PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 165
Społeczna rola statystyki 2011

Stanisław Heilpern
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

MODELE ZALEŻNEGO RYZYKA KREDYTOWEGO*

Streszczenie: Artykuł poświęcony jest modelom zależnego ryzyka kredytowego. W modelach tych występują zmienne zależne i procesy losowe. Rozpatrywane są dwa podstawowe modele zależnego ryzyka kredytowego: model oparty na zmiennej ukrytej oraz mieszany model Bernoulliego. Ponadto badane są ich modyfikacje oparte na funkcjach łączących (ang. *copula*). Analizowany jest też wpływ stopnia zależności na liczbę niewypłacalnych kredytobiorców i na całkowitą wartość niespłaconego kredytu.

Słowa kluczowe: ryzyko kredytowe, zależność, funkcje łączące, cecha ukryta.

1. Wstęp

W pracy rozpatrywane są zagadnienia związane z badaniem wypłacalności kredytobiorców. Przedstawione zostały modele, w których uwzględnia się możliwość wystąpienia zależności analizowanych zmiennych bądź procesów losowych. W klasycznych modelach przyjmuje się zwykle, że występujące zmienne losowe są niezależne. Oczywiście, z matematycznego punktu widzenia założenie niezależności jest znacznie wygodniejsze. W dużym stopniu ułatwia dowodzenie twierdzeń, wyznaczanie rozkładów czy wykonywanie obliczeń. Jednak w praktyce między wielkościami środków finansowych poszczególnych kredytobiorców, decydujących o ich wypłacalności, zachodzi zależność. Jest ona wywołana przede wszystkim przez dwa czynniki. Na poszczególnych kredytobiorców mogą oddziaływać wspólne czynniki zewnętrzne. Mogą to być czynniki makroekonomiczne, takie jak kryzysy, wzrost inflacji czy zmiany wartości kursów walutowych, czynniki typu katastroficznego: powodzie, pożary, trzęsienia ziemi czy wybuchy wulkanów, oraz czynniki polityczne, takie jak wojny czy kryzysy rządowe. Z drugiej strony mogą istnieć wzajemne powiązania między kredytobiorcami prowadzącymi działalność gospodarczą. Kłopoty finansowe jednych kredytobiorców powodują bowiem zatory i kłopoty płatnicze innych kredytobiorców.

Przedstawione w pracy modele mają charakter teoretyczny. Jednakże są one stosowane w praktyce przez banki oraz większe instytucje finansowe. Modele te zaproponowane zostały m.in. przez grupy ekspertów zrzeszonych w KMV-Corporation,

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy nr 3361/B/H03/2010/38.

RiskMetrics-Group czy Credit-Suisse Group. Są też polecane przez Nową Umowę Kapitałową (Basel II), dokument opublikowany w 2001 r. przez Bazylejski Komitet ds. Nadzoru Bankowego.

W pracy przedstawione zostały dwa podstawowe modele zależnego ryzyka kredytowego: model z cechą ukrytą i mieszany model Bernoulliego, oraz ich modyfikacje oparte na funkcjach łączących. Zbadany też został wpływ stopnia zależności na liczbę niewypłacalnych kredytobiorców oraz na wielkość niespłaconego kredytu.

2. Model z cechą ukrytą

Rozpatrywać będziemy w pracy wypłacalność m kredytobiorców w ustalonym horyzoncie czasu T. Charakteryzować ją będzie zmienna losowa

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{kredytobiorca } i \text{ niewypłacalny} \\ 0 & \text{kredytobiorca } i \text{ wypłacalny} \end{cases}$$

przybierająca wartość 1 z prawdopodobieństwem q_i. Wielkość $q_i = P(Y_i = 1)$ będziemy nazywać prawdopodobieństwem niewypłacalności. Oczywiście kredytobiorca jest wypłacalny w tym okresie z prawdopodobieństwem $p_i = 1 - q_i$.

Środki finansowe i-tego kredytobiorcy będziemy oznaczać symbolem X_i. Będziemy dalej zakładać, że kredytobiorca jest niewypłacalny, gdy wartość jego środków finansowych spadnie poniżej pewnego progu d_i, czyli zachodzi zależność

$$Y_i = 1 \Leftrightarrow X_i < d_i.$$

Próg d_i, w odróżnieniu od środków finansowych X_i, jest w tym modelu traktowany jako wielkość deterministyczna, opisująca wypłacalność i-tego klienta [3; 7].

Przedstawiony powyżej model jest tzw. modelem z cechą ukrytą, rozpatrywanym często w badaniach jakości życia [9]. Rolę cechy ukrytej pełnią w naszym przypadku środki finansowe X_i. Nazwa „ukryta" jest jednak w naszym kontekście, w odróżnieniu od klasycznej postaci modelu z cechą ukrytą, w większości przypadków umowna. Środki finansowe kredytobiorcy są w dużym stopniu obserwowalne.

W naszej pracy będziemy zakładać, że zmienne losowe X_i mogą być zależne. Oczywiście, zależność zmiennych losowych X_i automatycznie powoduje zależność indykatorów Y_i.

Strukturę zależności m-wymiarowej zmiennej losowej $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)$ przedstawiającej środki płatnicze wszystkich rozpatrywanych kredytobiorców można opisać na różne sposoby. Między innymi wykorzystując tzw. funkcje łączące (ang. *copula*). Funkcja łącząca C jest łącznikiem między łącznym rozkładem zmiennej losowej $\mathbf{X}$, a jego rozkładami brzegowymi X_i, tzn.

$$H(x_1, ..., x_m) = C(F_1(x_1), ..., F_m(x_m)),$$

gdzie H jest łączną dystrybuantą wektora $\mathbf{X}$, a F_i odpowiednią dystrybuantą brzegową [4; 8].

W dalszej części pracy interesować nas będą dwie zmienne losowe. Liczba niewypłacalnych kredytobiorców

$$M = Y_1 + ... + Y_m$$

oraz wartość niespłaconego kredytu w całym portfelu

$$L = L_1 Y_1 + ... + L_m Y_m,$$

gdzie L_i jest wartością niespłaconego kredytu i-tego kredytobiorcy. Wartość tę będziemy traktować jako zmienną losową.

W praktyce często wygodnie jest podzielić kredytobiorców na jednorodne grupy, zawierające podobnie zachowujących się kredytobiorców i rozpatrywać każdą grupę osobno. Wtedy przyjmuje się, że zmienne losowe X_i opisujące środki finansowe kredytobiorców należących do jednej grupy są wymienialne [3]. Innymi słowy, dla każdej permutacji kredytobiorców P otrzymujemy ten sam rozkład łączny:

$$(X_1, ..., X_m) =^d (X_{\Pi(1)}, ..., X_{\Pi(m)}).$$

Wtedy automatycznie każda zmienna X_i ma ten sam rozkład.

Przyjmując ponadto równość progów d_i, otrzymujemy wymienialność indykatorów Y_i, co pociąga za sobą równość prawdopodobieństw niewypłacalności:

$$q = q_i = P(Y_i = 1)$$

oraz jednakową korelację wszystkich par zmiennych losowych Y_i, Y_j o współczynniku korelacji równym

$$r = r(Y_i, Y_j) = \frac{q_{(2)} - q^2}{q - q^2},$$

gdzie $q_{(2)} = P(Y_i = 1, Y_j = 1)$. Ogólnie, łączny rozkład dowolnego zestawu k indykatorów Y_i można wyznaczyć, korzystając z funkcji łączącej C opisującej rozkład zmiennej losowej $\mathbf{X}$:

$$q_{(k)} = P(Y_1 = 1, ... , Y_k = 1) = P(X_1 < d, ... , X_k < d) = C_k(q, ... , q),$$

gdzie $C_k(u_1, \ldots, u_k) = C(u_1, \ldots, u_k, 1, \ldots, 1)$ dla $0 \leq u_i \leq 1$, jest k-wymiarową, brzegową funkcją łączącą wyznaczoną przez C. Dla wymienialnych zmiennych losowych X_i odpowiadająca im funkcja łącząca C jest symetryczna, przybiera tę samą wartość dla każdej permutacji jej argumentów.

Zmienną losową M, przedstawiającą liczbę niewypłacalnych, jednorodnych kredytobiorców można przedstawić następującym, kombinatorycznym wzorem [3; 5]

$$P(M = k) = \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^k \frac{m!}{i!\,k!\,(m-k-i)!} q_{(k+i)}, \tag{1}$$

gdzie $k = 0, 1, ..., m$. Rozkład ten jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcję łączącą C oraz prawdopodobieństwo niewypłacalności q. W przypadku niezależnych zmiennych losowych X_i otrzymujemy klasyczny rozkład dwumianowy.

3. Mieszany model Bernoulliego

W modelu tym zakładamy, że na wszystkich kredytobiorców wpływają wspólne czynniki zewnętrzne opisane wielowymiarową zmienną losową [3; 7]

$$\mathbf{\Psi} = (\Psi_1, ..., \Psi_l),$$

gdzie $l < m$, oraz istnieją dla każdego kredytobiorcy $1 \le i \le m$ funkcje q_i: $\mathrm{R}^l \to [0, 1]$ takie, że zachodzi warunkowa niezależność indykatorów Y_i przy ustalonych wartościach $\mathbf{\Psi}$ z warunkowym prawdopodobieństwem niewypłacalności:

$$P(Y_i = 1 | \mathbf{\Psi}) = q_i(\mathbf{\Psi}).$$

Zmienna $\mathbf{\Psi}$ jest losowa, więc poszczególne warunkowe prawdopodobieństwa niewypłacalności $q_i(\mathbf{\Psi})$ są zmiennymi losowymi.

W przypadku jednorodnej grupy kredytobiorców otrzymujemy jednowymiarową zmienną losową:

$$Q = q(\mathbf{\Psi}) = q_i(\mathbf{\Psi})$$

z dystrybuantą G. Wtedy dla każdego wektora $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_m)$, gdzie $y_i \in \{0, 1\}$, warunkowe prawdopodobieństwo, przy ustalonej wartości wektora $\mathbf{\Psi}$, ustalonych wartościach czynników zewnętrznych, określone jest wzorem:

$$P(\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{\Psi}) = Q^{\sum_{i=1}^{m} y_i}(1-Q)^{1-\sum_{i=1}^{m} y_i},$$

dzięki warunkowej niezależności rozkładów brzegowych. Natomiast rozkład liczby niewypłacalnych kredytobiorców M przybiera postać mieszanki rozkładów dwumianowych

$$P(M = k) = \binom{m}{k} \int_0^1 q^k (1-q)^{m-k} dG(q),$$

gdzie zmienną mieszającą jest warunkowe prawdopodobieństwo niewypłacalności Q [3].

Bezwarunkowe prawdopodobieństwo niewypłacalności jest wartością oczekiwaną zmiennej mieszającej Q [3]:

$$q = E(Q),$$

a bezwarunkowe k-wymiarowe rozkłady łączne są k-tymi momentami tej zmiennej:

$$q_{(k)} = P(Y_1 = 1, ... , Y_k = 1) = E(Q^k).$$

Ponadto wariancja zmiennej Q jest równa kowariancji pary indykatorów:

$$\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = q_{(2)} - q^2 = \operatorname{var}(Q).$$

Założenie warunkowej niezależności indykatorów Y_i odgrywa istotną rolę w mieszanym modelu Bernoulliego. Umożliwia ono dla ustalonej wartości wektora $\mathbf{\Psi}$ i ustalonych wartości czynników zewnętrznych stosowanie prostszych metod dotyczących niezależnych zmiennych losowych. Ponadto, co również jest ważne, zachodzi wtedy równoważność między tymi dwoma modelami: z cechą ukrytą i mieszanym modelem Bernoulliego. W tym celu należy wprowadzić pojęcie warunkowej struktury niezależnej [3].

Definicja 1. Mówimy, że wektor losowy $\mathbf{X}$ ma p-wymiarową warunkową strukturę niezależną względem wektora losowego $\mathbf{\Psi}$, jeśli zmienne brzegowe X_i są warunkowo niezależne względem $\mathbf{\Psi}$.

W pracy [3] udowodniono następujące twierdzenie pokazujące równoważność tych modeli ryzyka kredytowego.

Twierdzenie 1. Zachodzi równoważność:

a) Wielowymiarowa zmienna losowa $\mathbf{X}$ ma p-wymiarową warunkową strukturę niezależną względem zmiennej losowej $\mathbf{\Psi}$.

b) Dla każdego wyboru progów d_i indukowane indykatory $\mathbf{Y}$ są mieszankami Bernoulliego względem $\mathbf{\Psi}$ z warunkowymi prawdopodobieństwami niewypłacalności określonymi wzorem

$$q_i(\mathbf{\Psi}) = P(X_i \le d_i \mid \mathbf{\Psi}).$$

4. Przykłady modeli ryzyka kredytowego

W modelach opracowanych przez KMV-Corporation [6; 7] oraz CreditMetrics [7; 10] przyjmuje się, że zmienna losowa $\mathbf{X}$, przedstawiająca środki finansowe kredytobiorców, ma wielowymiarowy rozkład normalny. Otrzymujemy wtedy, przy upraszczającym założeniu, że $E(X_i) = 0$, liniowy model czynnikowy oparty na modelu Mertona, wykorzystującego schemat wyceny opcji:

$$X_i = \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta} + \sigma_i\varepsilon_i,$$

gdzie $\mathbf{\Theta} = (\theta_1, ..., \theta_p)^{\mathrm{T}}$ jest p-wymiarową zmienną losową, której składowe są niezależne oraz mają rozkład normalny: $\theta_j \sim N(0, v_i)$, ε_i mają standardowy rozkład normalny $N(0, 1)$, $\sigma_i \in \mathrm{R}$ oraz $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, ..., a_{ip})^{\mathrm{T}}$. Składowe zmiennej $\mathbf{\Theta}$ oraz zmienne losowe ε_i są niezależne. Indykatory Y_i przedstawiające niewypłacalność kredytobiorców konstruuje się w standardowy sposób za pomocą progów d_i:

$$Y_i = 1 \Leftrightarrow X_i < d_i.$$

Tak określony model jest również mieszanym modelem Bernoulliego. Wystarczy traktować wektor losowy $\mathbf{\Theta}$ jako element mieszający, tzn. przyjąć $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Theta}$, wtedy warunkowe prawdopodobieństwo niewypłacalności jest określone wzorem

$$q_i(\mathbf{\Psi}) = P(Y_i = 1 | \mathbf{\Psi}) = \Phi\left(\frac{d_i - \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{\Psi}}{\sigma_i}\right),$$

gdzie $\Phi(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Jest ono również przedstawiane w postaci probitowo-normalnej:

$$q_i(\mathbf{\Psi}) = \Phi(c_i - \mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{\Psi}),$$

gdzie $c_i = d_i/\sigma_i$, a $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i/\sigma_i$ jest wektorem wag poszczególnych czynników zewnętrznych i-tego kredytobiorcy.

W przypadku jednorodnych kredytobiorców warunkowe prawdopodobieństwo niewypłacalności przybiera postać:

$$Q = \Phi(Z),$$

gdzie zmienna losowa Z ma rozkład normalny.

Eksperci z CreditRisk$^+$ [1; 7] zaproponowali do analizy ryzyka kredytowego mieszany model Bernoulliego. Warunkowe prawdopodobieństwo niewypłacalności jest w nim równe

$$q_i(\mathbf{\Psi}) = P(Y_i = 1 | \mathbf{\Psi}) = 1 - \exp(-\mathbf{w}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{\Psi}).$$

W przypadku jednorodnej grupy kredytobiorców $Q = 1 - \mathrm{e}^{-Z}$, gdzie Z ma rozkład gamma.

5. Funkcje łączące

Autorzy prac [2; 3; 7] zaproponowali rozszerzenia powyższych, stosowanych w praktyce modeli, oparte na funkcjach łączących. W modelu KMV/CreditMetrics przyjmuje się wielowymiarowy rozkład normalny zmiennych X_i. Najprostszym rozszerzeniem jest przyjęcie, że struktura zależności wektora losowego $\mathbf{X}$ opisana jest Gaussowską funkcją łączącą:

$$C_{\mathbf{R}}^{\mathrm{Ga}}(u_1, \dots, u_m) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_m)), \tag{2}$$

gdzie $\Phi_{\mathbf{R}}$ jest dystrybuantą wielowymiarowego rozkładu normalnego z macierzą korelacji $\mathbf{R}$.

Wprowadzając we wzorze (2) zamiast dystrybuanty rozkładu normalnego dystrybuanty rozkładu t-Studenta, otrzymujemy funkcję łączącą Studenta $C_{\mathbf{R},v}^{t}$ z v stopniami swobody. W odróżnieniu od funkcji Gaussowskiej charakteryzuje się ona tzw. zależnością na ogonach [4; 7]. Z większym prawdopodobieństwem występują wtedy ekstremalne wartości. Funkcja łącząca Studenta spełnia warunek zależności na ogonach zarówno dla dużych, jak i dla małych wartości.

Innym rodzajem funkcji łączącej opisującej strukturę zależności wektora losowego **X** jest Archimedesowa funkcja łącząca postaci [8; 4]:

$$C(u_1, ..., u_m) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + ... + \varphi(u_m))$$

utworzona przez generator φ. Wtedy zmienne losowe X_i są wymienne, a Y_i jest jednorodnym mieszanym rozkładem Bernoulliego. Łączny rozkład zestawu k indykatorów Y_i jest jednoznacznie wyznaczony przez generator funkcji łączącej j oraz prawdopodobieństwo niewypłacalności q:

$$q_{(k)} = \varphi^{-1}(k\varphi(q)).$$

Przykładem Archimedesowej funkcji łączącej jest funkcja łącząca Claytona określona wzorem:

$$C_\alpha(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\alpha} + \cdots + u_n^{-\alpha} - n + 1)^{-1/\alpha},$$

gdzie $\alpha > 0$, wyznaczona przez generator $\varphi(u) = u^{-\alpha} - 1$. Parametr α oddaje stopień zależności pary zmiennych losowych X_i oraz X_j. Współczynnik korelacji τ Kendalla jest wtedy równy

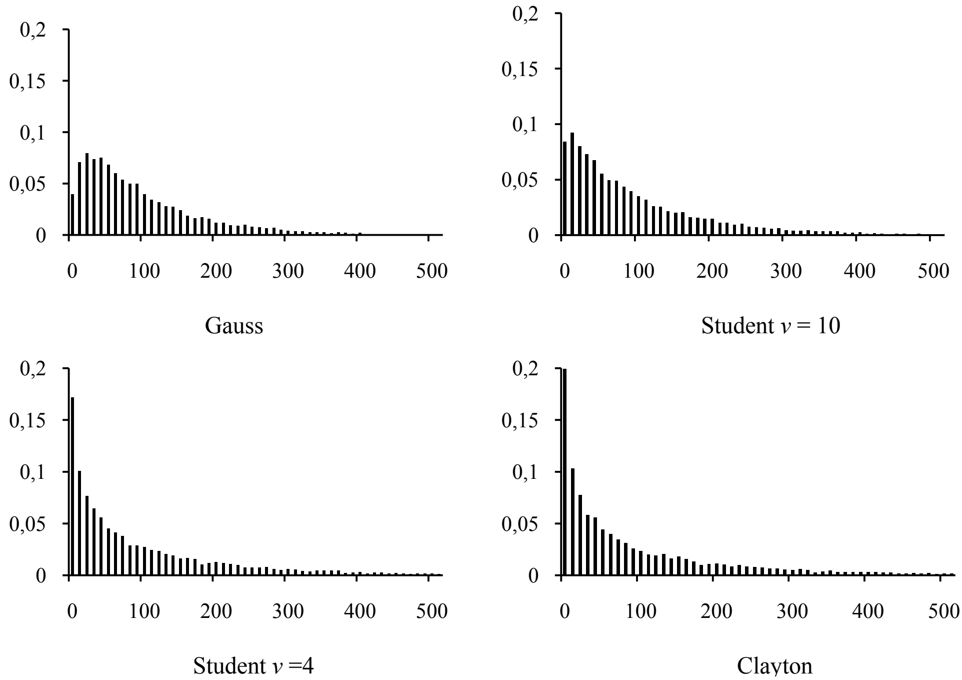
$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha+2}.$$

Funkcja łącząca Claytona jest zależna w ogonie dla małych wartości. Dzięki tej własności można ją wykorzystać do modelowania struktury zależności zmiennych losowych X_i, ponieważ zwykle prawdopodobieństwo niewypłacalności q jest w praktyce stosunkowo małe.

6. Badanie wpływu struktury i stopnia zależności zmiennych losowych X_i na rozkład liczby oraz wielkości niewypłacalnych kredytów

W naszych rozważaniach założymy, że zmienne losowe X_i przedstawiające wielkość środków finansowych $m = 1000$ kredytobiorców mają ten sam rozkład i wszystkie są jednakowo skorelowane (ze współczynnikiem korelacji $r = 0{,}2$ i prawdopodobieństwem niewypłacalności $q = 0{,}1$). Rozpatrzymy cztery różne struktury zależności zmiennych losowych X_i. Pierwsza opisana jest funkcją łączącą Gaussa z macierzą korelacji **R** o stałych elementach poza przekątną, tzn. $r_{ij} = 0{,}2$. Druga i trzecia są funkcją łączącą Studenta z macierzą korelacji **R** i stopniami swobody równymi odpowiednio $v = 10$ oraz $v = 4$. Natomiast ostania jest funkcją łączącą Claytona z parametrem $\alpha = 0{,}2904$. Współczynnik korelacji Pearsona jest wtedy równy $r = 0{,}2$, gdy rozkłady brzegowe mają rozkład normalny.

Dla tak określonych struktur zależności porównamy teraz rozkłady zmiennej losowej M będącej liczbą niewypłacalnych kredytobiorców. Rozkłady wyznaczone zostały za pomocą symulacji $n = 10000$ wartości zmiennej losowej M, a ich histogramy zostały przedstawione na rys. 1. W przypadku funkcji łączącej Claytona można wyznaczyć rozkład zmiennej M w sposób dokładny, stosując wzór (1). Jednakże z powodu kombinatorycznej postaci tego wzoru i dużej liczby zmiennych m lepiej stosować techniki symulacyjne. Stosowanie dokładnego wzoru powoduje istotne błędy obliczeniowe.

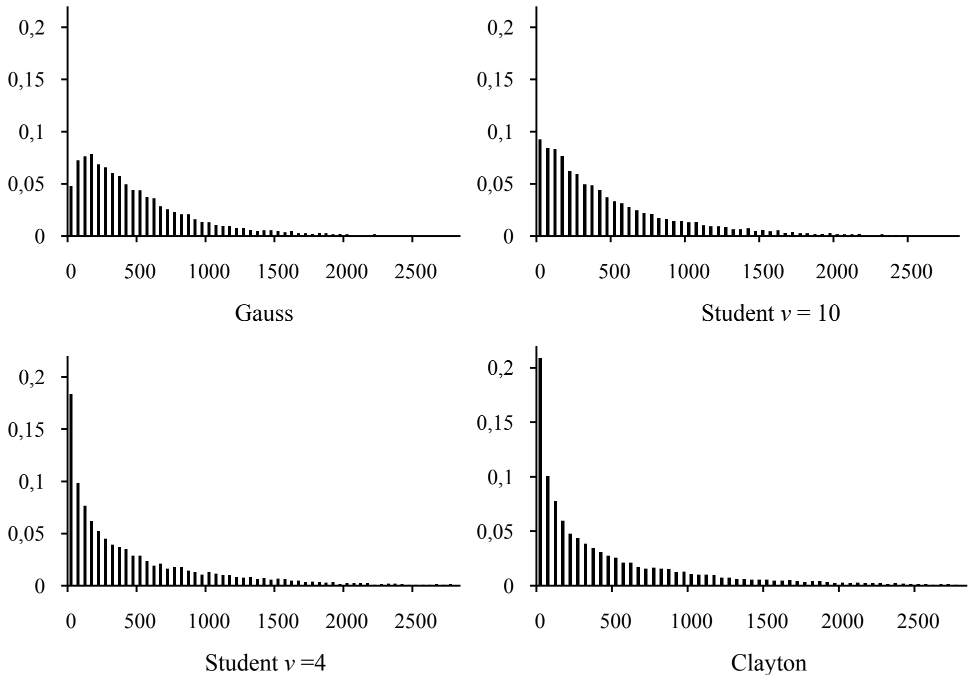


Rys. 1. Rozkład zmiennej M dla różnych struktur zależności rozkładu wektora **X**

Źródło: opracowanie własne.

Analizując powyższe wykresy, można zauważyć istotny wpływ struktury zależności wektora losowego **X** na kształt histogramu zmiennej M – liczby niewypłacalnych kredytobiorców. Kształty histogramów zmieniają się od rozkładu jednomodalnego dla funkcji łączącej Gaussa do rozkładu malejącego, mającego największe częstości dla najmniejszych wartości zmiennej w przypadku funkcji łączącej Studenta z małą liczbą stopni swobody czy funkcji łączącej Claytona. Zmiana ta jest spowodowana głównie wzrostem dolnych zależności w ogonie dla małych wartości.

Rysunek 2 przedstawia wpływ struktury zależności na rozkład drugiej interesującej nas zmiennej losowej: wielkości niespłaconych kredytów L. W przykładzie tym zostało przyjęte założenie, że wielkość kredytu każdego kredytobiorcy L_i jest opisana zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, z wartością oczekiwaną $\mu = 5$.



Rys. 2. Rozkład zmiennej L dla różnych struktur zależności rozkładu wektora **X**

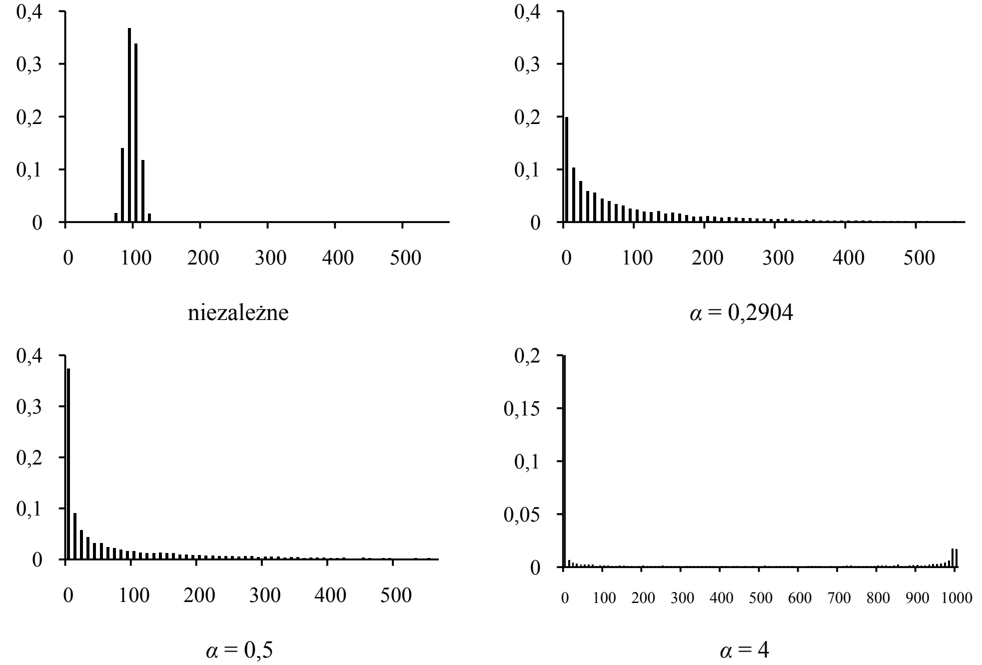
Źródło: opracowanie własne.

Jak łatwo zauważyć, rozkłady zmiennej losowej L dotyczącej wielkości straconych kredytów reagują na różne struktury zależności wielowymiarowej zmiennej **X** przedstawiającej środki finansowe kredytobiorców podobnie jak w przypadku zmiennej M.

W następnym kroku zbadamy wpływ stopnia zależności zmiennych X_i na rozkład zmiennych losowych M oraz L w przypadku ustalonej struktury zależności. Załóżmy, że prawdopodobieństwo niewypłacalności $q = 0{,}1$, a struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Claytona. Rozpatrzymy cztery przypadki dla różnych wartości współczynnika α: 0; 0,2904; 0,5 oraz 4. Pierwszy jest przypadkiem granicznym odpowiadającym niezależności, a następne odpowiadają zależności o współczynniku korelacji τ Kendala równym odpowiednio 1/6; 0,2 oraz 2/3.

Histogramy rozkładów zmiennej M zamieszczone są na rys. 3.

Widzimy, że stopnień zależności zmiennych X_i istotnie wpływa na kształt histogramów rozkładu zmiennej M. Wraz ze wzrostem stopnia zależności zmienia się od jednomodalnego, klasycznego rozkładu dwumianowego dla niezależności, poprzez malejący do u-kształtnego dla dużej zależności zmiennych. W ostatnim histogramie rzeczywista wysokość słupka odpowiadającego wartości 0 (brak niespłacalnych kredytów) wynosi 0,837. W skrajnym, granicznym przypadku gdy $\alpha = \infty$ ($\tau = 1$), ścisłej



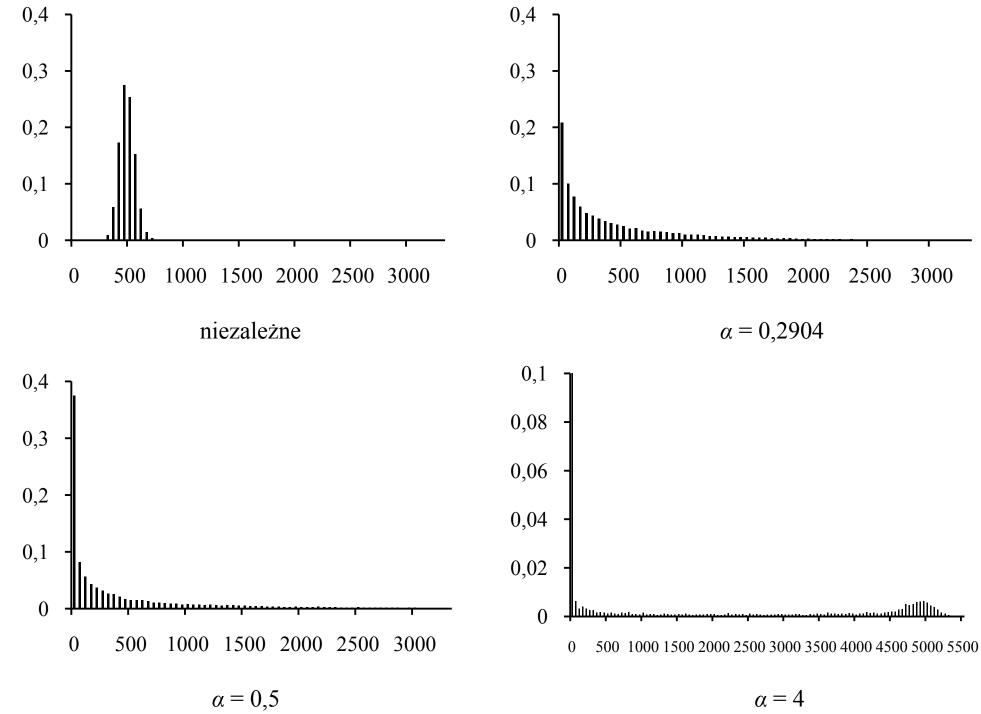
Rys. 3. Rozkład zmiennej *M* dla różnych stopni zależności zmiennych X_i

Źródło: opracowanie własne.

zależności kredytobiorców, otrzymujemy rozkład dwupunktowy: P(M = 0) = 1 – q oraz P(M = m) = q [5]. Jednak w praktyce nie zachodzą aż tak duże zależności między kredytobiorcami.

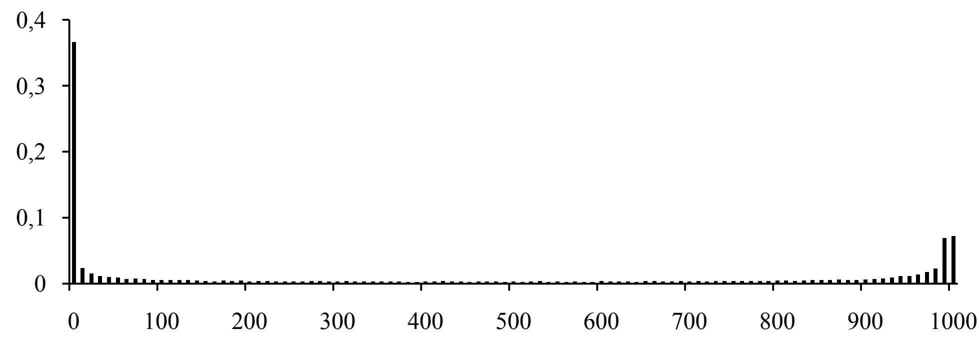
Stopień zależności zmiennych X_i ma podobny wpływ na postać rozkładu zmiennej losowej L przedstawiającej wielkość niespłaconego kredytu. Odpowiednie histogramy przedstawione są na rys. 4. W tym przypadku również występuje *u*-kształtny histogram, gdy zachodzi duża zależność kredytobiorców (dla zera częstość wynosi 0,839).

Na zakończenie tych rozważań jeszcze zbadamy wpływ prawdopodobieństwa niewypłacalności na rozkład interesujących nas zmiennych losowych: M oraz L. Mianowicie wraz ze wzrostem tego prawdopodobieństwa histogram tych zmiennych losowych staje się bardziej *u*-kształtny w przypadku zmiennej M i dwumodalny, ale zbliżony do *u*-kształtnego dla drugiej zmiennej L. Na rysunkach 5 i 6 podane są histogramy rozkładów tych zmiennych dla prawdopodobieństwa niewypłacalności q = 0,4 oraz struktury zależności opisanej funkcją łączącą Claytona z parametrem α = 4. Oczywiście, w praktyce prawdopodobieństwo to jest zwykle mniejsze, podobnie jak stopnień zależności między kredytobiorcami. Jednak parametry te zostały tak dobrane, aby podkreślić różnicę kształtów histogramów między standardowym a ekstremalnym przypadkiem.



Rys. 4. Rozkład zmiennej L dla różnych stopni zależności zmiennych X_i

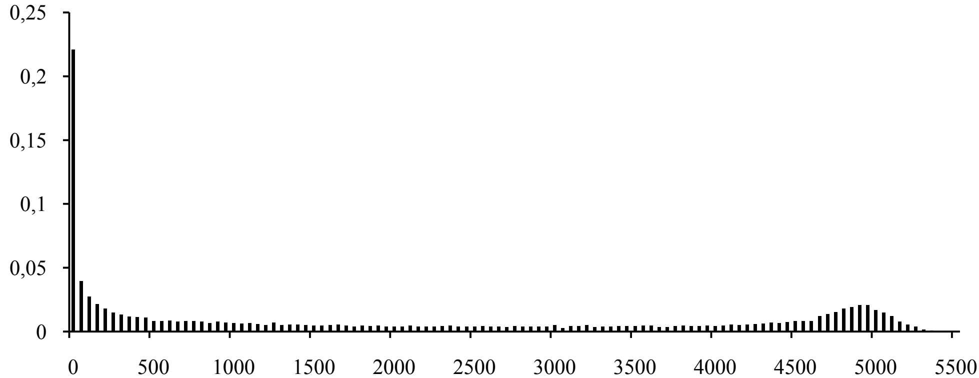
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Rozkład zmiennej M dla $q = 0,4$ i funkcji łączącej Claytona $\alpha = 4$

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowując, można stwierdzić, że interesujące nas rozkłady zmiennych losowych M oraz L, tzn. liczby i wielkości niewypłacalnych kredytów, zależą od struktury zależności oraz od stopnia zależności wielkości środków finansowych poszczególnych kredytobiorców, czyli zmiennych losowych X_i. Otrzymujemy wtedy istotnie



Rys. 6. Rozkład zmiennej L dla q = 0,4 i funkcji łączącej Claytona α = 4

Źródło: opracowanie własne.

różne rozkłady zmiennych M czy L w zależności od tego, jaka funkcja łącząca odpowiada danej strukturze zależności. Również zmiana stopnia zależności wpływa na postać rozkładów tych zmiennych. Przykładowo, dla funkcji łączącej Claytona, odpowiedni histogram zmienia się ze standardowego, jednomodalnego w u-kształtny wraz ze wzrostem wartości parametru α, oddającego stopień zależności zmiennych X_i. Otrzymane rozkłady mogą się w dużym stopniu różnić się od klasycznej postaci odpowiadającej sytuacji, gdy występujące w modelu zmienne losowe są niezależne. Zasadne jest więc uwzględnianie zależności w modelach ryzyka kredytowego.

Literatura

[1] Credit-Suisse-Financial-Products, *CreditRisk+ a Credit Risk Management Framework*, Technical Document 1997.

[2] Frey R., McNeil A.J., Nyfeler N.A., *Copulas and credit models*, „Risk" 2001, vol. 10, s. 111-114.

[3] Frey R., McNeil A.J., *Modelling Dependent Defaults*, ETH, Zurich 2001.

[4] Heilpern S., *Zależny rozkład dwumianowy – zastosowanie w reasekuracji i kredytach*, „Badania Operacyjne i Decyzje" 2007, nr 1, s. 45-61.

[5] Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007.

[6] KMV-Corporation, *Modelling Default Risk*, Technical Document 1997.

[7] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P., *Quantitative Risk Management*, Priceton University Press, Priceton 2005.

[8] Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.

[9] Ostasiewicz W., *Modele statystyczne badań sondażowych*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Statystyka w praktyce społeczno-gospodarczej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007.

[10] RiskMetrics-Group, *CreditMetrics – Technical Document*, 1997.

THE MODELS OF DEPENDENT CREDIT RISKS

Summary: The paper is devoted to the models of dependent credit risks. The models with the dependent random variables and processes are presented. Two basic models of dependent credit risk: the model with latent variable and mixture Bernoulli model are studied. Some of their modifications based on copulas are investigated, too. The influence of the degree of dependence on the number of defaulted obligors and total loss is studied.