

Alicja Ganczarek-Gamrot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

WYBRANE MODELE KLASY GARCH W OCENIE RYZYKA PORTFELA KONTRAKTÓW NA ENERGIĘ ELEKTRYCZNĄ

Streszczenie: W pracy przeprowadzono analizę porównawczą ryzyka estymowanego na podstawie klasycznego modelu GARCH oraz modelu FIGARCH na przykładzie modelu warunkowej korelacji DCC. Analiza porównawcza została przeprowadzona na bazie portfeli zbudowanych na bazie 24 szeregów czasowych z Rynku Dnia Następnego (RDN) Towarowej Giełdy Energii (TGE) od 02.03.2009 do 27.02.2011 r.

Słowa kluczowe: modele GARCH, portfel, ryzyko, rynek energii.

1. Wstęp

Modele GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) stały się niemal niezbędne w analizach szeregów czasowych notowanych z dużą częstotliwością, gdzie obecny jest efekt grupowania się wariancji. W analizie ryzyka rozpatrywane są często portfele, a nie pojedyncze akcje, w związku z czym w ocenie ryzyka inwestycji niezbędne jest spojrzenie wielowymiarowe. Celem pracy jest analiza ryzyka portfela złożonego z kontraktów na energię elektryczną. Dlatego też w niniejszej pracy skupiono się na wielowymiarowych modelach klasy GARCH. Analizując szeregi czasowe z polskiego rynku energii elektrycznej, często mamy do czynienia z niestacjonarnością, którą w przypadku modeli zmienności możemy opisać za pomocą modeli klasy FIGARCH. W pracy na przykładzie modelu warunkowej korelacji DCC zostanie przeprowadzona analiza porównawcza ryzyka estymowanego na podstawie klasycznego modelu GARCH oraz modelu FIGARCH. Analiza porównawcza zostanie przeprowadzona na bazie szeregów empirycznych z Rynku Dnia Następnego (RDN) Towarowej Giełdy Energii (TGE) od 2.03.2009 do 27.02.2011 r.

2. Wielowymiarowe modele GARCH

Modele GARCH w przypadku zarówno jedno-, jak i wielowymiarowym opisują zmienność szeregów czasowych. Dlatego też rozważa się je zawsze wspólnie z modelem wartości oczekiwanych, najczęściej stóp zwrotu:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{r}_t – wektor stóp zwrotu o wymiarach $N \times 1$,

$\boldsymbol{\mu}_t$ – wektor warunkowych wartości oczekiwanych o wymiarach $N \times 1$,

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ – wektor reszt o wymiarach $N \times 1$ dany formułą:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{0,5} \mathbf{u}_t, \quad (2)$$

gdzie: \mathbf{H}_t – macierz warunkowej kowariancji o wymiarach $N \times N$:

$$\mathbf{r}_t \sim D(\boldsymbol{\mu}_t, \mathbf{H}_t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim D(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t),$$

\mathbf{u}_t – wektor o wymiarach $N \times 1$, zerowej wartości oczekiwanej oraz jednostkowej macierzy kowariancji.

Wielowymiarowe modele GARCH to modele warunkowej macierzy kowariancji \mathbf{H}_t . Engle [2002] oraz Tse i Tsui [2002] zaproponowali niezależnie model GARCH zmiennych warunkowych współczynników korelacji (DCC – *Dynamic Conditional Correlation*), w którym macierz \mathbf{H}_t jest zmienna w czasie. Model DCC zaproponowany przez Engle'a [2002] przyjmuje postać:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma}_t \mathbf{D}_t, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_t = \text{diag}(q_{11,t}^{-0,5}, \dots; q_{NN,t}^{-0,5}) \quad \mathbf{Q}_t \text{diag}(q_{11,t}^{-0,5}, \dots; q_{NN,t}^{-0,5}), \quad (4)$$

gdzie: $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{1t}^{0,5}, h_{2t}^{0,5}, \dots, h_{Nt}^{0,5})$ – macierz diagonalna o wymiarach $N \times N$, której elementami są jednowymiarowe warunkowe odchylenia standardowe opisane za pomocą dowolnych jednowymiarowych GARCH,

$\boldsymbol{\Gamma}_t$ – macierz zmiennych warunkowych współczynników korelacji,

$\mathbf{Q}_t = (q_{ijt})$ symetryczna, dodatnio określona macierz o wymiarach $N \times N$:

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{\mathbf{Q}} + \alpha \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}_{t-1}' + \beta \mathbf{Q}_{t-1}, \quad u_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{h_{it}^{0,5}}$$

$\bar{\mathbf{Q}}$ – bezwarunkowa macierz wariancji \mathbf{u}_t ,

α, β – nieujemne parametry, $\alpha + \beta < 1$, N – liczba szeregów czasowych.

Współczynnik autokorelacji między i -tym a j -tym szeregiem czasowym w modelu DCC Engle'a można zapisać wzorem:

$$\rho_{ijt} = \frac{(1 - \alpha - \beta) q_{ijt} + \alpha u_{it-1} u_{jt-1} + \beta q_{ijt-1}}{\sqrt{((1 - \alpha - \beta) q_{iit} + \alpha u_{it-1}^2 + \beta q_{iit-1}) ((1 - \alpha - \beta) q_{jjt} + \beta u_{jt-1}^2 + \beta q_{jjt-1})}}. \quad (5)$$

Wśród modeli z klasy stacjonarnych modeli GARCH w macierzy \mathbf{D}_t brano pod uwagę:

- model GARCH(1,1) [Bollerslev, Engle 1986]:

$$h_{it} = \omega + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2. \quad (6)$$

Wśród modeli z klasy niestacjonarnych modeli GARCH w macierzy \mathbf{D}_t brano pod uwagę:

- zintegrowany proces GARCH, IGARCH(p,q) [Bollerslev, Engle 1986]:

$$h_{it} = \frac{\omega}{[1 - \beta(B)]} + \{1 - [1 - \alpha(B) - \beta(B)](1 - B)^{-1}(1 - B)[1 - \beta(B)]^{-1}\} \varepsilon_t^2, \quad (7)$$

- model uwzględniający efekt długiej pamięci FIGARCH-CHUNG(p,d,q) [Chung 1999]

$$[1 - \alpha(B) - \beta(B)](1 - B)^d (\varepsilon_t^2 - \sigma^2) = [1 - \beta(B)](\varepsilon_t^2 - h_{it}), \quad (9)$$

σ^2 – niezależna wariancja szeregu ε_t .

Więcej informacji na temat wielowymiarowych modeli GARCH można znaleźć m.in. w pracach autorów, takich jak: Trzpiot [2010], Fiszeder [2009], Ganczarek [2008; 2011], Osiewalski, Pipień [2002] oraz Zivot i Wang [2006].

3. Estymacja ryzyka

Korzystając z wyników estymacji zmienności za pomocą modeli GARCH [Piontek 2001; Weron 2000], oszacowano kwantylową miarę zagrożenia *Value-at-Risk*:

$$\mathbf{VaR}_\alpha = (\mathbf{R}_\alpha + \boldsymbol{\mu}_t) \mathbf{P}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{F}^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{H}_t}, \quad (11)$$

gdzie: \mathbf{R}_α – wektor kwantyli rzędu α stóp zwrotu portfela,

\mathbf{VaR}_α – wektor miar zagrożenia rzędu α ,

\mathbf{P}_0 – wektor bieżących cen rozpatrywanych kontraktów wchodzących w skład portfela,

$\boldsymbol{\mu}_t$ – wartość oczekiwana portfela,

$\sqrt{\mathbf{H}_t}$ – warunkowa macierz wariancji kowariancji dana równaniem (3),

$F^{-1}(\alpha)$ – kwantyl rzędu α standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

Do oceny efektywności estymacji $VarR_\alpha$ wykorzystano zaproponowany przez Kupca [1995] test przekroczeń. Oznaczając przez w udział przekroczeń $VarR_\alpha$ w szeregu rozpatrywanych stóp zwrotu, można zweryfikować hipotezę $H_0 : w = \alpha$, przeciwko alternatywnej $H_1 : w \neq \alpha$. Sprawdzianem tej hipotezy jest test ilorazu wiarygodności oparty na statystyce:

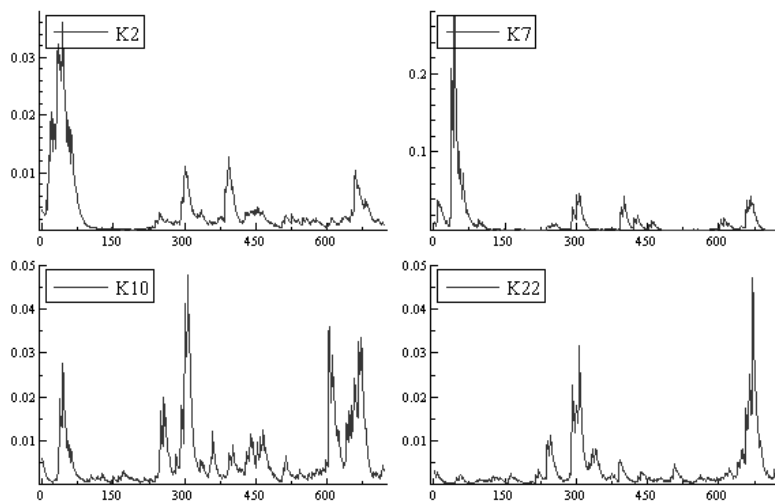
$$LR_{uc} = -2 \ln[(1 - \alpha)^{T-N} \alpha^N] + 2 \ln \left\{ \left[1 - \left(\frac{N}{T} \right)^{T-N} \right] \left(\frac{N}{T} \right)^N \right\}, \quad (12)$$

gdzie N jest liczbą przekroczeń $VarR_\alpha$ przy liczbie obserwacji T . Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka LR_{uc} ma asymptotyczny rozkład χ^2 z jednym stopniem swobody.

4. Analiza ryzyka na polskim rynku energii elektrycznej

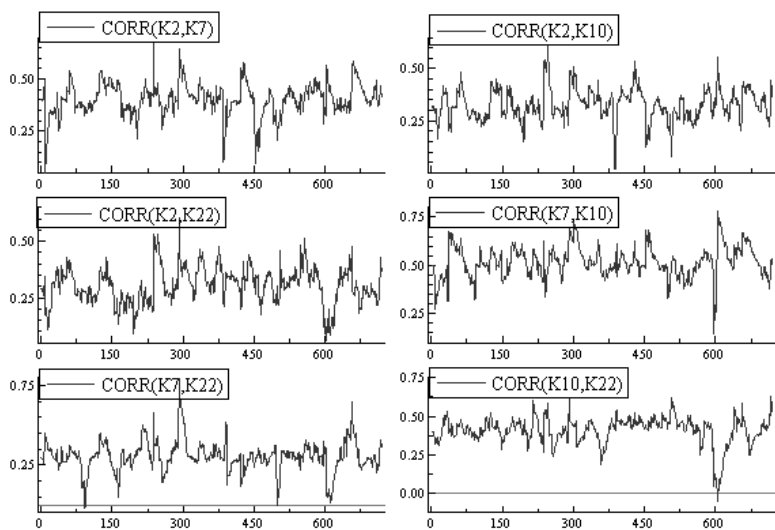
Bazując na notowaniach z Rynku Dnia Następnego (RDN) Towarowej Giełdy Energii (TGE), podjęto próbę budowy portfela złożonego z kontraktów na energię elektryczną. W tym celu rozważono 24 kontrakty zawierane na RDN podczas pierwszej aukcji¹ [Ganczarek-Gamrot 2011] od 2.03.2009 do 27.02.2011 r. Ze względu na silną zależność pomiędzy notowaniami poszczególnych kontraktów do portfela wyłoniono tylko te spośród 24 kontraktów, które były zależne między sobą w niewielkim stopniu. W tym celu posłużono się analizą głównych składowych [Ganczarek-Gamrot 2011], na mocy której spośród 24 kontraktów wybrano cztery kontrakty dla godzin: 2, 7, 10, 22. Zgodnie z równością (1) w pracy rozważono dzienne liniowe stopy zwrotu tych kontraktów. Wartości oczekiwane wszystkich szeregów czasowych rozpatrywanych stóp zwrotu charakteryzują się tygodniową cyklicznością, brakiem trendu, istotną autokorelacją rzędu pierwszego oraz istotnym efektem średniej ruchomej rzędu pierwszego (szczegółowe wyniki estymacji modelu SARIMA zamieszczono w [Ganczarek-Gamrot 2011]). W szeregach reszt modeli SARIMA widoczny jest efekt skupiania się zmienności. W związku z czym w opisie zmienności kontraktów z RDN zostały wykorzystane modele warunkowej zmienności. Ponadto na mocy testu Tse [2000] należy odrzucić hipotezę o stałej korelacji między rozważanymi szeregami czasowymi na poziomie istotności 0,05. Dlatego dla analizowanej grupy szeregów czasowych został wykorzystany model dynamicznej warunkowej korelacji DCC. Estymację macierzy warunkowej kowariancji przeprowadzono MNW z rozkładem normalnym oraz t -Studenta. Na rysunkach 1-2 zamieszczono wyniki estymacji parametrów warunkowej wariancji.

¹ Według ustalonego przez TGE harmonogramu sesji, ceny jednolite aukcji pierwszej są ustalane o godzinie 8:00. Ceny ustalane są niezależnie na każdą godzinę doby. Są to ceny równowagi złożonych ofert kupna i sprzedaży energii elektrycznej. Realizacja zawartych kontraktów w systemie ceny jednolitej następuje kolejnego dnia.



Rys. 1. Szeregi jednowymiarowych wariacji oszacowanych modelem IGARCH(1,1) z rozkładem t -Studenta i 5 stopniami swobody

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Szeregi korelacji oszacowanych modelem IGARCH(1,1) z rozkładem t -Studenta i 5 stopniami swobody

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 1 zaprezentowano wartości $\text{VaR}_{0,05}$ poszczególnych kontraktów oraz portfela kontraktów oszacowanych na podstawie modelu DCC Engle'a w przypadku,

gdy jednowymiarowe wariancje w macierzy D_t miały postać stacjonarnych modeli GARCH [Ganczarek 2011] oraz niestacjonarnych modeli IGARCH i FIGARCH. Wagi rozważanego portfela ustalono na podstawie współczynników zysku względnie poszczególnych kontraktów. Wartości $\text{VaR}_{0,05}$ tak jak elementy macierzy kowariancji są szeregami czasowymi, w związku z czym w tab. 1 zamieszczono wybrane parametry estymowanych szeregów. Wyraźnie niższe wartości $\text{VaR}_{0,05}$ otrzymano dla modeli z rozkładem t -Studenta w porównaniu z rozkładem normalnym. Niemniej jednak należy zaznaczyć, że w przypadku rozkładu t -Studenta klasyczny model GARCH(1,1) dał wyższe oszacowania wartości zagrożonej w porównaniu ze zintegrowanym modelem IGARCH(1,1). Zdecydowanie najwyższe wartości $\text{VaR}_{0,05}$ otrzymano na podstawie szeregów ułankowo zintegrowanych FIGARCH(1,d,1).

Tabela 1. Wartości $\text{VaR}_{0,05}$ [PLN/MWh] oszacowane za pomocą modelu DCC

Parametry/kontrakty	K2	K7	K10	K22	Portfel
GARCH(1,1) z rozkładem normalnym					
Min.	2,35	3,61	5,67	5,05	4,70
Średnia	12,49	25,32	25,02	15,85	14,80
Maks.	37,73	210,99	90,91	84,28	57,98
GARCH(1,1) z rozkładem t -Studenta o 4 stopniach swobody					
Min.	3,99	6,12	9,61	8,56	7,82
Średnia	21,17	42,91	42,42	26,86	25,04
Maks.	63,96	357,66	154,10	142,86	100,13
IGARCH(1,1) z rozkładem t -Studenta o 5 stopniach swobody					
Min	3,49	5,56	8,36	7,58	6,23
Średnia	17,99	31,55	33,88	22,00	19,46
Maks.	53,28	213,36	108,58	108,95	64,21
FIGARCH(1,1) z rozkładem t -Studenta o 5 stopniach swobody					
Min.	6,19	11,87	8,90	10,99	10,23
Średnia	28,26	49,41	52,71	34,23	30,48
Maks.	83,18	471,41	183,73	185,21	128,72

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki testu przekroczeń Kupca dla $\text{VaR}_{0,05}$ oszacowanego za pomocą wybranych wielowymiarowych modeli DCC. Analizując wyniki w tab. 2, można powiedzieć, że w estymacji ryzyka zmiany wartości portfela kontraktów na energię elektryczną zdecydowanie lepsze wyniki dają niestacjonarne modele IGARCH oraz FIGARCH w porównaniu z klasycznym modelem GARCH. W przypadku klasycznego modelu GARCH z rozkładem normalnym wartość $\text{VaR}_{0,05}$ została niedoszacowana, a w przypadku rozkładu t -Studenta wyraźnie prze-

szacowana. Dla klasycznego modelu GARCH poprawne oszacowanie $\text{VaR}_{0,05}$ uzyskano dla pojedynczego kontraktu K22 oraz K10. W przypadku modeli niestacjonarnych IGARCH(1,1) oraz FIGARCH(1,d,1) wyniki dla pojedynczych modeli są przeszacowane lub niedoszacowane, natomiast ostatecznie $\text{VaR}_{0,05}$ dla portfela jest oszacowane prawidłowo.

Tabela 2. Wyniki testu Kupca dla $\text{VaR}_{0,05}$ oszacowane za pomocą modelu DCC

Charakterystyki/kontrakty	K2	K7	K10	K22	Portfel
GARCH(1,1) z rozkładem normalnym					
N	54	110	101	36	68
N/T	0,0750	0,1528	0,1403	0,0500	0,0944
LR_{uc}	8,2681	106,0428	84,7659	0,0000	24,0155
p -wartość	0,0040	<0,0001	<0,0001	1,0000	<0,0001
GARCH(1,1) z rozkładem t -Studenta o 4 stopniach swobody					
N	17	68	42	6	21
N/T	0,0236	0,0944	0,0583	0,0083	0,0292
LR_{uc}	13,0126	24,0155	1,0014	39,7959	7,6887
p -wartość	0,0003	<0,0001	0,3170	<0,0001	0,0056
IGRCH(1,1) z rozkładem t -Studenta o 5 stopniach swobody					
N	26	85	69	14	37
N/T	0,0361	0,1181	0,0958	0,0194	0,0514
LR_{uc}	3,2235	51,6497	25,3994	18,2552	0,0290
p -wartość	0,0726	<0,0001	<0,0001	<0,0001	0,8648
FIARCH(1,1) z rozkładem t -Studenta o 5 stopniach swobody					
N	24	84	69	10	39
N/T	0,0333	0,1167	0,0958	0,0139	0,0542
LR_{uc}	4,7470	49,7961	25,3994	27,3573	0,2565
p -wartość	0,0293	<0,0001	<0,0001	<0,0001	0,6125

Źródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

Podsumowując, możemy stwierdzić, że w badanym okresie na RDN niestacjonarne modele zmienności mają przewagę nad klasycznymi modelami GARCH w estymacji ryzyka zmiany ceny energii elektrycznej.

Literatura

- Bollerslev T., Engle R.F., *Modeling the persistence of conditional variance*, „Econometric Review” 1986 no 5.
- Chung C.F., *Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model*, National Taiwan University Working Paper, 1999.
- Engle R.F., *Dynamic conditional correlation-a simple class of multivariate GARCH models*, „Journal of Business and Economic Statistics” 2002, no 20.
- Fiszeder P., *Modele Klasy GARCH w Empirycznych Badaniach Finansowych*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2009.
- Ganczarek-Gamrot A., *Analiza ryzyka na dobowo-godzinnych rynkach obrotu energią elektryczną w Polsce*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, red. K. Jajuga, W. Ronka-Chmielowiec, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 60, UE, Wrocław 2009.
- Ganczarek-Gamrot A., *Pomiar ryzyka w systemie ceny jednolitej na Towarowej Gieldzie Energii*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko*, red. T. Trzaskalik, UE, Katowice 2010.
- Ganczarek-Gamrot A., *Wielowymiarowe modele GARCH w ocenie ryzyka na polskim rynku energii elektrycznej*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko*, red. T. Trzaskalik, UE, Katowice 2011.
- Kupiec P., *Techniques for verifying the accuracy of risk management models*, „Journal of Derivatives” 1995, no 2.
- Osiewalski J., Pipień M., *Multivariate t-GARCH Models-Bayesian Analysis for Exchange Rates*, Modeling Economies in Transition. Proceedings of the Sixth AMFET Conference, Łódź 2002.
- Piontek K., *Heteroskedastyczność rozkładu stóp zwrotu a koncepcja pomiaru ryzyka metodą VaR*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej, AE, Katowice 2001.
- Trzpiot G. (red.), *Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka inwestycyjnego*, PWE, Warszawa 2010.
- Tse Y.K., *A test for constant correlation in a multivariate GARCH model*, „Journal of Econometrics” 2000, no 98.
- Tse Y.K., Tsui A.K.C., *A multivariate GARCH model with time-varying correlations*, „Journal of Business & Economic Statistics” 2002, no 20.
- Weron A., Weron R., *Gielda Energii*, Centrum Informacji Rynku Energii, Wrocław 2000.
- Zivot E., Wang J., *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*, Springer, New York 2006.

SELECTED GARCH MODELS IN ENERGY CONTRACTS PORTFOLIO RISK ASSESSMENT

Summary: Based on Dynamic Conditional Correlation model (DCC) comparative risk analysis was made. The risk estimated by classical GARCH model was compared to the risk estimated by FIGARCH model. The analysis was made on the basis of portfolio, which was built from 24 contracts from Day Ahead Market of Polish Power Exchange in the period from 02.03.2009 to 27.02.2011.

Keywords: GARCH models, portfolio, risk, market, energy market.