okresową serią ruchomych sił skupionych, co umożliwi analizę drgań konstrukcji w strefach rezonansowych, w których wpływ tłumienia jest największy. Analizowane będą przebiegi drgań przykładowego mostu, wyznaczone przy założeniu tłumienia masowego, tłumienia Voigta, Rayleigha i przy założeniu tłumienia stałego. Rozwiązania te porównamy z rozwiązaniami wyznaczonymi przy założeniu tłumienia realnego, czyli zadeklarowanego poprzez modalne współczynniki tłumienia, określone na podstawie pomiarów drgań mostu.

Większość wyników obliczeń prezentowanych w niniejszym rozdziale dotyczy konstrukcji mostu Vincenta Thomasa, zbudowanego we wczesnych latach sześćdziesiątych w Los Angeles. Obiekt ten, trójprzęsłowy, o łącznej rozpiętości 768 m, wybrano jako przedmiot analiz ze względu na dostępność danych. Na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych Abdel-Ghaffar opublikował cykl prac [1–7], w których przedstawił wyniki badań teoretycznych oraz wyniki testów obliczeniowych i pomiarowych dotyczących drgań tego mostu. Na podstawie wymienionych prac można odtworzyć szczegółowe charakterystyki geometryczne oraz parametry masowe i sztywnościowe rozważanego mostu. W pracy Abdel-Ghaffara i Housnera [5] zostały zamieszczone wyniki analizy modalnej, przeprowadzonej na podstawie pomiarów drgań mostu, wymuszonych ruchem drogowym. Autorzy zidentyfikowali częstości i formy własne oraz tłumienie modalne. Te dane zostały wykorzystane w niniejszej rozprawie do weryfikacji sformułowanego algorytmu obliczeniowego.

Modelem podwieszanej konstrukcji mostu Vincenta Thomasa jest cienkościenne, belkowy dźwigar usztywniający o zamkniętym przekroju bisymetrycznym. Aby w pełni ujawnić i przetestować możliwości zaprezentowanego algorytmu, w rozdziale 3.2.1 rozpatrzono dodatkowy przykład, dotyczący drgań mostu z dźwigarem usztywniającym o przekroju monosymetrycznym otwartym. Jest to konstrukcja hipotetyczna, zaprojektowana wstępnie według zasad kształtowania mostów wiszących.



## 3.2. Analiza rozwiązań zagadnienia własnego

### 3.2.1. Ocena wpływu poziomych przemieszczeń cięgien na częstości i formy własne drgań trójprzęsłowego mostu wiszącego

Badania ograniczymy do analizy zagadnienia własnego, przy założeniu małych drgań liniowych wokół położenia równowagi statycznej. W takim przypadku nieliniowe składniki równania ruchu (2.64) lub (2.92) mogą być pominięte, a zagadnienie własne jest opisane układem równań algebraicznych, który w zapisie macierzowym ma postać  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B})\mathbf{q} = \mathbf{0}$  [75, 76].

Obiektem analizy jest hipotetyczny most trójprzęsłowy o następujących parametrach geometrycznych (por. rys. 2.1b):

$$l_1 = l_3 = 130 \text{ m}, l_2 = 400 \text{ m}, l_0 = l_4 = 0, \\ h_1 = h_4 = 40 \text{ m}, h_2 = h_3 = 0, h_c = 42 \text{ m}, f = 40 \text{ m}.$$

Dźwigar usztywniający mostu jest podwieszony do dwóch cięgien o sztywności osiowej  $E_c A_c = 2,2 \cdot 10^{10}$  N i masie jednostkowej  $m_c = 800$  kg/m. Wstępny, statyczny naciąg cięgien  $H_0 = 2,953 \cdot 10^7$  N obliczono przy założeniu, że masa wieszaków, uśredniona wzdłuż rozpiętości przęseł, wynosi  $\tilde{m}_{wi} = 200$  kg/m. Swobodnie podparte przęsła dźwigara są balastowanymi belkami cienkościennymi o jednakowych, monosymetrycznych przekrojach otwartych, opisanych następującymi parametrami:

$$E_i J_{yi} = 1,98 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^2, E_i J_{zi} = 5,35 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^2, E_i J_{\omega i} = 7,85 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^4, \\ G_i I_i = 2,02 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2, m_{bi} = 10000 \text{ kg/m}, j_{Bi} = 3,18 \cdot 10^5 \text{ kgm}^2/\text{m}, e = 7,5 \text{ m}, \\ a_i = 2,43 \text{ m}, b_i = 1,90 \text{ m}, c_i = 1,02 \text{ m}, i = 1, 2, 3.$$

Belki cienkościenne o przekroju otwartym charakteryzują się stosunkowo małą sztywnością skrętną, a wpływ deplanacji przekroju przy nieswobodnym skręcaniu jest zdecydowanie większy niż w przypadku dźwigarów o przekrojach zamkniętych. Istotne rozsuniecie lokalizacji środka ścinania i środka masy przekroju otwartego prowadzi do powstania sprzężeń między poziomymi drganiami giętnymi i drganiami skrętnymi mostu. Takie ukształtowanie przekroju nie jest korzystne ze względu na pracę konstrukcji, ale jest dogodnie w niniejszej analizie, ponieważ umożliwia testowanie pełnego algorytmu analizy drgań mostu.

W celu ustalenia miarodajnej liczby funkcji aproksymacyjnych wyznaczono częstości własne mostu, przyjmując do obliczeń różne rozmiary bazy aproksymacyjnej  $n_b$  oraz  $n_c$ , gdzie  $n_b$  jest rozmiarem wektorów  $\mathbf{s}_i$  aproksymujących stan przemieszczenia belek usztywniających, a  $n_c$  określa liczbę elementów wektora  $\mathbf{s}_c$ , zawierającego funkcje aproksymujące poziome przemieszczenia cięgien. W tabeli 3.1 zestawiono wyniki obliczeń, dotyczące początkowej strefy widma własnego (30 prążków

widma). Test zbieżności rozwiązań potwierdził skuteczność przyjętej aproksymacji. Do dalszych obliczeń przyjęto  $n_b = 18$  oraz  $n_c = 30$ .

W tabeli 3.2 przedstawiono rezultaty obliczeń przeprowadzonych według teorii uproszczonej, w której pomija się poziome przemieszczenia cięgien. Należy zauważyć, że zgodnie z przewidywaniami, uwzględnienie poziomych przemieszczeń cięgien istotnie zmniejsza efektywność algorytmu. Do uzyskania podobnej dokładności wyników jest potrzebna około dwukrotnie większa liczba współrzędnych uogólnionych ( $n = 9n_b + 2n_c = 222$ ) niż w przypadku teorii uproszczonej ( $n_b = 12$ ,  $n = 9n_b = 108$ ), co istotnie wydłuża czas obliczeń.

Tabela 3.1. Częstotliwości własne obliczone z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń cięgien  
Table 3.1. Natural frequencies calculated with horizontal cable displacements being taken into account

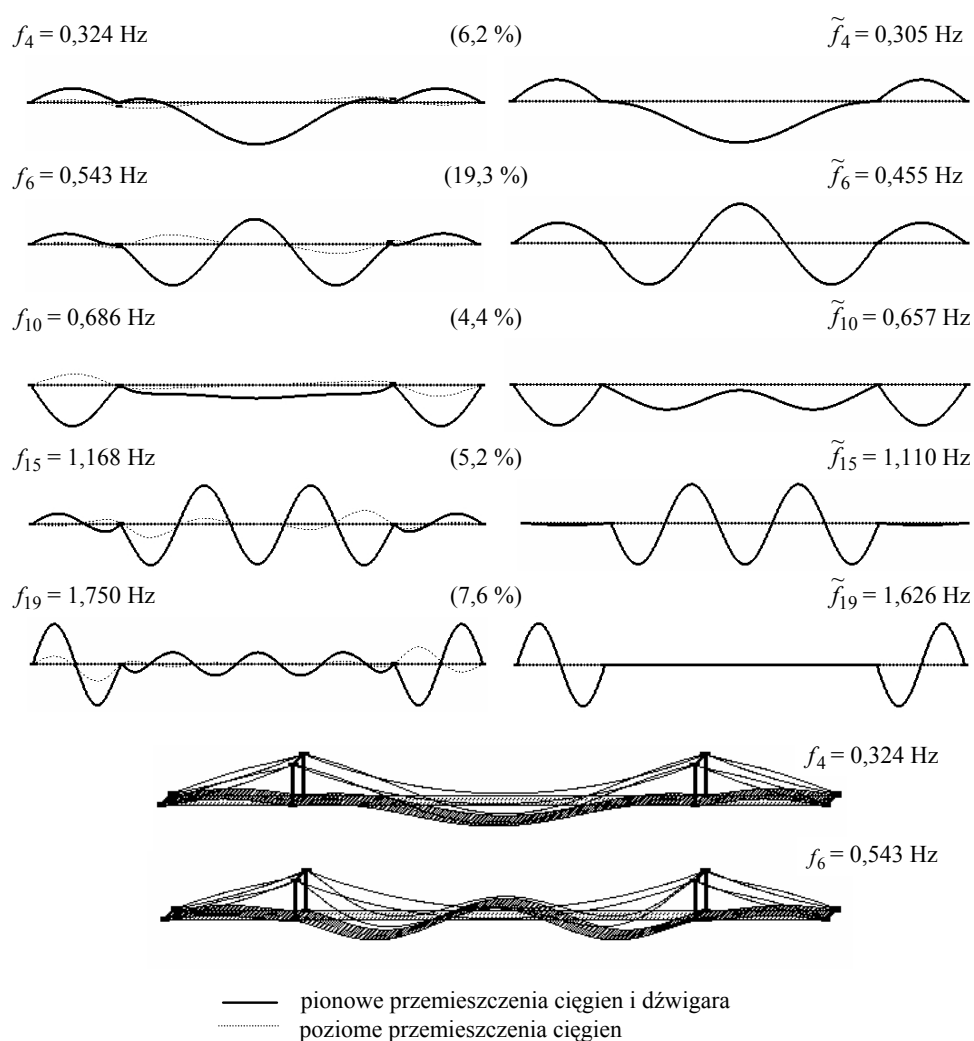
$f_i$ [Hz]	$n_b=10$ $n_c=10$	$n_b=12$ $n_c=12$	$n_b=14$ $n_c=14$	$n_b=16$ $n_c=16$	$n_b=18$ $n_c=18$	$n_b=18$ $n_c=20$	$n_b=18$ $n_c=22$	$n_b=18$ $n_c=28$	$n_b=18$ $n_c=30$
1	0,236	0,236	0,236	0,236	0,236	0,236	0,236	0,236	0,236
2	0,281	0,280	0,278	0,278	0,277	0,276	0,276	0,275	0,275
3	0,321	0,320	0,319	0,318	0,318	0,317	0,317	0,316	0,316
4	0,328	0,325	0,325	0,325	0,324	0,324	0,324	0,324	0,324
5	0,394	0,390	0,390	0,389	0,391	0,391	0,391	0,391	0,391
6	0,573	0,563	0,555	0,553	0,549	0,548	0,546	0,544	0,543
7	0,588	0,571	0,556	0,554	0,552	0,552	0,551	0,546	0,546
8	0,634	0,617	0,602	0,599	0,606	0,606	0,605	0,601	0,601
9	0,644	0,627	0,615	0,613	0,609	0,608	0,606	0,604	0,603
10	0,729	0,705	0,694	0,693	0,691	0,691	0,689	0,686	0,686
11	0,828	0,810	0,802	0,800	0,805	0,805	0,804	0,802	0,802
12	0,874	0,864	0,830	0,824	0,820	0,815	0,815	0,809	0,807
13	0,923	0,914	0,883	0,877	0,874	0,870	0,869	0,864	0,863
14	0,963	0,960	0,957	0,956	0,956	0,956	0,956	0,956	0,956
15	1,239	1,208	1,183	1,182	1,175	1,174	1,172	1,169	1,168
16	1,302	1,270	1,245	1,243	1,237	1,236	1,235	1,232	1,231
17	2,136	1,611	1,588	1,574	1,574	1,573	1,573	1,572	1,572
18	2,236	1,676	1,653	1,637	1,637	1,637	1,637	1,635	1,635
19	2,242	1,832	1,831	1,802	1,769	1,767	1,761	1,751	1,750
20	2,248	1,903	1,901	1,871	1,840	1,838	1,834	1,822	1,814
21	2,435	2,139	1,959	1,957	1,886	1,849	1,849	1,826	1,824
22	2,639	2,242	2,039	2,036	1,966	1,930	1,929	1,906	1,900
23	2,888	2,253	2,138	2,138	2,138	2,138	2,138	2,138	2,138
24	3,735	2,808	2,251	2,250	2,225	2,217	2,208	2,192	2,189
25	3,755	3,049	2,253	2,252	2,247	2,247	2,246	2,245	2,244
26	3,797	3,136	2,307	2,291	2,251	2,250	2,250	2,250	2,250
27	4,047	3,413	2,407	2,388	2,322	2,313	2,307	2,294	2,291
28	4,108	3,745	3,624	2,879	2,833	2,791	2,791	2,773	2,769
29	4,620	3,756	3,752	2,970	2,924	2,879	2,879	2,863	2,860
30	4,680	3,811	3,778	3,471	3,434	3,414	3,414	3,411	3,410

Tabela 3.2. Częstości własne obliczone z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien  
 Table 3.2. Natural frequencies calculated with horizontal cable displacements being omitted

$\tilde{f}_i$ [Hz]	$n_b = 4$	$n_b = 8$	$n_b = 10$	$n_b = 12$
1	0,235	0,235	0,235	0,235
2	0,241	0,241	0,241	0,241
3	0,280	0,280	0,280	0,280
4	0,305	0,305	0,305	0,305
5	0,369	0,369	0,369	0,369
6	0,455	0,455	0,455	0,455
7	0,470	0,470	0,470	0,470
8	0,499	0,499	0,499	0,499
9	0,515	0,515	0,515	0,515
10	0,659	0,657	0,657	0,657
11	0,739	0,739	0,739	0,739
12	0,780	0,776	0,776	0,776
13	0,790	0,790	0,790	0,790
14	0,954	0,954	0,954	0,954
15	1,626	1,110	1,110	1,110
16	1,626	1,169	1,169	1,169
17	1,690	1,552	1,552	1,552
18	1,690	1,617	1,617	1,617
19	2,139	1,626	1,626	1,626
20	2,250	1,626	1,626	1,626
21	2,254	1,690	1,690	1,690
22	3,541	1,690	1,690	1,690
23	3,543	2,080	2,080	2,080
24	3,634	2,139	2,139	2,139
25	3,637	2,154	2,154	2,154
26	3,798	2,250	2,250	2,250
27	6,221	2,254	2,254	2,254
28	6,221	2,687	2,687	2,687
29	6,353	2,770	2,770	2,770
30	6,353	3,541	3,376	3,376

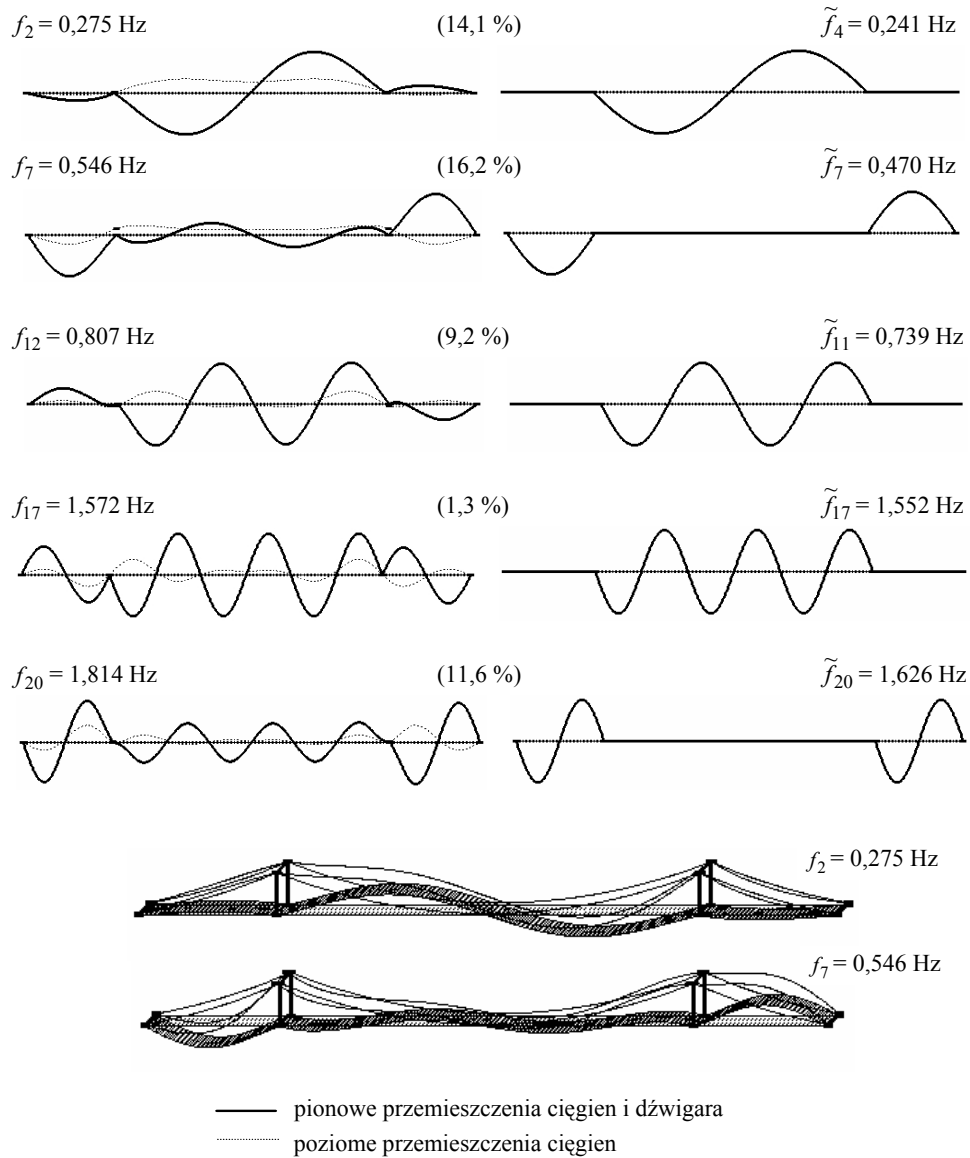
W celu oszacowania wpływu poziomych przesunięć cięgien porównano formy i częstości własne mostu, wyznaczone za pomocą obu rozpatrywanych wersji algorytmu. Na rysunkach 3.1 i 3.2 pokazano pięć początkowych form symetrycznych i pięć początkowych form antysymetrycznych pionowych drgań giętych. Rysunki 3.3 i 3.4 przedstawiają pierwsze trzy, symetryczne i antysymetryczne formy własne drgań z dominacją skręcania i drgań z dominacją zginania poziomego. Cienką linią przerywaną oznaczono rozkłady poziomych przemieszczeń obu cięgien:  $U_1(x)$ ,  $U_2(x)$ . Linie grube, ciągła i przerywana, oznaczają odpowiednio pionowe i poziome poprzeczne przemieszczenia dźwigara:  $w_i(x_i)$ ,  $v_i(x_i)$ , mierzone względem środka ścinania przekroju. Cienka linia ciągła oznacza rozkład pionowych przemieszczeń krawędzi dźwigara:  $e\varphi_i(x_i)$ , które wynikają z jego obrotu wokół osi przechodzącej przez

środek ścinania. Formy i częstotliwości własne przedstawione w lewej kolumnie rysunku ( $f_i$ ) są wyznaczone za pomocą pełnej wersji algorytmu, natomiast formy i częstotliwości pokazane w prawej kolumnie ( $\tilde{f}_i$ ) odpowiadają wersji uproszczonej, przy czym w nawiasach podano względną różnicę procentową między częstotliwościami ( $(f_i - \tilde{f}_i) / \tilde{f}_i$ ). Indeks  $i$  oznacza numer formy własnej. Na każdym z rysunków przedstawiono ponadto przestrzenną wizualizację wybranych form.



Rys. 3.1. Symetryczne formy własne drgań pionowych, obliczone z uwzględnieniem lub z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien

Fig. 3.1. Symmetric natural modes of vertical vibrations calculated with horizontal cable displacements being taken into account or omitted



Rys. 3.2. Antysymetryczne formy własne drgań pionowych, obliczone z uwzględnieniem i z pominięciem poziomych przemieszczeń ciągów

Fig. 3.2. Antisymmetric natural modes of vertical vibrations calculated with horizontal cable displacements being taken into account or omitted

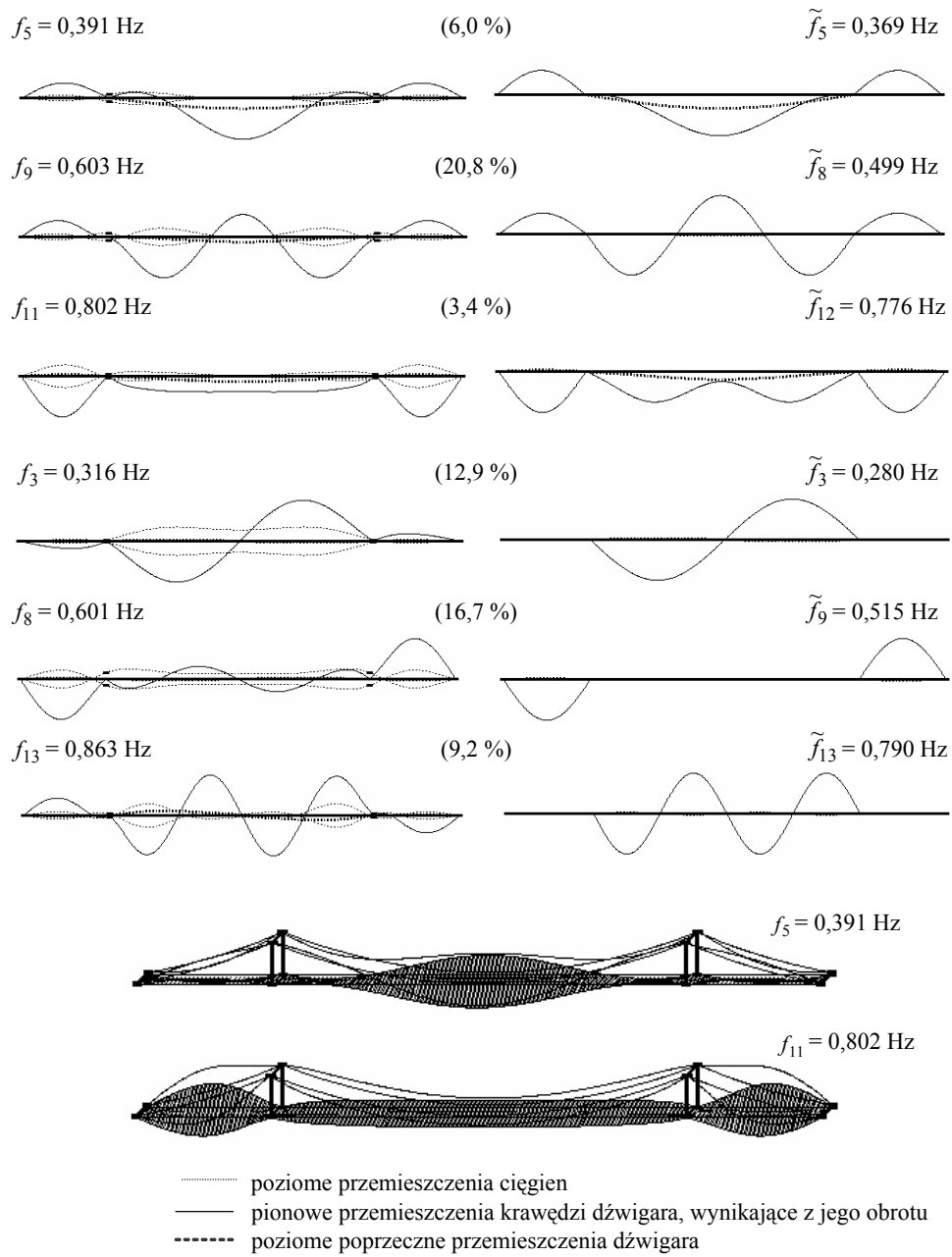
Częstości własne pionowych drgań giętych i drgań skrętnych mostu, obliczone z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń ciągów różnią się znacznie od częstości wyznaczonych przy zastosowaniu teorii klasycznej. Różnice wynoszą od kilku do

kilkunastu procent. Różnice około kilkunastu procent dotyczą głównie form antysymetrycznych, ale także niektórych form symetrycznych (na rys. 3.1, 3.3 – druga forma symetryczna). W formach antysymetrycznych przemieszczenia przęseł bocznych i przęśla środkowego nie są niezależne, jak to obserwuje się w przypadku zastosowania algorytmu uproszczonego, a formy nie mają czystej postaci sinusowej. W formach z dominacją ruchu przęśla środkowego zaznacza się wyraźnie ruch przęseł bocznych, podobnie jest w sytuacji odwrotnej. Obecność sprzężenia ruchu przęseł zarówno w formach symetrycznych, jak i w antysymetrycznych jest zgodna z intuicją inżynierską i znajduje potwierdzenie eksperymentalne [5].

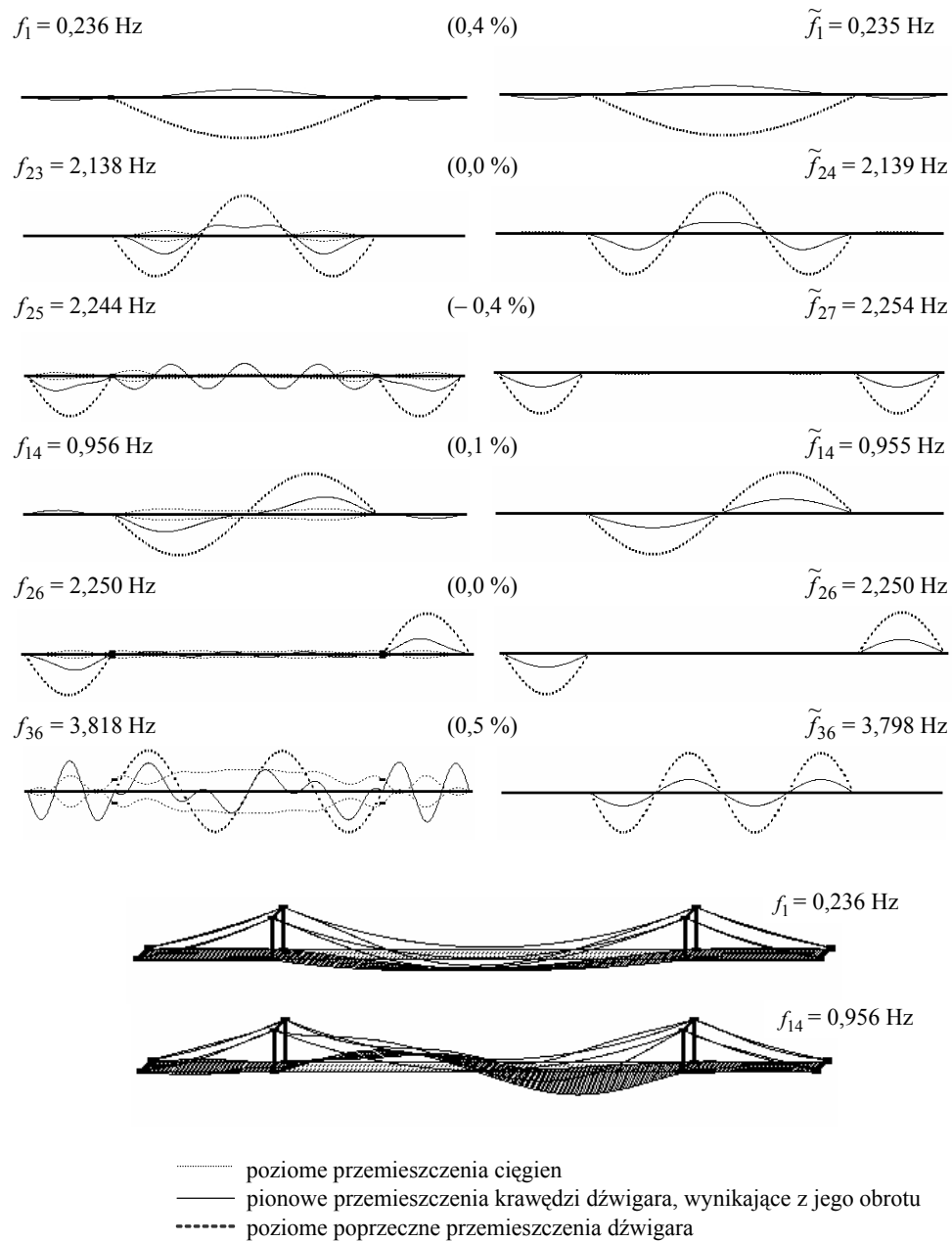
Symetryczne formy własne drgań pionowych i skrętnych są dość podobne w obu rozpatrywanych przypadkach rozwiązań, lecz sprzężenie ruchu przęseł jest nieco mniejsze, gdy uwzględnia się poziome przemieszczenia cięgien i nie zanika w wyższych formach, jak w opisie uproszczonym. Częstości własne drgań z dominacją poziomego poprzecznego ruchu przęseł, obliczone według dwóch rozpatrywanych wersji algorytmu różnią się pomijalnie mało, gdyż podwieszenie nie ma bezpośredniego wpływu na poziomy ruch belek. Przekazuje się w małym stopniu jedynie poprzez sprzężenie z drganiami skrętnymi, co można zaobserwować analizując formy własne (rys. 3.4).

W teorii drgań ciężna wiotkiego przyjmuje się, według hipotezy Kirchhoffa, że w przypadku małego zwisu ( $f/l < 0,125$ ) można pominąć wpływ poziomych przemieszczeń ciężna na jego drgania pionowe. Przedstawione wyniki obliczeń pokazują, że stosowanie tej hipotezy w odniesieniu do ciężna trójprzelotowego, współpracującego z dźwigarem usztywniającym, powoduje istotne zniżenie częstości własnych układu oraz jakościową zmianę form własnych, szczególnie form antysymetrycznych. Wpływy te są pomijalne właściwie tylko dla pierwszych dwóch częstości – zarówno w przypadku drgań pionowych, jak i drgań skrętnych, co ilustrują wykresy pokazane na rys. 3.5. Wykresy te przedstawiają zależność pierwszych sześciu częstości własnych od strzałki zwisu ciężna  $f$  w środkowym przęśle mostu, przy czym przyjęto do obliczeń, że  $h_c - f = 2$  m niezależnie od wartości  $f$ . Formy symetryczne są oznaczone znacznikami kwadratowymi, antysymetryczne – trójkątnymi. Linie czarne oznaczają rozwiązania uzyskane z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń cięgien, linie szare – rozwiązania uproszczone.

W typowych schematach konstrukcyjnych mostów wiszących przyjmuje się na ogół, że strzałka zwisu ciężna jest równa jednej dziesiątej rozpiętości przęśla. Z przedstawionych obliczeń wynika, że przy takiej geometrii cięgien wpływ poziomych przemieszczeń cięgien na drgania mostu jest znaczny, głównie w sferze jakościowej i nie powinien być pomijany. Stosowanie w tym przypadku teorii drgań z obowiązującą hipotezą Kirchhoffa jest uproszczeniem, które może prowadzić do istotnych różnic w ocenie stanu przemieszczenia i stanu wyężenia konstrukcji poddanej działaniu obciążeń dynamicznych. Wniosek ten jest prognozą, która będzie zweryfikowana w trakcie analizy zagadnienia drgań wymuszonych, w rozdziale 3.4.



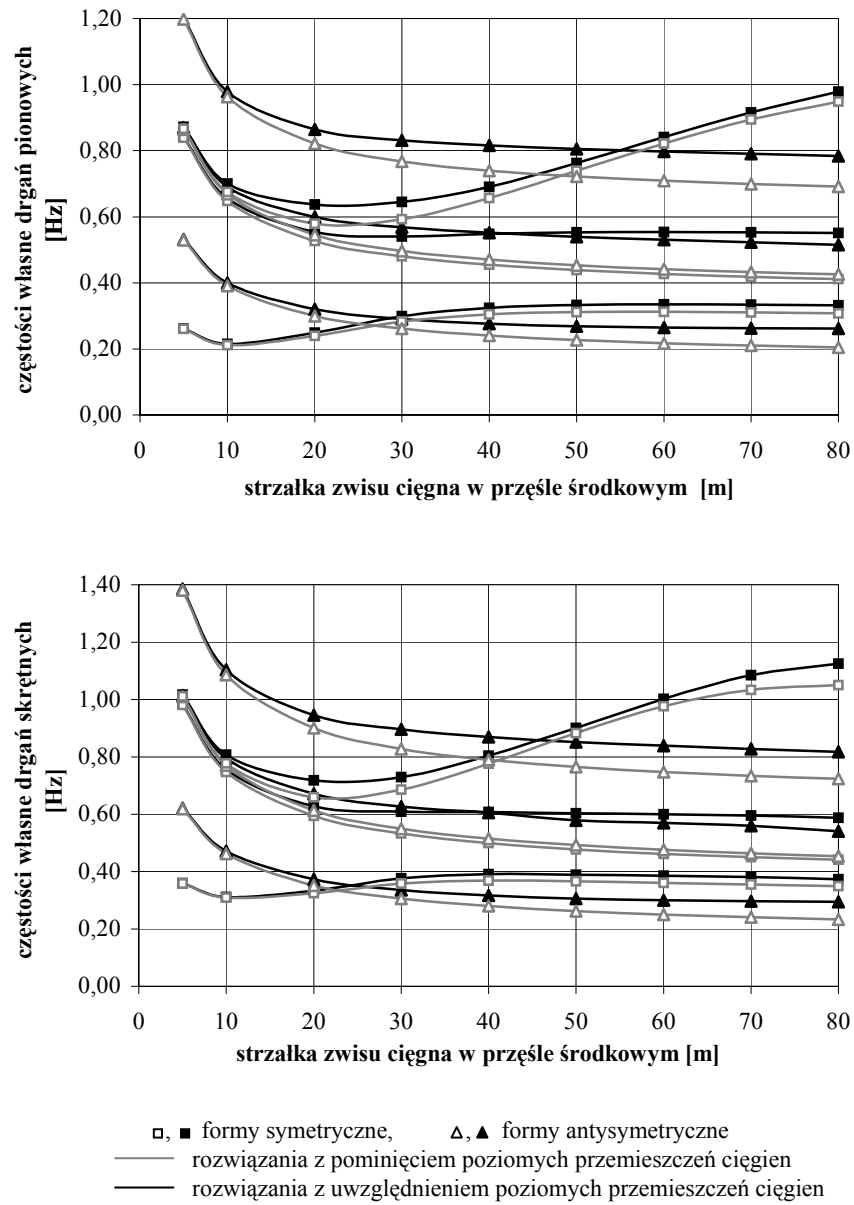
Rys. 3.3. Symetryczne i antysymetryczne formy własne z dominacją ruchu skrętnego, obliczone z uwzględnieniem i z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien  
 Fig. 3.3. Symmetric and antisymmetric natural modes of torsional vibrations calculated with horizontal cable displacements being taken into account or omitted



Rys. 3.4. Symetryczne i antysymetryczne formy własne z dominacją ruchu poziomego, obliczone z uwzględnieniem i z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien

Fig. 3.4. Symmetric and antisymmetric natural modes of lateral vibrations calculated with horizontal cable displacements being taken into account or omitted





Rys. 3.5. Zależność częstości własnych drgań pionowych i drgań skrętnych od strzałki zwisu ciężna  
 Fig. 3.5. Natural frequencies of vertical and torsional vibrations versus a cable sag

### 3.2.2. Weryfikacja obliczeń na podstawie danych eksperymentalnych

W celu sprawdzenia poprawności opracowanej teorii drgań obliczone częstości i formy własne porównano z rezultatami zidentyfikowanymi na podstawie pomiarów drgań rzeczywistej konstrukcji. W analizie porównawczej wykorzystano wyniki badań przedstawione przez Abdel-Ghaffara i Housnera [5], dotyczące mostu wiszącego Vincenta Thomasa. Jest to most trójprzęsłowy, o rozpiętości łącznej 768 m. Rozpiętość przęsła środkowego wynosi 458 m, przęsła bocznych – 155 m. Szerokość czteropasmowej jezdni wynosi 16 m, wysokość pylonów – 103 m, strzałka zwisu ciężna – 46 m. Podwieszona konstrukcja mostu składa się z dwóch kratowych dźwigarów głównych, połączonych systemem stężeń poprzecznych oraz dwiema płytami o strukturze kratowej, umieszczonymi na poziomie pasa górnego i pasa dolnego kratownic głównych. Most Vincenta Thomasa wykorzystano w innych pracach Abdel-Ghaffara [1–7] jako przykład obliczeniowy ilustrujący zastosowanie teorii drgań sformułowanej przez tego autora. W wymienionych pracach autor przyjął do obliczeń zastępczy przekrój poprzeczny podwieszanej konstrukcji. Jest to bisymetryczny przekrój cienkościenny w kształcie prostokątnej skrzynki. Szczegółowe charakterystyki przekroju zastępczego przedstawiono w pracy Abdel-Ghaffara i Rubina [7]. Na podstawie danych liczbowych i informacji zawartych w zbiorze prac [1–7] przyjęto następujące parametry wymiarowe mostu:

$$\begin{aligned}
 l_1 = l_3 = 155 \text{ m}, \quad l_2 = 458 \text{ m}, \quad l_0 = l_4 = 0, \quad h_0 = h_1 = h_4 = h_5 = 47 \text{ m}, \quad h_2 = h_3 = 0, \\
 h_c = 48 \text{ m}, \quad f = 45,8 \text{ m}, \quad e = 9 \text{ m}, \quad E_c A_c = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ N}, \quad m_c = 631,5 \text{ kg/m}, \\
 (EJ_y)_{1,3} = 7,49 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2, \quad (EJ_y)_2 = 7,25 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2, \quad (EJ_z)_{1,3} = 3,60 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^2, \\
 (EJ_z)_2 = 3,52 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^2, \quad (EJ_\omega)_{1,3} = 9,09 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^4, \quad (EJ_\omega)_2 = 8,80 \cdot 10^{12} \text{ Nm}^4, \\
 (GI)_{1,3} = 3,38 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2, \quad (GI)_2 = 3,20 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2, \\
 (m_b)_{1,2,3} = 9134 \text{ kg/m}, \quad (j_B)_{1,2,3} = 3,511 \cdot 10^5 \text{ kgm}^2/\text{m}, \quad (\tilde{m}_w)_{1,2,3} = 148,5 \text{ kg/m}, \\
 (a)_{1,2,3} = 0, \quad (b)_{1,2,3} = -0,5 \text{ m}, \quad (c)_{1,2,3} = -2,3 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Zgodnie z sugestią autorów wymienionych prac przyjęto tu, że parametry masowe konstrukcji są jednakowe w obrębie trzech przęseł, chociaż charakterystyki sztywnościowe są różne, co sugeruje różnice w wymiarach przekroju. Przyjęto też, że nawierzchnia i urządzenia dodatkowe mostu są balastem, który powoduje niewielkie rozsuniecie lokalizacji środka masy przekroju sprężystego podwieszanej konstrukcji względem środka masy przekroju balastowanego:  $(b)_{1,2,3} = -0,5 \text{ m}$ . Wówczas drgania poprzeczne mostu są w pewnym stopniu sprzężone z drganiami skrętnymi, co z kolei powoduje niewielkie sprzężenie poprzecznych drgań przęsła środkowego i przęseł bocznych, zaobserwowane w formach drgań wyznaczonych pomiarowo. W tabeli 3.3 zestawiono rezultaty obliczeń i wyniki pomiarów w zakresie częstości własnych drgań

pionowych, skrętnych i poprzecznych (poziomych). Wartości procentowe podane w nawiasach określają różnice między częstościami, obliczone w stosunku do częstości wyznaczonych na podstawie pomiarów. Na rysunkach 3.6, 3.7 i 3.8 przedstawiono formy własne drgań mostu Vincenta Thomasa, obliczone z uwzględnieniem i z pominięciem poziomych przemieszczeń ciągien. Sekwencja form odpowiada kolejnym prążkom widma własnego. Wyznaczone numerycznie formy własne porównano ze zidentyfikowanymi pomiarowo postaciami drgań, przedstawionymi w pracy [5] przez Abdel-Ghaffara i Housnera.

Tabela 3.3. Porównanie obliczonych i pomierzonych częstości własnych mostu Vincenta Thomasa  
Table 3.3. Comparison between computed and measured natural frequencies of Vincent Thomas Bridge

Formy symetryczne			Formy antysymetryczne		
Model I*	Model II**	Wynik eksperymentalny***	Model I*	Model II**	Wynik eksperymentalny***
Częstości własne drgań pionowych [Hz]					
0,224 (4%)	0,209 (11%)	0,234	0,209 (3%)	0,184 (15%)	0,216
0,355 (3%)	0,305 (17%)	0,366	0,345 (10%)	0,301 (22%)	0,385
0,479 (2%)	0,467 (4%)	0,487	0,497 (14%)	0,458 (21%)	0,579
0,684 (18%)	0,650 (22%)	0,835	0,869 (15%)	0,854 (16%)	1,022
0,937 (13%)	0,854 (21%)	1,077	0,987 (12%)	0,868 (23%)	1,121
Częstości własne drgań skrętnych [Hz]					
0,513 (-4%)	0,502 (-2%)	0,494	0,661 (11%)	0,649 (12%)	0,740
1,011 (5%)	0,977 (9%)	1,069	1,015 (-26%)	0,981 (-22%)	0,806
1,084 (-13%) (-6%)	1,058 (-11%) (-4%)	0,956 (1,018)	1,379 (3%)	1,347 (5%)	1,425
Częstości własne drgań poprzecznych [Hz]					
0,164 (2%)	0,164 (2%)	0,168	0,587 (6%)	0,586 (6%)	0,623
1,312 (-9%)	1,311 (-9%)	1,204	1,309 (-3%)	1,310 (-3%)	1,273
1,333 (13%)	1,332 (13%)	1,531	2,362 (10%)	2,362 (10%)	2,629

\* Uwzględnione poziome składowe przemieszczenia ciągien.

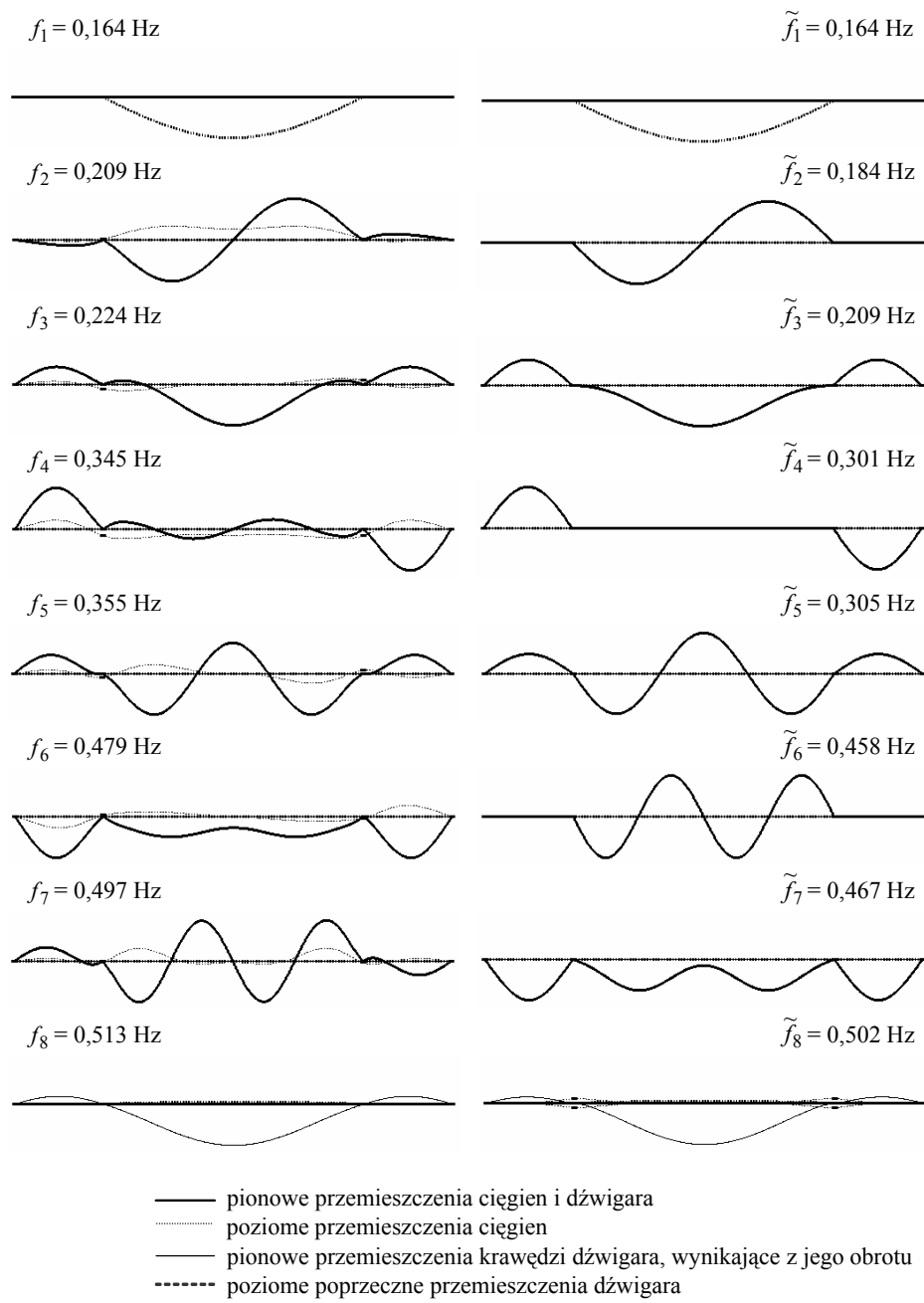
\*\* Pominięte poziome składowe przemieszczenia ciągien.

\*\*\* Wyniki zaczerpnięte z pracy Abdel-Ghaffara [5].

Na podstawie porównania częstości i form własnych stwierdzono, że opracowany algorytm analizy zagadnienia własnego prowadzi do rezultatów, które są zbliżone do wyników eksperymentalnych, co jest dowodem poprawności sformułowanej teorii drgań i założeń definiujących model obliczeniowy mostu. Częstości własne drgań pionowych, obliczone z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń cięgien, są trochę niższe od wyznaczonych eksperymentalnie. Rozbieżności w wynikach są niewielkie w obrębie niskich częstości (2–10%), nieco większe (~15%) w grupie częstości wyższych, większych od 0,5 Hz. W wyniku zastosowania teorii uproszczonej otrzymuje się gorsze, bardziej zaniżone rezultaty (11–23%). Częstości drgań skrętnych, wyliczone za pomocą dwóch rozpatrywanych wersji algorytmu są zbliżone, a częstości drgań poprzecznych są praktycznie takie same. Różnice między wynikami obliczeń i wynikami pomiarów nie wykazują żadnej prawidłowości, są dość przypadkowe, na ogół niewielkie. Niektóre z obliczonych częstości drgań skrętnych i poprzecznych są większe od częstości uzyskanych na podstawie pomiarów. Może to być skutek założenia, że zastępczy przekrój poprzeczny dźwigara jest bisymetryczny lub wynik błędów identyfikacji pomiarowej. Zdaniem autorów pracy [5], identyfikacja częstości własnych drgań skrętnych i poprzecznych była obarczona największym błędem, ponieważ pomiary drgań przeprowadzono przy wymuszeniu ruchem pojazdów drogowych, który powoduje głównie pionowe drgania konstrukcji.

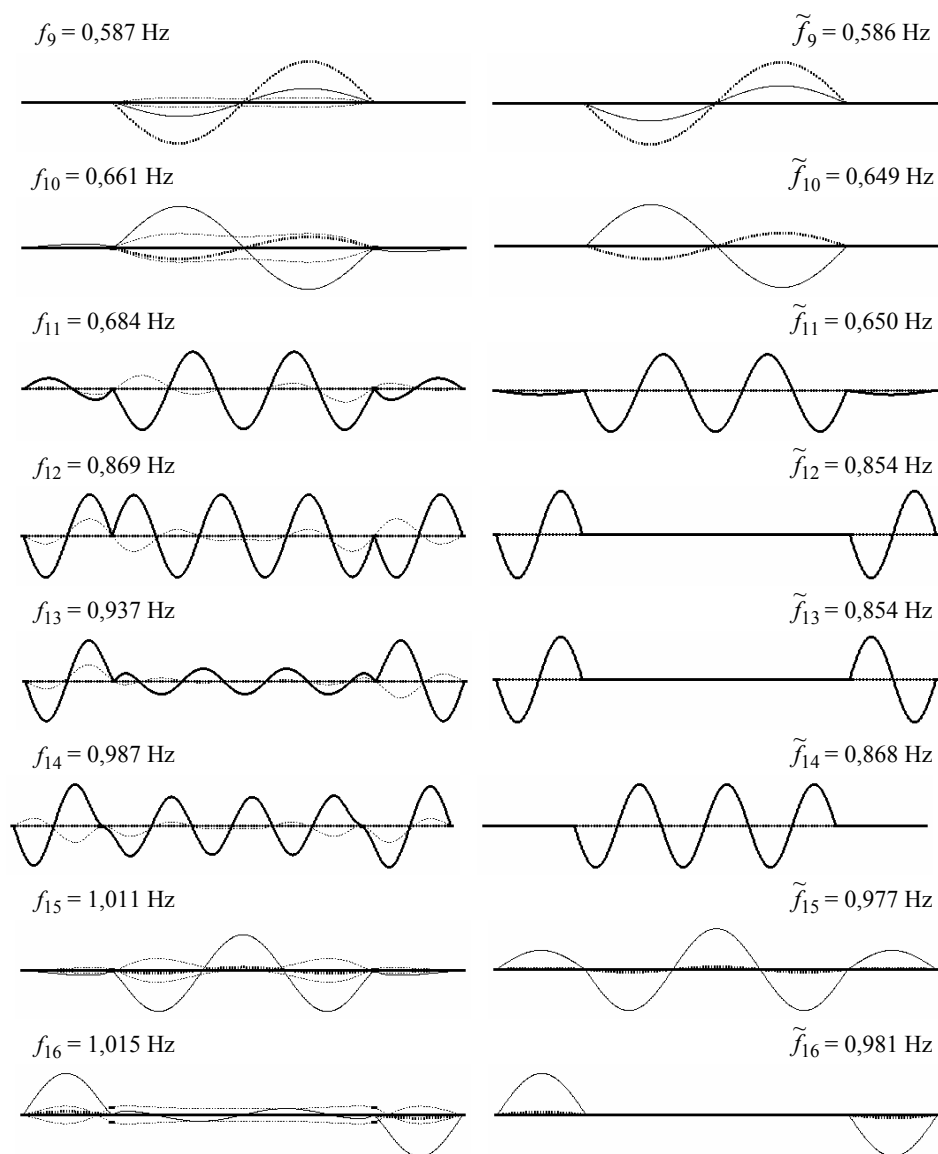
Z porównania kształtów form własnych wynikają najistotniejsze wnioski. Formy własne drgań mostu Vincenta Thomasa, zidentyfikowane na podstawie pomiarów, zostały pokazane w pracy Abdel-Ghaffara i Housnera [5]. W przedstawionych postaciach drgań ruch przęsła centralnego i przęseł bocznych jest sprzężony zarówno w formach symetrycznych, jak i antysymetrycznych, niezależnie od rodzaju drgań (pionowe, skrętne, poprzeczne). W niskich formach sprzężenia są niewielkie, ale ich poziom rośnie w wyższych formach. Uproszczony algorytm obliczeń, w którym pomija się poziome przemieszczenia cięgien, prowadzi do wyznaczenia form własnych, które istotnie odbiegają kształtem od form wyznaczonych eksperymentalnie. W formach antysymetrycznych ruch przęsła jest niezależny, co można zaakceptować jedynie w formach początkowej strefy widma własnego. Ponadto w wyższych formach symetrycznych teoria uproszczona prowadzi do szybkiego zaniku sprzężeń między drganiami przęsła, co nie znajduje potwierdzenia w postaciach drgań zidentyfikowanych pomiarowo.

Uwzględnienie w obliczeniach wpływu poziomych przemieszczeń cięgien umożliwia uzyskanie dokładniejszego kształtu form własnych. Omawiane sprzężenia ruchu przęsła ujawniają się zarówno w formach symetrycznych, jak i antysymetrycznych. Zaobserwowano jednak, że poziom sprzężenia drgań przęsła w wyższych formach jest zbyt duży (forma 12 i 14). Może to wynikać z faktu, że w rzeczywistej konstrukcji poziomy przesuw cięgien w punktach podparcia na pylonach nie jest całkiem swobodny, jak założono w modelu obliczeniowym mostu.



Rys. 3.6. Formy własne drgań mostu Vincenta Thomasa, obliczone z uwzględnieniem i z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien

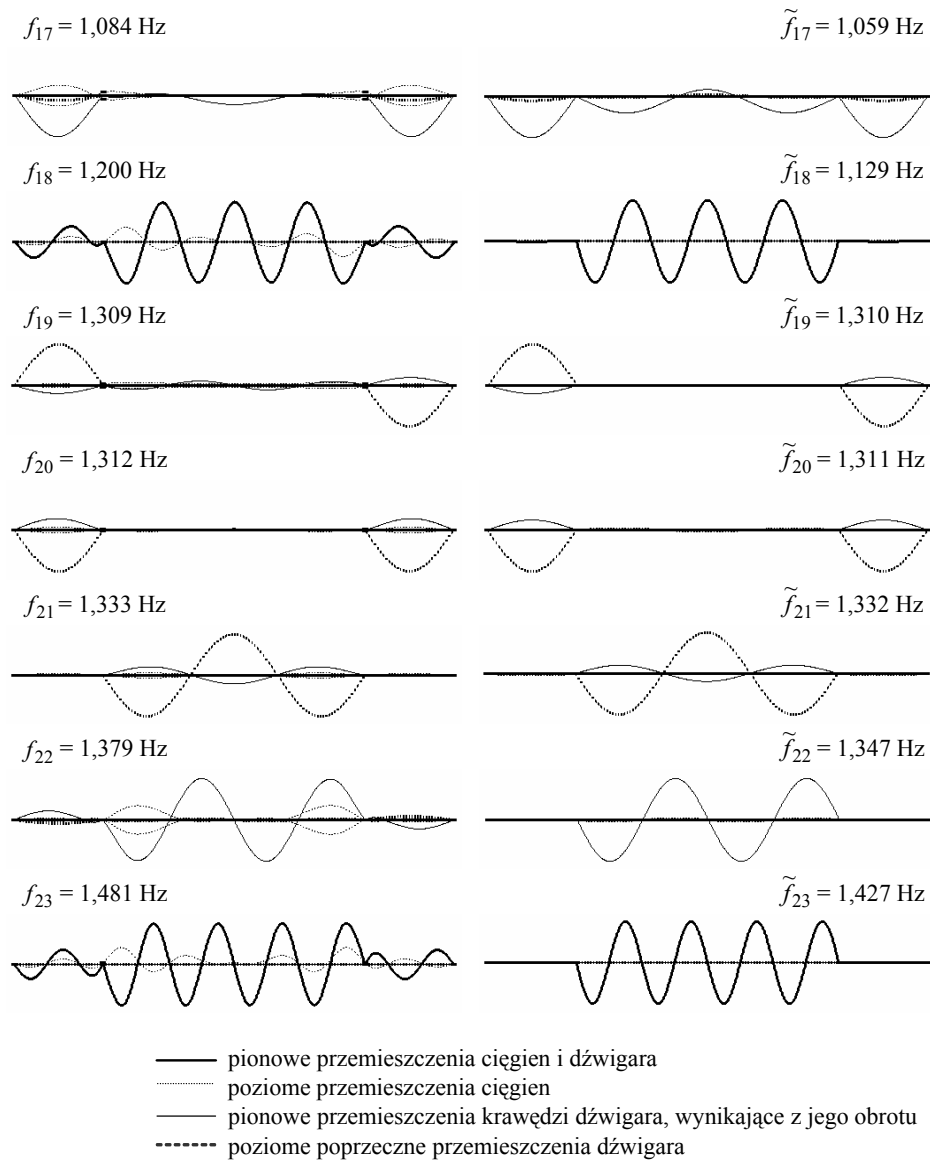
Fig. 3.6. Natural modes of Vincent Thomas Bridge vibrations calculated with horizontal cable displacements being taken into account or omitted



- pionowe przemieszczenia cięgien i dźwigara
- ..... poziome przemieszczenia cięgien
- — — pionowe przemieszczenia krawędzi dźwigara, wynikające z jego obrotu
- poziome poprzeczne przemieszczenia dźwigara

Rys. 3.7. Formy własne drgań mostu Vincenta Thomasa, obliczone z uwzględnieniem i z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien (cd.)

Fig. 3.7. Natural modes of Vincent Thomas Bridge vibrations calculated with horizontal cable displacements being taken into account or omitted (continued)



Rys. 3.8. Formy własne drgań mostu Vincenta Thomasa, obliczone z uwzględnieniem i z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien (cd.)

Fig. 3.8. Natural modes of Vincent Thomas Bridge vibrations calculated with horizontal cable displacements being taken into account or omitted (continued)

Przedstawione wyniki obliczeń wykazały, że teoria sformułowana z uwzględnieniem poziomych składowych stanu przemieszczenia cięgien umożliwia dokładniejsze oszacowanie częstotliwości w porównaniu z teorią klasyczną, ale przede wszystkim

formy własne drgań są zdecydowanie bliższe rzeczywistym. Wniosek ten dotyczy głównie drgań pionowych dźwigara usztywniającego, które w istotny sposób zależą od wpływu podwieszenia. Ponadto w przypadku drgań pionowych porównanie wyników obliczeń z wynikami pomiarów drgań obiektu rzeczywistego jest najbardziej wiarygodne. Charakterystyki sztywnościowo-masowe modelu obliczeniowego są wtedy najlepiej oszacowane, a także identyfikację pomiarową częstości i form własnych można uznać za dostatecznie dokładną, ponieważ badania dynamiczne zostały przeprowadzone przez autorów pracy [5] w trakcie normalnego użytkowania mostu, przy obciążeniu zwykłym ruchem drogowym, który powoduje wzbudzenie głównie drgań pionowych.

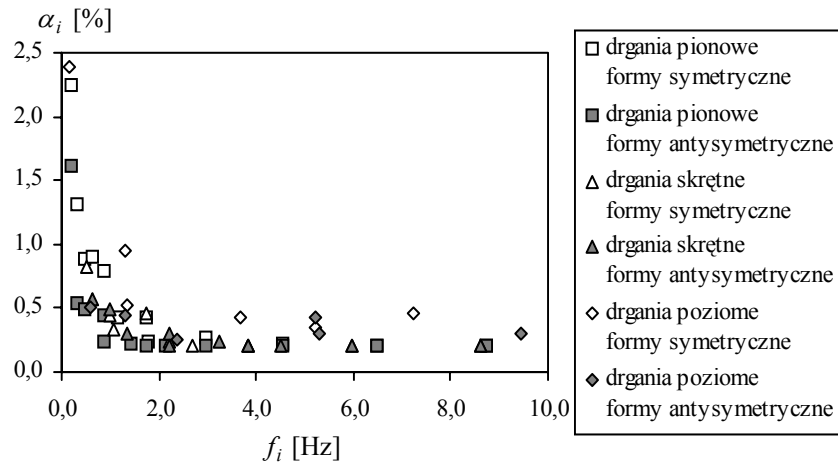
### **3.3. Dobór modelu tłumienia na podstawie analizy drgań rezonansowych przy wymuszeniu okresową serią ruchomych sił skupionych**

Przed przystąpieniem do właściwej analizy drgań wymuszonych należy ostatecznie wybrać odpowiedni dla rozważanej konstrukcji sposób opisu tłumienia. Jeśli obliczenia dynamiczne są wykonywane w fazie projektowania mostu, to nie jest możliwa deklaracja tłumienia modalnego według danych pomiarowych i własności tłumiącej konstrukcji opisuje się w przybliżeniu za pomocą modelu teoretycznego. Wybór modelu tłumienia ma duże znaczenie, gdyż może istotnie zmienić ocenę stanu dynamicznego wyężenia konstrukcji (Bryja [24]). Z rozważań teoretycznych przedstawionych w rozdziale 2.6 wynika, że model masowy prawdopodobnie najlepiej opisuje charakterystyczne cechy tłumienia mostów wiszących. Celem niniejszych badań jest zweryfikowanie powyższej prognozy teoretycznej na podstawie analizy numerycznej drgań wymuszonych przykładowego mostu, z zastosowaniem różnych wariantów hipotezy tłumienia wiskotycznego. Rozpatrywane będą drgania wymuszone okresową serią równoodległych, ruchomych sił skupionych, co umożliwi analizę drgań konstrukcji w strefach rezonansowych. W strefach rezonansu wpływ tłumienia jest największy, tam zatem mogą się wyraźnie ujawnić różnice między rozwiązaniami wyznaczonymi dla różnych modeli tłumienia. Porównanie tych rozwiązań z wynikami uzyskanymi przy założeniu tłumienia „realnego” pozwoli ocenić przydatność poszczególnych modeli tłumienia do analizy drgań rozważanych mostów. Tłumienie „realne” oznacza tu opis tłumienia poprzez deklarację modalnych współczynników, ustalonych na podstawie pomiarów drgań badanego mostu.

Obiektem analizy jest most Vincenta Thomasa, dla którego Abdel-Ghaffar i Hosner [5] wyznaczyli przedziały zmienności liczb tłumienia  $\alpha_i$  (ułamek tłumienia krytycznego), odpowiadających kolejnym głównym postaciom drgań mostu, z rozróżnieniem form giętnych – pionowych i poziomych oraz form skrętnych. Do deklaracji tłumienia „realnego” wybrano średnie wartości z podanych w pracy [5] przedziałów



zmienności współczynników tłumienia i przyporządkowano je odpowiednim formom drgań. Na rysunku 3.9 przedstawiono wykres ilustrujący to przyporządkowanie i zarazem charakter zależności modalnych liczb tłumienia od częstości. Ze względu na szczególną czasochłonność planowanych obliczeń, w analizie drgań wymuszonych zastosowano prostszy wariant algorytmu, którego podstawą merytoryczną jest hipoteza Kirchhoffa, dopuszczająca pominięcie wpływu poziomych przemieszczeń na pionowe drgania ciężna. Badania ograniczono do analizy drgań liniowych. Przyjęto tym samym, że charakter wpływu różnych sposobów opisu tłumienia nie zależy istotnie od stopnia szczegółowości modelu obliczeniowego.



Rys. 3.9. Liczby tłumienia modalnego zidentyfikowane przez Abdel-Ghaffara i Housnera na podstawie pomiarów drgań mostu Vincenta Thomasa [5]

Fig. 3.9. Modal damping ratios measured by Abdel-Ghaffar and Housner during ambient vibration tests of Vincent Thomas Bridge [5]

Obciążenie dynamiczne przyjęto w postaci serii równoodległych, ruchomych sił skupionych o jednakowych wartościach  $P_k = P = \text{const}$ . Siły te poruszają się wzdłuż toru równoległego do osi podłużnej mostu, ze stałą prędkością  $v$ , w stałych odstępach  $d$ . Składowe obciążenia, po redukcji do środka ścinania przekroju dźwigara, wynoszą:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_{z_i}(x_i, t) &= \sum_{k=n_i}^{n_{2i}} P_k \cdot \delta(x_i - x_{ik}), \\
 \mathbf{q}_{y_i}(x_i, t) &= 0, \\
 \mathbf{m}_{x_i}(x_i, t) &= \sum_{k=n_i}^{n_{2i}} e_P P_k \cdot \delta(x_i - x_{ik}).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wektor wzbudzenia  $\mathbf{F} = \text{col}(\mathbf{F}_{b1}, \mathbf{F}_{b2}, \mathbf{F}_{b3})$ ,  $\mathbf{F}_{bi} = \text{col}(\mathbf{F}_{wi}, \mathbf{F}_{vi}, \mathbf{F}_{\phi i})$ , którego podbloki są opisane ogólnymi wzorami (2.65), jest tu określony następująco:

$$\mathbf{F}_{wi}(t) = \sum_{k=n_{1i}}^{n_{2i}} P_k \tilde{\mathbf{s}}_{ik}, \quad \mathbf{F}_{vi} = 0, \quad \mathbf{F}_{\phi i}(t) = \frac{e_p}{e} \sum_{k=n_{1i}}^{n_{2i}} P_k \tilde{\mathbf{s}}_{ik}. \quad (3.2)$$

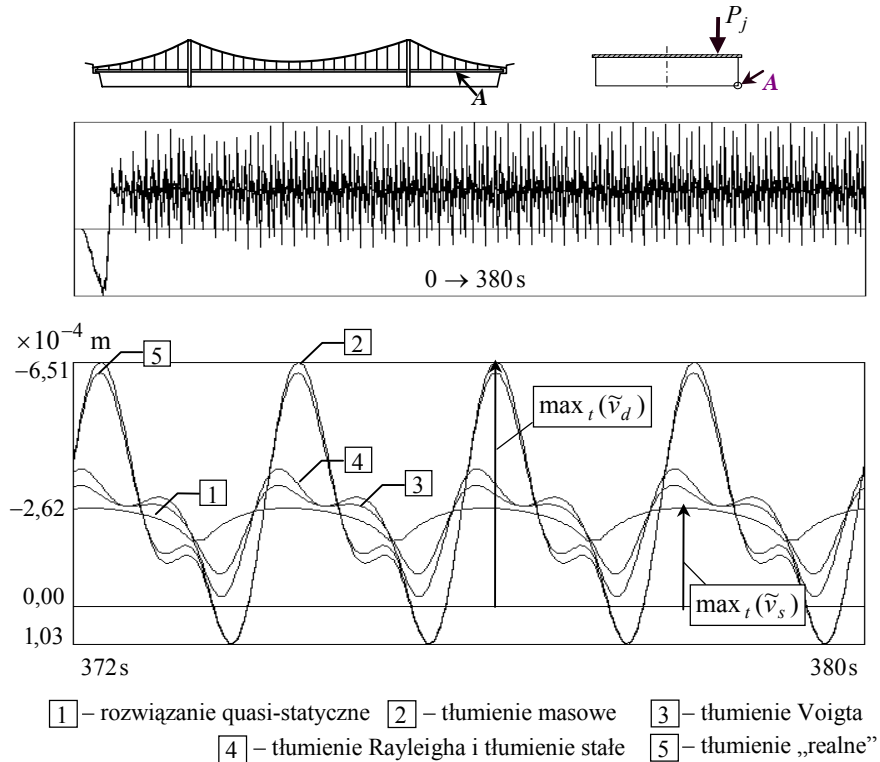
Liczby naturalne  $n_{1i}$ ,  $n_{2i}$  określają podzbiór sił znajdujących się w chwili  $t$  w obrębie przęsła o numerze  $i = 1, 2, 3$ . Symbol  $\delta$  oznacza funkcję delta Diraca,  $\tilde{\mathbf{s}}_{ik} = \mathbf{s}_i(x_{ik})$  jest wektorem funkcji aproksymacyjnych, śledzących położenie siły  $P_k$ , czyli funkcji o argumentie  $x_{ik} = (k-1)d + vt - L_{i-1}$ , gdzie  $L_i = \sum_{r=1}^i l_r$ ,  $L_0 = 0$ . Dla  $x_{ik} < 0$  lub  $x_{ik} > l_i$  należy przyjąć  $\tilde{\mathbf{s}}_{ik} = 0$ , aby sumowanie we wzorach (3.2) dotyczyło podzbioru  $k = n_{1i}, \dots, n_{2i}$ . Symbolem  $l_i$  oznaczono rozpiętość przęsła,  $e_p$  jest współrzędną typu  $y_i$  (rys. 2.7), określającą położenie toru sił w przekroju poprzecznym,  $e$  jest odległością płaszczyzny podwieszenia od osi podłużnej mostu.

Do numerycznego całkowania równań ruchu zastosowano bezwarunkowo stabilny wariant metody Newmarka ( $\beta = 1/4$ ). Rozwiązania dynamiczne wyznaczono w pięciu wariantach, odpowiadających następującym modelom tłumienia, omówionym szczegółowo w rozdziale 2.6:

1. Tłumienie masowe  $\rightarrow \mathbf{C} = \mu \mathbf{B} = 2\pi\gamma f_1 \mathbf{B}$ ,
2. Tłumienie Voigta–Kelvina  $\rightarrow \mathbf{C} = \kappa \mathbf{K} = \gamma / (2\pi f_1) \mathbf{K}$ ,
3. Tłumienie Rayleigha  $\rightarrow \mathbf{C} = \mu \mathbf{B} + \kappa \mathbf{K}$ ,  
 $\mu = 2\pi\gamma f_1 f_2 / (f_1 + f_2)$ ,  
 $\kappa = \gamma / 2\pi(f_1 + f_2)$ ,
4. Tłumienie stałe  $\gamma_i = \gamma = \text{const} \rightarrow \mathbf{C} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{c} \mathbf{W}^{-1}$ ,  
 $c_i^o = \gamma_i \sqrt{k_i^o m_i^o}$ ,
5. Tłumienie „realne” (rys. 3.9)  $\rightarrow \mathbf{C} = (\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{c} \mathbf{W}^{-1}$ ,  
 $c_i^o = \gamma_i \sqrt{k_i^o m_i^o}$ .

W każdym przypadku przyjęto jednakową, miarodajną dla konstrukcji wartość liczby tłumienia  $\alpha = \gamma / 2 = 0,02$ , która jest w przybliżeniu średnią z dwóch wartości rzeczywistego tłumienia modalnego, odpowiadających pierwszej antysymetrycznej i pierwszej symetrycznej formie drgań pionowych (rys. 3.9). W masowym i reologicznym modelu tłumienia współczynnik  $\gamma$  skojarzono z podstawową częstością drgań pionowych  $f_1 = 0,184$  Hz. Jest to druga częstość pełnego widma; pierwsza dotyczy

drzań poziomych. W modelu Rayleigha zażądano, aby ten sam poziom tłumienia dotyczył dwóch kolejnych częstotliwości:  $f_1 = 0,184$  Hz i  $f_2 = 0,204$  Hz, co prowadzi do układu dwóch równań:  $\gamma = \mu / (2\pi f_1) + \kappa 2\pi f_1$ ,  $\gamma = \mu / (2\pi f_2) + \kappa 2\pi f_2$ , z którego wyliczono parametry wymiarowe  $\mu$  oraz  $\kappa$  [75].



Rys. 3.10. Przebieg poziomej składowej drzań mostu w punkcie  $A$   
Fig. 3.10. Time history of a horizontal component of bridge vibration at the point  $A$

Na rysunku 3.10 przedstawiono przykładową odpowiedź mostu Vincenta Thomasa na działanie cyklicznego obciążenia o parametrach:  $e_p = 6$  m,  $P = 50$  kN,  $v = 40$  m/s,  $d = 80$  m. Pierwszy z dwóch wykresów pokazanych na rysunku jest komputerową symulacją przebiegu poziomej składowej drzań mostu w punkcie  $A$  (wzór (2.122)), przy odstępnie czasowym między siłami  $\Delta = d/v = 2$  s. Drgania, po początkowym okresie przejściowym, przybierają postać cyklu ustalonego. Ustalone cykle drzań nie są widoczne na tym wykresie, ponieważ krok czasowy rysowania wykresu jest 760 razy większy od kroku numerycznego całkowania równań ruchu, który wynosił  $10^{-3}$  s. Wykres ten ma charakter poglądowy, ilustruje numeryczny sposób wyznaczenia cyklu ustalonego. Na drugim wykresie jest przedstawiony szczegółowy przebieg czterech

ostatnich cykli drgań. W tle rozwiązań dynamicznych pokazano rozwiązanie quasi-statyczne, obliczone na podstawie równania statycznego  $\mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t)$ , w którym  $t$  jest parametrem określającym lokalizację obciążenia. W przypadku rozważanego rozwiązania założenie masowego modelu tłumienia powoduje niewielkie zawyżenie amplitudy drgań w cyklu ustalonym, a kształt cyklu bardzo niewiele różni się od wyznaczonego przy tłumieniu „realnym”. Zastosowanie modelu Voigta znacznie zaniża i zmienia przebieg oscylacji. Tłumienie kombinowane daje praktycznie takie same rezultaty jak tłumienie stałe. Wyniki te są nieco lepsze niż w przypadku modelu Voigta, lecz także nadmiernie zaniżone w porównaniu z rozwiązaniem wyznaczonym przy założeniu tłumienia „realnego”.

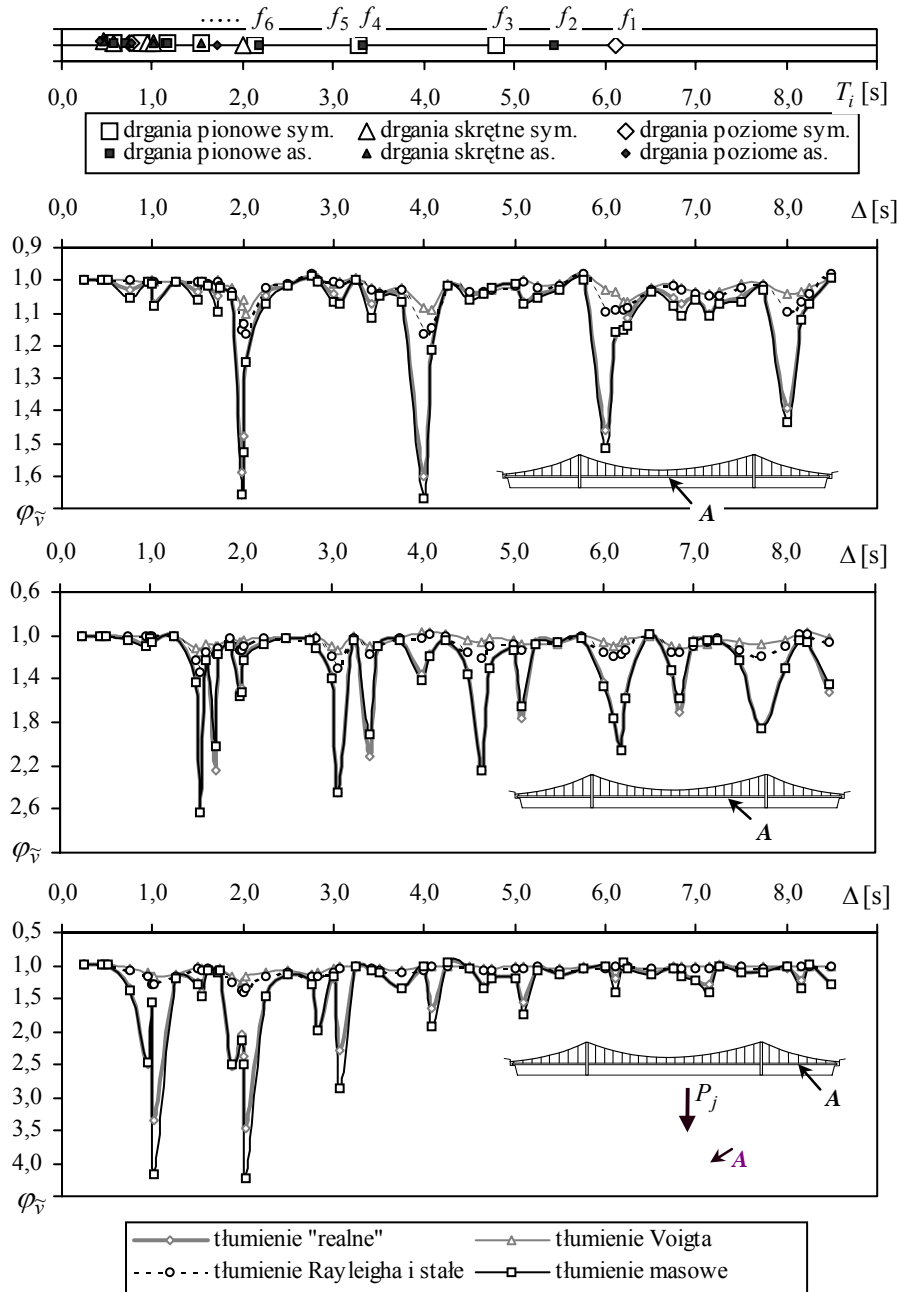
Aby umożliwić syntetyczną analizę rozwiązań, wykorzystano rozwiązania w cyklu ustalonym do obliczenia wartości współczynnika dynamicznego, zdefiniowanego ogólnym wzorem o postaci

$$\varphi_{\mathbf{S}} = \max_t(\mathbf{S}_d) / \max_t(\mathbf{S}_s), \quad (3.3)$$

gdzie  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_i, t)$  oznacza dowolnie wybraną odpowiedź mostu w przekroju  $x_i$ , a indeksy  $d$  i  $s$  oznaczają odpowiednio odpowiedź dynamiczną i statyczną. Na rysunku 3.10 zaznaczono przykładowo wielkości  $\max_t(\tilde{v}_d)$ ,  $\max_t(\tilde{v}_s)$ , służące do obliczenia współczynnika dynamicznego  $\varphi_{\tilde{v}}$  przy założeniu tłumienia masowego.

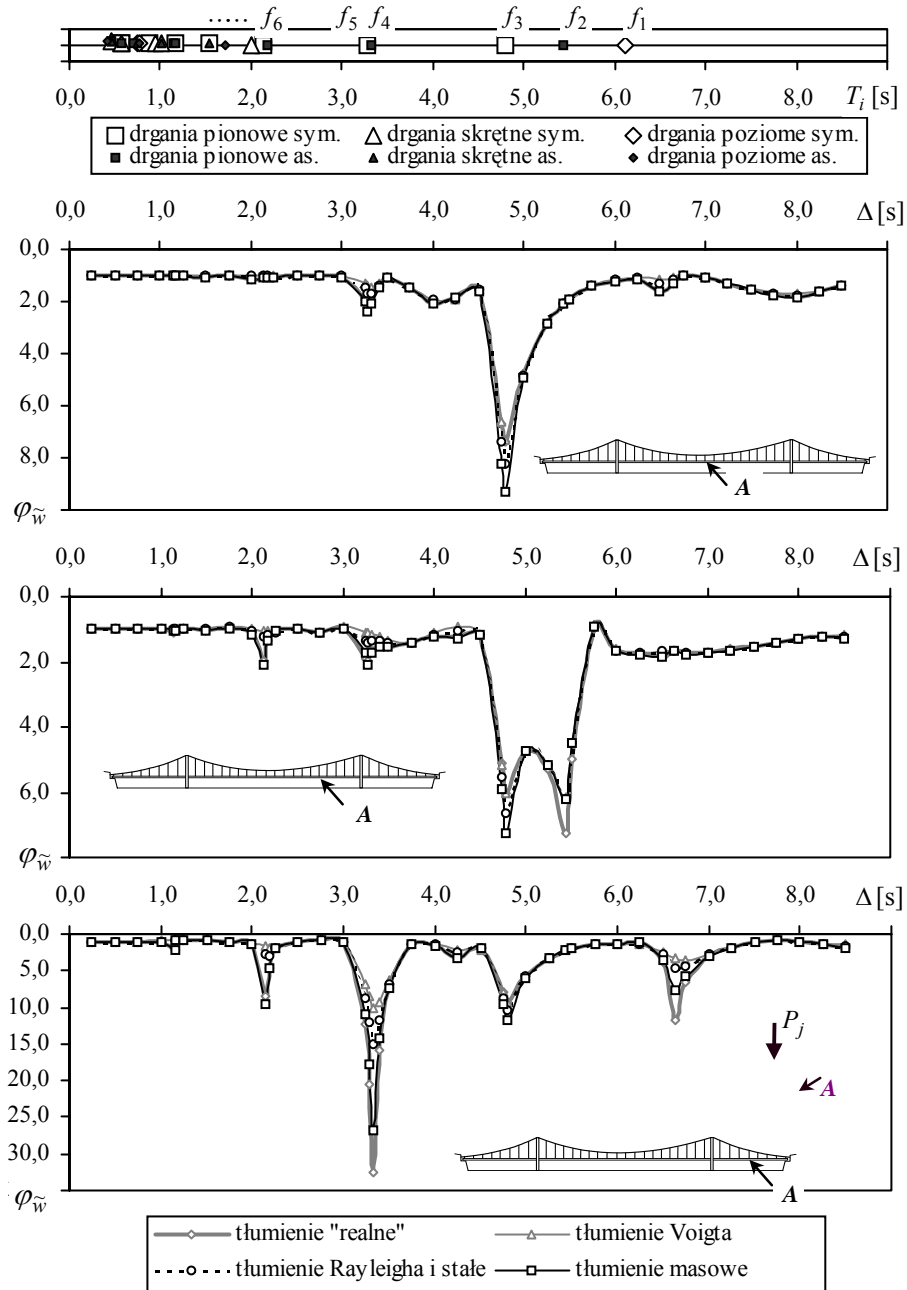
Wykresy przedstawione na rys. 3.11 i 3.12 ilustrują zależność współczynnika dynamicznego od okresu wymuszenia, który jest równy odstępowi czasowemu  $\Delta$  między siłami. Jeśli założymy, że seria sił modeluje w przybliżeniu strumień pojazdów drogowych, to przyjęty do obliczeń zakres wartości okresu wymuszenia (od  $\Delta = 0,25$  s do  $\Delta = 8,5$  s, przy prędkości 40 m/s) obejmuje realny przedział możliwych odstępów między pojazdami: od 10 m do 340 m. Piki, widoczne na wykresach współczynników dynamicznych, pojawiają się w strefach wzmocnień rezonansowych, gdy okres wymuszenia  $\Delta$  ma wartość zbliżoną do okresów własnych  $T_i$  drgań mostu lub jest ich wielokrotnością. Położenie pików rezonansowych odpowiada okresom własnym tych drgań głównych, których postaci istotnie wpływają na rozpatrywaną odpowiedź układu. Drganiami głównymi nazywamy: „drżania opisane całkami szczególnymi jednorodnego układu równań ruchu”, zgodnie z definicją podaną w monografii Kaliskiego [72]. Rozkład okresów  $T_i$  odpowiadających prążkom początkowej strefy widma własnego pokazano na rys. 3.11 i 3.12, powyżej wykresów współczynników dynamicznych.

Rozważmy najpierw rozwiązania przedstawione na rys. 3.11. Dotyczą one drgań poziomych w punkcie przekroju poprzecznego dźwigara, który jest oznaczony na rysunku symbolem  $A$ . Rysunek 3.11 zawiera trzy wykresy zależności współczynnika dynamicznego od okresu wymuszenia, sporządzone w trzech wybranych przekrojach mostu.



Rys. 3.11. Zależność współczynnika dynamicznego od okresu wymuszenia dla poziomej składowej drgań mostu w punkcie  $A$

Fig. 3.11. Dynamic amplification factor versus cycle time of load for a horizontal component of bridge vibration at the point  $A$



Rys. 3.12. Zależność współczynnika dynamicznego od okresu wymuszenia dla pionowej składowej drgań mostu w punkcie  $A$

Fig. 3.12. Dynamic amplification factor versus cycle time of load for a vertical component of bridge vibration at the point  $A$

Analiza wykresów prowadzi do wniosku, że drgania poziome są kształtowane głównie przez początkowe formy własne drgań skrętnych. Pozioma składowa drgań dźwigara jest bowiem spowodowana jego obrotem, wywołanym obciążeniem siłami poruszającymi się po skrajnym pasie ruchu. Drgania w przekroju środkowym przęsła centralnego są kształtowane głównie przez pierwszą symetryczną formę skrętną o okresie 1,99 s i częstotliwości  $f_8 = 0,502 \text{ Hz}$ , w niewielkim stopniu – przez wyższe symetryczne formy skrętne i formy poziome. Podstawowa, symetryczna forma skrętna jest ósmym prążkiem pełnego widma, dla którego model Voigta powoduje już znaczne zawyżenie poziomu tłumienia modalnego. Stąd wynika zdecydowane zaniżenie wartości piku rezonansowego w stosunku do tłumienia „realnego”. Tłumienie Rayleigha i tłumienie stałe dają niewiele lepsze rezultaty. Pik rezonansowy jest najlepiej wymodelowany przy założeniu modelu masowego, w którym obserwuje się nieznaczne zawyżenie wartości piku. Oprócz zasadniczych wzmocnień rezonansowych pojawiają się także piki odpowiadające wielokrotnościom okresów własnych, co jest wyraźnie widoczne w przypadku piku podstawowego. Wnioski dotyczące tłumienia są słuszne dla całej sekwencji pików. Są też słuszne dla drgań poziomych w pozostałych dwóch analizowanych przekrojach. Przy okazji można stwierdzić, że decydujący udział w kształtowaniu drgań poziomych w 3/4 rozpiętości przęsła centralnego mają trzy formy: druga forma skrętna i druga pozioma – obie antysymetryczne, mniejszy udział ma pierwsza symetryczna forma skrętna. Odpowiednie trzy piki rezonansowe powtarzają się w rytmie wielokrotności stowarzyszonych okresów własnych, przy czym poziom wzmocnienia maleje. Największe wartości współczynników dynamicznych otrzymuje się w przypadku drgań przęsła bocznych:  $\varphi_{\bar{v}} \cong 3,5$  przy tłumieniu „realnym”,  $\varphi_{\bar{v}} \cong 4$  przy tłumieniu masowym. Drgania w przekroju środkowym przęsła bocznego są kształtowane przez słabo tłumione, wyższe formy skrętne z dominacją ruchu przęsła bocznych, zatem zastosowanie modelu Voigta, Rayleigha oraz tłumienia stałego powoduje w tym przypadku radykalne zaniżenie współczynników dynamicznych ( $\varphi_{\bar{v}} < 1,5$ ).

Wnioski, które wynikają z analogicznej analizy drgań pionowych, są nieco inne. Pierwsze dwa wykresy, przedstawione na rysunku 3.12, dotyczą drgań przęsła centralnego. Dominujący udział w kształtowaniu drgań przekroju środkowego ma druga forma pionowa (symetryczna), w przekroju w 3/4 rozpiętości przęsła centralnego – forma pierwsza (antysymetryczna) i druga (symetryczna). W strefie rezonansu z podstawową częstotliwością drgań pionowych, przeciążenia dynamiczne wyznaczone za pomocą rozważanych modeli tłumienia mają taką samą wartość, niższą niż przy tłumieniu „realnym”. Jest to spowodowane przyjęciem w każdym modelu tłumienia jednakowej wartości współczynnika  $\alpha = 0,02$ , która, skojarzona z podstawową częstotliwością drgań pionowych, określa wymiarowe parametry  $\mu$  oraz  $\kappa$ . Poziom modalnego tłumienia „realnego” jest w przypadku formy podstawowej nieco niższy, ponieważ współczynnik  $\alpha = 0,02$  przyjęto jako średnią z pierwszych dwóch wartości

rzeczywistego tłumienia modalnego drgań pionowych (rys. 3.9). Rzeczywiste tłumienie modalne drugiej formy jest nieco większe od „wyjściowej” wartości  $\alpha = 0,02$ , zatem przy tłumieniu Voigta, powodującym sukcesywny wzrost tłumienia modalnego, otrzymuje się drugi pik rezonansowy o wartości zgodnej z tłumieniem „realnym”. Model masowy powoduje w tym przypadku zawyżenie wartości piku, a tłumienie stałe i Rayleigha daje, zgodnie z oczekiwaniem, wartość pośrednią. Wyznaczenie niewielkich wzmocnień rezonansowych odpowiadających wyższym częstościom drgań pionowych jest możliwe wyłącznie przy zastosowaniu masowego modelu tłumienia.

Drgania pionowe przęsła bocznego charakteryzują się największymi przeciążeniami dynamicznymi. Są kształtowane głównie przez trzecią formę własną drgań pionowych (antysymetryczną), w której dominuje ruch przęseł bocznych. Tłumienie „realne”, zidentyfikowane dla tej postaci drgań, jest bardzo niskie, co powoduje pojawienie się piku rezonansowego o dużej wartości. Zbliżoną wartość piku można otrzymać jedynie przy założeniu tłumienia masowego, podobnie jak w przypadku drgań poziomych. Pozostałe modele tłumienia prowadzą do drastycznie zaniżonych oszacowań wartości piku rezonansowego.

Przedstawione wyniki badań numerycznych potwierdzają wcześniejszą prognozę teoretyczną. Model Voigta–Kelvina nie powinien być stosowany do analizy drgań mostów wiszących, w których tłumienie modalne maleje ze wzrostem częstości, podobnie jak w przypadku mostu Vincenta Thomasa. Stosowanie modelu Voigta–Kelvina może doprowadzić do znacznego zniżenia poziomu odpowiedzi takich mostów. W wyniku zastosowania tłumienia Rayleigha lub modelu tłumienia stałego uzyskuje się niewiele dokładniejsze rozwiązania. Wymienione modele dają dobre rezultaty tylko dla tych odpowiedzi konstrukcji, które są kształtowane przez najniższe postacie drgań – na przykład dla pionowych drgań przęsła głównego. W przypadku pionowych drgań przęseł bocznych, które są kształtowane przez słabiej tłumione, wyższe formy drgań, otrzymuje się rozwiązania niekorzystnie zaniżone. Szczególnie niekorzystne może być stosowanie tych modeli do analizy drgań wywołanych rytmicznym oddziaływaniem porywów wiatru, ponieważ kolejne częstości drgań poziomych są od siebie mocno oddalone, a częstość podstawowa jest bardzo niska. Dobrym przybliżeniem tłumienia rzeczywistego w mostach wiszących o malejącym tłumieniu modalnym jest model tłumienia masowego, który może nieco zawyżać realne wartości pików oscylacji, ale jest to efekt korzystny z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji. Należy zauważyć, że wnioski te dotyczą głównie drgań rezonansowych. Poza strefami rezonansu różnice między rozpatrywanymi modelami tłumienia są niewielkie, ale w przypadku rozważanych mostów wykluczenie możliwości występowania stanów rezonansowych jest praktycznie niemożliwe.

### **3.4. Statyczne i dynamiczne funkcje wpływu wybranych przemieszczeń mostu i naciągów ciągien**

Celem niniejszych badań numerycznych jest analiza przebiegów dynamicznych i przebiegów quasi-statycznych wybranych odpowiedzi mostu i na tym tle – ocena

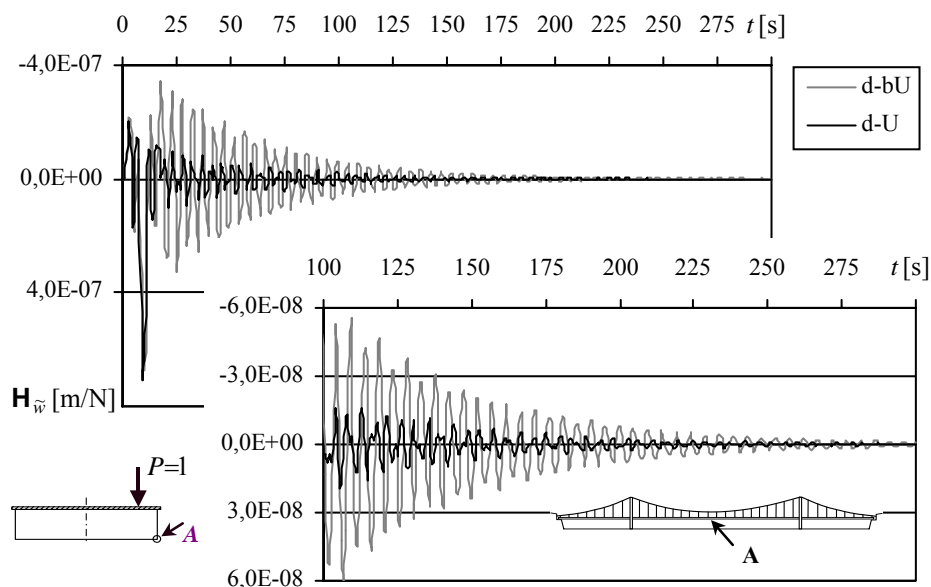


jakościowa i ilościowa wpływu poziomych przemieszczeń cięgien na drgania wymuszone mostów wiszących, a także na odpowiedź statyczną. Przedstawione w rozdziale 3.2 wyniki analizy zagadnienia własnego sugerują, że wpływ ten może okazać się istotny już w przypadku mostów z cięgnami o małym zwisach. Jako przykładowy obiekt badań przyjęto zatem ponownie most Vincenta Thomasa, o takiej geometrii cięgien, która kwalifikuje ten most do grupy obiektów z cięgnami o małym zwisie. Badania ograniczono do analizy zagadnienia liniowego. Do opisu tłumienia drgań wybrano model masowy tłumienia wiskotycznego z parametrem  $\mu = 2\alpha\omega_1$ , gdzie  $\alpha = 0,02$ , zgodnie z sugestiami i danymi zawartymi w rozdziale 3.3. Rozważono specyficzny przypadek obciążenia mostu w postaci jednostkowej siły skupionej, poruszającej się ze stałą prędkością  $v$  po torze równoległym do osi podłużnej mostu. Lokalizacja toru w przekroju poprzecznym jest określona współrzędną  $e_p$ . Wektor wzbudzania można w tym przypadku łatwo obliczyć za pomocą wzorów (3.2), podstawiając za  $P_k$  bezwymiarową wartość jednostkową oraz przyjmując  $k = 1$ . Wybór takiej postaci obciążenia ma następujące uzasadnienie. Po pierwsze – przebiegi czasowe dowolnej odpowiedzi mostu  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_i, t)$  na działanie ruchomej siły jednostkowej są dynamicznymi funkcjami wpływu  $\mathbf{H}_s(x_i, t)$ , które będą wykorzystane w dalszej części rozprawy do generowania rozwiązań w zakresie analizy drgań wymuszonych losowym ruchem drogowym. Po drugie – założenie tak prostego przypadku wymuszenia uprości analizę porównawczą rozwiązań i ocenę ich poprawności. Ostatnia uwaga dotyczy szczególnie przebiegów quasi-statycznych, które są statycznymi funkcjami wpływowymi i można je łatwo analizować i oceniać z punktu widzenia intuicji inżynierskiej.

Do obliczeń przyjęto, że siła jednostkowa porusza się po torze o współrzędnej  $e_p = 6\text{ m}$ , czyli wzdłuż osi skrajnego pasa ruchu, z prawej strony przekroju poprzecznego mostu. Założono, że prędkość ruchu siły wynosi  $v = 40\text{ m/s}$ , ponieważ przy tej prędkości należy spodziewać się istotnych wpływów dynamicznych, które wyraźnie różnicują przebiegi dynamicznych funkcji wpływowych od przebiegów quasi-statycznych, co ułatwi ich analizę. To stwierdzenie będzie uzasadnione w rozdziale 4.2, na podstawie analizy odchyłeń standardowych drgań losowych, wywołanych ruchem drogowym. Pokażemy, że przy prędkości ruchu zbliżonej do  $40\text{ m/s}$  otrzymuje się największe wartości odchyłeń standardowych drgań rozważanego mostu. Duże odchylenia standardowe świadczą o tym, że w odpowiednim zagadnieniu deterministycznym rozwiązanie dynamiczne znacznie różni się od statycznego, zatem przy założonej prędkości  $40\text{ m/s}$  przebiegi dynamicznych funkcji wpływu powinny istotnie różnić się od przebiegów quasi-statycznych.

Wykresy przedstawione na rys. 3.13 ilustrują tryb zanikania przykładowej dynamicznej funkcji wpływu. Na wszystkich następujących wykresach, prezentowanych na kolejnych rysunkach, czas obserwacji przebiegów ograniczono do  $40\text{ s}$ , aby początkowy, najistotniejszy fragment wykresów był wyraźnie widoczny. Na rysunku 3.14

przedstawiono funkcje wpływu pionowej składowej drgań wybranego naroża przekroju dźwigara (punkt A), w trzech charakterystycznych przekrojach mostu. Rysunek 3.15 ilustruje analogiczne funkcje wpływu poziomej składowej drgań. Przebiegi czasowe pionowych i poziomych składowych przemieszczeń w rozważanych przekrojach i punktach dźwigara usztywniającego obliczono według wzorów (2.121), (2.122), przy czym współrzędne uogólnione w zagadnieniu dynamicznym wyznaczono całkując numerycznie równania ruchu za pomocą metody Newmarka z parametrem  $\beta = 1/12$ . W zadaniu statycznym współrzędne uogólnione są rozwiązaniami układu równań algebraicznych  $\mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t)$ , dla kolejnych położeń siły jednostkowej, opisanych parametrem  $t$ .



Rys. 3.13. Tryb zanikania funkcji wpływu pionowej składowej drgań naroża A w centralnym przekroju dźwigara usztywniającego

Fig. 3.13. Decay course of influence function for a vertical component of vibration at the corner point A in the central cross-section of stiffness girder

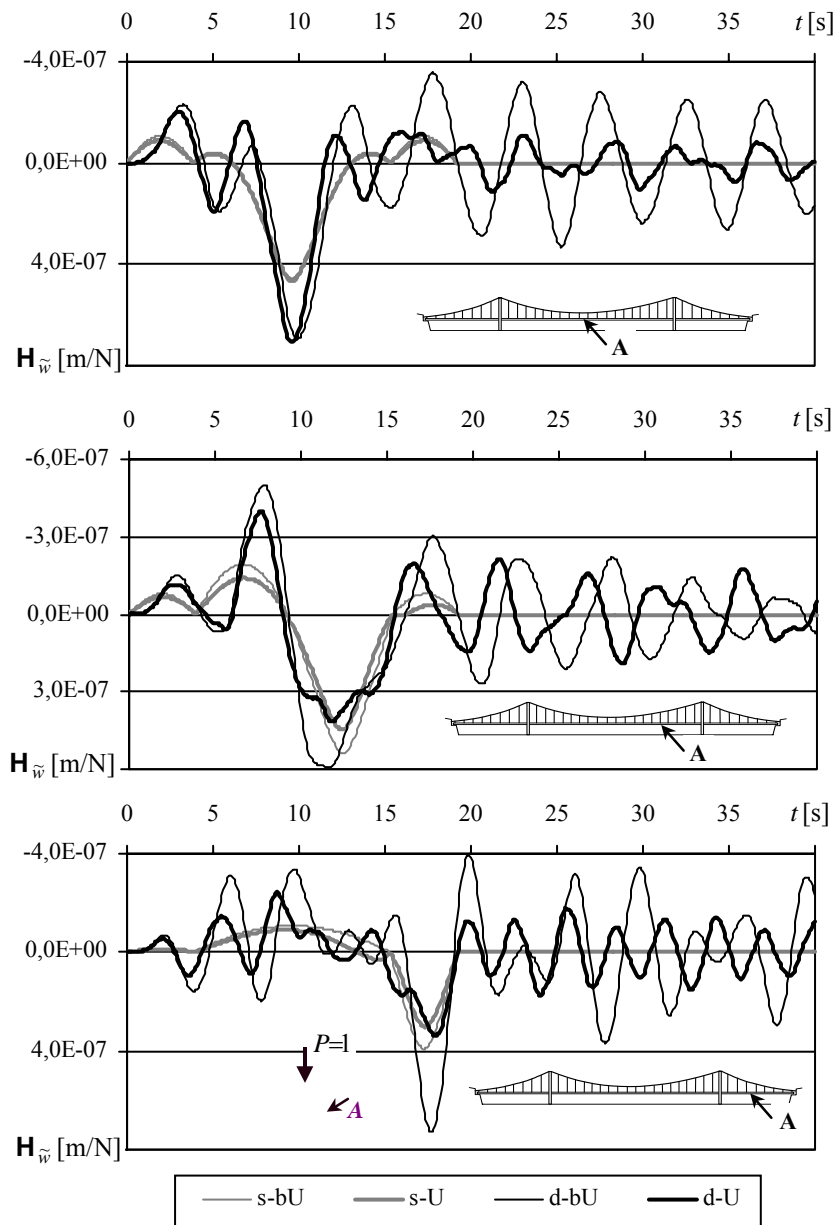
Rozwiązania dynamiczne i quasi-statyczne wyznaczono w dwóch wariantach różniących się zastosowaną wersją algorytmu obliczeniowego. W wersji zasadniczej model obliczeniowy mostu jest opisany równaniami (2.35)–(2.39). Wersja uproszczona algorytmu bazuje na równaniach (2.47)–(2.49), w których pomija się poziome przemieszczenia cięgien. Symbolem tych przemieszczeń w legendzie rysunków jest litera U. Oznaczenia legendy: d-U i s-U odnoszą się do rozwiązań obliczonych z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń cięgien, natomiast symbole: d-bU i s-bU

oznaczają rozwiązania uproszczone (bez U). Litery: d, s wykorzystano do rozróżnienia dynamicznych i statycznych funkcji wpływu.

Jak wynika z rys. 3.13, pominięcie wpływu poziomych przemieszczeń cięgien powoduje znaczne zwiększenie amplitudy pionowych drgań swobodnych, które wykonuje konstrukcja mostu po przejeździe siły, równocześnie wydłuża się czas zanikania drgań. Efekt ten występuje wyraźnie w przekroju środkowym przęsła centralnego i bocznego – piki oscylacji zwiększają się ponad dwukrotnie. W 3/4 rozpiętości przęsła centralnego poziom oscylacji jest podobny w obu rozpatrywanych rozwiązaniach (rys. 3.14). W przypadku poziomej składowej drgań, wynikającej z obrotu dźwigara, pominięcie poziomych przemieszczeń cięgien nie powoduje istotnych zmian przebiegu drgań swobodnych, poziom oscylacji jest nieznacznie niższy (rys. 3.15).

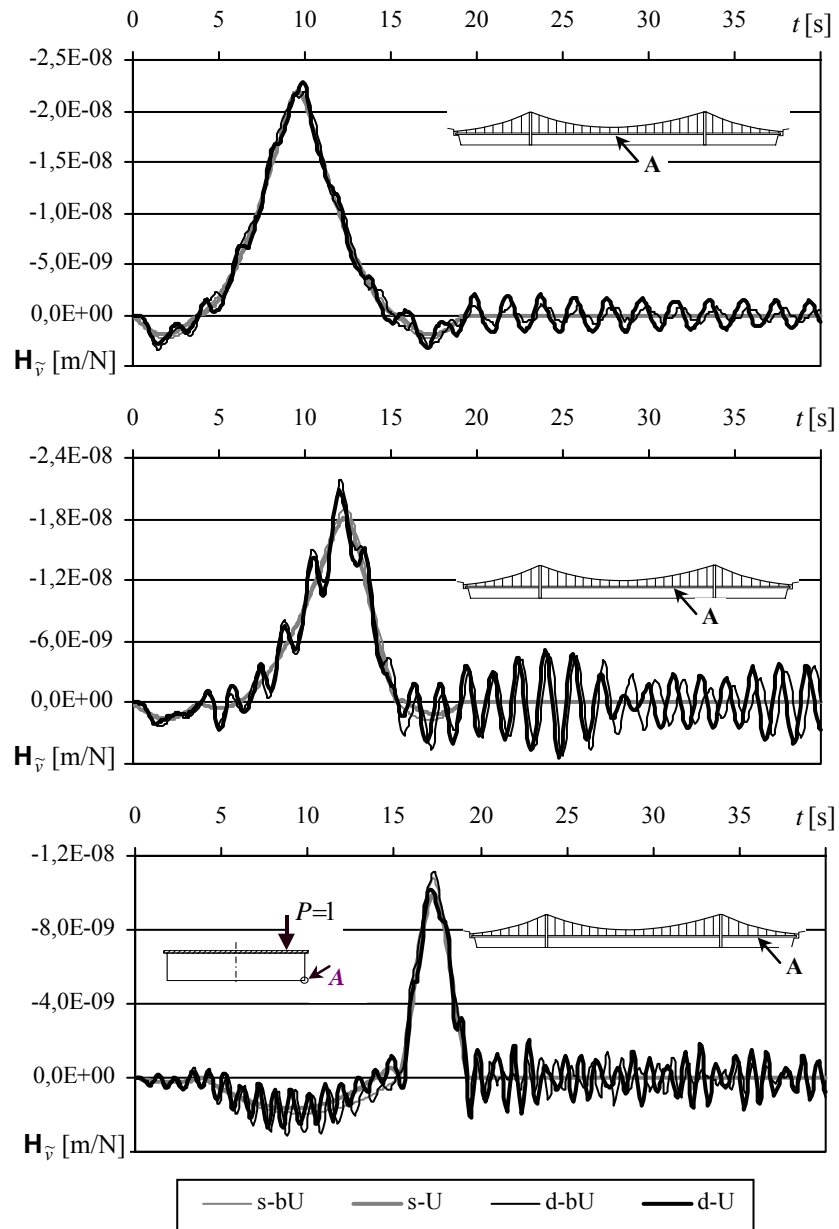
Rozważmy teraz początkowe fragmenty przebiegów funkcji wpływu, przedstawione na rys. 3.14 i 3.15. Obejmują one okres przejazdu siły przez most (drgania wymuszone) i pierwsze cykle drgań swobodnych następujących po zjeździe siły. Wpływ poziomych przemieszczeń cięgien na drgania wymuszone ujawnia się znacząco w przypadku pionowych składowych drgań dźwigara usztywniającego, natomiast jest bardzo niewielki dla składowych poziomych. Analogiczny wniosek dotyczy przebiegów quasi-statycznych. Różnice między przebiegami funkcji  $H_{\bar{v}}(d-U)$  i  $H_{\bar{v}}(d-bU)$  są pomijalnie małe (rys. 3.15), ponieważ formy własne drgań skrętnych, które kształtują te rozwiązania, mają kształt bardzo zbliżony w obu przypadkach  $-U$  i  $bU$ . Poziome składowe przemieszczenia dźwigara usztywniającego są małe w porównaniu z pionowymi. Maksymalne wartości poziomych przemieszczeń statycznych są około dwudziestokrotnie mniejsze od pionowych. Oscylacje przemieszczeń poziomych odpowiadają wyższym częstościom i mają niewielką amplitudę, co oznacza, że w przypadku drgań poziomych wynikających tylko z obrotu dźwigara, wpływy dynamiczne są małe.

Analiza pionowych składowych drgań wymaga więcej uwagi (rys. 3.14). Wpływ poziomych przemieszczeń cięgien jest tu wyraźnie widoczny, przy czym w przebiegach dynamicznych jest większy niż w przebiegach quasi-statycznych. Generalnie można stwierdzić, że pionowe przemieszczenia statyczne i dynamiczne, wyznaczone według teorii uproszczonej, są większe od analogicznych przemieszczeń obliczonych z uwzględnieniem wpływu poziomych przemieszczeń cięgien. Zatem, zastosowanie do obliczeń podejścia uproszczonego (bu) powoduje „przeszacowanie” odpowiedzi konstrukcji. Jest to bezpośredni skutek niewłaściwego opisu współpracy przęsła mostu – całkowitego pominięcia sprzężeń między drganiami przęsła bocznych i drganiami przęsła centralnego w formach antysymetrycznych oraz zaniżenia poziomu sprzężeń w wyższych formach symetrycznych.



Rys. 3.14. Funkcje wpływu pionowej składowej drgań wybranego naroża  $A$  przekroju dźwigara

Fig. 3.14. Influence functions for a vertical component of vibration at the corner point  $A$  of cross-section



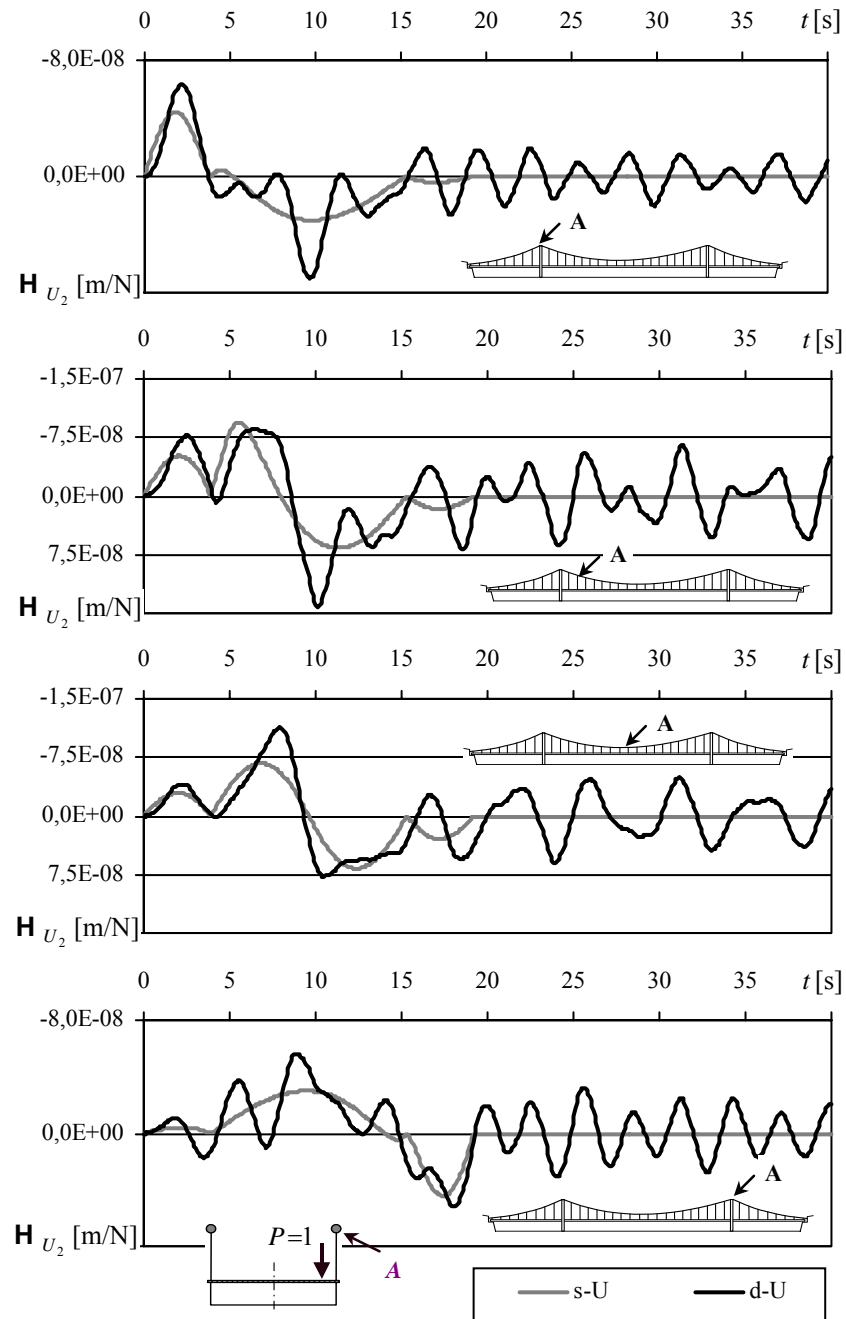
Rys. 3.15. Funkcje wpływu poziomej składowej drgań wybranego naroża  $A$  przekroju dźwigara

Fig. 3.15. Influence functions for a horizontal component of vibration at the corner point  $A$  of cross-section

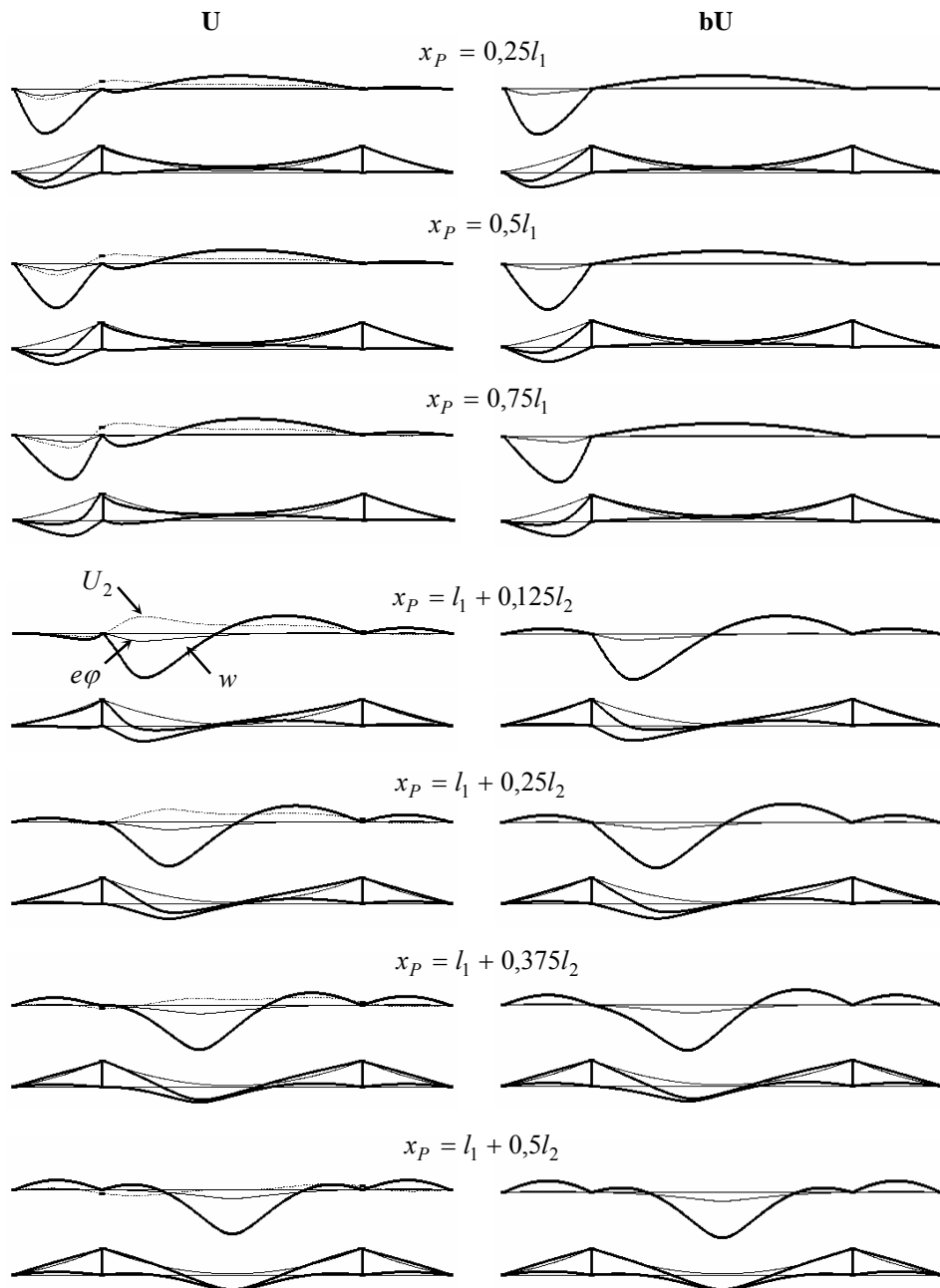
Największa różnica między rozważanymi wersjami rozwiązań występuje w przypadku drgań pionowych w przekroju środkowym prawego przęsła bocznego. Maksymalna wartość funkcji  $\mathbf{H}_{\tilde{w}}(d-bU)$  jest ponad dwukrotnie większa od maksymalnej wartości funkcji  $\mathbf{H}_{\tilde{w}}(d-U)$ . Jedynie w centralnym przekroju mostu maksymalna wartość funkcji  $\mathbf{H}_{\tilde{w}}(d-bU)$  jest nieco mniejsza niż funkcji  $\mathbf{H}_{\tilde{w}}(d-U)$ , a przebiegi quasi-statyczne są praktycznie takie same. Drgania pionowe w tym przekroju są kształtowane przez formy symetryczne – początkowe, gdy siła znajduje się nad badanym przekrojem. Ich kształt jest podobny w obu podejściach (U i bU), ale sprzężenie ruchu przęseł w niskich formach symetrycznych jest przy podejściu uproszczonym większe, co powoduje tym razem niewielkie zmniejszenie odpowiedzi dynamicznej. Dalszy przejazd siły w kierunku prawego przęsła i ruch po prawym przęśle powodują wzbudzenie wyższych form symetrycznych, w których poziom sprzężenia ruchu przęseł jest znowu zanizony. Zastosowanie podejścia uproszczonego prowadzi wówczas ponownie do zawyżenia poziomu drgań, jak w każdym innym przypadku, ponieważ przy mniejszej współpracy przęseł maleje zdolność całej konstrukcji do przenoszenia obciążeń.

Badane naroże dźwigara znajduje się w płaszczyźnie podwieszenia, zatem pionowe składowe drgań dotyczą równocześnie prawej krawędzi dźwigara i prawego ciągnia. Pełny stan przemieszczenia ciągnia tworzą, oprócz składowych pionowych, także poziome składowe podłużne. Poziome składowe poprzeczne zostały pominięte w przyjętym modelu obliczeniowym mostu. Na rysunku 3.16 przedstawiono cztery przykładowe funkcje wpływu poziomych przemieszczeń prawego ciągnia, w punkcie centralnym środkowego przelotu ( $x_2 = 0,5l_2$ ) i w pobliżu pylonu ( $x_2 = 0,125l_2$ ) oraz w punktach podparcia ciągnia na pylonach. Indeks 2 w oznaczeniu funkcji wpływu  $\mathbf{H}_{U_2}$  określa numer ciągnia, zgodny z numeracją zastosowaną w rozdziale drugim (rys. 2.7). Przemieszczenia dodatnie mają zwrot zgodny ze zwrotem osi  $x$ . Maksymalne dynamiczne i statyczne wartości poziomych przemieszczeń ciągnia w punktach oparcia na pylonach są mniejsze niż w środku rozpiętości przęsła, ale z kolei w środku rozpiętości są mniejsze niż w pobliżu pylonu, w przęśle centralnym. Wynika stąd wniosek, że największe poziome przemieszczenia ciągnien występują w okolicach pylonów, nie w punktach oparcia na pylonach. Drgania wymuszone ciągnia na lewym pylonie są nieco większe niż na prawym, ale poziom drgań swobodnych jest nieco niższy.

Udział przemieszczeń poziomych w kształtowaniu pełnego stanu przemieszczenia ciągnia można najłatwiej ocenić, analizując rozkład przemieszczeń statycznych. Na rysunku 3.17 pokazano unormowane rozkłady przemieszczeń statycznych mostu, odpowiadające kolejnym położeniom siły jednostkowej, które są opisane współrzędną  $x_p$ . Lewa kolumna rysunków przedstawia rozwiązania wyznaczone z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń ciągnien, prawa kolumna odpowiada rozwiązaniom wygenerowanym przy ich pominięciu.



Rys. 3.16. Funkcje wpływu poziomych podłużnych drgań cięgna  
 Fig. 3.16. Influence functions for horizontal longitudinal cable displacements



Rys. 3.17. Unormowane rozkłady przemieszczeń statycznych, przy różnych położeniach siły jednostkowej

Fig. 3.17. Normalized distributions of static displacements for different locations of unitary force

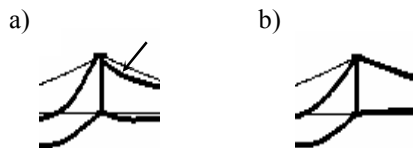


Każdy rozkład przemieszczeń statycznych ilustrują dwa rysunki. Pierwszy zawiera wykresy trzech składowych stanu przemieszczenia: pionowej translacji całego przekroju mostu –  $w$ , pionowej składowej wynikającej z obrotu dźwigara, mierzonej w płaszczyźnie podwieszenia –  $e\varphi$  i poziomej składowej przemieszczeń prawego ciężna –  $U_2$ . Dodatkowo wartości przemieszczeń są odłożone poniżej linii odniesienia. Te trzy wykresy są jednakowo unormowane, normą jest maksymalna wartość przemieszczenia  $w$ . Wartości norm poszczególnych rozkładów są zestawione w tabeli 3.4. Drugi rysunek jest ilustracją unormowanego stanu przemieszczenia mostu, który wynika ze złożenia przemieszczeń składowych w płaszczyźnie podwieszenia.

Tabela 3.4. Normy rozkładów przemieszczeń statycznych przedstawionych na rysunku 3.17  
Table 3.4. Norms of static displacement distributions presented in Fig. 3.17

$x_p$	Norma ( $\times 10^{-7}$ m)		(bU-U)/bU %
	U	bU	
$0,25 l_1$	2,050	2,471	17
$0,50 l_1$	2,644	3,496	24
$0,75 l_1$	1,595	2,471	35
$l_1 + 0,125 l_2$	2,510	3,576	30
$l_1 + 0,250 l_2$	3,804	4,706	19
$l_1 + 0,375 l_2$	3,900	4,294	9
$l_1 + 0,500 l_2$	3,820	3,933	3

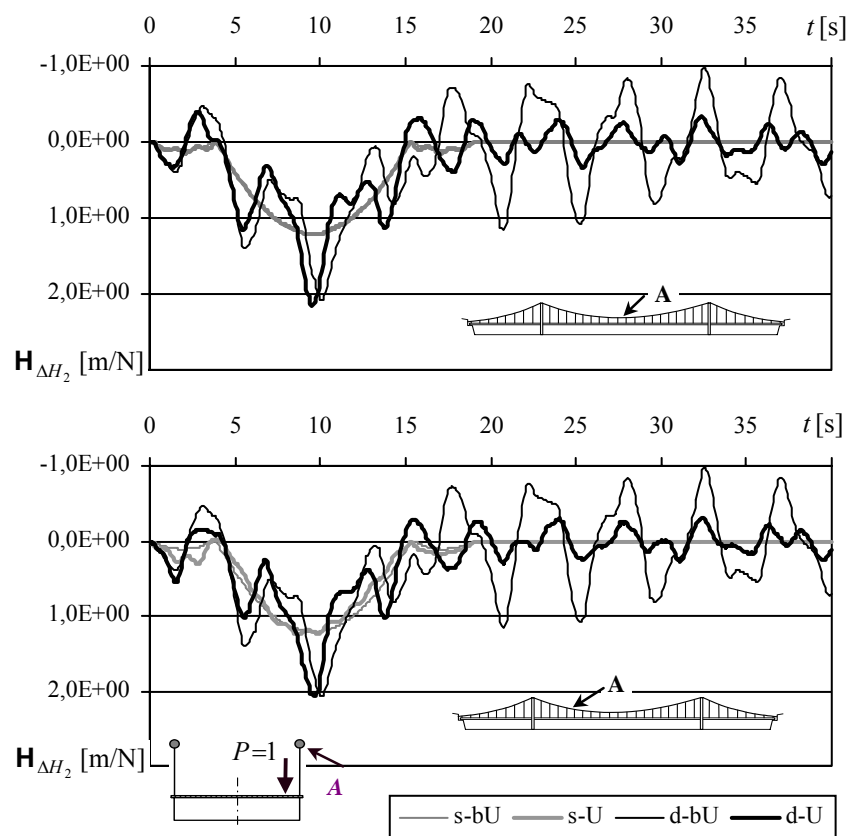
Poziome przemieszczenia ciężen są najmniejsze, gdy siła jednostkowa znajduje się w środku rozpiętości – wtedy też różnice między dwoma rozpatrywanymi rozwiązaniami: U i bU są pomijalnie małe. Przemieszczenia te są największe, gdy siła znajduje się w przęśle centralnym, w pobliżu pylonu, czyli dla  $x_p = l_1 + 0,125l_2$ . Wówczas maksymalne przemieszczenie poziome stanowi 22,6% wartości łącznego przemieszczenia pionowego  $\tilde{w} = w + e\varphi$  (16,4% przemieszczenia obliczonego metodą bU). Równocześnie wpływ poziomych przemieszczeń ciężen na przemieszczenia pionowe jest duży. Maksymalne przemieszczenie pionowe (norma wykresu  $w$ ) w rozwiązaniu U jest o 30% mniejsze od wyznaczonego przy podejściu uproszczonym bU.



Rys. 3.18. Efekt „blokowania się” ciężna przy pylonie  
Fig. 3.18. „Lock-in” effect of a cable near the pylon

Największą różnicę między normami wykresów (35%) zanotowano jednak przy obciążeniu przęsła bocznego, w pobliżu pylonu. Obciążenie przęsła bocznego powoduje największe przesunięcia ciężna na sąsiadującym pylonie. Widoczne jest wówczas zjawisko „przeciągania” ciężna z przęsła centralnego, połączone z efektem „blokowania się” przeciąganego ciężna przy pylonie (rys. 3.18a), co powoduje pojawienie się w strefie

przypodporowej dodatnich przemieszczeń pionowych. Zjawisko to oczywiście nie występuje w rozwiązaniu wygenerowanym z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien (rys. 3.18b), dlatego normy wykresów bU przy położeniach siły  $x_p = 0,25l_1$  i  $x_p = 0,75l_1$  są jednakowe. Ta symetria statycznej odpowiedzi układu w obrębie przęsła bocznego jest sprzeczna z intuicją inżynierską. W rozwiązaniu U otrzymuje się dla  $x_p = 0,75l_1$  mniejsze maksymalne przemieszczenie pionowe niż dla  $x_p = 0,25l_1$ , co jest zgodne z intuicją. Podobny efekt obserwuje się przy obciążeniu mostu w przęśle centralnym, blisko pylonu ( $x_p = l_1 + 0,125l_2$ ). Wówczas „przeciągane” jest cięgno z przęsła bocznego i „blokowanie się” tego cięgna przy pylonie powoduje zmianę rozkładu przemieszczeń pionowych w obrębie bocznego przęsła.



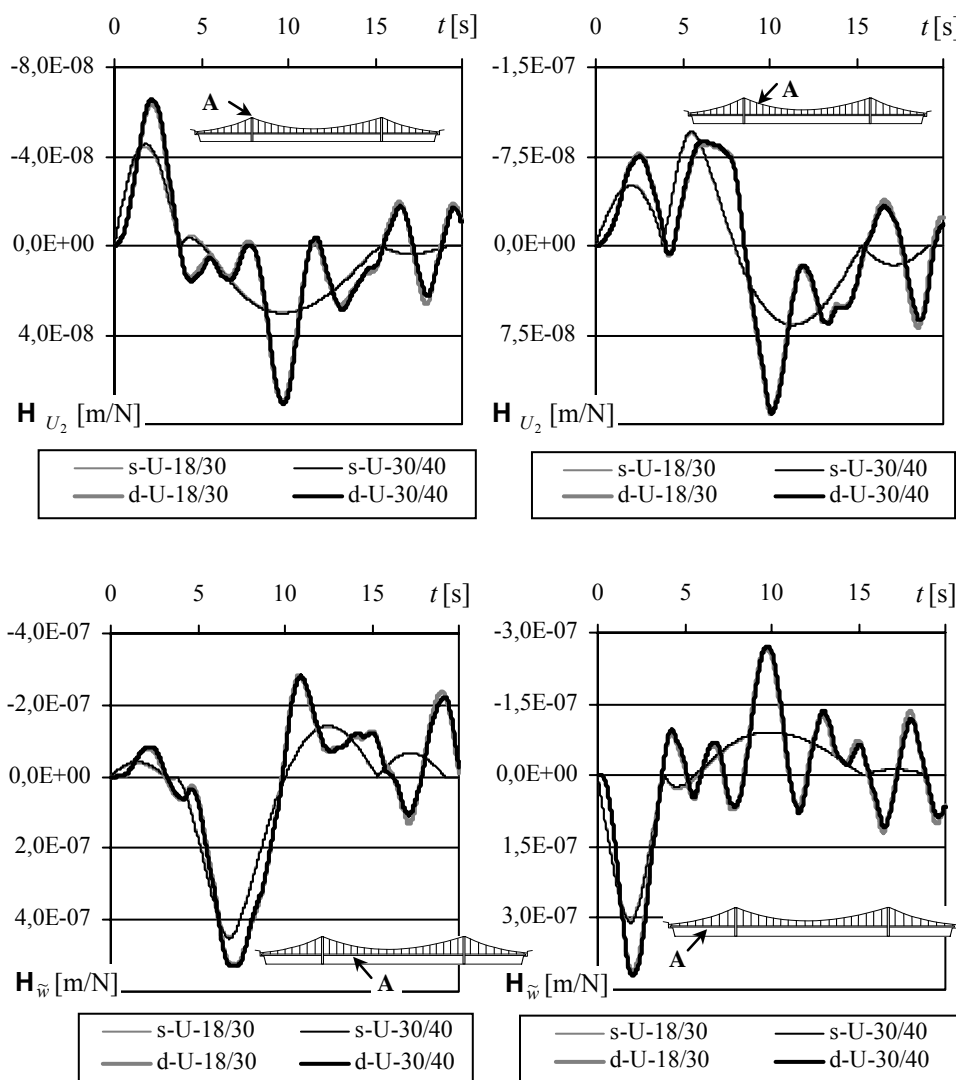
Rys. 3.19. Funkcje wpływu przyrostu napięcia cięgna, spowodowanego obciążeniem  
 Fig. 3.19. Influence functions for the increment of cable tension due to the load

Na rysunku 3.19 przedstawiono dwa wybrane przebiegi quasi-statyczne i dynamiczne, obrazujące zmiany przyrostu naciągu cięgna w przęśle centralnym, spowodowane obciążeniem w postaci ruchomej siły jednostkowej. Do obliczenia przyrostów naciągu zastosowano formuły (2.125), (2.126) – w przypadku U, oraz (2.42), (2.43) oraz (2.130) – w przypadku bU. W podejściu uproszczonym przyrost naciągu jest tylko funkcją czasu, nie zależy od położenia przekroju cięgna, dlatego przebiegi dynamiczne  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (d-bU) są identyczne w każdym przekroju, podobnie jak przebiegi quasi-statyczne  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (s-bU). Przy zastosowaniu drugiego podejścia przyrost naciągu jest funkcją czasu i zmiennej geometrycznej  $x$ , zatem przebiegi funkcji wpływu w prezentowanych przekrojach różnią się, ale różnice te nie są duże. To oznacza, że rozkład naciągu cięgna wzdłuż jego rozpiętości niewiele odbiega od stałego. Zależność naciągu cięgna od lokalizacji siły obciążającej jest również podobna w obu podejściach. Funkcje statyczne  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (s-U) mają przebieg oscylujący w pobliżu funkcji  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (s-bU), w każdym z rozważanych przypadków, a w przekroju środkowym funkcja  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (s-U) jest praktycznie taka sama jak  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (s-bU) – rys. 3.19. Większe różnice obserwuje się w przypadku rozwiązań dynamicznych. Dynamiczne funkcje wpływu  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (d-U) mają, co prawda, przebieg podobny do przebiegów funkcji uproszczonych  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (d-bU), ale tylko w obszarze drgań wymuszonych. W zakresie drgań swobodnych rozwiązania te różnią się istotnie – oscylacje wyznaczone w sposób uproszczony są nawet trzykrotnie większe. Zwiększenie poziomu oscylacji jest już widoczne w końcowym fragmencie drgań wymuszonych, przy przejeździe siły przez prawe przęsło.

Przedstawione na rys. 3.19 rozwiązania typu U wyznaczono według bazy aproksymacyjnej o podstawowym rozmiarze 18/30 ( $n_b = 18$ ,  $n_c = 30$ ), który dobrano na podstawie analizy rozwiązań zagadnienia własnego (rozdział 3.2). Łączna liczba funkcji aproksymacyjnych wynosi w tym przypadku  $n = 9n_b + 2n_c = 222$ . Przyjęty do obliczeń podstawowy rozmiar bazy aproksymacyjnej 18/30 jest miarodajny dla wszystkich rozwiązań w zakresie stanu przemieszczenia – przykładowe wyniki testów podano na rys. 3.20.

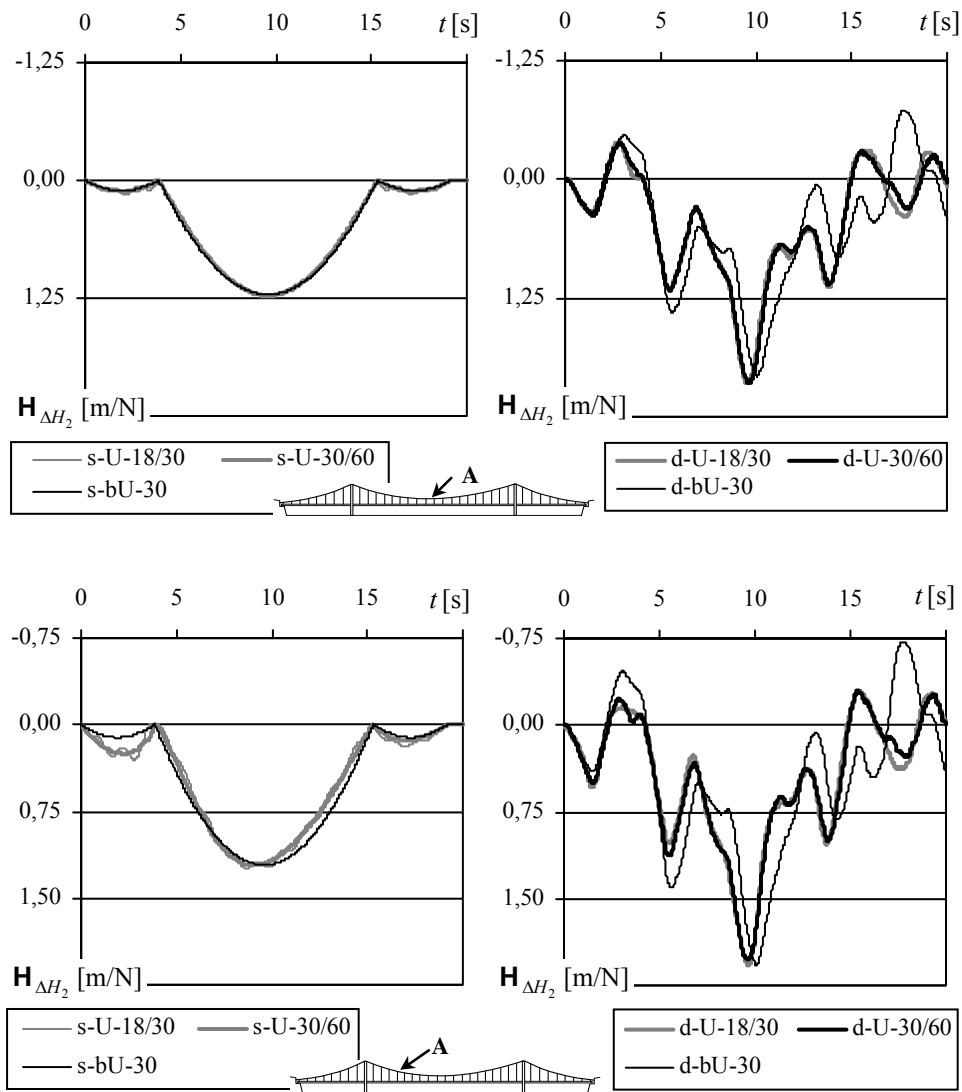
W przypadku analizy przyrostów naciągu cięgien podstawowy rozmiar bazy 18/30 nie jest wystarczający. W przekrojach centralnego przelotu cięgna można uznać za miarodajny rozmiar 30/60, co ilustruje rys. 3.21, który zawiera przebiegi funkcji wpływu wygenerowane przy rozmiarach bazy aproksymacyjnej 18/30 i 30/60 (tzn.  $n_b=18, n_c=30$  oraz  $n_b=30, n_c=60$ ). W tle tych rozwiązań pokazano funkcje  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (s-bU) i  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (d-bU). Zwiększenie liczby funkcji aproksymacyjnych do rozmiaru 30/60 powoduje „wygładzenie” wykresów  $\mathbf{H}_{\Delta H_2}$  (s-U) i bardzo niewielkie zmiany

przebiegu funkcji  $H_{\Delta H_2}$  (d-U). Wyniki tego testu są dowodem zbieżności rozwiązań – przy zwiększaniu liczby funkcji aproksymacyjnych rozwiązania przybliżone dążą do rozwiązania ścisłego. W przekrojach przelotów bocznych cięzna rozmiar bazy 30/60 jest jednak nadal niewystarczająca.



Rys. 3.20. Funkcje wpływu przemieszczeń – test zbieżności rozwiązań statycznych i dynamicznych

Fig. 3.20. Influence functions for displacements – convergence of static and dynamic solutions



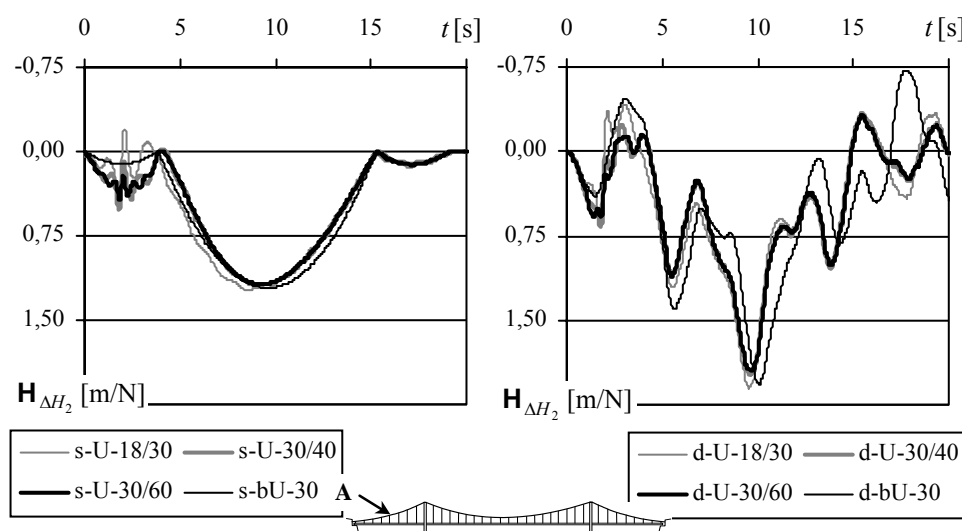
Rys. 3.21. Funkcje wpływu przyrostu napięcia cięgna – test zbieżności rozwiązań statycznych i dynamicznych

Fig. 3.21. Influence functions for the increment of cable tension – convergence of static and dynamic solutions

Na rysunku 3.22 pokazano przykładowe rozwiązania statyczne i dynamiczne w przekroju centralnym lewego, bocznego przelotu cięgna. Porównanie wyników wy-

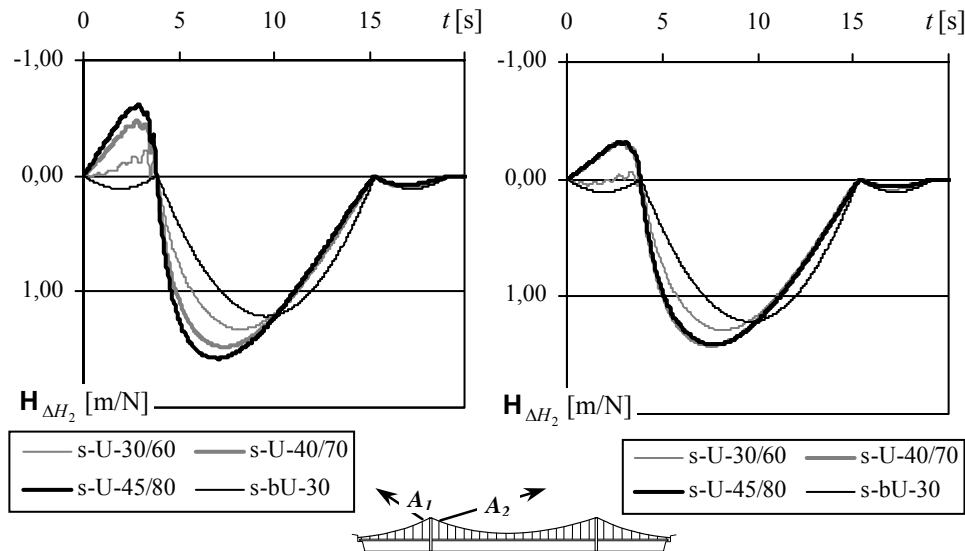
znaczonych przy rozmiarach bazy 18/30, 30/40 i 30/60 potwierdza wniosek o zbieżności rozwiązań, ale przebiegi funkcji wpływu w obrębie przęsła bocznego trudno uznać już za dostatecznie dokładne. Zbieżność rozwiązań w zakresie przyrostów naciągów jest tym gorsza, im bliżej punktu podparcia na pylonie jest położony badany przekrój cięzna. To zjawisko ilustrują wyniki obliczeń przedstawione na rys. 3.23.

Zdecydowane pogorszenie zbieżności jest skutkiem przyjętej aproksymacji poziomych przemieszczeń cięgien (wzór (2.62)) – poszczególne funkcje aproksymacyjne spełniają kinematyczny warunek ciągłości  $u_{c,j}(x_i, t)|_{x_i=l_i} = u_{c,j}(x_{i+1}, t)|_{x_{i+1}=0}$  w punktach podparcia na pylonie, ale wprowadzają ograniczenie  $u'_{c,j}(x_i, t)|_{x_i=l_i} = u'_{c,j}(x_{i+1}, t)|_{x_{i+1}=0}$ , utrudniające spełnienie warunku kinetycznego  $\Delta H_j(x_i, t)|_{x_i=l_i} = \Delta H_j(x_{i+1}, t)|_{x_{i+1}=0}$ . Zaburzenie to ma charakter lokalny i nie jest istotne z punktu widzenia projektowania całej konstrukcji. Ewentualne niedokładności nie mają ponadto technicznego znaczenia, gdyż statyczne i dynamiczne przyrosty naciągu cięgien, wywołane działaniem obciążenia użytkowego, są wielokrotnie mniejsze od wstępnego naciągu cięzna, obciążonego wyłącznie ciężarem własnym mostu – w rozpatrywanym przykładzie naciąg wstępny wynosi  $H_0 = 3,012 \times 10^7$  N, a maksymalne wartości przyrostów naciągu można oszacować na podstawie rzędnych funkcji wpływu.



Rys. 3.22. Funkcje wpływu przyrostów naciągu cięzna – test zbieżności rozwiązań statycznych i dynamicznych

Fig. 3.22. Influence functions for the increment of cable tension – convergence of static and dynamic solutions



Rys. 3.23. Funkcje wpływu przyrostów naciągu cięgna – test zbieżności rozwiązań statycznych w pobliżu pylonu:  $A_1$  – 10 m od pylonu,  $A_2$  – 20 m od pylonu

Fig. 3.23. Influence functions for the increment of cable tension – convergence of static solutions near the pylon:  $A_1$  – 10 m from the pylon,  $A_2$  – 20 m from the pylon

Podsumowując wyniki testów dotyczących naciągów cięgien trzeba zauważyć, że stały, niezależny od zmiennej geometrycznej przyrost naciągu, wyznaczony przy zastosowaniu podejścia uproszczonego (bU), jest dość dobrym przybliżeniem wtedy, gdy most jest obciążony w prześle centralnym. W przypadku obciążenia przęsła bocznego otrzymuje się zaniżone wartości przyrostów naciągu w przekrojach cięgna znajdujących się w obrębie obciążonego przęsła lub w sąsiednim obszarze przęsła centralnego. Zdecydowaną różnicę między analizowanymi rozwiązaniami (U i bU) obserwuje się w przekrojach położonych w bezpośrednim sąsiedztwie punktu podparcia cięgna na pylonie, przy obciążeniach zlokalizowanych wzdłuż połowy rozpiętości mostu, obejmującej dany pylon.

### 3.5. Podsumowanie

Sformułowana w pracy teoria przestrzennych drgań mostów wiszących umożliwia opracowanie skutecznego algorytmu, służącego do wyznaczania deterministycznych drgań mostów z cięgnami, które nie muszą spełniać warunku małego zwisu i które są oparte przesuwnie na pylonach. Analityczny opis drgań i zastosowanie metody aproksymacyjnej Lagrange'a–Ritza prowadzi do zadania o stosunkowo małej liczbie stopni swobody. Przyjęty w pracy model obliczeniowy mostu uwzględnia specyficzne cechy

konstrukcji i obejmuje najczęściej stosowane schematy konstrukcyjne mostów wieloprzęsłowych. Porównanie wyników obliczeń w zakresie zagadnienia własnego z wynikami uzyskanymi na podstawie pomiarów drgań rzeczywistej konstrukcji potwierdziło słuszność przyjętych założeń i stanowi dowód poprawności opracowanego algorytmu. Uściślenie teorii drgań mostów wiszących, polegające na uwzględnieniu poziomych, podłużnych przemieszczeń cięgien pozwala w prawidłowy sposób opisać wpływ podwieszenia i wynikające stąd sprzężenia ruchu poszczególnych przęseł mostu. Właściwy opis tych sprzężeń ma bardzo duże znaczenie, ponieważ wpływa bezpośrednio na ocenę zdolności konstrukcji do przenoszenia obciążeń dynamicznych i statycznych. Uproszczenie teorii przez pominięcie wpływu poziomych przemieszczeń cięgien powoduje przeszacowanie statycznej i dynamicznej odpowiedzi konstrukcji na działanie obciążeń eksploatacyjnych, szczególnie w obrębie przęseł bocznych. Znacznie zwiększa się też amplituda drgań swobodnych, które wykonuje konstrukcja mostu po przejeździe obciążenia. Istotne różnice w rozwiązaniach pojawiają się nie tylko przy średnich zwisach cięgien, ale nawet w przypadku mostów o typowej geometrii cięgien, dla której strzałka zwisu może być uważana za małą. Zastosowanie hipotezy Kirchhoffa do analizy drgań wieloprzelotowych cięgien współpracujących z dźwigarem usztywniającym jest zatem daleko idącym uproszczeniem, ale konsekwencją tego uproszczenia jest przewymiarowanie konstrukcji na etapie projektowania, co zwiększa jej bezpieczeństwo.

Testy numeryczne wykazały, że duże znaczenie ma właściwy dobór modelu tłumienia. Potwierdziły też, że w analizach dynamicznych wykonywanych w fazie projektowania mostów, gdy nie dysponujemy opisem tłumienia wynikającym z identyfikacji pomiarowej, należy stosować model tłumienia masowego. Model masowy dobrze opisuje własności tłumiące mostów wiszących, w których tłumienie modalne maleje ze wzrostem częstości drgań. Na podstawie badań numerycznych pokazano, że teoretyczny opis tłumienia za pomocą modelu masowego prowadzi do rozwiązań, które pod względem ilościowym i jakościowym są zbliżone do rozwiązań uzyskiwanych przy deklaracji tłumienia według danych eksperymentalnych.



## 4. Drgania wymuszone losowym ruchem drogowym

### 4.1. Uwagi wstępne

Statyczny i dynamiczny efekt działania obciążenia użytkowego mostów drogowych zależy od wielu czynników, takich jak: masa pojazdów, konfiguracja osi pojazdów, rozkład nacisków na osie, położenie pojazdu na moście, prędkość ruchu, odstęp między pojazdami, liczba pojazdów na moście, nierówności nawierzchni drogowej. Wszystkie te czynniki mają w rzeczywistości charakter losowy [89]. Opis obciążenia w kategoriach losowych powoduje konieczność stosowania metod analizy stochastycznej do oceny drgań konstrukcji. Każda odpowiedź mostu stanowi wówczas proces stochastyczny, którego charakterystyki zależą od przyjętego modelu obciążenia. Losowe modele obciążenia użytkowego mostów zawierają zwykle wiele uproszczeń. Na przykład w modelu zaproponowanym przez Tunga [118] pojazdy drogowe są idealizowane siłami skupionymi, chwile pojawiania się pojazdów na moście są losowe i tworzą punktowy proces Poissona, zatem odstęp czasowy między pojazdami mają rozkład wykładniczy. Podobne podejście zastosowano w pracy Iwankiewicza i Śniadego [69] do analizy drgań belki obciążonej serią sił ruchomych, gdzie siły są zmiennymi losowymi opisującymi ciężary pojazdów. W kolejnych pracach Śniadego model obciążenia rozbudowano poprzez przyjęcie losowej prędkości ruchu pojazdów [115], wprowadzenie dodatkowej zmiennej klasyfikującej różne typy pojazdów [104], uwzględnienie losowych nierówności nawierzchni [12]. Poissonowski model zgłoszeń jest najprostszym i zarazem najczęściej stosowanym wariantem procesu odnowy, który opisuje ogólnie tryb pojawiania się pojazdów [90, 119] i opiera się na generalnym założeniu, że odstęp czasowy między kolejnymi pojazdami są wzajemnie niezależne i mają identyczny rozkład. Według Ghosna i Mosesa [58] model poissonowski niepełnie nadaje się do opisu ciężkiego ruchu drogowego, złożonego głównie z pojazdów ciężarowych. Autorzy wykazali, że dokładniejsze wyniki uzyskuje się łącząc ideę procesu odnowy z teorią procesów Markowa. Model obciążenia sformułowali uwzględniając możliwość dowolnej deklaracji rozkładów zmiennych losowych opisujących parametry każdego

pojazdu (prędkość, ciężar pojazdu, odstęp między osiami) i odstęp między pojazdami poruszającymi się po kilku pasach ruchu. Zastosowanie modelu ograniczono jednak wyłącznie do analizy statycznych efektów obciążenia, przy założeniu stacjonarności rozkładu statycznej reakcji mostu.

Poszukiwanie coraz dokładniejszych i w konsekwencji bardziej złożonych modeli obciążenia jest uzasadnione dla mostów małych i średnich. W przypadku mostów o bardzo dużych rozpiętościach, indywidualne, szczegółowe cechy pojazdów mają dużo mniejsze znaczenie. Do takich mostów należy zaliczyć mosty wiszące. Według Ditlevsena [51], jeśli funkcja wpływu badanego efektu obciążenia (np. przemieszczenia lub naprężenia w wybranym punkcie konstrukcji) jest niezerowa na odcinku znacznie przekraczającym rozmiary pojedynczego pojazdu, to nie jest potrzebne rozważanie indywidualnego ciężaru pojazdu, a nawet jego indywidualnej lokalizacji na moście. To stwierdzenie stanowi kluczowe założenie modelu Ditlevsena [51], w którym zakłada się, że obciążenie użytkowe może być z wystarczającą dokładnością modelowane za pomocą pola losowego typu „biały szum” („white-noise-field”), o wartości średniej i intensywności zależnej od aktualnej sytuacji ruchu drogowego. Charakterystyki „białego szumu” oblicza się na podstawie teorii ruchu poissonowskiego. Wyróżnia się trzy typowe sytuacje ruchu pojazdów: ruch swobodny („free traffic”), ruch zagęszczony prowadzący do tworzenia się zatorów („congested but moving traffic”) i zatory utworzone przez kolejki stojących pojazdów („completely stopped queues of vehicles”). Ditlevsen zakłada, że w każdej wyróżnionej sytuacji drogowej obciążenie ruchem drogowym jest stacjonarne i na podstawie twierdzenia centralnego przyjmuje hipotezę, że proces opisujący dowolny efekt obciążenia jest gaussowski. Model ruchu drogowego sformułowany przez Ditlevsena wykorzystano w pracy Ditlevsena i Madsena [52] do opracowania analitycznej metody prognozowania ekstremalnych, statycznych efektów obciążenia, przydatnych do badania niezawodności konstrukcji w aspekcie oceny prawdopodobieństwa przekroczenia pewnego stanu granicznego. Badania Ditlevsena i Madsena były realizowane w związku z pracami projektowymi dotyczącymi mostu wiszącego Great Belt Bridge. Te badania są wyjątkowym przykładem zastosowania podejścia analitycznego do opisu losowego obciążenia mostów wiszących ruchem drogowym. W większości opracowań, dotyczących efektów działania ruchu drogowego na bardzo duże obiekty mostowe, stosuje się do badań metody symulacyjne lub wykorzystuje się wyniki analiz statystycznych bazy danych pomiarowych. Wyniki badań tego typu są trudno dostępne, często publikowane jedynie w wewnętrznych biuletynach specjalistycznych przedsiębiorstw lub instytutów badawczych. Odpowiednie cytowania można znaleźć między innymi w pracach Cremony [47, 48] i Ditlevsena [52].

Model sformułowany przez Ditlevsena opracowano z punktu widzenia potrzeb analizy statycznej – poszukiwano ekstremalnych efektów statycznych, nie rozpatrywano efektów dynamicznych obciążenia użytkowego. Jednak podstawowe założenia

modelu, specyficzne dla mostów wiszących i zweryfikowane eksperymentami symulacyjnymi [52], można traktować jako ogólne wytyczne definiujące model obciążenia losowym ruchem drogowym w zagadnieniu dynamicznym. Na tej podstawie w niniejszym rozdziale przyjęto, że nie jest potrzebny szczegółowy opis indywidualnych cech pojazdów, takich jak rozmiary pojazdu, ilość i rozstaw osi, rozkład nacisków na osie pojazdu. Założono, że każdy pojazd może być modelowany siłą skupioną (ciężar pojazdu), której wartość jest zmienną losową o znanej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Ruch pojazdów odbywa się na kilku pasach ruchu, w sposób uporządkowany w tym sensie, że po wybranym pasie pojazdy poruszają się z tą samą, stałą prędkością (deterministyczną). Są to pojazdy podobnego typu (np. ciężarowe lub osobowe), tzn. ciężary pojazdów są niezależnymi zmiennymi losowymi, ale ich gęstość rozkładu jest jednakowa w obrębie danego pasa. Rozpatrywany będzie swobodny ruch pojazdów, dla którego proces zgłoszeń może być idealizowany stacjonarnym procesem Poissona (Dietlevsen [51]), przy czym założono, że intensywności ruchu na poszczególnych pasach są różne.

W modelu Dietlevsena poissonowską teorię ruchu swobodnego stosuje się do wyznaczenia charakterystyk pola losowego typu „biały szum”, które określa rozkład przestrzenny obciążenia pojazdami, z pominięciem ich konkretnej lokalizacji. Założenie „białego szumu” umożliwia stosunkowo proste określenie wartości średniej i wariancji statycznej odpowiedzi mostu. Zastosowanie takiego podejścia do analizy losowej odpowiedzi dynamicznej jest niemożliwe. W niniejszej pracy charakterystyki losowych drgań mostów wiszących wyznaczono za pomocą metody przedstawionej w pracy Bryi i Śniadego [33], w której wykorzystuje się konsekwentnie teorię procesów Poissona i dynamiczne funkcje wpływu odpowiedzi konstrukcji. W rozdziale 4.2.1 sformułowano szczegółowo stochastyczny model obciążenia użytkowego i opracowano analityczno-numeryczny algorytm analizy momentowej procesów opisujących przestrzenne drgania wieloprzęsłowych mostów wiszących. W rozdziale 4.2.2 zastosowano opracowany algorytm do analizy losowych drgań mostu Vincenta Thomasa. Przedstawiono rozwiązania stacjonarne w stanie ustalonym i na podstawie analiz funkcji gęstości zweryfikowano hipotezę Dietlevsena, w której zakłada się, że efekty działania obciążenia użytkowego na mosty wiszące są stacjonarnymi procesami gaussowskimi.

Algorytm sformułowany w rozdziale 4.2 może być stosowany wyłącznie do analizy drgań liniowych, ponieważ w rozwiązaniach wykorzystuje się superpozycję skutków działania pojedynczych pojazdów. Konieczne pominięcie efektów nieliniowych, związanych ze zmianą kształtu cięgien, może budzić wątpliwości. Dotychczasowe badania autorki wykazały, że w przypadku mostów wiszących, o stosunkowo niewielkich rozpiętościach, wpływy nieliniowe są pomijalnie małe [31, 36, 37]. Wspomniane badania dotyczyły jednak wyłącznie płaskiego modelu mostów jedoprzęsłowych. Analizowano drgania pionowe wywołane przejazdem tylko jednego losowego potoku pojazdów. W mostach wieloprzęsłowych, przy

obciążeniu kilku pasów ruchu, efekty nieliniowe mogą być znacznie większe i powinny być ponownie oszacowane. Zastosowanie podejścia analitycznego do analizy nieliniowych drgań stochastycznych jest bardzo trudne. Przegląd podstawowych metod można znaleźć na przykład w pracach Śniadego [116], Sobczyka [108, 109], Sochy [110]. Metody te prowadzą z reguły do bardzo skomplikowanych rozwiązań już na etapie sformułowań teoretycznych, a realizacja numeryczna jest praktycznie możliwa jedynie w przypadku analizy prostych układów dynamicznych. Pewną próbę aplikacji metody linearyzacji bezpośredniej do analizy pionowych drgań nieliniowych jednoprzęsłowego mostu wiszącego przedstawiono w pracy Bryi i Śniadego [31]. Zastosowanie tej metody do analizy przestrzennych nieliniowych drgań mostów wieloprzęsłowych jest praktycznie niemożliwe ze względu na złożoną postać równań ruchu. Alternatywnym podejściem jest wykorzystanie techniki symulacyjnej i to podejście zastosowano w rozdziale 4.3 do wyznaczenia charakterystyk nieliniowych drgań losowych i do oszacowania wpływów nieliniowych w wieloprzęsłowych mostach wiszących.

Metody aproksymacji i symulacji procesów stochastycznych stanowią rozległą dziedzinę wiedzy, która w ostatnich latach jest intensywnie rozwijana. Obecnie, do symulacji numerycznych najczęściej stosuje się metodę reprezentacji spektralnej, sformułowaną przez Shinozukę [103] w odniesieniu do wielowymiarowych, niegaussowskich procesów o wielu zmiennych. Efektywność tej metody zdecydowanie poprawiono poprzez uzupełnienie podstawowego algorytmu o szybką transformację Fouriera (FFT) – Yang [124], Shinozuka [102]. W ostatnich latach wprowadzono sekwencyjne algorytmy symulacyjne prowadzące do aproksymacji procesu stochastycznego przez kombinację procesów autoregresji i ruchomej średniej (ARMA) – Samaras, Shinozuka i Tsurui [98]. Wymienione techniki służą do symulacji ciągłych pól losowych i są zazwyczaj stosowane w modelowaniu obciążeń wywołanych przez wiatr, fale morskie czy trzęsienia ziemi [17, 41, 50]. Do numerycznej symulacji procesów losowych o charakterze skokowym, które opisują obciążenia konstrukcji ruchem pojazdów drogowych, bardziej przydatne są metody typu Monte Carlo. Według definicji podanej przez Hammersleya i Handscomba, metody Monte Carlo są: „dziedziną matematyki eksperymentalnej, która dotyczy eksperymentów w zakresie liczb losowych” [63]. Symulacja analizowanego zjawiska losowego odbywa się za pomocą odpowiednio dobranych sekwencji (ciągów) liczb losowych, które opisują „zachowanie” zmiennych losowych o określonych rozkładach prawdopodobieństwa. Tego typu podejście przedstawiono w pracy Bryi i Kłasztornego [26]. Autorzy sformułowali algorytm symulacyjny służący do generowania losowego potoku pojazdów drogowych. Algorytm ten zastosowano do wyznaczenia charakterystyk drgań stochastycznych swobodnie podpartego mostu belkowego [26] oraz do oceny wpływów nieliniowych i wpływu inercji i resorowania pojazdów w zagadnieniu losowych drgań jednoprzęsłowego mostu wiszącego (Bryja i Śniady [36, 37]).

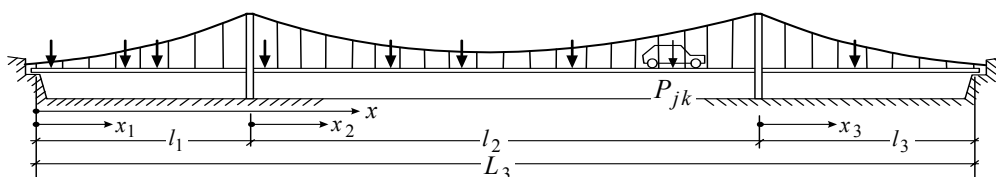
Przedstawiony w pracy [26] algorytm symulacyjny jest generatorem jednowymiarowym – w sensie jednego potoku pojazdów drogowych. W rozdziale 4.3 niniejszej rozprawy opracowano numeryczny generator wielowymiarowy, służący do symulacji kilku losowych potoków pojazdów, poruszających się współbieżnie lub przeciwbieżnie po wydzielonych pasach ruchu. W modelowaniu ruchu drogowego uwzględniono inercję, resorowanie i wieloosiowość pojazdów. Symulowane potoki ruchu zawierają pojazdy różnych typów, pojawiające się w losowych odstępach czasowych, z losowym załadunkiem. Opracowano także algorytm numeryczny współpracujący z generatorem losowego ruchu drogowego i przeznaczony do symulacji przestrzennych, nieliniowych drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących. Algorytm ten zastosowano do wyznaczania charakterystyk losowych drgań mostu w stanie ustalonym. Przy wyznaczaniu charakterystyk zastąpiono uśrednianie po zbiorze realizacji uśrednianiem po czasie, na podstawie założenia, że drgania mostu w stanie ustalonym są stacjonarnym procesem ergodycznym. Założenie to zweryfikowano badaniami numerycznymi. Przeprowadzono szereg eksperymentów symulacyjnych. Ich celem było oszacowanie poziomu istotności efektów nieliniowych, a także ocena wpływu inercji i resorowania pojazdów. Celem nadrzędnym było umotywowanie wcześniej sformułowanej i znacznie efektywniejszej metody analityczno-numerycznej, w której badane wpływy pominięto. Stwierdzono, że mimo istotnych uproszczeń metoda analityczno-numeryczna może być z wystarczającą dokładnością stosowana w analizie drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących, obciążonych losowym ruchem drogowym. Tę metodę przyjęto w dalszej części pracy do wyznaczania charakterystyk drgań losowych, potrzebnych w badaniu niezawodności konstrukcji.

Problemy związane z badaniem niezawodności wieloprzęsłowych mostów wiszących omówiono w rozdziale 4.4. Dla przykładowego obiektu testowego (most Vincenta Thomasa) przedstawiono wyniki analiz prawdopodobieństwa przekroczenia pewnego stanu granicznego przemieszczeń, w zależności od prędkości ruchu pojazdów i intensywności ruchu, związanej z prędkością zależnością empiryczną. Przedstawiono także dwa warianty rozwiązania problemu niezawodności zmęczeniowej. W pierwszym wariantcie założono, że badane procesy naprężeń w wybranych elementach mostu są modelowane w stanie ustalonym przez stacjonarne procesy wąskopasmowe. W drugim wariantcie przyjęto, że procesy naprężeń są stacjonarnymi procesami normalnymi o szerokim paśmie. Przeprowadzono analizę rozwiązań w aspekcie rzeczywistej szerokości pasma procesów, oszacowanej na podstawie rozkładu funkcji gęstości widmowej i momentów widmowych. Porównano miary trwałości mostu, wyznaczone z uwagi na zmęczenie przęseł bocznych, przęseła głównego i ciągów. Wnioski wynikające z badań mogą służyć lepszemu rozpoznaniu specyficznych cech pracy konstrukcji mostów wiszących, w warunkach długotrwałych, zmiennych w czasie obciążeń, spowodowanych ruchem pojazdów drogowych.

## 4.2. Analityczno-numeryczna metoda analizy momentowej liniowych drgań losowych

### 4.2.1. Sformułowanie metody

Celem niniejszych rozważań jest sformułowanie metody wyznaczania charakterystyk stochastycznej odpowiedzi mostu wiszącego na działanie swobodnego, losowego ruchu drogowego. Podstawą merytoryczną metody jest praca Bryji i Śniadego [33], dotycząca drgań jednoprzęsłowych mostów wiszących, opisanych równaniami klasycznymi, to znaczy z pominięciem poziomych składowych przemieszczeń cięgien. Przedmiotem rozważań będą stochastyczne, przestrzenne drgania mostów wieloprzęsłowych, opisane równaniami (2.64) lub (2.92). Założymy, że obciążenie użytkowe ma charakter losowy, natomiast wszystkie parametry mostu są deterministyczne. Zagadnienie ograniczymy do problemu liniowego zakładając, że wpływy nieliniowości geometrycznej związanej ze zmianą kształtu cięgien są w rozważanym przypadku pomijalnie małe. Przyjmiemy, że obciążeniem użytkowym mostu są losowe potoki pojazdów drogowych poruszających się po wydzielonych pasach ruchu. Rozważymy przypadek, gdy pojazdy poruszają się ze stałą, deterministyczną prędkością  $v_j$ , jednakową dla wszystkich pojazdów w obrębie pasa o numerze  $j$ . Założymy też, że tory ruchu pojazdów są gładkie, prostoliniowe, równoległe do osi podłużnej mostu, a kierunek ruchu jest zgodny lub przeciwny do przyjętego zwrotu osi. Każdy potok pojazdów zastąpimy losową serią ruchomych, pionowych sił skupionych  $P_{jk}$ , oznaczających całkowite ciężary pojazdów – rys. 4.1. Skutkiem tej idealizacji jest pominięcie inercji i resorowania pojazdów. Zasadność tego uproszczenia będzie badana w punkcie 4.3.4. Poprzez modelowanie całego pojazdu za pomocą tylko jednej siły skupionej pomija się rozmiary pojazdów, ale w analizowanym przypadku jest to uproszczenie dopuszczalne, ponieważ rozmiary typowych pojazdów drogowych są małe wobec dużych rozpiętości mostów wiszących.



Rys. 4.1. Schemat obciążenia mostu losowym ruchem drogowym  
Fig. 4.1. Scheme of the bridge load due to random traffic

Przyjmiemy w dalszym ciągu, że ciężary pojazdów  $P_{jk}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o znanej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, a zatem o znanych

wartościach oczekiwanych  $E[P_{jk}^r] = E[P_j^r] = \text{const}$ , jednakowych dla wszystkich pojazdów poruszających się po torze  $j$ ,  $r = 1, 2, \dots$  jest naturalnym wykładnikiem potęgowania. Chwile  $t_{jk}$  pojawiania się kolejnych sił ( $k = 1, 2, \dots$ ) na torach  $j = 1, 2, \dots, n_p$  są losowe i tworzą niezależne, jednorodnie procesy Poissona  $\mathbf{N}_j(t)$  o stałych intensywnościach  $\lambda_j(t) = \lambda_j = \text{const}$  [10, 57, 97, 116]. To oznacza, że odstępy czasowe między kolejnymi siłami są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym. Średnią liczbą sił, które pojawią się na danym pasie ruchu od chwili początkowej  $t_0$  do chwili  $t$  opisuje zależność

$$E[\mathbf{N}_j(t_0, t)] = \int_{t_0}^t \lambda_j(\tau) d\tau = \lambda_j(t - t_0). \quad (4.1)$$

W celu wyznaczenia odpowiedzi mostu na przyjęty losowy proces obciążenia wprowadzimy dynamiczną funkcję wpływu  $\mathbf{H}_{S_j}(x_i, t - t_{jk})$ , która przedstawia dowolnie wybraną odpowiedź mostu  $\mathbf{S}(x_i, t - t_{jk})$  w przekroju  $x_i$ , wywołaną jednostkową siłą, która w chwili  $t_{jk}$  rozpoczęła z prędkością  $v_j$  ruch po torze  $j$  i w chwili  $t$  znajduje się w miejscu  $x_{jk} = a_j + \rho_j(t - t_{jk})v_j$ . Lokalizację toru siły w przekroju poprzecznym mostu określa współrzędna  $y_i = e_j$ . Bezwymiarowy parametr  $\rho_j$  specyfikuje kierunek ruchu na danym torze (pasie ruchu) i wynosi  $\rho_j = 1$ , gdy kierunek ruchu jest zgodny ze zwrotem osi  $x$  (podłużna oś mostu), wówczas  $a_j = 0$ . Gdy kierunek ruchu siły jest przeciwny do zwrotu osi  $x$ , wówczas  $\rho_j = -1$ ,  $a_j = L_n$ ,  $L_n = l_1 + l_2 + \dots + l_n$ . Sumaryczną odpowiedź mostu na działanie wszystkich sił  $P_{jk}$ , które pojawiły się do chwili  $t$ , można wyznaczyć korzystając z zasady superpozycji, obowiązującej w przypadku analizy drgań liniowych. Zsumowanie rozwiązań od poszczególnych sił daje wynik, który po przejściu do postaci całkowej za pomocą całki Stieltjesa ma następującą postać:

$$\mathbf{S}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{\mathbf{N}_j(t)} P_{jk} \mathbf{H}_{S_j}(x_i, t - t_{jk}) = \sum_{j=1}^{n_p} \int_{t_0}^t P_j(\tau) \mathbf{H}_{S_j}(x_i, t - \tau) d\mathbf{N}_j(\tau). \quad (4.2)$$

Zdefiniowaną wcześniej funkcję wpływu  $\mathbf{H}_{S_j}(x_i, t - \tau)$  wyznacza się na podstawie rozwiązania równania ruchu (2.64) lub (2.92), zlinearyzowanego przez pominięcie wektora nieliniowych reakcji sprężystych układu  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q})$ . Wektor wzbudzenia  $\mathbf{F}$ , określony dla dowolnego obciążenia ogólnymi wzorami (2.65), jest wynikiem obciąż-

żenia ruchomą siłą jednostkową. Składowe obciążenia, po redukcji do środka ścinana przekroju dźwigara, wynoszą:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{z_i}(x_i, t - \tau) &= 1 \cdot \delta(x - [a_j + \rho_j v_j(t - \tau)]), \\ \mathbf{q}_{y_i}(x_i, t - \tau) &= 0, \\ \mathbf{m}_{x_i}(x_i, t - \tau) &= e_j \cdot 1 \cdot \delta(x - [a_j + \rho_j v_j(t - \tau)]), \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdzie  $L_{i-1} \leq [a_j + \rho_j v_j(t - \tau)] \leq L_i$ . W pozostałych przypadkach należy przyjąć, że  $\mathbf{q}_{z_i}(x_i, t - \tau) = 0$ ,  $\mathbf{q}_{y_i}(x_i, t - \tau) = 0$ ,  $\mathbf{m}_{x_i}(x_i, t - \tau) = 0$ . Indeks  $i = 1, 2, \dots, n$  określa numer przęsła o rozpiętości  $l_i$  oraz  $x_i = x - L_{i-1}$ ,  $L_i = \sum_{k=1}^i l_k$ ,  $L_0 = 0$ . Symbol  $\delta$  oznacza funkcję delta Diraca. Po podstawieniu (4.3) do (2.65) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{w_i} &= \int_0^{l_i} \mathbf{q}_{z_i} \mathbf{s}_i dx_i = \int_0^{l_i} \delta(x - [a_j + \rho_j v_j(t - \tau)]) \mathbf{s}_i(x_i) dx_i = \\ &= \int_0^{l_i} \delta(x_i + L_{i-1} - [a_j + \rho_j v_j(t - \tau)]) \mathbf{s}_i(x_i) dx_i = \tilde{\mathbf{s}}_i, \\ \mathbf{F}_{v_i} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_{\phi_i} &= \frac{1}{e} \int_0^{l_i} \mathbf{m}_{x_i} \mathbf{s}_i dx_i = \frac{e_j}{e} \int_0^{l_i} \delta(x - [a_j + \rho_j v_j(t - \tau)]) \mathbf{s}_i(x_i) dx_i = \frac{e_j}{e} \tilde{\mathbf{s}}_i, \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{s}}_i$  jest wektorem funkcji aproksymacyjnych  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i(x_i)$  śledzących położenie siły, czyli funkcji aproksymacyjnych o argumentie  $x_i = [a_j + \rho_j v_j(t - \tau)] - L_{i-1}$ . Jeśli  $[a_j + \rho_j v_j(t - \tau)] < L_{i-1}$  lub  $[a_j + \rho_j v_j(t - \tau)] > L_i$ , to  $\tilde{\mathbf{s}}_i = \mathbf{0}$ . Rozwiązanie równania ruchu  $\mathbf{q}(t - \tau)$  wyznacza się za pomocą całkowania numerycznego. W każdym kroku całkowania można równoległe obliczyć odpowiednią wartość poszukiwanej odpowiedzi mostu (dowolne przemieszczenie, siłę wewnętrzną, naprężenie – zob. roz. 2.7). W wyniku otrzymuje się dyskretnie określony przebieg czasowy dynamicznej funkcji wpływu  $\mathbf{H}_{S_j}(x_i, t - \tau)$ .

W dalszym ciągu przyjmiemy, że poszukiwaną odpowiedzią układu jest przemieszczenie w dowolnym punkcie konstrukcji i zamiast określenia „odpowiedź” będziemy używać synonimu „drgania” układu. Funkcja (4.2) opisuje zatem losowe drgania mostu i jest procesem stochastycznym, który można określić za pomocą mo-



mentów zwykłych i centralnych lub półniezmienników (kumulanty). Kumulanty procesu (4.2), obliczone z wykorzystaniem własności procesu Poissona [116], wynoszą

$$\kappa_{\mathbf{S}^r}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_j E[P_j^r] \int_{t_0}^t \mathbf{H}_{S_j}^r(x_i, t - \tau) d\tau, \quad (4.5)$$

gdzie indeks  $r$  oznacza rząd kumulanty. Pierwsza kumulanta jest wartością oczekiwaną procesu, druga jej wariancją:  $\kappa_{\mathbf{S}1} = E[\mathbf{S}]$ ,  $\kappa_{\mathbf{S}2} = \text{Var}[\mathbf{S}] = D^2[\mathbf{S}]$ . Symbol  $D[\cdot]$  oznacza odchylenie standardowe. Całkowanie we wzorze (4.5) musi być wykonane numerycznie, ponieważ dynamiczna funkcja wpływu jest tu określona dyskretnie, w zbiorze równoodległych punktów czasowych, wynikających z numerycznego całkowania równania ruchu. W celu uzyskania dostatecznej dokładności obliczeń należy wyznaczyć wartości funkcji  $\mathbf{H}_{S_j}(x_i, t - \tau)$  w wystarczająco gęstym zbiorze punktów, co wiąże się z założeniem dostatecznie małego kroku przy numerycznym całkowaniu równań ruchu.

Na podstawie wyznaczonych kumulant można określić w przybliżeniu funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa badanego procesu, korzystając z rozwinięcia w szereg Gramma–Charliera [81] według wzoru

$$f_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}, t) = \frac{\Phi_0(h)}{D[\mathbf{S}]} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \kappa_{\mathbf{S}^r} (D[\mathbf{S}])^{-(r+1)} \Phi_r(h), \quad (4.6)$$

gdzie

$$h = \frac{\mathbf{S} - E[\mathbf{S}]}{D[\mathbf{S}]}, \quad \Phi_r(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^r}{dh^r} \left[ \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right) \right]. \quad (4.7)$$

Pierwszy wyraz szeregu (4.6) opisuje rozkład normalny (gaussowski).

Praktyczne znaczenie z punktu widzenia swobodnego ruchu drogowego mają rozwiązania w stanie ustalonym, gdy chwila początkowa obserwacji procesu jest nieskończenie odległa, czyli gdy  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Wówczas kumulanty procesu, obliczone po podstawieniu do (4.5) nowej zmiennej  $\theta = t - \tau$ , wynoszą

$$\kappa_{\mathbf{S}^r}(x_i, \infty) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_j E[P_j^r] \int_{-\infty}^t \mathbf{H}_{S_j}^r(x_i, t - \tau) d\tau = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_j E[P_j^r] \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{S_j}^r(x_i, \theta) d\theta \quad (4.8)$$

i nie zależą od czasu. Funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wyznacza się jak poprzednio, według relacji (4.6) i (4.7), z podstawieniem wartości półniezmienników obliczonych według (4.8). W wielu praktycznych rozwiązaniach z dziedziny niezawodności konstrukcji często przyjmuje się uproszczenie polega-

jące na aproksymowaniu badanego procesu stochastycznego przez stacjonarny proces gaussowski. Wygodnym wskaźnikiem umożliwiającym porównanie danego procesu z procesem gaussowskim jest eksces [107]. Eksces procesu  $\mathbf{S}(x_i, t)$  oblicza się według wzoru

$$\zeta_{\mathbf{S}}^{(2)} = \frac{E[(\mathbf{S} - \kappa_{\mathbf{S}})^4]}{\kappa_{\mathbf{S}2}^2} - 3 = \frac{\kappa_{\mathbf{S}4} + 3\kappa_{\mathbf{S}2}^2 + 10\kappa_{\mathbf{S}}^4}{\kappa_{\mathbf{S}2}^2} - 3. \quad (4.9)$$

Oznaczenie  $\zeta_{\mathbf{S}}^{(2)}$  przyjęto zgodnie z systemem oznaczeń stosowanym przez Sobczyka [107]. W tej notacji symbol  $\zeta_{\mathbf{S}}^{(1)} = E[(\mathbf{S} - \kappa_{\mathbf{S}})^3] / \kappa_{\mathbf{S}2}^3$  oznacza współczynnik asymetrii. W przypadku procesu Gaussa współczynnik asymetrii i eksces jest równy zeru.

W zagadnieniach niezawodności oprócz charakterystyk probabilistycznych losowego procesu drgań konstrukcji są potrzebne charakterystyki procesu prędkości drgań [116, 107]. Można je wyznaczyć stosując analogiczną procedurę, w której korzysta się z funkcji  $\dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau) = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{H}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau)]$  będącej dynamiczną funkcją wpływu prędkości drgań. Przebieg czasowy tej funkcji jest określony przez prędkości uogólnione  $\dot{\mathbf{q}}(t - \tau)$ , które generuje się w każdym kroku numerycznego całkowania równania ruchu. Losowy proces prędkości drgań mostu i jego kumulanty są opisane funkcjami:

$$\dot{\mathbf{S}}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \int_{t_0}^t P_j(\tau) \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau) d\mathbf{N}_j(\tau), \quad (4.10)$$

$$\kappa_{\dot{\mathbf{S}}^r}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_j E[P_j^r] \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{S}_j}^r(x_i, t - \tau) d\tau, \quad (4.11)$$

analogicznymi do (4.2), (4.5). Podobnie jak poprzednio, to znaczy za pomocą rozwinięcia w szereg Gramma–Charliera, można określić funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa procesu  $\dot{\mathbf{S}}(x_i, t)$ .

Przedstawiona metoda wyznaczania kumulant procesu drgań mostu, wymuszonych działaniem ruchu drogowego, jest w istocie metodą analityczno-numeryczną, ponieważ przebiegi dynamicznych funkcji wpływu  $\mathbf{H}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau)$  i  $\dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau)$  mogą być wyznaczone jedynie w sposób numeryczny. Ścisłe analityczne wyznaczenie tych funkcji jest niemożliwe. Algorytm obliczeniowy opisanej metody jest zdecydowanie mniej złożony, zatem łatwiejszy do realizacji numerycznej niż algorytmy wykorzysta-

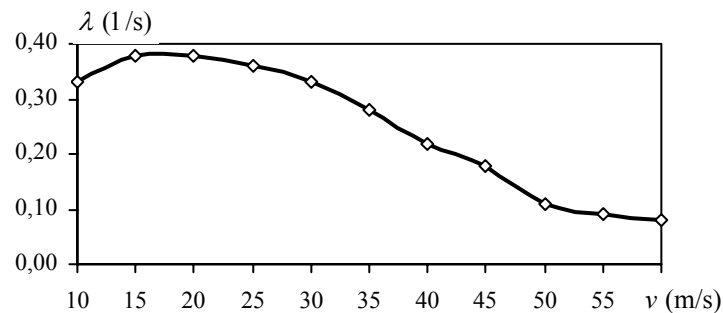
jące techniki symulacyjne. Sformułowany algorytm umożliwia wykonanie analiz numerycznych w szerokim zakresie parametrów i stanowi korzystny punkt wyjścia do badań niezawodności rozważanych mostów.

#### 4.2.2. Charakterystyki drgań losowych przykładowego mostu

Opisaną metodę zastosowano do analizy drgań mostu Vincenta Thomasa. Przyjęto, że obciążony jest jeden pas ruchu, zlokalizowany w odległości 6 m od osi podłużnej mostu. Parametry losowego obciążenia wynoszą:

$$E[P] = 7,025 \cdot 10^4 \text{ N}, \quad E[P^2] = 5,719 \cdot 10^9 \text{ N}^2, \\ E[P^3] = 5,119 \cdot 10^{14} \text{ N}^3, \quad E[P^4] = 4,941 \cdot 10^{19} \text{ N}^4,$$

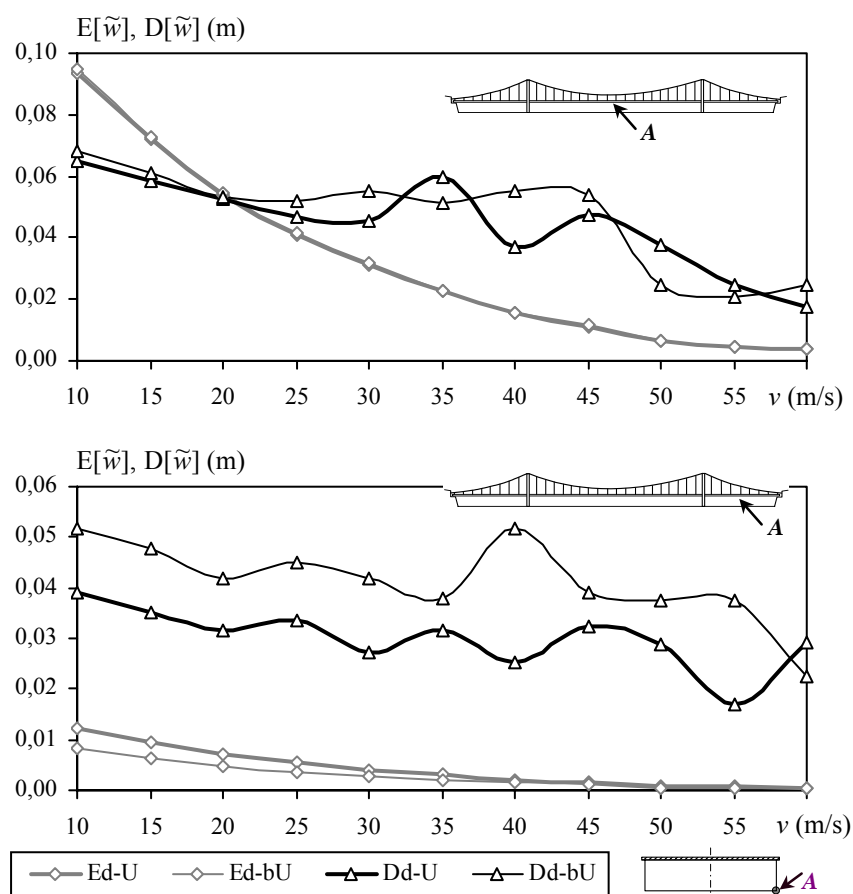
co odpowiada jednemu z przedstawionych w pracy [56] wariantów obciążenia drogowego (model „C”). Założono, że intensywność zgłoszeń  $\lambda$  jest związana z prędkością ruchu pojazdów  $v$  zależnością empiryczną, którą ilustruje rys. 4.2, sporządzony na podstawie wyników badań przedstawionych w pracy Latoszka [78].



Rys. 4.2. Empiryczna zależność intensywności zgłoszeń od prędkości ruchu pojazdów [78]  
Fig. 4.2. Traffic intensity versus traffic speed: empirical dependence [78]

Na rysunku 4.3 pokazano wykresy ilustrujące zależność wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego drgań mostu w stanie ustalonym ( $t_0 \rightarrow -\infty$ ) od prędkości ruchu pojazdów. Analogiczną zależność odnoszącą się do prędkości drgań mostu przedstawiono na rys. 4.4. Wyniki obliczeń dotyczą pionowej składowej drgań prawego dolnego naroża przekroju dźwigara usztywniającego (punkt  $A$ ), w środku rozpiętości przęsła głównego i przęsła bocznego. Symbole legendy rysunków: Ed-U i Dd-U oznaczają odpowiednio wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe, obliczone za pomocą dynamicznych funkcji wpływu, które wyznaczono według zasadniczej wersji algorytmu analizy drgań deterministycznych – wersji, w której uwzględnia się poziome podłużne składowe przemieszczenia cięgien. Symbole: Ed-bU i Dd-bU odnoszą

się do uproszczonej wersji algorytmu, podobnie jak w rozdziale 3.4. Dynamiczne funkcje wpływu analizowanych odpowiedzi mostu wyliczono przy założeniu masowego modelu tłumienia, z parametrem  $\mu = 2\alpha\omega_1$ , gdzie  $\alpha = 0,02$ .

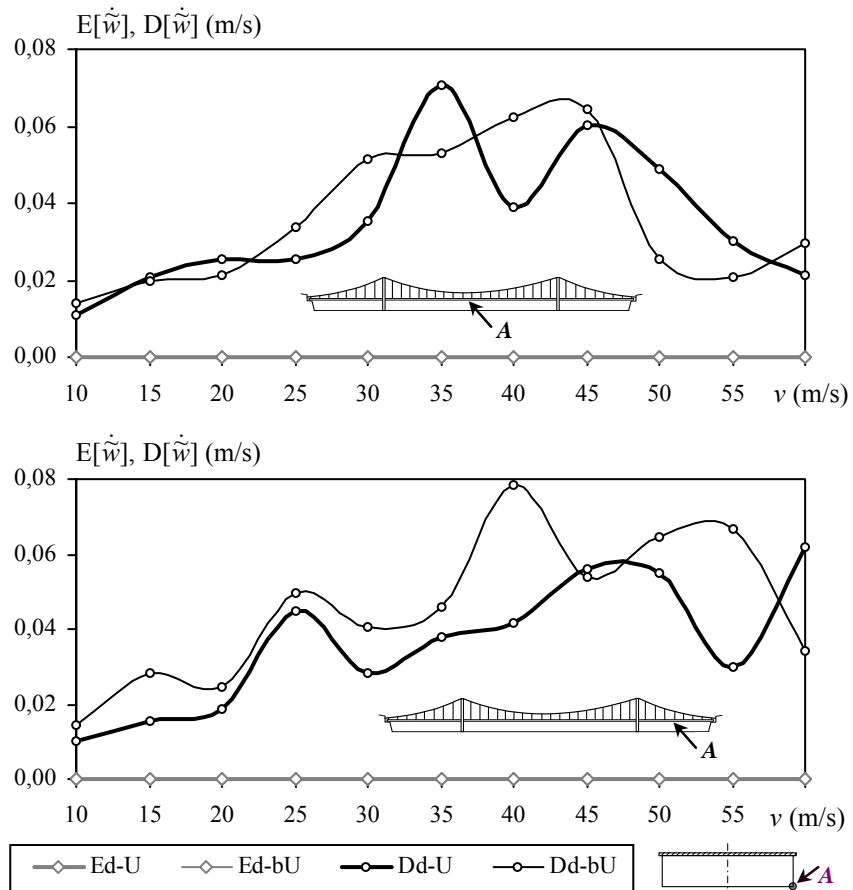


Rys. 4.3. Zależność wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego pionowej składowej drgań w stanie ustalonym od prędkości ruchu pojazdów

Fig. 4.3. Expected value and standard deviation for vertical component of vibration in a steady-state versus traffic speed

Na podstawie wyników obliczeń można ogólnie stwierdzić, że wartości oczekiwane przemieszczeń dynamicznych i odchylenia standardowe maleją ze wzrostem prędkości pojazdów, przy czym trzeba tu przypomnieć, że ze wzrostem prędkości wiąże się zmniejszenie intensywności ruchu (zgłoszeń pojazdów). W przypadku wartości oczekiwanych zależność ta jest monotoniczna, natomiast w przypadku odchyżeń standardowych pojawiają się przy niektórych prędkościach pojazdów lokalne ekstrema. Odchylenia standardowe

prędkości drgań wykazują tendencję wzrostową, maleją dopiero przy bardzo dużych prędkościach ruchu ( $\sim 50$  m/s). Lokalne ekstrema pojawiają się przy tych samych prędkościach pojazdów, co poprzednio – jak w przypadku odchyień standardowych przemieszczeń, ale są większe. Występowanie ekstremów rozwiązań oznacza, że przy pewnych prędkościach ruchu pojazdów most wykazuje szczególną wrażliwość dynamiczną.



Rys. 4.4. Zależność wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego prędkości pionowej składowej drgań w stanie ustalonym od prędkości ruchu pojazdów

Fig. 4.4. Expected value and standard deviation for vertical component of vibration velocity in a steady-state versus traffic speed

Zastosowanie uproszczonej teorii drgań, z pominięciem poziomych przemieszczeń ciągów, prowadzi do rozwiązań, w których przy prędkości 40 m/s występuje duże ekstremum lokalne w przęśle bocznym mostu. W środku rozpiętości przęsła środkowego obserwuje się zwiększenie wrażliwości dynamicznej konstrukcji w za-

kresie prędkości od 30 do 45 m/s, ale nie pojawia się tak wyraźne ekstremum, jak w przęśle bocznym. Przy zastosowaniu do obliczeń drugiego modelu konstrukcji, w którym są uwzględnione poziome przemieszczenia cięgien, otrzymuje się zdecydowanie mniejsze wartości odchyłeń standardowych drgań w przęsłach bocznych, w całym zakresie prędkości pojazdów. Lokalne ekstrema rozwiązań są mniejsze i inaczej położone (25, 35 i 45 m/s). W przęśle środkowym ekstremum lokalne ujawnia się, gdy  $v = 35$  m/s.

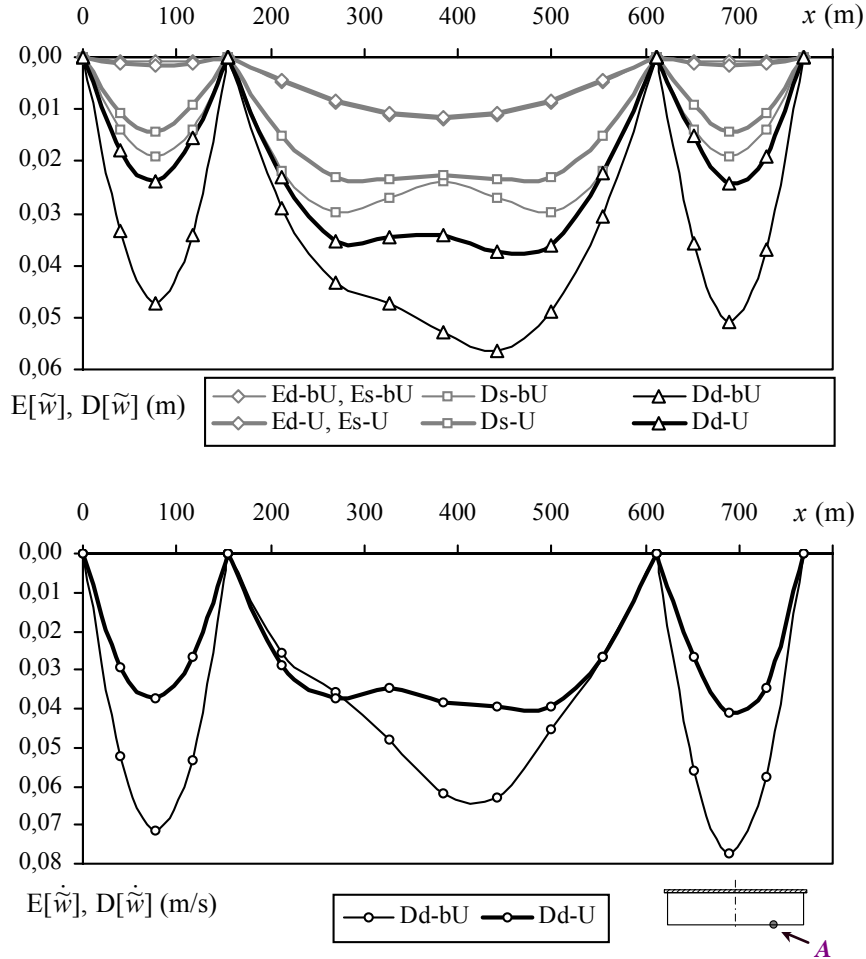
Z porównania rozwiązań przedstawionych na rys. 4.3 wynika, że wartości oczekiwane przemieszczeń dynamicznych w środku rozpiętości przęsła głównego są znacznie większe niż w przęśle bocznym, a wartości odchyłeń standardowych są porównywalne. Na rysunku 4.5 przedstawiono rozkład analizowanych wielkości wzdłuż całej rozpiętości mostu, przy prędkości ruchu  $v = 40$  m/s i intensywności zgłoszeń pojazdów  $\lambda = 0,22$  s<sup>-1</sup>. Prezentowane na rysunku wyniki obejmują charakterystyki probabilistyczne losowych odpowiedzi mostu, wyznaczone w zagadnieniu dynamicznym (d) i statycznym (s), z uwzględnieniem (U) i pominięciem (bU) wpływu poziomych przemieszczeń cięgien.

Sposób wyznaczenia rozwiązań statycznych wymaga dodatkowego omówienia. W zagadnieniu statycznym opisany proces obciążenia opisuje przypadek zatoru pojazdów na wszystkich pasach ruchu w obrębie całej rozpiętości mostu, przy czym położenie pojazdów na moście jest losowe [35]. Odstępy między pojazdami są niezależnymi zmiennymi losowymi, a liczbę pojazdów na danym pasie ruchu określa stacjonarny proces Poissona  $\mathbf{N}_j(x_j)$  o parametrze  $\lambda_j$ ,  $x_j$  jest zmienną geometryczną mierzoną wzdłuż toru ruchu pojazdów na pasie  $j$ ,  $\lambda_j$  jest średnią liczbą pojazdów mierzoną na jednostkę długości. Obciążenie zbiorem pojazdów, modelowanych siłami skupionymi  $P_{jk}$  o losowych wartościach i losowym położeniu  $x_{jk}$ , powoduje statyczną reakcję mostu, która jest określona wzorem

$$\mathbf{S}(x_i) = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{\mathbf{N}_j(x_j)} P_{jk} \mathbf{H}_{\mathbf{s}_j}(x_i, x_{jk}) = \sum_{j=1}^{n_p} \int_0^L P_j(x_j) \mathbf{H}_{\mathbf{s}_j}(x_i, x_j) d\mathbf{N}_j(x_j). \quad (4.12)$$

Funkcje  $\mathbf{H}_j(x_i, x_j)$  są statycznymi funkcjami wpływu reakcji  $\mathbf{S}(x_i)$ . Charakterystyki losowe (kumulanty) odpowiedzi mostu w sformułowanym tu zagadnieniu statycznym wynoszą

$$\kappa_{\mathbf{S}}(x_i) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_j E[P_j^r] \int_0^L \mathbf{H}_{\mathbf{s}_j}^r(x_i, x_j) dx_j. \quad (4.13)$$



Rys. 4.5. Rozkład wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych wzdłuż rozpiętości mostu  
 Fig. 4.5. Distribution of expected values and standard deviations along the bridge span

Z analizy rozwiązań przedstawionych na rys. 4.5 wynikają następujące wnioski. Wartości oczekiwane przemieszczeń dynamicznych w stanie ustalonym są takie same jak przemieszczeń statycznych, jeśli intensywność zgłoszeń pojazdów w zadaniu dynamicznym (tu  $\lambda = 0,22 \text{ s}^{-1}$ ) jest liczbowo równa parametrowi procesu Poissona w zagadnieniu statycznym ( $\lambda = 0,22 \text{ m}^{-1}$ ). Największą wartość oczekiwaną otrzymuje się w przekroju środkowym przęsła głównego. Maksymalne wartości odchyłeń standardowych przemieszczeń dynamicznych przęseł bocznych stanowią około 2/3 wartości maksymalnych odchyłeń w przęśle środkowym, natomiast wartości oczekiwane są około dziesięciokrotnie mniejsze. To oznacza, że w zagadnieniu drgań determi-

stycznych, wywołanych ruchem drogowym, należy spodziewać się w przęsłach bocznych znacznie większych wartości współczynników dynamicznych niż w przęśle środkowym. Potwierdzeniem tego wniosku są wyniki badań przedstawione w rozdziale 3.3 (rys. 3.22). Pominięcie w obliczeniach wpływu poziomych przemieszczeń cięgien prowadzi do zawyżenia wartości odchyień standardowych, wartości przeciętne nie zmieniają się istotnie. Największe różnice ilościowe między rozwiązaniami U i bU występują w obrębie przęseł bocznych. Odchylenia standardowe przemieszczeń dynamicznych i prędkości przemieszczeń obliczone w przypadku bU są prawie dwukrotnie większe, przy czym jest to najbardziej niekorzystny przypadek odpowiadający prędkości 40 m/s (rys. 4.3, 4.4). W przęśle środkowym różnice ilościowe są mniejsze, ale rozkłady odchyień standardowych wzdłuż przęsła różnią się jakościowo. W przypadku rozwiązań typu bU obserwuje się wyraźne maksimum rozkładu w przekroju  $x_2 = 0,625l_2$ . W przypadku U rozkład jest bardziej „równomierny”, podobny do rozkładu w zagadnieniu statycznym, gdzie odchylenia standardowe w środku rozpiętości przęsła centralnego są mniejsze niż w ćwiartce rozpiętości.

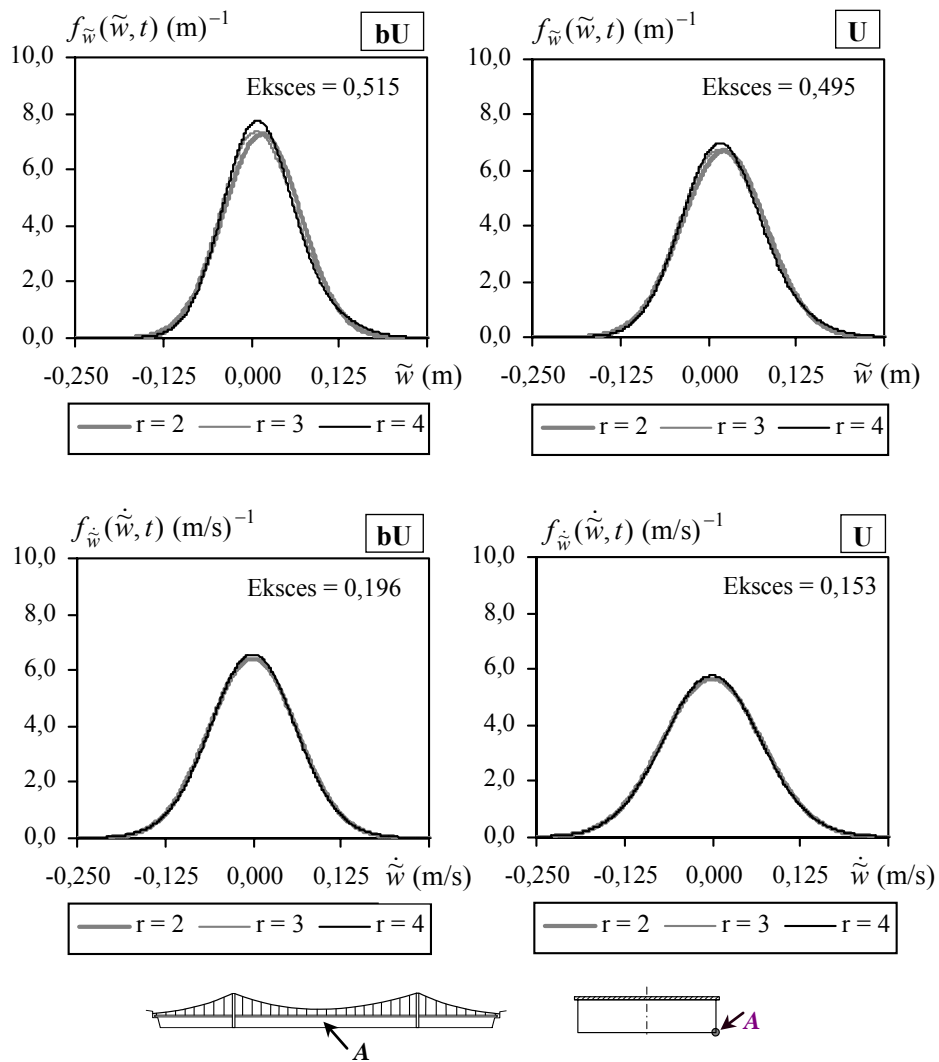
Przedstawione w niniejszym rozdziale wyniki analizy drgań losowych będą wykorzystane do oceny niezawodności mostu obciążonego losowym ruchem drogowym. Jak wspomniano wcześniej, analiza niezawodności jest zdecydowanie łatwiejsza, gdy można proces odpowiedzi konstrukcji aproksymować stacjonarnym procesem gaussowskim. Aby porównać badane procesy drgań z procesem Gaussa, wyznaczono funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa według wzoru (4.6), z zastosowaniem jednego ( $r = 2$ ), dwóch ( $r = 3$ ) i trzech ( $r = 4$ ) wyrazów rozwinięcia w szereg Gramma–Charliera. Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4.6–4.8.

Wykresy funkcji gęstości dotyczą drgań pionowych i prędkości drgań w stanie ustalonym, w prawym dolnym narożu przekroju dźwigara, w 1/2 i 3/4 rozpiętości przęsła głównego oraz w środku rozpiętości prawego przęsła bocznego. Drgania są wymuszone obciążeniem poruszającym się po jednym pasie ruchu. Prędkość ruchu pojazdów i intensywność zgłoszeń wynoszą  $v = 40 \text{ m/s}$  i  $\lambda = 0,22 \text{ s}^{-1}$  w przypadku rozwiązań z pominięciem poziomych przemieszczeń cięgien (bU) oraz  $v = 35 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = 0,28 \text{ s}^{-1}$ , gdy te przemieszczenia są uwzględnione (U).

Funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa procesu prędkości drgań w stanie ustalonym bardzo niewiele różnią się od rozkładu normalnego ( $r = 2$ ). Najbardziej odbiega od rozkładu Gaussa proces prędkości drgań w 3/4 rozpiętości przęsła głównego (rys. 4.7), wyznaczony za pomocą algorytmu, w którym pomija się poziome przemieszczenia cięgien (bU). W przypadku zastosowania do obliczeń algorytmu typu U otrzymuje się w każdym analizowanym przekroju mniejsze wartości ekscesu niż w przypadku bU i prędkość drgań jest praktycznie procesem gaussowskim. Eksces procesów opisujących drgania mostu jest większy niż dla prędkości drgań, ale funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa nie różnią się znacząco od rozkładu Gaussa. Proces drgań w 3/4 rozpiętości przęsła głównego najbardziej odbiega od gaussowskie-

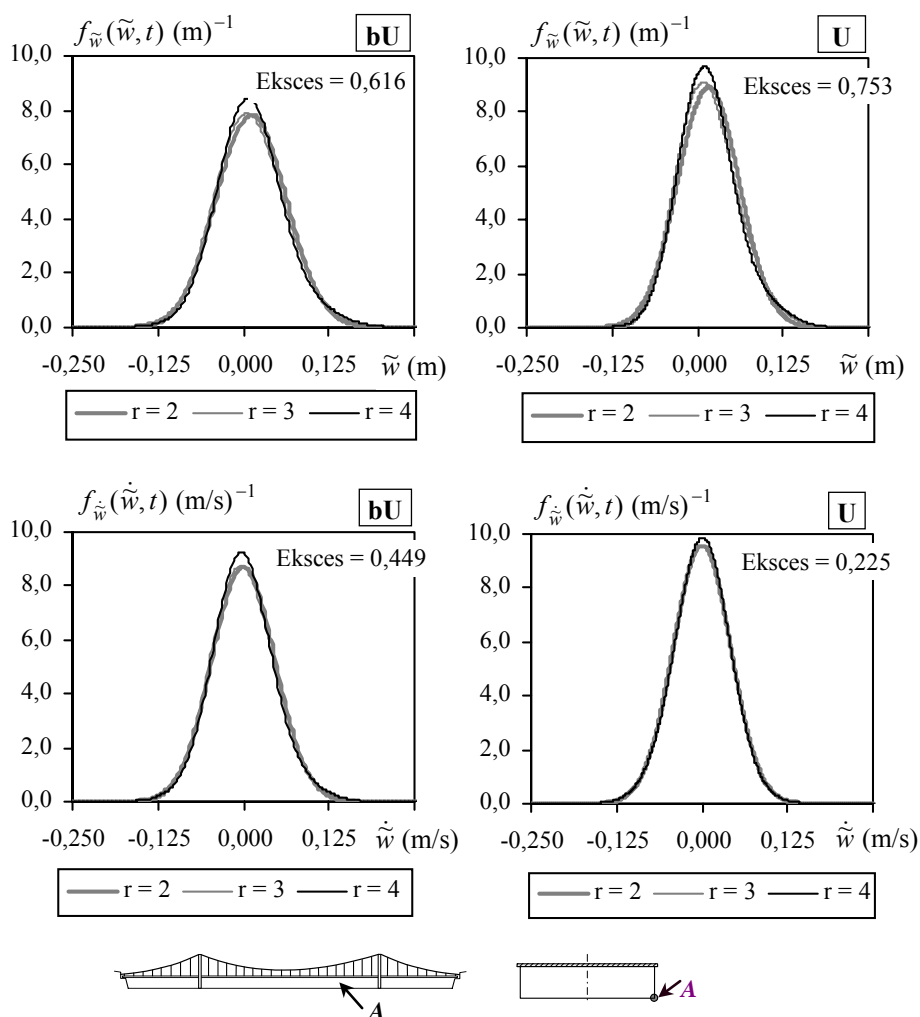


go, podobnie jak proces prędkości drgań. Rozwiązania typu bU są bliższe rozkładowi Gaussa niż rozwiązania U – odwrotnie niż w przypadku procesu prędkości drgań. Wyjątkiem jest tu jedynie proces drgań w środku rozpiętości przęsła głównego, który jest równocześnie najbardziej zbliżony do procesu normalnego.



Rys. 4.6. Funkcje gęstości procesu drgań i procesu prędkości drgań w stanie ustalonym, w środku rozpiętości przęsła głównego

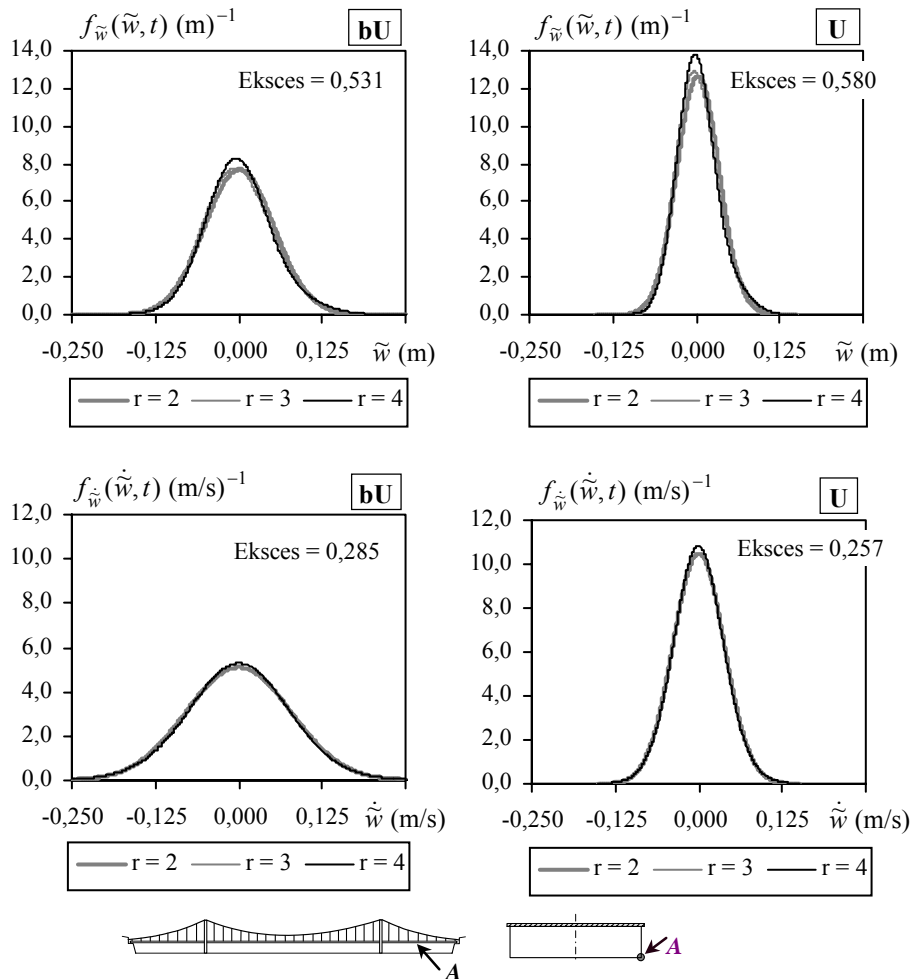
Fig. 4.6. Probability density functions of the vibration process and the process of vibration velocity in a steady-state, at the 1/2 of central span



Rys. 4.7. Funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa procesu drgań i procesu prędkości drgań w stanie ustalonym, w 3/4 rozpiętości przęsła głównego

Fig. 4.7. Probability density functions of the vibration process and the process of vibration velocity in a steady-state, at the 3/4 of central span

Z wyników analiz wynika ogólny wniosek, że aproksymacja odpowiedzi mostu w stanie ustalonym przez stacjonarne procesy gaussowskie jest praktycznie uzasadniona, przy czym największy błąd w ocenie rozkładu prawdopodobieństwa procesu popelnia się w przypadku drgań w przekrojach położonych w ćwiartkach rozpiętości przęsła głównego.



Rys. 4.8. Funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa procesu drgań i procesu prędkości drgań w stanie ustalonym, w środku rozpiętości prawego przęsła bocznego

Fig. 4.8. Probability density functions of the vibration process and the process of vibration velocity in a steady-state, at the 1/2 of side span

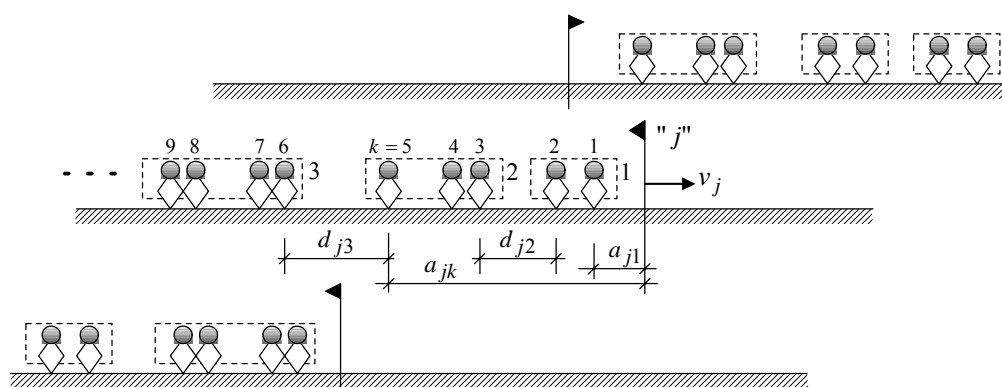
Przedstawione w niniejszym rozdziale wyniki badań numerycznych potwierdzają praktyczną przydatność sformułowanych algorytmów do analizy losowych drgań wieloprzęślowych mostów wiszących obciążonych ruchem drogowym. Metoda wyznaczania charakterystyk procesów stochastycznych opisujących drgania mostu umożliwia obliczenie kumulant podstawowych (wartości oczekiwanej i wariancji) oraz kumulant wyższych rzędów, przy czym wyniki dotyczące ustalonego stanu drgań

mogą być wyliczone bezpośrednio, bez analizy stanu przejściowego. Zastosowanie opisanej metody jest jednak ograniczone jedynie do drgań liniowych. Ponadto w przyjętym modelu obciążenia pojazdami drogowymi pomija się a priori inercję i resorowanie pojazdów. Aby w pełni ocenić przydatność przedstawionych rozwiązań, należy stwierdzić, czy wpływ efektów nieliniowych i pomijanych tu cech obciążenia jest w rozważanym przypadku rzeczywiście pomijalny. Do analizy wymienionych efektów zastosowano w dalszym ciągu pracy podejście symulacyjne.

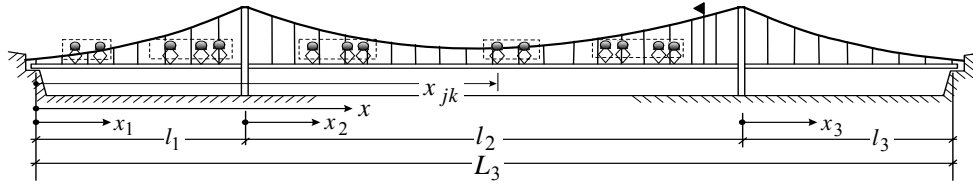
### 4.3. Zastosowanie metody symulacyjnej do analizy drgań nieliniowych

#### 4.3.1. Symulacyjny model obciążenia mostu losowym ruchem drogowym

Zakładamy, że pojazdy drogowe poruszają się po kilku pasach ruchu. Każdy potok pojazdów jest modelowany losowym, jednostronnie nieograniczonym strumieniem jednomasowych oscylatorów lepko-sprężystych, przy czym każdy pojazd stanowi układ dwu lub więcej oscylatorów (osie zawieszonych), których wzajemne odległości są ustalone – rys. 4.9, 4.10. Nieobciążony tor ruchu pojazdów jest prostoliniowy i gładki, równoległy do osi mostu. Oscylatory wjeżdżają na most w stanie równowagi statycznej, dynamiczne naciski oscylatorów są zawsze dodatnie. Wielkościami losowymi są odległości między pojazdami, masy ładunku pojazdów oraz rodzaj (klasa) pojazdu. Prędkość ruchu oscylatorów (pojazdów) w strumieniu  $v_j$  jest wielkością deterministyczną i jest stała.

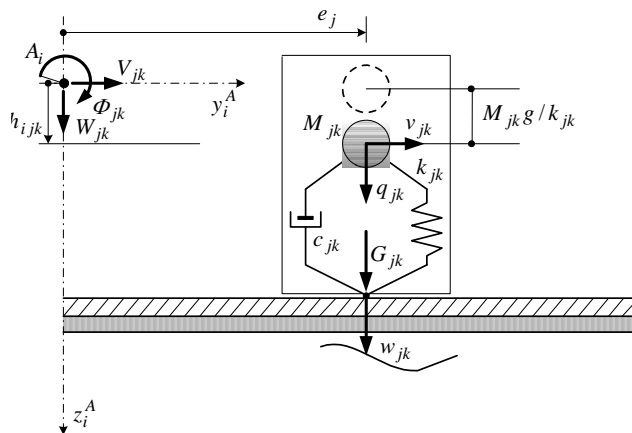


Rys. 4.9. Model obciążenia losowymi potokami pojazdów drogowych  
Fig. 4.9. Load model idealizing random flows of road vehicles



Rys. 4.10. Schemat obciążenia mostu symulowanym potokiem pojazdów drogowych  
Fig. 4.10. Scheme of the bridge load in a form of the simulated flow of road vehicles

Ruch poziomy oscylatora jest określony funkcją  $x_{jk}(t) = a_j + \rho_j(v_j t - a_{jk})$ . Parametr  $a_{jk}$  opisuje położenie pojedynczego oscylatora względem frontu strumienia, indeks  $j = 1, 2, \dots, n_p$  oznacza numer potoku pojazdów,  $n_p$  jest liczbą pasów ruchu,  $k$  jest kolejnym numerem oscylatora w danym strumieniu. W chwili początkowej  $t = 0$  czoło strumienia pojazdów znajduje się w punkcie  $x = 0$ , jeśli kierunek ruchu jest zgodny ze zwrotem osi  $x$ . Należy wówczas przyjąć:  $\rho_j = 1$ ,  $a_j = 0$ . Jeśli kierunek ruchu strumienia jest przeciwny do zwrotu osi  $x$ , to w chwili początkowej czoło strumienia znajduje się w punkcie  $x = L_n$  i stałe specyfikujące kierunek ruchu wynoszą:  $\rho_j = -1$ ,  $a_j = L_n$ . Stała  $L_n = l_1 + l_2 + \dots + l_n$  jest sumą rozpiętości przęseł dźwigara usztywniającego.



Rys. 4.11. Lokalizacja i stan przemieszczenia oscylatora w przekroju poprzecznym mostu  
Fig. 4.11. Location and displacements of the oscillator in a bridge cross-section

Na rysunku 4.11 przedstawiono lokalizację przykładowego oscylatora w przekroju poprzecznym mostu. Położenie środka masy oscylatora w chwili początkowej opisują współrzędne  $e_j$ ,  $h_{ijk}$  mierzone w układzie osi  $y_i^A$ ,  $z_i^A$  o początku w środku ścinania

przekroju dźwigara  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  jest numerem przęsła,  $e_j$  jest współrzędną wspólną dla wszystkich oscylatorów w obrębie  $j$ -tego toru ruchu. Ciężar oscylatora  $G_{jk} = (M_{jk} + M_{jk}^{nr})g$  jest częścią ciężaru pojazdu przypadającą na jedną oś zawieszenia. Ciężar ten obejmuje masę resorowaną pojazdu  $M_{jk}$  oraz masę nieresorowaną  $M_{jk}^{nr}$ . Charakterystyki zawieszenia  $k_{jk}$ ,  $c_{jk}$  masy  $M_{jk}$  są liniowe. Oscylator ma jeden stopień swobody względem pomostu, określony współrzędną  $q_{jk}$ , która jest pionowym przemieszczeniem masy resorowanej, mierzonym od stanu przemieszczenia statycznego  $M_{jk}g / k_{jk}$ . Przemieszczenia masy resorowanej  $M_{jk}$ , wywołane ruchem pomostu, wynoszą

$$w_{jk}[x_{jk}(t), t] = W_{jk}[x_{ijk}(t), t] + e_j \Phi_{jk}[x_{ijk}(t), t], \quad (4.14)$$

$$v_{jk}[x_{jk}(t), t] = V_{jk}[x_{ijk}(t), t] - h_{ijk} \Phi_{jk}[x_{ijk}(t), t],$$

gdzie  $L_{i-1} \leq x_{jk}(t) \leq L_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , przy czym  $x_{ijk} = x_{jk} - L_{i-1}$ ,  $L_i = \sum_{k=1}^i l_k$ ,  $L_0 = 0$ .

Funkcje  $W_{jk}$ ,  $V_{jk}$ ,  $\Phi_{jk}$  są składowymi przemieszczenia przekroju dźwigara, śledzącymi położenie oscylatora w obrębie poszczególnych przęseł. Korzystając z relacji (2.60) można je zapisać w postaci

$$\begin{aligned} W_{jk}[x_{ijk}(t), t] &= w_i[x_{ijk}(t), t] = \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{q}_{wi}, \\ V_{jk}[x_{ijk}(t), t] &= v_i[x_{ijk}(t), t] = \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{q}_{vi}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\Phi_{jk}[x_{ijk}(t), t] = \varphi_i[x_{ijk}(t), t] = \frac{1}{e} \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{q}_{\varphi i},$$

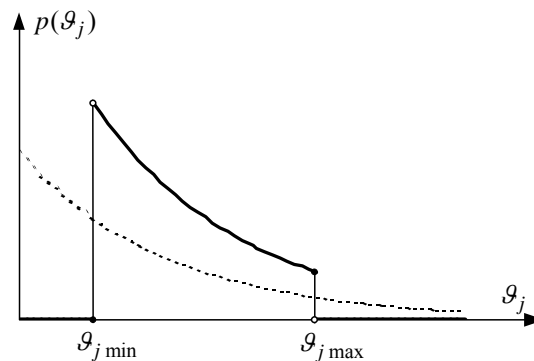
gdzie  $\tilde{\mathbf{s}}_{ijk}$  jest wektorem śledzących funkcji aproksymacyjnych  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i(x_i)$  o argumentach  $x_i = x_{ijk} = [a_j + \rho_j(v_j t - a_{jk})] - L_{i-1}$ . Gdy  $x_{jk} = [a_j + \rho_j(v_j t - a_{jk})] < L_{i-1}$  lub  $x_{jk} = [a_j + \rho_j(v_j t - a_{jk})] > L_i$ , należy przyjąć  $\tilde{\mathbf{s}}_{ijk} = \mathbf{0}$ .

Przejdźmy teraz do zdefiniowania algorytmu służącego do numerycznej symulacji losowych potoków pojazdów. Każdy potok charakteryzują trzy podstawowe wielkości losowe:  $\mathcal{G}_j$  – odstęp czasowy między kolejnymi pojazdami w strumieniu  $j$ ,  $K$  – klasa pojazdu oraz masa ładunku  $M_r^t$  pojazdu danej klasy  $K = K_r$ , zależna od losowego wskaźnika załadowania  $z$ . Odstępy między pojazdami wynikają z przyjętego procesu zgłoszeń. Zazwyczaj przyjmuje się model zgłoszeń w postaci jednorodnego procesu Poissona o stałej intensywności  $\lambda_j$  [10, 97]. Wówczas zmienna losowa  $\mathcal{G}_j$ , będąca

różnicą chwil zgłoszeń kolejnych pojazdów, jest ciągłą zmienną losową o rozkładzie wykładniczo-malejącym, oznaczonym na rys. 4.12 linią przerywaną. W celu wyeliminowania praktycznie nierealnych przypadków granicznych:  $\vartheta_j \rightarrow 0$  oraz  $\vartheta_j \rightarrow \infty$ , przyjmiemy gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\vartheta_j$  w postaci rozkładu wykładniczego obustronnie uciętego, oznaczonego na rys. 4.12 linią ciągłą. Rozkład ten jest określony wzorem [26, 8]

$$p(\vartheta_j) = \begin{cases} \lambda_j e^{-\lambda_j \vartheta_j} / (e^{-\lambda_j \vartheta_{j \min}} - e^{-\lambda_j \vartheta_{j \max}}) & \text{dla } \vartheta_{j \min} < \vartheta_j \leq \vartheta_{j \max}, \\ 0 & \text{dla } \vartheta_j \leq \vartheta_{j \min} \text{ i } \vartheta_j > \vartheta_{j \max}, \end{cases} \quad (4.16)$$

w którym  $\vartheta_{j \min} = d_{j \min} / v_j$ ,  $\vartheta_{j \max} = d_{j \max} / v_j$ . Odległości w świetle między pojazdami  $k = 1, 2, \dots$  wynoszą  $d_{jk} = v_j \vartheta_{jk}$  (rys. 4.9) i nie mogą przekroczyć wartości granicznych  $d_{j \min}$ ,  $d_{j \max}$ . Generator ciągu liczb losowych  $\vartheta_{jk}$  opracowano metodą eliminacji J. von Neumanna, opisaną w monografii Zielińskiego [125].



Rys. 4.12. Gęstość rozkładu zmiennej losowej opisującej odstępy czasowe między kolejnymi pojazdami w strumieniu  $j$

Fig. 4.12. Probability density function of random variable describing intervals between successive vehicles in a flow  $j$

Wielkość losowa  $K$  oznaczająca klasę pojazdu jest dyskretną zmienną losową o rozkładzie skokowym [26, 8]. Przyjęto, że prawdopodobieństwo zgłoszenia się pojazdu klasy  $K_r$  w potoku  $j$  wynosi

$$P_j \{K = K_r\} = P_{jr}, \quad \sum_{r=1}^{n_K} P_{jr} = 1, \quad (4.17)$$

gdzie  $n_K$  jest liczbą wyróżnionych klas pojazdów. Ciąg liczb  $K_{r(jk)}$  identyfikujących losową klasę pojazdów  $k = 1, 2, \dots$ , kolejno zgłaszających się w potoku  $j$ , wygenerowano stosując metodę odwracania dystrybuanty [125]. Każdej wyróżnionej klasie pojazdów  $K_r$  odpowiada dopuszczalna masa ładunku  $M_{r, \max}^t$ . Masa ładunku pojazdu danej klasy  $M_r^t = zM_{r, \max}^t$  zmienia się losowo w przedziale  $[0, M_{r, \max}^t]$  i zależy od wskaźnika załadowania  $z$ , który jest ciągłą zmienną losową o rozkładzie równomiernym na przedziale domkniętym  $[0, 1]$ . Masa ładunku pojazdów  $k = 1, 2, \dots$ , zgłaszających się kolejno w potoku  $j$  jest równa  $M_{jk} = z_{jk}M_{r, \max}^t$ . Losowe liczby  $z_{jk}$  generuje się przy użyciu standardowych procedur numerycznych, dostępnych w ogólnie stosowanych językach programowania.

#### 4.3.2. Równania ruchu mostu wiszącego obciążonego zbiorem ruchomych oscylatorów

Zdefiniowany powyżej algorytm symulacyjny, generujący losowe potoki pojazdów, umożliwia numeryczne określenie przebiegów czasowych przykładowych realizacji losowego procesu obciążenia. Każdej realizacji obciążenia towarzyszy określona historia zmian stanu przemieszczenia i stanu wyężenia konstrukcji. Podstawą określenia przebiegu tej odpowiedzi jest sformułowanie i rozwiązanie równań opisujących ruch konstrukcji obciążonej pojazdami modelowanymi zbiorem oscylatorów.

Wymuszone kinematycznie drgania oscylatora znajdującego się w przęśle  $i$  są opisane równaniem

$$M_{jk}\ddot{q}_{jk} + c_{jk}\dot{q}_{jk} + k_{jk}q_{jk} = c_{jk}(\dot{W}_{jk} + e_j\dot{\Phi}_{jk}) + k_{jk}(W_{jk} + e_j\Phi_{jk}), \quad (4.18)$$

w którym prędkości przemieszczeń przekroju dźwigara, śledzących położenie oscylatora, wynoszą

$$\dot{W}_{jk} = \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{q}_{wi} + \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \dot{\mathbf{q}}_{wi}, \quad \dot{\Phi}_{jk} = (\tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{q}_{\phi i} + \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \dot{\mathbf{q}}_{\phi i}) / e, \quad (4.19)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{s}}_{ijk} = (\rho_j v_j / l_i) \mathbf{d} \tilde{\mathbf{c}}_{ijk}$ ,  $\tilde{\mathbf{c}}_{ijk} = \mathbf{c}_i(x_{ijk})$ . Symbole  $\mathbf{d}$  i  $\mathbf{c}_i$ , podobnie jak w rozdziale 2.5.2, oznaczają odpowiednio macierz diagonalną  $\mathbf{d} = \text{diag}(\pi, 2\pi, \dots, n_b \pi)$  oraz wektor  $\mathbf{c}_i(x_i) = [\cos(\pi x_i / l_i), \dots, \cos(n_b \pi x_i / l_i)]^T$ , przy czym  $x_i = x_{ijk}$ .

Zbiór współrzędnych  $q_{jk}$  zapiszemy w postaci wektora  $\mathbf{q}_o$  o następującym uporządkowaniu:

$$\mathbf{q}_o = [\mathbf{q}_{o1}^T, \mathbf{q}_{o2}^T, \dots, \mathbf{q}_{on_p}^T]^T, \quad \mathbf{q}_{oj} = [\mathbf{q}_{oj1}^T, \dots, \mathbf{q}_{ojn}^T]^T, \quad j = 1, 2, \dots, n_p, \quad (4.20)$$



gdzie

$$\mathbf{q}_{oji} = [q_{jn_{1i}}, \dots, q_{jk}, \dots, q_{jn_{2i}}]^T, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.21)$$

Liczby  $n_{1i}, n_{2i}$  definiują podzbiór oscylatorów poruszających się w strumieniu  $j$ , które w chwili  $t$  mają kontakt z przesłem  $i$ . Analogicznie, ale w macierze diagonalne  $\mathbf{k}_o, \mathbf{c}_o, \mathbf{M}_o, \mathbf{h}_o$ , uporządkujemy charakterystyki zawieszzeń  $k_{jk}, c_{jk}$ , masy oscylatorów  $M_{jk}$  oraz współrzędne  $h_{ijk}$ . Ciężary  $G_{jk}$  oscylatorów uporządkujemy w wektor  $\mathbf{G}_o$  o strukturze (4.20). Równania (4.18) zapisane w chwili  $t$  dla zbioru wszystkich oscylatorów mają postać

$$\mathbf{M}_o \ddot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{c}_o \dot{\mathbf{q}}_o + \mathbf{k}_o \mathbf{q}_o = \mathbf{F}_o. \quad (4.22)$$

Wektor  $\mathbf{F}_o$  ma strukturę blokową, analogiczną do określonej wzorami (4.20). Poszczególne bloki wektora  $\mathbf{F}_o$  są określone wzorami o postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{oji} = & \left( \frac{\rho_j v_j}{l_i} \mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d} + \mathbf{k}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \right) \mathbf{q}_{wi} + \frac{e_j}{e} \left( \frac{\rho_j v_j}{l_i} \mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d} + \mathbf{k}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \right) \mathbf{q}_{\phi i} + \\ & + \left( \mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \right) \dot{\mathbf{q}}_{wi} + \frac{e_j}{e} \left( \mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \right) \dot{\mathbf{q}}_{\phi i}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{S}}_{ji} = [\tilde{s}_{ijn_{1i}}, \dots, \tilde{s}_{ijk}, \dots, \tilde{s}_{ijn_{2i}}]$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{ji} = [\tilde{c}_{ijn_{1i}}, \dots, \tilde{c}_{ijk}, \dots, \tilde{c}_{ijn_{2i}}]$ .

Obciążeniem mostu jest nacisk statyczny (ciężar) każdego oscylatora  $G_{jk}$  oraz siły inercji masy resorowanej:  $-M_{jk} \ddot{q}_{jk}$ ,  $-M_{jk} \ddot{v}_{jk}$ . Siły inercji nieresorowanej masy pojazdów oraz bezwładność obrotową masy pojazdów pominiemy, zakładając, że ich wpływ na drgania mostu jest niewielki. Składowe obciążenia, zredukowane do środka ścinania przekroju dźwigara są określone wzorami:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{zi}(x_i, t) &= \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_{1i}}^{n_{2i}} (G_{jk} - M_{jk} \ddot{q}_{jk}) \delta(x_i - x_{ijk}), \\ \mathbf{q}_{yi}(x_i, t) &= \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_{1i}}^{n_{2i}} (-M_{jk} \ddot{v}_{jk}) \delta(x_i - x_{ijk}), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{m}_{xi}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=n_{1i}}^{n_{2i}} [ -(-M_{jk} \ddot{v}_{jk}) h_{ijk} + (G_{jk} - M_{jk} \ddot{q}_{jk}) e_j ] \delta(x_i - x_{ijk}).$$

przy czym liczby  $n_{1i}, n_{2i}$  są różne w poszczególnych strumieniach  $j$ . Przyspieszenie poziomego przemieszczenia masy  $M_{jk}$ , znajdującej się na przęśle  $i$ , można zapisać w postaci wzoru

$$\begin{aligned}
\ddot{v}_{jk} &= \ddot{V}_{jk} - h_{ijk} \ddot{\Phi}_{jk} = \\
&= \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{q}_{vi} + 2\tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \dot{\mathbf{q}}_{vi} + \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \ddot{\mathbf{q}}_{vi} - \frac{h_{ijk}}{e} \left( \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{q}_{\phi i} + 2\tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \dot{\mathbf{q}}_{\phi i} + \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \ddot{\mathbf{q}}_{\phi i} \right) = \\
&= -\frac{v_j^2}{l_i^2} \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{vi} + 2\frac{\rho_j v_j}{l_i} \tilde{\mathbf{c}}_{ijk}^T \mathbf{d} \dot{\mathbf{q}}_{vi} + \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \ddot{\mathbf{q}}_{vi} + \\
&+ \frac{h_{ijk}}{e} \frac{v_j^2}{l_i^2} \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\phi i} - 2\frac{h_{ijk}}{e} \frac{\rho_j v_j}{l_i} \tilde{\mathbf{c}}_{ijk}^T \mathbf{d} \dot{\mathbf{q}}_{\phi i} - \frac{h_{ijk}}{e} \tilde{\mathbf{s}}_{ijk}^T \ddot{\mathbf{q}}_{\phi i}. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Po podstawieniu obciążeń zdefiniowanych wzorami (4.24) do relacji (2.65) otrzymuje się w równaniu ruchu mostu (2.64) następujące definicje niezerowych bloków wektora uogólnionych sił czynnych:

$$\mathbf{F}_{wi} = \sum_{j=1}^{n_p} \left( \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{G}_{oji} - \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \ddot{\mathbf{q}}_{oji} \right), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{vi} &= \sum_{j=1}^{n_p} \left( \frac{v_j^2}{l_i^2} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{vi} - 2\frac{\rho_j v_j}{l_i} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d} \dot{\mathbf{q}}_{vi} - \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \ddot{\mathbf{q}}_{vi} \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^{n_p} \left( -\frac{v_j^2}{e l_i^2} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\phi i} + 2\frac{\rho_j v_j}{e l_i} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d} \dot{\mathbf{q}}_{\phi i} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{e} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \ddot{\mathbf{q}}_{\phi i} \right), \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\phi i} &= \sum_{j=1}^{n_p} \left( -\frac{v_j^2}{e l_i^2} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{vi} + 2\frac{\rho_j v_j}{e l_i} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d} \dot{\mathbf{q}}_{vi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{e} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \ddot{\mathbf{q}}_{vi} \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^{n_p} \left( \frac{v_j^2}{e^2 l_i^2} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji}^2 \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{d}^2 \mathbf{q}_{\phi i} - 2\frac{\rho_j v_j}{e^2 l_i} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji}^2 \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d} \dot{\mathbf{q}}_{\phi i} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^2} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji}^2 \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \ddot{\mathbf{q}}_{\phi i} \right) + \sum_{j=1}^{n_p} \frac{e_j}{e} \left( \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{G}_{oji} - \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \ddot{\mathbf{q}}_{oji} \right). \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Przesła mostu wiszącego i zbiór ruchomych oscylatorów obciążających przesła tworzą złożony układ dynamiczny, którego ruch jest opisany dwoma sprzężonymi równaniami macierzowymi (2.64) i (4.22). Łączne równanie ruchu układu, zapisane w bazie współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{g} = [\mathbf{q}^T, \mathbf{q}_o^T]^T$ , można przedstawić w postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}_o} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}} & \mathbf{c}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q},\mathbf{q}} & \mathbf{k}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^N \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

przy czym wewnętrzny podział na bloki wektora  $\tilde{\mathbf{F}}$  jest identyczny z podziałem wektora współrzędnych uogólnionych:  $\mathbf{q} = \text{col}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ ,  $\mathbf{q}_u = \text{col}(\mathbf{q}_{u1}, \dots, \mathbf{q}_{um})$ ,  $\mathbf{q}_b = \text{col}(\mathbf{q}_{w1}, \mathbf{q}_{v1}, \mathbf{q}_{\varphi1}, \dots, \mathbf{q}_{wn}, \mathbf{q}_{vn}, \mathbf{q}_{\varphi n})$ . Niezerowe są następujące bloki wektora sił wzbudzających:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{wi} = \sum_{j=1}^{n_p} (\tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{G}_{oji}), \quad \tilde{\mathbf{F}}_{\varphi i} = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{n_p} e_j (\tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{G}_{oji}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.30)$$

Macierze  $\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}$  są zmienne w czasie i mają strukturę blokową opisaną wzorami (2.65)–(2.67), przy czym niezerowe są jedynie bloki niżej wymienione:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{K}}_{vv})_i &= -\frac{1}{l_i^2} \sum_{j=1}^{n_p} v_j^2 \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{d}^2, & (\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi\varphi})_i &= -\frac{1}{e^2 l_i^2} \sum_{j=1}^{n_p} v_j^2 \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji}^2 \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{d}^2, \\ (\tilde{\mathbf{K}}_{v\varphi})_i &= (\tilde{\mathbf{K}}_{\varphi v})_i = \frac{1}{e l_i^2} \sum_{j=1}^{n_p} v_j^2 \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{d}^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{C}}_{vv})_i &= \frac{2}{l_i} \sum_{j=1}^{n_p} \rho_j v_j \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d}, & (\tilde{\mathbf{C}}_{\varphi\varphi})_i &= \frac{2}{e^2 l_i} \sum_{j=1}^{n_p} \rho_j v_j \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji}^2 \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d}, \\ (\tilde{\mathbf{C}}_{v\varphi})_i &= (\tilde{\mathbf{C}}_{\varphi v})_i = -\frac{2}{e l_i} \sum_{j=1}^{n_p} \rho_j v_j \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{B}}_{vv})_i &= \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T, & (\tilde{\mathbf{B}}_{\varphi\varphi})_i &= \frac{1}{e^2} \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji}^2 \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T, \\ (\tilde{\mathbf{B}}_{v\varphi})_i &= (\tilde{\mathbf{B}}_{\varphi v})_i = -\frac{1}{e} \sum_{j=1}^{n_p} \tilde{\mathbf{S}}_{ji} \mathbf{h}_{oji} \mathbf{M}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T, \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pozostałe, zmienne w czasie współczynniki  $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}_o}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{q}_o\mathbf{q}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}_o\mathbf{q}}$  równania (4.29) są macierzami o strukturze, która jest konsekwencją podziału na bloki wektorów  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{q}_o$ . Niezerowe bloki tych macierzy określają wzory:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{bi,oji} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{wi,oji} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{vi,oji} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{\varphi i,oji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{M}_{oji} \\ \mathbf{0} \\ \frac{e_j}{e} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mathbf{M}_{oji} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{oji,bi} = [\tilde{\mathbf{C}}_{oji,wi} \mid \tilde{\mathbf{C}}_{oji,vi} \mid \tilde{\mathbf{C}}_{oji,\varphi i}] = [-\mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T \mid \mathbf{0} \mid (e_j/e) \mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T], \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{oji,bi} &= [\tilde{\mathbf{K}}_{oji,wi} \mid \tilde{\mathbf{K}}_{oji,vi} \mid \tilde{\mathbf{K}}_{oji,\varphi i}] = \\ &= [-\mathbf{k}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T - (\rho_j v_j / l_i) \mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d} \mid \mathbf{0} \mid -(e_j/e) \mathbf{k}_{oji} \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^T - (e_j \rho_j v_j / e l_i) \mathbf{c}_{oji} \tilde{\mathbf{C}}_{ji}^T \mathbf{d}]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Indeksy  $bi$  oraz  $oji$  lokują powyższe bloki w odpowiednich „superwierszach” lub „superkolumnach” stosownie do pozycji indeksu, dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$  oraz  $j = 1, 2, \dots, n_p$ .

Równanie (4.29) dotyczy wieloprzęsłowych mostów wiszących z odcciągami poziomymi. W przypadku mostów wieloprzęsłowych z odcciągami ukośnymi lub mostów jednoprzęsłowych równanie typu (4.29) powstaje przez analogiczne skojarzenie równań (2.92) i (4.22). Obiekt jest opisany macierzami  $\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{K}}$ , a jego ruch współrzędnymi uogólnionymi  $\tilde{\mathbf{q}}$  – według wzorów (2.93)–(2.101) z rozdziału 2.5.3. Należy wówczas konsekwentnie zmienić rozmiar i strukturę podziału na bloki zmiennych w czasie współczynników macierzowych  $\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{K}}$  równania (4.29) oraz wektora  $\tilde{\mathbf{F}}$ , przy czym definicje bloków niezerowych tych macierzy pozostają bez zmiany – wzory (4.30)–(4.33). Współczynniki sprzęgające  $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}_o}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{q}_o\mathbf{q}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}_o\mathbf{q}}$  należy zastąpić macierzami  $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{q}\mathbf{q}_o}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{q}_o\mathbf{q}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{q}_o\mathbf{q}}$ , z nową lokalizacją bloków niezerowych (4.34)–(4.36). W obu rozważanych przypadkach można pominąć problem drgań osiowych dźwigara usztywniającego, ponieważ jest opisany równaniem niezależnym i może być rozważany odrębnie.

### 4.3.3. Metoda wyznaczania charakterystyk losowej odpowiedzi mostu

Jak wynika z przyjętych założeń, charakterystyki zmiennych losowych opisujących proces obciążenia nie zależą od czasu. Każdej realizacji losowego obciążenia towarzy-

szy odpowiedź mostu (dowolne przemieszczenie, siła wewnętrzna, naprężenie – zob. rozdz. 2.7), której przebieg może być wyznaczony poprzez bezpośrednie całkowanie numeryczne równania ruchu (4.29). Na podstawie badań przedstawionych w pracach [26, 36] można w tym przypadku przyjąć założenie, że odpowiedź mostu w czasie dostatecznie odległym od chwili początkowej ( $t \gg 0$ ) jest stacjonarnym ergodycznym procesem stochastycznym. Oznacza to, że do wyznaczenia charakterystyk losowego procesu odpowiedzi w stanie ustalonym wystarcza jej jedna, dostatecznie długa realizacja [8]. Niech  $\mathbf{S}(x_i, t)$  oznacza realizację dowolnej odpowiedzi mostu w przekroju  $x_i$ . Empiryczne momenty zwykle pierwszego i drugiego rzędu są opisane znanymi wzorami całkowymi [8, 15] o postaci

$$m_1(\mathbf{S}, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{S}(x_i, t) dt \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{S}(x_i, t)] = \text{const}, \quad (4.37)$$

$$m_2(\mathbf{S}, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{S}^2(x_i, t) dt \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E[\mathbf{S}^2(x_i, t)] = \text{const}. \quad (4.38)$$

Symbol  $E[\cdot]$  oznacza wartość oczekiwaną. Stosując opisaną metodę symulacyjną otrzymuje się w równoodległych chwilach czasowych  $t_k = kh$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , wartości odpowiedzi  $\mathbf{S}(x_i, t_k)$ , przy czym  $h$  oznacza krok numerycznego całkowania równania (4.29). Dla dostatecznie małego kroku  $h$  i dostatecznie odległej chwili czasowej  $t_{n_k} = n_k h \gg 0$ , wartość oczekiwana i wariancja w stanie ustalonym mogą być obliczane według wzorów [8, 15]:

$$E[\mathbf{S}] = m_1(\mathbf{S}, t_{n_k}) \cong \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} \mathbf{S}(x_i, t_k), \quad (4.39)$$

$$\text{Var}[\mathbf{S}] = D^2[\mathbf{S}] = m_2(\mathbf{S}, t_{n_k}) - m_1^2(\mathbf{S}, t_{n_k}), \quad m_2(\mathbf{S}, t_{n_k}) \cong \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} \mathbf{S}^2(x_i, t_k). \quad (4.40)$$

Opisaną metodę wyznaczania podstawowych charakterystyk probabilistycznych losowego procesu odpowiedzi mostu zastosujemy w dalszym ciągu do oceny wpływu efektów nieliniowych w zagadnieniu drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących, przy wymuszeniu losowym ruchem drogowym. Przedmiotem badań numerycznych będzie także wpływ inercji i resorowania pojazdów. Wiąże się z tym konieczność dostosowania opisanego algorytmu do analizy zagadnień uproszczonych. Usunięcie wpływu efektów nieliniowych jest najprostsze, polega bowiem na bezpośrednim pominięciu wektora nieliniowych reakcji sprężystych układu  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q})$  w równaniu (4.29). Pominięcie wpływu inercji i resorowania pojazdów powoduje natomiast zmianę po-

staci równania (4.29), ponieważ modelem każdego potoku pojazdów staje się strumień pionowych sił ruchomych, których wartości  $G_{jk} = (M_{jk} + M_{jk}^{nr})g$  są równe ciężarom pojazdów, przypadającym na jedną oś zawieszenia. Drgania wymuszone mostu są wówczas opisane równaniem (2.64) (lub równaniem (2.92)), w którym wektor sił wzbudzących  $\mathbf{F}(t)$  zawiera niezerowe bloki postaci (4.30).

#### 4.3.4. Analiza numeryczna efektów spowodowanych inercją i resorowaniem pojazdów

Zasadniczym celem przedstawionych analiz numerycznych jest ocena istotności wpływu inercji i resorowania pojazdów na wartości charakterystyk losowego procesu drgań wywołanych ruchem drogowym. Do obliczeń przyjęto obciążenie w postaci dwóch losowych potoków pojazdów. Deterministyczne i losowe parametry opisujące każdy potok są jednakowe, co nie oznacza, że obciążenia pasów ruchu są identyczne, gdyż symulacja każdego potoku pojazdów prowadzi do różnych wyników z uwagi na losowość parametrów. Dane dotyczące pojazdów drogowych przyjęto na podstawie badań Rotenberga [95]. Wyróżniono pięć klas pojazdów o charakterystykach podanych w tabeli 4.1. Wszystkie pojazdy są dwuosiove, modelowane dwoma oscylatorami.

Tabela 4.1. Parametry pojazdów reprezentujących pięć wyróżnionych klas ( $K = 1 \dots 5$ )  
Table 4.1. Parameters of vehicles representing five specified classes ( $K = 1 \dots 5$ )

$K$	$M_{rp}$ [kg]	$M_{rt}$ [kg]	$M_{\max}^t$ [kg]	$\varepsilon = e_p / (e_p + e_t)$	$k_p$ [kN/m]	$k_t$ [kN/m]
	$M_{np}$ [kg]	$M_{nt}$ [kg]		$(e_p + e_t)$ [m]	$c_p$ [kNs/m]	$c_t$ [kNs/m]
1	$\frac{700}{80}$	$\frac{600}{90}$	400	$\frac{0,80}{2,75}$	$\frac{36}{2,0}$	$\frac{50}{2,2}$
2	$\frac{1000}{300}$	$\frac{900}{580}$	2500	$\frac{0,90}{3,70}$	$\frac{156}{5,0}$	$\frac{636}{9,6}$
3	$\frac{3100}{850}$	$\frac{2500}{1300}$	6000	$\frac{0,75}{5,15}$	$\frac{250}{11,1}$	$\frac{300}{11,0}$
4	$\frac{2700}{700}$	$\frac{1700}{1500}$	8200	$\frac{0,82}{4,00}$	$\frac{406}{13,2}$	$\frac{1000}{16,5}$
5	$\frac{3600}{800}$	$\frac{4400}{2600}$	12000	$\frac{0,95}{5,75}$	$\frac{510}{17,1}$	$\frac{1900}{36,6}$

Symbole  $M_{rp}$ ,  $M_{rt}$  i  $M_{np}$ ,  $M_{nt}$  oznaczają odpowiednio resorowaną i nieresorowaną masę pojazdu, przypadającą na przednią ( $p$ ) i tylną ( $t$ ) jego oś,  $M_{\max}^t$  jest dopuszczalną masą ładunku,  $k_p, c_p$  i  $k_t, c_t$  są charakterystykami zawiesznień,  $e_p, e_t$

określają odległości osi pojazdu od jego środka masy. Masy i ciężary dwóch oscylatorów modelujących pojazd oblicza się według relacji

$$M_{op} = M_{rp} + M^t(1 - \varepsilon), \quad G_{op} = (M_{op} + M_{np})g, \quad (4.41)$$

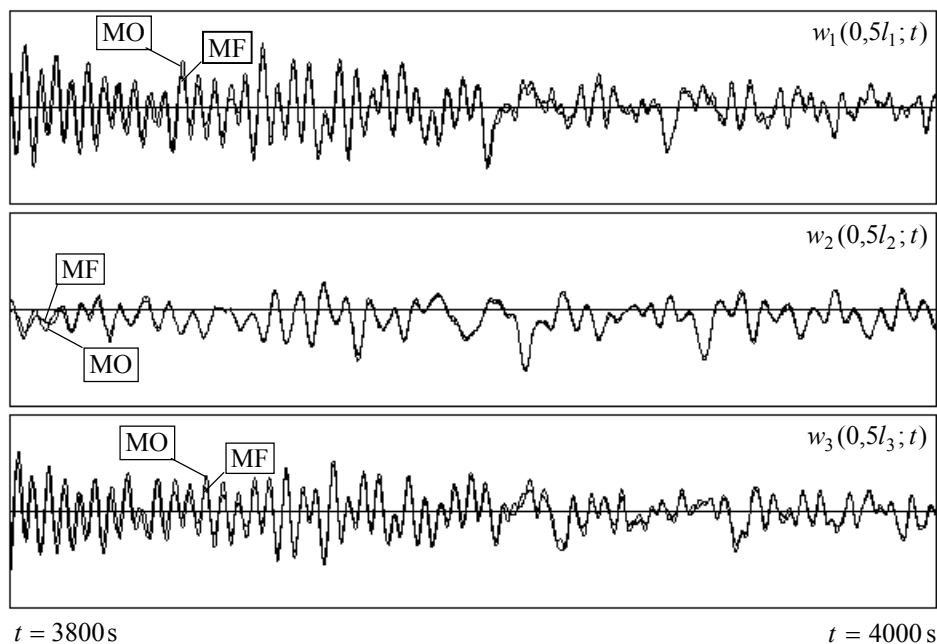
$$M_{ot} = M_{rt} + M^t\varepsilon, \quad G_{ot} = (M_{ot} + M_{nt})g,$$

gdzie  $M^t$  jest losowo wygenerowaną masą ładunku. Przyjęto następujące wartości prawdopodobieństwa zgłoszeń pojazdów, według wyszczególnionych klas:

$K = 1$ (samochody osobowe)	– $P_1 = 0,05$ ,
$K = 2$ (samochody dostawcze)	– $P_2 = 0,10$ ,
$K = 3$ (autobusy)	– $P_3 = 0,10$ ,
$K = 4$ (samochody ciężarowe)	– $P_4 = 0,45$ ,
$K = 5$ (ciężkie samochody ciężarowe)	– $P_5 = 0,30$ .

Jako obiekt testowy przyjęto most Vincenta Thomasa. Ze względu na przewidywaną dużą czasochłonność obliczeń, do opisu drgań mostu zastosowano algorytm uproszczony, w którym pomija się poziome przemieszczenia cięgien. Jak stwierdzono w poprzednich rozdziałach, algorytm ten prowadzi do przeszacowania rozwiązań, należy zatem sądzić, że analizowane efekty będą większe niż w przypadku zastosowania algorytmu uwzględniającego poziome przemieszczenia cięgien. Do opisu tłumienia drgań zastosowano model masowy z parametrem  $\mu = 2\alpha\omega_1$ , gdzie  $\alpha = 0,02$ . Analizę wpływu inercji i resorowania pojazdów przeprowadzono w zakresie drgań liniowych, przy obciążeniu mostu dwoma potokami pojazdów, poruszających się po torach o współrzędnych  $e_1 = -6,0$  m i  $e_2 = 6,0$  m, z prędkością 40 m/s, przy której obiekt wykazuje zwiększoną wrażliwość dynamiczną (por. rozdz. 4.2.1). Intensywność zgłoszeń pojazdów w obu potokach wynosi  $\lambda = 0,22$  s<sup>-1</sup>, minimalne i maksymalne odstęp między pojazdami wynoszą  $d_{\min} = 5$  m,  $d_{\max} = 300$  m.

Na rysunku 4.13 pokazano końcowe fragmenty przebiegów drgań towarzyszących przykładowej realizacji obciążenia obejmującej czas 4000 s. Prezentowane dwa warianty rozwiązań różnią się zastosowanym modelem obciążenia. Symbol MO oznacza wariant, w którym potoki pojazdów są modelowane strumieniami oscylatorów. W przypadku MF modelem każdego potoku pojazdów jest strumień sił skupionych. Wygenerowane wykresy przedstawiają przebiegi pionowej składowej drgań dźwigara usztywniającego w punkcie o współrzędnej  $y_i = 0$ , dla którego  $\tilde{w}_i = w_i + y_i\varphi_i = w_i$ , gdzie  $i = 1,2,3$  jest numerem przęsła. Tabela 4.2 zawiera maksymalne rzędne przebiegów wybranych odpowiedzi mostu, zarejestrowane w czasie obserwacji procesu ( $t = 0 \rightarrow 4000$  s).



Rys. 4.13. Fragmenty przebiegów drgań pionowych w wybranych przekrojach mostu (MO – strumień oscylatorów, MF – strumień sił skupionych)

Fig. 4.13. Fragmentary time histories of vertical vibrations in selected bridge cross-sections (MO – flow of oscillators, MF – flow of concentrated forces)

Tabela 4.2. Zestawienie maksymalnych rzędnych przebiegów drgań  
Table 4.2. Set of maximal values of vibrational time histories

$\mathbf{S}(x_i, t)$ , jednostka miary	$\max_t [\mathbf{S}(x_i, t)], t = 0 \rightarrow 4000 \text{ s}$		
	model obciążenia		$\frac{\text{MF} - \text{MO}}{\text{MF}} \cdot 100\%$
	MF <sup>1)</sup>	MO <sup>2)</sup>	
$w_1(0,50 l_1; t)$ , cm	52,4667	51,9845	0,9
$w_2(0,50 l_2; t)$ , cm	63,6062	58,4733	8,1
$w_2(0,75 l_2; t)$ , cm	56,8809	57,1316	-0,4
$w_3(0,50 l_3; t)$ , cm	58,8067	57,6248	2,0
$\Delta H_2(t)$ , MN	2,194916	2,416772	-10,1

<sup>1)</sup> Strumień sił skupionych.

<sup>2)</sup> Strumień oscylatorów.



Wnioski wynikające z analizy wyników zawartych w tabeli 4.2 i przedstawionych na rys. 4.13 dotyczą drgań deterministycznych. Wpływ inercji i resorowania pojazdów okazuje się tu mało istotny. Przebiegi drgań w obu przypadkach są bardzo podobne, a w środku rozpiętości przęsła głównego są praktycznie takie same – w obrębie wybranego fragmentu drgań. Istotniejsze różnice (do 10%) zanotowano porównując maksymalne rzędne przebiegów – uwzględnienie wpływu inercji i resorowania obciążenia spowodowało zwiększenie maksymalnej wartości dynamicznego przyrostu naciągu ciężna, przy jednoczesnym zmniejszeniu przemieszczenia dynamicznego w środku rozpiętości mostu (obie wartości maksymalne wystąpiły w tej samej chwili).

W tabeli 4.3 przedstawiono wartości oczekiwane i odchylenia standardowe obliczone dla wybranych odpowiedzi mostu, na podstawie jednej realizacji procesu odpowiedzi. Przyjęto, że proces odpowiedzi w czasie dostatecznie odległym od chwili początkowej jest stacjonarnym, ergodycznym procesem stochastycznym. Wtedy do wyznaczenia charakterystyk procesu losowego w stanie ustalonym wystarcza jedna dostatecznie długa realizacja procesu. Przebieg stabilizacji przykładowych empirycznych momentów zwykłych pierwszego i drugiego rzędu pokazano na rys. 4.14.

Tabela 4.3. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe drgań losowych w stanie ustalonym  
Table 4.3. Expected values and standard deviations of random vibrations in a steady-state

$\mathbf{S}(x_i)$ , jednostka miary	$E[\mathbf{S}(x_i)]$			$D[\mathbf{S}(x_i)]$		
	model obciążenia		$\frac{MF - MO}{MF} \cdot 100\%$	model obciążenia		$\frac{MF - MO}{MF} \cdot 100\%$
	MF <sup>1)</sup>	MO <sup>2)</sup>		MF <sup>1)</sup>	MO <sup>2)</sup>	
$w_1(0,50 l_1; t)$ , cm	0,4376	0,4555	4,1	12,4306	11,7323	5,6
$w_2(0,50 l_2)$ , cm	5,4894	5,4598	0,5	12,2340	11,2704	7,9
$w_2(0,75 l_2)$ , cm	4,0524	4,1531	-2,5	12,2247	11,5527	5,5
$w_3(0,50 l_3)$ , cm	0,4265	0,4370	-2,5	13,2585	12,2534	7,6
$\Delta H_2$ , MN	0,518306	0,515711	0,5	0,347942	0,321324	7,7

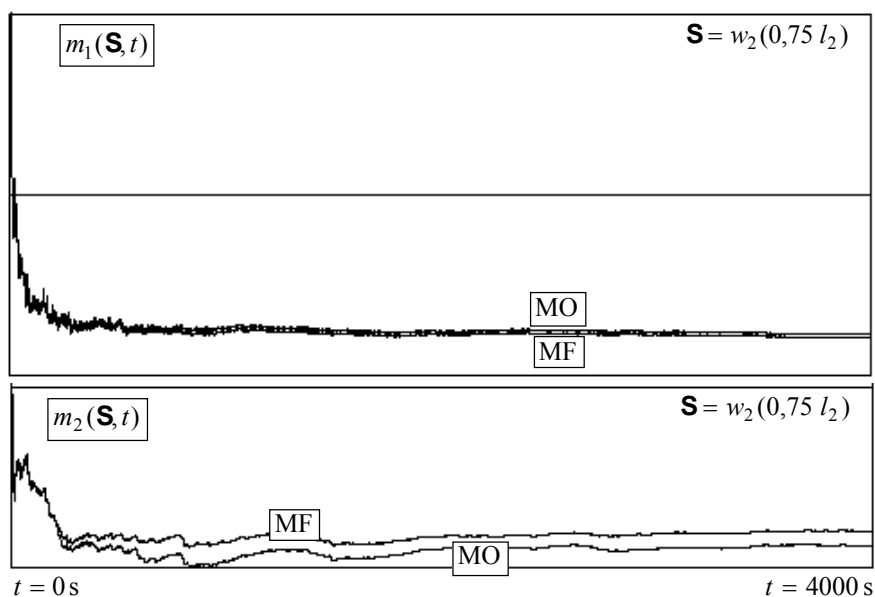
<sup>1)</sup> Strumień sił skupionych.

<sup>2)</sup> Strumień oscylatorów.

Przyjęty do obliczeń czas realizacji procesu odpowiedzi nie jest jeszcze wystarczający do ostatecznego wyznaczenia wartości charakterystyk rozważanych procesów w stanie ustalonym, szczególnie w przypadku odchyżeń standardowych, które oblicza się na podstawie empirycznych momentów drugiego rzędu. Można jednak stwierdzić, że wartości momentów dążą do wartości stałej, co potwierdza słuszność przyjętego założenia o stacjonarności procesu w stanie ustalonym. Zwiększenie czasu realizacji procesu, w celu wyznaczenia dokładniejszych wartości charakterystyk, jest możliwe, ale nie jest konieczne, ponieważ celem niniejszych obliczeń jest jedynie określenie różnic między rozwiązaniami uzyskanymi dla dwóch rozważanych modeli obciążenia. Różnice te są małe i jak widać na rys.4.14, kształtują się na stałym poziomie już po 4000 s

czasu obserwacji procesu, chociaż wartości momentów empirycznych nie są jeszcze dostatecznie ustalone.

Reasumując możemy stwierdzić, że w rozważanym przypadku wpływ inercji i resorowania pojazdów drogowych jest niewielki i może być pominięty przy wyznaczeniu charakterystyk probabilistycznych drgań analizowanego mostu.



Rys. 4.14. Przebieg stabilizacji empirycznych momentów zwykłych pierwszego i drugiego rzędu (MO – strumień oscylatorów; MF – strumień sił skupionych)

Fig. 4.14. Time history of stabilization of first and second empirical moments (MO – flow of oscillators, MF – flow of concentrated forces)

#### 4.3.5. Analiza numeryczna efektów nieliniowych

Badania dotyczące wpływu efektów nieliniowych, spowodowanych zmianą kształtu trasy ciągnięcia pod obciążeniem użytkowym, ograniczono do analizy drgań wymuszonych obciążeniem pojazdami drogowymi, modelowanymi za pomocą sił skupionych (model MF). W zagadnieniu drgań mostów jednoprzęsłowych o stosunkowo niewielkich rozpiętościach wpływy te są pomijalnie małe, co wykazały badania autorki omówione w pracach [36, 37]. Można spodziewać się, że wpływy te okażą się pomijalne także w przypadku mostów wieloprzęsłowych, ale ta teza wymaga weryfikacji – przy dużych rozpiętościach ciągnięcia i obciążeniu na wielu pasach ruchu efekty nieliniowe mogą być znacznie większe.

W rozważanym zadaniu istotny problem stanowi dobór metody numerycznego całkowania równań ruchu, odpowiedniej zarówno do zagadnienia liniowego, jak

i nieliniowego. Obszerny przegląd metod numerycznego całkowania równań nieliniowych można znaleźć między innymi w monografii Crisfielda [49]. Na podstawie analizy metod przedstawionych w wymienionej monografii, wybrano do obliczeń warunkowo stabilny wariant procedury Newmarka z parametrem  $\beta = 0$ , o stosunkowo restrykcyjnej granicy stabilności  $h < 2/\omega_{\max}$ , gdzie  $h$  jest długością kroku całkowania. Wariant ten jest szczególnie wygodny w całkowaniu równań ruchu układów z nieliniowością geometryczną. Jawny schemat rozwiązania tego typu równań opisał między innymi Belytschko w pracy [11]. Zapiszmy równania (4.29) w ogólnej postaci typu

$$\mathbf{B}_g \ddot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{C}_g \dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{K}_g \mathbf{g}(t) = \mathbf{F}_g(t) - \mathbf{R}_g^N(\mathbf{g}). \quad (4.42)$$

Indeks  $\mathbf{g}$  oznacza, że współczynniki macierzowe równania odnoszą się do całego układu, opisanego zbiorem współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{g} = [\mathbf{q}^T, \mathbf{q}_o^T]^T$ . Ogólne formuły Newmarka, po podstawieniu  $\beta = 0$ , mają postać

$$\mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{g}_i + h\dot{\mathbf{g}}_i + 0,5h^2\ddot{\mathbf{g}}_i, \quad (4.43)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_{i+1} = \dot{\mathbf{g}}_i + 0,5h(\ddot{\mathbf{g}}_i + \ddot{\mathbf{g}}_{i+1}). \quad (4.44)$$

Zakłada się, że wszystkie potrzebne informacje są dostępne na początku kroku ( $i$ ). Następnie oblicza się  $\mathbf{g}_{i+1}$  według (4.43) i na jego podstawie wektor nieliniowych reakcji sprężystych układu  $(\mathbf{R}_g^N)_{i+1}$ . Z warunku kolokacji na końcu kroku, o postaci

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}_g + 0,5h\mathbf{C}_g)_{i+1} \ddot{\mathbf{g}}_{i+1} = \\ & = (\mathbf{F}_g)_{i+1} - (\mathbf{R}_g^N)_{i+1} - (\mathbf{C}_g)_{i+1}(\dot{\mathbf{g}}_i + 0,5h\ddot{\mathbf{g}}_i) - (\mathbf{K}_g)_{i+1}(\mathbf{g}_i + h\dot{\mathbf{g}}_i + 0,5h^2\ddot{\mathbf{g}}_i), \end{aligned} \quad (4.45)$$

można wyznaczyć wektor przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{g}}_{i+1}$  i potem, według (4.44), wektor prędkości uogólnionych  $\dot{\mathbf{g}}_{i+1}$ . Procedura upraszcza się znacznie w przypadku równań o stałych współczynnikach, które otrzymuje się przy modelowaniu obciążenia ruchomego siłami skupionymi.

Rozważono drgania mostu Vincenta Thomasa, obciążonego na czterech pasach ruchu. Na pasach skrajnych pojazdy poruszają się po torach o współrzędnych  $e_1 = -6,0$  m,  $e_4 = 6,0$  m, z prędkością 40 m/s i intensywnością zgłoszeń  $\lambda_1 = \lambda_4 = 0,22$  s<sup>-1</sup>; na pasach środkowych – po torach o lokalizacji  $e_2 = -3,0$  m,  $e_3 = 3,0$  m, z prędkością równą 30 m/s i intensywnością zgłoszeń  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0,33$  s<sup>-1</sup>. Minimalne i maksymalne odstępki między pojazdami wynoszą  $d_{\min} = 5$  m,

$d_{\max} = 300$  m, niezależnie od prędkości ruchu i intensywności zgłoszeń. Pozostałe dane liczbowe podano wcześniej, w rozdziale 4.3.4.

Tabela 4.4. Zestawienie maksymalnych wartości wybranych odpowiedzi mostu (rozwiązania dynamiczne i quasi-statyczne – liniowe i nieliniowe)

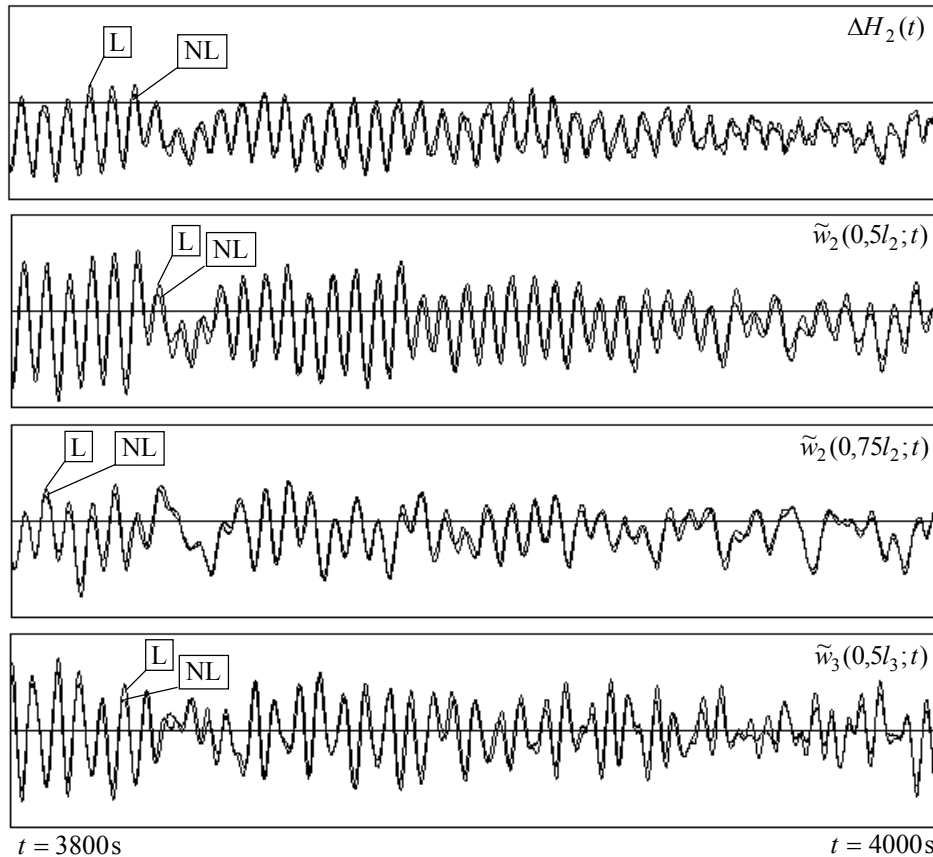
Table 4.4. Set of maximal values of selected bridge responses (dynamic and quasi-static solutions – linear and nonlinear)

$\mathbf{S}(x_i, t)$ , jednostka miary	$\max_t[\mathbf{S}(x_i, t)], t = 0 \rightarrow 4000$ s					
	odpowiedź dynamiczna			odpowiedź quasi-statyczna		
	L <sup>1)</sup>	NL <sup>2)</sup>	$\frac{L-NL}{L} \cdot 100\%$	L <sup>1)</sup>	NL <sup>2)</sup>	$\frac{L-NL}{L} \cdot 100\%$
$w_1(0,50 l_1; t)$ , cm	63,1610	59,1477	6,4	30,7457	30,0331	2,3
$w_2(0,50 l_2; t)$ , cm	85,6135	79,9034	6,7	43,8367	42,7557	2,5
$w_2(0,75 l_2; t)$ , cm	78,5442	65,3267	16,8	47,4171	45,9429	3,1
$w_3(0,50 l_3; t)$ , cm	72,5164	65,1438	10,2	25,4286	24,8557	2,2
$\Delta H_2(t)$ , MN	3,462747	3,247537	6,2	2,159750	2,148655	0,5

<sup>1)</sup> Rozwiązanie liniowe.

<sup>2)</sup> Rozwiązanie nieliniowe.

Na rysunku 4.15 przedstawiono wybrane fragmenty przebiegów drgań liniowych i drgań nieliniowych. Pierwszy wykres ilustruje przebieg dynamicznego przyrostu naciągu cięgna, następne trzy wykresy są przebiegami pionowej składowej drgań  $\tilde{w}_i = w_i + y_i \varphi_i$ , w punkcie dźwigara usztywniającego o współrzędnych  $y_i = 9,0$  m,  $z_i = 2,3$  m, czyli w dolnym narożu przekroju dźwigara, w płaszczyźnie podwieszenia. Maksymalne rzędne przebiegów, wybrane z całego przedziału obserwacji procesu drgań ( $t = 0 \rightarrow 4000$  s), zestawiono w tabeli 4.4. Rozwiązania liniowe i nieliniowe, przedstawione na rys. 4.15 są reakcjami mostu towarzyszącymi jednej, tej samej realizacji procesu obciążenia. Porównanie tych rozwiązań umożliwia ocenę wpływu efektów nieliniowych w zagadnieniu drgań deterministycznych. Uwzględnienie nieliniowości geometrycznej, związanej ze zmianą kształtu trasy cięgien wskutek działania obciążenia, nie powoduje istotnych zmian jakościowych w przebiegach drgań, ale obserwuje się widoczne zmniejszenie poziomu oscylacji. Maksymalne rzędne przebiegów analizowanych odpowiedzi mostu różnią się od 6% do 17%, przy czym największą różnicę zanotowano w przekroju położonym w 3/4 rozpiętości przęsła głównego. Różnice między liniowym i nieliniowym rozwiązaniem są zdecydowanie większe w zagadnieniu dynamicznym niż w odpowiednim zagadnieniu statycznym.

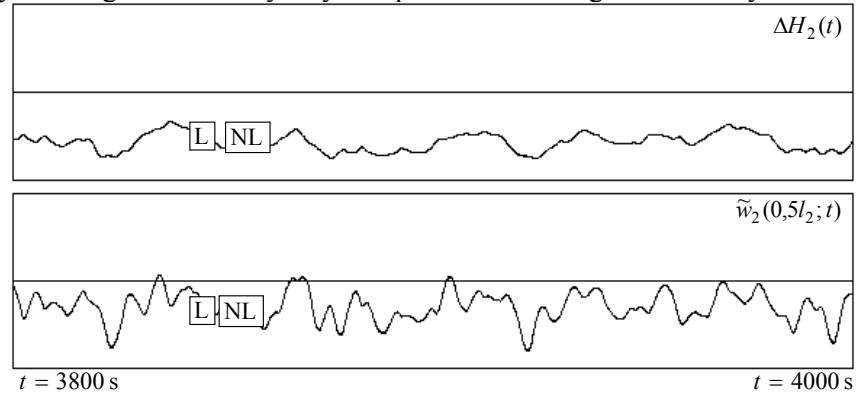


Rys. 4.15. Fragmenty przebiegów wybranych odpowiedzi dynamicznych  
(L – rozwiązanie liniowe, NL – rozwiązanie nieliniowe)

Fig. 4.15. Fragmentary time histories of selected dynamic responses  
(L – linear solution, NL – nonlinear solution)

Na rysunku 4.16 pokazano przykładowe przebiegi quasi-statycznych reakcji mostu, czyli przebiegi rozwiązań obliczonych na podstawie równania statycznego o postaci:  $\mathbf{Kq}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{R}^N(\mathbf{q})$ , gdzie  $t$  jest parametrem opisującym lokalizację obciążenia. Do rozwiązania nieliniowego układu równań algebraicznych zastosowano metodę iteracji prostej. Quasi-statyczne rozwiązania liniowe i nieliniowe są praktycznie takie same, maksymalne rzędne przebiegów różnią się tylko o 2% lub 3% (tabela 4.4). Należy jednak zauważyć, że w rozważanym przypadku przemieszczenia statyczne są dwukrotnie lub trzykrotnie mniejsze od przemieszczeń dynamicznych (tabela 4.4). Niższy poziom przemieszczeń jest bezpośrednią przyczyną mniejszego wpływu efektów nie-

liniowych w zagadnieniu statycznym w porównaniu z zagadnieniem dynamicznym.



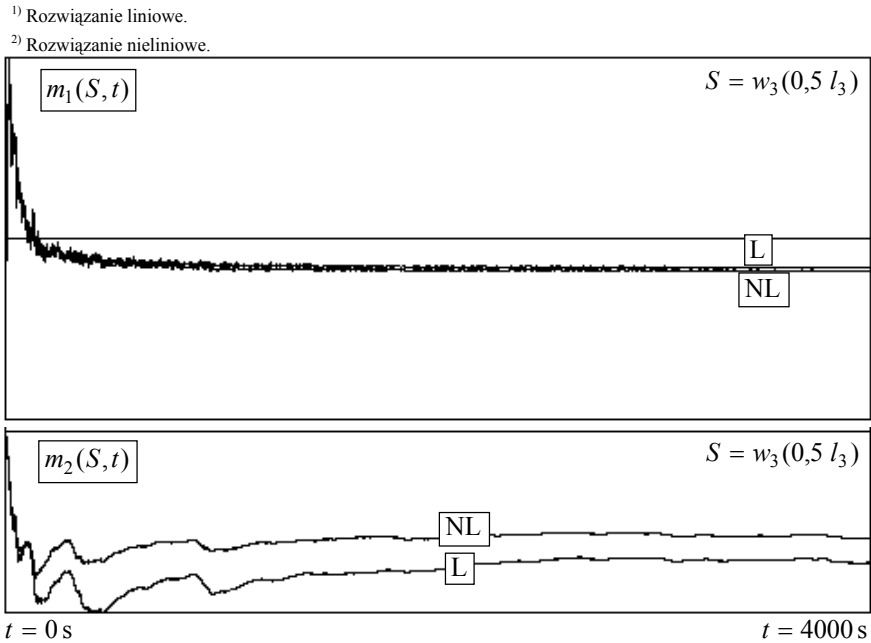
Rys. 4.16. Fragmenty przebiegów wybranych odpowiedzi quasi-statycznych  
(L – rozwiązanie liniowe, NL – rozwiązanie nieliniowe)

Fig. 4.16. Fragmentary time histories of selected quasi-static responses  
(L – linear solution, NL – nonlinear solution)

Przebiegi drgań liniowych i nieliniowych, towarzyszących tej samej realizacji losowego procesu obciążenia, wykorzystano do wyznaczenia charakterystyk drgań mostu w stanie ustalonym. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 4.5. Wartości oczekiwane obliczono na podstawie empirycznych momentów zwykłych pierwszego rzędu, według wzoru (4.39), odchylenia standardowe – na podstawie empirycznych momentów zwykłych pierwszego i drugiego rzędu, według wzoru (4.40). Przykładowe przebiegi stabilizacji momentów empirycznych pokazano na rys. 4.17. Aby zweryfikować wiarygodność charakterystyk obliczonych na podstawie jednej realizacji, wykonano testy porównawcze dla kilku niezależnych realizacji losowego obciążenia i towarzyszących im drgań mostu (tabela 4.6).

Tabela 4.5. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe drgań losowych w stanie ustalonym  
Table 4.5. Expected values and standard deviations of random vibrations in a steady-state

$\mathbf{S}(x_i)$ , jednostka miary	$E[\mathbf{S}(x_i)]$			$D[\mathbf{S}(x_i)]$		
	L <sup>1)</sup>	NL <sup>2)</sup>	$\frac{L-NL}{L} \cdot 100\%$	L <sup>1)</sup>	N <sup>2)</sup>	$\frac{L-NL}{L} \cdot 100\%$
$\tilde{w}_1(0,50l_1)$ , cm	1,0270	1,1264	-9,7	15,8243	14,3449	9,3
$\tilde{w}_2(0,50l_2)$ , cm	12,7386	12,5832	1,2	19,4861	17,1162	12,2
$\tilde{w}_2(0,75l_2)$ , cm	9,3957	9,3117	0,9	17,2289	16,3101	5,3
$\tilde{w}_3(0,50l_3)$ , cm	0,9773	1,0852	-11,0	16,8213	15,1108	10,2
$\Delta H_2$ , MN	1,200054	1,196375	0,3	0,538106	0,480191	10,8



Rys. 4.17. Przebieg stabilizacji empirycznych momentów zwykłych pierwszego i drugiego rzędu (L – rozwiązanie liniowe; NL – rozwiązanie nieliniowe)

Fig. 4.17. Time history of stabilization of first and second empirical moments (L – linear solution, NL – nonlinear solution)

Tabela 4.6. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe drgań liniowych w stanie ustalonym, wyznaczone na podstawie trzech realizacji procesu

Table 4.6. Expected values and standard deviations of linear vibrations in a steady-state, computed on the basis of three executions of the process

$\mathbf{S}(x_i)$ , jednostka miary	$E[\mathbf{S}(x_i)]$			$D[\mathbf{S}(x_i)]$		
	seria 1	seria 2	seria 3	seria 1	seria 2	seria 3
$\tilde{w}_1(0,50 l_1)$ , cm	1,0368	1,0194	1,0492	14,8111	14,3134	15,0742
$\tilde{w}_2(0,50 l_2)$ , cm	12,7603	12,6176	12,8084	17,3878	16,4313	18,5711
$\tilde{w}_2(0,75 l_2)$ , cm	9,4149	9,2840	9,4407	17,5394	16,1071	17,1168
$\tilde{w}_3(0,50 l_3)$ , cm	0,9716	0,9508	0,9778	15,7969	15,1766	16,1922
$\Delta H_2$ , MN	1,201696	1,187468	1,206714	0,479399	0,459139	0,525678

W tabeli 4.6 przedstawiono wyniki trzech serii obliczeniowych dotyczących drgań liniowych. Dla każdej serii przyjęto taki sam czas realizacji procesu drgań, wynoszący 4000 s. Różnice między wartościami oczekiwanymi z trzech serii obliczeniowych są

pomijalnie małe – nie przekraczają 2%, natomiast różnice między odchyleniami standardowymi są większe – dochodzą do 10%. Dość duże błędy wyznaczenia odchyłeń standardowych wynikają ze zbyt krótkiego czasu realizacji procesu. Z rysunku 4.17 wynika, że wartości odchyłeń standardowych nie są jeszcze dostatecznie ustalone. Wyniki przedstawione w tabeli 4.6 potwierdzają wniosek sformułowany wcześniej, w trakcie analizy wpływu inercji i resorowania pojazdów drogowych: przyjęty do obliczeń czas realizacji procesu drgań jest zbyt krótki, aby wyznaczyć z dostateczną dokładnością wariancję procesu. Jednak, podobnie jak poprzednio, dalsze zwiększanie czasu obserwacji procesu jest niepotrzebne, gdyż różnice między rozwiązaniami liniowymi i nieliniowymi są już praktycznie ustalone (rys. 4.17), zatem zasadniczy cel obliczeń został osiągnięty.

Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, że uwzględnienie efektów nieliniowych nie powoduje istotnych różnic w zakresie wartości oczekiwanych przemieszczeń dynamicznych przęsła głównego i dynamicznego przyrostu naciągu ciągów, ale w przypadku drgań przęsła bocznych wartości oczekiwane obliczone dla drgań nieliniowych są o około 10% większe od wartości obliczonych w zadaniu liniowym (tabela 4.5). W każdym rozważanym przypadku wpływy nieliniowe powodują zmniejszenie wartości odchyłeń standardowych, przy czym różnice między rozwiązaniami liniowymi i nieliniowymi wynoszą od 5–12%. Stąd wniosek, że pominięcie wpływów nieliniowych w analizie drgań losowych badanego mostu w stanie ustalonym jest dopuszczalne, ponieważ powoduje niewielkie przeszacowanie odpowiedzi konstrukcji, co jest korzystne w aspekcie oceny jej bezpieczeństwa.

Ustalony w toku obliczeń poziom efektów nieliniowych okazał się tu zdecydowanie większy, niż w przypadku jednoprzęsłowych mostów wiszących, które były przedmiotem wcześniejszych badań autorki [36, 37]. Badania te miały jednak charakter dość uproszczony. Po pierwsze – rozważano wyłącznie płaski model mostu i analizowano drgania pionowe wywołane przejazdem tylko jednego losowego potoku pojazdów. Po drugie – do wyznaczenia drgań nieliniowych zastosowano przybliżoną metodę numeryczną sformułowaną w pracy [18]. Jest to metoda uproszczona, w której do wyznaczenia macierzy sztywności geometrycznej wykorzystuje się, w każdym kroku numerycznego całkowania równań ruchu, wstępnie prognozowane wartości parametrów, korygowane po rozwiązaniu równań, ale bez pętli iteracyjnej. Przy niewielkim obciążeniu mostu, tylko jednym potokiem pojazdów, efekty nieliniowe były prawie niezauważalne, zatem i uproszczona metoda wyznaczania drgań nieliniowych była wystarczająca. W niniejszych badaniach przyjęto do analizy efektów nieliniowych „pełne” obciążenie mostu – na wszystkich czterech pasach ruchu, a do numerycznego rozwiązania równań ruchu zastosowano wariant metody Newmarka, dostosowany do całkowania równań z nieliniowością geometryczną. Przyjęte obciążenie nie jest ekstremalne. Jest to obciążenie użytkowe o przeciętnych realnych parametrach i średniej, w sensie potocznym, intensywności. Przy takim obciążeniu efekty nieliniowe ujawniły się w sposób widoczny, osiągając poziom rzędu 10% rozwiązań liniowych. Stwierdzono, że wpływy nieli-



jest większa, ale jednocześnie rozproszenie odpowiedzi wokół wartości oczekiwanej jest mniejsze. W ekstremalnych przypadkach obciążeń wpływ efektów nieliniowych będzie większy, a w szczególnych sytuacjach może być niekorzystny ze względu na możliwość pojawienia się efektów parametrycznych. Analiza zjawisk parametrycznych wykracza poza zakres rozprawy i może być przedmiotem dalszych badań, dla których sformułowane w pracy algorytmy stanowią dobry punkt wyjścia.

Wnioski z przedstawionych analiz numerycznych dotyczą obiektu testowego – trójprzęsłowego mostu Vincenta Thomasa. Sformułowany algorytm symulacyjny może być stosowany do analogicznych badań innych wieloprzęsłowych mostów wiszących. Wyniki analiz mostu Vincenta Thomasa pokazują, że sformułowana metoda symulacyjna daje realną możliwość przeprowadzenia takich badań.

## **4.4. Niezawodność mostów wiszących obciążonych losowym ruchem drogowym**

### **4.4.1. Sformułowanie zagadnienia**

Konstrukcje mostów drogowych są poddane w okresie eksploatacji działaniu zmiennych w czasie obciążeń o charakterze losowym. Z punktu widzenia bezpieczeństwa istotna jest odpowiedź na pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że odpowiedź konstrukcji w czasie drgań przekroczy po raz pierwszy pewną wartość graniczną. W zależności od doboru granicznej wartości odpowiedzi można analizować prawdopodobieństwo wystąpienia awarii mostu lub prawdopodobieństwo przekroczenia pewnego stanu dopuszczalnego – na przykład dopuszczalnego ugięcia lub naprężenia. Zagadnienie to jest znane w teorii niezawodności konstrukcji pod nazwą problemu pierwszego przekroczenia [15, 45, 81, 116].

Niezdolność mostu do pracy rzadko bywa związana ze zniszczeniem (awarią) w dosłownym sensie. Zazwyczaj most jest wycofywany z eksploatacji wskutek nadmiernego rozwoju uszkodzeń, spowodowanych długotrwałymi, powtarzalnymi obciążeniami. Nagromadzenie uszkodzeń (pęknięć zmęczeniowych) w trakcie eksploatacji powoduje z czasem istotne zakłócenia w przebiegu normalnej pracy konstrukcji. Określenie czasu bezawaryjnej pracy, czyli tzw. „czasu życia” konstrukcji jest przedmiotem badań niezawodności zmęczeniowej. Problem ten był analizowany w odniesieniu do mostów drogowych między innymi w pracach Tunga [118, 119], Fryby [55], Śniadego z Sieniawską i Żukowskim [104, 117]. Jako ideowy model mostu przyjmowano zwykle schemat w postaci belki swobodnie podpartej lub ciągłej, zatem przedstawiane rozważania mogą być podstawą oceny niezawodności mostów belkowych, czyli mostów znacznie mniej wrażliwych na dynamiczne oddziaływanie obciążeń, niż wieloprzęsłowe mosty wiszące dużych rozpiętości.

Problem pierwszego przekroczenia i zagadnienie niezawodności zmęczeniowej mostów wiszących, w warunkach dynamicznego obciążenia losowym ruchem drogowym, były przedmiotem badań autorki prowadzonych wspólnie z Sieniawską i Śniadym [28, 29, 30, 34]. Przedstawione rozwiązania i wyniki analiz dotyczyły wyłącznie płaskich, pionowych drgań mostów jednoprzęsłowych. W pracy [30] wykorzystano do analizy zagadnienia niezawodności zmęczeniowej teorię problemu pierwszego przejścia, ze zmieniającym się w czasie poziomem granicznym, opisującym nośność konstrukcji podlegającej degradacji wskutek korozji i uszkodzeń zmęczeniowych [117]. Metody sformułowane w wymienionych pracach będą tu zaadaptowane do analizy niezawodności wieloprzędłowych mostów wiszących. Zakres analizy ograniczymy do dwóch podstawowych zagadnień: problemu pierwszego przekroczenia i problemu niezawodności zmęczeniowej, sprowadzonego do określenia wartości oczekiwanej „czasu życia” podstawowych elementów nośnych mostu, obciążonego dynamicznie swobodnym ruchem drogowym. Przedmiotem analizy będzie niezawodność przęseł dźwigara usztywniającego i wieloprzelotowych cięgien. Rozwiązania problemu niezawodności sformułujemy dla stanu ustalonego drgań. Do opisu drgań mostu zastosujemy teorię uproszczoną, w której pomija się poziome przemieszczenia cięgien i która prowadzi do bardziej niekorzystnych dla konstrukcji rozwiązań. Do rozważań przyjmimy liniowy model mostu, pomijając wpływ efektów nieliniowych na podstawie wniosków z badań przedstawionych w rozdziale 4.3.5, gdzie stwierdzono, że wpływy nieliniowe w moście wiszącym obciążonym swobodnym, średniointensywnym ruchem drogowym, są małe i powodują zmniejszenie drgań. Na podstawie badań omówionych w rozdziale 4.3.4 przyjmujemy, że wpływ inercji i resorowania pojazdów drogowych jest pomijalnie mały, co pozwoli modelować potoki pojazdów strumieniami sił skupionych.

Do wyznaczania charakterystyk probabilistycznej odpowiedzi mostu wiszącego na działanie losowego ruchu drogowego zastosujemy metodę analityczno-numeryczną, sformułowaną w rozdziale 4.2. W analizie problemu pierwszego przekroczenia poszukiwane będą kumulanty losowych przemieszczeń mostu, w analizie zagadnienia niezawodności zmęczeniowej – kumulanty losowych naprężeń w wybranych elementach konstrukcji. Poszukiwane kumulanty są opisane formułami (4.8) i (4.11), przy czym ogólny symbol  $\mathbf{S}(x_i, t)$ , określający stochastyczny proces odpowiedzi, będzie tu oznaczał przemieszczenie dynamiczne w dowolnym punkcie konstrukcji lub naprężenie. Rozważane będą dynamiczne przyrosty naprężeń  $\Delta\sigma_1(x_i, t)$ ,  $\Delta\sigma_2(x_i, t)$  w cięgnach (indeks „1” – cięgno lewe, indeks „2” – cięgno prawe) oraz naprężenia normalne  $\sigma_i(s_i, x_i, t)$  w przekroju  $x_i$  belki usztywniającej, w punkcie przekroju o współrzędnej konturowej  $s_i$ , gdzie  $i$  jest numerem przęsła. W każdym z tych przypadków proces  $\mathbf{S}(x_i, t)$  wyznacza się według relacji (4.2), w której dynamiczna funkcja wpływu  $\mathbf{H}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau)$  jest odpowiednim przemieszczeniem lub naprężeniem, wywołanym siłą jednostkową przesuwaną się po moście z prędkością  $v_j$  wzdłuż toru  $j$ . Definicje na-

przeżeń podano w rozdziale 2.7 – wzory (2.140)–(2.149), definicje przemieszczeń określają wzory (2.121)–(2.124).

#### 4.4.2. Problem pierwszego przekroczenia

Przybliżone rozwiązania problemu pierwszego przekroczenia można znaleźć w pracach wielu autorów, na przykład w monografiach Bołotina [15], Lina [81], Sobczyka i Spencera [107], Chmielewskiego i Zembatego [45], Śniadego [116]. Podstawą rozwiązań jest określenie średniej liczby przekroczeń poziomu granicznego  $a$  w jednostce czasu, czyli wyznaczenie tzw. intensywności przekroczeń  $\nu_a^+(t)$ . Indeks „+” oznacza, że analizowane są przekroczenia z poziomu niższego niż  $a$  na poziom wyższy, czyli przekroczenia z dodatnią prędkością. Przeciętną intensywność przekroczeń stałego poziomu  $a$  przez losowy proces  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_i, t)$  oblicza się za pomocą wzoru

$$\nu_a^+(t) = \int_0^{\infty} \dot{\mathbf{S}} f_{\mathbf{SS}}(a, \dot{\mathbf{S}}, t) d\dot{\mathbf{S}}, \quad (4.46)$$

znanego w literaturze jako wzór Rice’a. Funkcja  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  określa łączną gęstość prawdopodobieństwa procesu  $\mathbf{S}$  i jego pochodnej  $\dot{\mathbf{S}}$  [15]. Można ją wyznaczyć stosując rozwinięcie w szereg analogiczny do jednowymiarowego szeregu Gramma–Charliera (4.6), z wykorzystaniem dwuwymiarowych kumulant, określonych wzorami o postaci

$$\kappa_{m,n}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_j E[P_j^{m+n}] \int_{t_0}^t \mathbf{H}_{S_j}^m(x_i, t - \tau) \dot{\mathbf{H}}_{S_j}^n(x_i, t - \tau) d\tau, \quad (4.47)$$

gdzie indeksy  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  oznaczają numery kumulant i jednocześnie wykładnik potęgowania. Jeśli  $n = 0$ , to wzór (4.47) opisuje kolejne kumulanty naprężeń. Kumulanty prędkości naprężeń otrzymuje się, gdy  $m = 0$ . Szczegółową postać dwuwymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa przedstawiono w [104], na podstawie pracy Roberta [94]. Stosując przyjęte tu oznaczenia, otrzymuje się

$$f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t) = \frac{\exp\left(-\chi/[2(1 - \beta_{1,1}^2)]\right)}{2\pi(\kappa_{2,0}\kappa_{0,2} - \kappa_{1,1}^2)^{1/2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{6}(\beta_{3,0}H_{3,0} + 3\beta_{2,1}H_{2,1} + 3\beta_{1,2}H_{1,2} + \beta_{0,3}H_{0,3}) + \dots\right), \quad (4.48)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\chi &= \alpha_1^2 - 2\beta_{1,1}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2, \quad \alpha_1 = (\mathbf{S}\kappa_{1,0})\kappa_{2,0}^{-1/2}, \quad \alpha_2 = (\dot{\mathbf{S}}\kappa_{0,1})\kappa_{0,2}^{-1/2}, \\ \beta_{m,n} &= \kappa_{m,n}(\kappa_{2,0}^m\kappa_{0,2}^n)^{-1/2}, \\ H_{m,n} \exp(-\chi/[2(1-\beta_{1,1}^2)]) &= (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial\alpha_1^m\partial\alpha_2^n} \exp(-\chi/[2(1-\beta_{1,1}^2)]).\end{aligned}$$

Obliczenie funkcji  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  można znacznie uprościć przyjmując, że losowy proces drgań mostu w stanie ustalonym jest stacjonarnym procesem gaussowskim. Wówczas funkcja gęstości prawdopodobieństwa nie zależy od czasu, a korelacja procesu  $\mathbf{S}$  i jego pochodnej  $\dot{\mathbf{S}}$  jest równa zero, zatem  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}) = f_{\mathbf{S}}(\mathbf{S})f_{\dot{\mathbf{S}}}(\dot{\mathbf{S}})$ , gdzie

$$f_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D^{-1}[\mathbf{S}] \exp\left(-\frac{(\mathbf{S} - E[\mathbf{S}])^2}{2D^2[\mathbf{S}]}\right), \quad (4.49)$$

$$f_{\dot{\mathbf{S}}}(\dot{\mathbf{S}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} D^{-1}[\dot{\mathbf{S}}] \exp\left(-\frac{\dot{\mathbf{S}}^2}{2D^2[\dot{\mathbf{S}}]}\right).$$

Wartość oczekiwaną  $E[\mathbf{S}]$  i wariancję  $D^2[\mathbf{S}]$  oblicza się jako pierwsze dwie kumulanty, według wzoru (4.8), a wariancję  $D^2[\dot{\mathbf{S}}]$  według wzoru (4.11), zastosowanego do stanu ustalonego. Po podstawieniu (4.49) do (4.46) otrzymuje się stałą, niezależną od czasu intensywność przekroczeń [15], o wartości

$$\nu_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{D[\dot{\mathbf{S}}]}{D[\mathbf{S}]} \exp\left[-\frac{(a - E[\mathbf{S}])^2}{2D^2[\mathbf{S}]}\right]. \quad (4.50)$$

Liczba przekroczeń poziomu  $a$  w przedziale czasu  $(0, t)$  jest procesem stochastycznym, który oznaczmy tu funkcją  $N_a^+(t)$ . W rozważanym przypadku procesu stacjonarnego wartość oczekiwana liczby przekroczeń  $N_a^+(t)$  wynosi

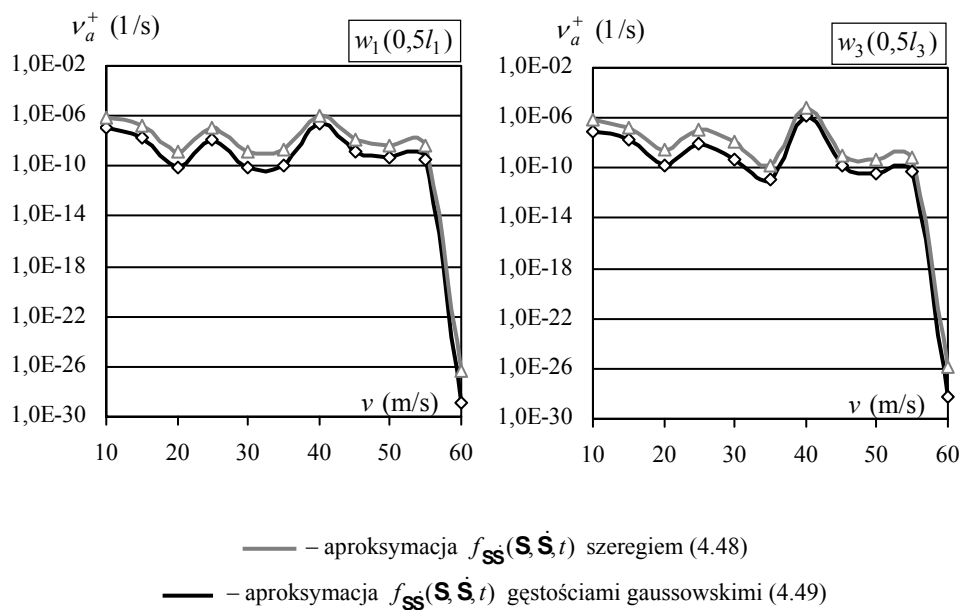
$$E[N_a^+(t)] = \int_0^t \nu_a^+(\tau) d\tau = \nu_a^+ t. \quad (4.51)$$

Jeśli założymy, że przekroczenia poziomu granicznego są bardzo rzadkie i stochastycznie niezależne, to można przyjąć, że modelem procesu  $N_a^+(t)$  jest proces Poissona (Śniady [116], Chmielewski i Zembaty [45]). Wtedy prawdopodobieństwo, że w przedziale czasu  $(0, t)$  nie będzie żadnych przekroczeń, czyli niezawodność jest określona wzorem

$$R = P\{N_a^+(t) = 0\} = \exp(-v_a^+ t), \quad (4.52)$$

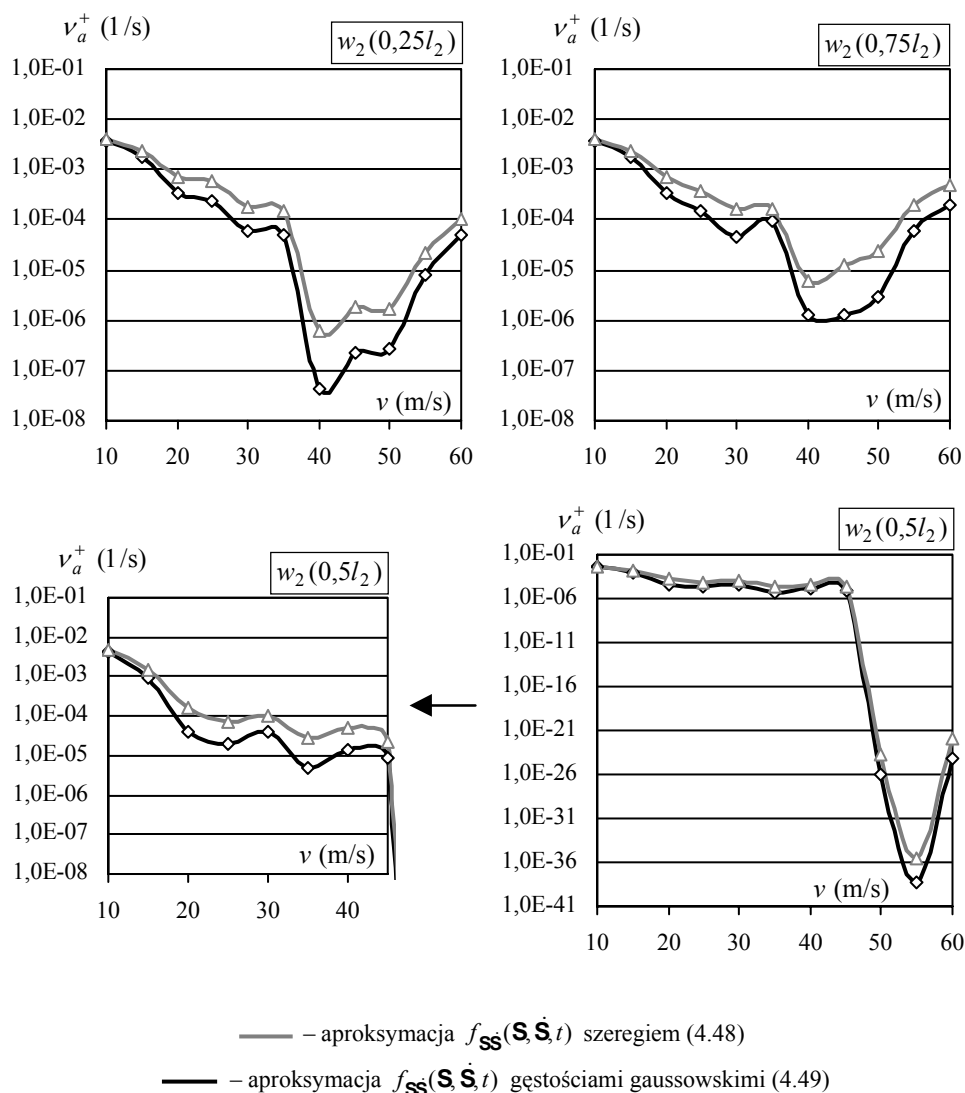
a prawdopodobieństwo przekroczenia przynajmniej raz ustalonego poziomu granicznego wynosi  $1 - R$ , przy czym należy tu przyjąć, że umowna chwila początkowa  $t = 0$  jest dostatecznie odległa, aby proces drgań mostu był ustalony.

Stosując opisane wyżej procedury, przeprowadzono analizę niezawodności mostu Vincenta Thomasa. Przyjęto, że most jest obciążony czterema losowymi potokami pojazdów, o jednakowych parametrach:  $E[P] = 7,025 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $E[P^2] = 5,719 \cdot 10^9 \text{ N}^2$ ,  $E[P^3] = 5,119 \cdot 10^{14} \text{ N}^3$ ,  $E[P^4] = 4,941 \cdot 10^{19} \text{ N}^4$ . Tory ruchu pojazdów są rozmieszczone symetrycznie względem pionowej płaszczyzny, położonej w osi podłużnej mostu. Prędkość ruchu  $v$  jest taka sama na każdym torze. Intensywność zgłoszeń pojazdów  $\lambda$  jest związana z prędkością ruchu  $v$  zależnością empiryczną, zilustrowaną na wykresie – rys. 4.2 w rozdziale 4.2.2. Przedmiotem analiz jest średnia intensywność przekroczeń  $v_a^+(t)$ , którą można traktować jako pewną miarę niezawodności w sensie problemu pierwszego przekroczenia.



Rys. 4.18. Zależność średniej intensywności przekroczeń poziomu  $a = 0,5 \text{ m}$  od prędkości ruchu pojazdów (drgania pionowe w środkowych przekrojach przęseł bocznych)

Fig. 4.18. Expected crossing rate for the threshold  $a = 0,5 \text{ m}$  versus traffic speed (vertical vibrations in central cross-sections of side spans)



Rys. 4.19. Zależność średniej intensywności przekroczeń poziomu  $a = 0,5$  m od prędkości ruchu pojazdów (drżania pionowe w wybranych przekrojach przęsła środkowego)

Fig. 4.19. Expected crossing rate for the threshold  $a = 0,5$  m versus traffic speed (vertical vibrations in selected cross-sections of central span)

Na rysunkach 4.18 i 4.19 przedstawiono zależność intensywności przekroczeń  $v_a^+(t)$  od prędkości ruchu pojazdów. Zamieszczone na rysunkach wykresy dotyczą stanu przemieszczenia. Badano przemieszczenia pionowe mierzone w osi podłużnej mostu, w środkowych przekrojach przęseł bocznych (rys. 4.18) i w trzech przekrojach charakte-

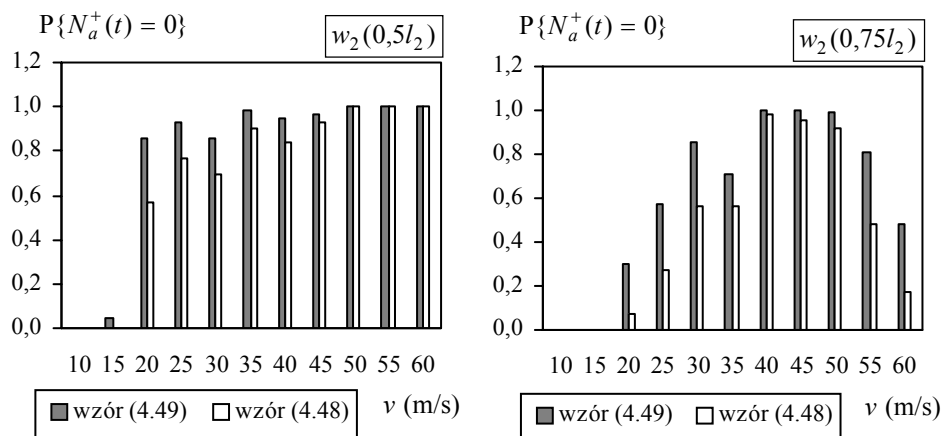
rystycznych przęsła głównego (rys. 4.19). Przemieszczenia te opisują także ruch obu cięgien, ponieważ obciążenie jest zlokalizowane symetrycznie względem pionowej podłużnej płaszczyzny symetrii mostu. Do analizy intensywności przekroczeń przyjęto poziom graniczny  $a = 0,5 \text{ m}$ , jednakowy we wszystkich badanych przekrojach. Przedstawiono dwa warianty rozwiązań, różniące się metodą zastosowaną do wyznaczania łącznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$ . Linia szara oznacza rozwiązanie wyznaczone przy aproksymacji funkcji gęstości za pomocą szeregu (4.48), linia czarna odpowiada aproksymacji gęstościami gaussowskimi (wzór (4.49)).

W obu przęsłach bocznych zależność intensywności przekroczeń od prędkości ruchu pojazdów jest prawie taka sama. Intensywność przekroczeń oscyluje w przedziale od  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$  do  $10^{-10} \text{ s}^{-1}$ , mimo malejącej, ze wzrostem prędkości, intensywności zgłoszeń pojazdów. Dopiero przy bardzo dużych prędkościach ruchu, większych od  $55 \text{ m/s}$ , intensywność przekroczeń zdecydowanie maleje. W przęsle głównym intensywność przekroczeń w zakresie małych i średnich prędkości maleje ze zmiennym gradientem, przy czym jest znacznie większa niż w przęsłach bocznych, zmienia się od  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  do  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Przy bardzo dużych prędkościach ruchu ( $v > 45 \text{ m/s}$ ) intensywność przekroczeń maleje zdecydowanie, ale tylko w środku rozpiętości przęsła. W przekrojach położonych w ćwiartkach rozpiętości intensywność przekroczeń osiąga najmniejszą wartość  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$  przy prędkości  $40 \text{ m/s}$ , następnie rośnie ponownie w sposób znaczący. Intensywności przekroczeń w  $3/4$  rozpiętości przęsła głównego są większe niż w  $1/4$  rozpiętości, gdy prędkości ruchu pojazdów są większe od  $35 \text{ m/s}$ .

Uproszczenie polegające na aproksymacji procesu drgań mostu przez stacjonarny proces Gaussa powoduje zmniejszenie średniej intensywności przekroczeń. Najmniejsze różnice między dwoma analizowanymi rozwiązaniami stwierdzono w przypadku drgań w środku rozpiętości przęsła głównego, największe – w ćwiartkach rozpiętości przęsła głównego (rys. 4.18, 4.19). Wyniki te są zgodne z wnioskami sformułowanymi w rozdziale 4.2.2 na podstawie analizy jednowymiarowych funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}, t)$  i  $f_{\dot{\mathbf{S}}}(\dot{\mathbf{S}}, t)$ . Zmniejszenie średniej intensywności przekroczeń, spowodowane aproksymacją gaussowską, prowadzi do zawyżonych wartości prawdopodobieństwa braku przekroczeń poziomu granicznego (niezawodności), co nie jest korzystne w aspekcie oceny bezpieczeństwa konstrukcji. Tę prawidłowość ilustrują wykresy pokazane na rys. 4.20. Sformułowany wniosek potwierdza także analiza wykresów zamieszczonych na rys. 4.21, które przedstawiają prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, że w czasie jednej godziny drgania mostu przekroczą przynajmniej raz poziom  $a = 0,5 \text{ m}$ .

Prawdopodobieństwo pojawienia się przekroczeń ustalonego poziomu przemieszczenia jest znacznie większe w przęsle głównym niż w przęsłach bocznych (rys. 4.21). Przy największej intensywności zgłoszeń pojazdów, której odpowiada prędkość ruchu  $v = 10\text{--}15 \text{ m/s}$ , prawdopodobieństwo przekroczenia poziomu  $a = 0,5 \text{ m}$  w przęsle

głównym jest bliskie jedności. Gdy prędkości ruchu są bardzo duże ( $> 45$  m/s), to takie przekroczenie jest praktycznie niemożliwe w środku rozpiętości przęsła głównego, natomiast jest całkiem prawdopodobne w ćwiartkach rozpiętości, pomimo tego, że intensywność ruchu jest niewielka. Prawie w całym zakresie rozpatrywanych prędkości prawdopodobieństwo przekroczenia w środku przęsła głównego jest mniejsze niż w 1/4 i w 3/4 jego rozpiętości, jedynie dla  $v = 40\text{--}45$  m/s jest odwrotnie. Stąd wynika wniosek, że bardziej zagrożone są przekroje położone w ćwiartkach rozpiętości przęsła głównego, niż przekrój w środku przęsła. Przy większych prędkościach ruchu pojazdów prawdopodobieństwo przekroczeń ustalonego poziomu przemieszczeń w 3/4 rozpiętości przęsła głównego jest większe niż w 1/4 rozpiętości.



wzór (4.48) – aproksymacja  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  szeregiem (4.48)

wzór (4.49) – aproksymacja  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  gęstościami gaussowskimi (4.49)

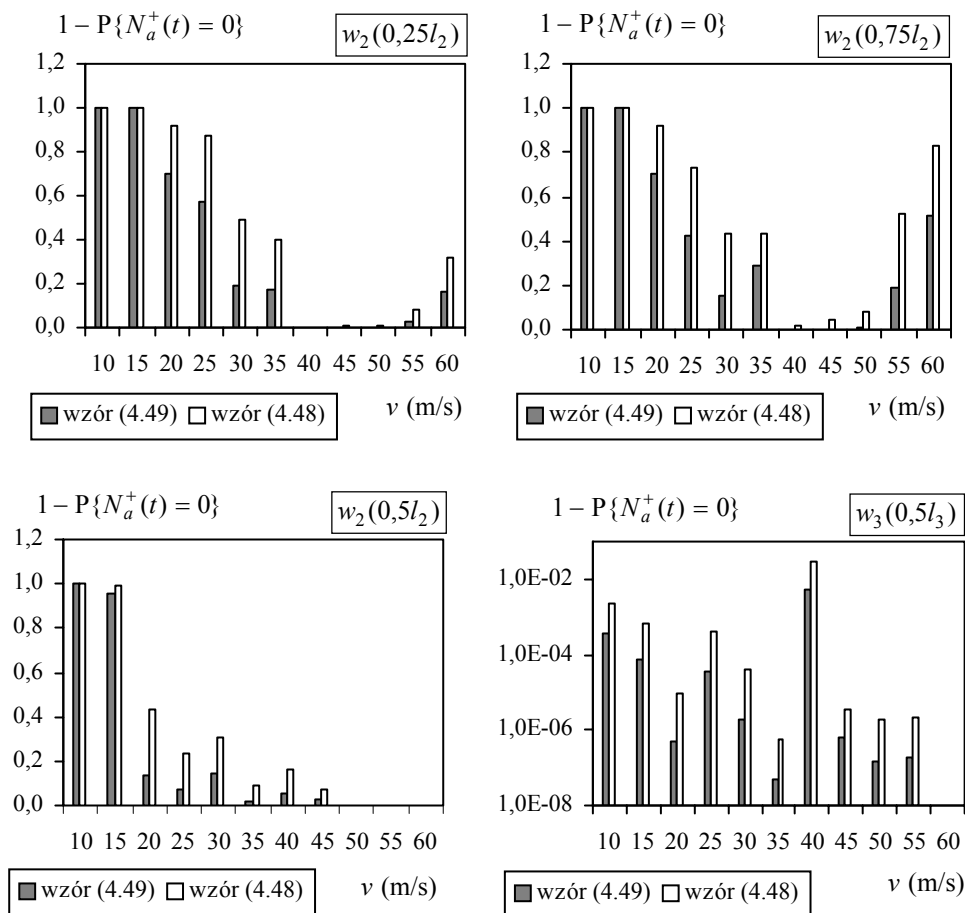
Rys. 4.20. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w ciągu 1 godziny nie będzie żadnych przekroczeń poziomu  $a = 0,5$  m

Fig. 4.20. Probability of the event that there will not be any crossings of the threshold  $a = 0.5$  m during 1 hour

Obliczone tu wartości średniej intensywności przekroczeń i prawdopodobieństwa przekroczenia w przęśle głównym są stosunkowo duże, ponieważ przyjęty poziom graniczny przemieszczeń  $a = 0,5$  m jest zbliżony do obliczonych wartości odpowiedzi konstrukcji. Poziom ten jest równocześnie zdecydowanie mniejszy od ewentualnej wartości dopuszczalnej, ponieważ stanowi tylko 1/1000 rozpiętości przęsła głównego. W przęsłach bocznych prawdopodobieństwo przekroczeń jest wielokrotnie mniejsze niż w przęśle głównym, ale poziom  $a = 0,5$  m jest z kolei bliski wartości dopuszczalnej, stanowi bowiem 1/310 rozpiętości. Jest równocześnie bardzo odległy od obliczonych wartości odpowiedzi konstrukcji. Uzyskane w toku niniejszej analizy infor-



macje nie określają zatem ilościowo prawdopodobieństwa awarii – ani w sensie rzeczywistej katastrofy obiektu, ani w sensie przekroczenia rzeczywistej wartości dopuszczalnej. Przedstawione wyniki obliczeń świadczą natomiast o realnej możliwości badania niezawodności tego typu obiektów, mogą służyć do prognozowania niezawodności poszczególnych elementów konstrukcji i są kolejnym krokiem w kierunku dobrego rozpoznania pracy konstrukcji obciążonej ruchem drogowym.



wzór (4.48) – aproksymacja  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  szeregiem (4.48)

wzór (4.49) – aproksymacja  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  gęstościami gaussowskimi (4.49)

Rys. 4.21. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w ciągu 1 godziny przemieszczenia przekroczą poziom  $a = 0,5$  m

Fig. 4.21. Probability of the event that displacements will cross the threshold  $a = 0.5$  m during 1 hour

#### 4.4.3. Niezawodność zmęczeniowa

W analizie niezawodności zmęczeniowej zastosujemy metodę przedstawioną przez Sieniawską i Śniadego [104]. Ta metoda, sformułowana w odniesieniu do drogowego mostu belkowego, została później zaadaptowana przez Bryję, Sieniawską i Śniadego [29] do analizy zagadnienia pionowych drgań jednoprzęsłowego mostu wiszącego. Punktem wyjścia omawianej metody jest przyjęcie hipotezy Palmgrena–Minera do sumowania uszkodzeń zmęczeniowych. Hipoteza opiera się na założeniu, że pęknięcie zmęczeniowe powstaje w efekcie liniowej kumulacji drobnych uszkodzeń cząstkowych (Sobczyk [107]). Zakłada się, że wielkość uszkodzenia  $\Delta_\xi$ , przy naprężeniu o amplitudzie  $\xi$ , jest równa stosunkowi liczby cykli tego naprężenia  $n_\xi$  do całkowitej liczby cykli niszczących  $N_\xi$ :  $\Delta_\xi = n_\xi / N_\xi$ ,  $n_\xi \leq N_\xi$  [107, 116]. Na podstawie hipotezy liniowej kumulacji uszkodzeń można wyznaczyć wartość oczekiwaną losowego uszkodzenia  $\mathbf{D}(t)$ , skumulowanego w jednostce czasu na skutek działania stochastycznych naprężeń  $\mathbf{S}(x_i, t)$ . Określa ją formuła całkowa [29, 81, 104, 116] o postaci

$$E[\mathbf{D}(t)] = c^{-1} E[\mathbf{M}(t)] \int_{-\infty}^{\infty} \xi^b f_{\mathbf{M}}(\xi, t) d\xi, \quad (4.53)$$

gdzie  $c$  i  $b$  oznaczają stałe dodatnie, zależne od właściwości materiału [55]. Funkcja  $f_{\mathbf{M}}(\xi, t)$  opisuje gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\xi$ , odpowiadającej wartości procesu naprężeń  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x_i, t)$  w punkcie, w którym występuje maksimum lokalne (pik naprężenia).  $E[\mathbf{M}(t)]$  jest wartością oczekiwaną częstotliwości występowania pików naprężeń (bez względu na ich wartość), czyli średnią ogólnej liczby pików w jednostce czasu [29, 104]. W dalszym ciągu będziemy poszukiwali rozwiązania problemu niezawodności w stanie ustalonym.

Jeśli stacjonarny proces  $\mathbf{S}(x_i, t)$  jest procesem wąskopasmowym, to obie poszukiwane funkcje można wyrazić, jak wykazano w pracy Lina [81], za pomocą formuł przybliżonych

$$f_{\mathbf{M}}(\xi, t) \cong -E^{-1}[\mathbf{M}(t)] \frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} \dot{\mathbf{S}} f_{\mathbf{SS}}(\xi, \dot{\mathbf{S}}, t) d\dot{\mathbf{S}}, \quad (4.54)$$

$$E[\mathbf{M}(t)] \cong \int_0^{\infty} \dot{\mathbf{S}} f_{\mathbf{SS}}(0, \dot{\mathbf{S}}, t) d\dot{\mathbf{S}}, \quad (4.55)$$

w których wykorzystuje się łączną gęstość procesu naprężeń i prędkości naprężeń  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$ . Wartość oczekiwana czasu życia mostu obciążonego losowym ruchem

drogowym, modelowanym jednorodnymi procesami Poissona, wynosi w stanie ustalonym [29, 104]

$$T_{\mathbf{S}} = \frac{1}{E[\mathbf{D}]} . \quad (4.56)$$

W rozważanym w tym rozdziale zagadnieniu niezawodności mostów wiszących czas życia mostu może być wyznaczony ze względu na stan zmęczenia cięgien lub przeseł dźwigara usztywniającego. Funkcję gęstości prawdopodobieństwa  $f_{\mathbf{SS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, t)$  będziemy aproksymowali szeregiem (4.48) lub założymy w przybliżeniu, że badany proces losowych naprężeń  $\mathbf{S}(x_i, t)$  jest stacjonarnym procesem Gaussa.

Wzory (4.54) i (4.55) są przybliżeniem dopuszczalnym dla procesów wąskopasmowych. W pracach [29, 104] zakładano a priori, że badane procesy są wąskopasmowe. W przypadku drgań konstrukcji złożonych, takich jak wieloprzęsłowe mosty wiszące, to założenie powinno być zweryfikowane. Szerokość pasma procesu  $\varepsilon = (1 - \alpha^2)^{1/2}$  można oszacować za pomocą współczynnika regularności [107]

$$\alpha = \frac{\lambda_{\mathbf{S}2}}{\sqrt{\lambda_{\mathbf{S}0}\lambda_{\mathbf{S}4}}} , \quad (4.57)$$

który jest wyrażony przez momenty widmowe

$$\lambda_{\mathbf{S}k} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^k g_{\mathbf{S}}(\omega) d\omega , \quad (4.58)$$

przy czym  $\lambda_{\mathbf{S}0} = \kappa_{\mathbf{S}2}$ . Dla procesu wąskopasmowego  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dla szerokopasmowego  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Gęstość widmową  $g_{\mathbf{S}}(\omega)$  procesu  $\mathbf{S}(x_i, t)$  oblicza się jako transformatę Fouriera

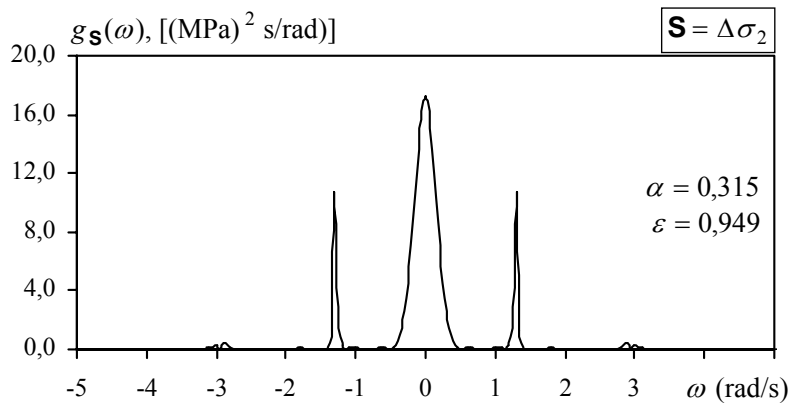
$$g_{\mathbf{S}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) C_{\mathbf{SS}}(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C_{\mathbf{SS}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (4.59)$$

funkcji kowariancyjnej  $C_{\mathbf{SS}}(\tau)$ , jeśli  $\int_{-\infty}^{\infty} |C_{\mathbf{SS}}(\tau)| d\tau < \infty$ . W analizowanym tu zagadnieniu drgań spowodowanych losowym ruchem drogowym funkcja kowariancyjna procesu naprężeń jest określona formułą o następującej postaci:

$$C_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t) = \sum_{j=1}^{n_p} E[P_j^2] \lambda_j \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{S}_j}(x_i, \tau) \mathbf{H}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t + \tau) d\tau, \quad (4.60)$$

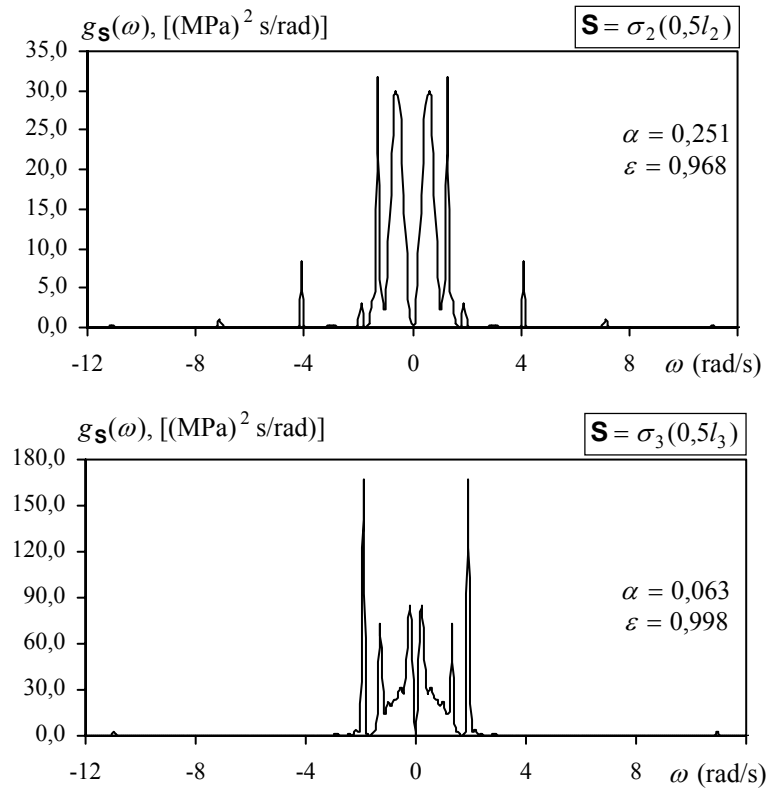
momenty widmowe  $\lambda_{\mathbf{S}_k}$  można zatem obliczyć jedynie w sposób numeryczny.

Na rysunkach 4.22 i 4.23 przedstawiono przykładowe gęstości widmowe procesów opisujących naprężenia normalne w ciągnie i w wybranych punktach dźwigara usztywniającego mostu Vincenta Thomasa, obciążonego na dwóch pasach ruchu losowymi potokami pojazdów. Podano także obliczone wartości współczynników regularności  $\alpha$  i szerokości pasma  $\varepsilon$  analizowanych procesów. Do obliczeń przyjęto intensywność zgłoszeń pojazdów  $\lambda = 0,36 \text{ s}^{-1}$ , przy prędkości  $v = 25 \text{ m/s}$ , jednakowej na obu pasach ruchu. Pozostałe parametry obciążenia opisano szczegółowo w rozdziale 4.4.2.



Rys. 4.22. Funkcja gęstości widmowej procesu opisującego dynamiczny przyrost naprężeń w ciągnie  
Fig.4.22. Spectral density function of the process describing the dynamic increment of cable stress

W przypadku ciągnie analizowano dynamiczny przyrost naprężenia w najbardziej wyężonym przekroju  $x_2 = 0$ . Funkcja gęstości widmowej przedstawiona na rys. 4.22 dotyczy naprężeń  $\Delta\sigma_2$  w ciągnie o numerze 2, położonym z prawej strony przekroju mostu (por. rys. 2.7). Naprężenia w dźwigarze badano w osi symetrii przekroju na poziomie dolnych skrajnych włókien, w środku rozpiętości przęsła głównego ( $\sigma_2(0,5l_2)$ ) i przęsła bocznego ( $\sigma_3(0,5l_3)$ ) – rys. 4.23. Wartości modułów sprężystości podłużnej dla stali dźwigara  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  i ciągnia  $E_c = 1,86 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  przyjęto na podstawie danych zawartych w pracy [7].



Rys. 4.23. Funkcje gęstości widmowej naprężeń w dźwigarze usztywniającym, w środku rozpiętości przęsła głównego i przęsła bocznego

Fig. 4.23. Spectral density function of stress in the stiffening girder, in the middle of main span and side span

Charakter funkcji gęstości widmowych i wyznaczone szerokości pasma wskazują, że badane procesy naprężeń są procesami szerokopasmowymi. W związku z tym zastosowanie wzorów (4.54) i (4.55) do obliczenia wartości oczekiwanej losowego uszkodzenia  $\mathbf{D}(t)$  może prowadzić do znacznych błędów (Bryja [25]). Ze wzrostem szerokości pasma procesu rośnie liczba oscylacji wysokoczęstotliwościowych o małej amplitudzie. Wówczas średnia liczba maksimum jest znacznie większa od wartości oczekiwanej liczby przejść przez poziom zerowy, zatem wzory (4.54) i (4.55) nie stanowią dobrego przybliżenia. W takim przypadku należałoby zastosować do wyznaczenia funkcji  $f_{\mathbf{M}}(\xi, t)$  formuły ogólne, zależne od funkcji  $f_{\mathbf{SSS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}}, t)$ , która opisuje łączną gęstość procesu naprężeń, prędkości zmian naprężeń i przyspieszeń [104]. Obliczenie rozkładu maksimum za pomocą funkcji  $f_{\mathbf{SSS}}(\mathbf{S}, \dot{\mathbf{S}}, \ddot{\mathbf{S}}, t)$  jest w ogólnym przy-

padku bardzo trudne. Rozważymy łatwiejszy przypadek, zakładając w przybliżeniu, że badany proces naprężeń  $\mathbf{S}(x_i, t)$  jest szerokopasmowym stacjonarnym procesem Gaussa. Wartość oczekiwana ogólnej liczby pików naprężeń w jednostce czasu może być dla procesu normalnego wyrażona przez momenty widmowe [107] i wynosi

$$E[\mathbf{M}(t)] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{S}4}}{\lambda_{\mathbf{S}2}}}. \quad (4.61)$$

Obliczanie momentów widmowych wyższych rzędów jest w analizowanym zagadnieniu bardzo czasochłonne. Łatwiej jest obliczyć wariancję  $D^2[\dot{\mathbf{S}}]$  drugiej pochodnej procesu naprężeń  $\dot{\mathbf{S}}$  i skorzystać z alternatywnej postaci wzoru (4.61)

$$E[\mathbf{M}(t)] = \frac{1}{2\pi} \frac{D[\ddot{\mathbf{S}}]}{D[\dot{\mathbf{S}}]}, \quad (4.62)$$

podanej na przykład w pracy [116]. Losowy proces przyspieszeń określających zmiany naprężenia i kumulanty tego procesu są tu opisane funkcjami:

$$\ddot{\mathbf{S}}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \int_{t_0}^t P_j(\tau) \ddot{\mathbf{H}}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau) d\mathbf{N}_j(\tau), \quad (4.63)$$

$$\kappa_{\ddot{\mathbf{S}}}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_p} \lambda_j E[P_j^r] \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{H}}_{\mathbf{S}_j}^r(x_i, t - \tau) d\tau, \quad (4.64)$$

analogicznymi do (4.10) i (4.11), przy czym  $\ddot{\mathbf{H}}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathbf{H}_{\mathbf{S}_j}(x_i, t - \tau)]$ .

Wariancja procesu w stanie ustalonym  $D^2[\ddot{\mathbf{S}}]$  jest drugą kumulantą, obliczoną po uwzględnieniu, że  $t_0 \rightarrow -\infty$ .

W przypadku szerokopasmowych procesów o rozkładzie normalnym funkcja  $f_{\mathbf{M}}(\xi, t)$  opisująca rozkład maksimum dąży także do rozkładu normalnego [107, 116], zatem jest określona wzorem o postaci

$$f_{\mathbf{M}}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[\mathbf{S}]}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2D^2[\mathbf{S}]}\right). \quad (4.65)$$

Czas życia mostu  $T_{\mathbf{S}}$ , generowany przez stochastyczny proces naprężeń  $\mathbf{S}$ , oblicza się według wzoru (4.56), na podstawie średniego uszkodzenia  $\mathbf{D}(t)$ , skumulowanego w jednostce czasu – wzór (4.53). Przed wykonaniem szczegółowych obliczeń niezbędne jest określenie stałych materiałowych  $c$  i  $b$ .

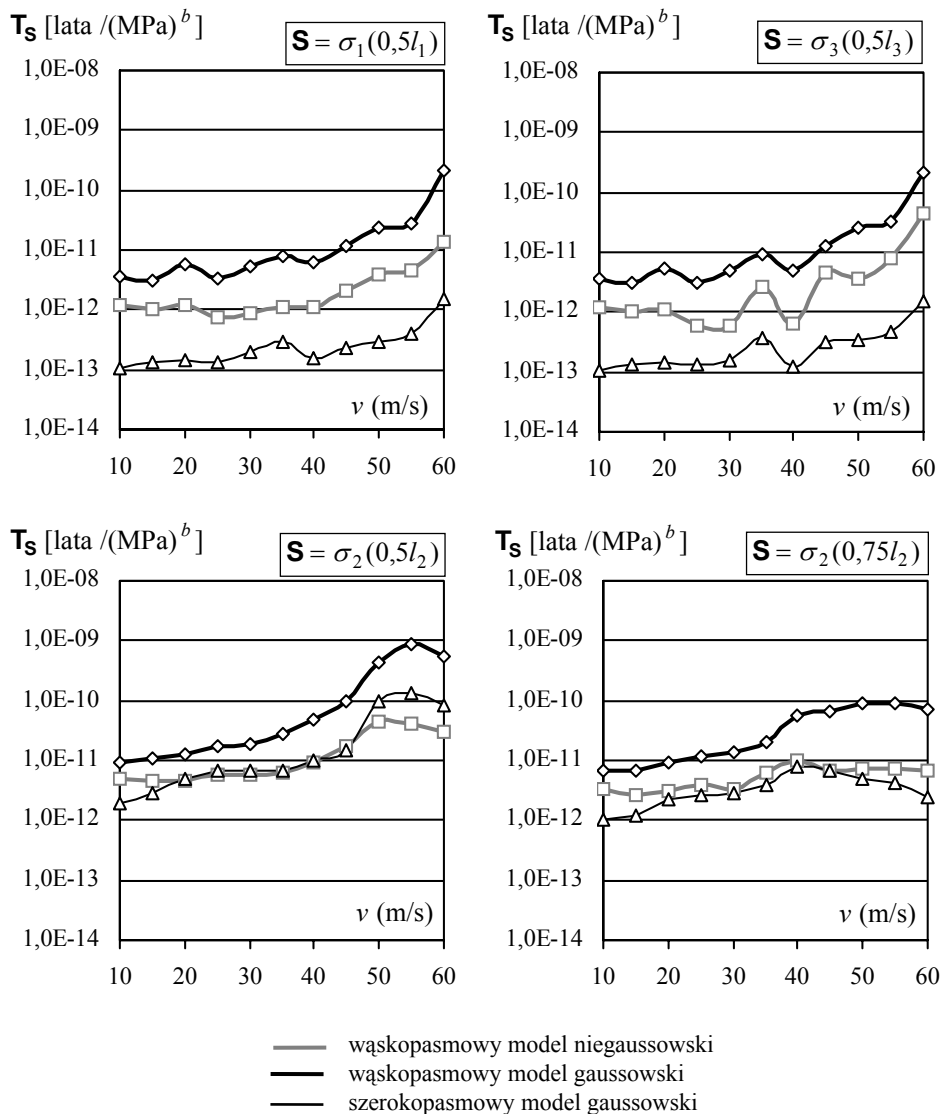
W dostępnych autorce opracowaniach związanych z mostem Vincenta Thomasa nie ma informacji, które umożliwiłyby właściwy dobór stałych dotyczących rzeczywistego materiału konstrukcji. W związku z tym wprowadzono zastępczą miarę czasu życia – parametr  $T_s = T_s/c$ , nazywany dalej miarą trwałości mostu i mierzony w latach/(MPa)<sup>b</sup>. Stałą  $b$  oszacowano na podstawie danych literaturowych [55, 92, 107]. Przyjęto, że jej wartość wynosi 4 i jest jednakowa dla materiału dźwigara i cięgien.

Na rysunkach 4.24 i 4.25 przedstawiono wyniki obliczeń ilustrujące zależność miary trwałości mostu  $T_s$  od prędkości ruchu pojazdów. Miarę trwałości obliczono ze względu na stan zmęczenia materiału cięgien i dźwigara usztywniającego. Porównano rezultaty uzyskane dla trzech modeli obliczeniowych. Linia cienką oznaczono model, w którym zakłada się, że proces naprężeń jest szerokopasmowym stacjonarnym procesem o rozkładzie normalnym. Linie grube odpowiadają modelowaniu za pomocą procesu wąskopasmowego, przy czym linia czarna oznacza stacjonarny proces gaussowski, a linia szara stacjonarny proces niegaussowski, którego łączna gęstość  $f_{SS}(S, \dot{S}, t)$  jest aproksymowana szeregiem (4.48). Do obliczeń przyjęto takie same parametry obciążenia i położenie punktów wyznaczania naprężeń jak w przypadku wyznaczania funkcji gęstości widmowych. W tabeli 4.7 zestawiono obliczone szerokości pasma badanych procesów naprężeń.

Tabela 4.7. Szerokości pasma badanych procesów naprężeń  
Table 4.7. Bandwidth measures of examined stress processes

Prędkość ruchu pojazdów (m/s)	Szerokość pasma $\varepsilon$			
	$\sigma_1(0,5l_1)$	$\sigma_3(0,5l_3)$	$\sigma_2(0,5l_2)$	$\sigma_2(0,75l_2)$
10	0,9998	0,9998	0,9962	0,9972
20	0,9997	0,9996	0,9763	0,9851
30	0,9982	0,9981	0,9606	0,9788
40	0,9947	0,9937	0,9563	0,9789
50	0,9945	0,9947	0,8867	0,9704
60	0,9982	0,9984	0,8033	0,9513

Na podstawie przedstawionych wyników badań stwierdzono, że zastosowanie do obliczeń modelu wąskopasmowego powoduje największe błędy w oszacowaniu trwałości przęseł bocznych, których drgania są kształtowane głównie przez wyższe formy własne. Szerokość pasma procesu naprężeń w przęsełach bocznych jest największa – bliska jedności (tab. 4.7), zatem proces jest zdecydowanie szerokopasmowy, a miara trwałości przęseł wyznaczona za pomocą modelu wąskopasmowego jest niekorzystnie zawyżona (rys. 4.24). W przęśle głównym losowe naprężenia w badanych punktach dźwigara należy również traktować jak procesy szerokopasmowe. Szerokość pasma jest jednak nieco mniejsza. To niewielkie zmniejszenie szerokości pasma powoduje wyraźne zmniejszenie błędu spowodowanego modelowaniem wąskopasmowym.



Rys. 4.24. Wpływ prędkości ruchu pojazdów na miarę trwałości mostu obliczoną ze względu na stan zmęczenia dźwigara

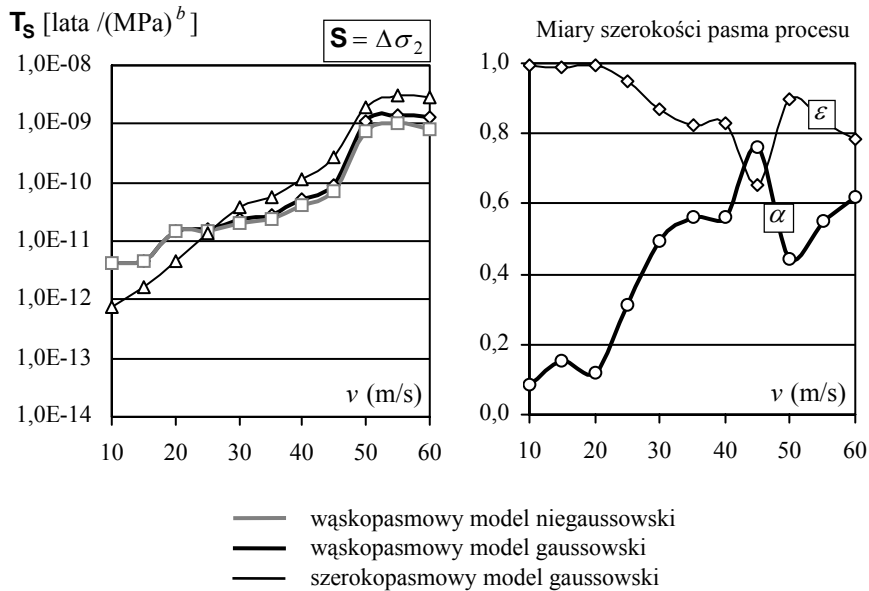
Fig. 4.24. Effect of the traffic speed on the measure of bridge durability calculated with respect of the girder fatigue

W środku rozpiętości przęsła głównego otrzymuje się w dużym zakresie prędkości ruchu obciążenia, od 20 m/s do 45 m/s, praktycznie takie same rezultaty dla wąskopasmowego modelu niegaussowskiego i szerokopasmowego modelu gaussowskiego. Gdy prędkości ruchu pojazdów są większe od 45 m/s, szerokość pasma procesu na-



prężen maleje poniżej poziomu  $\varepsilon = 0,95$ . Wtedy miara trwałości pręśła, wyznaczona za pomocą modelu szerokopasmowego, okazuje się większa od obliczonej przy założeniu, że proces naprężeń jest wąskopasmowym procesem niegaussowskim. Modelowanie szerokopasmowe prowadzi wówczas do wyznaczenia dłuższego czasu życia konstrukcji.

Podobna prawidłowość ujawnia się na rys. 4.25, który ilustruje wpływ prędkości ruchu pojazdów na miarę trwałości mostu, obliczoną ze względu na stan zmęczenia cięgna. Na rysunku przedstawiono dodatkowo wykres zmian szerokości pasma badanego procesu  $\mathbf{S} = \Delta\sigma_2$ , opisującego przyrost naprężeń w cięgni. Miara trwałości  $\mathbf{T}_S$  obliczona dla modelu szerokopasmowego jest większa od miary wyliczonej dla modelu wąskopasmowego, gdy szerokość pasma  $\varepsilon < 0,95$ , a współczynnik regularności  $\alpha > 0,3$ . W wyniku modelowania szerokopasmowego otrzymuje się zatem dłuższy czas życia konstrukcji, podobnie jak w poprzednio analizowanym przypadku.



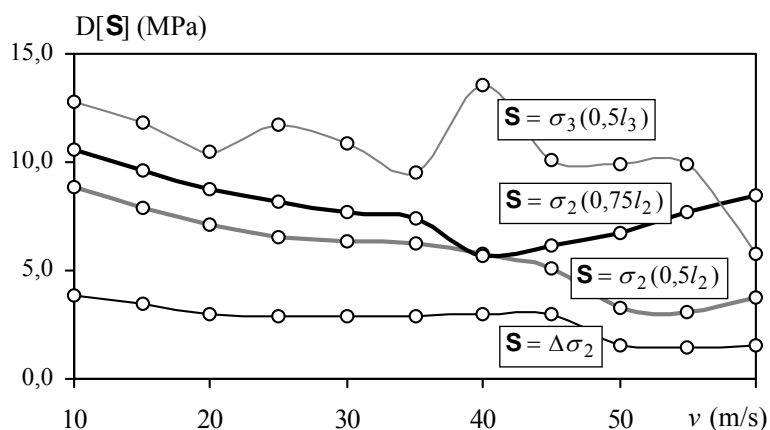
Rys. 4.25. Wpływ prędkości ruchu pojazdów na miarę trwałości mostu obliczoną ze względu na stan zmęczenia cięgna

Fig. 4.25. Effect of the traffic speed on the measure of bridge durability calculated with respect to the cable fatigue

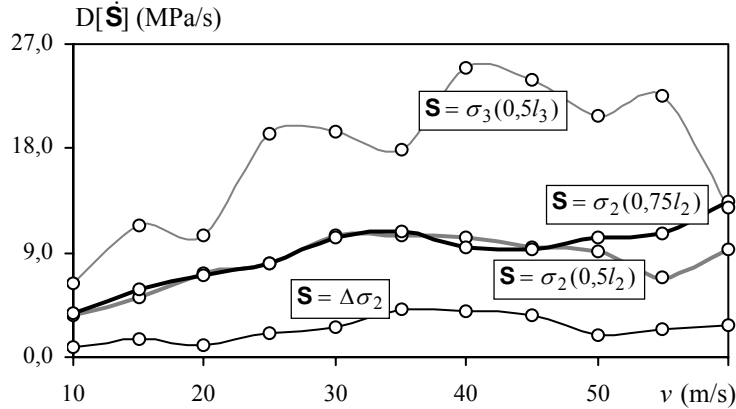
Każde rozwiązanie problemu niezawodności zmęczeniowej zawiera wiele uproszczeń, których skutki są często trudne do oszacowania. Ze względu na bezpieczeństwo konstrukcji istotniejsze są te rozwiązania, które dają oszacowania czasu życia konstrukcji „od dołu” (krótszy czas życia). W przypadku cięgien takie oszacowanie otrzymuje się za pomocą modelu wąskopasmowego, jedynie przy

małych prędkościach ruchu i dużej intensywności zgłoszeń pojazdów jest odwrotnie. Ten wniosek, w połączeniu z analizą miar szerokości pasma analizowanych procesów i charakteru funkcji gęstości widmowych, skłania do stwierdzenia, że lepszą informację o szerokości pasma rzeczywistych procesów naprężeń otrzymuje się na podstawie współczynnika regularności  $\alpha$ , ponieważ parametr  $\varepsilon$  jest słabo zmienny i nie różnicuje dostatecznie procesów. Z wyników badań wynika, że procesy o współczynnikach  $\alpha \cong 0,4-0,8$  można traktować jak wąskopasmowe, podczas gdy ich szerokość pasma  $\varepsilon \cong 0,9-0,6$  sugeruje raczej proces szerokopasmowy. Bardzo niewielka zmiana wartości parametru  $\varepsilon$ , bliskiego jedności, powoduje istotne zmiany charakteru rozwiązań. Stopień zmian zdecydowanie lepiej opisuje współczynnik  $\alpha$  (rys. 4.22 i 4.24).

Analiza ilościowa wyników przedstawionych na rys. 4.24 i 4.25 prowadzi do następujących wniosków. Największy gradient zmian trwałości obserwuje się wciągach, co oznacza, że są to elementy o szczególnej wrażliwości, a więc bardziej narażone na awarię. Między innymi z tego powodu ciągną się wykonywane z materiałów o wysokiej jakości i wytrzymałości, co decyduje ostatecznie o ich większej, w porównaniu z przęsłami dźwigara, niezawodności. W analizie niezawodności zmęczeniowej dźwigara głównego bardziej miarodajny jest przekrój w  $3/4$  rozpiętości przęsła niż przekrój środkowy. Jednak decydujący wpływ na trwałość mostu ma stan zmęczenia przęseł bocznych. Czas życia mostu wyznaczony ze względu na zmęczenie materiału przęseł bocznych może być nawet dziesięciokrotnie krótszy od czasu wyznaczonego ze względu na zmęczenie przęsła środkowego.



Rys. 4.26. Odchylenia standardowe naprężeń  
Fig. 4.26. Standard deviations of stresses



Rys. 4.27. Odchylenia standardowe prędkości zmian naprężeń  
Fig. 4.27. Standard deviations of stress velocity

Mniejsza trwałość przęseł bocznych wynika z dużej amplitudy zmian naprężeń i dużej prędkości zmian naprężeń, o czym świadczą odchylenia standardowe przedstawione na rys. 4.26 i 4.27. Częstość występowania ekstremalnych wartości naprężeń jest ponadto zdecydowanie większa w przęsełach bocznych niż w przęśle głównym, proces jest zdecydowanie szerokopasmowy jego gęstość widmowa przyjmuje znaczące wartości w największym zakresie częstości. Należy jednak zauważyć, że do wyznaczania drgań mostu zastosowano algorytm uproszczony, w którym pomija się poziome przemieszczenia cięgien. Badania przedstawione w rozdziale 4.2.2 wykazały, że odchylenia standardowe drgań i prędkości drgań przęseł bocznych są w tym przypadku znacznie większe od wyznaczonych za pomocą algorytmu dokładniejszego, w którym uwzględnia się poziome przemieszczenia cięgien (rys. 4.3, 4.4). Należy zatem przyjąć, że rzeczywista trwałość przęseł bocznych jest większa i nie różni się tak znacząco od trwałości przęśla głównego.

## 4.5. Podsumowanie

Przedstawiona w rozdziale 4.2 analityczno-numeryczna metoda wyznaczania charakterystyk drgań losowych, wywołanych ruchem drogowym, jest zdecydowanie łatwiejsza w praktycznych zastosowaniach od metody symulacyjnej, ale zawiera wiele ograniczeń. Najistotniejszym ograniczeniem metody jest konieczność pominięcia efektów nieliniowych, a także konieczność pominięcia inercji i resorowania pojazdów. Metoda symulacyjna, sformułowana w rozdziale 4.3, jest z kolei bardzo czasochłonna, ale umożliwia modelowanie ruchu drogowego z dużym stopniem szczegółowości i może być stosowana do analizy drgań nieliniowych. Mała efektywność metody sy-

mulacyjnej utrudnia natomiast jej stosowanie w badaniach studialnych, w szerokim zakresie zmienności parametrów. Do takich zastosowań wykorzystano w niniejszej pracy zdecydowanie bardziej skuteczną metodę analityczno-numeryczną, przy czym dokładność tej metody, w aspekcie istotności jej podstawowych ograniczeń, zbadano za pomocą eksperymentów symulacyjnych.

Na podstawie badań symulacyjnych stwierdzono, że wpływy nieliniowe w moście wiszącym, obciążonym średniointensywnym, swobodnym ruchem drogowym, powodują zmniejszenie drgań. Uwzględnienie efektów nieliniowych spowodowało w każdym rozważanym przypadku zmniejszenie odchyłeń standardowych (o 5%–12%). Nie zanotowano istotnych różnic w zakresie wartości oczekiwanych naciągów cięgien i przemieszczeń dynamicznych przęsła głównego (~1%). Jedynie w przęsłach bocznych średnia, nieliniowa odpowiedź mostu jest większa od liniowej (o ~11%), ale równocześnie jej rozproszenie wokół wartości przeciętnej jest mniejsze (o ~10%). Testy numeryczne wykazały, że pominięcie efektów nieliniowych jest dopuszczalne. Skutkiem jest przeszacowanie odpowiedzi konstrukcji, co jest korzystne w aspekcie oceny jej bezpieczeństwa. Podobne rezultaty uzyskano w wyniku analiz wpływu inercji i resorowania pojazdów drogowych. Stwierdzono, że wpływy te są pomijalnie małe i powodują niewielkie zmniejszenie wartości odchyłeń standardowych.

Wyniki analizy efektów nieliniowych oraz efektów inercji i resorowania pojazdów świadczą o tym, że za pomocą metody analityczno-numerycznej można z wystarczającą dokładnością wyznaczyć charakterystyki losowe drgań mostów wiszących, poddanych działaniu swobodnego ruchu drogowego. Ograniczenie analizy do drgań liniowych jest uzasadnione, a efekty dynamiczne spowodowane inercją i resorowaniem pojazdów mogą być pominięte.

W rozdziale 4.2.2 przedstawiono przykład analizy studialnej drgań losowych mostu w stanie ustalonym. Analizowano wpływ prędkości ruchu pojazdów na wartości oczekiwane i odchylenia standardowe drgań przęsła głównego i przęseł bocznych mostu Vincenta Thomasa. Pojęcie „drgania mostu” oznacza tu, podobnie jak w całej pracy, łączny statyczno-dynamiczny efekt działania obciążenia. Jednocześnie badano także wyodrębniony efekt statyczny. Intensywność zgłoszeń pojazdów związana z prędkością zależnością empiryczną, która przewiduje, że ze wzrostem prędkości intensywność ruchu początkowo słabo rośnie, potem zdecydowanie maleje. Stwierdzono, że wartości oczekiwane przemieszczeń dynamicznych maleją ze wzrostem prędkości ruchu, odchylenia standardowe natomiast lokalnie rosną przy pewnych prędkościach, mimo zmniejszającej się intensywności zgłoszeń pojazdów. Występowanie lokalnych ekstremów odchyłeń standardowych świadczy o tym, że przy wybranych prędkościach ruchu pojazdów most wykazuje szczególną wrażliwość na dynamiczne oddziaływanie ruchu drogowego. Stwierdzono, że wartości przeciętne przemieszczeń w przęsłach bocznych są o rząd mniejsze niż w przęsle głównym, ale odchylenia standardowe są porównywalne, co oznacza, że w zagadnieniu drgań deterministycznych należy spodziewać się w przęsłach bocznych znacznie większych

wartości współczynników dynamicznych niż w przęśle środkowym. O dużej wrażliwości dynamicznej przęseł bocznych świadczą również odchylenia standardowe prędkości drgań – w przęslach bocznych są na ogół większe niż w przęśle głównym. Ta szczególna wrażliwość przęseł bocznych jest w pewnym stopniu wynikiem przyjęcia uproszczonego modelu mostu. Zwiększenie dokładności modelowania, w wyniku uwzględnienia wpływu poziomych przemieszczeń ciągnien powoduje w całym zakresie rozpatrywanych prędkości wyraźne zmniejszenie odchyłeń standardowych przemieszczeń w przęslach bocznych; wartości przeciętne nie zmieniają się istotnie.

Istotnym elementem badań przedstawionych w rozdziale 4.2.2 jest weryfikacja możliwości aproksymowania stacjonarnych efektów obciążenia ruchem drogowym przez stacjonarne procesy gaussowskie. Na podstawie analiz funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa i obliczonych wartości ekscesu stwierdzono, że w stanie ustalonym rozkłady rozważanych procesów niewiele się różnią od rozkładu normalnego. Najbardziej zbliżony do procesu Gaussa jest proces opisujący drgania w środku rozpiętości przęsła głównego. Z kolei procesy drgań w przekrojach położonych w ćwiartkach rozpiętości przęsła głównego najbardziej się różnią od gaussowskich. W obu przypadkach, a także w przypadku drgań przęseł bocznych, można przyjąć, że aproksymacja procesami gaussowskimi jest uzasadniona. Trzeba zauważyć, że założenie aproksymacji gaussowskiej jest mimo wszystko tylko przybliżeniem rzeczywistych procesów. Problem konsekwencji tego przybliżenia rozważono ponownie w rozdziale 4.4 w aspekcie oceny niezawodności mostów wiszących. Stwierdzono, że aproksymacja procesami Gaussa powoduje zmniejszenie średniej intensywności przekroczeń ustalonego poziomu przemieszczeń. Najmniejsze błędy popełnia się w przypadku analizy drgań w środku rozpiętości przęsła głównego, największe – w ćwiartkach rozpiętości przęsła głównego. Wyniki te są zgodne z wnioskami sformułowanymi na podstawie analizy funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Zniżenie średniej intensywności przekroczeń nie jest korzystne, ponieważ prowadzi do zawyżonych wartości prawdopodobieństwa braku przekroczeń przyjętego poziomu granicznego (niezawodności). W przypadku niezawodności zmęczeniowej zniżenie średniej liczby przekroczeń powoduje nadmiernie korzystne oszacowania czasu możliwej eksploatacji konstrukcji.

Opisane w rozdziale 4.4 metody badania niezawodności zmęczeniowej są znane w literaturze. Jednak wybór właściwej metody dla rozważanego w pracy zagadnienia nie był oczywisty. W praktyce obliczeniowej wykorzystanie metod sformułowanych w literaturze w sposób ogólny wiąże się z koniecznością stosowania pewnych uproszczeń, które powinny być zgodne ze specyfiką procesów stochastycznych opisujących zmiany naprężeń. Zazwyczaj zakłada się, że są to stacjonarne procesy wąskopasmowe, drugą opcją są procesy szerokopasmowe. Są to dwie odmienne idealizacje procesów rzeczywistych, które prowadzą do różnych rozwiązań szczegółowych. W rozdziale 4.4.3 przedstawiono i porównano wyniki obu rozwiązań, wyznaczonych dla przykładowego mostu wiszącego w stanie ustalonym drgań wywołanych swobodnym ruchem drogo-

wym. Zbadano szerokość pasma procesów i wyznaczono funkcje gęstości widmowych dla naprężeń w charakterystycznych punktach konstrukcji. Stwierdzono, że badane procesy naprężeń są procesami szerokopasmowymi. Szerokości pasma procesów zależą od parametrów obciążenia – prędkości ruchu i intensywności zgłoszeń pojazdów, i od lokalizacji na obiekcie punktu obserwacji naprężeń. Niewielkie zmiany miary szerokości pasma, bliskiej jedności, powodują istotne zmiany charakteru rozwiązań. Szerokość pasma procesu naprężeń w przęsłach bocznych jest największa, proces jest zdecydowanie szerokopasmowy, niezależnie od zmian parametrów obciążenia. Wówczas miara trwałości przęseł, wyznaczona za pomocą modelu wąskopasmowego, jest niekorzystnie zawyżona. W przęsle głównym szerokości pasma procesów są nieco mniejsze. To niewielkie zmniejszenie szerokości pasma powoduje zdecydowane zmniejszenie błędu wynikającego z modelowania wąskopasmowego. W cięgnach szerokość pasma procesu naprężeń jest najmniejsza i wyraźnie maleje ze wzrostem prędkości obciążenia, który łączy się ze zmniejszoną intensywnością zgłoszeń pojazdów. Wówczas, ze względu na bezpieczeństwo konstrukcji, wskazane jest modelowanie wąskopasmowe procesu naprężeń, które prowadzi do mniej korzystnych rezultatów oceny trwałości mostu. Badania niezawodności zmęczeniowej wykazały, że największy gradient zmian miary trwałości mostu obserwuje się w cięgnach, co oznacza, że są to elementy o szczególnej wrażliwości, a więc bardziej narażone na awarię. W analizie niezawodności dźwigara głównego bardziej miarodajny jest przekrój w 3/4 rozpiętości przęsła niż przekrój środkowy. Decydujący wpływ na trwałość mostu ma stan zmęczenia przęseł bocznych.

Przedstawione w rozdziale 4.4 wyniki badań niezawodności są przykładem wykorzystania możliwości obliczeniowych, które oferuje opracowany w rozdziale 2 algorytm analizy drgań deterministycznych, w połączeniu ze sformułowaną w rozdziale 4.2, analityczno-numeryczną metodą wyznaczania charakterystyk drgań stochastycznych, wywołanych losowym ruchem drogowym. Efektywność prezentowanych metod analizy drgań losowych i niezawodności zależy w dużym stopniu od szybkości wyznaczania dostatecznie dokładnych, dynamicznych funkcji wpływu badanych reakcji mostu – przemieszczeń, naprężeń w cięgnach i dźwigarze usztywniającym. W rozważanym zagadnieniu funkcje te mogą być wyznaczone jedynie w sposób numeryczny, poprzez bezpośrednie całkowanie numeryczne równań ruchu. Całkowity czas, konieczny do wygenerowania przebiegów funkcji wpływu, aż do ich zaniknięcia, może być bardzo długi, ze względu na małe tłumienie drgań. W rezultacie niezbędne jest wielokrotne wykonywanie wieluset tysięcy kroków całkowania. W każdym kroku całkowania rozwiązywany jest układ równań, przy czym liczba równań zależy od przyjętej metody dyskretyzacji konstrukcji. Wyniki badań zaprezentowane w niniejszym rozdziale dowodzą, że przyjęta w rozprawie metoda dyskretyzacji, oparta na globalnej aproksymacji w sensie Ritza, umożliwiła opracowanie skutecznego algorytmu wyznaczania drgań deterministycznych, który stanowi dobrą podstawę metod analizy drgań losowych i zapewnia realną możliwość wykonywania obliczeń niezbędnych do badania niezawodności konstrukcji.

## 5. Drgania wymuszone działaniem porywistego wiatru

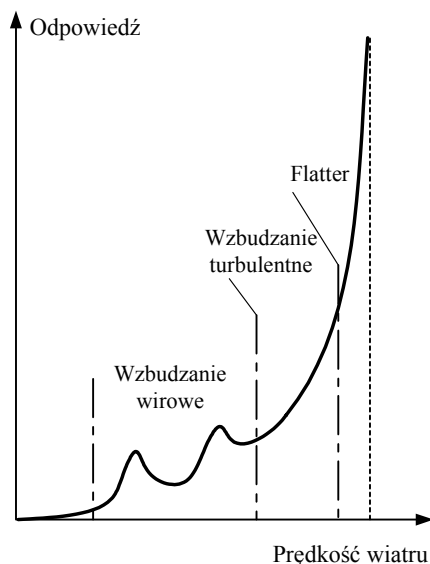
### 5.1. Uwagi wstępne

Drgania mostów wiszących, wywołane działaniem wiatru, można najogólniej podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa obejmuje oscylacje o charakterze lokalnym, gdy ruch konstrukcji ogranicza się do drgań jednego lub kilku wieszaków, druga grupa to oscylacje globalne, które dotyczą całej konstrukcji (Gimsing [59]).

Lokalne oscylacje wieszaków mogą być spowodowane wzbudzeniem wirowym, czyli okresowym, naprzemiennym odrywaniem się wirów, które przy pewnych krytycznych prędkościach wiatru wywołują drgania rezonansowe w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przepływu powietrza. W szczególnych warunkach pogodowych może wystąpić zjawisko galopowania, charakteryzujące się drganiami o dużej amplitudzie, zachodzącymi również w kierunku poprzecznym do kierunku wiatru. Zjawisko galopowania może pojawić się przy wzbudzeniu wiatrowo-deszczowym, szczególnie w warunkach marznącego deszczu, powodującego oblodzenie. W przypadku występowania nadmiernych lokalnych drgań wieszaków stosuje się specjalne środki zapobiegawcze, które powodują stabilizację drgań. Montuje się poziome liny stabilizujące, łączące wieszaki, instaluje się odpowiednio dobrane tłumiki oraz dodatkowe wyposażenie, które modyfikuje kształt przekroju wieszaka i zwiększa chropowatość powierzchni (podłużne wypukłości, żebra, okrętki z drutów).

Drgania o charakterze globalnym są znacznie bardziej niebezpieczne, mogą w krytycznych sytuacjach doprowadzić do utraty stateczności i katastrofy całej konstrukcji. Możliwości wystąpienia sytuacji zagrażających bezpieczeństwu muszą być właściwie zidentyfikowane i wyeliminowane na etapie projektowania. W przypadku mostów wiszących prognoza i ocena efektów aerodynamicznych jest bardzo trudna. Obejmuje dużą liczbę złożonych problemów szczegółowych, którymi zajmowało się wielu badaczy i które są nadal przedmiotem badań. Obszerną bibliografię i przegląd zagadnień aerodynamiki mostów wiszących można znaleźć w monografiach Simiu i Scanlana [105], Dyrbye i Hansena [54] oraz Gimsinga [59]. W monografii Simiu i Scanlana [105] opisano współczesne metody analizy zjawisk aerodynamicznych.

Metody te są ciągle aktualizowane i doskonalone [54], stanowią punkt wyjścia badań wielu autorów [17, 41, 43, 44, 46]. Z kolei, w monografii Gimsinga przedstawiono problemy aerodynamiki w sposób poglądowy, w ujęciu inżynierskim, z którego skorzystamy, aby krótko scharakteryzować problem.



Rys. 5.1. Zależność odpowiedzi mostu od prędkości wiatru (Gimsing [59])

Fig. 5.1. Bridge response versus wind speed (Gimsing [59])

Prędkość wzbudzenia wiatru ma istotnego znaczenia nabierają fluktuacje prędkości wiatru. Wówczas, oprócz obciążenia wywołanego wiatrem o stałej, uśrednionej prędkości, należy uwzględnić zmienne w czasie składniki obciążenia, wynikające z turbulencji. Obciążenie wiatrem z uwzględnieniem turbulencji jest nazywane wzbudzeniem turbulentnym. Obecnie powszechnie stosuje się termin anglojęzyczny: „buffeting”. Wzbudzenie turbulentne, podobnie jak wirowe, nie stanowi bezpośredniego zagrożenia dla bezpieczeństwa konstrukcji, ale powoduje efekty zmęczeniowe i jest przyczyną dyskomfortu użytkowników.

Największe zagrożenie dla mostów wiszących stanowią drgania typu flutter, charakteryzujące się niestabilnym ruchem konstrukcji, który prowadzi do katastrofy. Podstawowym zadaniem projektantów jest takie ukształtowanie mostu, aby krytyczna prędkość wiatru (tzw. prędkość flatteru) była zdecydowanie większa od prędkości, które mogą występować w rejonie usytuowania konstrukcji. Zjawisko flatteru analizuje się zazwyczaj z pominięciem turbulencji. Dopuszczalność takiego podejścia uzasadnia się tym, że turbulencje powodują zwiększenie krytycznych prędkości flatteru, o czym świadczą wyniki badań modelowych w tunelach aerodynamicznych. Fizyczna i matematyczna interpretacja flatteru będzie przedstawiona dokładniej w rozdziale 5.2, po zdefiniowaniu obciążeń aerodynamicznych.

Konstrukcje mostów wiszących są podane różnym typom wymuszenia aerodynamicznego, w zależności od prędkości wiatru. Na rysunku 5.1 przedstawiono wykres ilustrujący tę zależność. Przy stosunkowo niewielkich prędkościach wiatru może pojawić się niekorzystne zjawisko wzbudzenia wirowego drgań dźwigara usztywniającego. Wiry formują się i odrywają naprzemiennie z górnej i dolnej powierzchni dźwigara, co powoduje wzbudzenie drgań pionowych i skrętnych. Ruch konstrukcji wzmacnia się, gdy częstość odrywania się wirów jest zbliżona do jednej z częstości własnych mostu, ale drgania są ograniczone i powrotnie maleją, gdy prędkość wiatru rośnie i zmienia się



Wśród opisanych powyżej przypadków wzbudzenia aerodynamicznego nie uwzględniono zjawiska galopowania, ponieważ w analizie globalnych drgań mostów wiszących zjawisko to nie ma praktycznego znaczenia – nie stwierdzono w praktyce przypadków drgań wywołanych galopowaniem dźwigara usztywniającego. Nie wspomniano także o możliwości utraty stateczności konstrukcji w sensie statycznym, na skutek tzw. rozbieżności skrętnej („torsional divergence”). Aby krótko scharakteryzować to zjawisko, należy przypomnieć, że obciążenia aerodynamiczne zależą od kąta natarcia wiatru, który zmienia się wraz z obrotem konstrukcji. Przy pewnej krytycznej prędkości wiatru moment aerodynamiczny osiąga wartość sprężystej reakcji skrętnej. Po przekroczeniu prędkości krytycznej niewielka zmiana kąta natarcia powoduje nieograniczony obrót konstrukcji, co jest równoznaczne z utratą stateczności. W przypadku mostów wiszących prędkości krytyczne odpowiadające rozbieżności skrętnej są na ogół ekstremalnie duże [105], większe niż prędkości flatteru [54].

Jak wspomniano wcześniej, literatura dotycząca aerodynamiki mostów wiszących jest bardzo obszerna. Mimo to stale pojawiają się nowe opracowania, ponieważ każdy nowo budowany obiekt wymaga odrębnych badań eksperymentalnych i analiz teoretycznych, a równocześnie ciągły rozwój technik obliczeniowych i eksperymentalnych umożliwia tworzenie coraz dokładniejszych metod badawczych. Ostatnio wiele uwagi poświęca się problemowi „buffetingu”. Przykładem są prace Miyaty, Yamady i Boonyapinyo [17, 85, 86], Chena, Matsumoto i Kareema [43, 44], Jonesa i Scanlana [70, 73]. Pewnym przyczynkiem są tu prace autorki [20, 21], w których przedstawiono metodę analizy korelacyjnej drgań mostu wiszącego obciążonego porywistym wiatrem z losowymi fluktuacjami prędkości. Analiza drgań spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym ma bardzo duży walor praktyczny. W odróżnieniu od wiatru krytycznego, przy którym może pojawić się zjawisko flatteru, silny porywisty wiatr jest rzeczywistym obciążeniem, które działa na konstrukcję mostu i ma wpływ na stan jej wyłączenia. Oba zagadnienia – „buffeting” i flatter – są bardzo istotne, ale cel i metody analizy są zupełnie inne. Zjawisko flatteru analizuje się w ujęciu deterministycznym przy założeniu stałej, uśrednionej prędkości wiatru, wzbudzenie turbulentne natomiast powinno być rozpatrywane w kategoriach procesów stochastycznych.

W dalszym ciągu skupimy uwagę na zagadnieniu drgań spowodowanych turbulentnym przepływem wiatru. Prędkość porywistego wiatru ma trzy składowe (w kierunkach  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) i zmienia się zarówno w czasie jak i w przestrzeni, zależy od wielu parametrów, ma charakter losowy. Stanowi wielowymiarowe pole losowe o zmiennych w czasie charakterystykach. W praktyce obliczeniowej przyjmuje się zwykle liczne uproszczenia. Zakłada się, że prędkość wiatru działającego na dany punkt konstrukcji (wybrany przekrój mostu) jest kombinacją trzech niezależnych, jednowymiarowych, stacjonarnych procesów gaussowskich [41]. Założenie niezależności procesów jest równoznaczne z pominięciem korelacji między trzema składowymi prędkościami. Bardziej restrykcyjnym założeniem jest całkowite pominięcie dwóch skła-

dowych prędkości, poprzecznych do kierunku wiatru, jako mało istotnych w porównaniu z fluktuacjami o kierunku zgodnym z przepływem powietrza [59]. Gaussowski model wiatru jest powszechnie akceptowany i stosowany od wielu lat, ale jest tylko wygodnym obliczeniowo przybliżeniem. Jak twierdzą autorzy pracy [60], Gioffre, Gusella i Grigoriu, analiza statystyczna pomiarów ciśnienia wiatru na konstrukcje i wyniki badań eksperymentalnych świadczą o tym, że proces gaussowski nie opisuje pola ciśnienia wiatru w sposób wystarczająco dokładny.

Do analizy drgań wywołanych zjawiskiem „buffetingu” stosuje się na ogół klasyczną metodę spektralną (rozwiązania w dziedzinie częstości). Obecnie, coraz częściej wykorzystywane jest alternatywne podejście, w którym poszukuje się rozwiązań w dziedzinie czasu [17, 43, 44]. To podejście, w odróżnieniu od poprzedniego, umożliwia między innymi uwzględnienie cech nieliniowych konstrukcji i wzbudzenia aerodynamicznego. Analiza odpowiedzi konstrukcji w dziedzinie czasu wymaga określenia „na wejściu” historii przebiegów czasowych obciążeń spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym. Do tego celu stosuje się zwykle metody symulacyjne. Stąd, między innymi, obserwuje się w ostatnich latach duże zainteresowanie specjalistów inżynierii wiatrowej metodami symulacji procesów stochastycznych [41, 60]. Zastosowanie metod symulacyjnych umożliwia generowanie przykładowych realizacji procesów gaussowskich i niegaussowskich [41], dzięki czemu można stosunkowo dokładnie opisać pole ciśnienia wiatru.

W niniejszym rozdziale przedstawiono oryginalne rozwiązanie problemu drgań mostów wiszących, poddanych działaniu wzbudzenia turbulentnego. Problem „buffetingu” wybrano w rozprawie do rozważań z dwóch powodów. Po pierwsze – silny, porywisty wiatr jest często spotykany w strefach lokalizacji mostów wiszących i stanowi ich główne obciążenie środowiskowe. Po drugie – zjawisko wzbudzenia turbulentnego, z natury losowe, dobrze kojarzy się z wcześniej rozważanym zagadnieniem drgań wywołanych losowym ruchem drogowym. Zgodnie z najnowszymi trendami, do analizy drgań spowodowanych turbulentnym przepływem wiatru zastosujemy podejście polegające na poszukiwaniu rozwiązań w dziedzinie czasu. Rozwiązania te będą sformułowane za pomocą aparatu matematycznego teorii procesów stochastycznych.

W rozdziale 5.3 przedstawiono oryginalny, stochastyczny model silnego, porywistego wiatru, złożony z przepływu o stałej prędkości średniej, na który nakładają się okresowe porywy o dowolnym przebiegu czasowym oraz losowe fluktuacje wysokoczęstościowe (turbulencje). Działanie wiatru opisano zatem niestacjonarnym procesem stochastycznym o zmiennej w czasie wartości oczekiwanej. Rozdział 5.4 zawiera sformułowanie metody analizy stochastycznej drgań mostu. Przedstawiono rozwiązania w zakresie teorii korelacyjnej, służące probabilistycznej ocenie drgań konstrukcji. Pole ciśnienia wiatru podzielono na segmenty wzdłuż rozpiętości mostu, uwzględniając przestrzenną korelację turbulencji. Rozważono dwa przypadki szczególne, różniące się sposobem modelowania losowych fluktuacji prędkości wiatru. W pierwszym przypadku przyjęto, że turbulencje są modelowane procesem gaussowskim o stałej

korelacji, w drugim przypadku do opisu korelacji zastosowano model w postaci procesu typu „biały szum”.

Przedstawione rozważania stanowią wstęp do dalszych prac badawczych w dziedzinie aerodynamiki mostów wiszących. W przyszłych badaniach przewiduje się uściślenie modelu obciążenia silnym porywistym wiatrem. Model ten opracowano pomijając obciążenia aerodynamiczne wywołanych ruchem konstrukcji (siły samowzbudne). Siły te pominięto celowo, aby przedstawić zasadniczy schemat rozwiązania w sposób klarowny. Algorytm może być łatwo uzupełniony o pominięte siły aerodynamiczne, ogólną ideę postępowania omówiono w rozdziale 5.6, który stanowi podsumowanie zaprezentowanych rozwiązań i zawiera omówienie możliwości rozwinięcia przedstawionej teorii na przypadki ogólniejsze.

## 5.2. Obciążenia aerodynamiczne mostów

Powszechnie stosowany model zmiennego wiatru składa się z przepływu o prędkości średniej  $E[U(t)] = \bar{U}$ , na który nakładają się chwilowe fluktuacje prędkości, czyli turbulencje. Przyjmuje się, że prędkość wiatru, działającego na dany punkt konstrukcji, ma trzy składowe w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach

$$\begin{aligned} U(t) &= \bar{U} + u(t), \\ V(t) &= v(t), \\ W(t) &= w(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

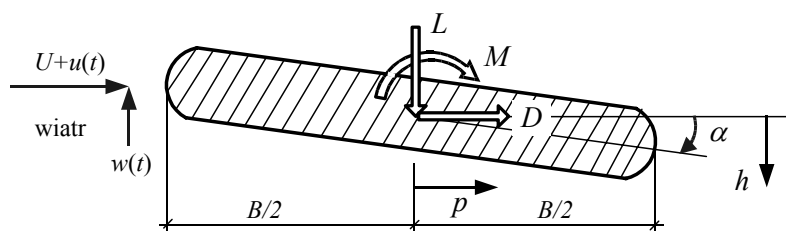
Funkcje  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  opisują trzy składowe turbulencji wiatru. Praktycznie największe znaczenie ma składowa turbulencji  $u(t)$ , o kierunku zgodnym z kierunkiem przepływu powietrza (Gimsing [59]).

Przyjmijmy na chwilę, że konstrukcja ma małe rozmiary, a jej ruch jest opisany jedną współrzędną  $q(t)$ . Całkowite obciążenie aerodynamiczne jest wypadkową ciśnienia wiatru, zmodyfikowaną przez współczynnik oporu aerodynamicznego  $C_D$ , zależny od kształtu konstrukcji:  $F(t) = C_D A \rho [\bar{U} + u(t) - \dot{q}(t)]^2 / 2$ .  $A$  jest powierzchnią konstrukcji, prostopadłą do kierunku wiatru,  $\rho$  oznacza gęstość powietrza. Ciśnienie wiatru obliczono tu na podstawie względnej prędkości  $U(t) - \dot{q}(t)$ , mierzonej względem konstrukcji poruszającej się z prędkością  $\dot{q}(t)$  – Dyrbye i Hansen [54]. Zwykle przyjmuje się uproszczenie:  $[\bar{U} + u - \dot{q}]^2 \cong \bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{q}$ , polegające na pominięciu składnika  $(u - \dot{q})^2$ , jako małej wyższego rzędu. Wówczas całkowite obciążenie konstrukcji można rozdzielić na trzy składniki:

$$F = F_m + F_b + F_{se}, \quad (5.2)$$

$$F_m = \frac{1}{2} C_D A \rho \bar{U}^2, \quad F_b = \frac{1}{2} C_D A \rho 2 \bar{U} u, \quad F_{se} = -\frac{1}{2} C_D A \rho 2 \bar{U} \dot{q}, \quad (5.3)$$

które opisują średnie obciążenie wiatrem  $F_m$  („mean load”), obciążenie wynikające z turbulencji  $F_b$  („buffeting load”) i obciążenie siłami samowzбудnymi  $F_{se}$  („self-excited load”), zależnymi od ruchu konstrukcji.



Rys. 5.2. Konfiguracja obciążeń aerodynamicznych w przekroju poprzecznym dźwigara usztywniającego

Fig. 5.2. Aerodynamic loads in a cross-section of stiffening girder

Obciążenia aerodynamiczne działające na dźwigar usztywniający mostu wiszącego można podobnie rozdzielić na trzy grupy, przy czym oczywiście problem znacznie się komplikuje. Oprócz sił działających w kierunku wiatru pojawiają się siły dodatkowe, wynikające z ssania i parcia wiatru, działające na górną i dolną powierzchnię dźwigara. Przyjmuje się, że obciążenia aerodynamiczne są opisane przez trzy składowe: poziomą siłę  $D$  działającą zgodnie z kierunkiem wiatru („drag force”), pionową siłę unoszącą  $L$  („lift force”) i moment odchylający  $M$  („pitching moment”). Siły te, mierzone na jednostkę długości dźwigara, są wynikiem redukcji obciążeń aerodynamicznych do środka ścinania przekroju dźwigara [54, 105]. Na rysunku 5.2 przedstawiono konfigurację obciążeń aerodynamicznych w przekroju poprzecznym mostu, wraz ze składowymi opisującymi stan przemieszczenia przekroju. Składowe przemieszczenia przekroju  $x_i$ , położonego w  $i$ -tym przęśle mostu, oznaczono tu nowymi symbolami  $h = w_i(x_i, t)$ ,  $p = v_i(x_i, t)$ ,  $\alpha = \varphi_i(x_i, t)$ , aby dostosować się do ogólnie przyjętych w literaturze definicji. Przedstawione na rysunku zwroty sił, składowych prędkości wiatru i przemieszczeń należy uważać za dodatnie. Przyjęta reguła znakowania składowych stanu przemieszczenia i obciążenia jest zgodna z ogólną regułą stosowaną w całej rozprawie, jest także zgodna z notacją stosowaną obecnie w literaturze (Matsumoto i inni [43, 44], Cobo del Arco, Aparicio [46]). We wcześniejszych opracowaniach, traktujących na ogół rozłącznie problem „buffetingu” i flutteru, dodatnia siła pionowa (unosząca) ma zwykle zwrot skierowany w górę, zgodnie z fizycznym od-

działywaniami wiatru. W aktualnie używanej notacji za nadrzędny uważa się zwrot pionowej siły samowzbudnej, zgodny ze zwrotem pionowego przemieszczenia przekroju.

Każdą składową obciążenia aerodynamicznego można rozdzielić na trzy składniki, analogiczne do (5.2):

$$\begin{aligned} D &= D_m + D_b + D_{se}, \\ L &= L_m + L_b + L_{se}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$M = M_m + M_b + M_{se}.$$

Średnie (statyczne) obciążenie wiatrem w przekroju  $x_i$  wynosi (Simiu i Scanlan [105])

$$D_m(x_i) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B C_D(\alpha), \quad (5.5)$$

$$L_m(x_i) = -\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B C_L(\alpha), \quad (5.6)$$

$$M_m(x_i) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 C_M(\alpha), \quad (5.7)$$

gdzie  $\alpha$  jest kątem natarcia wiatru i równocześnie obrotem przekroju,  $B$  jest szerokością przekroju dźwigara (rys. 5.2). Funkcje  $C_D(\alpha)$ ,  $C_L(\alpha)$  i  $C_M(\alpha)$  oznaczają współczynniki oporu aerodynamicznego, zależne od kąta natarcia wiatru i kształtu dźwigara.

W zagadnieniu drgań wywołanych wzbudzeniem turbulentnym przyjmuje się ustalone wartości współczynników aerodynamicznych  $C_D = C_D(\alpha_0)$ ,  $C_L = C_L(\alpha_0)$ ,  $C_M = C_M(\alpha_0)$ , określone przez średni kąt natarcia wiatru  $\alpha_0$ , obliczony w zagadnieniu statycznym. Obciążenie wynikające z turbulencji wiatru zapisuje się wzorami o następującej postaci (Chen, Matsumoto, Kareem [44]):

$$D_b(x_i, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left( 2C_D \chi_{Du} \frac{u(x_i, t)}{\bar{U}} + C'_D \chi_{Dw} \frac{w(x_i, t)}{\bar{U}} \right), \quad (5.8)$$

$$L_b(x_i, t) = -\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left( 2C_L \chi_{Lu} \frac{u(x_i, t)}{\bar{U}} + (C'_L + C_D) \chi_{Lw} \frac{w(x_i, t)}{\bar{U}} \right), \quad (5.9)$$

$$M_b(x_i, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 \left( 2C_M \chi_{Mu} \frac{u(x_i, t)}{\bar{U}} + C'_M \chi_{Mw} \frac{w(x_i, t)}{\bar{U}} \right), \quad (5.10)$$

gdzie:

$$C'_D = \left. \frac{dC_D}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad C'_L = \left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad C'_M = \left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}.$$

Funkcje  $\chi_{Du}$ ,  $\chi_{Dw}$ ,  $\chi_{Lu}$ ,  $\chi_{Lw}$ ,  $\chi_{Mu}$ ,  $\chi_{Mw}$ , nazywane admitancjami aerodynamicznymi, są funkcjami przeniesienia prędkości fluktuacyjnych wiatru na siły aerodynamiczne. Do opisu admitancji najczęściej stosuje się funkcje Theodorsena lub funkcje Searsa [54, 105]. Postać tych funkcji zależy od częstości pulsacji wiatru i kształtu przekroju poprzecznego dźwigara. W rozwiązaniach wyznaczanych w dziedzinie czasu funkcje admitancji, zależne w sposób dyskretny od częstości, przekształca się do postaci funkcji ciągłych za pomocą tzw. aproksymacji Rogersa (rozwiniecie w szereg według specjalnie dobranych funkcji wymiernych zmiennej zespolonej). Następnie korzystając z odwrotnej transformacji Laplace'a uzyskuje się funkcje określone w dziedzinie czasu, metodą zaproponowaną na przykład przez autorów pracy [44]. Mnożenie współczynników aerodynamicznych  $C_D$ ,  $C_L$ ,  $C_M$  przez funkcje admitancji jest przybliżonym sposobem opisu ich zależności od częstości pulsacyjnych wiatru.

W praktyce obliczeniowej często stosuje się tzw. teorię quasi-ustaloną, w której zakłada się, że wartości współczynników aerodynamicznych nie zależą od częstości. Wówczas do wyznaczenia sił aerodynamicznych wynikających z turbulencji wiatru są stosowane formuły uproszczone, w których funkcje admitancji aerodynamicznej są równe jedności. W analizie drgań konstrukcji wywołanych wzbudzeniem turbulentnym średnie obciążenie wiatrem i obciążenie turbulencjami występuje łącznie. Łączne formuły, według teorii quasi-ustalonej, mają następującą postać (Boonyapinyo i in. [17], Simiu i Scanlan [105]):

$$D_m + D_b = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left[ C_D \left( 1 + 2 \frac{u(x_i, t)}{\bar{U}} \right) + C'_D \frac{w(x_i, t)}{\bar{U}} \right], \quad (5.11)$$

$$L_m + L_b = -\frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left[ C_L \left( 1 + 2 \frac{u(x_i, t)}{\bar{U}} \right) + (C'_L + C_D) \frac{w(x_i, t)}{\bar{U}} \right], \quad (5.12)$$

$$M_m + M_b = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 \left[ C_M \left( 1 + 2 \frac{u(x_i, t)}{\bar{U}} \right) + C'_M \frac{w(x_i, t)}{\bar{U}} \right]. \quad (5.13)$$

Przejdźmy teraz do określenia obciążeń aerodynamicznych wynikających z ruchu konstrukcji. Definicje sił samowzbudnych są powszechnie formułowane przy założeniu, że ruch konstrukcji jest harmoniczny o częstości kołowej  $\omega$  oraz że przepływ powietrza jest laminarny, z ustaloną prędkością (tzn. pomija się fluktuacje prędkości wiatru). Definicje te są określone następującymi formułami (Cobo del Arco, Aparicio [46], Simiu i Scanlan [105]):

$$D_{se}(x_i, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left[ KP_1^* \frac{\dot{p}}{\bar{U}} + KP_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{\bar{U}} + K^2 P_3^* \alpha + K^2 P_4^* \frac{p}{B} + KP_5^* \frac{\dot{h}}{\bar{U}} + K^2 P_6^* \frac{h}{B} \right], \quad (5.14)$$

$$L_{se}(x_i, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B \left[ KH_1^* \frac{\dot{h}}{\bar{U}} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{\bar{U}} + K^2 H_3^* \alpha + K^2 H_4^* \frac{h}{B} + KH_5^* \frac{\dot{p}}{\bar{U}} + K^2 H_6^* \frac{p}{B} \right], \quad (5.15)$$

$$M_{se}(x_i, t) = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 B^2 \left[ KA_1^* \frac{\dot{h}}{\bar{U}} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{\bar{U}} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{h}{B} + KA_5^* \frac{\dot{p}}{\bar{U}} + K^2 A_6^* \frac{p}{B} \right]. \quad (5.16)$$

Współczynniki  $P_i^*$ ,  $H_i^*$ ,  $A_i^*$  ( $i = 1-6$ ) są bezwymiarowymi funkcjami częstości zredukowanej  $K = \omega B / \bar{U}$  i zależą od konfiguracji geometrycznej przekroju dźwigara. Noszą nazwę pochodnych aerodynamicznych lub pochodnych flatterowych („flutter derivatives”). Wyznacza się je doświadczalnie, na podstawie badań modelowych w tunelu aerodynamicznym.

Siły samowzbudne zależą w skomplikowany sposób od przemieszczeń i prędkości ruchu konstrukcji. Składniki zależne od przemieszczeń opisują siły aerosprężyste, składniki zależne od prędkości – siły tłumienia aerodynamicznego. Przeniesienie tych składników na lewą stronę równań ruchu konstrukcji powoduje modyfikację reakcji sprężystych układu i sił oporów ruchu (tłumienia). Zwykle tę procedurę wykonuje się po dekompozycji modalnej. Otrzymuje się ponownie sprzężone równania ruchu tzw. „konstrukcji w wietrze”, którą charakteryzują nowe częstości własne i formy własne oraz nowe parametry modalne tłumienia. Jeśli jakikolwiek parametr tłumienia modalnego jest ujemny, to ruch konstrukcji jest niestabilny i mamy do czynienia ze zjawiskiem flatteru (Boonyapinyo i in. [17]). Prędkości krytyczne flatteru odpowiadają tłumieniu zerowemu – wtedy energia wprowadzona do układu przez siły samowzbudne jest równa energii rozpraszanej dzięki własnościom tłumiącym konstrukcji. Praktyczne znaczenie ma najmniejsza z prędkości krytycznych flatteru.

Powyższy opis jest bardzo pogładowy, dotyczy problemu tzw. flatteru wielomodalnego, który jest w ogólnym przypadku trudny do rozwiązania. Każdej prędkości wiatru odpowiadają inne wartości pochodnych flatterowych, które z kolei zależą od nieznannej częstości zredukowanej, a równocześnie – poprzez siły aerosprężyste – modyfikują sztywność konstrukcji „w wietrze”, decydując o jej częstościach i kształcie form własnych. To powoduje konieczność szukania rozwiązania dla każdej prędkości wiatru za pomocą skomplikowanej procedury iteracyjnej, której nie można w pełni zautomatyzować [43]. Zagadnienie flatteru rozwiązuje się często w sposób uproszczony, sprowadzając korektę równań ruchu zapisanych w postaci modalnej do poprawek wyłącznie diagonalnych. Zaniedbanie sprzężeń między formami, spowodowanych

siłami samowzbudnymi, umożliwia niezależną analizę zagadnienia flatteru jednomodalnego, dla kolejnych form drgań („mode-by-mode approach”, [105]).

Klasyczne rozwiązania problemu niestateczności flatterowej mostów wiszących formułuje się na podstawie analizy dwóch niezależnych postaci drgań swobodnych – jedna jest formą pionową czysto-giętną, w drugiej występują wyłącznie drgania skrętne. Tego typu podejście jest opisane szczegółowo w monografii Dyrbye i Hansena [54]. Rozpatruje się trzy przypadki szczególne. Pierwsze dwa przypadki otrzymuje się przez pominięcie sprzężeń w definicjach sił samowzbudnych (5.15) i (5.16), co jest równoznaczne z przyjęciem, że  $H_2^* = 0$ ,  $H_3^* = 0$ ,  $A_1^* = 0$ ,  $A_4^* = 0$ . Pominięcie sprzężeń prowadzi do dwóch niezależnych zadań typu flatter jednomodalny. Pierwsze zadanie opisuje problem drgań czysto-giętnych, drugie – problem drgań czysto-skrętnych. Warunkiem pojawienia się niestateczności aerodynamicznej jest ujemne tłumienie aerodynamiczne. W przypadku pionowych drgań typowych mostów wiszących, tłumienie aerodynamiczne jest zwykle dodatnie (pochodna aerodynamiczna  $H_1^*$  jest ujemna), zatem zjawisko niestateczności nie występuje. W przypadku drgań czysto-skrętnych, tłumienie aerodynamiczne zależy od pochodnej aerodynamicznej  $A_2^*$ . W niektórych mostach wiszących z dźwigarami usztywniającymi o przekroju otwartym, współczynnik  $A_2^*$  zmienia znak z ujemnego na dodatni, wraz ze wzrostem prędkości zredukowanej wiatru. Wówczas tłumienie aerodynamiczne staje się ujemne i może osiągnąć wartość krytyczną, równą tłumieniu mechanicznemu. Z tego warunku wyznacza się krytyczną prędkość wiatru, powyżej której występują niestateczne drgania czysto-skrętne typu flatter.

Uwzględnienie sprzężeń aerodynamicznych automatycznie powoduje sprzężenie pionowych i skrętnych drgań konstrukcji, co odpowiada trzeciemu przypadkowi szczególnemu, który w literaturze nosi nazwę „flatteru klasycznego” [105]. Siły aerospężyste, opisane pochodnymi aerodynamicznymi  $H_4^*$  i  $A_3^*$ , powodują sukcesywnie – ze wzrostem prędkości wiatru – zwiększenie sztywności giętnej i zmniejszenie sztywności skrętnej. Skutkiem jest zmniejszanie się różnicy między częstością drgań giętnych i drgań skrętnych konstrukcji „w wietrze”. Drgania typu flatter pojawiają się przy takiej prędkości wiatru, dla której częstości te osiągną tę samą wartość. Wobec tego ryzyko wystąpienia flatteru jest większe dla mostów, w których częstość drgań skrętnych jest niewiele większa od częstości drgań pionowych. Prędkość krytyczną flatteru klasycznego wyznacza się na podstawie porównania energii przekazywanej konstrukcji przez strumień powietrza z energią rozpraszaną w cyklu drgań [54].

W ostatnich latach pojawiły się prace, w których autorzy formułują metody rozwiązania ogólnego przypadku flatteru wielomodalnego, z uwzględnieniem sprzężeń aerodynamicznych (np. [17, 43, 44]). Wspólną cechą tych metod jest przekształcenie funkcji (5.14)–(5.16), które opisują siły samowzbudne w dziedzinie częstości, na funkcje zależne od czasu. W tym celu pochodne flatterowe zależne od częstości rozwija się w szereg według zasad aproksymacji Rogersa lub aproksymacji Karpela [17], podobnie jak wcześniej wspomniane funkcje admitancji. Takie rozwiązanie zagadnie-



nia flutteru wielomodalnego ma charakter ogólny – obejmuje różne przypadki niestaczejności aerodynamicznej, takie jak flutter skrętny i klasyczny przypadek flutteru giętno-skrętnego (Boonyapinyo i in. [17]). Transformację sił samowzbudnych do postaci funkcji zależnych od czasu stosuje się obecnie do kompleksowego sformułowania obciążeń aerodynamicznych w dziedzinie czasu. To podejście umożliwia wyznaczanie przebiegów i ocenę drgań konstrukcji, wywołanych działaniem silnego wiatru z turbulencjami, z uwzględnieniem sił aerodynamicznych.

### 5.3. Niestacjonarny model stochastyczny obciążenia mostu porywistym wiatrem

W klasycznym modelu zmiennego wiatru zakłada się, że strumień wiatru o prędkości chwilowej  $U(t)$  składa się z przepływu o stałej prędkości średniej  $\bar{U}$  i chwilowych fluktuacji  $u(t)$ . Fluktuacje prędkości wiatru mają charakter losowy i są opisane stacjonarnym procesem gaussowskim o zerowej wartości średniej. Podstawową charakterystyką procesu jest gęstość widmowa, określona w dziedzinie częstotliwości, nazywana widmem wiatru. Funkcje gęstości widmowej prędkości pulsacyjnych wiatru są określone przybliżonymi wzorami empirycznymi, sformułowanymi na podstawie analiz wyników pomiarów. Najczęściej stosowane funkcje gęstości widmowej wiatru – funkcje spektralne Karmana, Davenporta, Harrisa i Kaimala – są opisane w monografii Dyrbye i Hansena [54]. Szczegółowy opis funkcji spektralnej Davenporta oraz widma opracowanego przez Van der Hovena można znaleźć też w polskiej monografii, napisanej przez Żurańskiego [126].

Funkcje spektralne obejmują zakres częstotliwości, który odpowiada pulsacjom o okresach od 1 sekundy do 5 minut, ale są tak sformułowane, że z najlepszą dokładnością reprezentują zakres częstotliwości wokół szczytu widma wiatru. Szczyt widma (największa energia pulsacji wiatru) odpowiada porywom krótkookresowym, które trwają od kilkunastu do kilkudziesięciu sekund, czyli występują z częstotliwością 0,05–0,01 Hz. Przyjmuje się, że w tym zakresie częstotliwości porywistość wiatru jest spowodowana głównie nierównościami terenu, tzn. mechanicznym oddziaływaniem podłoża. Te chwilowe, krótkookresowe zmiany prędkości i kierunku wiatru są nazywane turbulencjami. Skala turbulencji w kierunku przepływu,  $u(t)/U(t)$ , rzadko przekracza 0,2 (Simiu i Scanlan [105]). Fluktuacje prędkości wiatru w płaszczyźnie prostopadłej do przepływu są znacznie mniejsze. Jak podaje Żurański [126], powołując się na prace Harrisa, intensywność turbulencji poprzecznych jest około trzykrotnie mniejsza od intensywności turbulencji zgodnych z kierunkiem wiatru.

Powszechnie stosowane funkcje spektralne (Kaimala, Davenporta) nie opisują z dostateczną dokładnością widma wiatru w zakresie niskich częstości, które odpowiadają porywom o dłuższych okresach, od około 2 do 5 minut – Dyrbye i Hansen [54]. Według Simiu i Scanlana [105], porywy długookresowe mają znacznie większą skalę niż porywy krótkookresowe, zatem mogą powodować istotne zmiany pola ci-

śnienia wiatru. Uwzględnienie tych zmian jest praktycznie niemożliwe przy obowiązującym założeniu o stacjonarności procesu opisującego zmienną prędkość wiatru i przy zastosowaniu metody widmowej do opisu charakterystyk tego procesu.

W niniejszej rozprawie sformułujemy niestacjonarny model porywistego wiatru, który uwzględni naturalne porywy długookresowe i opisuje je w dziedzinie czasu. Podstawą modelu jest założenie, że zmienny składnik prędkości wiatru  $u(t)$  jest sumą losowych turbulencji  $\hat{u}(t)$  i zmiennej w czasie wartości oczekiwanej  $\bar{u}(t)$ , opisującej porywy będące dłużej trwającymi zmianami prędkości. Zmienną w czasie prędkość wiatru wyrazimy zatem wzorem o postaci

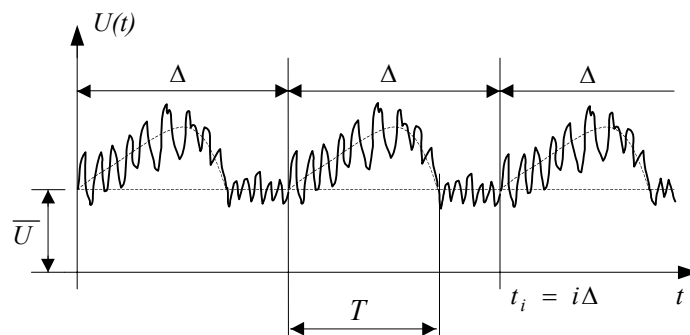
$$U(t) = \bar{U} + u(t) = \bar{U} + \bar{u}(t) + \hat{u}(t). \quad (5.17)$$

Przyjęto, że turbulencje  $\hat{u}(t)$  są opisane procesem stacjonarnym o zerowej wartości oczekiwanej i znanej funkcji korelacyjnej, a zależna od czasu wartość średnia  $\bar{u}(t)$  jest okresową serią porywów, opisaną za pomocą wzorów

$$\bar{u}(t) = \sum_{i=0}^r \lambda \bar{U} P_T(t - t_i), \quad (5.18)$$

$$P_T(t - t_i) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t < t_i \text{ lub } t > t_i + T \\ P(t - t_i) & \text{gdy } t_i \leq t \leq t_i + T \end{cases},$$

w których  $t_i = i\Delta$ ,  $r\Delta \leq t < (r+1)\Delta$ . Liczba porywów tworzących serię jest ograniczona i wynosi  $r$ .  $T$  oznacza czas trwania porywu, którego kształt opisuje deterministyczna funkcja  $P(t - t_i)$  o dowolnym ciągłym przebiegu. Porywy pojawiają się w stałych odstępach czasowych  $\Delta \geq T$ , które mogą być większe od czasu trwania porywu  $T$ . Skalę porywu opisuje parametr  $\lambda = \max_t[\bar{u}(t)]/\bar{U}$ . Opisana prędkość wiatru stanowi niestacjonarny proces stochastyczny o okresowo zmiennej w czasie wartości oczekiwanej. Przykładową realizacją procesu przedstawiono na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Przykładowa realizacja procesu losowego opisującego prędkość wiatru  
Fig. 5.3. Statistical sample of a random process describing wind speed

Rozważania ograniczymy do analizy drgań wywołanych działaniem zmiennego wiatru, z pominięciem sił samowzbudnych. Należy jednak zauważyć, że uwzględnienie tych sił w ogólnym schemacie algorytmu jest możliwe. Problem ten będzie omówiony w rozdziale 5.6. W rozważaniach zastosujemy uproszczenia, które są powszechnie przyjmowane w symulacji losowego obciążenia wiatrem mostów o dużych rozpiętościach. Założymy, podobnie jak w pracy Cao, Xiang i Zhou [41], że wpływ turbulencji poprzecznych do kierunku wiatru  $v(t)$ ,  $w(t)$  jest pomijalnie mały. Całkowitą rozpiętość mostu podzielimy na segmenty i przyjmujemy, że intensywności obciążeń aerodynamicznych są stałe w obrębie segmentu.

Losowe turbulencje prędkości wiatru  $\hat{u}_j(t)$  w poszczególnych segmentach mostu są opisane procesami stacjonarnymi tego samego typu (np. gaussowskie), o jednakowym spektrum, czyli o takiej samej funkcji korelacyjnej  $K_{\hat{u}_j\hat{u}_j}(t_1, t_2) = K_{\hat{u}}(\tau)$ , gdzie  $\tau = t_1 - t_2$ . Są to procesy skorelowane – wzajemne korelacje procesów  $\hat{u}_j(t)$  opisują przestrzenną korelację turbulencji, która maleje wzdłuż rozpiętości mostu.

Podział mostu i obciążenia wiatrem na segmenty prowadzi do opisu losowego pola turbulencji za pomocą układu stacjonarnych procesów stochastycznych o zerowych wartościach oczekiwanych (wektor stochastyczny). Do analizy zagadnienia w dziedzinie czasu są potrzebne funkcje opisujące wzajemne korelacje procesów składowych. Można je wyznaczyć korzystając ze znanych zależności między funkcjami wzajemnych kowariancji i gęstości widmowych [45, 108, 116]

$$C_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (5.19)$$

Funkcje wzajemnych gęstości widmowych („cross-spectral densities”) oznaczono tu symbolem  $S_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\omega)$ , zgodnie z notacją powszechnie używaną w inżynierii wiatrowej.

W przypadku procesów o zerowej wartości oczekiwanej, wzajemne kowariancje  $C_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\tau)$  są równe korelacjom wzajemnym  $K_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\tau)$ . Autokorelacje  $K_{\hat{u}_j\hat{u}_j}(\tau) = K_{\hat{u}}(\tau)$  należy tu obliczyć na podstawie danego spektrum wiatru  $S_{\hat{u}_j\hat{u}_j}(\omega) = S(\omega)$ , stosując na przykład widmo Kaimala, zdefiniowane wzorem

$$\frac{nS(n)}{U_*^2} = \frac{200f}{(1 + 50f)^{5/3}}, \quad (5.20)$$

gdzie  $n = \omega / 2\pi$ ,  $f = nz / \bar{U}(z)$ ,  $U_* = K\bar{U}(z) / \ln(z / z_0)$ ,  $K = 4$ .  $\bar{U}(z) = \bar{U}$  jest średnią prędkością wiatru na poziomie dźwigara mostu (na wysokości  $z$ ),  $z_0$  oznacza parametr chropowatości podłoża [41]. Korelacje wzajemne  $K_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\tau)$  wynikają z gę-

stości wzajemnych, które można wyznaczyć uwzględniając przestrzenną korelację turbulencji, według wzoru podanego przez Cao, Xiang i Zhou [41], o postaci

$$S_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(\omega) = \sqrt{S_{\hat{u}_j \hat{u}_j}(\omega) S_{\hat{u}_k \hat{u}_k}(\omega)} \text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = S(\omega) \text{coh}(\delta_{jk}, \omega). \quad (5.21)$$

Symbol  $\text{coh}(\delta_{jk}, \omega)$  oznacza funkcję koherencji między punktami  $x_j$ ,  $x_k$ , odległymi o  $\delta_{jk} = |x_j - x_k|$ . W rozważanym zagadnieniu przyjmujemy, że  $x_j = x_j^c$ ,  $x_k = x_k^c$  są współrzędnymi mierzonymi wzdłuż rozpiętości mostu, które określają położenie centralnych punktów w segmentach dźwigara o numerach  $j$ ,  $k$ . Funkcję koherencji można wyznaczyć w sposób przybliżony, na podstawie modelu Davenporta

$$\text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = \exp\left(-\frac{\lambda \omega \delta_{jk}}{2\pi \bar{U}(z)}\right), \quad (5.22)$$

w którym zakłada się eksponencjalny tryb zanikania korelacji, zależny od bezwymiarowego parametru  $\lambda$ , przy czym zazwyczaj przyjmuje się, że  $\lambda = 7-10$  [41].

Przejdźmy teraz do sformułowania obciążeń aerodynamicznych działających na wybrany segment mostu. Rozważmy najpierw siły aerodynamiczne działające wzdłuż kierunku wiatru na pewną hipotetyczną konstrukcję o małych rozmiarach. Sumaryczne parcie wiatru na powierzchnię o polu  $A$  wynosi

$$F_D(t) = \frac{1}{2} \rho U^2(t) A C_D(\alpha) = \frac{1}{2} \rho A C_D(\alpha) \left[ (\bar{U} + \bar{u}(t))^2 + 2[(\bar{U} + \bar{u}(t))\hat{u}(t) + [\hat{u}(t)]^2] \right]. \quad (5.23)$$

Składnik  $[\hat{u}(t)]^2$  pominiemy jako mały wobec pozostałych składników wyrażenia (5.23) i zapiszemy tę formułę w następującej postaci:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho [\bar{U} + \bar{u}(t)]^2 A \left[ C_D \left( 1 + 2 \frac{\hat{u}}{\bar{U} + \bar{u}} \right) \right]. \quad (5.24)$$

Porównanie struktury wzoru (5.24) z wyrażeniami (5.11)–(5.13) umożliwia sformułowanie postaci obciążeń aerodynamicznych działających na dźwigar usztywniający mostu wiszącego. Według założeń teorii quasi-ustalonej, składowe obciążeń sprowadzone do środka ścinania przekroju dźwigara są w rozważanym przypadku określone wzorami:

$$D(x_i, t) = \frac{1}{2} \rho [\bar{U} + \bar{u}(x_i, t)]^2 B \left[ C_D \left( 1 + 2 \frac{\hat{u}(x_i, t)}{\bar{U} + \bar{u}(x_i, t)} \right) \right], \quad (5.25)$$

$$L(x_i, t) = -\frac{1}{2} \rho [\bar{U} + \bar{u}(x_i, t)]^2 B \left[ C_L \left( 1 + 2 \frac{\hat{u}(x_i, t)}{\bar{U} + \bar{u}(x_i, t)} \right) \right], \quad (5.26)$$

$$M(x_i, t) = \frac{1}{2} \rho [\bar{U} + \bar{u}(x_i, t)]^2 B^2 \left[ C_M \left( 1 + 2 \frac{\hat{u}(x_i, t)}{\bar{U} + \bar{u}(x_i, t)} \right) \right]. \quad (5.27)$$

Są to obciążenia mierzone na jednostkę długości, dotyczą przekroju  $x_i$ , położonego w  $i$ -tym przęśle mostu. Współczynniki aerodynamiczne są określone przez średni kąt natarcia wiatru  $\alpha_0$ :  $C_D = C_D(\alpha_0)$ ,  $C_L = C_L(\alpha_0)$ ,  $C_M = C_M(\alpha_0)$ .

Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami przyjmujemy dalej, że prędkość wiatru działającego na wybrany segment mostu o numerze  $j$ , położony w przęśle  $i$ , nie zależy od zmiennej geometrycznej  $x_i$ , zatem  $\bar{u}(x_i, t) = \bar{u}(t)$  i  $\hat{u}(x_i, t) = \hat{u}_j(t)$ . Założono tu dodatkowo, że rozkład przestrzenny okresowych porywów o długim czasie trwania, opisanych zmienną w czasie wartością średnią  $\bar{u}(t)$ , jest stały wzdłuż całej rozpiętości mostu. Obciążenia aerodynamiczne segmentu są równomiernie rozłożone i wynoszą:

$$D_j^s(t) = \rho B C_D f_j(t), \quad (5.28)$$

$$L_j^s(t) = -\rho B C_L f_j(t), \quad (5.29)$$

$$M_j^s(t) = \rho B^2 C_M f_j(t), \quad (5.30)$$

gdzie

$$f_j(t) = \bar{f}(t) + \hat{f}_j(t) = \frac{1}{2} [\bar{U} + \bar{u}(t)]^2 + [\bar{U} + \bar{u}(t)] \hat{u}_j(t). \quad (5.31)$$

Postaci wzorów (5.28)–(5.30) wynikają bezpośrednio z relacji (5.25)–(5.27), przy czym sposób zapisu dostosowano do wymogów dalszej analizy, w której będzie wykorzystywany aparat matematyczny z zakresu procesów stochastycznych. W szczególności rozdzielono funkcję losową opisującą zależność obciążeń aerodynamicznych od czasu na składnik  $\bar{f}(t)$  odpowiadający zmiennej w czasie wartości oczekiwanej i losową fluktuację  $\hat{f}_j(t)$  o zerowej wartości oczekiwanej.

#### 5.4. Algorytm analizy korelacyjnej losowych drgań mostu obciążonego porywistym wiatrem

Przestrzenne drgania mostu są opisane macierzowym równaniem ruchu (2.64) lub (2.92). Są to równania nieliniowe. W dalszym ciągu założymy, że wpływy nieliniowo-

ści geometrycznej związanej ze zmianą kształtu cięgien są pomijalnie małe i rozważania ograniczymy do analizy drgań liniowych. Konsekwencją tego założenia jest pominięcie w równaniu ruchu wektora nieliniowych reakcji sprężystych układu  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q})$ . Wektor wzbudzenia  $\mathbf{F}(t)$  jest określony ogólnymi wzorami (2.65).

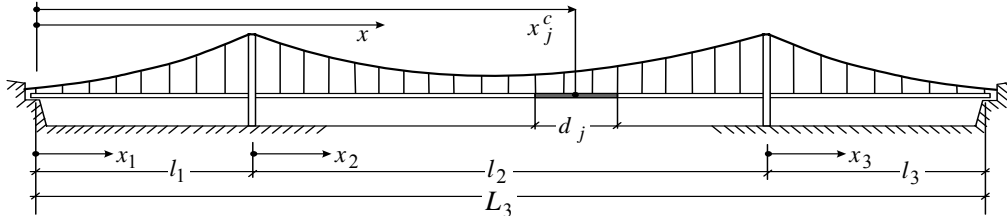
Rozważymy najpierw obciążenie aerodynamiczne jednego segmentu mostu. Składowe obciążenia przęśla  $i$  wynoszą:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{z_i}(x_i, t) &= L_j^s(t)h_j(x_i), \\ \mathbf{q}_{y_i}(x_i, t) &= D_j^s(t)h_j(x_i), \\ \mathbf{m}_{x_i}(x_i, t) &= M_j^s(t)h_j(x_i), \end{aligned} \quad (5.32)$$

gdzie

$$h_j(x_i) = \mathfrak{I}[x_i + L_{i-1} - (x_j^c - 0,5d_j)] - \mathfrak{I}[x_i + L_{i-1} - (x_j^c + 0,5d_j)], \quad (5.33)$$

oraz  $x_i = x - L_{i-1}$ ,  $L_i = \sum_{k=1}^i l_k$ ,  $L_0 = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Symbol  $\mathfrak{I}(x)$  oznacza funkcję jednostkową Heaviside'a, za pomocą której opisano odcinek obciążenia związany z segmentem  $j$  o długości  $d_j$  (rys. 5.4).



Rys. 5.4. Lokalizacja segmentu obciążenia wiatrem

Fig. 5.4. Location of a wind load segment

Po podstawieniu wzoru (5.32) do (2.65) otrzymujemy:

$$\mathbf{F}_{wi} = \int_0^{l_i} \mathbf{q}_{z_i} \mathbf{s}_i dx_i = L_j^s(t) \int_{a_j}^{b_j} \mathbf{s}_i(x_i) dx_i = -\rho B C_L f_j(t) l_i \mathbf{d}^{-1} [\mathbf{c}_i(a_j) - \mathbf{c}_i(b_j)], \quad (5.34)$$

$$\mathbf{F}_{vi} = \int_0^{l_i} \mathbf{q}_{y_i} \mathbf{s}_i dx_i = D_j^s(t) \int_{a_j}^{b_j} \mathbf{s}_i(x_i) dx_i = \rho B C_D f_j(t) l_i \mathbf{d}^{-1} [\mathbf{c}_i(a_j) - \mathbf{c}_i(b_j)], \quad (5.35)$$

$$\mathbf{F}_{\varphi i} = \frac{1}{e} \int_0^{l_i} m_{xi} \mathbf{s}_i dx_i = M_j^s(t) \frac{1}{e} \int_{a_j}^{b_j} \mathbf{s}_i(x_i) dx_i = \rho B^2 C_M f_j(t) \frac{l_i}{e} \mathbf{d}^{-1} [\mathbf{c}_i(a_j) - \mathbf{c}_i(b_j)], \quad (5.36)$$

gdy  $L_{i-1} < x_j^c < L_i$ . Jeśli rozważany segment obciążenia znajduje się poza przęsłem  $i$ , to wektory (5.34)–(5.36) są zerowe. Granice całkowania w powyższych wzorach wynoszą:  $a_j = (x_j^c - 0,5d_j) - L_{i-1}$ ,  $b_j = (x_j^c + 0,5d_j) - L_{i-1}$ . Pozostałe oznaczenia są zgodne z notacją zastosowaną w rozdziale 2.5:

$$\mathbf{d} = \text{diag}(\pi, 2\pi, \dots, n_b \pi), \quad \mathbf{c}_i(x_i) = [\cos \pi \xi_i, \cos 2\pi \xi_i, \dots, \cos n_b \pi \xi_i]^T, \quad \xi_i = x_i / l_i.$$

Z analizy wzorów (5.34)–(5.36) wynika, że wektor wzbudzenia odpowiadający jednemu segmentowi obciążenia aerodynamicznego można przedstawić w postaci iloczynu wektora liczbowego  $\mathbf{F}_j^s$  i losowej funkcji  $f_j(t)$ . Całkowite obciążenie mostu jest sumą obciążeń poszczególnych segmentów  $j = 1, \dots, n_s$ , zatem łączny wektor wzbudzenia ma postać

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{j=1}^{n_s} \mathbf{F}_j^s f_j(t). \quad (5.37)$$

Oznaczmy symbolem  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(x_i, t)$  funkcję losową opisującą poszukiwaną odpowiedź konstrukcji na działanie obciążenia aerodynamicznego (siłę wewnętrzną w przekroju  $x_i$ , przemieszczenie lub naprężenie w dowolnym punkcie przekroju). Korzystając z zasady superpozycji, można wyznaczyć całkowitą odpowiedź konstrukcji sumując odpowiedzi na wymuszenia składowe

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=1}^{n_s} \mathbf{R}_j(t). \quad (5.38)$$

Losowe wymuszenie  $f_j(t)$  jest całkowaną funkcją czasu, zatem odpowiedź układu  $\mathbf{R}_j(t)$  może być obliczona poprzez sumowanie po czasie rozwiązań odpowiadających różniczkowym impulsom  $f_j(\tau) d\tau$ , według wzoru

$$\mathbf{R}_j(t) = \int_0^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) f_j(\tau) d\tau. \quad (5.39)$$

Funkcja  $\mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau)$  oznacza tu odpowiedź konstrukcji  $\mathbf{R}_j(t)$  na impuls jednostkowy działający w chwili  $\tau$ . Jest to funkcja analogiczna do impulsowej funkcji przejścia, którą operuje się w teorii układów o jednym dynamicznym stopniu swobody [75, 116]. Wyznacza się ją numerycznie, na podstawie rozwiązania równania ruchu przy

zerowych warunkach początkowych, przy czym wektor wzbudzenia ma postać  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_j^s \cdot \delta(t - \tau)$ , gdzie  $\delta$  oznacza funkcję Diraca.

Funkcję losową  $\mathbf{R}_j(t)$  można rozdzielić na składnik odpowiadający zmiennej w czasie wartości oczekiwanej i składnik opisujący losową fluktuację o zerowej wartości oczekiwanej. Po podstawieniu zależności (5.31) do (5.39) otrzymujemy

$$\mathbf{R}_j(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) \bar{f}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) \hat{f}_j(\tau) d\tau = \bar{\mathbf{R}}_j(t) + \hat{\mathbf{R}}_j(t), \quad (5.40)$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{R}}_j(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) [\bar{U} + \bar{u}(\tau)]^2 d\tau, \quad (5.41)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_j(t) = \int_0^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) [\bar{U} + \bar{u}(\tau)] \hat{u}_j(\tau) d\tau. \quad (5.42)$$

Zsumowanie rozwiązań (5.40) według relacji (5.38) prowadzi do wyniku o następującej postaci:

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{j=1}^{n_s} \bar{\mathbf{R}}_j(t) + \sum_{j=1}^{n_s} \hat{\mathbf{R}}_j(t). \quad (5.43)$$

Przejdźmy teraz do analizy korelacyjnej drgań konstrukcji opisanych niestacjonarnym procesem stochastycznym (5.43). Po podstawieniu relacji (5.18) do (5.41) i wykonaniu stosownych obliczeń, wartość oczekiwana procesu drgań wynosi

$$\begin{aligned} E[\mathbf{R}(t)] &= \sum_{j=1}^{n_s} \bar{\mathbf{R}}_j(t) = \\ &= \frac{1}{2} \bar{U}^2 \sum_{j=1}^{n_s} \left( \int_0^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) d\tau + \sum_{i=0}^{v-1} \int_{t_i}^{t_i+T} \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) P(\tau - t_i) [2\lambda + \lambda^2 P(\tau - t_i)] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_v}^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t - \tau) P(\tau - t_v) [2\lambda + \lambda^2 P(\tau - t_v)] d\tau \right), \quad (5.44) \end{aligned}$$

jeśli  $v\Delta \leq t \leq v\Delta + T$  oraz



$$\begin{aligned}
E[\mathbf{R}(t)] &= \sum_{j=1}^{n_s} \overline{\hat{\mathbf{R}}}_j(t) = \\
&= \frac{1}{2} \overline{U}^2 \sum_{j=1}^{n_s} \left( \int_0^t \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t-\tau) d\tau + \sum_{i=0}^v \int_{t_i}^{t_i+T} \mathbf{H}_{\mathbf{R}_j}(t-\tau) P(\tau-t_i) [2\lambda + \lambda^2 P(\tau-t_i)] d\tau \right), \quad (5.45)
\end{aligned}$$

jeśli  $v\Delta + T < t < (v+1)\Delta$ , przy czym  $v$  oznacza tu liczbę porywów wiatru, zarejestrowanych do chwili  $t$ . W obliczeniach wykorzystano fakt, że wartości oczekiwane losowych fluktuacji  $\hat{\mathbf{R}}_j(t)$  są zerowe, co wynika ze wzoru (5.42). Wymieniona własność funkcji  $\hat{\mathbf{R}}_j(t)$  ułatwia obliczenie funkcji kowariancyjnej procesu (5.43), która w rozważanym przypadku spełnia relację

$$\begin{aligned}
C_{\mathbf{R}\mathbf{R}}(t_1, t_2) &= E[\mathbf{R}(t_1)\mathbf{R}(t_2)] - E[\mathbf{R}(t_1)]E[\mathbf{R}(t_2)] = \\
&= E \left[ \sum_{j=1}^{n_s} \hat{\mathbf{R}}_j(t_1) \cdot \sum_{k=1}^{n_s} \hat{\mathbf{R}}_k(t_2) \right] = \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} E[\hat{\mathbf{R}}_j(t_1)\hat{\mathbf{R}}_k(t_2)]. \quad (5.46)
\end{aligned}$$

Funkcja kowariancji procesu drgań mostu jest tu sumą wzajemnych korelacji  $K_{\hat{\mathbf{R}}_j\hat{\mathbf{R}}_k}(t_1, t_2) = E[\hat{\mathbf{R}}_j(t_1)\hat{\mathbf{R}}_k(t_2)]$ , które tworzą macierz korelacyjną wektora stochastycznego o wymiarze  $n_s$ , złożonego z procesów  $\hat{\mathbf{R}}_j(t)$ . Po uwzględnieniu zależności (5.18) i (5.42) funkcja wzajemnej korelacji przybiera postać

$$\begin{aligned}
K_{\mathbf{R}_j\mathbf{R}_k}(t_1, t_2) &= \overline{U}^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \mathbf{H}_{jk}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) K_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&+ \lambda \overline{U}^2 \sum_{i_2=0}^{v_2-1} \int_{t_{i_2}}^{t_{i_2}+T} \int_0^{t_1} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j\hat{u}_k} P(\tau_2 - t_{i_2}) d\tau_1 d\tau_2 + \lambda \overline{U}^2 \int_{t_{v_2}}^{t_2} \int_0^{t_1} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j\hat{u}_k} P(\tau_2 - t_{v_2}) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&+ \lambda \overline{U}^2 \sum_{i_1=0}^{v_1-1} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1}+T} \int_0^{t_2} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j\hat{u}_k} P(\tau_1 - t_{i_1}) d\tau_2 d\tau_1 + \lambda \overline{U}^2 \int_{t_{v_1}}^{t_1} \int_0^{t_2} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j\hat{u}_k} P(\tau_1 - t_{v_1}) d\tau_2 d\tau_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda^2 \bar{U}^2 \sum_{i_1=0}^{v_1-1} \sum_{i_2=0}^{v_2-1} \int_{t_{i_2}}^{t_{i_2}+T} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1}+T} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j \hat{u}_k} P(\tau_1 - t_{i_1}) P(\tau_2 - t_{i_2}) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \lambda^2 \bar{U}^2 \sum_{i_2=0}^{v_2-1} \int_{t_{i_2}}^{t_{i_2}+T} \int_{t_{v_1}}^{t_1} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j \hat{u}_k} P(\tau_2 - t_{i_2}) P(\tau_1 - t_{v_1}) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \lambda^2 \bar{U}^2 \sum_{i_1=0}^{v_1-1} \int_{t_{i_1}}^{t_{i_1}+T} \int_{t_{v_2}}^{t_2} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j \hat{u}_k} P(\tau_1 - t_{i_1}) P(\tau_2 - t_{v_2}) d\tau_2 d\tau_1 + \\
& + \lambda^2 \bar{U}^2 \int_{t_{v_2}}^{t_2} \int_{t_{v_1}}^{t_1} \mathbf{H}_{jk} K_{\hat{u}_j \hat{u}_k} P(\tau_1 - t_{v_1}) P(\tau_2 - t_{v_2}) d\tau_1 d\tau_2 \Big), \quad (5.47)
\end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{H}_{jk} = \mathbf{H}_{jk}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) = \mathbf{H}_{Rj}(t_1 - \tau_1) \mathbf{H}_{Rk}(t_2 - \tau_2)$ ,  $K_{\hat{u}_j \hat{u}_k} = K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(\tau_1, \tau_2)$  oraz  $v_1 \Delta \leq t_1 \leq v_1 \Delta + T$ ,  $v_2 \Delta \leq t_2 \leq v_2 \Delta + T$ .

Jeśli  $v_1 \Delta + T < t_1 < (v_1 + 1) \Delta$  lub  $v_2 \Delta + T < t_2 < (v_2 + 1) \Delta$ , to w wyrażeniu (5.47)

wszystkie całki typu  $\int_{t_{v_1}}^{t_1} d\tau_1$  lub  $\int_{t_{v_2}}^{t_2} d\tau_2$  są równe zeru, a górna granica sumowania wy-

nosi odpowiednio  $v_1$  lub  $v_2$ , zamiast  $v_1 - 1$ ,  $v_2 - 1$ .

Do obliczenia całek występujących w formule (5.47) musi być zastosowana metoda numeryczna, ponieważ funkcje przejścia  $\mathbf{H}_{Rj}(t - \tau)$  nie mają postaci analitycznej. Mogą być wyznaczone jedynie numerycznie, w dyskretnym zbiorze punktów czasowych, który wynika z kroku numerycznego całkowania równania ruchu konstrukcji. W tym samym zbiorze punktów czasowych należy obliczyć rzędne funkcji korelacyjnych  $K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}$ , określonych wzorami (5.19)–(5.22).

Istotne znaczenie praktyczne ma wariancja procesu drgań  $\sigma_{\mathbf{R}}^2 = C_{\mathbf{RR}}(t, t)$ , którą można obliczyć na podstawie wzorów (5.46) i (5.47), przyjmując  $t_1 = t_2 = t$  oraz  $v_1 = v_2 = v$ . Wyznaczenie wariancji w opisany sposób jest dość trudne do realizacji numerycznej. W związku z tym dalej przedstawimy metodę uproszczoną, która może służyć do wstępnego oszacowania wariancji. Rozpatrzmy dwa przypadki szczególne, w których założymy dwie krańcowe idealizacje matematyczne procesu opisującego turbulencje wiatru. Dzięki tej idealizacji obliczenie wariancji można znacznie uprościć, sprowadzając całki podwójne zawarte w formule (5.47) do całek pojedynczych.

W rozdziale 5.3 przyjęto, że losowe turbulencje prędkości wiatru  $\hat{u}_j(t)$  w poszczególnych segmentach mostu są opisane stacjonarnymi procesami stochastycznymi tego samego typu, o takiej samej funkcji autokorelacji  $K_{\hat{u}_j \hat{u}_j}(\tau_1, \tau_2) = K_{\hat{u}}(\tau_2 - \tau_1)$ .

Założy my, że jest to proces stacjonarny o rozkładzie gaussowskim i stałej funkcji korelacyjnej, określonej wzorem  $K_{\hat{u}}(\tau_2 - \tau_1) = \sigma_{\hat{u}}^2$ , gdzie  $\sigma_{\hat{u}}^2 = K_{\hat{u}}(0)$  jest wariancją procesu, obliczoną dla danego spektrum wiatru (5.20) według wzoru (5.19), przy założeniu, że  $\tau = \tau_2 - \tau_1 = 0$ . Wówczas korelacje wzajemne procesów  $\hat{u}_j(t)$  i  $\hat{u}_k(t)$  nie zależą od czasu i maleją eksponencjalnie wzdłuż rozpiętości mostu, co wynika z relacji (5.21) i (5.22). Przyjmiemy zatem, że

$$K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(\tau_1, \tau_2) = \alpha_{jk} \sigma_{\hat{u}}^2, \quad (5.48)$$

gdzie

$$\alpha_{jk} = \frac{\int_0^{\infty} S(\omega) \text{Coh}(\delta_{jk}, \omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S(\omega) d\omega}. \quad (5.49)$$

Spektrum  $S(\omega)$  i funkcja koherencji  $\text{coh}(\delta_{jk}, \omega)$  są dane wzorami (5.20) i (5.22). W przypadku  $j = k$  otrzymuje się  $\alpha_{jk} = 1$  (autokorelacja), ponieważ  $\text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = 1$ , gdy  $\delta_{jk} = |x_j - x_k| = 0$ . Po podstawieniu wzoru (5.48) do (5.47) i uwzględnieniu, że  $t_1 = t_2 = t$  oraz  $v_1 = v_2 = v$ , wyznaczmy wariancję drgań mostu, która jest określona relacją:

$$\sigma_R^2(t) = \bar{U}^2 \sigma_{\hat{u}}^2 \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \alpha_{jk} (\mathbf{h}_j(t) \mathbf{h}_k(t) + \lambda \mathbf{h}_j(t) \mathbf{g}_k(t) + \lambda \mathbf{h}_k(t) \mathbf{g}_j(t) + \lambda^2 \mathbf{g}_j(t) \mathbf{g}_k(t)). \quad (5.50)$$

Funkcje  $\mathbf{h}_l(t)$  i  $\mathbf{g}_l(t)$ ,  $l = j, k$  są opisane wzorami:

$$\mathbf{h}_l(t) = \int_0^t \mathbf{H}_{Rl}(t - \tau) d\tau, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{g}_l(t) = \sum_{i=1}^{v-1} \int_{t_i}^{t_i+T} \mathbf{H}_{Rl}(t - \tau) P(\tau - t_i) d\tau + \int_{t_v}^t \mathbf{H}_{Rl}(t - \tau) P(\tau - t_v) d\tau, \quad (5.52)$$

jeżeli  $v\Delta \leq t \leq v\Delta + T$  oraz

$$\mathbf{g}_l(t) = \sum_{i=1}^v \int_{t_i}^{t_i+T} \mathbf{H}_{Rl}(t - \tau) P(\tau - t_i) d\tau, \quad (5.53)$$

jeżeli  $v\Delta + T < t < (v+1)\Delta$ .

W drugim wariancie rozwiązania założymy, że losowe turbulencje  $\hat{u}_j(t)$  są opisane stacjonarnymi procesami stochastycznymi o rozkładzie normalnym i funkcji autokorelacji w postaci białego szumu:  $K_{\hat{u}_j\hat{u}_j}(\tau_1, \tau_2) = K_{\hat{u}}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_{\hat{u}}^2 \cdot \delta(\tau_2 - \tau_1)$ . Analogicznie jak poprzednio przyjmiemy, że korelacje wzajemne procesów maleją wzdłuż rozpiętości mostu i są określone wzorem

$$K_{\hat{u}_j\hat{u}_k}(\tau_1, \tau_2) = \alpha_{jk} \sigma_{\hat{u}}^2 \cdot \delta(\tau_2 - \tau_1). \quad (5.54)$$

W tym przypadku wariancja aerodynamicznej odpowiedzi mostu wynosi

$$\sigma_R^2(t) = \bar{U}^2 \sigma_{\hat{u}}^2 \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \alpha_{jk} \left( \mathbf{h}_{jk}(t) + 2\lambda \mathbf{g}_{jk}(t) + \lambda^2 \mathbf{f}_{jk}(t) \right), \quad (5.55)$$

gdzie:

$$\mathbf{h}_{jk}(t) = \int_0^t \mathbf{H}_{R_j}(t-\tau) \mathbf{H}_{R_k}(t-\tau) d\tau, \quad (5.56)$$

$$\mathbf{g}_{jk}(t) = \sum_{i=1}^{v-1} \int_{t_i}^{t_i+T} \mathbf{H}_{R_j}(t-\tau) \mathbf{H}_{R_k}(t-\tau) P(\tau-t_i) d\tau + \int_{t_v}^t \mathbf{H}_{R_j}(t-\tau) \mathbf{H}_{R_k}(t-\tau) P(\tau-t_v) d\tau, \quad (5.57)$$

$$\mathbf{f}_{jk}(t) = \sum_{i=1}^{v-1} \int_{t_i}^{t_i+T} \mathbf{H}_{R_j}(t-\tau) \mathbf{H}_{R_k}(t-\tau) P^2(\tau-t_i) d\tau + \int_{t_v}^t \mathbf{H}_{R_j}(t-\tau) \mathbf{H}_{R_k}(t-\tau) P^2(\tau-t_v) d\tau, \quad (5.58)$$

gdy  $v\Delta \leq t \leq v\Delta + T$ . Jeżeli  $v\Delta + T < t < (v+1)\Delta$ , to wzory (5.57) i (5.58) należy zmodyfikować, zastępując w znakach sum górną granicę  $v-1$  przez  $v$  oraz przyjmując równe zero całki o dolnej granicy  $t_v$ .

Sformułowane rozwiązania obejmują przypadek drgań wymuszonych wiatrem opisanym w sposób klasyczny – przez średnią prędkość i gaussowskie turbulencje, wówczas  $U(t) = \bar{U} + \hat{u}(t)$ , co odpowiada założeniu, że  $\lambda = 0$ . Odpowiedź konstrukcji w stanie ustalonym jest wówczas stacjonarnym procesem Gaussa o następującej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$E[\mathbf{R}(\infty)] = \sum_{j=1}^{n_s} \bar{\mathbf{R}}_j(\infty) = \frac{1}{2} \bar{U}^2 \sum_{j=1}^{n_s} \left( \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{R_j}(\theta) d\theta \right), \quad (5.59)$$

$$\sigma_{\mathbf{R}}^2(\infty) = \bar{U}^2 \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_x} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}j}(\theta_1) \mathbf{H}_{\mathbf{R}k}(\theta_2) K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(\theta_1 - \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \quad (5.60)$$

Jeśli założymy jak poprzednio, że korelacje wzajemne turbulencji są dane wzorem (5.48), to na podstawie (5.50) wariancja odpowiedzi mostu w stanie ustalonym wynosi

$$\sigma_{\mathbf{R}}^2(\infty) = \bar{U}^2 \sigma_{\hat{u}}^2 \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_x} \alpha_{jk} \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}j}(\theta) d\theta \cdot \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}k}(\theta) d\theta. \quad (5.61)$$

Jeżeli natomiast założymy, że proces turbulencji jest opisany relacją (5.54), to w stanie ustalonym otrzymamy

$$\sigma_{\mathbf{R}}^2(\infty) = \bar{U}^2 \sigma_{\hat{u}}^2 \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_x} \alpha_{jk} \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\mathbf{R}j}(\theta) \mathbf{H}_{\mathbf{R}k}(\theta) d\theta. \quad (5.62)$$

## 5.5. Przykład obliczeniowy

Sformułowany w rozdziale 5.4 algorytm analizy korelacyjnej drgań spowodowanych porywistym wiatrem może być podstawą obszernych badań numerycznych. Badania te będą przedmiotem przyszłych prac autorki. W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione wyłącznie wyniki pierwszych testów obliczeniowych, które ilustrują charakter losowej odpowiedzi mostu na działanie obciążenia w postaci niestacjonarnego procesu stochastycznego o okresowo zmiennej w czasie wartości oczekiwanej. Są to wyniki badań opublikowanych przez autorkę w pracach [20, 21], w których analizowano jedynie poziomą składową obciążenia wiatrem i przyjęto uproszczenie, że parcie wiatru jest jednakowe na całej powierzchni bocznej dźwigara usztywniającego. Siła poprzecznego poziomego parcia wiatru działającego na belkę usztywniającą mostu w przekroju  $x_i$  wynosi tu

$$D(t) = \rho h_b C_D \left( [\bar{U} + \bar{u}(t)]^2 / 2 + [\bar{U} + \bar{u}(t)] \hat{u}(t) \right). \quad (5.63)$$

Jest to wzór analogiczny do (5.28), ale obciążenie w przekroju  $x_i$  jest zebrane wzdłuż wysokości dźwigara  $h_b$ , według zaleceń Dyrbye i Hansena [54], zamiast z szerokości przekroju  $B$ , jak przyjęto we wzorze (5.28), zgodnie z powszechnie stosowaną definicją, podaną przez Simiu i Scanlana [105]. Ta różnica nie ma wpływu na cechy jakościowe rozwiązań. Założenie, że działanie wiatru jest jednakowe wzdłuż rozpiętości mostu jest z kolei równoznaczne z najprostszym modelowaniem obciążenia za pomocą jednego segmentu obejmującego całe przęsło.

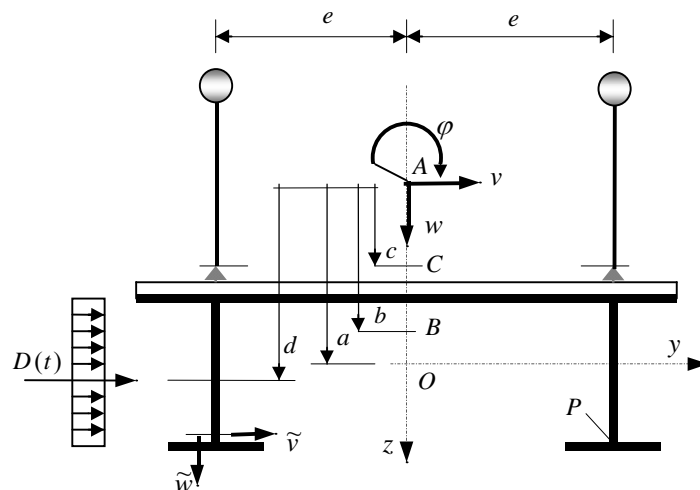
Przedmiotem testów jest hipotetyczny, jednoprzęsłowy most wiszący z pryzmatycznym, cienkościennym dźwigarem usztywniającym o otwartym przekroju monosymetrycznym, przedstawionym na rys. 5.5. Rozpiętość przęsła wynosi 300 m, strzałka zwisu cięgien jest równa 30 m. Szczegółowe parametry wymiarowe mostu można

znaleźć w innych pracach autorki, na przykład w pracy [18] lub [33]. Poziome, zmienne w czasie parcie wiatru powoduje poziome drgania giętne mostu, sprzężone z drganiami skrętnymi. Pionowe drgania giętne mostu są w przypadku pominięcia efektów nieliniowych niezależne i mogą być rozpatrywane oddzielnie. Początkowe cztery częstotliwości własne drgań giętno-skrętnych wynoszą: 0,3816 Hz, 0,3978 Hz, 0,5960 Hz, 0,802 Hz. Poziom tłumienia określono w odniesieniu do pierwszej formy własnej, przyjmując liczbę tłumienia  $\alpha = 0,015$ .

Założono, że wartość średnia fluktuacji prędkości wiatru (wzór (5.18)) jest okresową serią porywów, których kształt opisuje przykładowo dobrana funkcja o postaci

$$P(t - t_i) = [\sin(2\pi (t - t_i) / T - \pi/2) + 1] / 2, \quad t_i \leq t \leq t_i + T, \quad t_i = i\Delta. \quad (5.64)$$

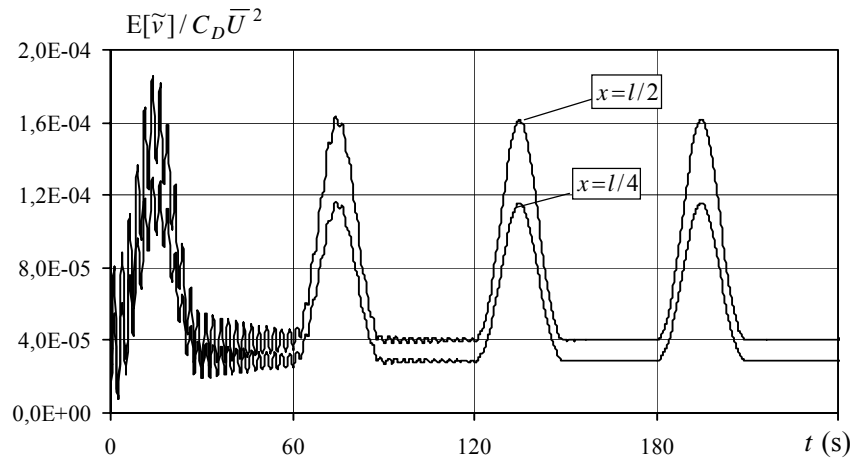
Prezentowane dalej wyniki obliczeń dotyczą poziomej składowej drgań punktu, który na rys. 5.5 oznaczono symbolem  $P$ . Na rysunkach 5.6 i 5.7 pokazano przebiegi czasowe wartości oczekiwanej  $E[\tilde{v}]$  i odchylenia standardowego  $D[\tilde{v}]$  drgań w przekroju środkowym mostu i w ćwiartce rozpiętości. Do obliczeń przyjęto:  $T = 30$  s,  $\Delta = 60$  s,  $\lambda = 1$ .



Rys. 5.5. Przekrój poprzeczny jednoprzęsłowego mostu wiszącego obciążonego poziomym parciem wiatru

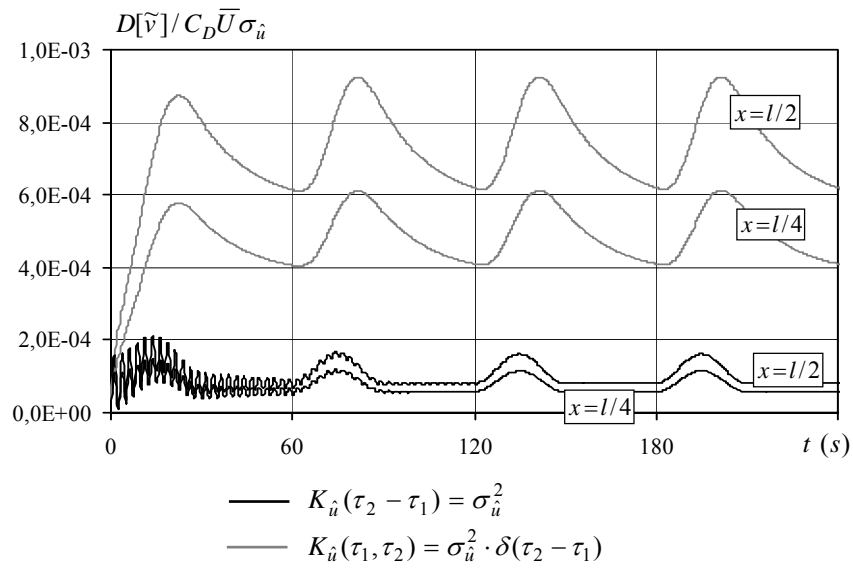
Fig. 5.5. Cross-section of the single-span suspension bridge loaded by horizontal wind pressure

W wyniku analizy wyników obliczeń stwierdzono, że charakterystyki drgań losowych zmierzają do cyklu ustalonego, zatem odpowiedź mostu w stanie ustalonym jest procesem okresowo-stacjonarnym (Gardner [57]). Odchylenia standardowe drgań mostu, obliczone przy założeniu  $K_{ii}(\tau_1, \tau_2) = \sigma_{ii}^2 \cdot \delta(\tau_2 - \tau_1)$ , są znacznie większe niż



Rys. 5.6. Zmienność w czasie wartości oczekiwanej poziomej składowej drgań mostu w ćwiartce i w połowie rozpiętości przęsła

Fig. 5.6. Time changeability of expected value for horizontal component of bridge vibration at a quarter and middle of the span

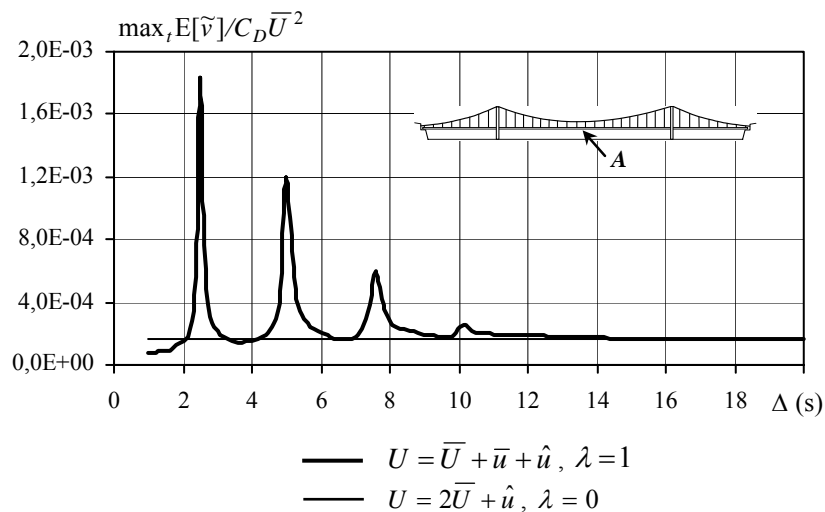


Rys. 5.7. Zmienność w czasie odchylenia standardowego poziomej składowej drgań mostu w ćwiartce i w połowie rozpiętości przęsła

Fig. 5.7. Time changeability of standard deviation for horizontal component of bridge vibration at a quarter and middle of the span

w przypadku założenia stałej korelacji  $K_{\hat{u}}(\tau_2 - \tau_1) = \sigma_{\hat{u}}^2$ . Modelowanie turbulencji za pomocą procesu o funkcji korelacyjnej typu „biały szum” jest idealizacją, która zakłada bardzo krótki czas korelacji. W drugim przypadku, gdy  $K_{\hat{u}}(\tau_2 - \tau_1) = \sigma_{\hat{u}}^2$ , korelacja nie zależy od czasu. Rozpatrywane dwa przypadki funkcji korelacyjnej  $K_{\hat{u}}(\tau_2 - \tau_1)$  stanowią dwie przeciwstawne idealizacje procesu turbulencji. Dokładniejsze przybliżenie procesu rzeczywistego można uzyskać za pomocą funkcji korelacyjnej wyznaczonej numerycznie według wzoru (5.19), na podstawie założonego widma prędkości wiatru (5.20). Można spodziewać się, że wyznaczone w ten sposób odchylenia standardowe drgań mostu będą miały wartości pośrednie względem rozwiązań przedstawionych na rys. 5.7.

Z praktycznego punktu widzenia istotne znaczenie mają maksymalne wartości wybrane z cyklu ustalonego. Na rysunkach 5.8 i 5.9 przedstawiono zależność maksymalnych wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych od okresu  $\Delta$  cyklicznej składowej prędkości wiatru. Rozwiązania te dotyczą drgań poziomych w środku rozpiętości przęsła. Wyznaczono je przy założeniu, że intensywność turbulencji wiatru wynosi  $I_{\hat{u}} = \sigma_{\hat{u}} / \bar{U} = 25\%$  oraz  $T = 0,5\Delta$ . Na obu rysunkach zaznaczono dodatkowo rozwiązanie odpowiadające założeniu  $\lambda = 0$ , w którym pomija się cykliczną składową wartości oczekiwanej prędkości wiatru. Rozwiązanie to obliczono dla podwojonej prędkości średniej  $\bar{U}$ , ponieważ  $\max_t[\bar{U} + \bar{u}(t)] = 2\bar{U}$ , gdy  $\lambda = 1$ .



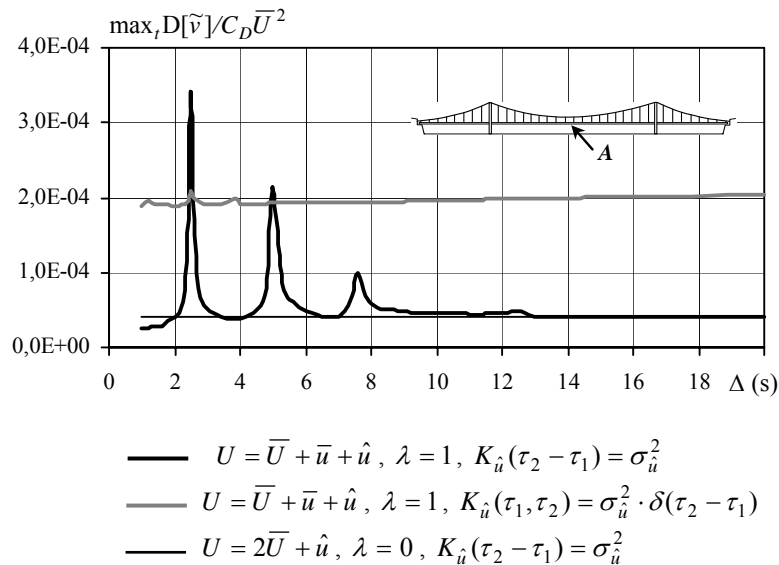
Rys. 5.8. Zależność maksymalnej wartości oczekiwanej, wybranej z cyklu ustalonego drgań poziomych, od okresu cyklicznej składowej prędkości wiatru

Fig. 5.8. Maximum in a steady cycle of expected value of horizontal vibrations versus a cycle time of periodical component of wind speed



Z przedstawionych rozwiązań wynikają następujące wnioski. Zauważalne na wykresach piki odpowiadają rezonansowym wzmocnieniom drgań, które w przypadku odchylenia standardowych ujawniają się przy założeniu stałej korelacji gaussowskiego procesu turbulencji. Jeśli idealizacją procesu turbulencji jest proces o korelacji typu „biały szum”, to odchylenie standardowe słabo zależy od okresu  $\Delta$ , jest prawie stałe. Piki rezonansowe są widoczne przy wysokich częstościach porywów ( $\Delta < 8$  s), które dla konstrukcji są częstościami początkowej strefy widma własnego. Największe wzmocnienie odpowiada rezonansowi z drugą częstością własną drgań giętno-skrętnych ( $\Delta = 2,5$  s), z którą związana jest pierwsza symetryczna postać drgań z dominacją poziomego ruchu mostu. Następne piki dotyczą wielokrotności okresu  $\Delta = 2,5$  s.

W rozważanym zakresie częstotliwości, od 1 Hz do 0,05 Hz, sformułowany model wiatru jest niestacjonarnym opisem turbulencji, który umożliwia wyznaczenie ekstremalnie niekorzystnego poziomu odpowiedzi konstrukcji. Z uwagi na bardzo małe tłumienie, poziom ekstremalny jest wielokrotnie większy od odpowiedzi konstrukcji, którą otrzymuje się przy klasycznym opisie wiatru ( $\lambda = 0$ ). Prawdopodobieństwo wystąpienia tak niekorzystnej dla konstrukcji sytuacji użytkowej jest bardzo małe, ale nie można go wykluczyć. Możliwość oszacowania ekstremalnie niekorzystnej odpowiedzi konstrukcji ma kluczowe znaczenie w projektowaniu konstrukcji i ocenie jej bezpieczeństwa. Sformułowany w pracy model wiatru i metoda wyznaczania charakterystyk losowej odpowiedzi mostu umożliwia takie oszacowanie.



Rys. 5.9. Zależność maksymalnego odchylenia standardowego, wybranego z cyklu ustalonego drgań poziomych, od okresu cyklicznej składowej prędkości wiatru

Fig. 5.9. Maximum in a steady cycle of standard deviation of horizontal vibrations versus a cycle time of periodical component of wind speed

## 5.6. Podsumowanie

Przedstawione w niniejszej pracy rozwiązanie problemu drgań mostów wiszących, poddanych działaniu wzbudzenia turbulentnego, może mieć różne zastosowania, w zależności od sposobu interpretacji przyjętego modelu wiatru. Ograniczenie cyklicznej serii porywów do jednego elementu (wzór (5.18)) umożliwia analizę niestacjonarnych drgań mostu, wywołanych działaniem wiatru o losowych turbulencjach i o dowolnie zmiennej w czasie prędkości średniej  $\bar{U} + \bar{u}(t) = \bar{U}[1 + \lambda P_T(t - t_0)]$ , opisaną funkcją  $P_T(t - t_0)$ , gdzie  $t_0$  jest początkową chwilą obserwacji procesu.

Pełny opis zmiennej prędkości wiatru, za pomocą okresowo zmiennej w czasie wartości średniej, pozwala z kolei uwzględnić porywy, które nie są wysokoczęstotliwymi turbulencjami, a więc porywy o długim czasie trwania i stosunkowo dużej skali. Tego typu fluktuacje prędkości wiatru występują rzadko, ale mogą powodować istotne zmiany w czasie charakterystyk losowej reakcji aerodynamicznej mostu. Uwzględnienie tych zmian jest niemożliwe przy zwykle obowiązującym założeniu o stacjonarności procesu opisującego prędkość wiatru.

Sformułowany w pracy niestacjonarny model porywistego wiatru można także wykorzystać do symulacji ekstremalnie niekorzystnych obciążeń aerodynamicznych. Można przyjąć, że losowe fluktuacje prędkości wiatru są rozłożone wokół cyklicznej wartości średniej o małym okresie, zbliżonym do okresu drgań własnych konstrukcji. Wówczas, mimo niewielkiej skali krótkookresowych zmian prędkości wiatru, może nastąpić rezonansowe wzmocnienie drgań konstrukcji, co powoduje zdecydowane zwiększenie poziomu jej wyężenia. Przedstawiona metoda analizy drgań losowych, dzięki zastosowaniu podejścia „w dziedzinie czasu”, umożliwia oszacowanie ekstremalnego stanu wyężenia mostu przy wzbudzeniu turbulentnym o charakterze rezonansowym. Należy tu przypomnieć, że częstości, które dla konstrukcji budowlanych są uważane za „niskie”, w opisie pulsacji prędkości wiatru stanowią górną strefę widma. W przypadku mostów wiszących o dużych rozpiętościach początkowa strefa widma częstości własnych na ogół obejmuje istotny zakres wysokich częstości pulsacji wiatru (od 0,05Hz do 0,5Hz), nie można zatem wykluczyć możliwości wystąpienia drgań rezonansowych.

Wprowadzenie składnika cyklicznego do opisu zmiennej prędkości wiatru ma dodatkową zaletę, ponieważ obciążenie aerodynamiczne można łatwo uzupełnić o składniki (5.14)–(5.16), które opisują siły samowzbudne. Formuły (5.14)–(5.16) są funkcjami częstości zredukowanej  $K = \omega B / \bar{U}$ , którą oblicza się na podstawie częstości drgań konstrukcji. W rozważanej sytuacji okresowego wymuszenia częstość drgań wynosi  $\omega = 2\pi / \Delta$ , gdzie  $\Delta$  jest okresem cyklicznej serii porywów wiatru. Jeśli okresową serię (5.18) tworzą porywy o dowolnym przebiegu, to formuły (5.14)–(5.16) są jedynie pewnym przybliżeniem, ponieważ definicje sił samowzbudnych dotyczą drgań harmonicznym o częstości  $\omega$ . Aby ściśle zastosować definicje sił samowzbudnych,

wystarczy przyjąć, przez odpowiednią deklarację funkcji  $P_T(t - t_i)$ , że okresowa seria porywów wiatru (5.18) tworzy funkcję harmonicznym zmienną w czasie. Poszczególne składniki formuł (5.14)–(5.16) są zależne od przemieszczeń i prędkości przemieszczeń konstrukcji. Po wykonaniu stosownych obliczeń i przeniesieniu na lewą stronę równania ruchu  $\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t)$ , składniki te uzupełniają reakcje sprężyste układu o siły aerosprężyste  $\mathbf{K}_{se}\mathbf{q}$  i powodują pojawienie się dodatkowych sił  $\mathbf{C}_{se}\dot{\mathbf{q}}(t)$ , opisujących tłumienie aerodynamiczne.

Na podstawie analiz teoretycznych i rezultatów obliczeń, omówionych w rozdziałach 5.3–5.5, można wytyczyć możliwe kierunki dalszych badań w zakresie aerodynamiki mostów wiszących. W dalszych badaniach należy przede wszystkim uwzględnić wpływ obciążeń aerodynamicznych wynikających z ruchu konstrukcji i następnie przeprowadzić gruntowną analizę numeryczną, testującą sformułowaną metodę analizy korelacyjnej drgań. Przedstawiony w rozdziale 5.5 przykład obliczeniowy ma charakter wstępny i zawiera liczne uproszczenia, które umożliwiły sparametryzowanie zadania i pominięcie konkretnych danych liczbowych, opisujących szczegółowo obciążenie aerodynamiczne. Właściwa analiza numeryczna powinna być poprzedzona badaniami studialnymi, których celem byłby dobór realnych parametrów obciążenia, związanych z konkretnym, rzeczywistym obiektem. Pokazane w rozdziale 5.5 wyniki obliczeń świadczą o tym, że sformułowana metoda wyznaczania charakterystyk losowej odpowiedzi mostu jest skuteczna. Wstępne badania numeryczne wykazały, że jest możliwe opracowanie pełnego algorytmu komputerowego, obejmującego wszystkie opcje, które zostały pominięte przy realizacji przykładu.

Jednym z kierunków dalszych badań może być także rozpoznanie możliwości uwzględnienia wpływu składowych turbulencji, prostopadłych do kierunku wiatru, które zostały pominięte w dotychczasowych rozwiązaniach teoretycznych. Zauważmy wstępnie, że jeśli rozważania będą, jak poprzednio, ograniczone do drgań liniowych, to korzystając z zasady superpozycji można uzupełnić rozwiązanie (5.38) analogicznym rozwiązaniem, dotyczącym wyselekcjonowanego wpływu turbulencji poprzecznych. Dokładniej mówiąc, należy wyodrębnić z formuł (5.11)–(5.13) składniki obciążeń aerodynamicznych, zależne od turbulencji prostopadłych do kierunku wiatru i następnie należy wyznaczyć odpowiedź konstrukcji, stosując procedurę podobną do procedury podstawowej. Tak zapisana, łączna odpowiedź konstrukcji może być podstawą dalszych obliczeń, prowadzących do wyznaczenia charakterystyk drgań losowych. W celu ułatwienia obliczeń można przyjąć, że procesy stochastyczne opisujące turbulencje podłużne i poprzeczne do kierunku wiatru są niezależne.

Na zakończenie trzeba zauważyć, że opracowany model stochastyczny wzbudzenia turbulentnego i algorytm analizy korelacyjnej drgań losowych mogą być zaadaptowane do analizy liniowych drgań innych obiektów mostowych, na przykład mostów wawitowych, przy czym metoda analizy drgań deterministycznych powinna być wtedy tak sformułowana, żeby istniała możliwość szybkiego, wielokrotnego wyznaczania odpowiedzi konstrukcji na działanie impulsu jednostkowego.

## 6. Zakończenie

### 6.1. Wnioski i uwagi końcowe

W rozprawie przedstawiono usystematyzowany szereg metod i algorytmów służących do analizy deterministycznych i stochastycznych drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących. Algorytmy analizy drgań stochastycznych mają tu charakter nadrzędny. Koncepcja algorytmu analizy drgań deterministycznych jest podporządkowana wymogom metod analizy stochastycznej, które w przedstawionym w rozprawie ujęciu polegają na wielokrotnym generowaniu rozwiązań deterministycznych w postaci dynamicznych funkcji wpływu oraz impulsowych funkcji przejścia, określonych dla układu dyskretnego. Efektywność wyznaczania tych rozwiązań uznano za podstawowe kryterium wyboru koncepcji analizy drgań deterministycznych. Sposób uszeregowania prezentowanych metod ma charakter „od szczegółu do ogółu” i w tej kolejności będą prezentowane końcowe wnioski i uwagi o charakterze szczegółowym. Ogólne podsumowanie rozprawy zostanie przedstawione w następnym punkcie tego rozdziału.

Jako pierwsze analizowano w pracy drgania deterministyczne. Istotą przyjętej koncepcji analizy jest zastosowanie podejścia analitycznego do opisu drgań konstrukcji. Sformułowano oryginalne równania różniczkowe opisujące w przestrzeni geometryczno-czasowej przestrzenne nieliniowe drgania przyjętego modelu mostów. Do rozwiązania równań zastosowano przybliżoną metodę Lagrange’a–Ritza. Tę koncepcję należy uznać za trafną, ponieważ umożliwiła sformułowanie szybkiego, skutecznego algorytmu, który okazał się wystarczająco efektywny w dalszych zastosowaniach, w zakresie analizy drgań stochastycznych. Algorytm analizy deterministycznej opracowano w dwóch wersjach, różniących się stopniem idealizacji założeń modelu obliczeniowego. W modelu zasadniczym uwzględniono poziome przemieszczenia cięgien w płaszczyźnie ich zawieszenia. Dzięki temu ta wersja algorytmu może być stosowana do analizy drgań mostów wiszących z cięgnami, które nie muszą spełniać warunku małego zwisu. W modelu uproszczonym przyjęto w opisie ruchu cięgna klasyczne założenie Kirchhoffa, ograniczające zakres zastosowań do mostów z cięgnami o małej strzałce zwisu. W obu wersjach algorytmu wykorzystano teorię dźwigarów

cienkościennych do opisu przestrzennych drgań podwieszanej konstrukcji mostu. Teoria obejmuje w jednolity sposób dźwigary o profilu otwartym i zamkniętym. Profile zamknięte mogą być jednokomorowe lub wielokomorowe, zamknięte całkowicie lub częściowo. W równaniach drgań mostu uwzględniono sprzężenia bezwładnościowe spowodowane zróżnicowaniem położenia środka masy przekroju sprężystego i przekroju dźwigara z balastem. Uwzględniono też poprawki drugiego rzędu o charakterze liniowym, wynikające z odrzucenia zasady zeszywnienia. Poprawki te stanowią opis matematyczny dwóch efektów – efektu wahadłowego drgań podwieszono dźwigara oraz efektu związanego z poziomym ruchem ciężna, który nie jest swobodny, jeśli ciężno współpracuje poprzez system wieszaków z dźwigarem usztywniającym mostu wiszącego. W rezultacie uzyskano algorytm, który uwzględnia specyficzne cechy mostów wiszących i może być stosowany do analizy drgań nowoczesnych mostów wiszących o typowych, najczęściej stosowanych schematach konstrukcyjnych, z dźwigarami usztywniającymi typu komorowego. W przypadku mostów z dźwigarami kratowymi można wyznaczyć przekrój zastępczy – komorowy, który będzie przybliżoną idealizacją przekroju właściwego. Opracowany algorytm jest przeznaczony do analizy drgań mostów wieloprzęsłowych, ale obejmuje też obecnie rzadko stosowane mosty jednoprzęsłowe, w tym mosty z dźwigarami o przekrojach otwartych.

Sformułowany algorytm zastosowano do analizy zagadnienia własnego i drgań wymuszonych przykładowego obiektu testowego. Obszerne badania numeryczne wykazały pełną skuteczność i dużą efektywność algorytmu. Porównanie wyników rozwiązania zagadnienia własnego z wynikami analizy modalnej, przeprowadzonej na podstawie pomiarów drgań rzeczywistej konstrukcji, potwierdziło słuszność założeń modelu obliczeniowego i stanowi dowód poprawności opracowanej teorii. Przedstawione wyniki badań numerycznych wykazały zasadność uściślenia modelu obliczeniowego konstrukcji, polegającego na uwzględnieniu poziomych przemieszczeń ciężen. Stwierdzono, że algorytm tak sformułowany daje dokładniejsze oszacowanie częstości własnych niż algorytm uproszczony, w którym pomija się poziome przemieszczenia ciężen. Wniosek ten dotyczy głównie drgań pionowych dźwigara usztywniającego, które w istotny sposób zależą od wpływu podwieszenia. Omawiane uściślenie modelu konstrukcji umożliwia dokładniejszy opis sprzężeń ruchu przęseł mostu. Sprzężenia te ujawniły się nie tylko w symetrycznych formach własnych – jak wynika z uproszczonej teorii drgań, ale również w formach antysymetrycznych. Stwierdzono, że sprzężenie ruchu przęseł w antysymetrycznych formach drgań jest wyraźnie widoczne przy dużych zwisach i przy małych zwisach ciężen. Stąd wynika wniosek, że zastosowanie hipotezy Kirchhoffa do analizy drgań wieloprzelotowych ciężen o małym zwisie, współpracujących z dźwigarem usztywniającym, powoduje częściowe pominięcie współpracy przęseł. Skutkiem jest zaniżona ocena zdolności konstrukcji do przenoszenia obciążeń dynamicznych i statycznych, co potwierdziły analizy dynamicznych i statycznych funkcji wpływu, obliczonych dla wybranych odpowiedzi mostu. Ten wniosek nie dyskwalifikuje podejścia uproszczonego, ponieważ

prowadzi ono do pewnego przewymiarowania konstrukcji na etapie jej projektowania, co z kolei jest korzystne z punktu widzenia bezpieczeństwa.

W rozprawie zwrócono szczególną uwagę na zagadnienie doboru modelu tłumienia. Opisano specyficzne cechy tłumienia drgań w mostach wiszących i rozważono kilka możliwych wariantów opisu tłumienia w równaniach ruchu konstrukcji, ograniczając opis do hipotezy tłumienia wiskotycznego. Wybrano wariant zdaniem autorki najlepszy. Podstawą wyboru była najpierw prognoza teoretyczna, bazująca na analizie zależności modalnych współczynników tłumienia od częstości, przy różnych częstościach podstawowych hipotetycznego układu dynamicznego. Następnie przedstawiono numeryczne rozwiązania problemu drgań przykładowego mostu, wymuszonych okresową serią ruchomych sił skupionych. Analizowano drgania konstrukcji w strefach rezonansowych, wyznaczone przy założeniu tłumienia masowego, Voigta–Kelvina, Rayleigha i przy założeniu tłumienia stałego. Porównanie tych rozwiązań z rozwiązaniami wyznaczonymi dla tłumienia rzeczywistego pozwoliło ocenić przydatność poszczególnych modeli tłumienia do analizy drgań rozważanych mostów. Tłumienie rzeczywiste zadeklarowano poprzez modalne współczynniki tłumienia, ustalone na podstawie pomiarów drgań badanego mostu. Stwierdzono, że dobrym przybliżeniem tłumienia rzeczywistego jest model tłumienia masowego. Pozostałe modele, w tym szczególnie model Voigta-Kelvina, prowadzą do znacznego zniżenia wartości pików rezonansowych i nie powinny być stosowane do analizy drgań mostów wiszących, w których tłumienie modalne maleje ze wzrostem częstości.

Druga część rozprawy dotyczy zagadnień dynamiki stochastycznej. Głównym przedmiotem rozważań są drgania wymuszone losowym ruchem drogowym. Analizowany jest swobodny ruch drogowy, nie są rozważane stany zatoru pojazdów, czy też obciążenia wyjątkowe, na przykład kolizjami drogowymi. Uwagę skoncentrowano na analizie momentowej procesów stacjonarnych opisujących drgania wymuszone konstrukcji w stanie ustalonym. Przedstawiono dwie, całkowicie odmienne metody wyznaczania charakterystyk momentowych. Pierwsza z nich jest przykładem podejścia analitycznego, w drugiej wykorzystano podejście symulacyjne.

W ramach podejścia analitycznego sformułowano stochastyczny model swobodnego ruchu drogowego oraz analityczno-numeryczną metodę obliczania charakterystyk drgań stochastycznych. Model ruchu drogowego jest adaptacją znanego w literaturze, poissonowskiego modelu zgłoszeń. Innowacją jest uogólnienie modelu jednopasmowego na wielopasmowy ruch dwukierunkowy. Przyjęto kluczowe założenie stwierdzające, że każdy pojazd może być idealizowany siłą skupioną o losowej wartości. Skutkiem jest pominięcie indywidualnych cech pojazdów (liczba osi, rozkład nacisków na osie), co można uznać za dopuszczalne, ponieważ w przypadku mostów o bardzo dużych rozpiętościach szczegółowe cechy pojazdów mają małe znaczenie. Skutkiem przyjętego założenia jest również pominięcie wpływu inercji i resorowania pojazdów. Zasadność tego uproszczenia potwierdziły eksperymenty symulacyjne.

W sformułowaniu metody obliczania charakterystyk drgań stochastycznych wykorzystano teorię procesów Poissona oraz dynamiczne funkcje wpływu odpowiedzi mostu. Przebiegi dynamicznych funkcji wpływu są wyznaczone w sposób numeryczny, ponieważ ścisłe analityczne wyznaczenie powyższych funkcji jest niemożliwe. Wyprowadzono formuły umożliwiające obliczanie kumulant podstawowych (wartości oczekiwane i wariancje) i kumulant wyższych rzędów. Formuły te dotyczą zarówno procesów drgań mostu, jak i procesów prędkości drgań, ale ich zastosowanie jest ograniczone wyłącznie do drgań liniowych. Sformułowaną metodę wyznaczania kumulant zastosowano do analizy stochastycznej drgań mostu Vincenta Thomasa. Analizowano wpływ prędkości ruchu pojazdów na wartości oczekiwane i odchylenia standardowe drgań głównego przęsła mostu i przęseł bocznych. Stwierdzono, że przy wybranych prędkościach pojazdów most wykazuje szczególną wrażliwość na dynamiczne oddziaływanie ruchu drogowego. Wykazano, że wyjątkowa wrażliwość przęseł bocznych jest w dużym stopniu wynikiem zastosowania uproszczonego modelu mostu, z obowiązującym założeniem Kirchhoffa. Zwiększenie dokładności modelowania, przez uwzględnienie wpływu poziomych przemieszczeń cięgien, powoduje w całym zakresie rozpatrywanych prędkości wyraźne zmniejszenie odchyleń standardowych przemieszczeń dynamicznych. Zbadano także możliwość aproksymowania efektów obciążenia ruchem drogowym w stanie ustalonym, przez stacjonarne procesy gaussowskie. Na podstawie analiz funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa i obliczonych wartości ekscesu stwierdzono, że aproksymacja procesami gaussowskimi jest dopuszczalna, przy czym najbardziej różnią się od gaussowskich procesy drgań w przekrojach położonych w ćwiartkach rozpiętości przęsła głównego. Realizacja przykładu numerycznego potwierdziła praktyczną przydatność metody analityczno-numerycznej do badań studialnych, które wymagają wielokrotnego wyznaczania charakterystyk losowej odpowiedzi mostu.

W rozprawie sformulowano drugą metodę wyznaczania charakterystyk momentowych, której idea polega na zastosowaniu zasad symulacji zjawisk losowych w ujęciu metod Monte Carlo i wykorzystaniu założenia o ergodyczności stacjonarnych procesów stochastycznych. Założenie to pozwala podczas wyznaczania charakterystyk procesu zastąpić uśrednianie po zbiorze realizacji – uśrednianiem po czasie. Metoda symulacyjna jest zdecydowanie mniej efektywna od poprzedniej i służy do wyznaczania tylko wartości oczekiwanych i wariancji procesów odpowiedzi mostu. Jej bezsporną zaletą jest natomiast możliwość modelowania ruchu drogowego z dużym stopniem szczegółowości oraz możliwość zastosowań do analizy drgań nieliniowych. Zasadniczym elementem metody jest opracowanie numerycznego generatora losowego ruchu drogowego. Przedstawiony w rozprawie generator umożliwia równoczesną symulację kilku niezależnych, losowych potoków pojazdów, poruszających się współbieżnie lub przeciwbieżnie po wydzielonych pasach ruchu. Symulowane potoki ruchu mogą zawierać pojazdy różnych typów, pojawiające się w losowych odstępach czasowych, z losowym załadunkiem. W modelowaniu pojazdów uwzględniono ich inercję, reso-

rowanie i wieloosiowość. Do generowania przebiegów drgań, towarzyszących realizacjom procesu obciążenia, zastosowano wcześniej sformułowany algorytm analizy drgań deterministycznych, po uprzednim przystosowaniu go do współpracy z generatorem ruchu drogowego. W efekcie uzyskano kolejny, oryginalny algorytm, przeznaczony do symulacji przestrzennych, liniowych lub nieliniowych drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących, obciążonych losowym ruchem drogowym. Mimo niewątpliwie dużej czasochłonności obliczeń, sposób sformułowania algorytmu umożliwia wyznaczanie długich realizacji procesów drgań, niezbędnych do obliczenia wartości oczekiwanych i wariancji w stanie ustalonym.

Metodę symulacyjną zastosowano do badania efektów nieliniowych, wynikających z deformacji cięgien spowodowanej obciążeniem użytkowym. Na podstawie analizy drgań przykładowego obiektu testowego stwierdzono, że przy przeciętnym obciążeniu średniointensywnym ruchem drogowym na czterech pasach ruchu wpływy nieliniowe powodują wyraźne zmniejszenie wartości odchyłeń standardowych, o około 10%. Wartości oczekiwane są praktycznie takie same w zagadnieniu liniowym i nieliniowym. Jedynie w przęsłach bocznych efekty nieliniowe powodują zwiększenie średniej odpowiedzi mostu, ale równocześnie istotnie maleje rozproszenie wokół wartości przeciętnej. Porównanie rozwiązań liniowych i nieliniowych towarzyszących tej samej realizacji procesu obciążenia umożliwiło ocenę wpływów nieliniowych w zagadnieniu drgań deterministycznych. Stwierdzono, że nie powodują one istotnych zmian jakościowych w przebiegach drgań, ale zaobserwowano wyraźne zmniejszenie poziomu oscylacji. W odpowiednim zagadnieniu statycznym różnice między rozwiązaniem liniowym i nieliniowym okazały się pomijalnie małe. Wnioski z przedstawionych badań świadczą o tym, że pominięcie efektów nieliniowych jest w rozważanym zagadnieniu dopuszczalne, ponieważ jego skutkiem jest przeszacowanie odpowiedzi konstrukcji, korzystne w aspekcie oceny jej bezpieczeństwa.

Kolejnym zagadnieniem rozważanym w rozprawie jest problem oceny niezawodności mostów wiszących obciążonych losowym ruchem drogowym. Problem ten analizowano w sensie pierwszego przekroczenia poziomu granicznego i w aspekcie zmęczenia materiału. Zakres badań ograniczono do analizy drgań liniowych. Do wyznaczania charakterystyk drgań losowych, niezbędnych do badania zagadnienia niezawodności, zastosowano metodę analityczno-numeryczną, która daje znacznie większe możliwości badawcze. Rozważania skoncentrowano na problemie wyboru sposobu modelowania procesów opisujących w zagadnieniu niezawodności stacjonarne drgania konstrukcji w stanie ustalonym. W analizie niezawodności badany proces stochastyczny jest opisany za pomocą funkcji określającej łączną, dwuwymiarową gęstość rozkładu prawdopodobieństwa procesu i jego pochodnej po czasie. Sposób aproksymowania tej funkcji określa równocześnie rodzaj modelowania procesu. Rozważono dwa podstawowe przypadki: typową aproksymację gęstościami gaussowskimi i dokładniejszą aproksymację za pomocą rozwinięcia w szereg Gramma–Charliera, wyrażony przez kumulanty wyższych rzędów. Na podstawie



analizy przykładu obliczeniowego stwierdzono, że przy aproksymacji gaussowskiej otrzymuje się mniejszą, niż w drugim przypadku, średnią intensywność przekroczeń ustalonego poziomu przemieszczeń, szczególnie w ćwiartkach rozpiętości przęsła głównego. Skutkiem jest zbyt optymistyczna ocena prawdopodobieństwa braku przekroczeń poziomu granicznego, czyli niezawodności, co zostało potwierdzone wynikami obliczeń. W przypadku badania niezawodności zmęczeniowej wybór metody postępowania zależy dodatkowo od szerokości pasma analizowanych procesów naprężeń. Przedstawiono dwie ścieżki rozwiązania problemu, odpowiadające modelowaniu wąskopasmowemu i szerokopasmowemu. W rozważanym w rozprawie ujęciu poszukiwanym rozwiązaniem problemu niezawodności zmęczeniowej jest przeciętny czas życia konstrukcji, mierzony za pomocą tzw. miary trwałości, częściowo niezależnej od stałych materiałowych. Przeprowadzono analizę niezawodności przykładowego obiektu testowego pod kątem oszacowania wpływu modelowania procesów naprężeń na oczekiwany czas życia. Wyznaczono funkcje gęstości widmowych i zbadano szerokość pasma procesów naprężeń w charakterystycznych punktach konstrukcji. Stwierdzono, że obliczone szerokości pasma są bliskie jedności, co świadczy o tym, że naprężenia w elementach mostu wiszącego, obciążonego swobodnym ruchem drogowym, są procesami szerokopasmowymi. Błędne, w tym przypadku, modelowanie wąskopasmowe powoduje nadmiernie korzystne oszacowanie trwałości konstrukcji (dłuższy czas życia). Taki rezultat uzyskano w przypadku analizy niezawodności przęseł bocznych. Pokazano, że bardzo niewielkie zmniejszenie szerokości pasma, zaobserwowane dla naprężeń w przęśle środkowym dźwigara, powoduje zdecydowane zmniejszenie błędu spowodowanego modelowaniem wąskopasmowym. W przypadku ciągów, gdzie szerokość pasma procesu naprężeń jest jeszcze mniejsza, choć nadal bliska jedności, modelowanie wąskopasmowe daje oszacowanie trwałości „od dołu” (krótszy czas życia), zatem jest odpowiedniejsze od szerokopasmowego z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji. Wykazano, że parametr nazywany w literaturze szerokością pasma [107, 116], jest słabo zmienny i nie różnicuje dostatecznie procesów. Lepszą informację o rzeczywistej szerokości pasma otrzymuje się na podstawie tzw. współczynnika regularności [107] i ta miara szerokości pasma powinna być brana pod uwagę przy podejmowaniu decyzji o sposobie modelowania procesów. Rozważania w zakresie modelowania procesów stochastycznych w zagadnieniach niezawodności są oryginalnym osiągnięciem autorki – w żadnej ze znanych autorce prac problem ten nie był rozpatrywany w tak praktycznym ujęciu. Przedstawiona w rozprawie metoda badania niezawodności łączy w spójną całość wcześniej sformułowane algorytmy analizy drgań deterministycznych i analizy momentowej drgań stochastycznych z algorytmem służącym do oceny szerokości pasma procesów naprężeń i wyznaczania czasu życia konstrukcji. Przykład badania niezawodności mostu wiszącego świadczy o realnej możliwości zastosowania zbioru sformułowanych algorytmów do prognozowania dopuszczalnego czasu eksploatacji tego typu obiektów.

W ostatniej części rozprawy przedstawiono oryginalne, probabilistyczne ujęcie istotnego zagadnienia z dziedziny aerodynamiki mostów wiszących – problemu drgań wywołanych turbulencjami wiatru. Obciążenia aerodynamiczne spowodowane turbulentnym przepływem wiatru są zasadniczym obciążeniem środowiskowym mostów wiszących. Silny porywisty wiatr często pojawia się w strefach lokalizacji tych mostów i ma istotny wpływ na stan ich wyteżenia. Do analizy drgań konstrukcji zastosowano w rozprawie podejście zgodne z najnowszymi trendami, polegające na poszukiwaniu rozwiązań w dziedzinie czasu. Problem przedstawiono w ujęciu stochastycznym. Sformułowano stochastyczny model porywistego wiatru i odpowiadające mu formuły obciążeń aerodynamicznych mostu. Wyprowadzono rozwiązania problemu drgań losowych, w zakresie teorii korelacyjnej, korzystając z aparatu matematycznego procesów stochastycznych. Sformułowany w rozprawie model porywistego wiatru opisuje przepływ o stałej prędkości średniej, na który nakładają się okresowe porywy, opisane zmiennym w czasie składnikiem wartości oczekiwanej i losowe fluktuacje wysokoczęstotliwościowe, modelowane stacjonarnym procesem gaussowskim. Model ten może mieć różne zastosowania, w zależności od sposobu jego interpretacji. Przy całkowitym pominięciu okresowego składnika wartości oczekiwanej otrzymuje się klasyczny opis przepływu wiatru – przez średnią prędkość i gaussowskie turbulencje. Ograniczenie cyklicznej serii porywów do jednego elementu umożliwia analizę niestacjonarnych drgań mostu, wywołanych działaniem wiatru o losowej turbulencji i o dowolnie zmiennej w czasie prędkości średniej. Pełny opis zmiennej prędkości wiatru pozwala uwzględnić porywy, które nie są wysokoczęstotliwościowymi turbulencjami, czyli porywy o długim czasie trwania i stosunkowo dużej skali. Przyjęty model wiatru może też służyć do opisu ekstremalnie niekorzystnych obciążeń o charakterze rezonansowym, jeśli przyjmujemy, że składnik cykliczny prędkości wiatru ma okres zbliżony do okresu własnego drgań konstrukcji. Wprowadzenie składnika cyklicznego do opisu zmiennej prędkości wiatru ma dodatkową zaletę, ponieważ obciążenie aerodynamiczne związane ze zjawiskiem „buffetingu” można łatwo uzupełnić o składniki opisujące siły samowzбудne wywołane ruchem konstrukcji. Siły te wstępnie pominięto w podstawowej strukturze algorytmu analizy korelacyjnej stochastycznych drgań konstrukcji.

W opracowaniu koncepcji algorytmu wykorzystano ideę stosowaną zazwyczaj w podejściu symulacyjnym – pole ciśnienia wiatru podzielono na segmenty wzdłuż rozpiętości mostu, dzięki czemu uzyskano możliwość uwzględnienia przestrzennej korelacji procesów opisujących turbulencje. Podział mostu i obciążenia wiatrem na segmenty prowadzi do opisu losowego pola turbulencji za pomocą układu stacjonarnych procesów stochastycznych (wektor stochastyczny). W przedstawionym w rozprawie ujęciu autokorelacje procesów oblicza się numerycznie na podstawie założonego spektrum wiatru, natomiast korelacje wzajemne są dodatkowo zmodyfikowane za pomocą funkcji koherencji, opisanej w przybliżeniu modelem Davenporta, w którym zakłada się eksponencjalny tryb zanikania korelacji. Całkowitą, losową odpo-

wiedź konstrukcji na działanie wiatru wyznacza się jako sumę odpowiedzi na wymuszenia składowe, odpowiadające poszczególnym segmentom obciążenia. Stąd wynika, że przedstawione podejście może być stosowane wyłącznie do analizy drgań liniowych. Do wyznaczenia drgań mostu zastosowano impulsowe funkcje przejścia, analogiczne do tych, którymi operuje się w układach o jednym stopniu swobody, ale sformułowane dla układu ciągłego, po dyskretyzacji metodą Lagrange’a–Ritza. Wyprowadzono oryginalne formuły opisujące wartość oczekiwaną drgań mostu i funkcję kowariancyjną, która umożliwia obliczenie wariancji procesu drgań. Formuły te zapisano w ogólnej postaci całkowej. Szczegółowa postać rozwiązań może być wyznaczona jedynie w sposób numeryczny, ponieważ zarówno impulsowe funkcje przejścia, jak i funkcje korelacji opisujące turbulencje wiatru, nie mają postaci analitycznej. W przypadku funkcji kowariancyjnej procesu drgań algorytm obliczeń jest dość skomplikowany ze względu na konieczność wielokrotnego stosowania procedur wyznaczania całek podwójnych. Z tego powodu rozważono dwa uproszczone przypadki rozwiązań, które mogą służyć do wstępnego oszacowania wariancji. Przyjęto dwie przeciwstawne idealizacje matematyczne procesu turbulencji: funkcję korelacyjną typu „biały szum”, która zakłada bardzo krótki czas korelacji oraz funkcję korelacyjną o wartości stałej, niezależnej od czasu. Wyznaczone w obu przypadkach wariancje drgań są wyrażone formułami zawierającymi całki pojedyncze, co zdecydowanie upraszcza schemat obliczeń. Przedstawiony w rozprawie algorytm analizy drgań losowych spowodowanych porywistym wiatrem może być podstawą obszernych badań numerycznych. W rozprawie przytoczono wyniki wstępnych testów obliczeniowych, ilustrujących okresowo-stacjonarne drgania konstrukcji wzbudzone działaniem porywistego wiatru o cyklicznie zmiennej w czasie prędkości średniej.

## 6.2. Podsumowanie

Podsumujemy tu zwięźle sposób realizacji głównego celu rozprawy, którym było opracowanie zbioru metod i algorytmów, przeznaczonych do analizy drgań mostów wiszących, wzbudzanych dynamicznym oddziaływaniem ruchu drogowego i działaniem wiatru. W zamierzeniu autorki metody te miały być tak sformułowane, aby stanowiły dobrą podstawę do dalszych badań, dotyczących zagadnienia drgań spowodowanych równoczesnym działaniem wymienionych obciążeń. Z tego powodu w niniejszym podsumowaniu skupimy uwagę na podkreśleniu wspólnych cech i jednolitości podejścia do rozwiązania dwóch problemów drgań wymuszonych, wybranych do rozważań w rozprawie.

Cechą charakterystyczną obu rozpatrywanych w rozprawie typów obciążenia jest ich losowy charakter, zatem przedstawione w pracy rozważania są skoncentrowane głównie na rozwiązywaniu zagadnień z dziedziny dynamiki stochastycznej. Przedmiotem zainteresowania są przeciętne, w sensie potocznym, warunki obciążenia użytko-

wego i środowiskowego – nie rozpatruje się ekstremalnych sytuacji, takich jak na przykład zatopy drogowe, nagłe zmiany prędkości pojazdów, czy też obciążenie wiatrem o prędkościach krytycznych, powodujących utratę stateczności konstrukcji. Zastosowane do badań modele obciążeń sformułowano przede wszystkim pod kątem ich przydatności do analizy probabilistycznej drgań konstrukcji w stanie ustalonym, który najlepiej określa przeciętne warunki użytkowania. Stochastyczny model obciążenia użytkowego dotyczy swobodnego ruchu drogowego, któremu towarzyszą drgania konstrukcji opisane procesami stacjonarnymi. Model wzbudzenia wiatrowego opisuje natomiast w oryginalny sposób zjawisko „buffetingu”, związane z obciążeniem w postaci silnego wiatru z turbulencjami. Wybór zagadnienia „buffetingu”, jednego spośród wielu zagadnień aerodynamiki mostów, był podyktowany dwoma względami. Po pierwsze, ten rodzaj wiatru jest często spotykany w strefach lokalizacji większości mostów wiszących o dużych rozpiętościach, może być zatem traktowany jako główne obciążenie środowiskowe. Po drugie, drgania spowodowane zmiennym wiatrem, z natury losowe, najlepiej kojarzą się z losowym ruchem drogowym, dlatego ten przypadek wybrano do rozważań. W ujęciu przedstawionym w rozprawie drgania spowodowane porywistym wiatrem są w stanie ustalonym procesami okresowo-stacjonarnymi, w przypadku szczególnym – procesami stacjonarnymi. Do analizy procesów drgań zastosowano w obu rozważanych przypadkach obciążenia to samo podejście – w dziedzinie czasu. W przypadku obciążenia ruchem drogowym jest to podejście naturalne, powszechnie stosowane, natomiast problem „buffetingu” był do tej pory traktowany odmiennie, przy użyciu metod widmowych, w których rozwiązania określa się w dziedzinie częstości. Zastosowanie do analizy zagadnień aerodynamiki podejścia polegającego na poszukiwaniu rozwiązań w dziedzinie czasu jest najnowszą tendencją, obserwowaną ostatnio w literaturze tego przedmiotu.

Dbłość o zachowanie jednolitości podejścia w obu analizowanych zagadnieniach nie ogranicza się tylko do opisu drgań w tej samej dziedzinie, określonej zmienną czasową. Sformułowane rozwiązania wynikają z podobnej koncepcji sumowania odpowiedzi konstrukcji na działanie wymuszeń składowych. W zagadnieniu drgań spowodowanych ruchem drogowym sumowanie dotyczy efektów działania pojedynczych sił skupionych, modelujących pojazdy, i odbywa się za pomocą zliczającego procesu Poissona, w sensie całki Stjeltjesa. Sumowane efekty składowe wyznacza się na podstawie dynamicznych funkcji wpływu. W zagadnieniu drgań wywołanych wiatrem sumowaniu podlegają rozwiązania odpowiadające różniczkowym impulsom, które tworzą losowy proces wymuszenia. Sumowanie odbywa się po czasie, w sensie całki splotowej, a składowe rozwiązania są określone poprzez impulsowe funkcje przejścia, zdefiniowane dla układu dyskretnego. Opisane postępowanie odnosi się do pojedynczego procesu stochastycznego, opisującego jedno pasmo ruchu pojazdów bądź jeden segment obciążenia wiatrem, wydzielony wzdłuż rozpiętości mostu. W obu zagadnieniach uogólniono schemat obliczeniowy, odpowiednio – na ruch wielopasmowy lub wiele segmentów obciążenia wiatrem, uwzględniając w ten sposób cechy

charakterystyczne dla obciążeń dużych mostów. Ostatecznie, losowe zjawisko obciążenia opisano w obu przypadkach układem procesów stochastycznych, przy czym w pierwszym przypadku przyjęto, że procesy nie są skorelowane, w drugim uwzględniono wzajemne korelacje.

Konsekwencją zastosowania ogólnej koncepcji sumowania składowych odpowiedzi konstrukcji jest ograniczenie zakresu stosowalności do drgań liniowych. Na podstawie badań symulacyjnych wykazano, że powyższe ograniczenie jest dopuszczalne w analizie zagadnienia drgań losowych, wymuszonych swobodnym ruchem drogowym. W drugim zagadnieniu problem ten pozostaje otwarty i powinien być przedmiotem dalszych badań.

Metody zastosowane do analizy obu rozważanych zagadnień łączy wspólna podstawa – wspólny model obliczeniowy konstrukcji i oryginalny algorytm analizy drgań deterministycznych. Przyjęta w rozprawie koncepcja analizy drgań deterministycznych jest, zdaniem autorki, dobrze wyważonym kompromisem, który umożliwi osiągnięcie dostatecznej dokładności modelu obliczeniowego konstrukcji, przy zapewnieniu niezbędnej efektywności algorytmu. Założony model obliczeniowy jest stosunkowo prosty w porównaniu z modelami budowanymi za pomocą metody elementów skończonych, ale uwzględnia specyficzne cechy mostów wiszących i jest tak skonstruowany, że może idealizować nowoczesne mosty wiszące, o najczęściej stosowanych schematach konstrukcyjnych. Duża efektywność algorytmu wynika z zastosowania do opisu drgań podejścia analitycznego, połączonego z globalną aproksymacją stanu przemieszczenia. Opracowany algorytm okazał się wyjątkowo skuteczny w zastosowaniu do wielokrotnego wyznaczania dynamicznych funkcji wpływu i impulsowych funkcji przejścia.

Sformułowana w rozprawie metoda analizy drgań deterministycznych ma dodatkową ważną zaletę. W opisie drgań mostu wybrano środek ścinania przekroju dźwigara za tzw. centrum dynamiczne, czyli punkt, względem którego określa się stan przemieszczenia konstrukcji i składowe obciążenia. Ten wybór jest zdecydowanie trafny z kilku powodów. Przede wszystkim umożliwia bezpośrednio uwzględnienie obciążeń aerodynamicznych, które powszechnie definiuje się w odniesieniu do środka ścinania, jako naturalnego centrum rotacji przekroju (Dyrbye i Hansen [54]). Do tego punktu można też łatwo zredukować obciążenia wywołane pojazdami drogowymi. Ponadto właśnie względem środka ścinania przekroju formułuje się równania opisujące zginanie i nieswobodne skręcanie belek cienkościennych, które obrano jako model dźwigara usztywniającego. Wybór środka ścinania ułatwił sformułowanie jednolitego algorytmu, umożliwiającego zarówno analizę drgań spowodowanych ruchem drogowym, jak i działaniem wiatru.

Integralną część rozprawy stanowią obszerne badania numeryczne. Celem tych badań była w pewnej mierze ilustracja i prezentacja możliwości metod i algorytmów sformułowanych w rozprawie. Jednak przede wszystkim badania te służyły weryfikacji założeń modeli i metod obliczeniowych. Przeprowadzenie analiz numerycznych

więzało się z koniecznością opracowania pakietu wielu współpracujących ze sobą programów komputerowych, często o bardzo złożonym algorytmie. Oprogramowanie to zostało sporządzone przez autorkę rozprawy, w środowisku Turbo Pascal i DevPascal. Do opracowania algorytmów komputerowych wykorzystano współczesne techniki numeryczne, przeznaczone do rozwiązywania zagadnienia własnego, rozwiązywania układów równań algebraicznych, obliczania wartości całek oznaczonych oraz do całkowania układów równań różniczkowych – liniowych i nieliniowych. W materiale rozprawy, ze względu na jej ograniczoną objętość, pominięto szczegółowy opis zastosowanych metod numerycznych, z wyjątkiem metody numerycznego całkowania nieliniowych równań ruchu, której wybór miał istotne znaczenie merytoryczne.

Na podstawie rozważań przedstawionych w rozprawie można wskazać kierunki dalszych badań, związanych z doskonaleniem sformułowanych metod i ich aplikacją do rozwiązywania pokrewnych zagadnień z zakresu dynamiki mostów wiszących. Przykładowe kierunki badań mogą być następujące:

- Uściślenie metody analizy drgań spowodowanych porywistym wiatrem, polegające na uwzględnieniu obciążeń samowzbudnych oraz efektów wywołanych turbulencjami w kierunku prostopadłym do przepływu wiatru.
- Gruntowna analiza numeryczna drgań wywołanych działaniem wiatru, poprzedzona badaniami studialnymi służącymi określeniu realnych parametrów obciążenia wiatrem, związanych z konkretnym, rzeczywistym obiektem.
- Sformułowanie metody wyznaczania charakterystyk łącznych drgań mostów wiszących, wzbudzanych równoczesnym działaniem losowego ruchu drogowego i wiatru.
- Dostosowanie metody analizy niezawodności do badania zagadnienia drgań układu most – pojazdy drogowe – wiatr.
- Sformułowanie i analiza zagadnienia drgań mostów kolejowo-drogowych.
- Sformułowanie i analiza zagadnień związanych z badaniem ekstremalnych efektów obciążenia mostów ruchem drogowym i kolejowym oraz wiatrem, przy założeniu rozłącznego i łącznego działania obciążeń.

Wymienione problemy badawcze zakreślają prawdopodobny obszar dalszych prac badawczych autorki w dziedzinie dynamiki mostów wiszących.

## Dodatek

### Reguły obliczania wektora gradientu pól skalarowych

1. Oznaczenia:

$\Phi(\mathbf{q})$  – pole skalarowe określone przez współrzędne uogólnione  $\mathbf{q}$ ,

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_J \\ \mathbf{q}_K \end{bmatrix}$  – wektor współrzędnych uogólnionych, podzielony na bloki o jednakowej liczbie elementów równej  $n$ ,

$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_J \\ \mathbf{R}_K \end{bmatrix}$  – wektor gradientu pola skalarowego  $\Phi(\mathbf{q})$ ,

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_J \\ \mathbf{a}_K \end{bmatrix}$  – wektor o rozmiarze  $2n$ , zawierający mnożniki liczbowe,

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{JJ} & \mathbf{A}_{JK} \\ \mathbf{A}_{KJ} & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix}$  – symetryczna macierz kwadratowa rzędu  $2n$ , zawierająca mnożniki liczbowe.

2. Forma liniowa współrzędnych  $\mathbf{q}$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{a} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R} = \text{grad}_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_J \\ \mathbf{a}_K \end{bmatrix}.$$

Obliczenie z uwzględnieniem struktury blokowej wektora współrzędnych  $\mathbf{q}$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K,$$

$$\mathbf{R}_J = \text{grad}_{\mathbf{q}_J} \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{a}_J, \quad \mathbf{R}_K = \text{grad}_{\mathbf{q}_K} \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{a}_K.$$

3. Forma kwadratowa współrzędnych  $\mathbf{q}$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R} = \text{grad}_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) = 2\mathbf{A}\mathbf{q} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{JJ} & \mathbf{A}_{JK} \\ \mathbf{A}_{KJ} & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_J \\ \mathbf{q}_K \end{bmatrix}.$$

Obliczenie z uwzględnieniem struktury blokowej wektora współrzędnych  $\mathbf{q}$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{q}_J^T (\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K) + \mathbf{q}_K^T (\mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K),$$

$$\mathbf{R}_J = \text{grad}_{\mathbf{q}_J} \Phi(\mathbf{q}) = 2\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K + \mathbf{A}_{KJ}^T \mathbf{q}_K = 2(\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K),$$

$$\mathbf{R}_K = \text{grad}_{\mathbf{q}_K} \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_{JK}^T \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + 2\mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K = 2(\mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K).$$

4. Forma sześcienna współrzędnych  $\mathbf{q}$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{a}^T \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} = (\mathbf{q}^T \mathbf{a})(\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{R} = \text{grad}_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{a} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} + 2\mathbf{A} \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{a}.$$

Obliczenie z uwzględnieniem struktury blokowej wektora współrzędnych  $\mathbf{q}$ :

$$\Phi(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K) [\mathbf{q}_J^T (\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K) + \mathbf{q}_K^T (\mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K)],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_J = \text{grad}_{\mathbf{q}_J} \Phi(\mathbf{q}) &= \mathbf{a}_J \mathbf{q}_J^T \mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + 2\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J \mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_J \mathbf{q}_J^T \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K \mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \\ &+ \mathbf{a}_J \mathbf{q}_K^T \mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KJ}^T \mathbf{q}_K \mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \mathbf{a}_J \mathbf{q}_K^T \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K + \\ &+ 2\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K + \mathbf{A}_{KJ}^T \mathbf{q}_K \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K = \\ &= \mathbf{a}_J [\mathbf{q}_J^T (\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K) + \mathbf{q}_K^T (\mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K)] + \\ &+ 2[(\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K)(\mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_K = \text{grad}_{\mathbf{q}_K} \Phi(\mathbf{q}) &= \mathbf{A}_{JK}^T \mathbf{q}_J \mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J \mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + 2\mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K \mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \\ &+ \mathbf{a}_K \mathbf{q}_J^T \mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{a}_K \mathbf{q}_J^T \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K + \mathbf{A}_{JK}^T \mathbf{q}_J \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K + \\ &+ \mathbf{a}_K \mathbf{q}_K^T \mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K + \mathbf{a}_K \mathbf{q}_K^T \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K + 2\mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K = \\ &= \mathbf{a}_K [\mathbf{q}_J^T (\mathbf{A}_{JJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{JK} \mathbf{q}_K) + \mathbf{q}_K^T (\mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K)] + \\ &+ 2[(\mathbf{A}_{KJ} \mathbf{q}_J + \mathbf{A}_{KK} \mathbf{q}_K)(\mathbf{q}_J^T \mathbf{a}_J + \mathbf{q}_K^T \mathbf{a}_K)]. \end{aligned}$$



## Literatura

- [1] ABDEL-GHAFFAR A.M., 1978, *ASCE Journal of the Structural Division* **104**, 3, 503–576, Free lateral vibrations of suspension bridges.
- [2] ABDEL-GHAFFAR A.M., 1979, *ASCE Journal of the Structural Division* **105**, 4, 767–788, Free torsional vibrations of suspension bridges.
- [3] ABDEL-GHAFFAR A.M., 1980, *ASCE Journal of the Structural Division* **106**, 10, 2053–2075, Vertical vibration analysis of suspension bridges.
- [4] ABDEL-GHAFFAR A.M., 1982, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* **108**, 6, 1215–1232, Suspension bridge vibration: continuum formulation.
- [5] ABDEL-GHAFFAR A.M., HOUSNER G., 1978, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* **104**, 5, 983–999, Ambient vibration tests of suspension bridge.
- [6] ABDEL-GHAFFAR A.M., RUBIN L.I., 1983, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **109**, 1, 313–329, Nonlinear free vibrations of suspension bridges: theory.
- [7] ABDEL-GHAFFAR A.M., RUBIN L.I., 1983, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **109**, 1, 330–345, Nonlinear free vibrations of suspension bridges: application.
- [8] ABEZGAUZ G.G. i in., 1973 *Rachunek probabilistyczny*, Wyd. MON, Warszawa.
- [9] ADANUR S., DUMANOGLU A.A., SOYLUK K., 2002, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics EURODYN'2002, Munich, Germany*, (H. Grundmann, G.I. Schuëller, editors), 1035–1040, Lisse: A.A. Balkema, Stochastic analyses of suspension bridges: stationary and transient.
- [10] ASHTON W., 1966, *The theory of road traffic flow*, Methuen, London.
- [11] BELYTSCHKO T., 1976, *Nuclear Engineering Design* **37**, 23-34, A survey of numerical methods and computer programs for dynamic structural analysis.
- [12] BIERNAT S., ŚNIADY P., 1998, *Proceedings of the 8<sup>th</sup> IFIP W.G.7.5, Fifth Working Conference on "Reliability and Optimization of Structural Systems"*, Kraków, Poland, (A.S. Nowak, M.M. Szeszen, editors), 77–84, Ann Arbor, MI, USA: Univ. of Michigan, Random response of a bridge-vehicle system.
- [13] BIONDI B., MUSCOLINO G., SOFI A., 2002, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics EURODYN'2002, Munich, Germany*, (H. Grundmann, G.I. Schuëller, editors), 1041–1046, Lisse: A.A. Balkema, Analysis of dynamic interaction between suspension bridges and running trains.
- [14] BLEICH F., MC COLLOUGH C.B., ROSENCRANS R., VINCENT G.S., 1950, *The mathematical theory of vibration in suspension bridges*, Bureau of Public Roads, U.S. Govern. Print. Office, Washington.
- [15] BOŁOTIN W.W., 1968 *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Arkady, Warszawa.

- [16] BOONYAPINYO V., YAMADA H., MIYATA T., 1994, *ASCE Journal of Structural Engineering* **120**, 2, 486–506, Wind-induced nonlinear lateral-torsional buckling of cable-stayed bridges.
- [17] BOONYAPINYO V., MIYATA T., YAMADA H., 1999, *ASCE Journal of Structural Engineering* **125**, 12, 1357–1366, Advanced aerodynamic analysis of suspension bridges by state-space approach.
- [18] BRYJA D., 1984, *Archiwum Inżynierii Lądowej* **30**, 4, 607–627, Przestrzenne drgania mostu wiszącego wywołane ruchomym obciążeniem inercyjnym.
- [19] BRYJA D., 1988, *Archiwum Inżynierii Lądowej* **34**, 2, 191–202, Analiza drgań układu belkowo-ciężnowego z uwzględnieniem poziomych przemieszczeń ciężna.
- [20] BRYJA D., 2001, *Materiały III Ogólnopolskiego Sympozjum „Wpływy środowiskowe na budowle i ludzi”*, Lublin-Zwierzyniec '2001, 37–44, Probabilistyczna ocena działania porywistego wiatru na most wiszący.
- [21] BRYJA D., 2001, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **81**, S2, 183–184, Coupled lateral-torsional vibrations of suspension bridge excited by random wind load.
- [22] BRYJA D., 2002, *Materiały XI Sympozjum Dynamiki Konstrukcji, Rzeszów-Arlamów '2002*, 281–288, Ocena wpływu poziomych przesunięć ciężenia na drgania wieloprzęsłowych mostów wiszących.
- [23] BRYJA D., 2002, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics EURO-DYN'2002, Munich, Germany*, (H. Grundmann, G.I. Schuëller, editors), 1047–1052, Lisse: A.A. Balkema, Spatial vibrations of multi-span suspension bridges with large cable sags: continuum formulation.
- [24] BRYJA D., 2003, *Materiały XLIX Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Krynica '2003*, 17–24, Numeryczna analiza tłumienia drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących.
- [25] BRYJA D., 2004, *International Summer School 2004 on Full-Scale and Model-Scale Studies of Dynamic Behaviour of Large Structures, July 19–23, Opole – Otmuchów, Poland*, Fatigue reliability of multi-span suspension bridge under stochastic load caused by free traffic.
- [26] BRYJA D., KLASZTORNY M., 1992, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on "Safety of Bridge Structures"*, Wrocław, Poland, 149–155, Random vibrations of highway bridge under inertial sprung moving load.
- [27] BRYJA D., LANGER J., 1986, *Mechanika i Komputer* **6**, 39–50, Pionowe drgania mostu wiszącego wymuszone ruchomym obciążeniem inercyjnym.
- [28] BRYJA D., SIENIAWSKA R., 1993, *Materiały XXXIX Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Krynica '93*, 21–28, Analiza niezawodności zmęczeniowej mostu wiszącego obciążonego losowym ruchem drogowym.
- [29] BRYJA D., SIENIAWSKA R., ŚNIADY P., 1993, *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on "Structural Safety and Reliability" ICOSSAR'93, Innsbruck, Austria*, (G.I. Schuëller, M. Shinozuka, J.T.P. Yao, editors), 949–952, Rotterdam: A.A. Balkema, Reliability of highway suspension bridge with respect to fatigue.
- [30] BRYJA D., SIENIAWSKA R., ŚNIADY P., 1995, *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on "Applications of Statistics and Probability" ICASP7, Paris, France*, (M. Lemaire, J.L. Favre, A. Mebarki, editors), 1165–1172, Rotterdam: A.A. Balkema, First crossing problem for a suspension bridge being fatigue-degraded.
- [31] BRYJA D., ŚNIADY P., 1988, *Journal of Sound and Vibration* **125**, 2, 379–387, Random vibration of a suspension bridge due to highway traffic.
- [32] BRYJA D., ŚNIADY P., 1989, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on "Structural Safety and Reliability" ICOSSAR'89, San Francisco, USA*, (M. Shinozuka, G.I. Schuëller, editors), 2255–2258, New-York: ASCE, Reliability of a suspension bridge under traffic flow.
- [33] BRYJA D., ŚNIADY P., 1991, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **20**, 999–1010, Spatially coupled vibrations of a suspension bridge under random highway traffic.

- [34] BRYJA D., ŚNIADY P., 1991, *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on "Applications of Statistics and Probability" ICASP6, Mexico City, Mexico*, (L. Esteva, S.E. Ruiz, editors), 857–864, Mexico City: Institute of Eng., UNAM, Spatial vibration and reliability of a suspension bridge under random traffic flow.
- [35] BRYJA D., ŚNIADY P., 1991, *Proceedings of the X Polish Conference on "Computer Methods in Mechanics"*, Szczecin – Świnoujście'91, 31–38, Numerical reliability analysis of a suspension bridge under traffic flow.
- [36] BRYJA D., ŚNIADY P., 1998, *Journal of Sound and Vibration* **216**, 3, 507–519, Stochastic non-linear vibrations of highway suspension bridge under inertial sprung moving load.
- [37] BRYJA D., ŚNIADY P., 1999, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **79**, S3, 821–822, Effects of construction nonlinearity and load inertial forces in stochastic dynamics of suspension bridge.
- [38] BUCKLAND P.G., HOOLEY R., MORGENSTERN B.D., RAINER J.H., SELST A.M., 1979, *ASCE Journal of the Structural Division*, **105**, 5, 859–874, Suspension bridge vibrations: computed and measured.
- [39] CAI C.S., CHEN S.R., 2004, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **92**, 7-8, 579–607, Framework of vehicle–bridge–wind dynamic analysis.
- [40] CALCADA R., CUNHA A., DELGADO R., 2002, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics EUROLYN'2002, Munich, Germany*, (H. Grundmann, G.I. Schuëller, editors), 1053–1058, Lisse: A.A. Balkema, Stochastic modeling of traffic induced vibrations in a cable-stayed bridge.
- [41] CAO Y., XIANG H., ZHOU Y., 2000, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **126**, 1, 1–6, Simulation of stochastic wind velocity field on long-span bridges.
- [42] CHATTERJEE P.K., DATTA T.K., SURANA C.S., 1994, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **120**, 3, 681–703, Vibration of suspension bridges under vehicular movement.
- [43] CHEN X., MATSUMOTO M., KAREEM A., 2000, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **126**, 1, 17–26, Aerodynamic coupling effects on flutter and buffeting of bridges.
- [44] CHEN X., MATSUMOTO M., KAREEM A., 2000, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **126**, 1, 7–16, Time domain flutter and buffeting response analysis of bridges.
- [45] CHMIELEWSKI T., ZEMBATY Z., 1998, *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa.
- [46] COBO DEL ARCO D., APARICIO A.C., 1999, *ASCE Journal of Structural Engineering* **125**, 12, 1367–1375, Improving suspension bridge wind stability with aerodynamic appendages.
- [47] CREMONA CH., 2001, *Structural Safety* **23**, 31–46, (ed. Elsevier Science Ltd.), Optimal extrapolation of traffic load effects.
- [48] CREMONA CH., CARRACILLI J., 1998, *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> European Conference on "Weight-In-Motion of Road Vehicles"*, Lisbon, Portugal, 243–251, Evaluation of extreme traffic load effects in cable stayed and suspension bridges by use of WIM records.
- [49] CRISFIELD M.A., 1997, *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [50] DEODATIS G., SHINOZUKA M., 1989, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **115**, 12, 2723–2737, Simulation of seismic ground motion using stochastic waves.
- [51] DITLEVSEN O., 1994, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **120**, 4, 681–694, Traffic loads on large bridges modeled as white-noise fields.
- [52] DITLEVSEN O., MADSEN H.O., 1994, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **120**, 9, 1829–1847, Stochastic vehicle-queue-load model for large bridges.
- [53] DUMANOGLU A.A., SEVERN R.T., 1990, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **19**, 133–152, Stochastic response of suspension bridges to earthquake forces.
- [54] DYRBYE C., HANSEN S.O., 1997, *Wind loads on structures*, John Wiley & Sons, Chichester.

- [55] FRYBA L., 1980, *Journal of Sound and Vibration* **70**, 4, 527–541, Estimation of fatigue life of railway bridges under traffic load.
- [56] FUJINO Y., BHARTIA B.K., 1987, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on “Reliability and Risk Analysis in Civil Engineering” CERRA-ICASP5, Vancouver, BC Canada*, (N.C. Lind, editor), 1157–1164, Inst. for Risk Research, Univ. of Waterloo, Effect of multiple presence of vehicles on fatigue damage of highway bridges.
- [57] GARDNER W.A., 1986, *Introduction to random processes with applications to signals and systems*, Macmillan Pub. Comp., New York.
- [58] GHOSN M., MOSES F., 1985, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **111**, 9, 1093–1104, Markov renewal model for maximum bridge loading.
- [59] GIMSING N. J., 1996, *Cable supported bridges, concept and design*, (Second edition), John Wiley & Sons, New York.
- [60] GIOFFRE M., GUSELLA V., GRIGORIU M., 1999, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics EURODYN'99, Prague, Czech Republic*, (L. Fryba, J. Naprstek, editors), 1063–1068, Rotterdam: A.A. Balkema, Non-Gaussian wind pressure simulation for structural response analysis.
- [61] GJELSVIK A., 1981, *The theory of thin walled bars*, John Wiley & Sons, New York.
- [62] HAJDUK J., OSIECKI J., 1970, *Ustroje ciągnowe, teoria i obliczanie*, WNT, Warszawa.
- [63] HAMMERSLEY J.M., HANDSCOMB D.C., 1965, *Monte Carlo methods*, Methuen, London & Wiley, New York.
- [64] HARICHANDRAN R.S., HAWWARI A., SWEIDEN B.N., 1996, *ASCE Journal of Structural Engineering* **122**, 476–484, Response of long-span bridges to spatially varying ground motion.
- [65] HAWRANEK A., STEINHARDT O., 1958, *Theorie und berechnung der stahlbrücken*, Springer-Verlag, Berlin.
- [66] HAYASHIKAWA T., WATANABE N., 1982, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* **108**, 6, 1051–1066, Suspension bridge response to moving loads.
- [67] HYUN C.H., YUN C.B., LEE D.G., 1992, *Probabilistic Engineering Mechanics* **7**, 27–35, Nonstationary response analysis of suspension bridges for multiple support excitations.
- [68] IRVINE H.M., 1974, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **3**, 203–214, Torsional vibrations in boxgirder suspension bridge.
- [69] IWANKIEWICZ R., ŚNIADY P., 1984, *ASCE Journal of Structural Mechanics* **12**, 1, 23–26, Vibration of a beam under a random stream of moving forces.
- [70] JAIN A., JONES N.P., SCANLAN R.H., 1996, *ASCE Journal of Structural Engineering* **122**, 7, 716–725, Coupled flutter and buffeting analysis of long-span bridges.
- [71] JASTRZĘBSKI P., MUTERMILCH J., ORŁOWSKI W., 1974, *Wytrzymałość materiałów*, Arkady, Warszawa.
- [72] KALISKI S., 1986, *Mechanika techniczna, drgania i fale*, PWN, Warszawa.
- [73] KATSUCHI H., JONES N.P., SCANLAN R.H., 1999, *ASCE Journal of Structural Engineering* **125**, 1, 60–70, Multimode coupled flutter and buffeting analysis of the Akashi Kaikyo Bridge.
- [74] LAIGAARD JENSEN J., LARSEN A., ANDERSEN J.E., VEJRUM T., 1999, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> European Conference on Structural Dynamics EURODYN'99, Prague, Czech Republic*, (L. Fryba, J. Naprstek, editors), 801–806, Rotterdam: A.A. Balkema, Estimation of structural damping of Great Belt suspension bridge.
- [75] LANGER J., 1980, *Dynamika budowli*, Wyd. Polit. Wrocław, Wrocław.
- [76] LANGER J., BRYJA D., 1978, *Archiwum Inżynierii Lądowej* **24**, 3, 303–316, Przestrzenne drgania własne mostu wiszącego.
- [77] LANGER J., BRYJA D., 1979, *Archiwum Inżynierii Lądowej* **25**, 1, 21–25, Analiza struktury widma częstości pionowych drgań własnych mostu wiszącego.
- [78] LATOSZEK M., 1980, *Organizacja i technika ruchu drogowego*, Wyd. Szk. i Pedagog., Warszawa.

- [79] LEGRAS J., 1974, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, WNT, Warszawa.
- [80] LICHTENSTEIN A.G., 1993, *Journal of Performance of Constructed Facilities* **7**, 4, 249–261, The Silver Bridge Collapse Recounted.
- [81] LIN Y.K., 1976, *Probabilistic theory of structural dynamics*, R.E. Krieger Pub. Co., New York.
- [82] MAEDA Y., HAYASHI M., MAEDA K., 1977, *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers* **262**, 13–24, Natural vibration analysis of suspension bridges.
- [83] MATSUMOTO M., SHIRATO H., YAGI T., SHIJO R., EGUCHI A., TAMAKI H., 2003, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **91**, 12–15, 1547–1557, Effects of aerodynamic interferences between heaving and torsional vibration of bridge decks: the case of Tacoma Narrows Bridge.
- [84] MATSUMOTO M., 2004, *Lecture Note for International Summer School 2004 on Full-Scale and Model-Scale Studies of Dynamic Behaviour of Large Structures, July 19–23, Opole – Otmuchów, Poland*, Bluff body aerodynamics and bridge aerodynamics.
- [85] MIYATA T., KITAGAWA M., YAMADA H., KANAZAKI T., TORIUMI R., 1994, *Proceedings of International Conference on Cable-Stayed and Suspension Bridges, Zurich, Switzerland*, 171–178, Design consideration on 3-dimensional gust response in the Akashi Kaikyo Bridge.
- [86] MIYATA T., YAMADA H., BOONYAPINYO V., SANTOS J.C., 1995, *Proceedings of 9<sup>th</sup> International Conference on Wind Engineering, New Delhi, India*, 1006–1017, Wiley Eastern Ltd., Analytical investigation on the response of a very long suspension bridge under gusty wind.
- [87] MOISSEIFF L.S., LIENHARD F., 1933, *ASCE Transactions* **98**, 1080–1109, Suspension bridges under the action of lateral forces.
- [88] NGUYEN VAN TINH, 1975, *Archiwum Inżynierii Lądowej* **21**, 4, Macierzowe sformułowanie drgań własnych układu cięgnowo-prętowego.
- [89] NOWAK A.S., HONG Y.K., 1991, *ASCE Journal of Structural Engineering* **117**, 9, 2757–2767, Bridge live-load models.
- [90] PARZEN E., 1962, *Stochastic processes*, Holden-Day, New York.
- [91] PAVIC A., 2004, *Lecture Note for International Summer School 2004 on Full-Scale and Model-Scale Studies of Dynamic Behaviour of Large Structures, July 19–23, Opole – Otmuchów, Poland*, Modal testing of the Millennium Bridge using FRF measurements.
- [92] RACKWITZ R., FABER M.H., 1991, *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on "Applications of Statistics and Probability" ICASP6, Mexico City, Mexico*, (L. Esteva, S.E. Ruiz, editors), 166–175, Mexico City: Institute of Eng., UNAM, Reliability of parallel wire cable under fatigue.
- [93] RAKOWSKI J., 1981, *Materiały V Konferencji „Metody komputerowe w mechanice konstrukcji”*, Wrocław, 185–190, Statyka i dynamika wybranych układów belkowo-cięgnowych.
- [94] ROBERTS J.B., 1972, *Journal of Sound and Vibration* **24**, 1, 23–34, System response to random impulses.
- [95] ROTENBERG R.W., 1974, *Zawieszenie samochodu*, WKŁ, Warszawa.
- [96] RUTECKI J., 1966, *Cienkościenne konstrukcje nośne, obliczenia wytrzymałościowe*, PWN, Warszawa.
- [97] SALTER R.J., 1976, *Highway traffic analysis and design*, Macmillan, London.
- [98] SAMARAS E., SHINOZUKA M., TSURUI A., 1985, *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **111**, 3, 449–461, ARMA representation of random processes.
- [99] SCANLAN R.H., 1998, *ASCE Journal of Structural Engineering* **124**, 4, 450–458, Bridge flutter derivatives at vortex lock-in.
- [100] SELBERG A., 1943–1944, *International Association for Bridges and Structural Engineering, Zurich*, **7**, 311–325, Calculation of lateral truss in suspension bridges.
- [101] SELBERG A., 1961, *Acta Polytech. Scand. Civil Eng. Build. Constr., Trondheim*, **13**, 308–377, Oscillation and aerodynamic stability of suspension bridges.
- [102] SHINOZUKA M., 1974, *Stochastic problems in mechanics*, (S.T. Ariaratnam & H.H.E. Leipholz,

- editors), 277–286, Waterloo, Canada: Univ. of Waterloo Press, Digital simulation of random processes in engineering mechanics with the add of FFT technique.
- [103] SHINOZUKA M., JAN C.M., 1972, *Journal of Sound and Vibration* **25**, 10, 111–128, Digital simulation of random processes and its applications.
- [104] SIENIAWSKA R., ŚNIADY P., 1990, *Journal of Sound and Vibration* **140**, 1, 31–38, Life expectancy of highway bridges due to traffic load.
- [105] SIMIU E., SCANLAN R.H., 1996, *Wind effects on structures, fundamentals and applications to design*, (Third edition), John Wiley & Sons, New York.
- [106] SMIRNOV V.A., 1970, *Visjačie mosty bol'sich prolětov*, Izd. Vysš. Šk., Moskva.
- [107] SOBCZYK K., SPENCER B.F., 1992, *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*, WNT, Warszawa.
- [108] SOBCZYK K., 1973, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa.
- [109] SOBCZYK K., 1996, *Stochastyczne równania różniczkowe, teoria i zastosowania*, WNT, Warszawa.
- [110] SOCHA L., 1993, *Równania momentów w stochastycznych układach dynamicznych*, PWN, Warszawa.
- [111] SOLECKI R., SZYMKIEWICZ J., 1964, *Układy prętowe i powierzchniowe, obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa.
- [112] STEINMAN D.B., WATSON S.R., 1957, *Bridges and their builders*, Dover, New York.
- [113] STEINMAN D.B., 1922, *A practical treatise on suspension bridges*, John Wiley & Sons, New York.
- [114] STEINMAN D.B., 1959, *Journal of the Franklin Institute, Philadelphia*, **268**, 3, 148–174, Modes and natural frequencies of suspension bridge oscillations.
- [115] ŚNIADY P., 1984, *Journal of Sound and Vibration* **97**, 1, 23–33, Vibration of a beam due to a random stream of moving forces with random velocity.
- [116] ŚNIADY P., 2000, *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*, Oficyna Wyd. Polit. Wrocł., Wrocław.
- [117] ŚNIADY P., SIENIAWSKA R., ŻUKOWSKI S., 1993, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> IFIP WG.7.5, Fifth Working Conference on "Reliability and Optimization of Structural Systems"*, Takamatsu, Kagawa, Japan, (P. Thoft-Christensen, H. Ishikawa, editors), 237–244, Amsterdam: North-Holland, Reliability of structure being fatigue-degraded due to stochastic excitation.
- [118] TUNG C.C., 1967, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* **93**, 5, 73–94, Random response of highway bridges to vehicle loads.
- [119] TUNG C.C., 1969, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* **95**, 1, 41–57, Response of highway bridges to renewal traffic loads.
- [120] TUNG C.C., 1969, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* **95**, 6, 1417–1428, Life expectancy of highway bridges to vehicle loads.
- [121] XIA H., XU Y.L., CHAN T.H., 2000, *Journal of Sound and Vibration* **237**, 2, 263–280, Dynamic interaction of long suspension bridges with running trains.
- [122] XU Y.L., GUO W.H., 2004, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **92**, 7–8, 641–662, Effects of bridge motion and crosswind on ride comfort of road vehicle.
- [123] XU Y.L., XIA H., YAN Q.S., 2003, *Journal of Bridge Engineering* **8**, 1, 46–55, Dynamic response of suspension bridge to high wind and running train.
- [124] YANG J., 1973, *Journal Sound and Vibration* **26**, 3, 417–428, On the normality and accuracy of simulated random processes.
- [125] ZIELIŃSKI R., 1972, *Generatory liczb losowych, programowanie i testowanie na maszynach cyfrowych*, WNT, Warszawa.
- [126] ŻURAŃSKI J.A., 1978, *Obciążenia wiatrem budowli i konstrukcji*, Arkady, Warszawa.

## **DETERMINISTIC AND STOCHASTIC METHODS OF SUSPENSION BRIDGE VIBRATION ANALYSIS**

A qualified theory of spatial nonlinear vibrations of multi-span suspension bridges is formulated. Qualifying the theory leads to the generalization of earlier computational models. The theory presented respects the specific features of suspension bridge vibrations and it can be applied to dynamic analysis of modern suspension bridges of typical structure systems with a multi-box stiffening girder. Based on such theory an efficient algorithm for deterministic vibration analysis has been worked out with respect to requirements for stochastic analysis of vibrations excited by the highway traffic and wind action. The algorithm has been applied to an eigenproblem analysis and to an analysis of the dynamic and static influence functions of cable tensions and displacements in selected cross-sections of a hypothetical bridge. The results of numerical investigation have justified the qualification of the theory by taking the horizontal cable displacements into account. Particular attention has been paid to the problem of appropriate damping model selection. The suspension bridge damping features have been described and the numerical solutions for the resonant vibrations corresponding to an excitation by the periodic series of concentrated moving forces have been analyzed for a few damping descriptions in the equations of motion of the bridge. In the second part of the dissertation methods of stochastic vibration analysis are formulated. Two entirely different methods for determination of the moment characteristics of random vibrations caused by highway traffic have been presented. The first one is the case of an analytical approach and relates to linear vibrations. In the second method meant for nonlinear vibrations the simulation approach is applied with Monte Carlo principles for simulation of random events being used. By means of the simulation method, the nonlinear effects have been analyzed and the influence of a vehicle springing and vehicle inertia forces on vibration characteristics of hypothetical bridge have been evaluated. When formulating the analytical method the theory of stochastic Poisson process and dynamic influence functions of bridge response have been adopted. On the basis of the probability density function analysis the possibility of modeling the traffic load effects by a stationary Gaussian process has been examined. The suspension bridge reliability with respect to the material fatigue and the first crossing of boundary level is also considered. Considerations are focused on the question of how the stochastic processes describing the bridge vibrations in a steady-state should be idealized in reliability problem. In the last part of the dissertation the problem of vibrations excited by a gusty wind is investigated in the probabilistic approach. A stochastic nonstationary model of gusty wind and corresponding formulae for aerodynamic loads have been formulated. Solutions of the random vibration problem have been obtained in the range of correlation theory using the mathematical tools of stochastic processes. The wind field has been divided into many sections along the bridge span in order to take the spatial correlation between wind turbulences into consideration. The methods and algorithms presented meant for the dynamic analysis of a suspension bridge under highway traffic and gusty wind are characterized by the uniformity and similarity of approach as regards the time domain, so they can be a good basis for the total analysis of vibrations caused by simultaneous action of the two aforementioned loadings.

## Spis treści

Podstawowe oznaczenia .....	8
1. Wstęp .....	19
1.1. Charakterystyka i historia budowy mostów wiszących .....	19
1.2. Motywy i cele rozprawy .....	25
1.3. Treść rozprawy .....	28
2. Teoria drgań wieloprzęsłowych mostów wiszących .....	32
2.1. Wprowadzenie .....	32
2.2. Model fizyczny konstrukcji .....	35
2.3. Równania różniczkowe drgań ciągła .....	37
2.4. Analityczny opis drgań mostów wieloprzęsłowych .....	43
2.4.1. Ogólna postać równań różniczkowych opisujących drgania dźwigara usztywniającego .....	43
2.4.2. Nieliniowe drgania mostów zciągami o dużym zwisie .....	49
2.4.3. Nieliniowe drgania mostów zciągami o małym zwisie .....	54
2.5. Zastosowanie metody Lagrange'a–Ritza do dyskretyzacji ciągłego modelu obliczeniowego .....	56
2.5.1. Bilans energii .....	56
2.5.2. Równania ruchu mostów z odciągami poziomymi iciągami o dużym zwisie .....	60
2.5.3. Równania ruchu mostów z odciągami ukośnymi iciągami o dużym zwisie .....	67
2.5.4. Równania ruchu mostów zciągami o małym zwisie .....	72
2.6. Tłumienie drgań .....	76
2.7. Wyznaczanie przemieszczeń, sił wewnętrznych i naprężeń .....	80
3. Analiza deterministyczna wybranych problemów dynamiki mostów wiszących .....	
3.1. Zakres i cele badań .....	
3.2. Analiza rozwiązań zagadnienia własnego .....	
3.2.1. Ocena wpływu poziomych przemieszczeń cięgien na częstości i formy własne drgań trójprzęsłowego mostu wiszącego .....	
3.2.2. Weryfikacja obliczeń na podstawie danych eksperymentalnych .....	
3.3. Dobór modelu tłumienia na podstawie analizy drgań rezonansowych przy wymuszeniu okresową serią ruchomych sił skupionych .....	
3.4. Statyczne i dynamiczne funkcje wpływu przemieszczeń mostu i naciągów cięgien .....	
3.5. Podsumowanie .....	
4. Drgania wymuszone losowym ruchem drogowym .....	
4.1. Uwagi wstępne .....	
4.2. Analityczno-numeryczna metoda analizy momentowej liniowych drgań losowych .....	



4.2.1. Sformułowanie metody .....	
4.2.2. Charakterystyki drgań losowych przykładowego mostu .....	
4.3. Zastosowanie metody symulacyjnej do analizy drgań nieliniowych .....	
4.3.1. Symulacyjny model obciążenia mostu losowym ruchem drogowym .....	
4.3.2. Równania ruchu mostu wiszącego obciążonego zbiorem ruchomych oscylatorów .....	
4.3.3. Metoda wyznaczania charakterystyk losowej odpowiedzi mostu .....	
4.3.4. Analiza numeryczna efektów spowodowanych inercją i resorowaniem pojazdów .....	
4.3.5. Analiza numeryczna efektów nieliniowych .....	
4.4. Niezawodność mostów wiszących obciążonych losowym ruchem drogowym .....	
4.4.1. Sformułowanie zagadnienia .....	
4.4.2. Problem pierwszego przekroczenia .....	
4.4.3. Niezawodność zmęczeniowa .....	
4.5. Podsumowanie .....	
5. Drgania wymuszone działaniem porywistego wiatru .....	
5.1. Uwagi wstępne .....	
5.2. Obciążenia aerodynamiczne mostów .....	
5.3. Niestacjonarny model stochastyczny obciążenia mostu porywistym wiatrem .....	
5.4. Algorytm analizy korelacyjnej losowych drgań mostu obciążonego porywistym wiatrem .....	
5.5. Przykład obliczeniowy .....	
5.6. Podsumowanie .....	
6. Zakończenie .....	
6.1. Wnioski i uwagi końcowe .....	
6.2. Podsumowanie .....	
Dodatek .....	
Literatura .....	
Streszczenie .....	

# Contents

List of notations .....	
1. Introduction .....	
1.1. Suspension bridge profile and construction history .....	
1.2. Motives and objectives of the dissertation .....	
1.3. Scope of the dissertation .....	
2. Theory of multi-span suspension bridge vibrations .....	
2.1. Introduction .....	
2.2. Physical model of the structure .....	
2.3. Differential equations of cable vibrations .....	
2.4. Analytical description of multi-span bridge vibrations .....	
2.4.1. The general form of differential equations of stiffness girder vibrations .....	
2.4.2. Nonlinear vibrations of bridges with a large cable sag .....	
2.4.3. Nonlinear vibrations of bridges with a small cable sag .....	
2.5. Application of the Lagrange–Ritz method to transform the continuous bridge model into MDOF model .....	
2.5.1. Energy balance .....	
2.5.2. Equation of motion of bridges with horizontal backstays and a large cable sag .....	
2.5.3. Equation of motion of bridges with slanted backstays and a large cable sag .....	
2.5.4. Equation of motion of bridges with a small cable sag .....	
2.6. Damping of vibrations .....	
2.7. Determination of displacements, internal forces and stresses .....	
3. Deterministic analysis of selected suspension bridge dynamic problems .....	
3.1. Scope and objectives of investigations .....	
3.2. Analysis of the eigenproblem .....	
3.2.1. Estimation of the effect of horizontal cable displacements on natural frequencies and mode shapes of three-span suspension bridge vibrations .....	
3.2.2. Verification of computations on the basis of experimental data .....	
3.3. Selection of the damping model on the basis of analysis of resonant vibrations due to excitation by periodic series of concentrated moving forces .....	
3.4. Analysis of the dynamic and static influence functions of bridge displacements and cable tensions .....	
3.5. Recapitulation .....	
4. Vibrations due to the random highway traffic .....	
4.1. Initial remarks .....	
4.2. Analytical-numerical method of the moment analysis of linear random vibrations .....	

4.2.1.	Formulation of the method .....	
4.2.2.	Characteristics of random vibrations of the hypothetical bridge .....	
4.3.	Application of the simulation method to the nonlinear vibration analysis .....	
4.3.1.	Simulation model of the random traffic load .....	
4.3.2.	Equations of motion of the suspension bridge loaded by the set of moving oscillators .....	
4.3.3.	Method of determination of random bridge response characteristics .....	
4.3.4.	Numerical analysis of effects caused by inertia forces and springing of vehicles .....	
4.3.5.	Numerical analysis of nonlinear effects .....	
4.4.	Reliability of suspension bridges loaded by the random highway traffic .....	
4.4.1.	Problem formulation .....	
4.4.2.	First crossing problem .....	
4.4.3.	Fatigue reliability .....	
4.5.	Recapitulation .....	
5.	Vibrations caused by gusty wind .....	
5.1.	Initial remarks .....	
5.2.	Aerodynamic bridge loads .....	
5.3.	Nonstationary stochastic model of the gusty wind load of a bridge .....	
5.4.	An algorithm for correlation analysis of bridge vibrations due to the gusty wind .....	
5.5.	Numerical example .....	
5.6.	Recapitulation .....	
6.	Ending .....	
6.1.	Final conclusions and remarks .....	
6.2.	Recapitulation .....	
	Supplement .....	
	References .....	
	Summary .....	