PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 163
Ekonometria 30 2011

Joanna Dębicka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

MODELOWANIE PROBABILISTYCZNEJ STRUKTURY UBEZPIECZEŃ WIELOSTANOWYCH*

Streszczenie: Ubezpieczeniem wielostanowym nazywa się umowę ubezpieczenia obejmującą różne przypadki życiowe. Podstawą aktuarialno-finansowej analizy ubezpieczenia jest skonstruowanie jego matematycznego modelu nazywanego *modelem wielostanowym*, a szczególnie określenie jego probabilistycznej struktury. Celem tego artykułu jest modelowanie probabilistycznej struktury modelu wielostanowego na podstawie wielostanowych tablic trwania życia, przy założeniu, że proces opisujący ewolucję umowy ubezpieczenia jest niejednorodnym łańcuchem Markowa. Uzyskane wyniki zostały przedstawione na przykładzie ubezpieczenia na życie z opcjami od ryzyka trwałego inwalidztwa oraz od ryzyka ciężkiej choroby.

Słowa kluczowe: model wielostanowy, łańcuch Markowa, wielostanowe tablice trwania życia, ubezpieczenie wielostanowe.

1. Wstęp

Ubezpieczeniem wielostanowym nazywa się umowę ubezpieczenia obejmującą różne przypadki życiowe. Ubezpieczenia tego typu składają się z podstawowej umowy ubezpieczenia (jest to zazwyczaj umowa ubezpieczenia na życie) oraz ubezpieczeń dodatkowych, czyli tzw. *opcji* (np. umowa ubezpieczenia od trwałego inwalidztwa, niezdolności do pracy). Podstawą aktuarialno-finansowej analizy ubezpieczenia jest skonstruowanie jego matematycznego modelu. Pierwszym krokiem jest opis możliwych zdarzeń losowych (przypadków życiowych), które obejmuje umowa ubezpieczenia podstawowego wraz z umowami ubezpieczeń dodatkowych, a następnie określenie wszystkich możliwych przebiegów ubezpieczenia. W tym celu definiuje się tzw. model wielostanowy (Paragraf 2), a następnie określa na nim strukturę probabilistyczną (Paragraf3) oraz przepływy pieniężne wynikające z zawarcia umowy ubezpieczenia. Jednym ze sposobów prowadzących do wyznaczania probabilistycznej struktury modelu wielostanowego jest przyjęcie założenia, że proces opisujący ewolucję umowy ubezpieczenia jest niejednorodnym łańcuchem Markowa (Paragraf4).

* Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy nr 2293/B/H03/2009/36.

Celem artykułu jest wyznaczenie elementów ciągu macierzy związanych z rozkładem procesu opisującego ewolucję umowy ubezpieczenia na podstawie wielostanowych tablic trwania życia (*multiple increment-decrement tables*). Opracowania opisujące wielostanowe tablice trwania życia na ogół dotyczą ich szczególnego przypadku, czyli wieloopcyjnych tablic szkodowości (*multiple decrement tables*), gdzie zajście danego zdarzenia losowego ma nieodwracalne skutki (por. [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Haberman 1983a; 1983b; Jordan 1982]). Autorce nie są znane prace dotyczące powiązań liczebności i charakterystyki stanów modelu wielostanowego z funkcjami wielostanowych tablic trwania życia, co stało się motywacją powstania niniejszej pracy. Przedstawiono, w jaki sposób liczba i rodzaj funkcji wielostanowych tablic trwania życia zależą od modelu wielostanowego (Paragraf5). Przede wszystkim pokazano, jak je określać na podstawie macierzy rozkładu dwuwymiarowego procesu opisującego ewolucję umowy ubezpieczenia. Określone zostały elementy macierzy niezbędnych do wyznaczenia prawdopodobieństw warunkowych oraz jednowymiarowych i dwuwymiarowych rozkładów procesu opisującego ewolucję umowy ubezpieczenia (Paragraf6).

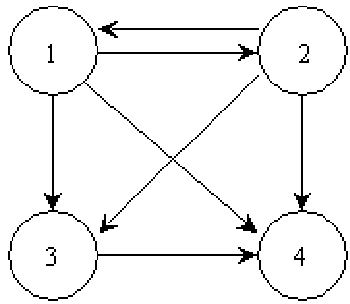
Zauważmy, że dla danego rodzaju ubezpieczenia wielostanowe tablice trwania życia tworzone przez ubezpieczyciela są tajemnicą firmy ubezpieczeniowej. Dlatego ilustracją zastosowania wielostanowych tablic trwania życia do wyznaczenia probabilistycznej struktury modelu wielostanowego jest hipotetyczny przykład ubezpieczenia na życie z opcjami od ryzyka trwałego inwalidztwa oraz od ryzyka ciężkiej choroby.

2. Model wielostanowy

Każdemu przypadkowi życiowemu, którego dotyczy opcja lub umowa ubezpieczenia podstawowego, odpowiada *stan*, w jakim znalazł się ubezpieczony. Przyjmijmy, że N ($N < \infty$) oznacza liczbę wszystkich możliwych stanów oraz $S = \{s_1, s_2, ..., s_N\}$ oznacza skończoną *przestrzeń stanów*. W dalszych rozważaniach, bez straty ogólności, przyjęto założenie, że $S = \{1, 2, ..., N\}$. Ponadto para (i, j), gdzie $i \neq j$ oraz $i, j \in S$, oznacza *bezpośrednie przejście* ze stanu i do stanu j. Natomiast T jest zbiorem wszystkich możliwych bezpośrednich przejść między stanami. Zauważmy, że $T \subset \{(i, j) : i \neq j, i, j \in S\}$ jest podzbiorem wszystkich możliwych par (i, j).

Para (S, T), opisująca wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w życiu ubezpieczonego w okresie objętym umową ubezpieczenia, nazywana jest *modelem wielostanowym* (por. [Haberman, Pitacco 1999]).

Przykład. Rozważmy n-letnie ubezpieczenie na życie, do którego zostały dokupione opcje od ryzyka trwałego inwalidztwa oraz od ryzyka ciężkiej choroby. Przedmiotem ubezpieczenia podstawowego jest śmierć ubezpieczonego, a ubezpieczeń dodatkowych ciężka choroba oraz całkowite inwalidztwo. Umowa ubezpieczenia gwarantuje wypłatę świadczenia jednorazowego, jeżeli ubezpieczony zachoruje na wskazaną w polisie chorobę lub stanie się inwalidą. Dodatkowo, jeżeli ubezpieczony



Rys. 1. Schemat modelu wielostanowego $(S,T)=(\{1,2,3,4\},\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1)(2,3),(2,4),(3,4)\})$

Źródło: opracowanie własne.

stanie się inwalidą, firma ubezpieczeniowa płaci mu rentę do końca trwania umowy ubezpieczenia. W przypadku zgonu ubezpieczonego uposażona osoba otrzymuje świadczenie jednorazowe z tytułu śmierci ubezpieczonego. Takiej umowie ubezpieczenia odpowiada polisa ubezpieczeniowa z czterema możliwymi stanami:

1 – ubezpieczony jest zdrowy,
2 – ubezpieczony jest ciężko chory,
3 – ubezpieczony jest inwalidą,
4 – ubezpieczony nie żyje.

Ilustracją graficzną przestrzeni stanów i możliwych przejść między nimi jest rys. 1.

3. Probabilistyczna struktura modelu

Badanie i analiza zmian stanów (ewolucji statusu ubezpieczonej osoby) od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia jest jednym z podstawowych elementów wpływających na wycenę umowy ubezpieczenia.

Niech dla danej umowy ubezpieczenia, reprezentowanej przez model wielostanowy(S, T), dana będzie funkcja

$$X(x,t)=i, \quad \text{dla} \quad i\in S, t\in \mathrm{T},$$

gdzie x oznacza wiek osoby przystępującej do ubezpieczenia, a t czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia. $X(x,t)=i$ oznacza, że w chwili t trwania umowy ubezpieczenia ubezpieczonego dotyczy przypadek życiowy, któremu został przypisany stan i. Ponieważ analiza dotyczy pojedynczej polisy, to w dalszych rozważaniach przyjęto, że $X(x,t)=X(t)$.

Przypadki życiowe, które obejmuje umowa ubezpieczenia, mają naturę losową. Naturalne więc jest przyjęcie, że $\{X(t);t\in \mathrm{T}\}$ jest procesem stochastycznym przyjmującym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S.

Ponadto niech $T \subseteq \{0, 1, 2, ...\}$, co oznacza, że analiza dotyczy ubezpieczeń, w których okres ubezpieczenia został podzielony na rozłączne odcinki czasu, np. dni, miesiące lub lata. Szczególnie jednorazowe świadczenia i raty renty płatne są na koniec okresu (rok, miesiąc itp.) oraz składki płatne są z góry w takich samych odstępach czasu.

Zakładamy, że w jednej jednostce czasu proces $\{X(t)\}$ może zmienić stan tylko jeden raz (może zajść tylko jedno zdarzenie losowe) oraz że umowa ubezpieczenia została zawarta w momencie 0 na n jednostek czasu, gdzie n jest *okresem ubezpieczenia*. Ponadto stan oznaczony numerem 1 oznacza stan początkowy, tzn. $X(0) = 1$, co automatycznie określa rozkład początkowy procesu $\{X(t)\}$.

Podstawowymi wielkościami opisującymi ewolucję procesu $\{X(t)\}$ są rozkłady skończenie wymiarowe, które dla każdego $k \in \{1, 2, ..., n\}$ oraz $t_1, t_2, ..., t_k$ (gdzie $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_k$) i $s_1, s_2, ..., s_k \in S$ wymagają wyznaczenia prawdopodobieństwa

$$\mathrm{IP}(X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, ..., X(t_k) = s_k). \tag{1}$$

Znajomość (1) pozwala na określenie rozkładów warunkowych

$$\mathrm{IP}(X(t_k) = s_k \mid X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, ..., X(t_{k-1}) = s_{k-1}), \tag{2}$$

które są niezbędne w kalkulacji wielkości aktuarialnych, np. składek i rezerw ubezpieczeniowych.

W praktyce aktuarialnej znalezienie rozkładów wielowymiarowych (1) oraz prawdopodobieństw warunkowych (2) jest często trudne. Związane jest to z ograniczoną ilością dostępnych danych. Dlatego w celu ich określenia przyjmowane są pewne założenia. Szczególnie, jeśli przyjmie się założenie, że $\{X(t)\}$ jest łańcuchem Markowa, okazuje się, że znajomość jedno- i dwuwymiarowych rozkładów wystarcza do określenia (2) (por. [Dębicka 2006]).

W dalszych rozważaniach wygodnie będzie przedstawić rozkłady jednowymiarowe i dwuwymiarowe w formie macierzowej. Niech

$$P(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), ..., p_N(t))^T \in \mathrm{IR}^N, \tag{3}$$

gdzie $p_i(t) = \mathrm{IP}(X(t) = i)$. W szczególności $P(0) = (p_1(0), p_2(0), ..., p_N(0))^T \in \mathrm{IR}^N$ jest rozkładem początkowym, który przy założeniu, że $X(0) = 1$ jest postaci $P(0) = (1, 0, 0, ...,))^T \in \mathrm{IR}^N$.

Ponadto niech

$$P(t_1, t_2) = (p_{ij}(t_1, t_2))_{i,j=1}^N \in \mathrm{IR}^{N \times N}, \tag{4}$$

gdzie $p_{ij}(t_1, t_2) = \mathrm{IP}(X(t_1) = i, X(t_2) = j)$. Szczególnie przydatny jest ciąg macierzy określający rozkład dwuwymiarowy procesu $\{X(t)\}$ określony dla kolejnych jednostek czasu, tzn.

$$P(0, 1), P(1, 2), ..., P(t-1, t), ..., P(n-1, n). \tag{5}$$

Zauważmy, że macierze (3) i (4) są macierzami rozkładu, tzn. są tak określone, że ich elementy przyjmują wartość między 0 a 1 oraz suma wszystkich elementów macierzy jest równa jedności.

Przykład – cd. Macierz rozkładu dwuwymiarowego dla t-tej jednostki czasu dla modelu wielostanowego, którego schemat przedstawiony został na rys. 1, jest postaci

$$P(t,t+1)=\begin{pmatrix} p_{11}(t,t+1) & p_{12}(t,t+1) & p_{13}(t,t+1) & p_{14}(t,t+1) \\ p_{21}(t,t+1) & p_{22}(t,t+1) & p_{23}(t,t+1) & p_{24}(t,t+1) \\ 0 & 0 & p_{33}(t,t+1) & p_{34}(t,t+1) \\ 0 & 0 & 0 & p_{44}(t,t+1) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

4. Łańcuchy Markowa i ich własności

Istotą procesu Markowa jest to, że szansa znalezienia się w danym stanie s_i w chwili t zależy tylko od stanu, w jakim proces był w chwili $t-1$, i od reguł przechodzenia między stanami. W celu sformalizowania pojęcia procesu Markowa przyjmijmy, że $X(0), X(t_1), X(t_2),...$ jest ciągiem zmiennych losowych, których zbiory wartości zawarte są w zbiorze S. Zmienna losowa $X(t)$ przyjmująca wartości ze zbioru S opisuje stan układu w chwili t. Ciąg zmiennych losowych opisuje więc historię układu rozwijającego się zgodnie z regułami przechodzenia pomiędzy nimi. Jedną z takich reguł jest własność Markowa.

Definicja 1. *Proces* $\{X(t)\}$ *z przestrzenią stanów S jest procesem Markowa, jeżeli dla każdego k oraz skończonego zbioru* $t_1, t_2, ..., t_k$ *(gdzie* $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_k$*) i odpowiadającego mu zbioru stanów* $s_1, s_2, ..., s_k \in S$ *takiego, że* $\mathrm{IP}(X(t_1)=s_1, X(t_2)=s_2, ..., X(t_k)=s_k)>0,$ *spełniony jest następujący warunek:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{IP}(X(t_k)=s_k \mid X(t_1)=s_1, X(t_2)=s_2, ..., X(t_{k-1})=s_{k-1}) = \\ &= \mathrm{IP}(X(t_k)=s_k \mid X(t_{k-1})=s_{k-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Z równości (7) wynika, że prawdopodobieństwo warunkowe określające, że proces $\{X(t)\}$ w momencie t_k jest w stanie s_k, jest takie samo dla kogoś, kto zna całą historię procesu $\{X(t)\}$ w momentach $t_1, t_2, ..., t_{k-1}$, oraz dla kogoś, kto wie, w jakim stanie proces był w momencie t_{k-1}.

Procesy Markowa z przeliczalną przestrzenią stanów nazywane są *łańcuchami Markowa*. W ubezpieczeniach przede wszystkim wykorzystywane są łańcuchy Markowa ze skończoną przestrzenią stanów, dlatego jedynie one będą przedmiotem rozważań w dalszej części tej pracy. Dodatkowo w pracy przyjęto założenie, że realizacja umowy ubezpieczenia obserwowana jest w określonych momentach czasu

$T \subseteq \{0,1,2,...\}$, więc dalsze rozważania o procesach Markowa ograniczone zostały do *dyskretnych w czasie łańcuchów Markowa* $\{X(t): t \in \{0,1,2,...\}\}$.

Prawdopodobieństwo przejścia $P_{ij}(t,u)$ dla $t \neq u$ ($0 \leq t < u$) określone jest następująco

$$\mathrm{IP}_{ij}(t,u) = \mathrm{IP}(X(u) = s_j \mid X(t) = s_i) \equiv \mathrm{IP}(X(u) = j \mid X(t) = i). \tag{8}$$

Natomiast dla $t = u$ mamy, że

$$\mathrm{IP}_{ij}(t,u) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases},$$

gdyż proces $\{X(t)\}$ w momencie t może znajdować się tylko w jednym ze stanów.

Prawdopodobieństwo trwania w stanie $P_{\underline{ii}}(t,u)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że proces $\{X(t)\}$ od momentu t do momentu u jest w stanie s_i, czyli

$$\begin{aligned}&\mathrm{IP}_{\underline{ii}}(t,u) = \mathrm{IP}(X(z) = s_i \text{ dla } t < z \leq u \mid X(t) = s_i) \equiv \mathrm{IP}(X(z) = i \\ &\text{dla } t < z \leq u \mid X(t) = i).\end{aligned} \tag{9}$$

Jeżeli proces $\{X(t)\}$ obserwowany jest w chwilach $t = 0,1,2,...$, to wprowadzenie notacji macierzowej jest wygodnym i często stosowanym zabiegiem przy wykorzystywaniu prawdopodobieństw przejść między stanami do różnego rodzaju obliczeń. Macierz $Q(t,u) = (q_{ij}(t,u))_{i,j=1}^{N} \in \mathrm{IR}^{N \times N}$, gdzie $q_{ij}(t,u) = \mathrm{IP}_{ij}(t,u)$, nazywa się *macierzą przejścia* na S, gdy wszystkie jej wyrazy są nieujemne, a ponadto suma każdego wiersza wynosi 1, czyli dla każdego $i \in S$ mamy, że $\sum_{j \in S} \mathrm{IP}_{ij}(t,u) = 1$. Macierz o wymienionych własnościach nazywana jest także *macierzą stochastyczną*.

Dla każdego $i,j \in S$ oraz dowolnych momentów czasu t,u,w takich, że $0 \leq t \leq w \leq u$, prawdopodobieństwa $\mathrm{IP}_{ij}(t,u)$ oraz $\mathrm{IP}_{\underline{ii}}(t,u)$ spełniają *równanie Chapmana-Kołmogorowa* (por. np. [Haberman, Pitacco 1999; Wolthuis 1994]), które można przedstawić w następującej formie macierzowej

$$Q(t,u) = Q(t,w) \cdot Q(w,u). \tag{10}$$

Ponadto przyjmując, że $Q(w) = Q(w, w+1)$, mamy, że

$$Q(t,u) = \prod_{k=t}^{u-1} Q(k).$$

Oznacza to, że jeżeli $\{X(t); t = 0,1,2,...\}$ jest łańcuchem Markowa, to w celu wyznaczenia jego rozkładu prawdopodobieństwa wystarczy wyznaczyć rozkład początkowy oraz ciąg macierzy $Q(0), Q(1), ..., Q(t), ...$, gdzie $Q(t) = (q_{ij}(t))_{i,j=1}^{N} \in \mathrm{IR}^{N \times N}$, natomiast $q_{ij}(t) = \mathrm{IP}(X(t+1) = j \mid X(t) = i)$ (por. [Dębicka 2006]).

Wszystkie przedstawione zależności są prawdziwe, gdy zbiór stanów jest zarówno skończony, jak i nieskończony (ale przeliczalny). Dowody tych zależności można znaleźć np. w [Jakubowski, Sztencel 2000].

Elementy przestrzeni stanów S procesu Markowa można podzielić według różnych kryteriów. Jedną z klasyfikacji jest podział stanów na trzy rodzaje, na stany: *przejściowe*, *ściśle przejściowe* i *pochłaniające*.

Poniżej zdefiniowane zostały poszczególne rodzaje stanów na podstawie prawdopodobieństwa przejść między stanami i prawdopodobieństwa trwania w określonym stanie.

Definicja 2. *Dla dowolnych momentów czasu* t, u *takich, że* $0 \le t \le u$*, stan i (ze zbioru stanów S) jest stanem przejściowym, jeżeli* $\mathrm{IP}_{ii}(t, +\infty) = 0$.

Zauważmy, że nie jest możliwe, aby proces $\{X(t)\}$ stale był w stanie przejściowym, choć po jego opuszczeniu istnieje możliwość powrotu do niego.

Definicja 3. *Dla dowolnych momentów czasu t, u takich, że* $0 \le t \le u$*, stan i (ze zbioru stanów S) jest stanem ściśle przejściowym, jeżeli* $\mathrm{IP}_{ii}(t,u) = \mathrm{IP}_{\underline{ii}}(t,u) < 1$.

Stan ściśle przejściowy charakteryzuje się tym, że po jego opuszczeniu proces $\{X(t)\}$ nie może do niego powrócić.

Definicja 4. *Dla dowolnych momentów czasu t, u takich, że* $0 \le t \le u$*, stan i (ze zbioru stanów S) jest stanem pochłaniającym, jeżeli* $\mathrm{IP}_{\underline{ii}}(t,u) = 1$.

Wymieniona została tylko jedna z możliwych klasyfikacji przestrzeni stanów S, gdyż będzie ona wykorzystywana w następnych paragrafach. Inne klasyfikacje stanów można znaleźć np. w [Billingsley 1987; Feller 1961; Jakubowski, Sztencel 2000].

Przykład – cd. Dla łańcucha Markowa z przestrzenią stanów i możliwymi przejściami przedstawionymi w postaci schematu na rys. 1 postać macierzy $Q(t)$ jest następująca

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) & q_{13}(t) & q_{14}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) & q_{23}(t) & q_{24}(t) \\ 0 & 0 & q_{33}(t) & q_{34}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Zauważmy, że zgodnie z klasyfikacją stanów przedstawioną w tym paragrafie stany 1 i 2 są stanami przejściowymi, a stan 3 jest stanem ściśle przejściowym. Natomiast stan 4 jest stanem pochłaniającym, stąd w macierzy (11) mamy, że $q_{44}(t) = 1$.

5. Wielostanowe tablice trwania życia

Tablice trwania życia są podstawowym narzędziem analizy umieralności. Zawierają one funkcje określające ich szanse dożywania dowolnego wieku lub ryzyko śmierci w określonym wieku osób urodzonych w tym samym czasie. Istnieje wiele metod budowy tablic trwania życia i ich interpretacji z punktu widzenia procesów stochastycznych, niektóre z nich można znaleźć m.in. w [Błaszczyszyn, Rolski 2004; Bolesławski 1973; Chiang 1968; Ostasiewicz 2000].

Niech $l_{[x]}$ będzie liczbą osób w wieku x, mających losowy przyszły czas życia o wspólnym rozkładzie z funkcją przeżycia $s([x] + t)$ oznaczającą prawdopodobieństwo przeżycia przez osobę w wieku x co najmniej t lat. Symbol $[x]$ oznacza, że dane prawdopodobieństwo dotyczy x-latka.

Kohortową tablicą trwania życia związaną z funkcją przeżycia $s([x]+t)$ nazywa się zbór liczb nieujemnych $\{l_{[x]+t}\}_{t=0}^{\infty}$ spełniających zależność

$$s([x]+t) = \frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}} \quad \text{dla} \quad t \in \mathrm{T} = \{0,1,2,...\}.$$

Liczbę $l_{[x]}$ nazywa się *początkową liczebnością kohorty*. Natomiast $l_{[x]+t}$ jest liczbą osób w wieku x, które przeżyją t lat. Ubezpieczyciela interesują tablice trwania życia dla osób, których życie upłynęło w warunkach właściwych rozważanemu okresowi kalendarzowemu. Dlatego rozważane są jedynie bieżące (przekrojowe) tablice trwania życia, które są interpretowane w kontekście generacji (kohorty) hipotetycznej.

W tradycyjnych tablicach trwania życia podstawowymi funkcjami są liczba osób dożywających $l_{[x]+t}$ oraz liczba osób zmarłych $d_{[x]+t}$. Liczba osób zmarłych w wieku $x + t$ określana jest w sposób rekurencyjny w następujący sposób

$$d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}. \tag{12}$$

Na podstawie wymienionych parametrów można wyznaczyć prawdopodobieństwo:

– przeżycia jednego roku przez osobę w wieku $x + t$ lat

$$p_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}, \tag{13}$$

– śmierci w ciągu roku osoby w wieku $x + t$ lat

$$q_{[x]+t} = \frac{d_{[x]+t}}{l_{[x]+t}}. \tag{14}$$

Ponieważ ${}_t p_{[x]} = \prod_{k=0}^{t-1} p_{[x]+k}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje co najmniej t lat, oraz ${}_{t/}q_{[x]} = {}_t p_{[x]} \cdot q_{[x]+t}$ oznacza prawdopodobieństwo, że osoba w wieku x przeżyje t lat i w ciągu roku umrze, to uwzględniając (13) oraz (14), można wykazać, że

$${}_t p_{[x]} = \frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}},$$

$${}_{t|}q_{[x]} = \frac{d_{[x]+t}}{l_{[x]}}.$$

Na podstawie tablic trwania życia można wyznaczyć elementy macierzy $Q(t)$, $P(t)$ i $P(t, t+1)$ jedynie dla klasycznych ubezpieczeń na życie i rent. W przypadku ubezpieczenia opisanego w **przykładzie** podstawowe tablice trwania życia nie są wystarczające do określenia wymienionych macierzy, gdyż prawdopodobieństwa przejść między stanami zależą także od stopnia narażenia ubezpieczonego na trwałe inwalidztwo oraz ryzyko ciężkiej choroby. Dla takiego typu ubezpieczeń konstruowane są *wielostanowe tablice trwania życia* (*multiple increment-decrement tables*), w których oprócz wieku ubezpieczonego brane są także pod uwagę inne cechy. Na przykład tworząc tablice na potrzeby ubezpieczeń zdrowotnych, pod uwagę brany jest stan zdrowia osoby w wieku x oraz powód zgonu (tzn. czy osoba umarła, wcześniej chorując, czy też uległa nieszczęśliwemu wypadkowi i nagły zgon dotyczył osoby zdrowej).

Wielostanowe tablice trwania życia wykorzystywane przez firmy ubezpieczeniowe zawierają funkcje wyznaczane osobno dla osób charakteryzujących się określonymi cechami. Ogólnie w przypadku ubezpieczeń wielostanowych każdy ze stanów dotyczy pewnego zdarzenia losowego, a więc w danej chwili t populacja ubezpieczonych jest podzielona na N rozłącznych grup. Osoby przynależące do danej grupy cechuje to, że w ich życiu zaszło dane zdarzenie losowe (wszyscy są np. inwalidami, osobami zdrowymi, umarli w wyniku nieszczęśliwego wypadku itp.). Osoby przynależące w chwili t do danej grupy w ciągu następnej jednostki czasu mogą ją zmienić i w chwili $t+1$ należeć do innej grupy albo pozostać w niej (na zawsze, gdy dotyczy to np. osób nieżyjących). Wielostanowe tablice trwania życia tworzone są po to, aby oszacować szansę zarówno wyjścia z danego stanu, jak i pozostania w nim, a liczba funkcji, które zawierają, jest ściśle powiązana z modelem wielostanowym (S, T) (por. [Bowers i in. 1986; Haberman 1983a; 1983b; Jordan 1982; Mattsson 1997]).

Dla każdego ze stanów $i \in S$, który jest przejściowy lub ściśle przejściowy (tzn. może być opuszczony przez proces $\{X(t)\}$, jeżeli się w nim znajdzie), tworzy się następujące funkcje:

- $l^{i}_{[x]+t}$ – liczbę osób w wieku $x+t$, których dotyczy zdarzenie losowe charakteryzowane przez stan i,
- $d^{ij}_{[x]+t}$ – liczbę osób w wieku $x+t$, które w okresie $(x+t; x+t+1)$ opuściły grupę osób charakteryzowanych przez zdarzenie losowe stanu i i przeszły do grupy osób, których dotyczy zdarzenie losowe określające stan j (przy założeniu, że takie przejście jest możliwe, tzn. $(i, j) \in T$)).

Oznacza to, że liczba funkcji, które musi zawierać wielostanowa tablica trwania życia tworzona dla danego modelu wielostanowego (S, T), zależy ściśle zarówno od przestrzeni stanów (potrzeba tyle funkcji $l^{i}_{[x]+t}$, ile jest stanów przejściowych i ściśle przejściowych), jak i zbioru bezpośrednich przejść między stanami (każdemu przejściu (i, j) odpowiada funkcja $d^{ij}_{[x]+t}$).

Liczbę potrzebnych funkcji wielostanowej tablicy trwania życia można wyznaczyć, korzystając z macierzy $P(t,t+1)$ określonej dla danego modelu wielostanowego (S, T). Na podstawie $P(t,t+1)$ tworzy się tablicę, w której:

– na przekątnej umieszcza się $l^{i}_{[x]+t}$ tam, gdzie $p_{ii}(t,t+1)\neq 0$ oraz $\exists_{j\in S}\, p_{ij}(t,t+1)\neq 0$ (wtedy *i* nie jest stanem pochłaniającym),
– poza przekątną umieszcza się $d^{ij}_{[x]+t}$ tam, gdzie $p_{ij}(t,t+1)\neq 0$,
– pozostałe pola zostawia się puste.

Przykład – cd. Tablica funkcji $l^{i}_{[x]+t}$ i $d^{ij}_{[x]+t}$ dla rozważanego ubezpieczenia ma następującą postać (por. (6))

$$\begin{pmatrix} l^{1}_{[x]+t} & d^{12}_{[x]+t} & d^{13}_{[x]+t} & d^{14}_{[x]+t} \\ d^{21}_{[x]+t} & l^{2}_{[x]+t} & d^{23}_{[x]+t} & d^{24}_{[x]+t} \\ & & l^{3}_{[x]+t} & d^{34}_{[x]+t} \\ & & & \end{pmatrix}. \tag{15}$$

W pierwszym wierszu tablicy (15) znajdują się funkcje, które należy wyznaczyć dla osób, które są zdrowe. W drugim wierszu znajdują się funkcje, które należy wyznaczyć dla osób, które są chore, a w trzecim wierszu dla osób, które są inwalidami. Czwarty wiersz dotyczy stanu pochłaniającego (osób zmarłych), więc dla niego żadnych funkcji nie trzeba wyznaczać. Dla rozważanego przykładu wielostanowa tablica trwania życia ma następującą postać

$$\left\{\left(l^{1}_{[x]+t}, d^{12}_{[x]+t}, d^{13}_{[x]+t}, d^{14}_{[x]+t}, l^{2}_{[x]+t}, d^{21}_{[x]+t}, d^{23}_{[x]+t}, d^{24}_{[x]+t}, l^{3}_{[x]+t}, d^{34}_{[x]+t}\right)\right\}_{t=0}^{\infty}.$$

W celu określenia wielostanowej tablicy trwania życia dla **przykładu** opisywanego w tej pracy wskazane jest (oprócz tablic trwania życia) posiadanie tablic: chorobowości, inwalidności, wymieralności inwalidów, niezdolności do pracy. W Polsce opracowane są tablice przedstawiające prawdopodobieństwo zgonu według przyczyn, które umożliwiają ustalenie, jakie choroby mają wpływ na ryzyko śmierci. Nie umożliwiają one jednak oszacowania prawdopodobieństwa zachorowania i trwania choroby w zależności od wieku. Brak jest, zarówno w Polsce, jak i na świecie, miarodajnych tablic chorobowości i inwalidności, które mogłyby być zastosowane do kalkulacji składek czy rezerw. Obecnie większość zakładów ubezpieczeniowych buduje swoje własne tablice, uwzględniając przy tym różne kryteria uznania inwalidztwa, jak również różne warunki gospodarczo-społeczne kraju i grupy osób, do których kierowane jest ubezpieczenie. Przykładową ocenę inwalidności oraz wymieralności inwalidów można znaleźć w [Stroiński 1996]. A dane dotyczące umieralności według przyczyn w opracowaniach GUS [Publikacje GUS].

Szczególnym przypadkiem wielostanowych tablic trwania życia są wieloopcyjne tablice szkodowości (*multiple decrement tables*) $\left\{\left(l^{1}_{[x]+t}, d^{12}_{[x]+t}, d^{13}_{[x]+t}, \ldots, d^{1N}_{[x]+t}\right)\right\}_{t=0}^{\infty}$, których *t*-ty element składa się z *N* liczb $l^{1}_{[x]+t}$ i $d^{1j}_{[x]+t}$, $j=2,3,\ldots,N$. Liczby te można zinterpretować jako liczbę członków kohorty na początku *t*-tego roku oraz liczby osób, które opuściły kohortę w okresie $[t,t+1)$ z powodu zdarzenia losowego określającego stan *j*. Tablice szkodowości dotyczą modelu wielostanowego, w którym stan 1 jest stanem ściśle przejściowym, a pozostałe $N-1$ stany to stany pochłaniające. Przykład takiej tablicy dla modelu $(S,T)=\left(\{1,2,3\},\{(1,2),(1,3)\}\right)$, gdzie stan 2 oznacza śmierć naturalną, a stan 3 śmierć z powodu nieszczęśliwego wypadku, znajduje się w pracy [Błaszczyszyn, Rolski 2004].

6. Modelowanie macierzy rozkładu procesu $\{X(t)\}$

Podobnie jak w tradycyjnych tablicach trwania życia (por. (12)) liczbę osób pozostających w danym stanie w momencie $t+1$ określa się w sposób rekurencyjny według następującej formuły

$$l^i_{[x]+t+1} = l^i_{[x]+t} - \sum_{j:(i,j)\in T} d^{ij}_{[x]+t} + \sum_{j:(j,i)\in T} d^{ji}_{[x]+t}, \tag{16}$$

gdzie $\sum_{j:(i,j)\in T} d^{ij}_{[x]+t}$ oznacza liczbę osób, które opuściły stan i w okresie $(t, t+1]$, a $\sum_{j:(j,i)\in T} d^{ji}_{[x]+t}$ oznacza liczbę osób, które przybyły do stanu i w okresie $(t, t+1]$.

Przy założeniu, że $\{X(t)\}$ jest niejednorodnym łańcuchem Markowa, korzystając z zależności (1), można wyznaczyć elementy macierzy $Q(t)$, $P(t)$ oraz $P(t, t+1)$ niezbędnych w celu określenia potrzebnych rozkładów i prawdopodobieństw warunkowych.

Lemat 1.

Dla modelu wielostanowego (S, T)*, któremu odpowiada wielostanowa tablica trwania życia, elementy macierzy* $Q(t)$ *określane są następująco:*

– *jeśli i jest stanem pochłaniającym, to*

$$q_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad j=i \\ 0 & \text{dla} \quad j\neq i \end{cases},$$

– *jeśli i jest stanem przejściowym lub ściśle przejściowym, to*

$$q_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{l^i_{[x]+t+1} - \sum_{j:(i,j)\in T} d^{ij}_{[x]+t}}{l^i_{[x]+t}} & \text{dla} \quad j=i \\[2ex] \dfrac{d^{ij}_{[x]+t}}{l^i_{[x]+t}} & \text{dla} \quad (i,j)\in T. \\[2ex] 0 & \text{dla} \quad (i,j)\notin T \end{cases}$$

Dowód. Jeżeli i jest stanem pochłaniającym lub i nie jest stanem pochłaniającym oraz $i \neq j$, to określenie $q_{ij}(t)$ jest oczywiste.

Pozostaje określenie prawdopodobieństwa przejść dla $i = j$, gdy i nie jest stanem pochłaniającym. Korzystając z rekurencyjnej własności (1), mamy, że dla $i = j$

$$q_{ii}(t) = \mathrm{IP}(X(t+1) = i \mid X(t) = i) = \frac{l^i_{[x]+t+1}}{l^i_{[x]+t}} = \frac{l^i_{[x]+t} - \sum_{j:(i,j)\in T} d^{ij}_{[x]+t}}{l^i_{[x]+t}}. \tag{17}$$

Zauważmy, że w liczniku wzoru (17) nie dodaje się składnika $\sum_{j:(j,i)\in T} d^{ji}_{[x]+t}$ ze wzoru (16), gdyż zgodnie z warunkiem w momencie t proces $\{X(t)\}$ znajduje się w stanie i. To kończy dowód.

Lemat 2.

Dla modelu wielostanowego (S, T)*, któremu odpowiada wielostanowa tablica trwania życia, elementy macierzy* $P(t)$ *określane są następująco:*

– *jeśli i jest stanem pochłaniającym, to*

$$p_i(t) = \sum_{j:(j,i)\in T} \frac{1}{l^j_{[x]}} \sum_{k=0}^{t-1} d^{ji}_{[x]+k}, \tag{18}$$

– *jeśli i jest stanem przejściowym lub ściśle przejściowym, to*

$$p_i(t) = \frac{l^i_{[x]+t}}{l^i_{[x]}}. \tag{19}$$

Dowód. Prawdopodobieństwo $p_i(t)$ określa się dla osoby, która w chwili 0 (np. rozpoczęcia umowy ubezpieczenia) ma x lat. Jeżeli i jest stanem przejściowym lub ściśle przejściowym, to $p_i(t)$ określa się jako stosunek liczby osób w wieku $x + t$ pozostających w stanie i w momencie t w stosunku do liczby osób w wieku x pozostających w stanie i. W oczywisty więc sposób otrzymuje się (19).

Natomiast jeśli i jest stanem pochłaniającym, to

$$p_i(t) = \sum_{j:(j,i)\in T} \sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{IP}(X(k) = j) \cdot \mathrm{IP}(X(k+1) = i \mid X(k) = i). \tag{20}$$

Ponieważ we wzorze (20) j nie jest stanem pochłaniającym, to mamy, że:

$$p_i(t) = \sum_{j:(j,i)\in T} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{l^j_{[x]+k}}{l^j_{[x]}} \cdot \frac{d^{ji}_{[x]+k}}{l^j_{[x]+k}}.$$

Po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy (18). To kończy dowód.

Lemat 3. *Dla modelu wielostanowego* (S, T)*, któremu odpowiada wielostanowa tablica trwania życia, elementy macierzy* $P(t, t + 1)$ *określane są następująco:*

– *jeśli i jest stanem pochłaniającym, to*

$$p_{ij}(t,t+1)=\begin{cases}\sum\limits_{j:(j,i)\in T}\dfrac{1}{l_{[x]}^{j}}\sum\limits_{k=0}^{t-1}d_{[x]+k}^{ji} & \text{dla} \quad j=i\\ 0 & \text{dla} \quad j\neq i\end{cases}, \tag{21}$$

– *jeśli i jest stanem przejściowym lub ściśle przejściowym, to*

$$p_{ij}(t,t+1)=\begin{cases}\dfrac{l_{[x]+t}^{i}-\sum_{j:(i,j)\in T}d_{[x]+t}^{ij}}{l_{x}^{i}} & \text{dla} \quad j=i\\ \dfrac{d_{[x]+t}^{ij}}{l_{[x]}^{i}} & \text{dla} \quad (i,j)\in T\\ 0 & \text{dla} \quad (i,j)\notin T\end{cases}. \tag{22}$$

Dowód.

Jeżeli i jest stanem pochłaniającym, to dla każdego $j \in S$ mamy, że $(i, j) \notin T$, więc dla $i \neq j$ mamy, że $p_{ij}(t, t + 1) = 0$. Natomiast dla $i = j$ mamy, że

$$p_{ii}(t,t+1)=\mathrm{IP}(X(t)=i)\cdot\mathrm{IP}(X(t+1)=i\,|\,X(t)=i)=\mathrm{IP}(X(t)=i)=p_i(t).$$

Korzystając z lematu 2, otrzymujemy (21).

Jeśli i jest stanem przejściowym lub ściśle przejściowym, to dla $i = j$ mamy, że

$$p_{ii}(t,t+1)=\mathrm{IP}(X(t)=i)\cdot\mathrm{IP}(X(t+1)=i\,|\,X(t)=i)=\mathrm{IP}(X(t)=i)=p_i(t)\cdot q_{ii}(t).$$

Korzystając z lematu 1 oraz lematu 2, otrzymujemy pierwszą równość (22). Dowód (22) dla $(i, j) \in T$ jest analogiczny do dowodu przypadku, gdy $i = j$. Równość w przypadku, gdy $(i, j) \notin T$, jest oczywista, gdyż bezpośrednie przejście ze stanu i do stanu j nie jest możliwe.

To kończy dowód.

Na podstawie lematu 1-lematu 3 postać macierzy $Q(t)$, $P(t)$ oraz $P(t, t + 1)$ dla ubezpieczenia analizowanego w przykładzie podana została poniżej.

Przykład – cd.

$$Q(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{l_{[x]+t+1}^{1}-\sum_{j=2}^{4}d_{[x]+t}^{1j}}{l_{[x]+t}^{1}} & \dfrac{d_{[x]+t}^{12}}{l_{[x]+t}^{1}} & \dfrac{d_{[x]+t}^{13}}{l_{[x]+t}^{1}} & \dfrac{d_{[x]+t}^{14}}{l_{[x]+t}^{1}}\\ \dfrac{d_{[x]+t}^{21}}{l_{[x]+t}^{2}} & \dfrac{l_{[x]+t+1}^{2}-\sum_{j=1,3,4}d_{[x]+t}^{2j}}{l_{[x]+t}^{2}} & \dfrac{d_{[x]+t}^{23}}{l_{[x]+t}^{2}} & \dfrac{d_{[x]+t}^{24}}{l_{[x]+t}^{2}}\\ 0 & 0 & \dfrac{l_{[x]+t+1}^{3}-d_{[x]+t}^{34}}{l_{[x]+t}^{3}} & \dfrac{d_{[x]+t}^{34}}{l_{[x]+t}^{3}}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$P(t)=\left(\frac{l^1_{[x]+t}}{l^1_x},\quad \frac{l^2_{[x]+t}}{l^2_x},\quad \frac{l^3_{[x]+t}}{l^3_x},\quad \sum\nolimits_{k=0}^{t-1}\left(\frac{d^{14}_{[x]+k}}{l^1_x}+\frac{d^{24}_{[x]+k}}{l^2_x}+\frac{d^{34}_{[x]+k}}{l^3_x}\right)\right)^T,$$

$P(t, t+1) =$

$$=\begin{pmatrix} \frac{l^1_{[x]+t}-\sum\nolimits_{j=2,3,4} d^{1j}_{[x]+t}}{l^1_x} & \frac{d^{12}_{[x]+t}}{l^1_x} & \frac{d^{13}_{[x]+t}}{l^1_x} & \frac{d^{14}_{[x]+t}}{l^1_x} \\ \frac{d^{21}_{[x]+t}}{l^2_x} & \frac{l^2_{[x]+t}-\sum\nolimits_{j=1,3,4} d^{2j}_{[x]+t}}{l^2_x} & \frac{d^{23}_{[x]+t}}{l^2_x} & \frac{d^{24}_{[x]+t}}{l^2_x} \\ 0 & 0 & \frac{l^3_{[x]+t}-d^{34}_{[x]+t}}{l^3_x} & \frac{d^{34}_{[x]+t}}{l^3_x} \\ 0 & 0 & 0 & \sum\nolimits_{k=0}^{t-1}\left(\frac{d^{14}_{[x]+k}}{l^1_x}+\frac{d^{24}_{[x]+k}}{l^2_x}+\frac{d^{34}_{[x]+k}}{l^3_x}\right) \end{pmatrix}.$$

Własnością modeli wielostanowych jest to, że duża liczba zdarzeń losowych objętych umową ubezpieczenia powoduje złożoność modelu. Zapis macierzowy znacznie ułatwia analizę przepływów pieniężnych oraz aplikację teorii w praktyce, dlatego potrzebne do analizy aktuarialnej prawdopodobieństwa przedstawiane są zazwyczaj w postaci macierzy. Przedstawienie elementów tych macierzy za pomocą odpowiednich funkcji wielostanowych tablic trwania życia wskazuje na możliwość zastosowań tego typu modelowania w badaniach nad zagadnieniami dotyczącymi ubezpieczeń indywidualnych i grupowych. Publikacja ta może służyć również pracownikom zakładów ubezpieczeń do obliczania niezbędnych w analizie ubezpieczeń wielkości aktuarialnych oraz do konstrukcji nowych produktów.

Literatura

Billingsley P., *Prawdopodobieństwo i miara*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1987.

Błaszczyszyn B., Rolski T., *Wykłady z matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczna, Warszawa 2004.

Bolesławski L., *Budowa tablic trwania życia*, Seria: Studia i prace statystyczne nr 47, GUS, Warszawa 1973.

Bowers N.L., Gerber H.U., Hichmann J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Illinois 1986.

Chiang C.L., *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*, Nowy Jork 1968.

Dębicka J., *Macierzowa reprezentacja ubezpieczenia wielostanowego z niejednorodnym łańcuchem Markowa*, [w:] *Statystyka aktuarialna – stan i perspektywy rozwoju w Polsce*, W. Ostasiewicz (red.), Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1108, AE, Wrocław 2006.

Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1961.

Haberman S., *Decrement tables and the measurement of morbidity: I*, „Journal of the Institute of Actuaries" 1983a vol. 110.

Haberman S., *Decrement tables and the measurement of morbidity: II*, „Journal of the Institute of Actuaries" 1983b vol. 111.

Haberman S., Pitacco E., *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall/CRC, 1999.

Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa 2000.
Jordan C.W., *Life Contingencies*, The Society of Actuaries, Chicago 1982.
Mattsson P., *Some reflections on different disability models*, „Scandinavian Actuarial Journal" 1997.
Ostasiewicz S. (red.), *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych*, AE, Wrocław 2000.
Publikacje GUS z serii *Trwanie życia i umieralność według przyczyn*.
Stroiński E., *Ubezpieczenie na życie*, Wyższa Szkoła Ubezpieczeń i Bankowości, Warszawa 1996.
Wolthuis H., *Life Insurance Mathematics (The Markovian Model)*, CAIRE Education Series no 2, Bruxelles 1994.

MODELLING OF PROBABILISTIC STRUCTURE OF MULTISTATE INSURANCE CONTRACTS

Summary: Multistate insurance is a contract that covers different life accidents. This type of insurances consists of the core insurance contract (usually it is a life insurance) and a package of additional contracts (so called *options* for example health or disabled insurances). The aim of this paper is to model the probabilistic structure of *multistate model*. Under the assumption that the stochastic process that describes the evolution of the insurance contract is a non-homogeneous Markov chain, we show how to model the probabilistic structure of multistate model by *multiple increment-decrement tables*. The obtained results are applied to the analysis of the life insurance with illness and disabled options.