EKONOMETRIA ECONOMETRICS 34 • 2011
ISSN 1507-3866

Michał Kolupa, Zbigniew Śleszyński
Politechnika Radomska

O KONSTRUKCJI UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH *BX* = *d*, RÓWNOWAŻNEGO DANEMU UKŁADOWI *AX* = *b* I ZASTOSOWANIACH TAKIEJ KONSTRUKCJI

Streszczenie: W artykule przedstawiono konstrukcję układu równań $BX = d$ równoważnego danemu układowi $AX = b$. W tym celu wykorzystano odpowiednią macierz brzegową. Układ równań $BX = d$ ma nieosobliwą macierz podstawową B stopnia n-tego, wektor d zaś otrzymujemy ze wzoru $d = BA^{-1}b$. Aby wyznaczyć wektor d, stosujemy macierz brzegową. W literaturze znane są macierze N, C i M, podstawiane w miejsce macierzy B.
W artykule zaproponowano przyjęcie macierzy Q postaci

$$Q = \begin{bmatrix} q & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & q \end{bmatrix},$$

gdzie q jest liczbą naturalną większą od jedności. Pokazano, że macierz Q jest macierzą nieosobliwą.

Słowa kluczowe: układ równań liniowych, macierz brzegowa, portfel akcji.

W niniejszej pracy przedstawiamy konstrukcję układu równań liniowych $BX = d$, który jest równoważny danemu układowi takich równań $AX = b$. Konstrukcję tę wykorzystuje się w teorii portfela akcji realizowanego w warunkach krótkiej sprzedaży [Śleszyński 2011] oraz do badania znaku i-tej składowej wektora X spełniającego układ równań $AX = b$ [Kolupa 2004; 2008]. Zakładamy, że macierz A jest daną nieosobliwą macierzą stopnia n-tego, b zaś jest danym wektorem kolumnowym o n składowych. Konstruowany układ równań $BX = d$ równoważny danemu układowi $AX = b$ ma również nieosobliwą macierz podstawową stopnia n, natomiast wektor kolumnowy d o n składowych jest wektorem nieznanym i należy go wyznaczyć. Dodajmy jeszcze, że macierz B musi być tak dobrana, aby rozwiązanie układu $BX = d$ było znacznie łatwiejsze pod względem numerycznym od rozwiązywania danego układu $AX = b$. Można to osiągnąć przez zapewnienie, że macierz B składa się z relatywnie dużej liczby zer i jedynek dobranych tak, aby zapewnić jej nieosobliwość.

Konstruując układ $BX = d$, równoważny układowi $AX = b$, wykorzystamy macierz brzegową po to, aby wyznaczyć nieznany wektor *d*. Ponieważ wspomniane układy są równoważne, stąd

$$X = A^{-1}b \tag{1}$$

oraz

$$X = B^{-1}d. \tag{2}$$

Mamy więc

$$B^{-1}d = A^{-1}b. \tag{3}$$

Otrzymujemy zatem

$$d = BA^{-1}b. \tag{4}$$

Aby wyznaczyć wektor *d* dany wzorem (4), korzystamy z następującej macierzy brzegowej

$$U = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -B & 0 \end{array}\right]. \tag{5}$$

Na elementach macierzy *U* wykonujemy przekształcenia elementarne typu α (w ich wyniku macierz *A* przechodzi w górną macierz trójkątną z jedynkami na głównej przekątnej – oznaczamy otrzymaną macierz przez A^*) oraz przekształcenia typu β (w ich wyniku macierz –*B* przechodzi w macierz zerową).

Wykonanie powyższych przekształceń elementarnych na macierzy *U* danej wzorem (5) powoduje, że w rezultacie tych przekształceń otrzymujemy macierz U^* postaci

$$U^* = \left[\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ \hline 0 & d \end{array}\right], \tag{6}$$

gdzie wektor *d* jest zdefiniowany wzorem (4), natomiast wektor b^* powstaje z wektora *b* w efekcie wykonania na wektorze *b* przekształceń α, przeprowadzających macierz A w macierz A^*.

Niezależnie od propozycji zamieszczonych w pracach [Śleszyński 2011; Kolupa 2004; 2008], w których znajdują się informacje dotyczące konstrukcji macierzy *B* (konstrukcje te przytaczamy w przykładach 1, 2 oraz 3), proponujemy, aby jako macierz *B* przyjąć macierz $Q = \left[q_{ij}\right]_{n\times n}$, przy czym

$$q_{ij} = \begin{cases} q \text{ dla i = j} \\ 1 \text{ dla i} \neq \text{j} \end{cases}, \tag{7}$$

gdzie *q* jest dowolną liczbą naturalną większą od jedności.

Udowodnimy, że macierz Q, której elementy zdefiniowano wzorem (7), jest macierzą nieosobliwą. W tym celu zapiszmy ją w postaci

$$Q = Q_1 + pp^T, \tag{8}$$

zaś

$$Q_1 = diag\{q-1 \quad q-1 \quad \dots \quad q-1\}. \tag{9}$$

Zauważmy, że macierz Q_1 jest macierzą nieosobliwą, gdyż z założenia q jest dowolną liczbą naturalną większą od jedności.

Z kolei p jest n-wymiarowym wektorem kolumnowym, którego każda składowa jest równa jeden. W dalszym ciągu wykorzystamy następujące twierdzenie:

Macierz Q dana wzorem (8) jest macierzą nieosobliwą wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek [Kiełbasiński, Schwetlick 1992]:

$$p^T Q_1^{-1} p \neq -1. \tag{10}$$

Zauważmy, że

$$p^T Q_1^{-1} p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{q-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{q-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \tag{11}$$

$$= \frac{n}{q-1} \neq -1.$$

Warunek (11) daje

$$n \neq -q + 1 \tag{12}$$

albo

$$n + q \neq 1, \tag{13}$$

a ten warunek jest zawsze spełniony.

Wektor wyrazów wolnych d układu

$$QX = d \tag{14}$$

wyznaczamy na podstawie macierzy brzegowej U_1, analogicznej do macierzy (5) postaci

$$U_1 = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -Q & 0 \end{array}\right]. \tag{15}$$

Na macierzy brzegowej U_1 wykonujemy przekształcenia elementarne α oraz β. Po wykonaniu tych przekształceń otrzymujemy

$$U_1^* = \left[\begin{array}{c|c} A^* & b^* \\ \hline 0 & d \end{array}\right]. \tag{16}$$

Obecnie odwołamy się do przykładów ilustrujących opisane postępowanie.

Przykład 1.

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}, \tag{17}$$

a zatem

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Łatwym rachunkiem sprawdzamy, że

$$x_1 = x_2 = 1. \tag{19}$$

W nawiązaniu do wspomnianych już prac [Śleszyński 2011; Kolupa 2004; 2008] jako macierz B (zob. wzór (2)) przyjęlibyśmy

$$B = N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{[Śleszyński 2011]}. \tag{20}$$

$$B = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{[Kolupa 2004]}. \tag{21}$$

$$B = M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{[Kolupa 2008]}. \tag{22}$$

Podamy następne przykłady nawiązujące do przykładu 1.

Przykład 2.

Posłużymy się danymi z przykładu 1. Wówczas na podstawie (20) mamy

$$B = N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

a zatem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Aby wyznaczyć wektor d stanowiący prawą stronę układu (24), korzystamy z macierzy brzegowej danej wzorem (5), która teraz przyjmuje postać

$$U^1 = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -N & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]. \tag{25}$$

Na macierzy U^1 wykonujemy przekształcenia elementarne α oraz β. Mamy zatem

$$U^1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{25}$$

Stąd odczytujemy

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 1. \tag{26}$$

Wówczas układ (24) ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Stąd

$$x_1 = x_2 = 1, \tag{28}$$

co pokrywa się z rezultatem (19).

Przykład 3.

I tym razem wykorzystamy te same dane co w przykładzie 1. Na podstawie (21) mamy

$$B = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

i układ $BX = d$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Wektor d wyznaczamy, korzystając z macierzy U^2 postaci

$$U^2 = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{31}$$

Na macierzy U^2 wykonujemy przekształcenia elementarne typu α oraz β. Mamy zatem

$$U^2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{32}$$

Stąd odczytujemy

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1. \tag{33}$$

Prowadzi to do warunku

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Stąd

$$x_1 = x_2 = 1. \tag{35}$$

Oczywiście wynik jest identyczny jak poprzednio uzyskane rezultaty.

Nie będziemy w tym miejscu pokazywać postępowania dotyczącego wykorzystania macierzy M (zob. (22)), gdyż byłoby to powtórzenie tego, co zamieszczono w cytowanej już pracy [Kolupa 2008]. Zajmiemy się natomiast wykorzystaniem macierzy Q (zob. wzór (7)).

Przykład 4.
Tym razem macierz B jest identyczna z macierzą Q postaci

$$B = Q = \begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Macierz U_1 ma teraz postać

$$U_1 = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -Q & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ \hline -q & -1 & 0 \\ -1 & -q & 0 \end{array}\right]. \tag{37}$$

Wykonujemy odpowiednie przekształcenia elementarne α oraz β. Mamy zatem

$$U_1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & \frac{2}{3}q - 1 & \frac{5}{3}q \\ 0 & \frac{2}{3} - q & \frac{5}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & q+1 \end{array}\right], \tag{38}$$

czyli

$$d_1 = q + 1, \quad d_2 = q + 1. \tag{39}$$

Układ równań równoważny układowi (14) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+1 \\ q+1 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Stąd

$$x_1 = x_2 = 1. \tag{41}$$

Otrzymany rezultat pokrywa się z poprzednio podanymi wynikami.

Na początku naszych rozważań wzmiankowaliśmy o możliwych zastosowaniach przedstawionej propozycji do badania koincydentności zmiennych modelu ekonometrycznego, wyznaczania udziałów akcji w portfelu z krótką sprzedażą. Konstrukcję układu równań $BX = d$ równoważnego danemu układowi $AX = b$, niezależnie od tych zastosowań, można uznać za nową metodę rozwiązywania cramerowskich układów równań liniowych. Ma zatem ona znaczenie uniwersalne i szerokie zastosowania, w tym w naukach ekonomicznych. Wystarczy choćby wspomnieć o szacowaniu parametrów strukturalnych liniowego modelu ekonometrycznego metodą najmniejszych kwadratów.

Literatura

Kolupa M., *O pewnych zagadnieniach algebraicznych ważnych dla praktyki gospodarczej,* „Rector's Lectures" 2004, nr 59.

Kolupa M., *Kilka uwag, jak badać znaki składowych wektora X spełniającego układ równań AX = b*, „Przegląd Statystyczny" 2008, nr 4.

Kiełbasiński A., Schwetlick H., *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, Warszawa 1992.

Śleszyński Z., *Portfel wyznaczony w warunkach krótkiej sprzedaży – teoria i praktyka*, Politechnika Radomska, Radom 2011.

ABOUT CONSTRUCTION OF SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS *BX* = *d* EQUIVALENT TO GIVEN *AX* = *b* AND ITS USAGES

Summary: The article shows the construction of system of linear equations $BX = d$ equivalent to given $AX = b$. Adequate bordered matrix was used. The constructed system of equations $BX = d$ has nonsingular n-grade fundamental matrix *B*, and vector *d* is unknown and computed using: $d = BA^{-1}b$. To determine vector *d* bordered matrix is used. In the literature matrices *N*, *C* and *M* replacing matrix *B* are known. In the article the usage of matrix *Q* is proposed

$$Q = \begin{bmatrix} q & 1 & \dots & 1 \\ 1 & q & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & q \end{bmatrix}$$

where *q* is any natural number bigger than one. It was shown that matrix *Q* is nonsingular.

Keywords: system of linear equations, bordered matrix, portfolio theory.