

Małgorzata Boltuć

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

MODEL WYCENY CDS OPARTY NA SKRÓCONYM MODELU WYCENY RYZYKA KREDYTOWEGO

Streszczenie: Wśród instrumentów pochodnych od lat 90. XX wieku najszybszy rozwój nastąpił na rynku kredytowych instrumentów pochodnych (*Credit Derivatives*). Umożliwiają one wyłączenie specyficznego ryzyka kredytowego od innych rodzajów ryzyka (np. ryzyka rynkowego czy ryzyka płynności). Najpopularniejszym i najczęściej stosowanym kredytowym instrumentem pochodnym jest Credit Default Swap – CDS. Celem artykułu jest przedstawienie modelu wyceny Credit Default Swap opartego na skróconym modelu wyceny ryzyka kredytowego zaproponowanym przez Jarrova i Turnbulla.

Słowa kluczowe: CDS, ryzyko kredytowe, swap.

1. Wstęp

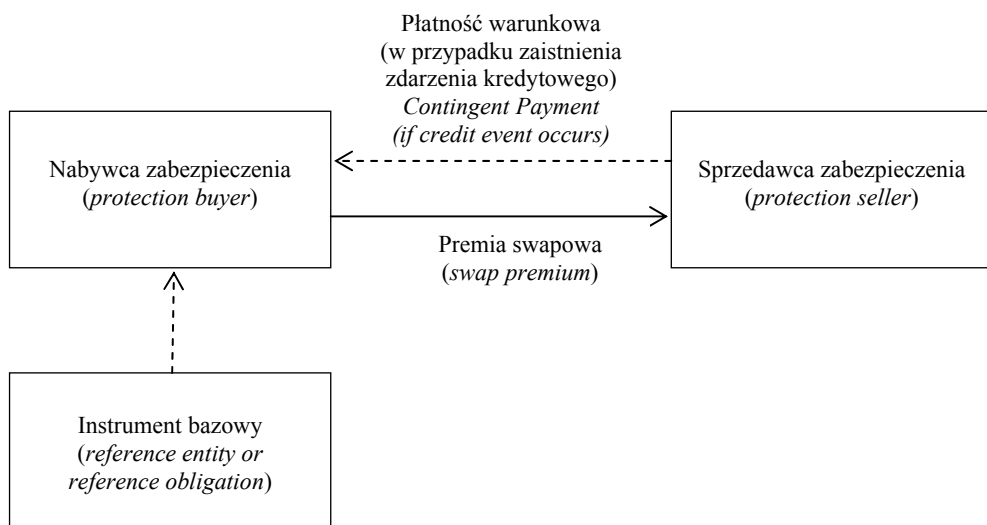
Wśród instrumentów pochodnych od lat 90. XX wieku najszybszy rozwój nastąpił na rynku kredytowych instrumentów pochodnych (*Credit Derivatives*). Umożliwiają one wyłączenie specyficznego ryzyka kredytowego od innych rodzajów ryzyka (np. ryzyka rynkowego czy ryzyka płynności). Najpopularniejszym i najczęściej stosowanym kredytowym instrumentem pochodnym jest Credit Default Swap¹ – CDS [Hull 2009]. Jednym z problemów w wycenie CDS jest dobór odpowiedniego modelu ryzyka kredytowego, który może znacznie wpłynąć na wycenę swapu CDS. Celem artykułu jest przedstawienie modelu wyceny CDS, opartego na skróconym modelu ryzyka kredytowego zaproponowanym przez Jarrova i Turnbulla [Jarrov 1995].

2. Credit Default Swap (CDS) – charakterystyka instrumentu

Credit Default Swap (CDS) był pierwszym pochodnym instrumentem kredytowym. Obecnie jest najpopularniejszym instrumentem pochodnym stosowanym w celu ograniczenia ryzyka kredytowego [Pruchnicka-Grabias 2001]. W wyniku zawarcia

¹ W polskich opracowaniach można spotkać tłumaczenie Credit Default Swap jako swap odmowy zapłaty długu (np. [Olszak 2006]) lub swap na zaprzestanie obsługi długu [Pawliszyn 2004], jednak zdecydowana większość literatury podaje wyłącznie nazwę anglojęzyczną oraz skrót i taką formę przyjęto także w niniejszym artykule.

umowy CDS nabywca zabezpieczenia (*protection buyer*) dokonuje okresowych płatności (wyrażonych zazwyczaj w punktach procentowych od kwoty nominalnej swapu) na rzecz sprzedawcy zabezpieczenia (*protection seller*) do dnia zakończenia umowy CDS lub do wystąpienia zdarzenia kredytowego (*credit event*). W zamian za okresową płatność sprzedawca zabezpieczenia zobowiązuje się do wypłaty środków na rzecz nabywcy zabezpieczenia, jeśli nastąpi zdarzenie kredytowe. Ta warunkowa płatność jest najczęściej skalkulowana w sposób odzwierciedlający straty poniesione przez wierzycieli w przypadku zaprzestania przez kredytobiorcę spłaty swoich zobowiązań [Kassapi 2002]. Rozliczenie transakcji CDS może nastąpić jako fizyczna dostawa instrumentu bazowego (jeśli zabezpieczane są np. obligacje) lub jako rozliczenie gotówkowe [Hull 2009]. Konstrukcja kontraktu CDS przedstawiona jest na rys. 1.



Rys. 1. Mechanizm działania swapu kredytowego

Źródło: [Anson i in. 2004].

Zawierając kontrakt CDS, należy określić m.in. następujące elementy [Pruchnicka-Grabias 2001]:

- cechy aktywów referencyjnych (np. wartość nominalną pożyczki lub zabezpieczanych obligacji, spread kredytowy);
- zdefiniować zdarzenie kredytowe, czyli zdarzenie, które powoduje powstanie obowiązku wypłaty zabezpieczenia;
- kompensatę, jaką sprzedawca zabezpieczenia zapłaci nabywcy zabezpieczenia, jeśli wystąpi zdarzenie kredytowe określone w umowie;

- sposób rozliczenia – czy nastąpi rozliczenie w gotówce (wówczas sprzedawca zabezpieczenia wypłaca nabywcy sumę odpowiadającą wartości nominalnej zabezpieczenia pomniejszoną o stopę odzysku²), czy fizyczna dostawa określonych w umowie instrumentów.

Zdarzenie kredytowe (często utożsamiane z niewypłacalnością³) najczęściej dotyczy wystąpienia takich zjawisk, jak: bankructwo (gdy firma staje się niewypłacalna lub niezdolna do spłaty swoich zobowiązań), zaprzestanie regulacji wymaganych zobowiązań przez podmiot referencyjny, odmowa spłaty długu, upadłość podmiotu referencyjnego, restrukturyzacja [O’Kane 2011].

3. Wycena swapów kredytowych

3.1. Czynniki wpływające na cenę CDS

Do głównych czynników wpływających na cenę CDS należą [Anson i in. 2004]:

- prawdopodobieństwo zaistnienia zdarzenia kredytowego oraz prawdopodobieństwo niewypłacalności sprzedawcy zabezpieczenia;
- korelacja pomiędzy referencyjną jednostką a sprzedawcą zabezpieczenia;
- łączne prawdopodobieństwo niewypłacalności jednostki referencyjnej i sprzedawcy zabezpieczenia;
- czas do wygaśnięcia umowy;
- oczekiwana stopa odzysku z referencyjnych aktywów.

Kluczową rolę w wycenie CDS odgrywa dobór odpowiedniego modelu ryzyka kredytowego oraz określenie właściwej stopy odzysku w przypadku zaistnienia zdarzenia kredytowego. W artykule pomijany jest problem określenia właściwej stopy odzysku (która często wymaga osobnego modelowania), a główny nacisk położony jest na zobrazowanie sposobu wyceny CDS oraz jednej z możliwości szacowania ryzyka kredytowego.

3.2. Modelowanie ryzyka kredytowego

Istnieją dwa główne podejścia do modelowania ryzyka kredytowego: modele strukturalne oraz modele skrócone (*reduced form model*) [Anson i in. 2004]. Modele strukturalne charakteryzują prawdopodobieństwo upadłości jako konsekwencję takich zdarzeń, których zaistnienie prowadzi do sytuacji, w której aktywa firmy są niewystarczające do pokrycia jej długu. Modele te są z reguły oparte na modelu Mertona wyceny wartości firmy z 1973 r. [O’Kane 2011; Merton 1973] i są zazwyczaj stosowane w celu określenia spreadu obligacji korporacyjnych, jaki powinien być kwotowany na podstawie wewnętrznej struktury firmy. Istnieją trzy

² Stopa odzysku (*recovery rate*) – wartość aktywów referencyjnych w przypadku zaistnienia zdarzenia kredytowego.

³ W opracowaniu terminy „zdarzenie kredytowe” oraz „niewypłacalność” będą używane zamiennie.

podstawowe ograniczenia w stosowaniu tych modeli: są trudne w kalibracji ze względu na ograniczony dostęp do wewnętrznych danych dotyczących firmy, z reguły są mało elastyczne, co uniemożliwia ich dopasowanie do struktury terminowej spreadów oraz nie mogą być łatwo zastosowane do wyceny kredytowych instrumentów pochodnych.

Modele skrócone zakładają, że prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia kredytowego (niewypłacalność, upadłość) może być określane bezpośrednio na podstawie danych dostępnych na rynku. Modele te są z reguły elastyczne i możliwe do stosowania dla różnych kredytowych instrumentów pochodnych, w tym także instrumentów egzotycznych [O’Kane, Turnbull 2003]. Modele te nie biorą pod uwagę czynników powodujących powstanie zdarzenia kredytowego, a skupiają się jedynie na modelowaniu prawdopodobieństwa jego zaistnienia. Modele zakładają także znaną wartość stopy odzysku, która jest jednym z parametrów. Najbardziej znane modele skrócone zostały reprezentowane przez model Jarrowa-Turnbulla [Jarrow, Turnbull 1995] (JT) i Duffiego-Singletona (DF) [Duffie, Singleton 1997]. Oba są modelami opartymi na założeniu braku możliwości przeprowadzenia transakcji arbitrażowych. W dalszej części zostanie przedstawiony model Jarrowa-Turnbulla ze względu na łatwość jego kalibracji na podstawie danych rynkowych. Na wybór przedstawionego modelu miało wpływ także to, że w modelu DF, jeśli nie wystąpi zdarzenie kredytowe w czasie trwania umowy swapowej, model ten daje zerową wartość swapu [Anson i in. 2004]. Ponieważ model JT jest modelem niewypłacalności opartym na procesie Poissona, dlatego najpierw zostanie omówiony proces Poissona.

3.3. Proces Poissona

Załóżmy, że w czasie t proces Poissona ma wartość N_t . Wartości N_t są kolejnymi liczbami całkowitymi (0, 1, 2, ...), a prawdopodobieństwo przejścia (wystąpienia zdarzenia) od jednej wartości całkowitej do kolejnej w krótkim przedziale czasu dt dane jest wzorem:

$$\Pr[N_{t+dt} - N_t = 1] = \lambda dt,$$

gdzie λ zwane jest parametrem intensywności (lub stopą ryzyka).

Równoważnie prawdopodobieństwo, że nie nastąpi przejście (nie wystąpi żadne zdarzenie), w tym samym przedziale czasowym dane jest wzorem:

$$\Pr[N_{t+dt} - N_t = 0] = 1 - \lambda dt.$$

W procesie Poissona zdarzenie, które powoduje przeskok z punktu 0 do 1, może być postrzegane jako zaistnienie zdarzenia kredytowego.

Z drugiej strony proces Poissona może być postrzegany jako długość okresu do momentu wystąpienia pierwszego zdarzenia kredytowego. Wówczas jest to nazywane rozkładem czasu niewypłacalności. Można udowodnić, że czas wystąpienia nie-

wypłacalności może być wyrażony za pomocą funkcji eksponent w sposób następujący [Anson i in. 2004] :

$$\Pr(T > t) = e^{-\lambda(T-t)}.$$

Funkcja ta charakteryzuje także prawdopodobieństwo przetrwania do czasu t :

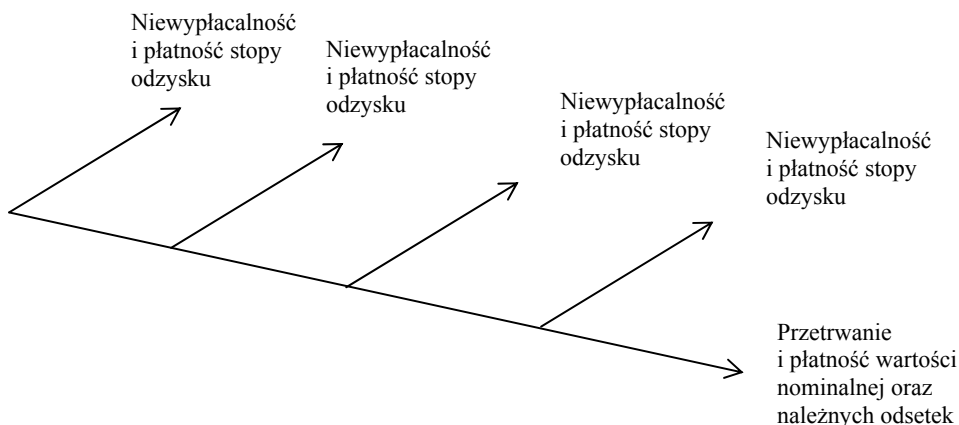
$$Q(t, T) = \Pr(T > t) = e^{-\lambda(T-t)}.$$

3.4. Model Jarrowa-Turnbulla

Model JT jest modelem niewypłacalności opartym na procesie Poissona. Podstawowym założeniem modelu jest to, że niezależnie od momentu wystąpienia zdarzenia kredytowego wartość stopy odzysku zostanie wypłacona w dniu wykupu aktywów referencyjnych⁴. Jeśli aktywami referencyjnymi są obligacje, to wówczas wartość $B(t)$ oprocentowanej obligacji w chwili t może być zapisana jako:

$$\begin{aligned} B(t) &= P(t, T)R(T) \int_t^T -dQ(t, u)du + \sum_{j=1}^n P(t, T_j)c_j e^{-\lambda(T_j-t)} = \\ &= P(t, T)R(T)(1 - e^{-\lambda(T-t)}) + \sum_{j=1}^n P(t, T_j)c_j e^{-\lambda(T_j-t)}, \end{aligned}$$

gdzie: $P(t, T)$ – czynnik dyskontowy (wolny od ryzyka), c_j – kupon odsetkowy, $Q(t, T)$ – prawdopodobieństwo przetrwania do czasu t , $R(T)$ – stopa odzysku.



Rys. 2. Schemat dwumianowego procesu niewypłacalności dla instrumenty dłużnego

Źródło: [Anson i in. 2004].

⁴ Jeśli aktywami bazowymi są obligacje, to wówczas stopa odzysku zostanie wypłacona w dniu wykupu obligacji.

Ponieważ autorzy modelu JT zakładają, że wartość odzysku płacona jest w terminie wykupu obligacji, to przyjmują także, że nie występuje żaden związek pomiędzy ceną obligacji a prawdopodobieństwem niewypłacalności.

Jeśli dla obligacji zerokuponowej stopa odzysku wynosi zero, wówczas wartość parametru intensywności jest także przyszłą stopą spreadu obligacji.

Rysunek 2 przedstawia model JT. Wszystkie zaistniałe zdarzenia, które powodują wystąpienie niewypłacalności, oznaczają jednocześnie płatność stopy odzysku.

3.5. Wycena CDS

Wycena kontraktu CDS powiązana jest z prawdopodobieństwem wystąpienia niewypłacalności. W razie wystąpienia zdarzenia niewypłacalności z kontraktu CDS płacona jest jego nabywcy kwota mająca zrekompensować spadek wartości aktywów bazowych (w przypadku gdy aktywami referencyjnymi są obligacje, płacona jest wartość nominalna obligacji pomniejszona o wielkość stopy odzysku). W przypadku, gdy zdarzenie niewypłacalności nie wystąpi przez terminem wykupu aktywów referencyjnych, nie następuje żadna płatność na rzecz nabywcy zabezpieczenia. W konsekwencji wartość CDS powinna być równa wartości wypłaconej stopy odzysku ważonej prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia niewypłacalności. Przy takim założeniu, jeżeli przez $Q(t, T)$ oznaczyć prawdopodobieństwo przetrwania od obecnej chwili t do pewnego czasu T w przyszłości, to prawdopodobieństwo wystąpienia niewypłacalności pomiędzy czasem T a $T + \tau$ (czyli podmiot przetrwa do czasu T , natomiast w czasie $T + \tau$ nastąpi zdarzenie niewypłacalności) będzie równe $Q(t, T) - Q(t, T + \tau)$. Całkowite prawdopodobieństwo zaistnienia niewypłacalności w czasie trwania umowy swapowej będzie więc równe sumie wszystkich prawdopodobieństw wystąpienia niewypłacalności w danych okresach (zakładamy, że niewypłacalność może nastąpić tylko w dyskretnych momentach czasu T_1, T_2, \dots, T_n):

$$\sum_{j=0}^n Q(t, T_j) - Q(t, T_{j+1}) = 1 - Q(T_n) = 1 - Q(T),$$

gdzie: $t = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$, gdzie T jest czasem wygaśnięcia swapu kredytowego, $Q(T)$ – całkowite prawdopodobieństwo przetrwania do czasu T , $Q(t, T_j)$ – prawdopodobieństwo przetrwania od czasu t do czasu T_j .

Przyszłe prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia kredytowego $p(T_j)$ jest warunkowym prawdopodobieństwem dla przyszłego przedziału czasowego (pod warunkiem przetrwania do początku danego przedziału czasowego w przyszłości) i może być wyrażone za pomocą następującego wzoru:

$$p(T_j) = \frac{Q(t, T_{j-1}) - Q(t, T_j)}{Q(t, T_{j-1})}.$$

Ponieważ wartość CDS (V) powinna być równa wartości wypłaconej kupującemu swap kredytowy w przypadku zaistnienia zdarzenia kredytowego oraz zależnej od prawdopodobieństwa wystąpienia niewypłacalności, dlatego można zapisać ją jako:

$$V = \sum_{j=1}^n P(t, T_j)[Q(t, T_{j-1}) - Q(t, T_j)][1 - R(T_j)],$$

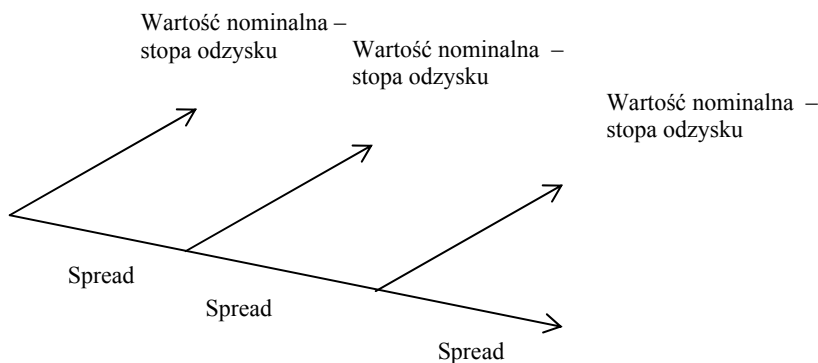
gdzie: $P(t, T_j)$ – czynnik dyskontowy wolny od ryzyka, $R(T_j)$ – założona stopa odzysku.

W powyższym równaniu przyjęte jest założenie, że czynnik dyskontowy jest niezależny od prawdopodobieństwa przetrwania, jednakże w rzeczywistości te dwie zmienne mogą być ze sobą skorelowane [Anson i in. 2004].

Po określeniu wartości swapu możemy określić spread, jaki ma być płacony do momentu wystąpienia niewypłacalności albo do czasu wygaśnięcia umowy swapowej (w zależności, czy wcześniej wystąpi zdarzenie kredytowe, czy zakończy się umowa swapowa – por. rys. 3):

$$s = \frac{V}{\sum_{j=1}^n P(t, T_j)Q(t, T_j)},$$

gdzie: $P(t, T_j)$ – czynnik dyskontowy wolny od ryzyka, $Q(t, T_j)$ – prawdopodobieństwo przetrwania od czasu t do czasu T_j .



Rys. 3. Mechanizm wypłat kontraktu CDS

Źródło: [Anson i in. 2004].

4. Podsumowanie

W pracy został omówiony jeden z modeli wyceny jednego z najpopularniejszych kredytowych instrumentów pochodnych, jakim jest swap odmowy zapłaty długu (CDS – Credit Default Swap). Wybrano ten model ze względu na łatwość jego

kalibracji na podstawie dostępnych danych rynkowych. Metoda wyceny CDS została oparta na skróconym modelu wyceny ryzyka kredytowego Jarrova-Turnbulla. W przedstawionym modelu pominięta została problematyka osobnego modelowania stopy odzysku.

Literatura

- Anson M.J.P., Fabozzi F.J., Choudhry M., Chen R.R., *Credit Derivatives: Instruments, Applications and Pricing*, Hoboken, John Wiley & Sons Inc., New Jersey 2004.
- Duffie D., Singleton K., *Modelling the Term Structure of Defaultable Bonds*, working paper, Stanford University, 1997.
- Hull J.C., *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Prentice Hall, New Jersey 2009.
- Jarrow R., Turnbull S., *Pricing derivatives on financial securities subject to default risk*, „Journal of Finance” 1995, vol. 50, no 1.
- Kasapi A., *Kredytowe instrumenty pochodne: charakterystyka, rodzaje i zasady obrotu*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2002.
- O’Kane D., *Modelowanie kredytowych instrumentów pochodnych*, Oficyna Wolters Kluwer Business, Warszawa 2011.
- O’Kane D., Turnbull S., *Valuation of Credit Default Swaps*, Fixed Income Quantitative Credit Research, Lehman Brothers, kwiecień 2003.
- Merton R., Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities*, „Journal of Political Economy” 1973, vol.81, no 3.
- Olszak M.A., *Międzynarodowy rynek instrumentów transferu ryzyka kredytowego*, „Banki i Kredyty”, marzec 2006.
- Pawliszyn M., *Rozwój rynku pochodnych instrumentów kredytowych*, „Banki i Kredyty”, listopad-grudzień 2004.
- Pruchnicka-Grabias I., *Pochodne instrumenty kredytowe. Systematyka, wycena, zastosowanie*, CeDeWu, Warszawa 2001.

CDS PRICING MODEL BASED ON THE REDUCED MODEL OF CREDIT RISK PRICING

Summary: From the 90s of the XX century the fastest development of derivatives has been on the market of Credit Derivatives. They enable to exclude the specific credit risk from different kinds of risk (i.e. market risk or liquidity risk). Credit Default Swap – CDS is the most popular and the most often used credit derivative. The aim of the article is to present Credit Default Swap standard valuation model based on the reduced pricing model proposed by Jarrow and Turnbull.

Keywords: CDS, credit risk, swap.