EKONOMETRIA ECONOMETRICS 33 • 2011

ISSN 1507-3866

Anna Nikodem-Słowikowska
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

SKŁADKA STOP-LOSS W ZALEŻNYM MODELU RYZYKA[1]

Streszczenie: Ubezpieczyciel, chcąc chronić portfel ubezpieczeniowy przed dużymi pojedynczymi szkodami albo przed bardzo dużą liczbą małych szkód, które łącznie dają wielką stratę w całym portfelu, stosuje reasekurację. W reasekuracji szkodowości najczęściej stosowaną składką jest składka stop-loss. Jeżeli S oznacza całkowitą szkodę w reasekurowanym portfelu, a d jest poziomem retencji cedenta, to składka netto reasekuratora wynosi $\pi(d) = E[(S-d)_+]$. W klasycznym modelu ryzyka zakłada się, że wysokość wypłat dokonywanych przez ubezpieczyciela jest niezależna. Jednak to założenie jest niewłaściwe. Zależność wypłat może wynikać z faktu, że w portfelu znajdują się polisy wykupione przez małżeństwo albo grupę osób, które narażone są na to samo ryzyko. W pracy zostanie rozważony wpływ zależności na wielkość składki stop-loss.

Słowa kluczowe: składka stop-loss, zależny indywidualny model ryzyka, portfel ubezpieczeniowy.

1. Wstęp

Ubezpieczyciel, chcąc chronić portfel ubezpieczeniowy chroniący przed dużymi pojedynczymi szkodami albo przed bardzo dużą liczbą małych szkód, które łącznie dają wielką stratę w całym portfelu, stosuje reasekurację. W reasekuracji szkodowości reasekurator pokrywa nadwyżkę zagregowanych szkód ponad ustalony poziom retencji cedenta. Jeżeli S oznacza całkowitą szkodę w reasekurowanym portfelu, a d jest poziomem retencji cedenta, to składka netto reasekuratora wynosi

$$\pi(d) = E[(S-d)_+] \tag{1}$$

i nazywa się składką stop-loss.

Niech portfel ubezpieczyciela zawiera n polis ubezpieczeniowych, które w przypadku zajścia szkody gwarantują określoną wypłatę w wysokości b_i. Niech

[1] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy nr 3361/B/H03/2010/38.

X_i określa wielkość wypłaty zgodnie z i-tą umową ubezpieczeniową. Wtedy zagregowana wielkość szkód w reasekurowanym portfelu jest następująca:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n , \tag{2}$$

gdzie szkody mają rozkład dwupunktowy

$$P(X_i = 0) = p_i ,\ P(X_i = b_i) = 1 - p_i = q_i . \tag{3}$$

Niech F_S będzie dystrybuantą, a $f_S(s)$ funkcją prawdopodobieństwa zagregowanej wielkości szkód S. Dla rozkładów dyskretnych składkę (1) wyznacza się ze wzorów (por. [Klugman, Panjer, Willmot 1998])

$$\pi(d) = \sum_{s>d} (s-d) f_S(s) = \sum_{s>d} [1 - F_S(s)] = E(S) - d + \sum_{0 \le s \le d} F_S(s) , \tag{4}$$

gdzie $E(S)$ jest wartością oczekiwaną zagregowanej wielkości szkód. Zatem aby obliczyć wartość składki stop-loss przy zadanym poziomie retencji d, należy wyznaczyć rozkład zagregowanej wielkości szkód.

W kolejnych dwóch rozdziałach przedstawione zostaną dwa modele ryzyka. W jednym modelu będzie się zakładać, że wielkości szkód są wzajemnie niezależne, a w drugim modelu rozpatrzone zostaną niektóre typy zależności między szkodami.

2. Klasyczny model ryzyka

W klasycznym modelu ryzyka zakłada się, że wielkości szkód są wzajemnie niezależne. To założenie w znacznym stopniu upraszcza obliczenia. Dla wcześniej określonego portfela polis ubezpieczeniowych rozkład zagregowanych szkód, o rozkładzie dwupunktowym pojedynczych szkód, można wyznaczyć rekurencyjnie. Niech

$$f_i(x) = \begin{cases} p_i , & x = 0, \\ q_i , & x = b_i , \end{cases} \tag{5}$$

oraz

$$S_i = X_1 + ... + X_i \text{ dla } i = 2, 3, ..., n. \tag{6}$$

Wtedy, rozpoczynając od $S_1 = X_1$, funkcja prawdopodobieństwa zmiennej S_i ma postać

$$f_{S_i}(x) = \begin{cases} p_i f_{S_{i-1}}(x), & x < b_i , \\ p_i f_{S_{i-1}}(x) + q_i f_{S_{i-1}}(x - b_i), & x \ge b_i . \end{cases} \tag{7}$$

W przypadku gdy wielkość szkody wynosi 1 i może wystąpić z prawdopodobieństwem q, tj.

$$P(X_i = 0) = p\,,\ P(X_i = 1) = 1 - p = q\,, \tag{8}$$

rozkład zagregowanej wielkości szkód S jest rozkładem dwumianowym o parametrach n i q o funkcji prawdopodobieństwa postaci

$$P(S = s) = \binom{n}{s} q^s (1-q)^{n-s}\,. \tag{9}$$

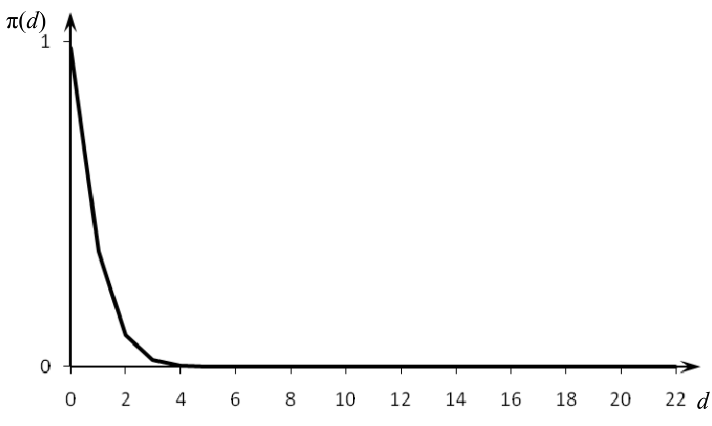
Przykład 1

Rozważmy grupowe ubezpieczenia na życie 100 pracowników. Niech prawdopodobieństwo wypłaty świadczenia w wysokości 1 wynosi 0,0098. Wartość składki stop-loss w zależności od poziomu retencji przedstawia tab. 1 oraz wykres na rys.1.

Tabela 1. Składka stop-loss w przypadku klasycznego modelu ryzyka

d	$\pi(d)$	d	$\pi(d)$
0	0,98	4	0,00370299
1	0,35350137	5	0,00055174
2	0,09665669	6	0,00007060
3	0,02090587	7	0,00000789

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1. Wartość składki stop-loss w przypadku klasycznego modelu ryzyka

Źródło: opracowanie własne.

Wartość składki stop-loss dla poziomu retencji zero jest równa wartości oczekiwanej zmiennej losowej S, czyli $\pi(0) = E(S) = 0{,}98$.

3. Zależny model ryzyka

W tym rozdziale przedstawione zostaną dwa typy zależności między szkodami, które zaczerpnięte są z prac [Dhaene, Denuit 1999; Dhaene, Goovaerts 1997; Hu, Wu 1997]. Obliczona zostanie także składka stop-loss przy założeniu tych typów zależności. Niech zatem zagregowana wielkość szkód dla portfela polis ma postać (2) z rozkładem szkód określonym w (3). Pierwsza zależność między szkodami opisana będzie za pomocą następującego wyrażenia (por. [Dhaene, Goovaerts 1997]):

$$P(X_{i+1}=0\,|\,X_i=0)=1 \text{ dla } i=1,2,...,n-1. \tag{10}$$

Niech $p_1 \le p_2 \le ... \le p_n$, to wyrażenie (10) oznacza, że jeżeli nie dojdzie do wypłaty zgodnie z polisą i, to nie dojdzie także do wypłaty zgodnie z polisą $i+1$. Wyrażenie to można też uogólnić, tj.

$$P(X_{i+j}=0\,|\,X_i=0)=1 \text{ dla } i=1,2,...,n-1,\ j=1,2,...,n-i. \tag{11}$$

Ponadto z (10) wynika, że

$$P(X_{i+1}=b_{i+1}\,|\,X_i=b_i)=\frac{1-p_{i+1}}{1-p_i}, \tag{12}$$

a z (12)

$$P(X_{i-1}=b_{i-1}\,|\,X_i=b_i)=1 \tag{13}$$

oraz

$$P(X_{i-j}=b_{i-j}\,|\,X_i=b_i)=1. \tag{14}$$

Wyrażenie (14) oznacza, że jeśli dojdzie do wypłaty zgodnie z jedną z polis, to dojdzie również do wypłaty świadczeń z wyższym prawdopodobieństwem wystąpienia szkody. Zatem zagregowana wielkość szkód (oznaczona w tym modelu przez S^*) może przyjąć następujące wartości $0, b_1, b_1+b_2, ..., b_1+...+b_n$.

Rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuanta F zmiennej losowej S^* mają odpowiednio postać:

$$\begin{aligned} &P(S^*=0)=p_1,\\ &P(S^*=b_1+b_2+...+b_i)=p_{i+1}-p_i \quad \text{dla} \quad i=1,2,...,n+1,\\ &P(S^*=b_1+b_2+...+b_n)=1-p_n, \end{aligned} \tag{15}$$

$$F_{S^*}(s)=\begin{cases} p_1, & 0\le s<b_1,\\ p_{i+1}, & b_1+...+b_i\le s<b_1+...+b_{i+1}, \quad i=2,...,n-1,\\ 1, & s\ge b_1+...+b_n. \end{cases} \tag{16}$$

Przykład 2

Rozważmy portfel polis ubezpieczeniowych opisany w przykładzie 1. Załóżmy, że szkody są zależne zgodnie z wyrażeniem (10). W tabeli 2 przedstawiono składkę stop-loss w przypadku niezależnych i zależnych szkód (odpowiednio $\pi(d)$ i $\pi^*(d)$). Obliczono błąd względny składki stop-loss. Za porównanie przyjęto składkę stop-loss wyliczoną dla klasycznego modelu ryzyka.

Tabela 2. Składka stop-loss dla klasycznego i zależnego modelu ryzyka

d	$\pi(d)$	$\pi^*(d)$	Błąd względny
0	0,98	0,98	0,00
1	0,35350137	0,97020000	1,74
2	0,09665669	0,96040000	8,94
3	0,02090587	0,95060000	44,47
4	0,00370299	0,94080000	253,07
5	0,00055174	0,93100000	1 686,40
6	0,00007060	0,92120000	13 046,26
7	0,00000789	0,91140000	115 540,78

Źródło: opracowanie własne.

Z tabeli 2 wynika, że wartość składki stop-loss przy tak zależnych wielkościach szkód jest wyższa od wartości składki wyliczonej w modelu zakładającym niezależność.

Drugi model zależności ryzyka zakłada, że $\sum_{i=1}^{n} q_i \leq 1$ (por. [Hu, Wu 1999]). Niech

$$
\begin{aligned}
&P(X_i = b_i, X_j = b_j) = 0 \text{ dla } i \neq j, \\
&P(X_1 = 0, ..., X_{j-1} = 0, X_j = b_j, X_{j+1} = 0, ..., X_n = 0) = q_i \text{ dla } j = 1, ..., n, \\
&P(X_1 = 0, ..., X_n = 0) = 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i,
\end{aligned} \tag{17}
$$

wtedy zagregowana wielkość szkód (w tym modelu oznaczona przez S_*) przyjmuje wartości $0, b_1, b_2, ..., b_n$. Rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuanta F zmiennej losowej S_* jest następująca:

$$P(S_* = 0) = 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i\,,\ P(S_* = b_i) = q_i\,, \tag{18}$$

$$F_{S_*}(s)=\begin{cases}1-\sum_{i=1}^{n}q_i, & 0\le s<b_1,\\ 1-\sum_{i=j}^{n}q_i, & b_{j-1}\le s<b_j \quad \text{dla} \quad j=2,...,n,\\ 1, & s\ge b_n.\end{cases} \tag{19}$$

Przykład 3

Rozważmy portfel opisany w przykładzie 1 przy założeniu, że zależności opisane są wzorem (17). Ponieważ S_* może przyjmować tylko wartości $0, b_1, b_2, ..., b_n$, więc w tym przykładzie przyjmie tylko 0 i 1. Składka stop-loss dla $d=0$ jest równa wartości oczekiwanej, tj. 0,98, a dla pozostałych wartości *d* przyjmuje wartość 0. Zatem jest niższa niż składka stop-loss przy założeniu niezależności.

4. Wpływ zależności na wielkość składki stop-loss

Zależność określona przez (10) oznacza ryzykowniejszy portfel polis niż w modelu o niezależnych szkodach, a to pociąga za sobą wyższą składkę stop-loss. W przypadku zależności opisanej wzorem (17) portfel jest mniej ryzykowny od portfela polis z niezależnymi szkodami. W tym rozdziale pokazane zostanie, że dla pierwszego typu zależności zachodzi

$$E[(S-d)_+]\le E[(S^*-d)_+], \tag{20}$$

zaś dla drugiego typu zależności spełnione jest

$$E[(S-d)_+]\ge E[(S_*-d)_+]. \tag{21}$$

Rozważmy portfel polis ubezpieczeniowych, dla którego szkody są zależne w sposób określony w (10). Niech

$$S_k^*=X_1+...+X_k \quad \text{dla} \quad k=1,2,...,n, \tag{22}$$

wtedy dystrybuanta zmiennej losowej S_k^* ma postać

$$F_{S_k^*}(s)=\begin{cases}p_1, & 0\le s<b_1,\\ p_{i+1}, & b_1+...+b_i\le s<b_1+...+b_{i+1}, \quad i=1,2,...,k-1,\\ 1, & s\ge b_1+...+b_k.\end{cases} \tag{23}$$

Załóżmy, że dla modelu o niezależnych szkodach i modelu z zależnymi szkodami zgodnie z (10) zachodzi

$$E[(S_k-d)_+]\le E[(S_k^*-d)_+], \tag{24}$$

czyli

$$E(S_k) - d + \sum_{0 \le s \le d} F_{S_k}(s) \le E(S_k^*) - d + \sum_{0 \le s \le d} F_{S_k^*}(s) .$$

Ponieważ $E(S_k) = E(S_k^*)$, więc

$$\sum_{0 \le s \le d} F_{S_k}(s) \le \sum_{0 \le s \le d} F_{S_k^*}(s) . \tag{25}$$

Dla $k = 1$ spełniona jest powyższa nierówność. Sprawdźmy, czy dla $k+1$ nierówność (25) jest również prawdziwa. Dla modelu z niezależnymi szkodami mamy

$$F_{S_{k+1}}(s) = P(X_1 + ... + X_{k+1} \le s) =$$

$$= \sum_{x \le s} P(X_1 + ... + X_{k+1} \le s \mid X_{k+1} = x) \cdot P(X_{k+1} = x) =$$

$$= \sum_{x \le s} P(S_k \le s - x \mid X_{k+1} = x) \cdot P(X_{k+1} = x) = \sum_{x \le s} F_{S_k}(s - x) \cdot P(X_{k+1} = x) .$$

Zatem dla $s < b_{k+1}$ zachodzi

$$F_{S_{k+1}}(s) = F_{S_k}(s) \cdot P(X_{k+1} = 0) = F_{S_k}(s) \cdot p_{k+1} \le F_{S_k}(s) ,$$

a dla $s \ge b_{k+1}$ spełnione jest

$$F_{S_{k+1}}(s) = F_{S_k}(s) \cdot P(X_{k+1} = 0) + F_{S_k}(s - b_{k+1}) \cdot P(X_{k+1} = b_{k+1}) =$$

$$= F_{S_k}(s) \cdot p_{k+1} + F_{S_k}(s - b_{k+1}) \cdot q_{k+1} \le F_{S_k}(s) \cdot p_{k+1} + F_{S_k}(s) \cdot q_{k+1} = F_{S_k}(s) .$$

Stąd dla $0 \le d \le b_1 + ... + b_k$ mamy

$$\sum_{0 \le s \le d} F_{S_{k+1}}(s) \le \sum_{0 \le s \le d} F_{S_k}(s) \le \sum_{0 \le s \le d} F_{S_k^*}(s) = \sum_{0 \le s \le d} F_{S_{k+1}^*}(s) .$$

Dla $d > b_1 + ... + b_k$ otrzymujemy, że

$$F_{S_{k+1}}(s) = \sum_{x \le s} P(X_1 + ... + X_{k+1} \le s \mid X_{k+1} = x) \cdot P(X_{k+1} = x) \ge$$

$$\ge P(X_1 + ... + X_{k+1} \le s \mid X_{k+1} = 0) \cdot P(X_{k+1} = 0) =$$

$$= P(X_1 + ... + X_{k+1} \le s, X_{k+1} = 0) = F_{S_{k+1}^*}(s) .$$

Stąd

$$E[(S_{k+1} - d)_+] = \sum_{s > d} [1 - F_{S_{k+1}}(s)] \le \sum_{s > d} [1 - F_{S_{k+1}^*}(s)] = E[(S_{k+1}^* - d)_+] .$$

Zatem w sposób indukcyjny zostało pokazane, że dla pierwszego typu zależności składka stop-loss jest wyższa niż w modelu z niezależnymi szkodami.

Niech dla drugiego modelu zależności zgodnie z (17) i modelu z niezależnymi szkodami spełniona jest nierówność

$$E[(S_k - d)_+] \geq E[(S_{*k} - d)_+]. \tag{26}$$

Dystrybuanta zmiennej losowej S_{*k} opisana jest wzorem

$$F_{S_{*k}}(s) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^{k} q_i, & 0 \leq s < b_1, \\ 1 - \sum_{i=j}^{k} q_i, & b_{j-1} \leq s < b_j, \quad j = 2, ..., k, \\ 1, & s \geq b_k. \end{cases}$$

Dla $k = 1$ spełniona jest nierówność (26). Sprawdźmy, czy dla $k+1$ też zachodzi

$$E[(S_{k+1} - d)_+] \geq E[(S_{*k+1} - d)_+].$$

Ponieważ

$$E(S_k) - d + \sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_k}(s) \geq E(S_{*k}) - d + \sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_{*k}}(s),$$

więc wystarczy pokazać, że dla $k+1$ spełnione jest

$$\sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_k}(s) \geq \sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_{*k}}(s).$$

Jeżeli $b_1 < b_2 < ... < b_n$, to dla $d < b_k$ oraz $s \leq d$ mamy

$$F_{S_{k+1}}(s) = \sum_{y \leq s} F_{S_k}(s - y) \cdot P(X_{k+1} = y) = F_{S_k}(s) \cdot P(X_{k+1} = 0) =$$
$$= F_{S_k}(s) \cdot (1 - q_{k+1}) = F_{S_k}(s) - q_{k+1}.$$

Stąd

$$\sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_{k+1}}(s) = \sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_k}(s) - q_{k+1} \geq \sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_{*k}}(s) - q_{k+1} = \sum_{0 \leq s \leq d} F_{S_{*k+1}}(s).$$

Dla $d \geq b_k$ rozważmy dwa przypadki, gdy $s \in [d, b_{k+1})$ i $s \geq b_{k+1}$. Wtedy dla $s \in [d, b_{k+1})$ otrzymujemy

$$F_{S_{k+1}}(s) = \sum_{y \leq s} F_{S_k}(s - y) \cdot P(X_{k+1} = y) = F_{S_k}(s) \cdot P(X_{k+1} = 0) =$$
$$F_{S_k}(s) \cdot p_{k+1} \leq p_{k+1} = F_{S_{*k+1}}(s),$$

a dla $s \geq b_{k+1}$ mamy

$$F_{S_{k+1}}(s) = \sum_{y \leq s} F_{S_k}(s-y) \cdot P(X_{k+1} = y) =$$

$$= F_{S_k}(s) \cdot P(X_{k+1} = 0) + F_{S_k}(s - b_{k+1}) \cdot P(X_{k+1} = b_{k+1}) \leq 1 = F_{S^*_{k+1}}(s)\,.$$

Stąd

$$\sum_{s>d}(1 - F_{S_{k+1}}(s)) \geq \sum_{s>d}(1 - F_{S*_{k+1}}(s))\,.$$

Zatem zostało pokazane, że składka stop-loss w modelu z zależnymi szkodami zgodnie z (17) jest niższa od składki stop-loss w modelu z niezależnymi szkodami.

W pracach [Dhaene, Goovaerts 1997; Hu, Wu 1999] pokazano, że modele zależnego ryzyka opisanego warunkami (10) i (17) są odpowiednio najryzykowniejsze i najmniej ryzykowne w tym sensie, że mają odpowiednio największą i najmniejszą składkę stop-loss niż w dowolnych modelach ryzyka.

Literatura

Cossette H., Gaillardetz P., Marceau E., Rioux J. (2002), *On two dependent individual risk model*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 30.

Dhaene J., Denuit M. (1999), *The safest dependence structure among risks*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 25.

Dhaene J., Goovaerts M. (1996), *Dependency of risks and stop-loss order*, „Astin Bulletin”, vol. 26, no 2.

Dhaene J., Goovaerts M. (1997), *On the dependency of risks in the individual life model*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 19(3).

Hu T., Wu Z. (1999), *On dependence of risks and stop-loss premium*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 24.

Klugman S.A., Panjer H.H., Willmot G.E. (1998), *Loss Models. From Data to Decision*, John Wiley & Sons, New York.

Ribas C., Marin-Solano J., Alegre A. (2003), *On the computation of the aggregate claims distribution in the individual life model with bivariate dependencies*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 32.

STOP-LOSS PREMIUM IN THE DEPENDENT RISK MODEL

Summary: In the classical risk model it is assumed that the individual claim sizes are independent. However, in the practical application of this model this assumption is not appropriate. For example, several policies may concern the same person or a marriage may have a policy in the same portfolio. In the second case, it is dependence, because both are exposed to the same risks. To consider a group life (or health) insurance of the employees working in the same place, it is necessary to take into consideration the dependence between the risks of an insurance portfolio. The employees are exposed to the same risks, such as illness (e.g. flu), a single event (e.g. the collapse of a workshop). In order to protect oneself against large individual claims or against the fluctuation in the number of claims, the insurer takes out reinsurance cover for his insurance portfolio. If S is the aggregate claim amount and d is a retention, then the net stop-loss premium is defined $\pi(d) = E[(S-d)_+]$. The effect of the dependence on the stop-loss premium will be considered in this paper.

Key words: stop-loss premium, dependent individual risk model.