

Kazimierz Myślecki

**Metoda elementów brzegowych  
w statyce dźwigarów  
powierzchniowych**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław 2004

Recenzenci  
Piotr KONDERLA  
Ryszard SYGULSKI

Opracowanie redakcyjne  
Aleksandra WAWRZYŃKOWSKA

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISBN 83-7085-830-9

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 825/2004.

## Spis treści

|   |    |
|---|----|
| Ważniejsze oznaczenia i konwencje .....   | 5  |
| 1. Wprowadzenie .....   | 7  |
| 2. Metoda elementów brzegowych .....  | 10 |
| 2.1. Wstęp .....  | 10 |
| 2.2. Rozwiązanie podstawowe .....   | 11 |
| 2.3. Jednowymiarowe elementy brzegowe .....   | 13 |
| 2.4. Płyta cienka .....   | 16 |
| 2.5. Płyta na podłożu sprężystym .....  | 23 |
| 2.6. Płyta gruba .....  | 28 |
| 2.7. Powłoki mało wyniosłe .....  | 34 |
| 2.8. Powłoka walcowa .....  | 39 |
| 2.9. Metoda kolokacji Kupradzego .....  | 42 |
| 3. Przybliżone rozwiązania podstawowe równań równowagi wybranych dźwigarów<br>powierzchniowych .....                      | 45 |
| 3.1. Płyty cienkie .....  | 45 |
| 3.1.1. Płyta spoczywająca na podłożu Winklera .....   | 45 |
| 3.1.2. Płyta spoczywająca na podłożu Pasternaka .....   | 46 |
| 3.1.3. Płyta spoczywająca na półprzestrzeni sprężystej .....  | 47 |
| 3.1.4. Płyta ortotropowa .....  | 47 |
| 3.2. Płyty grube .....  | 48 |
| 3.3. Powłoki mało wyniosłe .....  | 52 |
| 3.4. Powłoka walcowa .....  | 54 |
| 3.5. Promień zbieżności przybliżonych rozwiązań podstawowych .....  | 56 |
| 4. Numeryczne przykłady zastosowania przybliżonych rozwiązań podstawowych w metodzie<br>elementów skończonych (MEB) ..... | 58 |
| 4.1. Wstęp .....  | 58 |
| 4.2. Płyta spoczywająca na podłożu Winklera .....   | 58 |
| 4.3. Płyta spoczywająca na podłożu Pasternaka .....   | 60 |
| 4.4. Płyta spoczywająca na półprzestrzeni sprężystej .....  | 61 |
| 4.5. Płyta ortotropowa .....  | 62 |
| 4.6. Płyta gruba .....  | 63 |
| 4.7. Sferyczna powłoka mało wyniosła .....  | 65 |
| 4.8. Powłoka walcowa .....  | 66 |
| 5. Podsumowanie .....   | 69 |
| Dodatek A. Uogólniona transformacja Fouriera .....  | 71 |
| Dodatek B. Metoda Hörmandera .....  | 73 |
| Dodatek C. Rozwiązania podstawowe $n$ -tej potęgi laplasjanu .....  | 75 |
| Dodatek D. Pochodne rozwiązań podstawowych $n$ -tej potęgi laplasjanu .....   | 77 |
| Literatura .....  | 80 |

## Ważniejsze oznaczenia i konwencje

|   |   |
|---|---|
| $(x_1, x_2, x_3)$   | – kartezjański układ współrzędnych,                               |
| $i, j, k, \dots$  | – wskaźniki z zakresu $\{1, 2, 3\}$ ,                             |
| $\alpha, \beta, \gamma, \dots$                                  | – wskaźniki z zakresu $\{1, 2\}$ ,                                |
| $(\cdot)_{ii}, (\cdot)_{\alpha\alpha}$                          | – sumowanie względem powtórnego wskaźnika w jego zakresie,        |
| $(\cdot)_{,\alpha}$   | – pochodna cząstkowa względem $x_\alpha$ ,                        |
| $\partial_\alpha^n$   | – operator $n$ -tej pochodnej cząstkowej względem $x_\alpha$ ,    |
| $\Delta$  | – laplasjan na płaszczyźnie $(x_1, x_2)$ ,                        |
| $f * g$   | – splot funkcji $f$ i $g$ na płaszczyźnie $(x_1, x_2)$ ,          |
| $\mathcal{F}[w(x_1, x_2)] = \tilde{w}(\alpha_1, \alpha_2)$      | – transformata Fouriera (obraz) funkcji $w$ ,                     |
| $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{w}(\alpha_1, \alpha_2)] = w(x_1, x_2)$ | – odwrotna transformata Fouriera (oryginał) funkcji $\tilde{w}$ , |
| $\alpha_1, \alpha_2$  | – współrzędne w przestrzeni obrazów Fouriera,                     |
| $\rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$                         | – promień w przestrzeni obrazów,                                  |
| $L_{ij}$  | – macierz operatorów różniczkowych,                               |
| $L'_{ij}$   | – macierz dopełnień algebraicznych $L_{ij}$ ,                     |
| $ L_{ij} $  | – wyznacznik $L_{ij}$ ,   |
| $\delta_{ij}, \delta_{\alpha\beta}$                             | – symbol Kroneckera,  |
| $\varepsilon_{\alpha\beta}$                                     | – symbol permutacyjny,  |
| $n!$  | – silnia $n$ ,  |
| $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$                            | – symbol Newtona,   |
| $\delta$  | – dystrybucja Diraca,   |
| $E, \nu$  | – moduł Younga, współczynnik Poissona,                            |
| $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$                        | – stała Lamego,   |
| $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$                                  | – stała Lamego, moduł Kirchhoffa,                                 |
| $h$   | – grubość dźwigara powierzchniowego,                              |
| $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$                                  | – sztywność płyty, sztywność zgięciowa powłoki,                   |

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}$ | – sztywność błonowa powłoki,  |
| $H = \frac{5}{6}Gh$        | – sztywność postaciowa płyty grubej,                                      |
| $S$                        | – dwuwymiarowy obszar na powierzchni środkowej dźwigara powierzchniowego, |
| $C$                        | – krzywa brzegowa obszaru $S$ ,   |
| $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  | – jednostkowy wektor normalny do krzywej $C$ ,                            |
| $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$  | – jednostkowy wektor styczny do krzywej $C$ ,                             |
| $\square \cdot \square$    | – różnica prawostronnej i lewostronnej wartości nieciągłej funkcji,       |
| $\int_C^{\wedge}$          | – wartość główna całki (Cauchy'ego) na krzywej $C$ ,                      |
| $Re(a)$                    | – część rzeczywista liczby zespolonej $a$ ,                               |
| $Im(a)$                    | – część urojona liczby zespolonej $a$ ,                                   |
| $i$                        | – jednostka urojona,  |
| $J_0, K_0, K_{-1}, Y_0$    | – funkcje Bessela,  |
| $kei$                      | – funkcja Kelvina,  |
| $H_0$                      | – funkcja Struvego.   |

# 1. Wprowadzenie

Zagadnienie brzegowe w statyce dźwigarów powierzchniowych przedstawia się za pomocą jednego z trzech sposobów:

- równania różniczkowego,
- zagadnienia wariacyjnego (funkcjonału Lagrange'a, zasady prac przygotowanych, sformułowania Galerkina),
- brzegowego równania całkowego.

Z każdego z tych sformułowań można wyprowadzić jedną z trzech dominujących obecnie metod komputerowych: z równania różniczkowego – metodę różnic skończonych (MRS), ze sformułowania wariacyjnego – metodę elementów skończonych (MES), a z brzegowego równania całkowego – metodę elementów brzegowych (MEB) stanowiącą przedmiot niniejszej pracy.

Metoda elementów brzegowych występuje w dwóch sformułowaniach: pośrednim i bezpośrednim.

Pośrednią metodę elementów brzegowych można wyprowadzić z obowiązującej w liniowej statyce zasady superpozycji. Niewiadomymi brzegowymi są wówczas pewne siły brzegowe niemające bezpośredniej interpretacji fizycznej (stąd nazwa metody). Bezpośrednią metodę elementów brzegowych natomiast wyprowadza się zwykle z twierdzenia Bettiego o wzajemności prac (lub innej właściwej dla danego zagadnienia tożsamości całkowej). Niewiadomymi są tutaj bezpośrednio uogólnione wielkości przemieszczeniowe i naprężeniowe.

Niezależnie od sformułowania całkowych równań brzegowych (pośredniego lub bezpośredniego) rozwiązuje się je jedną z dwóch metod:

- kolokacji,
- Galerkina.

W metodzie kolokacji żąda się spełnienia brzegowych równań całkowych jedynie w pewnych punktach leżących na brzegu (punktach kolokacji). W metodzie Galerkina ortogonalizuje (minimalizuje) się błąd przybliżonego rozwiązania całkowego równania brzegowego względem funkcji próbnych.

Jedną z wersji metody kolokacji jest podejście Kupradzkiego [1, 2], polegające na wykorzystaniu tożsamości całkowych (odpowiadających tożsamości Somigliany w klasycznej teorii sprężystości) zamiast brzegowych równań całkowych. Zaletą tego podejścia jest uniknięcie obliczania całek osobliwych, a w szczególności wartości

głównych w sensie Cauchy’ego całek brzegowych, co ma istotny wpływ na uproszczenie algorytmów numerycznych. Podejście to jest konsekwentnie stosowane w niniejszej pracy.

Podstawową zaletą i cechą metody elementów brzegowych jest poszukiwanie rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia na brzegu obszaru, a nie w jego wnętrzu. Powoduje to zmniejszenie rozmiaru przestrzennego zagadnienia o jeden. Dwuwymiarowe zagadnienia statyki dźwigarów powierzchniowych redukują się w ten sposób do jednowymiarowych, rozwiązywanych na jednowymiarowym brzegu.

Niezależnie od sposobu sformułowania i zastosowanej metody rozwiązania całkowego równania brzegowego istotne znaczenie ma rozwiązanie podstawowe wyjściowego układu równań różniczkowych, które jest jądrem równań całkowych. Z fizycznego punktu widzenia jest to rozwiązanie od jednostkowych obciążeń skupionych, a formalnie definiuje się je jako szczególne rozwiązanie równania różniczkowego (bez uwzględnienia warunków brzegowych) z prawą stroną w postaci  $\delta$  Diraca. W zagadnieniach klasycznej teorii sprężystości rozwiązania podstawowe są znane i wyrażają się przez funkcje elementarne. W przypadku dźwigarów powierzchniowych rozwiązania podstawowe są wyrażane przez funkcje specjalne, trudno dostępne w systemach programowania, lub rozwiązania te nie są znane.

Oryginalnym dorobkiem autora tej pracy jest podanie sposobu wyznaczania przybliżonych rozwiązań podstawowych dla tych zagadnień statyki dźwigarów powierzchniowych, które są opisywane eliptycznymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. Są to:

- płyty na podłożu sprężystym,
- płyty grube – Reissnera–Mindlina,
- powłoki mało wyniosłe o stałej krzywiznie,
- wyniosłe powłoki walcowe.

Rozwiązania podstawowe mają prostą postać szeregów potęgowych, a otrzymano je metodami analizy matematycznej, stosując:

- transformację Fouriera,
- metodę Hörmandera,
- metodę małego parametru.

Początkowo metodę elementów brzegowych przyjęto w klasycznych zagadnieniach teorii potencjału [3] i teorii sprężystości w przemieszczeniach [4] i naprężeniach [5]. Obecnie metoda elementów brzegowych jest jedną z najpowszechniej stosowanych metod komputerowych, nie tylko w zagadnieniach statyki dźwigarów powierzchniowych, i w trakcie swojego rozwoju (ponad 30 lat) doczekała się wielu opracowań, z których warto wymienić obszerne monografie [6–9] oraz prace w języku polskim [10, 11].

W starszych pracach [27, 29–31, 40, 41], przed pojawieniem się metody elementów brzegowych, można znaleźć szczególne rozwiązania od obciążeń skupionych rozpatrywanych tutaj dźwigarów powierzchniowych. Choć prace te są cennym źródłem informacji dla badacza zajmującego się metodą elementów brzegowych, podane

w nich rozwiązania nie stanowią jednak kompletnego tensora rozwiązań podstawowych wymaganego w metodzie elementów brzegowych. Konieczne jest więc uzupełnienie tych rozwiązań, co nie zawsze bywa łatwe i możliwe wobec złożoności równań opisujących dźwigary powierzchniowe.

Obecnie, w celu znalezienia rozwiązań podstawowych, stosuje się różne podejścia, np. szeregi Fouriera [12] czy analityczne rozwiązania ogólne [13–15]. Jednak najbardziej uniwersalną metodą analityczną pozostaje transformacja Fouriera, konsekwentnie wykorzystywana w pracach autora [16–18]. Jedynym problemem, jaki się tutaj pojawia jest zwykle trudność w odwróceniu obrazów transformacji Fouriera. Stosowanie zaproponowanej w tej pracy metody przedstawiania rozwiązań podstawowych w postaci prostych szeregów rozwiązań podstawowych  $n$ -tej potęgi laplasjanu, choć również wykorzystuje się w niej transformację Fouriera, nie sprawia takich trudności.



## 2. Metoda elementów brzegowych

### 2.1. Wstęp

Istotę metody elementów brzegowych wygodnie jest przedstawić na przykładzie prostego zagadnienia brzegowego dla równania Poissona

$$\begin{aligned} -T\Delta w &= q \text{ w } S \\ w &= w_0 \text{ na } C_1 \\ -T \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} &= V_0 \text{ na } C_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Powyższe równanie różniczkowe może opisywać wiele zagadnień nauki i techniki. Tutaj przyjmiemy, że równanie (2.1) określa statykę płaskiej membrany (najprostszy dźwigar powierzchniowy) zajmującej obszar  $S$ , poddanej jednorodnemu napięciu  $T$  i obciążeniu poprzecznemu  $q$ . Warunki brzegowe na krzywej  $C$  przedstawiają wymuszone przemieszczenie poprzeczne  $w_0$  na części  $C_1$  i obciążenie poprzeczne  $V_0$  na części  $C_2$ .

Należy sformułować brzegowe równanie całkowe. W tym celu wykorzystamy twierdzenie Bettiego o wzajemności prac, które w tym przypadku można zapisać w postaci wzoru

$$\int_S q w^* dS + \int_C V w^* dC = \int_S q^* w dC + \int_C V^* w dC. \quad (2.2)$$

Zbiory wielkości  $\{w, q, V\}$  i  $\{w^*, q^*, V^*\}$  stanowią dwa różne układy przemieszczeń i obciążeń występujące w twierdzeniu Bettiego.

Gdy w twierdzeniu Bettiego zamiast drugiego układu przemieszczeń i obciążeń (z gwiazdką) zastosujemy układ związany z rozwiązaniem podstawowym  $\{\bar{w}, \delta, \bar{V}\}$ , tzn.

$$\begin{aligned} q^* &= \delta, \\ -T\Delta \bar{w} &= \delta \Rightarrow \bar{w} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}, \\ \bar{V} &= -T \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

wtedy tożsamość (2.2) przyjmie postać

$$\alpha w(\mathbf{y}) + \int_C \bar{V}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC = \int_C V(\mathbf{z}) \bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_S q(\mathbf{z}) \bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dS, \quad (2.4)$$

wobec własności dystrybucji  $\delta$  Diraca

$$\int_S w(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS = \alpha w(\mathbf{y}), \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in S, \\ 0, & \mathbf{y} \notin S \cup C. \end{cases} \quad (2.5)$$

Po przejściu granicznym z punktem  $\mathbf{y}$  do brzegu  $C$  równanie (2.4) przejdzie w brzegowe równanie całkowe

$$\beta w(\mathbf{y}) + \int_C \hat{\bar{V}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC - \int_C V(\mathbf{z}) \bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC = \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS. \quad (2.6)$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dla punktu regularnego na } C, \\ \frac{\omega}{2\pi}, & \text{dla punktu naroża o kącie rozwarcia } \omega \text{ na } C. \end{cases}$$

Pierwszą całkę w równaniu (2.6) należy rozumieć w sensie jej wartości głównej Cauchy'ego.

W równaniu całkowym (2.6), w każdym punkcie brzegu  $C$ , występuje jedna niewiadoma: reakcja  $V$  na części  $C_1$  i przemieszczenie  $w$  na części  $C_2$ . W metodzie elementów brzegowych równanie (2.6) rozwiązuje się numerycznie, dzieląc brzeg na elementy skończone, wewnątrz których znane i nieznanne wielkości brzegowe ze zbioru  $\{w, V\}$  są aproksymowane lokalnie wielomianami niskich stopni. Uzyskuje się w ten sposób liniowy układ równań algebraicznych. Szczegółowy tok postępowania przedstawiono w kolejnych punktach tego rozdziału.

## 2.2. Rozwiązanie podstawowe

Rozwiązaniem podstawowym (fundamentalnym) równania różniczkowego nazywa się rozwiązanie szczególne tego równania z prawą stroną w postaci dystrybucji  $\delta$  Diraca [19–22]. W przypadku analizy płyty cienkiej rozwiązanie podstawowe otrzymuje się z równania

$$D\Delta_x^2 \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.7)$$

Indeks  $x$  przy laplasjanie oznacza różniczkowanie w punkcie  $\mathbf{x}$ . Rozwiązanie podstawowe  $\bar{w}$  jest funkcją dwóch punktów:  $\mathbf{x}$  nazywa się punktem bieżącym, a  $\mathbf{y}$  punk-

tem źródłowym. Z definicji rozwiązania podstawowego wynika, że nie jest ono jednoznacznie określone: dwa rozwiązania podstawowe mogą się różnić o rozwiązanie ogólne równania jednorodnego [21].

Rozwiązaniu podstawowemu można często nadać interpretację fizyczną. W zagadnieniach statyki dźwigarów powierzchniowych równaniami opisującymi problem są zwykle równania równowagi w przemieszczeniach, a prawe strony są obciążeniami. Zgodnie z interpretacją dystrybucji  $\delta$  Diraca jako jednostkowej siły skupionej rozwiązanie podstawowe jest przemieszczeniem od takiego obciążenia, odniesionym do nieograniczonego obszaru (bez uwzględnienia jakichkolwiek warunków brzegowych). W przypadku równania (2.7) najczęściej przyjmuje się taką postać rozwiązania podstawowego

$$\bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{r_0}, \quad r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad (2.8)$$

w której  $r_0$  jest dowolną stałą o wymiarze długości (zwykle przyjmuje się  $r_0 = 1$ ). Jak widać z tego przykładu, rozwiązanie podstawowe nie zawsze ma sens fizyczny (tutaj występują nieskończone przemieszczenia), gdyż nie ma takiego sensu nieograniczona płyta. Sens fizyczny za to mają rozwiązania podstawowe dotyczące płyt na podłożu sprężystym. Warto zwrócić tutaj uwagę na pokrewieństwo rozwiązań podstawowych z powierzchniami wpływowymi, często wykorzystywanymi w statyce dźwigarów powierzchniowych: te drugie odnoszą się do dźwigarów powierzchniowych z konkretnymi warunkami brzegowymi.

Osobnego podejścia wymagają zagadnienia opisywane układami równań różniczkowych. Wówczas rozwiązania podstawowe są zdefiniowane następującym układem równań różniczkowych:

$$L_{ij} \bar{u}_{jk} = \delta_{ik} \delta. \quad (2.9)$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest macierz (tensor) rozwiązań podstawowych  $\bar{u}_{jk}$  (w tym przypadku o wymiarze  $3 \times 3$ ). Pokażemy to na przykładzie tarczy w płaskim stanie naprężenia, opisanej przemieszczeniowymi równaniami równowagi:

$$-\mu \Delta \bar{u}_{\alpha\beta} - (\lambda + \mu) \bar{u}_{\gamma\beta, \alpha\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \delta, \quad (2.10)$$

które można również przedstawić w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} -\mu \Delta - (\lambda + \mu) \partial_1^2 & -(\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2 \\ -(\lambda + \mu) \partial_1 \partial_2 & -\mu \Delta - (\lambda + \mu) \partial_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Rozwiązaniem tego układu są funkcje [6–9]:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} - \frac{2(\lambda + 3\mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \ln \frac{r}{r_0}, \\ \bar{u}_{22} &= \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2} - \frac{2(\lambda + 3\mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \ln \frac{r}{r_0}, \\ \bar{u}_{12} = \bar{u}_{21} &= \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{r_1 r_2}{r^2}, \quad r_\alpha = x_\alpha - y_\alpha.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Tę postać rozwiązań podstawowych otrzymano także w dodatku B przy opisywaniu metody Hörmandera. Rozwiązania podstawowe  $\bar{u}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  mają następującą interpretację fizyczną: jest to składowa przemieszczenia  $u_\alpha$  w punkcie  $\mathbf{x}$  wywołana jednostkową siłą skupioną o kierunku  $x_\beta$  przyłożoną w punkcie  $\mathbf{y}$ . Podobnie jak nieograniczona płyta, również nieograniczona tarcza nie ma sensu fizycznego.

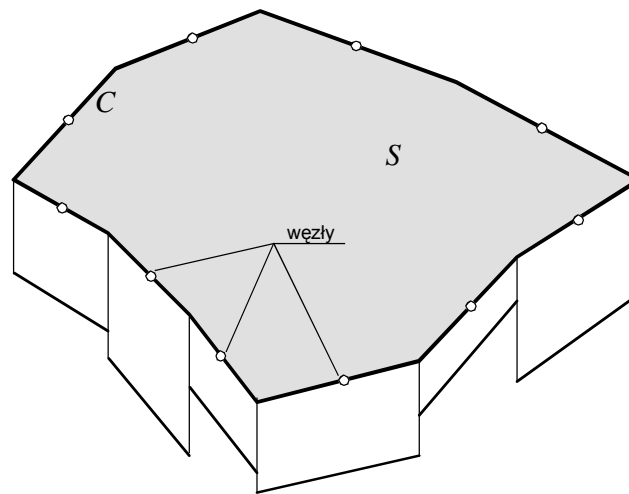
### 2.3. Jednowymiarowe elementy brzegowe

W rozwiązywaniu brzegowych równań całkowych nie wymaga się ciągłości aproksymowanych funkcji brzegowych, pojawia się więc możliwość stosowania najprostszych elementów brzegowych. Przykład takiego elementu o jednym węźle w jego środku i stałej wartości aproksymowanej funkcji wewnątrz elementu pokazano na rysunku 2.1.

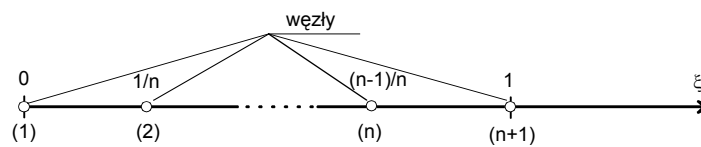
Niewątpliwą zaletą tego elementu jest prostota algorytmów zbudowanych przy jego zastosowaniu, ponieważ każdy węzeł jest punktem regularnym i nie ma problemu naroży. Do wad można zaliczyć słabą zbieżność podczas obliczania wielkości wewnętrznych w pobliżu brzegu i – co jest szczególnie ważne w przypadku dźwigarów powierzchniowych – niemożliwość wprowadzenia skupionych wielkości w narożach, gdy takie występują.

Najczęściej stosowanymi jednowymiarowymi elementami brzegowymi są elementy izoparametryczne z funkcjami kształtu w postaci wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a. Wielomian Lagrange’a stopnia  $n$  na znormalizowanym odcinku  $(0,1)$  z  $n + 1$  węzłami i parametryzowanym współrzędną lokalną  $\xi$  (rys. 2.2) ma postać [23]

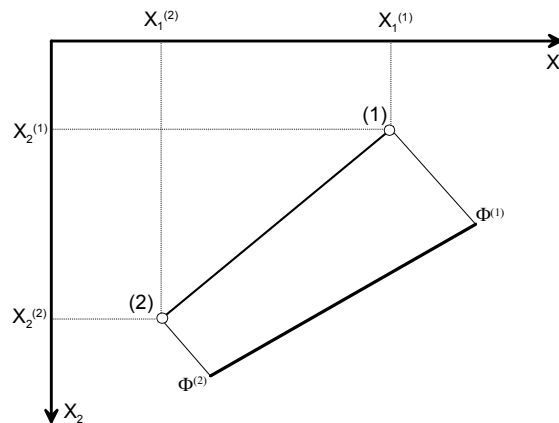
$$L_{(i)}^{n+1}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_{n+1})}{(\xi_i - \xi_1) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_{n+1})}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.\tag{2.13}$$



Rys. 2.1. Stałe elementy brzegowe

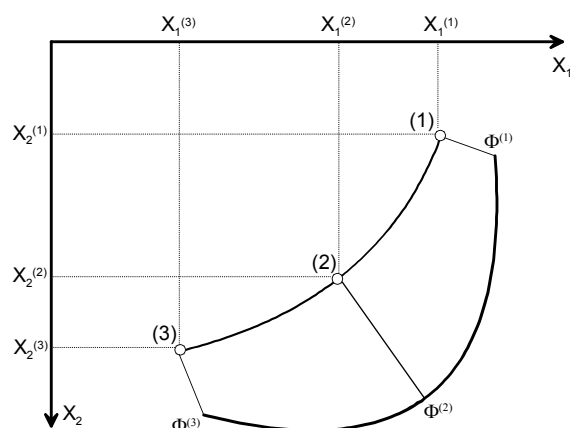


Rys. 2.2. Element brzegowy Lagrange'a

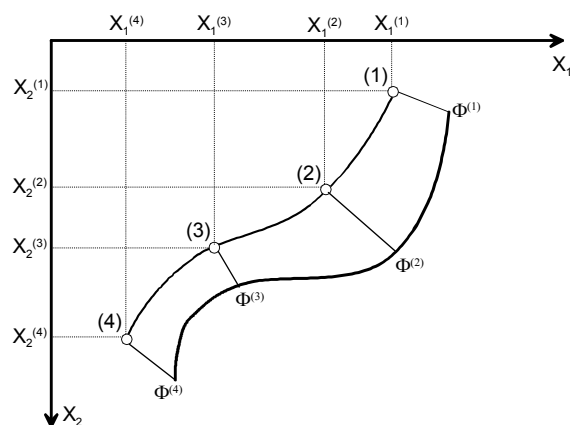


Rys. 2.3. Element liniowy

W zastosowaniach inżynierskich zwykle wystarczają aproksymacje wielomianami niskich stopni. Na rysunkach 2.3–2.5 przedstawiono interpolacje geometrii i funkcji brzegowej  $\Phi$  wielomianami Lagrange'a do trzeciego stopnia włącznie dla elementów izoparametrycznych.



Rys. 2.4. Element kwadratowy



Rys. 2.5. Element sześcienny

Funkcje kształtu dla poszczególnych stopni interpolacji mają postać:

- Funkcje liniowe

$$L_{(1)}^2(\xi) = 1 - \xi, \quad L_{(2)}^2(\xi) = \xi. \quad (2.14)$$

- Funkcje kwadratowe

$$L_{(1)}^3(\xi) = (2\xi - 1)(\xi - 1), \quad L_{(2)}^3(\xi) = 4\xi(1 - \xi), \quad L_{(3)}^3(\xi) = \xi(2\xi - 1). \quad (2.15)$$

- Funkcje sześciennne

$$\begin{aligned} L_{(1)}^4(\xi) &= \frac{1}{2}(3\xi - 1)(3\xi - 2)(1 - \xi), & L_{(2)}^4(\xi) &= \frac{9}{2}\xi(\xi - 1)(3\xi - 2), \\ L_{(3)}^4(\xi) &= \frac{9}{2}\xi(3\xi - 1)(1 - \xi), & L_{(4)}^4(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(3\xi - 1)(3\xi - 2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

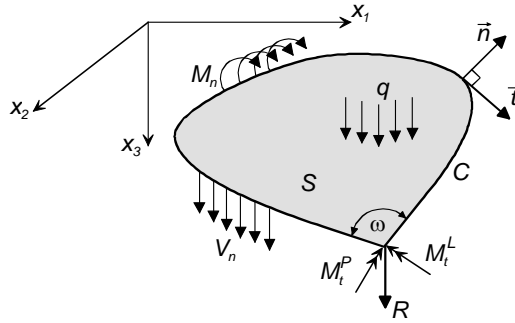
Aproksymowane wielkości – współrzędne krzywej brzegowej i funkcje brzegowe wewnątrz elementu – są wyrażone przez ich wartości węzłowe  $x_\alpha^{(i)}$ ,  $\Phi^{(i)}$ :

$$x_\alpha(\xi) = \sum_{i=1}^k x_\alpha^{(i)} L_{(i)}^k(\xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{i=1}^k \Phi^{(i)} L_{(i)}^k(\xi), \quad (2.17)$$

gdzie zakres sumowania  $k$  wynosi 2, 3 lub 4 – odpowiednio dla aproksymacji liniowej, kwadratowej i sześcienniej. Warto zwrócić uwagę na konieczność równomiernego doboru węzłów wzdłuż łuku rzeczywistej geometrii elementu w aproksymacji kwadratowej i wyższych stopni. W przeciwnym razie geometria brzegu może nie być dość dobrze odwzorowana.

## 2.4. Płyta cienka

Całkowe równania brzegowe bezpośredniej metody elementów brzegowych wyprowadza się zwykle z odpowiedniej dla danego zagadnienia tożsamości całkowej. W zagadnieniach statyki taką tożsamość stanowi twierdzenie Bettiego o wzajemności prac. Ze względu na podstawowe znaczenie twierdzenia Bettiego w dalszym toku rozważań wyprowadzimy je dla płyty cienkiej.



Rys. 2.6. Płyta cienka

Rozważa się płytę cienką, której powierzchnia podstawowa zajmuje na płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$  obszar  $S$  ograniczony krzywą brzegową  $C$  (rys. 2.6). Zakłada się, że krzywa  $C$  nie jest gładka i ma  $N$  naroży. Podstawowe wzory określające istotne wielkości kinematyczne i fizyczne w zależności od funkcji ugięcia  $w(x_1, x_2)$  mają postać:

- obroty:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= -w_{,\alpha}, \\ \varphi_n &= \varphi_\alpha n_\alpha, \\ \varphi_t &= \varphi_\alpha t_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial C}, \\ \varphi_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta} t_\beta \varphi_n - \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta \varphi_t, \end{aligned} \quad (2.18)$$

- momenty zginające i skręcające:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= -D \left[ (1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}w_{,\gamma\gamma} \right], \\ M_n &= M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta, \\ M_t &= M_{\alpha\beta}n_\alpha t_\beta, \end{aligned} \quad (2.19)$$

- siły poprzeczne i reakcje brzegowe Kirchhoffa  $V_n$ :

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= M_{\alpha\beta,\beta} = -D\Delta w_{,\alpha}, \\ Q_n &= Q_\alpha n_\alpha, \\ V_n &= Q_n + \frac{\partial M_t}{\partial C}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

oraz podstawowe równanie równowagi płyty (rzutów na oś  $x_3$ )

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} = q, \quad (2.21)$$

lub w przemieszczeniach po zastosowaniu zależności (2.19)<sub>1</sub>

$$D\Delta^2 w = q. \quad (2.22)$$

W celu wyprowadzenia twierdzenia Bettiego rozpatrzmy równanie płyty poddanej dwóm obciążeniom  $-q$  i  $q^*$ , które spowodują ugięcia płyty  $-w$  i  $w^*$ . Równanie równowagi (2.21) mnoży się obustronnie przez funkcję ugięcia  $w^*$ , a następnie całkuje po obszarze  $S$ . Po wykorzystaniu tożsamości różniczkowej (pochodna iloczynu funkcji)

$$-M_{\alpha\beta,\alpha\beta} w^* \equiv -(M_{\alpha\beta,\alpha} w^*)_{,\beta} + M_{\alpha\beta,\alpha} w^*_{,\beta} = -(Q_\beta w^*)_{,\beta} + M_{\alpha\beta,\alpha} w^*_{,\beta} \quad (2.23)$$

i zastosowaniu twierdzenia Ostrogradskiego–Gausa

$$\int_S (\cdot)_{,\alpha} dS = \int_C (\cdot) n_\alpha dC, \quad (2.24)$$

otrzymuje się

$$\int_S M_{\alpha\beta,\alpha} w^*_{,\beta} dS = \int_C Q_n w^* dC + \int_S q w^* dS. \quad (2.25)$$

Kolejno stosuje się podobną tożsamość różniczkową do wyrażenia podcałkowego z lewej strony (2.25)

$$M_{\alpha\beta,\alpha} w^*_{,\beta} \equiv (M_{\alpha\beta} w^*_{,\beta})_{,\alpha} - M_{\alpha\beta} w^*_{,\alpha\beta} = -(M_{\alpha\beta} \varphi_\beta^*)_{,\alpha} - M_{\alpha\beta} w^*_{,\alpha\beta} \quad (2.26)$$

i ponownie twierdzenie Ostrogradskiego–Gausa, otrzymując

$$\int_S M_{\alpha\beta} w^*_{,\alpha\beta} dS = \int_C M_{\alpha\beta} \varphi_\beta^* n_\alpha dC + \int_C Q_n w^* dC + \int_S q w^* dS. \quad (2.27)$$



Następnie, wprowadzając zależność (2.18)<sub>4</sub> na  $\varphi_{\beta}^*$  i (2.18)<sub>3</sub> na  $\varphi_t^*$  oraz wykorzystując własności

$$\varepsilon_{\alpha\beta} t_{\beta} = n_{\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} n_{\beta} = -t_{\alpha}, \quad (2.28)$$

można zapisać

$$\int_S M_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta}^* dS = - \int_C M_t \frac{\partial w^*}{\partial C} dC + \int_C M_n \varphi_n^* dC + \int_C Q_n w^* dC + \int_S q w^* dS. \quad (2.29)$$

Do wyrażenia podcałkowego po prawej stronie (2.19) stosujemy tożsamość różniczkową

$$M_t \frac{\partial w^*}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C} (M_t w^*) - \frac{\partial M_t}{\partial C} w^*. \quad (2.30)$$

Całka po gładkiej krzywej  $C$  pierwszego składnika po znaku równości w (2.30) znika. Gdy krzywa  $C$  nie jest gładka (posiada naroża), należy całkować kolejno po gładkich odcinkach. Otrzymamy w konsekwencji sumę różnic wyrażenia  $M_t w^*$  w każdym narożu (po liczbie naroży). Ostatecznie, po wykonaniu całkowania i wstawieniu momentów z zależności (2.19)<sub>1</sub> do (2.29) oraz wykorzystaniu wyrażenia na reakcję Kirchhoffa (2.20)<sub>3</sub> otrzymuje się

$$\begin{aligned} D \int_S \left[ (1-\nu) w_{,\alpha\beta} w_{,\alpha\beta}^* + \nu w_{,\alpha\alpha} w_{,\beta\beta}^* \right] dS \\ = \sum_{i=1}^N \square M_t w^* \square^i + \int_C M_n \varphi_n^* dC + \int_C V_n w^* dC + \int_S q w^* dS. \end{aligned} \quad (2.31)$$

W wyrażeniu  $\square M_t w^* \square^i$  funkcja ugięcia  $w^*$  jest ciągła – można więc je zapisać w postaci  $\square M_t \square^i w^*$ . Różnica momentu skracającego w narożu ma interpretację fizyczną skupionej reakcji w tym narożu

$$\square M_t \square^i = R_i. \quad (2.32)$$

Identyczną z wyżej podaną procedurę można by przeprowadzić dla równania równowagi (2.21), ale zapisanego dla momentów i obciążenia z gwiazdką (\*), mnożąc je przez funkcję ugięcia  $w$ . Otrzyma się wówczas podobne równanie do (2.31):

$$\begin{aligned} D \int_S \left[ (1-\nu) w_{,\alpha\beta} w_{,\alpha\beta}^* + \nu w_{,\alpha\alpha} w_{,\beta\beta}^* \right] dS \\ = \sum_{i=1}^N \square M_t^* w \square^i + \int_C M_n^* \varphi_n dC + \int_C V_n^* w dC + \int_S q^* w dS. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Wobec identyczności lewych stron tożsamości (2.31) i (2.33) można przyrównać także ich prawe strony:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N R_i w_i^* + \int_C M_n \varphi_n^* dC + \int_C V_n w^* dC + \int_S q w^* dS \\
& = \sum_{i=1}^N R_i^* w_i + \int_C M_n^* \varphi_n dC + \int_C V_n^* w dC + \int_S q^* w dS.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Tożsamość (2.34) przedstawia twierdzenie o wzajemności prac Bettiego dla płyty cienkiej. Warto zwrócić uwagę, że oba układy sił i przemieszczeń (z gwiazdką i bez gwiazdki) powinny być przyłożone do tej samej płyty (o tej samej geometrii i własnościach fizycznych). Wypada również zauważyć, że skupione reakcje narożne nie występują w każdym narożu – zależy to od warunków brzegowych sąsiedztwa naroża.

Układ przemieszczeń i sił z gwiazdką w tożsamości (2.34) zastąpimy układem sił i przemieszczeń od jednostkowego obciążenia skupionego przyłożonego do płyty nieograniczonej  $q^* = \delta$  – czyli rozwiązaniem podstawowym  $\bar{w}$  (2.8). Aby obie płyty miały tę samą geometrię, z płyty nieograniczonej „wycina” się obszar  $S$ . Działanie „odrzuconej” reszty płyty nieograniczonej zastępowane jest przemieszczeniami ( $\bar{w}, \bar{\varphi}_n$ ) i siłami przekrojowymi ( $\bar{M}_n, \bar{V}_n, \bar{R}$ ) na krzywej brzegowej  $C$ . Wielkości te, które w rzeczywistości są operatorami działającymi na rozwiązanie podstawowe  $\bar{w}$ , oblicza się na podstawie związków (2.18)–(2.20):

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_\alpha &= -\bar{w}_{,\alpha}, \\
\bar{\varphi}_n &= \bar{\varphi}_\alpha n_\alpha, \\
\bar{\varphi}_t &= \bar{\varphi}_\alpha t_\alpha = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial C}, \\
\bar{\varphi}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta} t_\beta \bar{\varphi}_n - \epsilon_{\alpha\beta} n_\beta \bar{\varphi}_t, \\
\bar{M}_{\alpha\beta} &= -D \left[ (1-\nu) \bar{w}_{,\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \bar{w}_{,\gamma\gamma} \right], \\
\bar{M}_n &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, \\
\bar{M}_t &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta, \\
\bar{Q}_\alpha &= \bar{M}_{\alpha\beta,\beta} = -D \Delta \bar{w}_{,\alpha}, \\
\bar{Q}_n &= \bar{Q}_\alpha n_\alpha, \\
\bar{V}_n &= \bar{Q}_n + \frac{\partial \bar{M}_t}{\partial C}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Korzystając z własności dystrybucji  $\delta$  Diraca

$$\int_S w(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS = \alpha w(\mathbf{y}), \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in S \\ 0, & \mathbf{y} \notin S \cup C \end{cases}, \tag{2.36}$$

otrzymuje się tożsamość całkową, odpowiadającą wzorom Somigliany w klasycznej teorii sprężystości

$$\begin{aligned}
& \alpha w(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i w_i \\
&= \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \sum_{i=1}^N R_i \bar{w}_i \\
&+ \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Po wykonaniu przejścia granicznego z punktem  $\mathbf{y}$  do brzegu  $C$  tożsamość (2.37) stanie się brzegowym równaniem całkowym, a osobliwą całkę z wyrażeniem  $\bar{V}_n$  należy traktować jako wartość główną Cauchy'ego

$$\begin{aligned}
& \beta w(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \hat{\bar{V}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i w_i \\
&- \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC - \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC - \sum_{i=1}^N R_i \bar{w}_i \\
&= \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dla punktu regularnego na } C, \\ \frac{\omega}{2\pi}, & \text{dla punktu naroża o kącie rozwarcia } \omega \text{ na } C. \end{cases}$$

Z czterech wielkości brzegowych w równaniu całkowym (2.38) dwie są znane z warunków brzegowych (pomijamy na razie reakcje narożne), a pozostałe dwie należy wyznaczyć z równań całkowych. Niezbędne drugie równanie całkowe otrzymuje się z tożsamości (2.34), rozpatrując nieograniczoną płytę obciążoną jednostkowym momentem w kierunku  $\mathbf{v}$ , czyli

$$q^* = \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{v}_y}. \tag{2.39}$$

Odpowiadające temu obciążeniu ugięcie płyty nieograniczonej  $\bar{\bar{w}}$  jest związane z rozwiązaniem podstawowym  $\bar{w}$  zależnością

$$\bar{\bar{w}} = \frac{\partial \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{v}_y}. \tag{2.40}$$

Tożsamość całkowa (2.37), po uwzględnieniu zależności (2.39) i (2.40), przyjmie postać

$$\begin{aligned} \alpha\varphi_\nu(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})\varphi_n(\mathbf{z})dC + \int_C \bar{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})w(\mathbf{z})dC + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i \bar{w}_i \\ = \int_C M_n(\mathbf{z})\bar{\varphi}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})dC + \int_C V_n(\mathbf{z})\bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y})dC + \sum_{i=1}^N R_i \bar{w}_i \\ + \int_S q(\mathbf{x})\bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS, \end{aligned} \quad (2.41)$$

po uwzględnieniu własności

$$\int_S w(\mathbf{x}) \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{v}_y} dS = \alpha\varphi_\nu(\mathbf{y}), \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in S \\ 0, & \mathbf{y} \notin S \cup C. \end{cases} \quad (2.42)$$

Wszystkie wielkości z podwójnym nadkreśleniem oblicza się ze związków (2.35), zastępując rozwiązanie podstawowe  $\bar{w}$  rozwiązaniem  $\bar{\bar{w}}$ . Podobnie jak w przypadku pierwszego równania brzegowego dokonuje się przejścia granicznego z punktem  $\mathbf{y}$  do brzegu  $C$  oraz z kierunkiem  $\mathbf{v}$  do kierunku normalnego do brzegu  $\mathbf{n}$ , otrzymując drugie całkowe równanie brzegowe płyty cienkiej

$$\begin{aligned} \beta\varphi_n(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})\varphi_n(\mathbf{z})dC + \int_C \bar{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})w(\mathbf{z})dC + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i \bar{w}_i \\ - \int_C M_n(\mathbf{z})\bar{\bar{\varphi}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})dC - \int_C V_n(\mathbf{z})\bar{\bar{w}}(\mathbf{z}, \mathbf{y})dC - \sum_{i=1}^N R_i \bar{\bar{w}}_i \\ = \int_S q(\mathbf{x})\bar{\bar{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})dS, \end{aligned} \quad (2.43)$$

gdzie parametr  $\beta$  przyjmuje identyczne wartości jak w równaniu (2.38). Równanie to można również uzyskać, różniczkując (2.38) względem wektora normalnego do brzegu  $\mathbf{n}$ . W równaniu (2.43) występuje niecałkowalna osobliwość  $\bar{V}_n$  rzędu  $1/r^2$ . Problem ten rozwiązuje się, korzystając z tożsamości

$$\int_C \bar{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})dC + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i = 0, \quad (2.44)$$

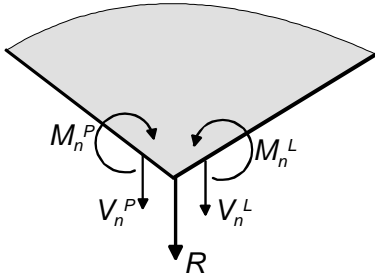
która jest po prostu równaniem równowagi – rzutów sił na oś  $x_3$ . Po pomnożeniu równości (2.44) przez  $w(\mathbf{y})$  i odjęciu stronami od (2.43) otrzymuje się ostateczną postać drugiego całkowego równania brzegowego płyty [24]

$$\begin{aligned}
& \beta \varphi_n(\mathbf{y}) + \int_C \hat{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \hat{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) [w(\mathbf{z}) - w(\mathbf{y})] dC \\
& + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i [w_i - w(\mathbf{y})] - \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& - \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC - \sum_{i=1}^N R_i \bar{w}_i = \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

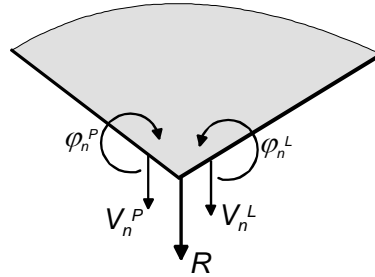
W zależności od warunków brzegowych możliwy jest następujący układ niewiadomych funkcji brzegowych:

- sztywne zamocowanie:  $\{M_n, V_n\}$  – niewiadome,  $\{w, \varphi_n\}$  – znane
- swobodne podparcie:  $\{\varphi_n, V_n\}$  – niewiadome,  $\{w, M_n\}$  – znane,
- brzeg swobodny:  $\{w, \varphi_n\}$  – niewiadome,  $\{M_n, V_n\}$  – znane.

Bardziej złożona sytuacja występuje w punktach narożnych. Spełnione powinny być tutaj trzy równania: jedno (2.38) i dwa (2.45) – ze względu na nieciągłość obrotu  $\varphi_n$ . Jednak nie zawsze łatwo zbilansować liczbę niewiadomych z liczbą równań bez dodatkowej analizy otoczenia naroża. Na przykład w narożu dwóch zamocowanych krawędzi (rys. 2.7) ogólna liczba niewiadomych wynosi 5: jedna reakcja skupiona  $R$ , dwie wartości reakcji  $V_n$  i dwie wartości momentów  $M_n$ . W rzeczywistości w tym narożu znikają momenty i reakcja skupiona [32]. Naroże to można więc częściowo wyłączyć z analizy, przyjmując a priori zerowe wartości wielkości brzegowych. W narożu obustronnie swobodnie podpartym (rys. 2.8) również występuje pięć niewiadomych  $\{R, \varphi_n^L, \varphi_n^P, V_n^L, V_n^P\}$ , z których kąty obrotu są równe zero [32]. Należy więc spełnić równanie (2.38) i dwa równania (2.45).



Rys. 2.7. Naroże zamocowane



Rys. 2.8. Naroże swobodnie podparte

W metodzie elementów brzegowych całkowite równania brzegowe rozwiązuje się numerycznie. Brzeg  $C$  dzieli się na  $L_E$  elementów brzegowych (p. 2.2), otrzymując  $L_W$  węzłów – wliczając w to  $L_R$  węzłów narożnych. W sumie otrzymuje się  $2L_W + L_R$  niewiadomych wartości węzłowych. Następnie, stosując metodę kolokacji, żąda się spełnienia równań (2.38) i (2.45) w punktach kolokacji  $\mathbf{y}_i$ , którymi są węzły elementów brzegowych. Ponieważ w punktach narożnych spełnione są dwa równania (2.45),

ogólny bilans niewiadomych i równań zostanie spełniony. W konsekwencji zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{Vw} & \bar{\mathbf{A}}_{Mj} & \bar{\mathbf{A}}_{jM} & \bar{\mathbf{A}}_{wV} \\ \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{Vw} & \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{Mj} & \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{jM} & \bar{\bar{\mathbf{A}}}_{wV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \varphi_n \\ \mathbf{M}_n \\ \mathbf{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_q \\ \bar{\bar{\mathbf{b}}}_q \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

gdzie współczynniki macierzy  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\bar{\mathbf{A}}}$  oraz  $\bar{\mathbf{b}}, \bar{\bar{\mathbf{b}}}$  oblicza się z wyrażień

$$\begin{aligned} \bar{A}_{vw}^{i(j)} &= \int_{C_E} \bar{V}(\mathbf{z}_\xi, \mathbf{y}_i) L_{(j)}^k(\xi) dC, \dots, \text{itp.}, \\ \bar{b}_q^i &= \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) dS, \quad \bar{\bar{b}}_q^i = \int_S q(\mathbf{x}) \bar{\bar{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) dS. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Układ równań (2.46) wymaga jeszcze przeniesienia znanych warunków brzegowych na jego prawą stronę.

Osobną uwagę należy poświęcić obliczaniu wartości głównych całek w równaniach (2.38) i (2.45). Wartości główne całek mają wpływ na współczynniki diagonalne macierzy  $\bar{\mathbf{A}}_{Vw}$  i  $\bar{\bar{\mathbf{A}}}_{M\varphi}$ . Najwygodniej jest obliczać je pośrednio, przez analizę jednostkowych ruchów sztywnych płyty [8, 9]. Inny sposób ominięcia całek osobliwych – metoda Kupradzego – zostanie szczegółowo opisany w p. 2.8.

Po wyznaczeniu wszystkich niewiadomych brzegowych można wrócić do tożsamości (2.37) i obliczyć ugięcia płyty, a po odpowiednim zróżniczkowaniu (2.18)–(2.20) siły wewnętrzne płyty.

## 2.5. Płyta na podłożu sprężystym

Równanie równowagi płyty cienkiej na podłożu sprężystym można przedstawić w postaci ogólnej

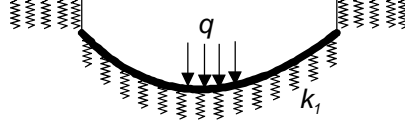
$$D\Delta^2 w + p(w) = q. \quad (2.48)$$

Reakcja odporu podłoża  $p(w)$  jest liniowym operatorem zależnym od ugięcia płyty  $w$ . Jego postać zależy od modelu podłoża.

Najprostszym modelem jest podłoże Winklera, w którym reakcja odporu podłoża jest liniową funkcją ugięcia  $w$

$$p(w) = k_1 w. \quad (2.49)$$

Sztywność podłoża  $k_1$  zależy od właściwości mechanicznych gruntu. Model ten można interpretować jako zbiór niezależnych sprężynek (rys. 2.9).



Rys. 2.9. Podłoże Winklera

Niewątpliwą wadą tego modelu podłoża jest brak jego współpracy poza obszarem płyty, co jest niezgodne z doświadczeniem.

Jeśli uwzględnimy zależność (2.49), to rozwiązanie podstawowe w tym przypadku powinno spełniać równanie

$$D\Delta^2 \bar{w} + k_1 \bar{w} = \delta. \quad (2.50)$$

Po zastosowaniu transformacji Fouriera możemy otrzymać obraz rozwiązania podstawowego w postaci

$$\tilde{\bar{w}} = \frac{1}{D\rho^4 + k_1}, \quad (2.51)$$

lub po rozłożeniu na ułamki proste

$$\tilde{\bar{w}} = \frac{l^2}{2D} \left[ \frac{i}{\rho^2 + \left(\frac{\beta_1}{l}\right)^2} - \frac{i}{\rho^2 + \left(\frac{\beta_2}{l}\right)^2} \right], \quad (2.52)$$

$$\beta_1 = \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \beta_2 = \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad l = \sqrt[4]{\frac{D}{k_1}}.$$

Po odwróceniu obrazu (2.52) [25, 26] otrzymuje się rozwiązanie podstawowe płyty na podłożu Winklera

$$\bar{w}(r) = \frac{l^2}{2\pi D} \left[ \frac{i}{2} K_0\left(\frac{\beta_1 r}{l}\right) - \frac{i}{2} K_0\left(\frac{\beta_2 r}{l}\right) \right]. \quad (2.53)$$

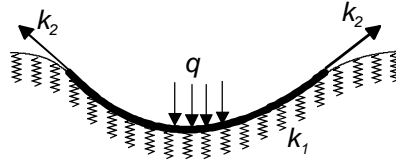
Można je również przedstawić w alternatywnej postaci [27], korzystając z własności funkcji specjalnych [28]

$$\bar{w}(r) = \frac{-l^2}{2\pi D} kei\left(\frac{r}{l}\right). \quad (2.54)$$

Innym modelem podłoża jest dwuparametrowe podłoże Pasternaka

$$p(w) = -k_2 \Delta w + k_1 w. \quad (2.55)$$

Z fizycznej interpretacji równania (2.55) widać, że podłoże to można traktować jak błonę o napięciu  $k_2$  rozpostartą nad polem sprężyn z podłoża Winklera (rys. 2.10).



Rys. 2.10. Podłoże Pasternaka

Tutaj występuje już współpraca podłoża poza obszarem płyty. Odpowiednie równanie rozwiązania podstawowego ma teraz postać

$$D\Delta^2 \bar{w} - k_2 \Delta \bar{w} + k_1 \bar{w} = \delta, \quad (2.56)$$

a jego obraz po transformacji Fouriera

$$\tilde{\bar{w}} = \frac{1}{D\rho^4 + k_2\rho^2 + k_1}. \quad (2.57)$$

Ze względu na wyróżnik mianownika obrazu należy rozpatrzeć trzy przypadki:

1.  $k_2^2 - 4Dk_1 < 0$ .

Po rozkładzie na ułamki proste otrzymuje się

$$\tilde{\bar{w}} = \frac{1}{\sqrt{4Dk_1 - k_2^2}} \left( \frac{i}{\rho^2 - z_1} - \frac{i}{\rho^2 - z_2} \right), \quad (2.58)$$

$$z_1 = \frac{-k_2 - i\sqrt{4Dk_1 - k_2^2}}{2D}, \quad z_2 = \frac{-k_2 + i\sqrt{4Dk_1 - k_2^2}}{2D},$$

a po odwróceniu obrazów [25]

$$\bar{w}(r) = \frac{l^2}{2\pi D} \left[ \frac{i}{2} K_0 \left( \frac{\beta_1 r}{l} \right) - \frac{i}{2} K_0 \left( \frac{\beta_2 r}{l} \right) \right], \quad (2.59)$$

$$l = \sqrt[4]{\frac{4D^2}{4Dk_1 - k_2^2}}, \quad \beta_1 = \sqrt{i + \frac{k_2}{2D} l^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{-i + \frac{k_2}{2D} l^2}.$$



$$2. \quad k_2^2 - 4Dk_1 = 0.$$

Tutaj występuje pierwiastek podwójny

$$\tilde{w} = \frac{1}{D} \frac{1}{\left(\rho^2 + \frac{k_2}{2D}\right)^2}. \quad (2.60)$$

Po odwróceniu obrazu [25] znajdziemy

$$\bar{w}(r) = \frac{lr}{4\pi D} K_{-1}\left(\frac{r}{l}\right), \quad l = \sqrt{\frac{2D}{k_2}}. \quad (2.61)$$

$$3. \quad k_2^2 - 4Dk_1 > 0.$$

Oba pierwiastki mianownika są tutaj ujemne

$$\tilde{w} = \frac{1}{\sqrt{k_2^2 - 4Dk_1}} \left( \frac{1}{\rho^2 - z_2} - \frac{1}{\rho^2 - z_1} \right), \quad (2.62)$$

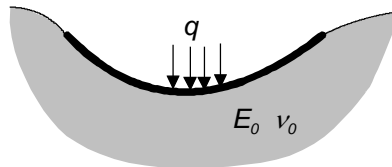
$$z_1 = \frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4Dk_1}}{2D} < 0, \quad z_2 = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4Dk_1}}{2D} < 0.$$

Po odwróceniu obrazu [25] otrzymuje się

$$\bar{w}(r) = \frac{l^2}{2\pi D} \left[ K_0\left(\frac{\beta_2 r}{l}\right) - K_0\left(\frac{\beta_1 r}{l}\right) \right], \quad (2.63)$$

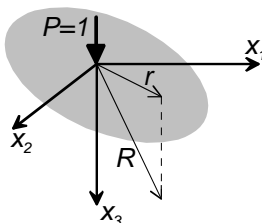
$$l = \sqrt[4]{\frac{D^2}{k_2^2 - 4Dk_1}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4Dk_1}}{2\sqrt{k_2^2 - 4Dk_1}}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - 4Dk_1}}{2\sqrt{k_2^2 - 4Dk_1}}}.$$

Najbardziej złożonym modelem podłoża i jednocześnie najbliższym warunkom rzeczywistym jest półprzestrzeń sprężysta o stałych sprężystości  $E_0$  i  $\nu_0$  (rys. 2.11).



Rys. 2.11. Półprzestrzeń sprężysta

W tym przypadku nie można podać prostego wyrażenia różniczkowego określającego reakcję odporu podłoża. Wyznacza się ją z rozwiązania zagadnienia Boussinesqa (rys. 2.12).



Rys. 2.12. Zagadnienie Boussinesqa

Pionowe przemieszczenie  $u_3$  od jednostkowego obciążenia wyraża się wzorem [29]

$$u_3 = \frac{1 + \nu_0}{2\pi E_0} \left[ \frac{x_3^2}{R^3} + \frac{2(1 - \nu_0)}{R} \right], \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (2.64)$$

a na płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$

$$u_3 = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.65)$$

Po zastosowaniu zasady superpozycji ugięcie płyty od odporu podłoża  $p(y_1, y_2)$  wyraża się w postaci spłotu

$$w(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_3(x_1 - y_1, x_2 - y_2) p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = u_3 * p. \quad (2.66)$$

W ten sposób otrzymuje się układ równań całkowo-różniczkowych

$$\begin{cases} w = u_3 * p, \\ D\Delta^2 w + p = q, \end{cases} \quad (2.67)$$

z dwoma niewiadomymi: odporem podłoża  $p$  i ugięciem  $w$ .

Układ równań (2.67) poddaje się transformacji Fouriera, a następnie eliminuje z niego obraz odporu  $\tilde{p}$  i otrzymuje się postać obrazu rozwiązania podstawowego

$$\tilde{w} = \frac{1}{D} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\rho^3 + \frac{1}{l^3}}, \quad l = \sqrt[3]{\frac{2D(1 - \nu_0^2)}{E_0}}. \quad (2.68)$$

Po rozłożeniu na ułamki proste otrzymuje się

$$\tilde{w} = \frac{l^3}{D} \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{3l} + \frac{\beta_1}{\rho + \frac{1}{l}} + \frac{\beta_2}{\rho + \frac{\beta_2}{l}} \right), \quad (2.69)$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}.$$

Odwroćenie obrazu (2.69) prowadzi do następującej postaci rozwiązania podstawowego płyty na półprzestrzeni sprężystej:

$$\begin{aligned} \bar{w}(r) = \frac{l^2}{12D} & \left\{ \mathbf{H}_0 \left( \frac{r}{l} \right) - Y_0 \left( \frac{r}{l} \right) \right. \\ & + \beta_1 \left[ \mathbf{H}_0 \left( \frac{\beta_1 r}{l} \right) - Y_0 \left( \frac{\beta_1 r}{l} \right) \right] \\ & \left. + \beta_2 \left[ \mathbf{H}_0 \left( \frac{\beta_2 r}{l} \right) - Y_0 \left( \frac{\beta_2 r}{l} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

We wszystkich rozpatrywanych tutaj przypadkach płyt spoczywających na podłożu sprężystym spełnione są wyprowadzone już całkowite równania brzegowe (2.38) i (2.45). Należy jedynie zastosować odpowiednie rozwiązania podstawowe: (2.53), (2.59), (2.61), (2.63) lub (2.70).

## 2.6. Płyta gruba

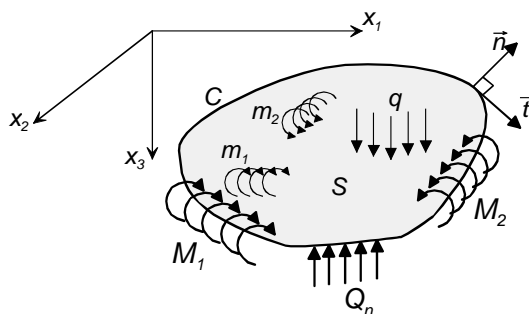
W teorii płyt grubych (inaczej zwanych płytami Reissnera–Mindlina) uwzględnia się wpływ sił poprzecznych i odkształceń postaciowych z nimi związanych na deformację płyty. Im grubość płyty jest większa, tym bardziej rośnie wpływ sił poprzecznych – stąd nazwa tej teorii. W teorii płyt grubych występują trzy niezależne parametry przemieszczeniowe: ugięcie  $w$  i dwa obroty  $\varphi_\alpha$ . Dodatkowe obciążenie płyty stanowią pola rozłożonych momentów  $m_\alpha$  (rys. 2.13).

Związki prawa Hooke'a dla momentów i sił poprzecznych przyjmą teraz postać:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D \left[ \frac{1-\nu}{2} (\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) + \nu \delta_{\alpha\beta} \varphi_{\gamma,\gamma} \right], \\ Q_\alpha &= H (\varphi_\alpha + w_{,\alpha}), \end{aligned} \quad (2.71)$$

a równania równowagi:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\alpha} + q &= 0, \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_{\alpha} + m_{\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$



Rys. 2.13. Płyta gruba

Po wprowadzeniu związków (2.71) do równań (2.72) otrzymuje się trzy równania równowagi w przemieszczeniach:

$$\begin{aligned} -H\Delta w - H\varphi_{1,1} - H\varphi_{2,2} &= q, \\ Hw_{,1} + H\varphi_1 - D\varphi_{1,11} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{1,22} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{2,12} &= m_1, \\ Hw_{,2} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{1,12} + H\varphi_2 - D\varphi_{2,22} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{2,11} &= m_2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Równania równowagi płyty grubej wymagają podania trzech warunków brzegowych. Pozwala to na dokładne spełnienie warunków naprężeniowych na brzegu swobodnym, w przeciwieństwie do płyty cienkiej, gdzie te warunki nie są spełnione. Zdefiniujmy następujące siły brzegowe:

$$\begin{aligned} M_{\alpha} &= M_{\alpha\beta}n_{\beta}, \\ Q_n &= Q_{\alpha}n_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

W najbardziej typowych sposobach podparcia możemy zebrać znane i niewiadome wielkości brzegowe:

- sztywne zamocowanie:  $\{M_1, M_2, Q_n\}$  – niewiadome,  $\{w, \varphi_1, \varphi_2\}$  – znane,
- swobodne podparcie:  $\{\varphi_1, \varphi_2, Q_n\}$  – niewiadome,  $\{w, M_1, M_2\}$  – znane,
- brzeg swobodny:  $\{w, \varphi_1, \varphi_2\}$  – niewiadome,  $\{M_1, M_2, Q_n\}$  – znane.

Zapiszemy układ (2.71) w takiej formie, aby wygodnie było znaleźć rozwiązania podstawowe

$$L_{ij}\bar{u}_{jk} = \delta\delta_{ik}, \quad (2.75)$$

gdzie:

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -H\Delta & -H\partial_1 & -H\partial_2 \\ H\partial_1 & \left(H - D\partial_1^2 - D\frac{1-\nu}{2}\partial_2^2\right) & -D\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 \\ H\partial_2 & -D\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & \left(H - D\partial_2^2 - D\frac{1-\nu}{2}\partial_1^2\right) \end{bmatrix},$$

$$\bar{u}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{w}_q & \bar{w}_{m_1} & \bar{w}_{m_2} \\ \bar{\varphi}_{1q} & \bar{\varphi}_{1m_1} & \bar{\varphi}_{1m_2} \\ \bar{\varphi}_{2q} & \bar{\varphi}_{2m_1} & \bar{\varphi}_{2m_2} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\delta\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Po zastosowaniu transformacji Fouriera do obu stron równania (2.75) otrzymuje się

$$\tilde{M}_{ij}\tilde{u}_{jk} = \delta_{ik}, \quad (2.77)$$

gdzie:

$$\tilde{M}_{ij} = \begin{bmatrix} H\rho^2 & iH\alpha_1 & iH\alpha_2 \\ -iH\alpha_1 & H + D\left(\alpha_1^2 + \frac{1-\nu}{2}\alpha_2^2\right) & D\frac{1+\nu}{2}\alpha_1\alpha_2 \\ -iH\alpha_2 & D\frac{1+\nu}{2}\alpha_1\alpha_2 & H + D\left(\alpha_2^2 + \frac{1-\nu}{2}\alpha_1^2\right) \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

$$\tilde{u}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_q & \tilde{w}_{m_1} & \tilde{w}_{m_2} \\ \tilde{\varphi}_{1q} & \tilde{\varphi}_{1m_1} & \tilde{\varphi}_{1m_2} \\ \tilde{\varphi}_{2q} & \tilde{\varphi}_{2m_1} & \tilde{\varphi}_{2m_2} \end{bmatrix}.$$

Z liniowego układu równań (2.77) widać, że macierz obrazów rozwiązań podstawowych jest odwrotna do macierzy  $\tilde{M}_{ij}$

$$\tilde{u}_{ij} = \tilde{M}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{D\rho^2 + H}{HD\rho^4} & \frac{-i\alpha_1}{D\rho^2} & \frac{-i\alpha_2}{D\rho^2} \\ \frac{i\alpha_1}{D\rho^2} & \frac{D\rho^2[(1-\nu)\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2] + 2H\alpha_1^2}{D\rho^2[D(1-\nu)\rho^2 + 2H]} & \frac{-\alpha_1\alpha_2[D(1-\nu)\rho^2 - 2H]}{D\rho^2[D(1-\nu)\rho^2 + 2H]} \\ \frac{i\alpha_2}{D\rho^2} & \frac{-\alpha_1\alpha_2[D(1-\nu)\rho^2 - 2H]}{D\rho^2[D(1-\nu)\rho^2 + 2H]} & \frac{D\rho^2[(1-\nu)\alpha_2^2 + 2\alpha_1^2] + 2H\alpha_2^2}{D\rho^2[D(1-\nu)\rho^2 + 2H]} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Macierz rozwiązań podstawowych otrzymuje się stosując odwrotną transformację Fouriera po uprzednim rozłożeniu elementów macierzy obrazu  $\tilde{u}_{ij}$  na ułamki proste [25]. Ostatecznie rozwiązania podstawowe można wyrazić w postaci:

$$\begin{aligned} \bar{w}_q &= -\frac{1}{2\pi H} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{r_0}, \\ \bar{w}_{m_1} &= -\bar{\varphi}_{1q} = \frac{1}{8\pi D} \partial_1 \left( r^2 \ln \frac{r}{r_0} \right), \quad \bar{w}_{m_2} = -\bar{\varphi}_{2q} = \frac{1}{8\pi D} \partial_2 \left( r^2 \ln \frac{r}{r_0} \right), \\ \bar{\varphi}_{1m_1} &= \frac{-1}{8\pi D} \partial_1^2 \left( r^2 \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{2\pi H} \partial_2^2 \left[ \ln \frac{r}{r_0} + K_0(kr) \right], \\ \bar{\varphi}_{2m_2} &= \frac{-1}{8\pi D} \partial_2^2 \left( r^2 \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{2\pi H} \partial_1^2 \left[ \ln \frac{r}{r_0} + K_0(kr) \right], \\ \bar{\varphi}_{1m_2} &= \bar{\varphi}_{2m_1} = \frac{-1}{8\pi D} \partial_1 \partial_2 \left( r^2 \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{2\pi H} \partial_1 \partial_2 \left[ \ln \frac{r}{r_0} + K_0(kr) \right], \\ k &= \sqrt{\frac{2H}{D(1-\nu)}}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Twierdzenie Bettiego o wzajemności prac, w przypadku płyty grubej, przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \int_C (M_1 \varphi_1^* + M_2 \varphi_2^* + Q_n w^*) dC + \int_S (m_1 \varphi_1^* + m_2 \varphi_2^* + q w^*) dS \\ = \int_C (\varphi_1 M_1^* + \varphi_2 M_2^* + w Q_n^*) dC + \int_S (\varphi_1 m_1^* + \varphi_2 m_2^* + w q^*) dS. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Warto tutaj zwrócić uwagę na brak wielkości narożnych, które występują w płycie cienkiej.

W miejsce sił i przemieszczeń z gwiazdką wstawia się kolejno kolumny macierzy obciążeń (2.76)<sub>3</sub>, kolumny macierzy rozwiązań podstawowych (2.76)<sub>2</sub>, oraz odpowiednie siły brzegowe obliczone na podstawie zależności (2.71) i (2.74):

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{\alpha\beta q} &= D \left[ \frac{1-\nu}{2} (\bar{\varphi}_{\alpha q, \beta} + \bar{\varphi}_{\beta q, \alpha}) + \nu \delta_{\alpha\beta} \bar{\varphi}_{\gamma q, \gamma} \right], \\
\bar{M}_{\alpha\beta m_1} &= D \left[ \frac{1-\nu}{2} (\bar{\varphi}_{\alpha m_1, \beta} + \bar{\varphi}_{\beta m_1, \alpha}) + \nu \delta_{\alpha\beta} \bar{\varphi}_{\gamma m_1, \gamma} \right], \\
\bar{M}_{\alpha\beta m_2} &= D \left[ \frac{1-\nu}{2} (\bar{\varphi}_{\alpha m_2, \beta} + \bar{\varphi}_{\beta m_2, \alpha}) + \nu \delta_{\alpha\beta} \bar{\varphi}_{\gamma m_2, \gamma} \right], \\
\bar{Q}_{\alpha q} &= H (\bar{\varphi}_{\alpha q} + \bar{w}_{q, \alpha}), \\
\bar{Q}_{\alpha m_1} &= H (\bar{\varphi}_{\alpha m_1} + \bar{w}_{m_1, \alpha}), \\
\bar{Q}_{\alpha m_2} &= H (\bar{\varphi}_{\alpha m_2} + \bar{w}_{m_2, \alpha}), \\
\bar{M}_{\alpha q} &= \bar{M}_{\alpha\beta q} n_\beta, \quad \bar{M}_{\alpha m_1} = \bar{M}_{\alpha\beta m_1} n_\beta, \quad \bar{M}_{\alpha m_2} = \bar{M}_{\alpha\beta m_2} n_\beta, \\
\bar{Q}_{nq} &= \bar{Q}_{\alpha q} n_\alpha, \quad \bar{Q}_{nm_1} = \bar{Q}_{\alpha m_1} n_\alpha, \quad \bar{Q}_{nm_2} = \bar{Q}_{\alpha m_2} n_\alpha.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Otrzymuje się trzy tożsamości całkowe:

$$\begin{aligned}
&\alpha w(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_{1q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_1(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{M}_{2q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{z}) dC \\
&\quad + \int_C \bar{Q}_{nq}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC = \int_C M_1(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{1q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
&\quad + \int_C M_2(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{2q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C Q_n(\mathbf{z}) \bar{w}_q(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
&\quad + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \\
&\alpha \varphi_1(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_{1m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_1(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{M}_{2m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{z}) dC \\
&\quad + \int_C \bar{Q}_{nm_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC = \int_C M_1(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{1m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
&\quad + \int_C M_2(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{2m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C Q_n(\mathbf{z}) \bar{w}_{m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
&\quad + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}_{m_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \\
&\alpha \varphi_2(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_{1m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_1(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{M}_{2m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{z}) dC \\
&\quad + \int_C \bar{Q}_{nm_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC = \int_C M_1(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{1m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
&\quad + \int_C M_2(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{2m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C Q_n(\mathbf{z}) \bar{w}_{m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
&\quad + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}_{m_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Mnożnik  $\alpha$  przyjmuje takie same wartości jak w równaniach (2.36) i (2.42). W tożsamościach (2.83) pominięto obciążenia momentowe  $m_1$  i  $m_2$  jako mało użyteczne w praktycznych zastosowaniach.

Po przejściu granicznym z punktem  $y$  do brzegu  $C$  tożsamości (2.83) przejdą w trzy całkowe równania brzegowe:

$$\begin{aligned}
& \beta w(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_{1q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_1(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{M}_{2q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{z}) dC \\
& + \int_C \hat{\bar{Q}}_{nq}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC = \int_C M_1(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{1q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& + \int_C M_2(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{2q}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C Q_n(\mathbf{z}) \bar{w}_q(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \\
& \beta \varphi_1(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_{1m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_1(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{M}_{2m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{z}) dC \\
& + \int_C \bar{Q}_{nm_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC = \int_C M_1(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{1m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& + \int_C M_2(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{2m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C Q_n(\mathbf{z}) \bar{w}_{m_1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}_{m_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \\
& \beta \varphi_2(\mathbf{y}) + \int_C \bar{M}_{1m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_1(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{M}_{2m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_2(\mathbf{z}) dC \\
& + \int_C \bar{Q}_{nm_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC = \int_C M_1(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{1m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& + \int_C M_2(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{2m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C Q_n(\mathbf{z}) \bar{w}_{m_2}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}_{m_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS,
\end{aligned} \tag{2.84}$$

z trzema niewiadomymi funkcjami brzegowymi ze zbioru  $\{w, \varphi_1, \varphi_2, M_1, M_2, Q_n\}$  w zależności od warunków brzegowych. Mnożnik  $\beta$  należy przyjmować zgodnie ze wzorem (2.38)<sub>2</sub>.



## 2.7. Powłoki mało wyniosłe

Rozpatruje się powłokę mało wyniosłą w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$ , której powierzchnia środkowa  $S$  jest opisana równaniem drugiego stopnia względem współrzędnych na płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k_{11}x_1^2 + k_{12}x_1x_2 + \frac{1}{2}k_{22}x_2^2. \quad (2.85)$$

W powłoce o takiej geometrii w przemieszczeniowych równaniach równowagi występują jedynie stałe współczynniki. W powłoce mało wyniosłej stosuje się tzw. „prawie płaski” układ współrzędnych krzywoliniowych: współczynniki pierwszej formy podstawowej są takie same jak na kartezjańskiej płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$ , a współczynniki drugiej formy podstawowej określone są równaniem powierzchni (2.85). Taki układ współrzędnych powstaje przez rzutowanie prostokątnej siatki linii współrzędnych z płaszczyzny  $(x_1, x_2)$  na powierzchnię  $S$  [30]. W celu uproszczenia oznaczeń będziemy używać współrzędnych  $(x_1, x_2)$  jako krzywoliniowego układu na powierzchni  $S$ .

Stan przemieszczenia i napięcia w powłoce (szczególnie w powłoce mało wyniosłej) można traktować jako złożenie stanów przemieszczenia i napięcia w płycie i tarczy w płaskim stanie naprężenia, sprzężonych poprzez zakrzywienie powierzchni środkowej powłoki. W powłoce występują trzy przemieszczenia:  $u_\alpha$  – styczne do linii współrzędnych i  $u_3$  – normalne do powierzchni środkowej  $S$ . Przytoczymy odpowiednie zależności dla obrotów:

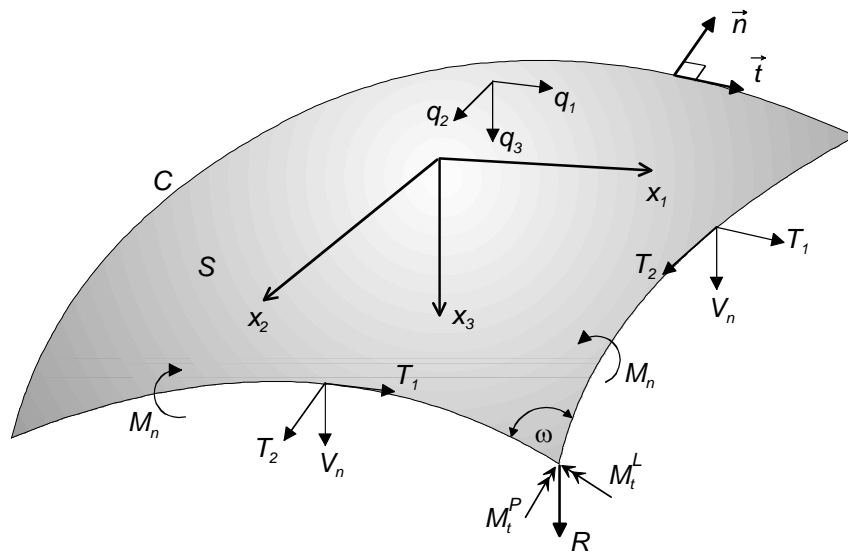
$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= -u_{3,\alpha}, \\ \varphi_n &= \varphi_\alpha n_\alpha, \\ \varphi_t &= \varphi_\alpha t_\alpha = -\frac{\partial u_3}{\partial C}, \\ \varphi_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta} t_\beta \varphi_n - \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta \varphi_t. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Siły błonowe  $N_{\alpha\beta}$  są wyrażone poprzez wzory

$$N_{\alpha\beta} = B \left[ \nu \delta_{\alpha\beta} (u_{\gamma,\gamma} - k_{\gamma\gamma} u_3) + \frac{1-\nu}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - (1-\nu) k_{\alpha\beta} u_3 \right], \quad (2.87)$$

a odpowiednie siły brzegowe (rys. 2.14) wzorem

$$T_\alpha = N_{\alpha\beta} n_\beta. \quad (2.88)$$



Rys. 2.14. Powłoka mało wyniosła

Siły stanu zgięciowego mają analogiczną postać jak w płycie cienkiej (2.19) i (2.20):

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta} &= -D \left[ (1-\nu)u_{3,\alpha\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}u_{3,\gamma\gamma} \right], \\
 M_n &= M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta, \\
 M_t &= M_{\alpha\beta}n_\alpha t_\beta, \\
 Q_\alpha &= M_{\alpha\beta,\beta} = -D\Delta u_{3,\alpha}, \\
 Q_n &= Q_\alpha n_\alpha, \\
 V_n &= Q_n + \frac{\partial M_t}{\partial C}, \\
 \square M_t \square^k &= R^k.
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Zapiszmy równania równowagi powłoki mało wyniosłej [30]

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha &= 0, \\
 M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta} + q_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Równania (2.90) po wprowadzeniu zależności (2.87) i (2.89) można zapisać w postaci

$$L_{ij}u_j = q_i, \tag{2.91}$$

gdzie

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -B\partial_1^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_2^2 & -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & B(k_{11} + \nu k_{22})\partial_1 + \\ & & + B(1-\nu)k_{12}\partial_2 \\ -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & -B\partial_2^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_1^2 & B(k_{22} + \nu k_{11})\partial_2 + \\ & & + B(1-\nu)k_{12}\partial_1 \\ -B(k_{11} + \nu k_{22})\partial_1 - & -B(k_{22} + \nu k_{11})\partial_2 - & D\Delta^2 + \\ -B(1-\nu)k_{12}\partial_2 & -B(1-\nu)k_{12}\partial_1 & + B[k_{11}^2 + k_{22}^2 + 2(1-\nu)k_{12}^2 + 2\nu k_{11}k_{22}] \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Rozwiązania podstawowe wyznacza się z układu równań

$$L_{ij}\bar{u}_{jk} = \delta\delta_{ik}. \quad (2.93)$$

Układ równań różniczkowych (2.91) wymaga czterech warunków brzegowych w każdym punkcie brzegu  $C$ , czyli układ wielkości brzegowych składa się z ośmiu parametrów: czterech przemieszczeń i czterech sił brzegowych  $\{u_1, u_2, u_3, \varphi_n, T_1, T_2, M_n, V_n\}$  uzupełnionych w narożach o reakcje skupione  $R$ .

Brzegowe równania całkowe wyprowadzimy, jak w poprzednio rozpatrywanych dźwigarach powierzchniowych, z twierdzenia Bettiego o wzajemności prac

$$\begin{aligned} \int_C T_\alpha u_\alpha^* dC + \sum_{k=1}^N R^k u_3^{*k} + \int_C M_n \varphi_n^* dC + \int_C V_n u_3^* dC + \int_S q_i u_i^* dS \\ = \int_C T_\alpha^* u_\alpha dC + \sum_{k=1}^N R^{*k} u_3^k + \int_C M_n^* \varphi_n dC + \int_C V_n^* u_3 dC + \int_S q_i^* u_i dS, \end{aligned} \quad (2.94)$$

które po wstawieniu przemieszczeń i sił związanych z rozwiązaniem podstawowym  $\bar{u}_{ij}$  w miejsce wielkości z gwiazdką przechodzi w tożsamości

$$\begin{aligned} \alpha u_j(\mathbf{y}) + \int_C \bar{T}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_\alpha(\mathbf{z}) dC \\ + \int_C \bar{M}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{V}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_3(\mathbf{z}) dC + \sum_{k=1}^N \bar{R}_j^k u_3^k \\ = \int_C T_\alpha(\mathbf{z}) \bar{u}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\ + \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{u}_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \sum_{k=1}^N R^k \bar{u}_{3j}^k + \int_S q_i(\mathbf{x}) \bar{u}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Wielkości  $\bar{\varphi}_{nj}, \bar{T}_{\alpha j}, \bar{M}_{nj}, \bar{V}_{nj}, \bar{R}_j$  oblicza się ze wzorów (2.86)–(2.89) na podstawie kolejnych kolumn rozwiązania podstawowego  $\bar{u}_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_{\alpha j} &= -\bar{u}_{3j,\alpha}, \\
\bar{\varphi}_{nj} &= \bar{\varphi}_{\alpha j} n_{\alpha}, \\
\bar{\varphi}_{ij} &= \bar{\varphi}_{\alpha j} t_{\alpha} = -\frac{\partial \bar{u}_{3j}}{\partial C}, \\
\bar{\varphi}_{\alpha j} &= \varepsilon_{\alpha\beta} t_{\beta} \bar{\varphi}_{nj} - \varepsilon_{\alpha\beta} n_{\beta} \bar{\varphi}_{ij}, \\
\bar{N}_{\alpha\beta j} &= B \left[ \nu \delta_{\alpha\beta} (\bar{u}_{\gamma j,\gamma} - k_{\gamma\gamma} \bar{u}_{3j}) + \frac{1-\nu}{2} (\bar{u}_{\alpha j,\beta} + \bar{u}_{\beta j,\alpha}) - (1-\nu) k_{\alpha\beta} \bar{u}_{3j} \right], \\
\bar{T}_{\alpha j} &= \bar{N}_{\alpha\beta j} n_{\beta}, \\
\bar{M}_{\alpha\beta j} &= -D \left[ (1-\nu) \bar{u}_{3j,\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \bar{u}_{3j,\gamma\gamma} \right], \\
\bar{M}_{nj} &= \bar{M}_{\alpha\beta j} n_{\alpha} n_{\beta}, \\
\bar{M}_{ij} &= \bar{M}_{\alpha\beta j} n_{\alpha} t_{\beta}, \\
\bar{Q}_{\alpha j} &= \bar{M}_{\alpha\beta j,\beta} = -D \Delta \bar{u}_{3j,\alpha}, \\
\bar{Q}_{nj} &= \bar{Q}_{\alpha j} n_{\alpha}, \\
\bar{V}_{nj} &= \bar{Q}_{nj} + \frac{\partial \bar{M}_{ij}}{\partial C}, \\
\boxed{\bar{M}_{ij}}^k &= \bar{R}_j^k.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Po przejściu granicznym z punktem  $y$  do brzegu  $C$  otrzymuje się trzy równania całkowe:

$$\begin{aligned}
&\beta u_j(\mathbf{y}) + \int_C \hat{T}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_{\alpha}(\mathbf{z}) dC \\
&\quad + \int_C \bar{M}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{V}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_3(\mathbf{z}) dC + \sum_{k=1}^N \bar{R}_j^k u_3^k \\
&= \int_C T_{\alpha}(\mathbf{z}) \bar{u}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
&\quad + \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{u}_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \sum_{k=1}^N R^k \bar{u}_{3j}^k + \int_S q_i(\mathbf{x}) \bar{u}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Czwarte, niezbędne, równanie całkowe wynika – podobnie jak w płycie cienkiej – z rozwiązania podstawowego

$$\bar{u}_{j3} = \frac{\partial \bar{u}_{j3}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{v}_y}, \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
& \beta \varphi_n(\mathbf{y}) + \int_C \hat{T}_\alpha(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_\alpha(\mathbf{z}) dC \\
& + \int_C \hat{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \hat{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) [u_3(\mathbf{z}) - u_3(\mathbf{y})] dC \\
& + \sum_{k=1}^N \hat{R}^k [u_3^k - u_3(\mathbf{y})] - \int_C T_\alpha(\mathbf{z}) \bar{u}_{\alpha 3}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\
& - \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC - \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{u}_{33}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC - \sum_{k=1}^N R^k \bar{u}_{33}^k \\
& = \int_S q_i(\mathbf{x}) \bar{u}_{i3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Występujące tutaj wielkości z podwójnym nadkreśleniem oblicza się ze wzorów (2.86)–(2.89), wstawiając w miejsce przemieszczeń  $u_j$  rozwiązania podstawowe  $\bar{u}_{j3}$ :

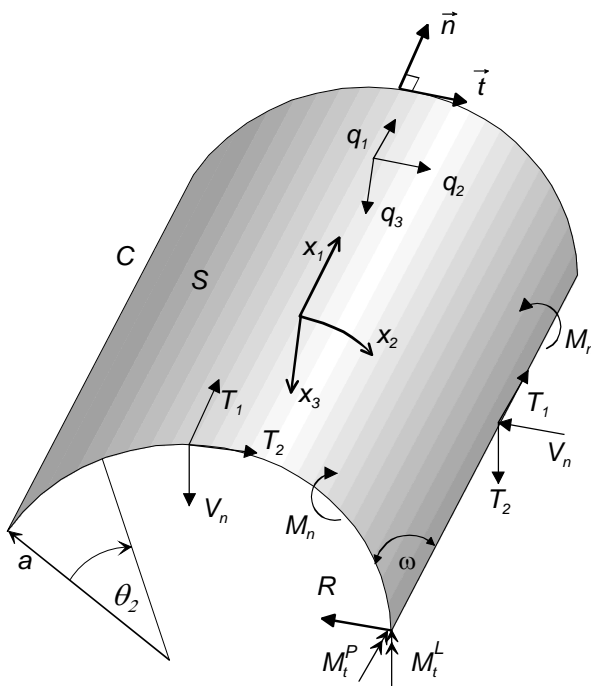
$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}_\alpha &= -\bar{u}_{33, \alpha}, \\
\bar{\varphi}_n &= \bar{\varphi}_\alpha n_\alpha, \\
\bar{\varphi}_t &= \bar{\varphi}_\alpha t_\alpha = -\frac{\partial \bar{u}_{33}}{\partial C}, \\
\bar{\varphi}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta} t_\beta \bar{\varphi}_n - \epsilon_{\alpha\beta} n_\beta \bar{\varphi}_t, \\
\bar{N}_{\alpha\beta} &= B \left[ \nu \delta_{\alpha\beta} (\bar{u}_{\gamma 3, \gamma} - k_{\gamma\gamma} \bar{u}_{33}) + \frac{1-\nu}{2} (\bar{u}_{\alpha 3, \beta} + \bar{u}_{\beta 3, \alpha}) - (1-\nu) k_{\alpha\beta} \bar{u}_{33} \right], \\
\bar{T}_\alpha &= \bar{N}_{\alpha\beta} n_\beta, \\
\bar{M}_{\alpha\beta} &= -D \left[ (1-\nu) \bar{u}_{33, \alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} \bar{u}_{33, \gamma\gamma} \right], \\
\bar{M}_n &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, \\
\bar{M}_t &= \bar{M}_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta, \\
\bar{Q}_\alpha &= \bar{M}_{\alpha\beta, \beta} = -D \Delta \bar{u}_{33, \alpha}, \\
\bar{Q}_n &= \bar{Q}_\alpha n_\alpha, \\
\bar{V}_n &= \bar{Q}_n + \frac{\partial \bar{M}_t}{\partial C}, \\
\boxed{\bar{M}_t}^{\boxed{k}} &= \bar{R}^k.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Z ośmiu parametrów brzegowych  $\{u_1, u_2, u_3, \varphi_n, T_1, T_2, M_n, V_n\}$ , w czterech równaniach całkowych (2.97) i (2.99), cztery są znane, a pozostałe cztery należy wyznaczyć. Z wielu możliwych tutaj warunków brzegowych przytoczymy dwa:

- sztywne zamocowanie:  $\{T_1, T_2, M_n, V_n\}$  – niewiadome,  $\{u_1, u_2, u_3, \varphi_n\}$  – znane,
- brzeg swobodny:  $\{u_1, u_2, u_3, \varphi_n\}$  – niewiadome,  $\{T_1, T_2, M_n, V_n\}$  – znane.

## 2.8. Powłoka walcowa

W powłoce walcowej o promieniu  $a$  (rys. 2.15) przyjmuje się następujący układ współrzędnych krzywoliniowych  $(x_1, x_2)$ : linia współrzędnych  $x_1$  jest zgodna z tworzącą, a linia  $x_2$  jest skierowana zgodnie ze współrzędną kątową  $\theta_2$ . Wartość współrzędnej  $x_2$  jest obliczana z wyrażenia  $x_2 = \theta_2 a$ , czyli jest po prostu długością łuku. Taki układ ma tę zaletę, że – po rozwinięciu powierzchni walcowej na płaszczyznę – powstaje kartezjański układ współrzędnych.



Rys. 2.15. Powłoka walcowa

Stan przemieszczenia jest opisany trzema przemieszczeniami  $u_i$ , a kąty obrotu są związane z przemieszczeniem normalnym  $u_3$

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha &= -u_{3,\alpha}, \\
\varphi_n &= \varphi_\alpha n_\alpha, \\
\varphi_t &= \varphi_\alpha t_\alpha = -\frac{\partial u_3}{\partial C}, \\
\varphi_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta} t_\beta \varphi_n - \varepsilon_{\alpha\beta} n_\beta \varphi_t.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Siły wewnętrzne stanu błonowego są opisane teraz wzorami [31]:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= B \left( u_{1,1} + \nu u_{2,2} - \frac{\nu u_3}{a} \right), \\
N_{22} &= B \left( u_{2,2} + \nu u_{1,1} - \frac{u_3}{a} \right), \\
N_{12} &= B \frac{1-\nu}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}), \\
T_\alpha &= N_{\alpha\beta} n_\beta,
\end{aligned} \tag{2.102}$$

a siły wewnętrzne stanu zgięciowego mają podobną postać jak w powłoce mało wyniosłej [31]:

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta} &= -D \left[ (1-\nu) u_{3,\alpha\beta} + \nu \delta_{\alpha\beta} u_{3,\gamma\gamma} \right], \\
M_n &= M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta, \\
M_t &= M_{\alpha\beta} n_\alpha t_\beta, \\
Q_\alpha &= M_{\alpha\beta,\beta} = -D \Delta u_{3,\alpha}, \\
Q_n &= Q_\alpha n_\alpha, \\
V_n &= Q_n + \frac{\partial M_t}{\partial C}, \\
\Box M_t \Box^k &= R^k.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Również podobną postać do równań powłoki mało wyniosłej przyjmują równania równowagi

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha &= 0, \\
M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \frac{N_{22}}{a} + q_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.104}$$

które po wprowadzeniu prawa Hooke'a ((2.102) i (2.103)) przyjmą postać równań równowagi w przemieszczeniach

$$L_{ij} u_j = q_i, \tag{2.105}$$

gdzie [29]

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -B\partial_1^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_2^2 & -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & \frac{\nu B}{a}\partial_1 \\ -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & -B\partial_2^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_1^2 & \frac{B}{a}\partial_2 \\ -\frac{\nu B}{a}\partial_1 & -\frac{B}{a}\partial_2 & D\Delta^2 + \frac{B}{a^2} \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Wobec identycznej procedury wyprowadzenia całkowych równań brzegowych jak w powłoce mała wyniosłej przytoczymy jedynie tożsamości (2.95) dla powłoki walcowej

$$\begin{aligned} \alpha u_j(\mathbf{y}) + \int_C \bar{T}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_\alpha(\mathbf{z}) dC \\ + \int_C \bar{M}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{V}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_3(\mathbf{z}) dC + \sum_{k=1}^N \bar{R}_j^k u_3^k \\ = \int_C T_\alpha(\mathbf{z}) \bar{u}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\ + \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{u}_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \sum_{k=1}^N R^k \bar{u}_{3j}^k + \int_S q_i(\mathbf{x}) \bar{u}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS \end{aligned} \quad (2.107)$$

i całkowe równania brzegowe (2.97) i (2.99)

$$\begin{aligned} \beta u_j(\mathbf{y}) + \int_C \hat{\bar{T}}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_\alpha(\mathbf{z}) dC \\ + \int_C \hat{\bar{M}}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \hat{\bar{V}}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_3(\mathbf{z}) dC + \sum_{k=1}^N \hat{\bar{R}}_j^k u_3^k \\ = \int_C \hat{T}_\alpha(\mathbf{z}) \hat{\bar{u}}_{\alpha j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C \hat{M}_n(\mathbf{z}) \hat{\bar{\varphi}}_{nj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\ + \int_C \hat{V}_n(\mathbf{z}) \hat{\bar{u}}_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \sum_{k=1}^N \hat{R}^k \hat{\bar{u}}_{3j}^k + \int_S q_i(\mathbf{x}) \hat{\bar{u}}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \beta \varphi_n(\mathbf{y}) + \int_C \hat{\bar{T}}_\alpha(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_\alpha(\mathbf{z}) dC \\ + \int_C \hat{\bar{M}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \hat{\bar{V}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) [u_3(\mathbf{z}) - u_3(\mathbf{y})] dC \\ + \sum_{k=1}^N \hat{\bar{R}}^k [u_3^k - u_3(\mathbf{y})] - \int_C \hat{T}_\alpha(\mathbf{z}) \hat{\bar{u}}_{\alpha 3}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC - \int_C \hat{M}_n(\mathbf{z}) \hat{\bar{\varphi}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\ - \int_C \hat{V}_n(\mathbf{z}) \hat{\bar{u}}_{33}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC - \sum_{k=1}^N \hat{R}^k \hat{\bar{u}}_{33}^k = \int_S q_i(\mathbf{x}) \hat{\bar{u}}_{i3}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS \end{aligned}$$



Wielkości z pojedynczym i podwójnym nadkreśleniem należy tutaj obliczać ze wzorów (2.101–2.103).

Zauważmy ponadto, że w powłoce walcowej występują identyczne warunki brzegowe z występującymi w powłoce mała wyniosłej.

## 2.9. Metoda kolokacji Kupradzego

Istotę wariantu Kupradzego w bezpośredniej metodzie elementów brzegowych wyjaśnimy na przykładzie płyty cienkiej. Metoda Kupradzego jest również metodą typu kolokacji, jednak zamiast brzegowych równań całkowych (2.38) i (2.45) wykorzystuje się w niej tożsamości (2.37) i (2.41), ale zapisane dla punktów leżących na zewnątrz obszaru  $S$  [1, 2]:

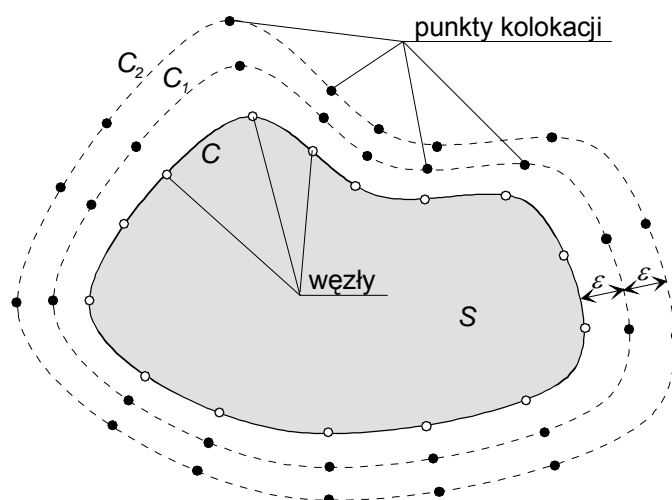
$$\begin{aligned} & \int_C \bar{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i w_i \\ &= \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\varphi}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{w}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\ &+ \sum_{i=1}^N R_i \bar{w}_i + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \mathbf{y} \notin S \cup C. \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} & \int_C \bar{\bar{M}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{\bar{V}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC + \sum_{i=1}^N \bar{\bar{R}}_i w_i \\ &= \int_C M_n(\mathbf{z}) \bar{\bar{\varphi}}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC + \int_C V_n(\mathbf{z}) \bar{\bar{w}}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dC \\ &+ \sum_{i=1}^N R_i \bar{\bar{w}}_i + \int_S q(\mathbf{x}) \bar{\bar{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \mathbf{y} \notin S \cup C. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Po dyskretyzacji brzegu na elementy brzegowe pozostaje problem zbilansowania liczby niewiadomych wartości węzłowych z liczbą równań w punktach kolokacji. W praktyce punkty kolokacji umieszcza się na konturach zewnętrznych  $C_1$  i  $C_2$  odzorowujących brzeg  $C$  w sąsiedztwie punktów węzłowych (rys. 2.16). Odległość konturów zewnętrznych od brzegu  $C$  określa parametr  $\varepsilon$ .

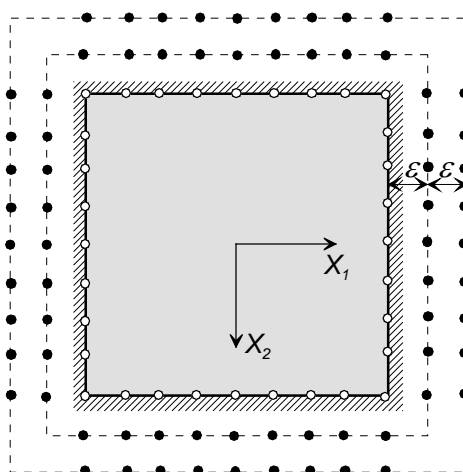
W przypadku płyty cienkiej możliwych jest kilka sposobów wyboru tożsamości całkowych i punktów kolokacji:

1. Tożsamości (2.109) i (2.110) są spełnione w punktach kolokacji na konturze  $C_1$ .
2. Tożsamość (2.109) jest spełniona w punktach kolokacji na konturach  $C_1$  i  $C_2$ .
3. Tożsamość (2.110) jest spełniona w punktach kolokacji na konturach  $C_1$  i  $C_2$ .



Rys. 2.16. Punkty kolokacji

Najwygodniejszy w zastosowaniach jest przypadek 2, gdyż występują tutaj najniższe osobliwości w jądrach tożsamości całkowej.



Rys. 2.17. Punkty kolokacji w analizowanym przykładzie

Podstawowym problemem w podejściu Kupradzego jest właściwy dobór parametru  $\varepsilon$ , który ma zasadniczy wpływ na uwarunkowanie macierzy układu równań liniowych (2.46). Zbyt duży parametr  $\varepsilon$  pogarsza uwarunkowanie macierzy, zbyt mały natomiast wymaga dokładniejszych procedur całkowania numerycznego. Wpływ parametru  $\varepsilon$  na zbieżność rozwiązania przeanalizujemy na przykładzie kwadratowej płyty o boku  $a = 1\text{ m}$ , sztywno zamocowanej na wszystkich krawędziach, poddanej stałemu obciążeniu o intensywności  $q = 1\text{ kPa}$ . Płyta ma właściwości sprężyste:

$D = 1 \text{ kNm}$ ,  $\nu = 0,2$ . Każdy bok płyty został podzielony na osiem elementów liniowych (łącznie 32 elementy). Układ punktów kolokacji pokazano na rysunku 2.17.

Taki rozkład punktów kolokacji w pobliżu naroży jest spowodowany tym, że występują tutaj cztery niewiadome w węźle narożnym: dwa momenty i dwie reakcje. W tabeli 2.1 przedstawiono ugięcia płyty w dwóch punktach: w środku płyty i w pobliżu jej brzegu dla różnych wartości parametru  $\varepsilon$ .

Tabela 2.1. Ugięcia płyty zamocowanej

| $\varepsilon$ [m] | $w$ [m]             |                                  |
|-------------------|---------------------|----------------------------------|
|                   | $x_1=0 \quad x_2=0$ | $x_1=0,45 \text{ m} \quad x_2=0$ |
| 1                 | -0,0531369          | -1,77652                         |
| 0,1               | 0,00126594          | 0,000060394                      |
| 0,01              | 0,00126536          | 0,000055498                      |
| 0,001             | 0,00126597          | 0,000055662                      |
| 0,0001            | 0,00126606          | 0,000055684                      |
| 0,00001           | 0,00126606          | 0,000055697                      |
| 0,000001          | 0,0012657           | 0,000053630                      |
| 0,0000001         | 0,00119355          | -0,000111149                     |

Z tabeli wynika, że poza dwoma skrajnymi przypadkami parametru  $\varepsilon$  zbieżność jest zadowalająca w szerokim zakresie jego wartości. Wygodnie jest odnieść wartość parametru  $\varepsilon$  do długości elementu. Za optymalną jego wartość można uznać wielkość około 1/10 długości elementu brzegowego.

Przykład został wykonany w systemie obliczeń symbolicznych i numerycznych *Mathematica*, z wykorzystaniem wbudowanych tam adaptacyjnych algorytmów całkowania numerycznego. W ten sposób wyeliminowano wpływ błędów całkowania numerycznego na wyniki przedstawionej wyżej analizy zbieżności metody Kupradzega.

### 3. Przybliżone rozwiązania podstawowe równań równowagi wybranych dźwigarów powierzchniowych

#### 3.1. Płyty cienkie

##### 3.1.1. Płyta spoczywająca na podłożu Winklera

Przybliżonego rozwiązania podstawowego będziemy poszukiwać w postaci szeregu utworzonego z rozwiązań podstawowych  $n$ -tej potęgi laplasjanu. Procedurę postępowania można podzielić na kilka kroków, wspólnych dla wszystkich rozpatrywanych płyt cienkich:

1. Oddzielenie części głównej (opisanej najwyższą potęgą laplasjanu) równania różniczkowego dla rozwiązania podstawowego od reszty tego równania poprzez wprowadzenie do niej małego parametru  $\varepsilon$ .

2. Transformacja Fouriera tak oddzielonego równania różniczkowego i wyznaczenie obrazu rozwiązania podstawowego.

3. Rozwinięcie obrazu rozwiązania podstawowego w szereg potęgowy względem małego parametru.

4. Odwrócenie transformaty rozwiązania podstawowego i zapisanie go w postaci szeregu rozwiązań podstawowych  $n$ -tej potęgi laplasjanu.

Wprowadźmy mały parametr do równania płyty na podłożu Winklera (2.50):

$$D\Delta^2\bar{w} + \varepsilon k_1\bar{w} = \delta. \quad (3.1)$$

Po zastosowaniu transformacji Fouriera znajdziemy obraz rozwiązania podstawowego

$$\tilde{\bar{w}} = \frac{1}{D\rho^4 + \varepsilon k_1}, \quad (3.2)$$

a po rozwinięciu w szereg potęgowy względem małego parametru  $\varepsilon$  otrzymamy

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{1}{D\rho^4} - \frac{\varepsilon k_1}{D^2\rho^8} + \frac{\varepsilon^2 k_1^2}{D^3\rho^{12}} - \frac{\varepsilon^3 k_1^3}{D^4\rho^{12}} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon k_1)^{i-1}}{(D\rho^4)^i}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Przed odwróceniem obrazu rozwiązania podstawowego należy przyjąć parametr  $\varepsilon = 1$  (tak jak w równaniu wyjściowym (2.50)). Ostatecznie rozwiązanie podstawowe płyty na podłożu Winklera można przedstawić w postaci

$$\bar{w} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{k_1^i}{D^{i+1}} \bar{w}_{2(i+1)}, \quad (3.4)$$

gdyż

$$F^{-1} \left[ \frac{(-1)^n}{\rho^{2n}} \right] = \bar{w}_n, \quad (3.5)$$

a  $\bar{w}_n$  jest rozwiązaniem podstawowym  $n$ -tej potęgi laplasjanu (A.3).

W praktycznych zastosowaniach wykorzystuje się przybliżoną postać szeregu (3.4) ograniczoną do kilku początkowych składników.

Warto zwrócić uwagę na to, że promień zbieżności szeregu (3.4) jest nieskończony, co zostanie wykazane w p. 3.5. Nie gwarantuje to jednak szybkiej zbieżności szeregu (3.4), która będzie analizowana przy prezentacji przykładów numerycznych w rozdziale 4.

### 3.1.2. Płyta spoczywająca na podłożu Pasternaka

Równanie płyty na podłożu dwuparametrowym Pasternaka (2.56) z wprowadzonym małym parametrem  $\varepsilon$  przyjmuje postać

$$D\Delta^2 \bar{w} - \varepsilon(k_2 \Delta \bar{w} + k_1 \bar{w}) = \delta. \quad (3.6)$$

Po zastosowaniu transformacji Fouriera otrzymuje się obraz rozwiązania podstawowego i jego rozwinięcie w szereg potęgowy względem małego parametru

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \frac{1}{D\rho^4 + \varepsilon(k_2\rho^2 + k_1)} \\ &= \frac{1}{D\rho^4} - \frac{\varepsilon(k_2\rho^2 + k_1)}{D^2\rho^8} + \frac{\varepsilon^2(k_2\rho^2 + k_1)^2}{D^3\rho^{12}} - \frac{\varepsilon^3(k_2\rho^2 + k_1)^3}{D^4\rho^{12}} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^i}{D^{i+1}} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{k_1^j k_2^{i-j}}{\rho^{2(2+i+j)}},\end{aligned}\quad (3.7)$$

które po odwróceniu transformaty (i przyjęciu  $\varepsilon = 1$ ) można zapisać w postaci szeregu

$$\bar{w} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{D^{i+1}} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} k_1^j k_2^{i-j} (-1)^{i+j} \bar{w}_{2+i+j}. \quad (3.8)$$

### 3.1.3. Płyta spoczywająca na półprzestrzeni sprężystej

W przypadku płyty na półprzestrzeni sprężystej parametr  $\varepsilon$  wprowadza się do układu równań (2.67)

$$\begin{cases} \bar{w} = u_3 * p, \\ D\Delta^2 \bar{w} + \varepsilon p = \delta. \end{cases} \quad (3.9)$$

Tutaj obraz rozwiązania podstawowego przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{1}{D\rho^4 + \varepsilon k_3 \rho} \\ &= \frac{1}{D\rho^4} - \frac{\varepsilon k_3}{D^2 \rho^7} + \frac{\varepsilon^2 k_3^2}{D^3 \rho^{10}} - \frac{\varepsilon^3 k_3^3}{D^4 \rho^{13}} + \frac{\varepsilon^4 k_3^4}{D^5 \rho^{16}} - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \varepsilon^{2i} \frac{k_3^{2i}}{D^{2i+1} \rho^{6i+4}} - \varepsilon^{2i+1} \frac{k_3^{2i+1}}{D^{2i+2} \rho^{6i+7}} \right], \quad k_3 = \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

a po odwróceniu transformaty Fouriera (i przyjęciu  $\varepsilon = 1$ ) otrzymuje się rozwiązanie podstawowe

$$\bar{w} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ (-1)^i \frac{k_3^{2i}}{D^{2i+1}} \bar{w}_{3i+2} - \frac{k_3^{2i+1}}{D^{2i+2}} C_{i+1} r^{6i+5} \right], \quad (3.11)$$

gdzie stałe  $C_i$  oblicza się ze wzoru (A.4).

### 3.1.4. Płyta ortotropowa

Przytoczmy potrzebne zależności z teorii cienkich płyt ortotropowych [32]:

$$\begin{aligned} M_{11} &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\ M_{22} &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \\ M_{12} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pozostałe wielkości kinematyczne i fizyczne uzyskuje się ze wzorów opisujących płyty izotropowe (2.18)–(2.20).

Równanie równowagi płyty (2.21) przyjmie teraz postać

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q. \quad (3.13)$$

Przepiszmy równanie równowagi płyty (3.13) w równoważnej postaci

$$\begin{aligned} D_{11} \Delta^2 w + H_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + H_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} &= q, \\ H_{12} &= 2(D_{12} + 2D_{66} - D_{11}), \quad H_{22} = D_{22} - D_{11}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Wprowadźmy do równania (3.14) z jednostkowym obciążeniem skupionym mały parametr  $\varepsilon$

$$D_{11} \Delta^2 \bar{w} + \varepsilon \left( H_{12} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + H_{22} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x_2^4} \right) = \delta. \quad (3.15)$$

Obraz rozwiązania podstawowego znajdziemy po zastosowaniu transformacji Fouriera

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{w}} &= \frac{1}{D_{11} \rho^4 + \varepsilon (H_{12} \alpha_1^2 \alpha_2^2 + H_{22} \alpha_2^4)} \\ &= \frac{1}{D_{11} \rho^4} - \frac{\varepsilon (H_{12} \alpha_1^2 \alpha_2^2 + H_{22} \alpha_2^4)}{D_{11}^2 \rho^8} + \frac{\varepsilon^2 (H_{12} \alpha_1^2 \alpha_2^2 + H_{22} \alpha_2^4)^2}{D_{11}^3 \rho^{12}} - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^i}{D_{11}^{i+1} \rho^{4(1+i)}} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} H_{22}^j H_{12}^{i-j} \alpha_1^{2(i-j)} \alpha_2^{2(i-j)+4j}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Odwroćenie obrazu (3.16) (przy przyjęciu  $\varepsilon = 1$ ) prowadzi do następującego wzoru na rozwiązanie podstawowe płyty ortotropowej:

$$\bar{w} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{D_{11}^{i+1}} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} H_{12}^{i-j} H_{22}^j \partial_1^{2(i-j)} \partial_2^{2(i-j)+4j} \bar{w}_{2(i+1)}. \quad (3.17)$$

Przy odwracaniu obrazu (3.16) wykorzystano wzór (A.2).

### 3.2. Płyty grube

Zagadnienie statyki płyt grubych opisane jest układem równań różniczkowych, dlatego procedura znajdowania przybliżonego rozwiązania podstawowego różni się od

tej zastosowanej w płytach cienkich, opisywanych jednym równaniem skalarnym. Do sprowadzenia układu równań różniczkowych do jednego równania skalarnego wykorzystamy metodę Hörmandera (Dodatek B). We wszystkich zagadnieniach dźwigarów powierzchniowych opisywanych układami równań kolejne kroki postępowania są wspólne:

1. Sprowadzenie układu równań różniczkowych do jednego równania różniczkowego (B.5).
  2. Oddzielenie części głównej (opisanej najwyższą potęgą laplasjanu) równania różniczkowego od reszty tego równania poprzez wprowadzenie do niej małego parametru  $\varepsilon$ .
  3. Transformacja Fouriera tak oddzielonego równania różniczkowego i wyznaczenie obrazu rozwiązania podstawowego.
  4. Rozwinięcie obrazu rozwiązania podstawowego w szereg potęgowy względem małego parametru.
  5. Odwrócenie transformaty rozwiązania podstawowego i zapisanie go w postaci szeregu rozwiązań podstawowych  $n$ -tej potęgi laplasjanu.
  6. Powrót do macierzy (tensora) rozwiązań podstawowych.
- Zgodnie z metodą Hörmandera poszukujemy rozwiązania podstawowego równania różniczkowego

$$|L_{ij}| \bar{U} = \delta, \quad (3.18)$$

gdzie, zgodnie ze wzorem (2.98)

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -H \Delta & -H \partial_1 & -H \partial_2 \\ H \partial_1 & \left( H - D \partial_1^2 - D \frac{1-\nu}{2} \partial_2^2 \right) & -D \frac{1+\nu}{2} \partial_1 \partial_2 \\ H \partial_2 & -D \frac{1+\nu}{2} \partial_1 \partial_2 & \left( H - D \partial_2^2 - D \frac{1-\nu}{2} \partial_1^2 \right) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

a wyznacznik tej macierzy jest równy

$$|L_{ij}| = -\frac{(1-\nu)HD^2}{2} \Delta^3 + H^2 D \Delta^2. \quad (3.20)$$

Po wprowadzeniu małego parametru  $\varepsilon$  do równania (3.18)

$$-\frac{(1-\nu)HD^2}{2} \Delta^3 \bar{U} + \varepsilon H^2 D \Delta^2 \bar{U} = \delta \quad (3.21)$$

i zastosowaniu transformacji Fouriera, obraz rozwiązania podstawowego  $\tilde{\bar{U}}$  ma postać



$$\begin{aligned}
\tilde{U} &= \frac{1}{\frac{(1-\nu)HD^2}{2}\rho^6 + \varepsilon H^2 D \rho^4} \\
&= \frac{1}{\frac{(1-\nu)HD^2}{2}\rho^6} - \frac{\varepsilon DH^2 \rho^4}{\left[\frac{(1-\nu)HD^2}{2}\rho^6\right]^2} + \frac{\varepsilon^2 D^2 H^4 \rho^8}{\left[\frac{(1-\nu)HD^2}{2}\rho^6\right]^3} - \dots \quad (3.22) \\
&= \frac{2}{(1-\nu)HD^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-2H\varepsilon}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \frac{1}{\rho^{2(2+i)}}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie (zakładając, że  $\varepsilon = 1$  i wykorzystując (A.3)) rozwiązanie podstawowe  $\bar{U}$  po odwróceniu transformaty (3.22) przyjmie postać

$$\bar{U} = \frac{-2}{(1-\nu)HD^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \bar{w}_{2+i}. \quad (3.23)$$

Macierz rozwiązań podstawowych obliczymy z zależności (B.2)

$$\bar{u}_{jk} = L'_{kj} \bar{U}, \quad (3.24)$$

gdzie macierz dopełnień algebraicznych  $L'_{ij}$  jest równa

$$L'_{ij} = \begin{bmatrix} H^2 - \frac{(3-\nu)}{2} HD \Delta + & -H^2 \partial_1 + & -H^2 \partial_2 + \\ + \frac{(1-\nu)}{2} D^2 \Delta^2 & + \frac{(1-\nu)}{2} HD \partial_1 \Delta & + \frac{(1-\nu)}{2} HD \partial_2 \Delta \\ H^2 \partial_1 - & H^2 \partial_2^2 - H^2 \Delta + & -H^2 \partial_1 \partial_2 - \\ - \frac{(1-\nu)}{2} HD \partial_1 \Delta & + HD \partial_2^2 \Delta + & - \frac{1+\nu}{2} HD \partial_1 \partial_2 \Delta \\ + \frac{(1-\nu)}{2} HD \partial_1^2 \Delta & & \\ H^2 \partial_2 - & -H^2 \partial_1 \partial_2 - & H^2 \partial_1^2 - H^2 \Delta + \\ - \frac{(1-\nu)}{2} HD \partial_2 \Delta & - \frac{1+\nu}{2} HD \partial_1 \partial_2 \Delta & + HD \partial_1^2 \Delta + \\ & & + \frac{(1-\nu)}{2} HD \partial_2^2 \Delta \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Elementom macierzy rozwiązań podstawowych (3.24) nadamy wygodne w zastosowaniach oznaczenia (2.76)

$$\bar{u}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{w}_q & \bar{w}_{m_1} & \bar{w}_{m_2} \\ \bar{\varphi}_{1q} & \bar{\varphi}_{1m_1} & \bar{\varphi}_{1m_2} \\ \bar{\varphi}_{2q} & \bar{\varphi}_{2m_1} & \bar{\varphi}_{2m_2} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

i przyjmują one postać:

$$\begin{aligned} \bar{w}_q &= \frac{-2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \bar{w}_{2+i} \\ &+ \frac{3-\nu}{(1-\nu)D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \bar{w}_{1+i} - \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \bar{w}_i, \\ \bar{w}_{m_1} &= -\bar{\varphi}_{1q} = \frac{-2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_1 \bar{w}_{2+i} \\ &+ \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_1 \bar{w}_{1+i}, \\ \bar{w}_{m_2} &= -\bar{\varphi}_{2q} = \frac{-2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_2 \bar{w}_{2+i} \\ &+ \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_2 \bar{w}_{1+i}, \\ \bar{\varphi}_{1m_1} &= \frac{-2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_2^2 \bar{w}_{2+i} \\ &+ \frac{2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \bar{w}_{1+i} - \frac{2}{(1-\nu)D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_2^2 \bar{w}_{1+i} \\ &- \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_1^2 \bar{w}_{1+i}, \\ \bar{\varphi}_{2m_2} &= \frac{-2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_1^2 \bar{w}_{2+i} \\ &+ \frac{2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \bar{w}_{1+i} - \frac{2}{(1-\nu)D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_1^2 \bar{w}_{1+i} \\ &- \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_2^2 \bar{w}_{1+i}, \\ \bar{\varphi}_{1m_2} &= \bar{\varphi}_{1m_2} = \frac{2H}{(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_1 \partial_2 \bar{w}_{2+i} \\ &+ \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2H}{(1-\nu)D} \right]^{i-1} \partial_1 \partial_2 \bar{w}_{1+i}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.3. Powłoki mało wyniosłe

Szczegółową analizę przybliżonego rozwiązania podstawowego przeprowadzimy na przykładzie sferycznej powłoki mało wyniosłej. Powierzchnia podstawowa tej powłoki jest opisana równaniem

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k_{11} (x_1^2 + x_2^2), \quad (3.28)$$

a macierz operatorów równań równowagi (2.92) przyjmuje w tym przypadku postać

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -B\partial_1^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_2^2 & -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & Bk_{11}(1+\nu)\partial_1 \\ -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & -B\partial_2^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_1^2 & Bk_{11}(1+\nu)\partial_2 \\ -Bk_{11}(1+\nu)\partial_1 & -Bk_{11}(1+\nu)\partial_2 & D\Delta^2 + 2Bk_{11}(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

W celu wyznaczenia macierzy rozwiązań podstawowych zastosujemy procedurę opisaną w p. 3.2. Otrzymamy kolejno:

- Wyznacznik macierzy operatorów  $L_{ij}$

$$|L_{ij}| = \frac{72(1-\nu)D^3}{h^4} \Delta^4 + \frac{864(1-\nu)(1-\nu^2)k_{11}^2 D^3}{h^6} \Delta^2. \quad (3.30)$$

- Skalarne równanie różniczkowe dla rozwiązania podstawowego z małym parametrem  $\varepsilon$

$$\frac{72(1-\nu)D^3}{h^4} \Delta^4 \bar{U} + \varepsilon \frac{864(1-\nu)(1-\nu^2)k_{11}^2 D^3}{h^6} \Delta^2 \bar{U} = \delta. \quad (3.31)$$

- Obraz rozwiązania podstawowego  $\tilde{\bar{U}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{U}} &= \frac{1}{\frac{72(1-\nu)D^3}{h^4} \rho^8 + \varepsilon \frac{864(1-\nu)(1-\nu^2)k_{11}^2 D^3}{h^6} \rho^4} \\ &= \frac{1}{\frac{72(1-\nu)D^3}{h^4} \rho^8} - \frac{\varepsilon 12(1-\nu^2)k_{11}^2}{\frac{72(1-\nu)D^3}{h^2} \rho^{12}} + \frac{\varepsilon^2 [12(1-\nu^2)k_{11}^2]^2}{72(1-\nu)D^3 \rho^{16}} - \dots \\ &= \frac{h^4}{72(1-\nu)D^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-\varepsilon 12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \frac{1}{\rho^{2(2+2i)}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

i rozwiązanie podstawowe  $\bar{U}$

$$\bar{U} = \frac{h^4}{72(1-\nu)D^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \bar{w}_{2i+2}. \quad (3.33)$$

- Macierz dopełnień algebraicznych  $L'_{ij}$

$$L'_{ij} = \begin{bmatrix} -BD\partial_2^2\Delta - \frac{BD(1-\nu)}{2}\partial_1^2\Delta^2 - \frac{12BDk_{11}^2(1-\nu^2)}{2}\Delta & \frac{BD(1+\nu)}{2}\partial_1\partial_1\Delta^2 & -\frac{B^2k_{11}(1-\nu^2)}{2}\partial_1\Delta \\ \frac{BD(1+\nu)}{2}\partial_1\partial_1\Delta^2 & -BD\partial_1^2\Delta - \frac{BD(1-\nu)}{2}\partial_2^2\Delta^2 - \frac{12BDk_{11}^2(1-\nu^2)}{2}\Delta & -\frac{B^2k_{11}(1-\nu^2)}{2}\partial_2\Delta \\ \frac{B^2k_{11}(1-\nu^2)}{2}\partial_1\Delta & \frac{B^2k_{11}(1-\nu^2)}{2}\partial_2\Delta & \frac{B^2(1-\nu)}{2}\Delta^2 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

- Macierz rozwiązań podstawowych powłoki sferycznej  $\bar{u}_{ij}$

$$\bar{u}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} & \bar{u}_{13} \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} & \bar{u}_{23} \\ \bar{u}_{31} & \bar{u}_{32} & \bar{u}_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{11} &= \frac{-Bh^4}{72(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \partial_2^2 \bar{w}_{2i} - \frac{Bh^4}{144D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \partial_1^2 \bar{w}_{2i} \\ &\quad - \frac{Bh^4 k_{11}^2 (1+\nu)}{6D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \bar{w}_{2i+1}, \\ \bar{u}_{12} = \bar{u}_{21} &= \frac{-Bh^4}{144(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \partial_1 \partial_2 \bar{w}_{2i}, \\ \bar{u}_{22} &= \frac{-Bh^4}{72(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \partial_1^2 \bar{w}_{2i} - \frac{Bh^4}{144D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \partial_2^2 \bar{w}_{2i} \\ &\quad - \frac{Bh^4 k_{11}^2 (1+\nu)}{6D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \bar{w}_{2i+1}, \\ \bar{u}_{31} = -\bar{u}_{13} &= \frac{-B^2 h^4 k_{11} (1+\nu)}{144D^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \partial_1 \bar{w}_{2i+1}, \\ \bar{u}_{32} = -\bar{u}_{23} &= \frac{-B^2 h^4 k_{11} (1+\nu)}{144D^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \partial_2 \bar{w}_{2i+1}, \\ \bar{u}_{33} &= \frac{B^2 h^4}{144D^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)k_{11}^2}{h^2} \right]^{i-1} \bar{w}_{2i}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.4. Powłoka walcowa

W przeciwieństwie do rozpatrywanych w poprzednim punkcie zagadnień (płyta gruba, sferyczna powłoka mało wyniosła), problem brzegowy powłoki walcowej nie jest zagadnieniem geometrycznie izotropowym, co oznacza, że wyznacznik macierzy operatorów (2.106)

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} -B\partial_1^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_2^2 & -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & \frac{\nu B}{a}\partial_1 \\ -B\frac{1+\nu}{2}\partial_1\partial_2 & -B\partial_2^2 - B\frac{1-\nu}{2}\partial_1^2 & \frac{B}{a}\partial_2 \\ -\frac{\nu B}{a}\partial_1 & -\frac{B}{a}\partial_2 & D\Delta^2 + \frac{B}{a^2} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

zawiera nie tylko potęgi operatora Laplace'a, ale również pochodne cząstkowe

$$|L_{ij}| = \frac{72(1-\nu)D^3}{h^4}\Delta^4 + \frac{864(1-\nu)(1-\nu^2)D^3}{a^2h^6}\partial_1^4. \quad (3.37)$$

Powtórzenie procedury z p.3.2 i 3.3 prowadzi do rozwiązania podstawowego równania skalarnego w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{1}{\frac{72(1-\nu)D^3}{h^4}\rho^8 + \varepsilon \frac{864(1-\nu)(1-\nu^2)D^3}{a^2h^6}\alpha_1^4} \\ &= \frac{1}{\frac{72(1-\nu)D^3}{h^4}\rho^8} - \frac{\varepsilon 12(1-\nu^2)\alpha_1^4}{72(1-\nu)D^3 a^2 \rho^{16}} + \frac{\varepsilon^2 [12(1-\nu^2)]^2 \alpha_1^8}{72(1-\nu)D^3 a^4 \rho^{24}} - \dots \\ &= \frac{h^4}{72(1-\nu)D^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-\varepsilon 12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \right]^{i-1} \frac{\alpha_1^{4i-4}}{\rho^{8i}}, \\ \bar{U} &= \frac{h^4}{72(1-\nu)D^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-4} \bar{w}_{4i}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

i na podstawie macierzy dopełnień algebraicznych  $L'_{ij}$

$$L'_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{12D^2}{h^2}\partial_2^2\Delta^2 - & \frac{72D^2(1-\nu)}{a^2h^4}\partial_1\partial_1 + & -\frac{72D^2(1-\nu)\nu}{ah^4}\partial_1^3 + \\ -\frac{72D^2(1-\nu)}{a^2h^4}\partial_1^2 - & +\frac{6D^2(1+\nu)}{h^2}\partial_1\partial_1\Delta^2 & +\frac{72D^2(1-\nu)}{ah^4}\partial_1\partial_2^2 \\ -\frac{6D^2(1-\nu)}{h^2}\partial_1^2\Delta^2 & & \\ & -\frac{12D^2}{h^2}\partial_1^2\Delta^2 + & \\ \frac{72D^2(1-\nu)}{a^2h^4}\partial_1\partial_1 + & +\frac{144D^2(1-\nu^2)}{a^2h^4}\partial_1^2 & -\frac{72D^2(1-\nu)}{ah^4}\partial_2^3 - \\ +\frac{6D^2(1+\nu)}{h^2}\partial_1\partial_1\Delta^2 & -\frac{72D^2(1-\nu)}{a^2h^4}\partial_2^2 - & -\frac{72D^2(1-\nu)(2+\nu)}{ah^4}\partial_1^2\partial_2 \\ & -\frac{6D^2(1-\nu)}{h^2}\partial_2^2\Delta^2 & \\ \frac{72D^2(1-\nu)\nu}{ah^4}\partial_1^3 - & \frac{72D^2(1-\nu)}{ah^4}\partial_2^3 + & \frac{72D^2(1-\nu)}{h^4}\Delta^2 \\ -\frac{72D^2(1-\nu)}{ah^4}\partial_1\partial_2^2 & +\frac{72D^2(1-\nu)(2+\nu)}{ah^4}\partial_1^2\partial_2 & \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

otrzymamy macierz rozwiązań podstawowych powłoki walcowej

$$\bar{u}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} & \bar{u}_{13} \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} & \bar{u}_{23} \\ \bar{u}_{31} & \bar{u}_{32} & \bar{u}_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\bar{u}_{11} = \frac{-h^2}{6(1-\nu)D^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-4} \partial_2^2 \bar{w}_{4i-2} - \frac{h^2}{12D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-2} \bar{w}_{4i-2}$$

$$- \frac{1}{a^2D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-2} \bar{w}_{4i},$$

$$\bar{u}_{12} = \bar{u}_{21} = \frac{1}{a^2D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-3} \partial_2 \bar{w}_{4i} + \frac{h^2(1+\nu)}{12D(1-\nu)} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-3} \partial_2 \bar{w}_{4i-2},$$

$$\bar{u}_{22} = -\frac{h^2}{6(1-\nu)D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-2} \bar{w}_{4i-2} - \frac{h^2}{12D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-2} \partial_2^2 \bar{w}_{4i-2}$$

$$- \frac{1}{a^2D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-4} \partial_2^2 \bar{w}_{4i} - \frac{2(1+\nu)}{a^2D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-2} \bar{w}_{4i},$$

$$\bar{u}_{31} = -\bar{u}_{13} = -\frac{1}{aD} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-3} \partial_2^2 \bar{w}_{4i} + \frac{\nu}{aD} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-1} \bar{w}_{4i},$$

$$\bar{u}_{32} = -\bar{u}_{23} = -\frac{1}{aD} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-4} \partial_2^3 \bar{w}_{4i} - \frac{2+\nu}{aD} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-2} \partial_2 \bar{w}_{4i},$$

$$\bar{u}_{33} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-12(1-\nu^2)}{a^2h^2} \right]^{i-1} \partial_1^{4i-4} \bar{w}_{4i-2}.$$

### 3.5. Promień zbieżności przybliżonych rozwiązań podstawowych

Dla ogólnego funkcyjnego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (3.41)$$

wygodnie jest obliczać jego promień zbieżności  $R$  ze wzoru [33,34]

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (3.42)$$

wynikającego z kryterium d'Alemberta. Sens promienia zbieżności jest taki, że dla  $|z| < R$  szereg (3.41) jest bezwzględnie zbieżny, a dla  $|z| > R$  jest rozbieżny.

Promień zbieżności wyprowadzonych w tym rozdziale szeregów przedstawiających rozwiązania podstawowe prześledzimy szczegółowo na przykładzie płyty na podłożu Winklera. Rozwiązanie podstawowe ma tutaj postać (3.4)

$$\bar{w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k_1^n}{D^{n+1}} \bar{w}_{2(n+1)}, \quad (3.43)$$

a wobec zależności (C.4)

$$\bar{w}_n(r) = \frac{1}{2\pi} r^{2(n-1)} \left( C_n \ln \frac{r}{r_0} - D_n \right), \quad (3.44)$$

można je wyrazić wzorem

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{r^2 \ln r}{2\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-k_1}{D} \right)^n C_{2n+2} r^{4n} - \frac{r^2}{2\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-k_1}{D} \right)^n D_{2n+2} r^{4n} \\ &= \frac{r^2 \ln r}{2\pi D} S_1 - \frac{r^2}{2\pi D} S_2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Jeśli oznaczymy  $r^4 = z$ , to szeregi  $S_1$  i  $S_2$  przyjmą postać:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-k_1}{D} \right)^n C_{2n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n z^n, \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-k_1}{D} \right)^n D_{2n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{D}_n z^n. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Po uwzględnieniu zależności (C.9)

$$C_n = \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!(n-1)!}, \quad D_n = \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad (3.47)$$

znajdziemy

$$\begin{aligned} \bar{C}_n &= \frac{(-k_1)^n}{D^n 4^{2n+1} (2n+1)!(2n+1)!}, \\ \bar{D}_n &= \frac{(-k_1)^n}{D^n 4^{2n+1} (2n+1)!(2n+1)!} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Promień zbieżności szeregu  $S_1$  wynosi więc

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{C}_n}{\bar{C}_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16D}{k_1} (2n+2)^2 (2n+3)^2 = \infty, \quad (3.49)$$

a szeregu  $S_2$

$$\begin{aligned} R_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{D}_n}{\bar{D}_{n+1}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16D}{k_1} (2n+2)^2 (2n+3)^2 \frac{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{2n+3} \frac{1}{k}} = \infty, \end{aligned} \quad (3.50)$$

gdyż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{2n+3} \frac{1}{k}} = 1. \quad (3.51)$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że promień zbieżności rozwiązania podstawowego płyty na podłożu Winklera (3.43) jest nieskończony.

W analogiczny sposób można by wykazać, że promienie zbieżności wszystkich rozpatrywanych w tym rozdziale rozwiązań podstawowych są nieskończone, gdyż ich konstrukcja opiera się na rozwiązaniach podstawowych  $n$ -tej potęgi laplasjanu, a różnią się jedynie stałymi fizycznymi, które nie mają wpływu na promień zbieżności.



## 4. Numeryczne przykłady zastosowania przybliżonych rozwiązań podstawowych w metodzie elementów brzegowych (MEB)

### 4.1. Wstęp

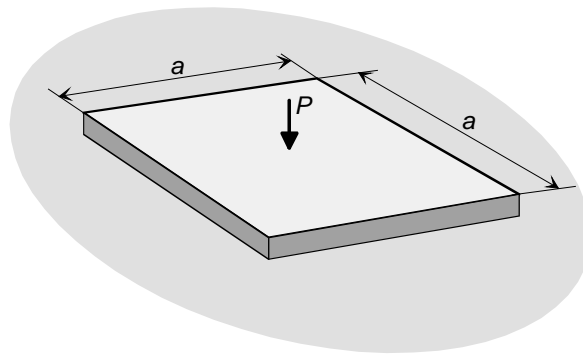
Większość rozwiązań przykładów prezentowanych w tym rozdziale otrzymano na podstawie programów kodowanych w systemie *Mathematica* z wykorzystaniem używanych w nim algorytmów numerycznych i symbolicznych, nad którymi użytkownik ma pełną kontrolę jeśli idzie o dokładność obliczeń. Dlatego w badaniu zbieżności rozwiązań przykładów można pominąć wpływ dokładności procedur całkowania numerycznego.

Jedynie przykłady odnoszące się do płyty ortotropowej i wyniosłej powłoki walcowej zostały zaprogramowane w systemie *Delphi*. Zastosowano tutaj procedurę numerycznego całkowania Gaussa z siedmioma punktami w elemencie brzegowym i siatką  $20 \times 20$  punktów w obszarze dźwigara.

We wszystkich przykładach stosowano metodę kolokacji Kupradzego i przyjmowano wartość parametru  $\varepsilon$  zaproponowaną w p. 2.8, równą  $1/10$  długości elementu brzegowego.

### 4.2. Płyta spoczywająca na podłożu Winklera

Rozwiązano testową, kwadratową płytę swobodnie spoczywającą na podłożu Winklera, której rozwiązanie metodą różnic skończonych (MRS) zamieszczono w monografii [35]. Płyta ma bok  $a = 5$  m, sztywność  $D = 1923$  kNm, współczynnik Poissona  $\nu = 0,2$  i jest obciążona w środku siłą skupioną  $P = 69,44$  kN (rys. 4.1). Przyjęto sztywność podłoża Winklera  $k_1 = 10^4$  kN/m<sup>3</sup>.

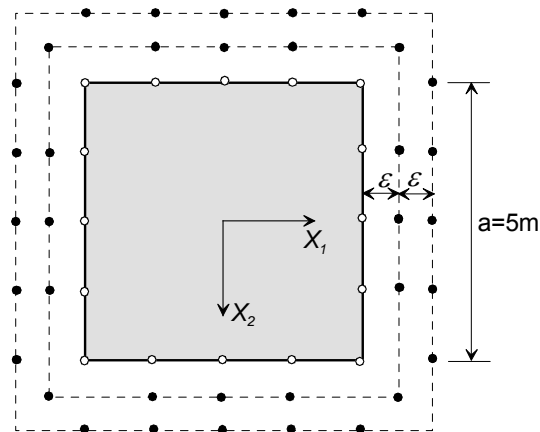


Rys. 4.1. Płyta na podłożu Winklera

Płytę rozwiązano metodą Kupradzego (p. 2.8). Wobec swobodnego brzegu i narożu tożsamość całkowa (2.109) przyjmuje tutaj postać

$$\int_C \bar{M}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \varphi_n(\mathbf{z}) dC + \int_C \bar{V}_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) w(\mathbf{z}) dC + \sum_{i=1}^N \bar{R}_i w_i = \int_S q(\mathbf{x}) \bar{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS, \quad \mathbf{y} \notin S \cup C. \quad (4.1)$$

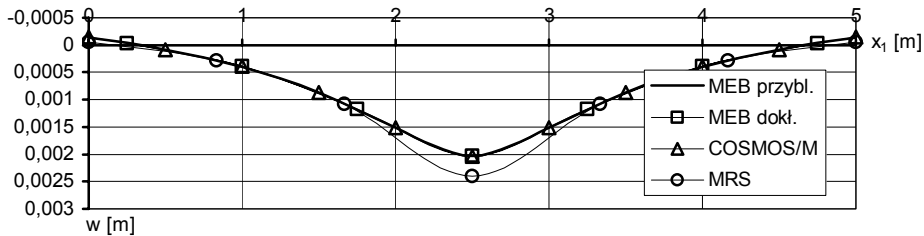
Każdy bok płyty podzielono na cztery równe, liniowe elementy brzegowe. W narożu swobodnej płyty występują trzy niewiadome: dwa obroty i ugięcie, stąd wynika układ punktów kolokacji (rys. 4.2). Kontury zewnętrzne, na których rozmieszczono punkty kolokacji znajdują się w odległości  $\varepsilon = 0,125$  m od brzegu płyty.



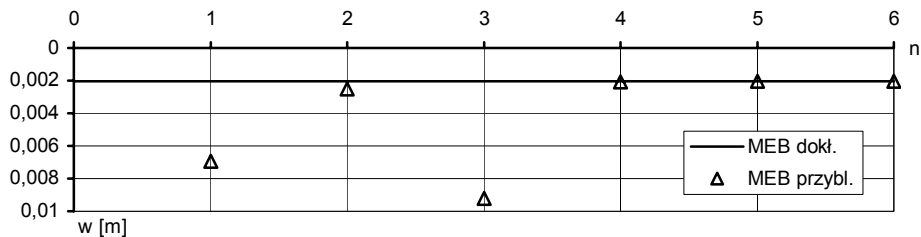
Rys. 4.2. Punkty kolokacji

Analizę przeprowadzono z zastosowaniem dokładnych (2.53) i przybliżonych (3.4) rozwiązań podstawowych. Wyniki rozwiązań porównano z wynikami otrzymanymi me-

todą elementów skończonych w systemie COSMOS/M i metodą różnic skończonych [35]. Ugięcia wzdłuż linii środkowej płyty przedstawiono na rysunku 4.3.



Rys. 4.3. Ugięcia płyty na podłożu Winklera



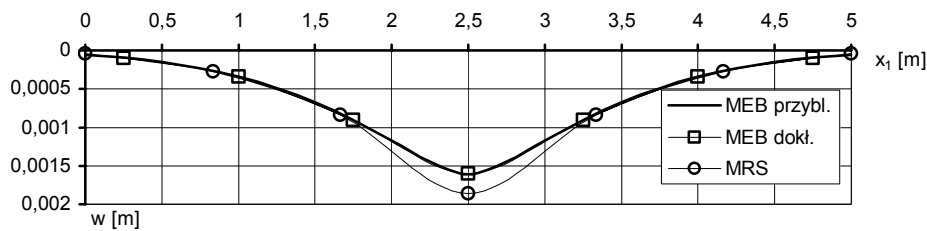
Rys. 4.4. Zbieżność przybliżonego rozwiązania podstawowego

Pewna rozbieżność uzyskanych wyników w porównaniu z otrzymanymi metodą różnic skończonych jest spowodowana rzadką siatką różnicową (6 oczek na długości boku) przyjętą w pracy [35].

Zbadano również zbieżność rozwiązania przybliżonego (ugięcie w środku płyty) w zależności od liczby  $n$  wyrazów szeregu (3.4). Wynik przedstawiono na rysunku 4.4.

### 4.3. Płyta spoczywająca na podłożu Pasternaka

Rozwiązano tę samą kwadratową płytę, co w p. 4.1. Drugi parametr sztywności podłoża Pasternaka przyjmuje wartość  $k_2 = 3,472 \cdot 10^3$  kN/m. Podział i układ punktów jest również identyczny z opisanym w p. 4.1. Analizę przeprowadzono z zastosowaniem dokładnych (2.59) i przybliżonych (3.8) rozwiązań podstawowych. Wyniki rozwiązań porównano z wynikami otrzymanymi z różnic skończonych [35]. Ugięcia wzdłuż linii środkowej płyty przedstawiono na rysunku 4.5.

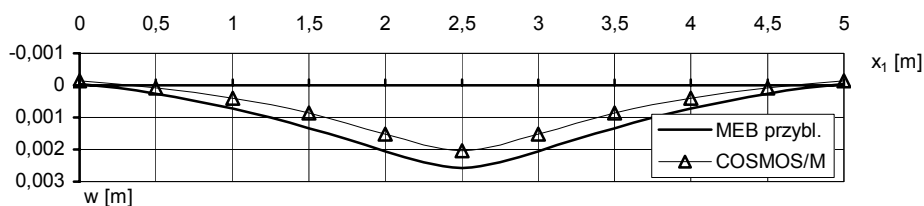


Rys. 4.5. Ugięcia płyty na podłożu Pasternaka

Pewna rozbieżność otrzymanych wyników w porównaniu z metodą różnic skończonych jest spowodowana rzadką siatką różnicową (6 oczek na długości boku) przyjętą w pracy [35]. Zbieżność wyników przy użyciu przybliżonego rozwiązania podstawowego uzyskano dla siedmiu wyrazów szeregu (3.8).

#### 4.4. Płyta spoczywająca na półprzestrzeni sprężystej

Ze względu na trudności w znalezieniu w literaturze przykładu rozwiązania płyty cienkiej na półprzestrzeni sprężystej oraz ze względu na brak implementacji funkcji specjalnych występujących w ścisłym rozwiązaniu podstawowym (2.70) tej płyty w systemach programowania, zdecydowano się jedynie na pośrednią weryfikację przybliżonego rozwiązania podstawowego (3.11) z rozwiązaniem płyty na podłożu Winklera (rys. 4.2). Rozwiązano więc tę samą płytę co w p. 4.1. Przyjęto stałe sprężystości półprzestrzeni:  $E_0 = 2 \cdot 10^4$  kPa,  $\nu_0 = 0$ . Sztywność podłoża Winklera oszacowano na podstawie wzoru  $k_1 = 2,5E_0/a$  [36, 37]. Otrzymano:  $k_1 = 10^4$  kN/m<sup>3</sup>. Ugięcia wzdłuż linii środkowej płyty przedstawiono na rysunku 4.6. Zbieżność rozwiązania również została osiągnięta przy niewielkiej liczbie wyrazów szeregu (3.11) – 7.

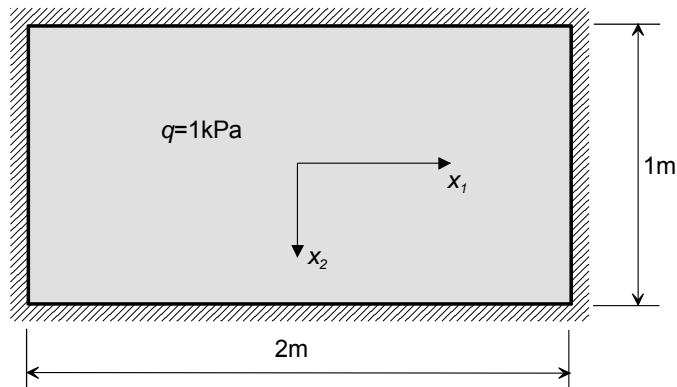


Rys. 4.6. Ugięcia płyty na półprzestrzeni sprężystej

Ugięcia płyty na półprzestrzeni sprężystej są porównywalne z otrzymanymi dla podłoża Winklera – różnica wynosi ok. 20%.

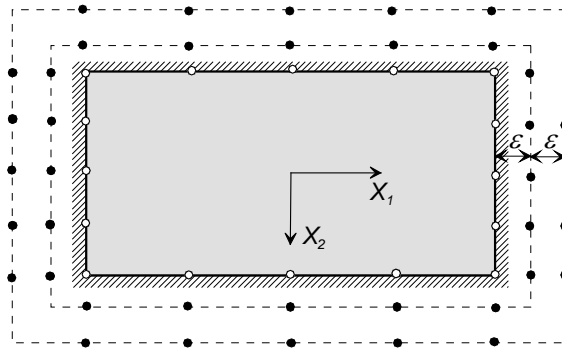
## 4.5. Płyta ortotropowa

Płytę testową wybrano tak, aby zapewnić wyraźną ortotropowość jej materiału: sztywność  $D_{11} = 2 \text{ kNm}$ ,  $D_{22} = 1 \text{ kNm}$ ,  $D_{12} = D_{66} = 0$ . Odpowiada to rusztowi, który nie ma sztywności na skręcanie, a zginanie w obu kierunkach jest niezależne. Prostokątna płyta ma wymiary  $2 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ , jest zamocowana na wszystkich krawędziach i obciążona równomiernie na całej powierzchni (rys. 4.7).



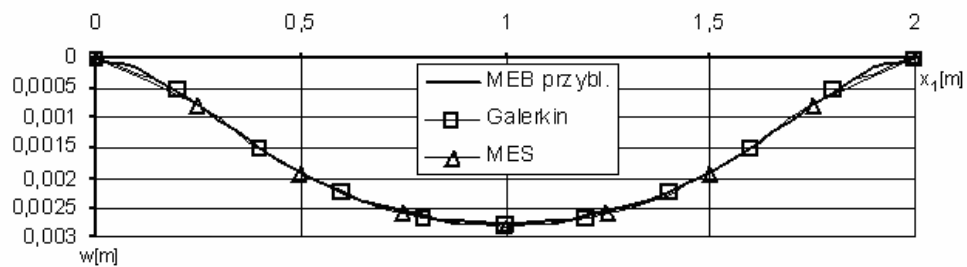
Rys. 4.7. Schemat płyty ortotropowej

Każdy bok płyty został podzielony na cztery równe, liniowe elementy brzegowe. W narożu zamocowanym nie występuje reakcja skupiona, stąd wynika rozkład punktów kolokacji metody Kupradzego (rys. 4.8).



Rys. 4.8. Punkty kolokacji

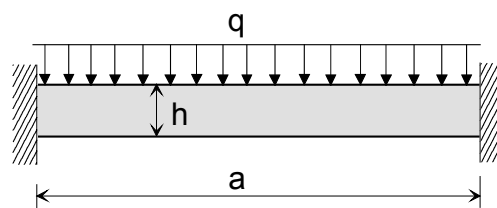
Płytę rozwiązano stosując przybliżone rozwiązanie podstawowe (3.17). Pochodne cząstkowe rozwiązań podstawowych potęg laplasjanu obliczano według wzorów z Dodatku D. Ugięcia płyty wzdłuż osi  $x_1$  porównano z ugięciami otrzymanymi metodą Galerkiną i metodą elementów skończonych według własnych algorytmów autora. Zbieżność rozwiązania MEB uzyskano dla sześciu wyrazów szeregu (3.17).



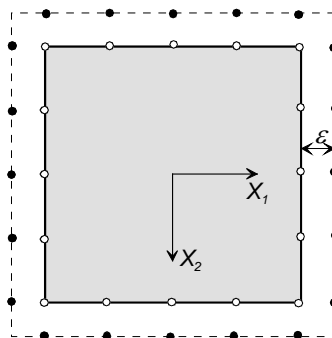
Rys. 4.9. Ugięcia płyty ortotropowej

#### 4.6. Płyta gruba

Rozwiązano kwadratową płytę o boku  $a = 1$  m, zamocowaną na wszystkich krawędziach i obciążoną ciśnieniem  $q = 1$  kPa (rys. 4.10). Grubość płyty  $h = 0,2$  m, a jej stałe materiałowe – moduł Younga  $E = 1$  kPa i współczynnik Poissona  $\nu = 0$ .



Rys. 4.10. Schemat płyty grubej

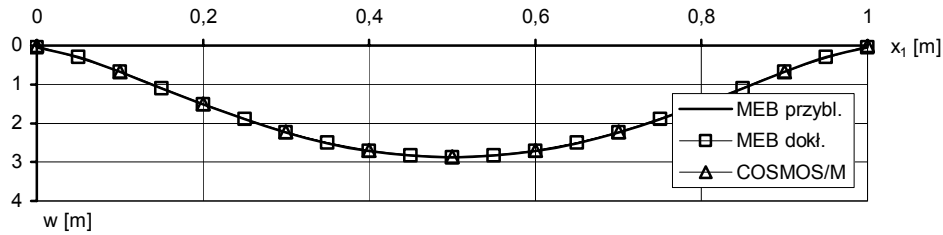


Rys. 4.11. Punkty kolokacji

W płycie grubej, ze względu na trzy niezależne parametry przemieszczeniowe –  $w$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , trzy tożsamości całkowe (2.83) są niezależne, dlatego punkty kolokacji

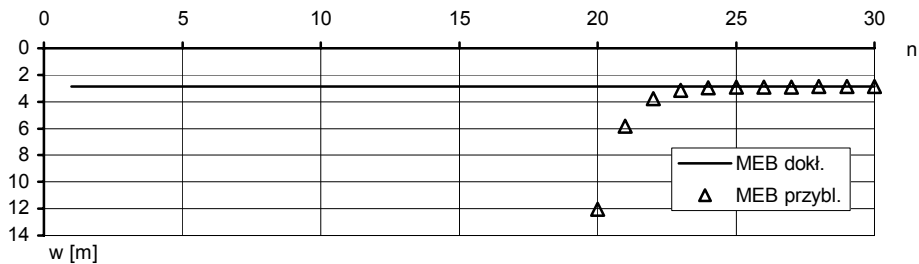
w metodzie Kupradzego są rozmieszczone na jednym konturze zewnętrznym (rys. 4.11), na którym wymaga się spełnienia trzech równań (2.83).

Wykres ugięć wzdłuż linii środkowej płyty przedstawiono na rys. 4.12. Wyniki porównano z uzyskanymi dla dokładnych rozwiązań podstawowych i z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych (COSMOS/M).

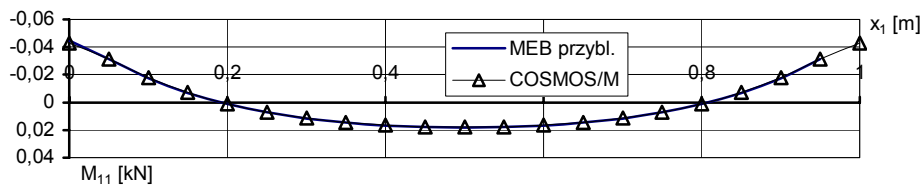


Rys. 4.12. Ugięcia płyty grubej

Na rysunku 4.13 przedstawiono zbieżność ugięcia w środku płyty w zależności od liczby  $n$  wyrazów szeregów (3.27), przyjętych w przybliżonym rozwiązaniu podstawowym. W tym przypadku zbieżność przybliżonych rozwiązań podstawowych osiągnięto dla 25 wyrazów szeregów (3.27).



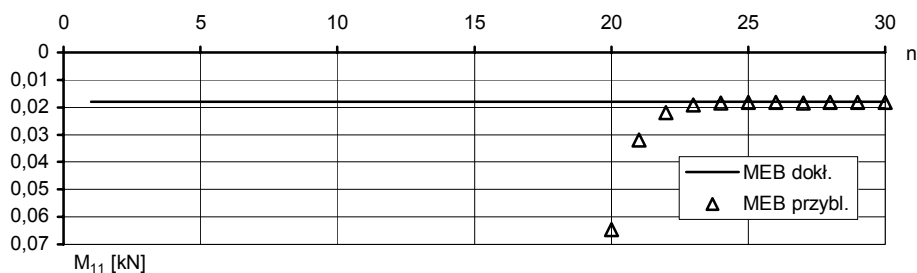
Rys. 4.13. Zbieżność przybliżonego rozwiązania podstawowego



Rys. 4.14. Moment zginający  $M_{11}$

W tym przykładzie obliczono również moment zginający  $M_{11}$  wzdłuż linii środkowej. Wartości momentu porównano na rys. 4.14 z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych w systemie COSMOS/M.

Podobnie jak w przypadku ugięć zbieżność rozwiązania uzyskano dla 25 wyrazów szeregu (3.27). Wykres zbieżności momentu zginającego  $M_{11}$  w środku płyty przedstawiono na rys. 4.15.

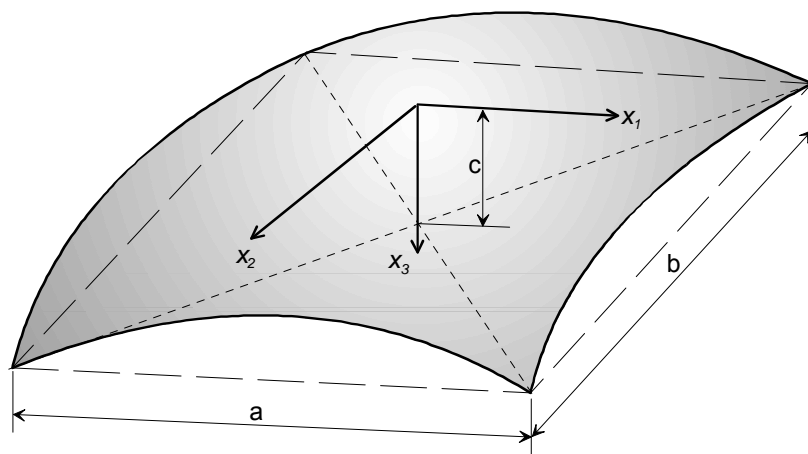


Rys. 4.15. Wykres zbieżności momentu zginającego  $M_{11}$

Warto tutaj podkreślić niemal identyczną zbieżność momentu zginającego w porównaniu z ugięciem, pomimo występowania pochodnych przemieszczeń w rozwiązaniu podstawowym momentu zginającego.

#### 4.7. Sferyczna powłoka mało wyniosła

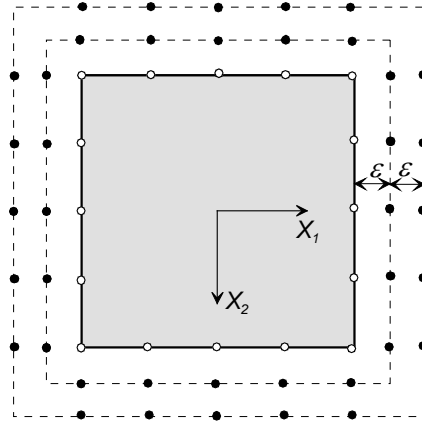
Rozpatrywana sferyczna powłoka mało wyniosła rozciąga się na planie kwadratu  $a = b = 10$  m. Wobec przyjętej krzywizny powierzchni środkowej  $k_{11} = k_{22} = 1/20$  m jej wyniosłość  $c = 1,25$  m (rys. 4.16). Powłoka jest zamocowana na wszystkich krawędziach i obciążona ciśnieniem w kierunku  $x_3 - q_3 = 1$  kPa. Przyjęto stałe materiałowe: moduł Younga  $E = 30 \cdot 10^6$  kPa i współczynnik Poissona  $\nu = 0$ .



Rys. 4.16. Schemat powłoki sferycznej

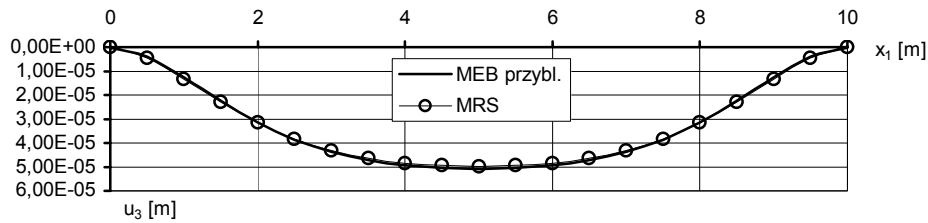


Punkty kolokacji są rozmieszczone teraz na dwóch konturach zewnętrznych (rys. 4.17). Na pierwszym konturze, bliższym krawędzi powłoki, spełnione są trzy równania (2.95) (dla  $j = 1, 2, 3$ ), na konturze drugiej natomiast tylko trzecie z tych równań (dla  $j = 3$ ).



Rys. 4.17. Punkty kolokacji

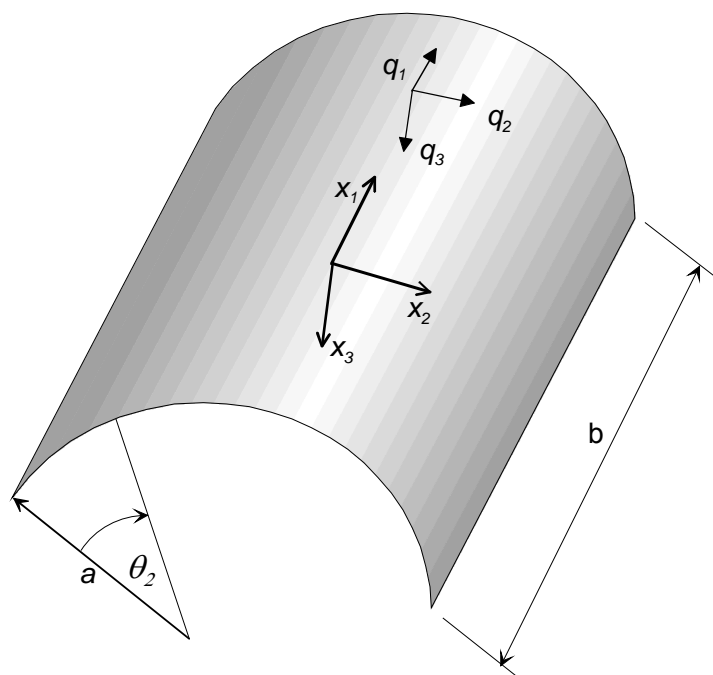
Wykres składowej przemieszczenia  $u_3$  wzdłuż linii środkowej powłoki pokazano na rys. 4.18. Zbieżność przybliżonych rozwiązań podstawowych osiągnięto dla siedmiu wyrazów szeregów (3.35). Wartości przemieszczeń porównano z otrzymanymi metodą różnic skończonych (MRS) według własnych algorytmów autora.



Rys. 4.18. Przemieszczenie  $u_3$  powłoki mało wyniosłej

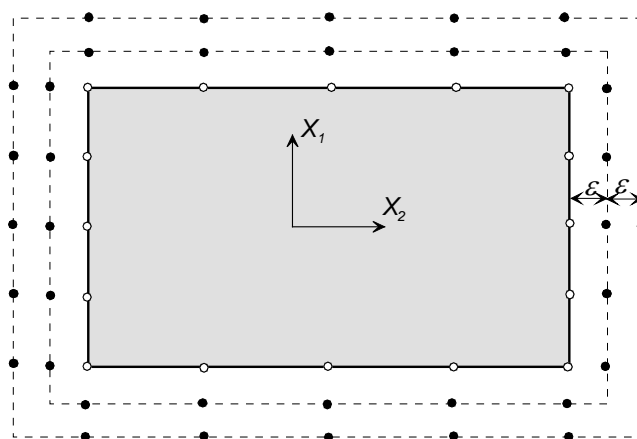
## 4.8. Powłoka walcowa

Rozwiązano powłokę w kształcie połowy walca kołowego o parametrach  $a = 1$  m,  $b = 2$  m,  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$  (rys. 4.19) i grubości  $h = 0,25$  m. Powłoka jest zamocowana wzdłuż wszystkich krawędzi i obciążona równomiernym ciśnieniem  $q_3 = 1$  kPa prostopadłym do jej powierzchni. Przyjęto stałe materiałowe: moduł Younga  $E = 30 \cdot 10^3$  kPa i współczynnik Poissona  $\nu = 0,16$ .

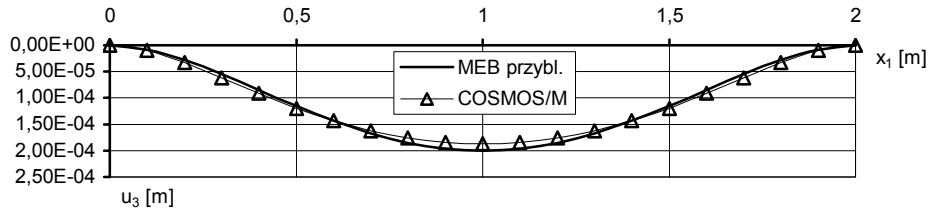


Rys. 4.19. Schemat powłoki walcowej

Rozkład punktów kolokacji jest podobny jak w powłoce mało wyniosłej i został pokazany na rys. 4.20. Podobnie jak w powłoce mało wyniosłej trzy tożsamości (2.107) spełnione są na konturze pierwszym bliższym krawędzi powłoki, a trzecia z nich (dla  $j = 3$ ) na konturze drugim.



Rys. 4.20. Punkty kolokacji



Rys. 4.21. Przemieszczenie  $u_3$  powłoki walcowej

Wykres składowej  $u_3$  przemieszczenia powłoki w przekroju  $x_2 = 0$  przedstawiono na rysunku 4.21. Tutaj zastosowano sześć wyrazów szeregów (3.40) przybliżonych rozwiązań podstawowych. Wyniki porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych (COSMOS/M).

## 5. Podsumowanie

W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych w wybranych zagadnieniach statyki dźwigarów powierzchniowych. Wyprowadzono brzegowe równania całkowe bezpośredniej metody elementów brzegowych dla szerokiej klasy płyt i powłok opisanych równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach:

- płyt cienkich na podłożu sprężystym,
- płyt grubych,
- powłok mało wyniosłych,
- wyniosłych powłok walcowych.

W przypadku płyt cienkich na podłożu sprężystym i płyt grubych wyprowadzono dokładne rozwiązania podstawowe opisujących je równań różniczkowych. Postać tych rozwiązań zawiera trudno dostępne w systemach programowania funkcje specjalne.

Dla wszystkich wymienionych wyżej dźwigarów powierzchniowych zaproponowano oryginalną metodę wyprowadzenia rozwiązań podstawowych. Rozwiązania te mają prostą postać szeregów potęgowych. Ważną cechą tych szeregów jest ich nieskończony promień zbieżności, co wykazano w p. 2.5.

Pokazano również użyteczność metody kolokacji Kupradzego w rozpatrywanych zagadnieniach. Zbieżność rozwiązań przy użyciu tej metody zbadano numerycznie na przykładzie płyty cienkiej.

Przedstawiono testowe rozwiązania numeryczne, jakie otrzymano metodą elementów brzegowych z zastosowaniem wyprowadzonych podstawowych rozwiązań przybliżonych każdego rozpatrywanego w pracy dźwigara powierzchniowego. Wyniki uzyskane z wykorzystaniem przybliżonych rozwiązań podstawowych porównano z wynikami otrzymanymi z zastosowaniem dokładnych rozwiązań podstawowych oraz z wynikami uzyskanymi innymi metodami numerycznymi. Otrzymane w każdym analizowanym przykładzie wyniki wskazują na dużą użyteczność praktyczną zaproponowanych podstawowych rozwiązań przybliżonych. Warto również zwrócić uwagę na szybką zbieżność szeregów przybliżonych rozwiązań podstawowych. W większości przypadków wystarcza niewielka liczba wyrazów szeregów (mniej niż 10) do osiągnięcia zadowalającej zbieżności rozwiązania przykładów z zastosowaniem przybliżonych rozwiązań podstawowych. Szybka zbieżność zostaje również zachowana w przypadku sił wewnętrznych, w których występują wyższe pochodne przybliżonych rozwiązań podstawowych, co zostało wykazane na przykładzie płyty grubej.

Jako jedyną wadę przybliżonych rozwiązań podstawowych można podać niemożność rozwiązania zagadnień w obszarach nieograniczonych, ale to dotyczy również dokładnych rozwiązań podstawowych opisywanych funkcjami specjalnymi, które również trzeba przybliżać szeregami.

Zaproponowaną metodę otrzymywania przybliżonych rozwiązań podstawowych można łatwo uogólnić na inne zagadnienia techniki, opisywane eliptycznymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach.

## Dodatek A

### Uogólniona transformacja Fouriera

Transformacja Fouriera (prosta i odwrotna) funkcji dwóch zmiennych zdefiniowana jest następująco [19, 20, 22, 39]:

$$\begin{aligned}
 F[f(x_1, x_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2 = \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2), \\
 F^{-1}[\tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2)] & \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = f(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Poniżej podano własności transformaty pochodnej cząstkowej i laplasjanu oraz splotu funkcji:

$$\begin{aligned}
 F\left[\frac{\partial^n}{\partial x_\beta^n} f(x_1, x_2)\right] &= (-i\alpha_\beta)^n \tilde{f}(\alpha_1, \alpha_2), \\
 F[\Delta^n f] &= (-1)^n \rho^{2n} \tilde{f}, \quad \rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \\
 F[f * g] &= \tilde{f} \tilde{g}.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Wykorzystując własność transformaty  $\delta$  Diraca, łatwo znaleźć transformatę rozwiązania podstawowego  $n$ -tej potęgi laplasjanu  $\bar{w}_n$ :

$$\begin{aligned}
 F[\delta] &= 1, \\
 F[\bar{w}_n] &= \frac{(-1)^n}{\rho^{2n}}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Przydatna jest również transformata

$$F[r^{6n-1}] = \frac{1}{C_n} \frac{1}{\rho^{6n+1}},$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{2\pi} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(6j-1)^2 (6j-3)^2 (6j-5)^2}, \quad n \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

Warto zwrócić uwagę na związek między transformacją Hankela

$$\mathbf{H}_0[f(r)] = \int_0^{\infty} f(r) J_0(r\rho) r dr = \tilde{f}(\rho),$$

$$\mathbf{H}_0^{-1}[\tilde{f}(\rho)] = \int_0^{\infty} \tilde{f}(\rho) J_0(r\rho) \rho d\rho = f(r), \quad (\text{A.5})$$

gdzie  $J_0$  jest funkcją Bessela, a dwuwymiarową transformacją Fouriera funkcji osiowo symetrycznej  $f(r)$

$$\mathbf{H}_0[f(r)] = \frac{1}{2\pi} \mathbf{F}[f(r)],$$

$$\mathbf{H}_0^{-1}[f(\rho)] = 2\pi \mathbf{F}^{-1}[f(\rho)]. \quad (\text{A.6})$$

Własność ta jest szczególnie przydatna przy odwracaniu transformat Fouriera z wykorzystaniem tablic całek [25].

## Dodatek B

### Metoda Hörmandera

Metoda Hörmandera pozwala w prosty sposób sprowadzić macierzowy układ równań różniczkowych do jednego równania skalarnego [13]. Rozpatruje się układ równań różniczkowych w celu znalezienia macierzy rozwiązań podstawowych

$$L_{ij}\bar{u}_{jk} = \delta_{ik}\delta. \quad (\text{B.1})$$

Założmy rozwiązanie podstawowe w postaci

$$\bar{u}_{jk} = L'_{kj}\bar{U}, \quad (\text{B.2})$$

gdzie  $L'_{kj}$  – macierz dopełnień algebraicznych operatora  $L_{kj}$ , a  $\bar{U}$  – pewna nieznaną funkcją.

Po wprowadzeniu zależności (B.2) do równania (B.1) oraz po skorzystaniu z własności

$$L_{ij}L'_{kj} = \delta_{ik}|L_{ij}|, \quad (\text{B.3})$$

otrzymuje się

$$\delta_{ik}|L_{ij}|\bar{U} = \delta_{ik}\delta, \quad (\text{B.4})$$

czyli w konsekwencji równanie skalarne

$$|L_{ij}|\bar{U} = \delta, \quad (\text{B.5})$$

po rozwiązaniu którego ze względu na  $\bar{U}$  otrzymuje się ze związku (B.2) macierz rozwiązań podstawowych  $\bar{u}_{ij}$ .

Metodę Hörmandera zilustrujemy prostym przykładem tarczy w płaskim stanie odkształcenia. Macierz operatorów różniczkowych ma tutaj postać [29]



$$L_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\partial_1^2 & -(\lambda + \mu)\partial_1\partial_2 \\ -(\lambda + \mu)\partial_1\partial_2 & -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\partial_2^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

a macierz jej dopełnień algebraicznych

$$L'_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\partial_2^2 & (\lambda + \mu)\partial_1\partial_2 \\ (\lambda + \mu)\partial_1\partial_2 & -\mu\Delta - (\lambda + \mu)\partial_1^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Równanie skalarne (B.5) przyjmie postać

$$\mu(\lambda + 2\mu)\Delta^2\bar{U} = \delta. \quad (\text{B.8})$$

Rozwiązaniem podstawowym tego równania jest (2.8)

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} r^2 \ln \frac{r}{r_0}. \quad (\text{B.9})$$

Ostatecznie z zależności (B.2) otrzymamy macierz rozwiązań podstawowych

$$\bar{u}_{\alpha\beta} = L'_{\beta\alpha}\bar{U} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} - & \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{r_1 r_2}{r^2} \\ -\frac{2(\lambda + 3\mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \ln \frac{r}{r_0} & \\ \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{r_1 r_2}{r^2} & \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r^2} - \\ & -\frac{2(\lambda + 3\mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \ln \frac{r}{r_0} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad r_\alpha = x_\alpha - y_\alpha.$$

## Dodatek C

### Rozwiązania podstawowe $n$ -tej potęgi laplasjanu

Rozpatruje się rozwiązanie podstawowe równania

$$\Delta^n \bar{w}_n = \delta. \quad (\text{C.1})$$

Z równania

$$\Delta^{n+1} \bar{w}_{n+1} = \Delta^n (\Delta \bar{w}_{n+1}) = \delta \quad (\text{C.2})$$

można wywieść związek

$$\Delta \bar{w}_{n+1} = \bar{w}_n. \quad (\text{C.3})$$

Założmy rozwiązanie podstawowe równania (C.1) w postaci

$$\bar{w}_n(r) = \frac{1}{2\pi} r^{2(n-1)} \left( C_n \ln \frac{r}{r_0} - D_n \right). \quad (\text{C.4})$$

Wykorzystując postać laplasjanu w przypadku osiowo-symetrycznym

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right), \quad (\text{C.5})$$

ze związku (C.3) łatwo otrzymać wzory rekurencyjne

$$C_{n+1} = \frac{C_n}{4n^2}, \quad D_{n+1} = \frac{1}{4n^2} \left( \frac{C_n}{n} + D_n \right). \quad (\text{C.6})$$

Wobec znanej postaci rozwiązania podstawowego równania harmonicznego

$$\Delta \bar{w}_1 = \delta, \quad \bar{w}_1(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{C.7})$$

znajdziemy wartości początkowe ciągu rekurencyjnego (C.6)

$$C_1 = 1, \quad D_1 = 0. \quad (\text{C.8})$$

Wzory (C.6) i (C.8) można również przedstawić w postaci iteracyjnej [38]

$$C_n = \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!(n-1)!}, \quad D_n = \frac{1}{4^{n-1}(n-1)!(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \quad (\text{C.9})$$

## Dodatek D

### Pochodne rozwiązań podstawowych $n$ -tej potęgi laplasjanu

Rozwiązanie podstawowe  $n$ -tej potęgi laplasjanu ma postać

$$\bar{w}_n(r) = \frac{1}{2\pi} C_n r^{2(n-1)} \ln(r) - \frac{1}{2\pi} D_n r^{2(n-1)}, \quad (\text{D.1})$$

$$r_\alpha = x_\alpha - y_\alpha, \quad r = \sqrt{r_\alpha r_\alpha}.$$

Aby znaleźć dowolne pochodne cząstkowe rozwiązania podstawowego (D.1) względem  $x_\alpha$ , wystarczy rozpatrzeć pochodne wyrażeń  $r^m$  i  $r^m \ln(r)$ .

Założmy, że pochodna  $r^m$  ma postać

$$\frac{\partial^k r^m}{\partial x_1^k} = \sum_{i=0}^k A_i^k r_1^i r^{m-(k+i)}. \quad (\text{D.2})$$

Zachodzi również oczywisty związek

$$\frac{\partial^{k+1} r^m}{\partial x_1^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} A_i^{k+1} r_1^i r^{m-(k+1+i)}, \quad (\text{D.3})$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1} r^m}{\partial x_1^{k+1}} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^k r^m}{\partial x_1^k} = A_1^k r^{m-(k+1)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ A_{i+1}^k (i+1) + A_{i-1}^k [m - (k+i-1)] \right\} r_1^i r^{m-(k+i+1)} \\ &+ A_{k-1}^k [m - (2k-1)] r_1^k r^{m-(2k+1)} + A_k^k (m-2k) r_1^{k+1} r^{m-(2k+2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Porównanie wyrażeń (D.3) i (D.4) prowadzi do następujących wyrażeń rekurencyjnych określających współczynniki A:

$$\begin{aligned}
A_0^m &= 1, \\
A_0^{k+1} &= A_1^k, \\
A_i^{k+1} &= A_{i+1}^k(i+1) + A_{i-1}^k[m - (k+i-1)], \quad i=1,2,\dots,k-1, \\
A_k^{k+1} &= A_{k-1}^k[m - (2k-1)], \\
A_{k+1}^{k+1} &= A_k^k(m-2k).
\end{aligned} \tag{D.5}$$

W przypadku wyrażenia  $r^m \ln(r)$  jego pochodne cząstkowe założymy w postaci

$$\frac{\partial^k [r^m \ln(r)]}{\partial x_1^k} = \sum_{i=0}^k B_i^k r_1^i r^{m-(k+i)} + \ln(r) \sum_{i=0}^k E_i^k r_1^i r^{m-(k+i)}. \tag{D.6}$$

Zapiszmy tutaj wyrażenia analogiczne do (D.3)

$$\frac{\partial^{k+1} [r^m \ln(r)]}{\partial x_1^{k+1}} = \sum_{i=0}^{k+1} B_i^{k+1} r_1^i r^{m-(k+1+i)} + \ln(r) \sum_{i=0}^{k+1} E_i^{k+1} r_1^i r^{m-(k+1+i)}, \tag{D.7}$$

oraz do (D.4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1} [\ln(r)r^m]}{\partial x_1^{k+1}} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^k [\ln(r)r^m]}{\partial x_1^k} = \ln(r) \left\langle E_1^k r^{m-(k+1)} + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ E_{i+1}^k(i+1) + E_{i-1}^k[m - (k+i-1)] \right\} r_1^i r^{m-(k+i+1)} + \\
&+ \left. E_{k-1}^k[m - (2k-1)] r_1^k r^{m-(2k+1)} + E_k^k(m-2k) r_1^{k+1} r^{m-(2k+2)} \right\rangle + \\
&+ B_1^k r^{m-(k+1)} + \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ B_{i+1}^k(i+1) + B_{i-1}^k[m - (k+i-1)] + E_{i-1}^k \right\} r_1^i r^{m-(k+i+1)} + \\
&+ \left\{ B_{k-1}^k[m - (2k-1)] + E_{k-1}^k \right\} r_1^k r^{m-(2k+1)} + \left\{ B_k^k(m-2k) + E_k^k \right\} r_1^{k+1} r^{m-(2k+2)}.
\end{aligned} \tag{D.8}$$

Po porównaniu wyrażenia w nawiasach trójkątnych w (D.8) z wyrażeniem (D.4) znajdziemy zależność

$$E_i^k = A_i^k, \quad (D.9)$$

a z pozostałej części (D.8), po uwzględnieniu (D.9), otrzymujemy związek rekurencyjny

$$\begin{aligned} B_0^m &= 0, \\ B_0^{k+1} &= B_1^k, \\ B_i^{k+1} &= B_{i+1}^k (i+1) + B_{i-1}^k [m - (k+i-1)] + A_{i-1}^k, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \\ B_k^{k+1} &= B_{k-1}^k [m - (2k-1)] + A_{k-1}^k, \\ B_{k+1}^{k+1} &= B_k^k (m - 2k) + A_k^k. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Z uwagi na symetrię wyrażeń  $r^m$  i  $r^m \ln(r)$  ze względu na zmienne  $x_1$  i  $x_2$ , cząstkowe pochodne mieszane przyjmą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+l} r^m}{\partial x_1^k \partial x_2^l} &= \sum_{i=0}^k A_i^k r_1^i \sum_{j=0}^l A_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)}, \\ \frac{\partial^{k+l} [r^m \ln(r)]}{\partial x_1^k \partial x_2^l} &= \sum_{i=0}^k B_i^k r_1^i \sum_{j=0}^l A_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)} + \\ &+ \sum_{i=0}^k A_i^k r_1^i \left[ \sum_{j=0}^l B_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)} + \ln(r) \sum_{j=0}^l A_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)} \right], \end{aligned} \quad (D.11)$$

i ostatecznie możemy zapisać pochodną rozwiązania podstawowego

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+l} \bar{w}_n(r)}{\partial x_1^k \partial x_2^l} &= \frac{C_n}{2\pi} \left\{ \sum_{i=0}^k B_i^k r_1^i \sum_{j=0}^l A_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)} \right. \\ &+ \sum_{i=0}^k A_i^k r_1^i \left[ \sum_{j=0}^l B_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)} + \ln(r) \sum_{j=0}^l A_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)} \right] \left. \right\} \\ &- \frac{D_n}{2\pi} \sum_{i=0}^k A_i^k r_1^i \sum_{j=0}^l A_j^l r_2^j r^{m-(k+l+i+j)}. \end{aligned} \quad (D.12)$$

## Literatura

- [1] Верюжский Ю. В., *Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики*, Вища школа, Киев, 1978.
- [2] Okupniak B., Sygulski R., *Non-singular BEM analysis of Reissner plates*, Konferencja Computer Methods in Mechanics, Gliwice, 2003.
- [3] Jaswon M. A., *Integral equation methods in potential theory*, Proc. Roy. Soc., Ser. A, **275**, 1963.
- [4] Rizzo F. J., *A boundary integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics*, Quart. Appl. Math., **25**, 1967.
- [5] Myślecki K., *Analiza płaskich zagadnień teorii sprężystości metodą elementów brzegowych*, Mech. Teor. i Stos., 3, **25**, 1987.
- [6] Brebbia C. A., Walker S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [7] Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [8] Banerjee P. K., Butterfield R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981.
- [9] Burczyński T., *Metoda elementów brzegowych w mechanice*, WNT, Warszawa, 1995.
- [10] Jaworski A., *Metoda elementów brzegowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2000.
- [11] Kołodziej J. A., *Metoda kollokacji brzegowej w zagadnieniach mechaniki*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2001.
- [12] Matsui T., Matsuoka O., *The Fundamental Solution in the Theory of Shallow Shells*, Int. J. Solids Structures, 12, **14**, 1978.
- [13] Westphal Jr T., de Barcellos C. S., Pereira J. T., *On general fundamental solutions of some linear elliptic differential operators*, Eng. Anal. Bound. Elem., **17**, 1996.
- [14] Westphal Jr. T., Schnack E., de Barcellos C. S., *The general fundamental solution of the sixth-order Reissner and Mindlin plate bending models revisited*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **166**, 1998.
- [15] Shi G., Bezine G., *A General Boundary Integral Formulation for the Anisotropic Plate Bending Problems*, J. Composite Mat., **22**, 1988.
- [16] Myślecki K., Szmigielski R., *Rozwiązanie mało wyniosłej powłoki sferycznej metodą elementów brzegowych*, XXIX Konferencja Naukowa KILiW i KN PZITB, Krynica 1983.
- [17] Myślecki K., Szmigielski R., *Boundary element method approach to Reissner's theory of plates*, Studia Geot. Mech., 3/4, **19**, 1997.
- [18] Myślecki K., *Approximate fundamental solutions of equilibrium equations for thin plates on an elastic foundation*, Arch. Civ. Mech. Eng., 1, **4**, 2004.
- [19] Кеч В., Теодореску П., *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*, Мир, Москва, 1978.
- [20] Владимиров В. С., *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, Москва, 1979.
- [21] Kythe P. K., *Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [22] Saichev A. I., Woyczyński W. A., *Distributions in the Physical and Engineering Sciences*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [23] Zienkiewicz O. C., *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
- [24] Jauhorgng Lin, Duffield R. C., Hui-Ru Shih, *Buckling analysis of elastic plates by boundary element method*, Eng. Anal. Bound. Meth., **23**, 1999.

- [25] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва, 1971.
- [26] Диткин В. А., Прудников А. П., *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Наука, Москва, 1974.
- [27] Łukasiewicz S., *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa, 1976.
- [28] McLachlan N. W., *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa, 1964.
- [29] Nowacki W., *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970.
- [30] Гольденвейзер А. Л., *Теория упругих тонких оболочек*, Наука, Москва, 1976.
- [31] Flügge W., *Powłoki*, Arkady, Warszawa, 1972.
- [32] Kączkowski Z., *Płyty*, Arkady, Warszawa, 1980.
- [33] Leja F., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1975.
- [34] Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. II*, PWN, Warszawa, 2003.
- [35] Lisowski A., *Obliczanie konstrukcji na ciągłym podłożu sprężystym*, PWN, Warszawa, 1974.
- [36] *Budownictwo betonowe, t. IX Fundamenty*, Arkady, Warszawa, 1963.
- [37] Wiłun Z., *Zarys geotechniki*, WKŁ, Warszawa, 1987.
- [38] Cheng A. H.-D., *Particular solutions of Laplacian, Helmholtz-type, and polyharmonic operators involving higher order radial basis functions*, Eng. Anal. Bound. Elem., **24**, 2000.
- [39] Sneddon I. N., *Metoda transformacji całkowych w mieszanych zagadnieniach brzegowych klasycznej teorii sprężystości*, Ossolineum, Wrocław, 1974.
- [40] Ganowicz R., *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teoret. i Stosowana, **4**, 3, 1966.
- [41] Ganowicz R., *On the fundamental singularity in the theory of shallow cylindrical shells*, Arch. of Mech., **25**, 6, 1973.