

AKADEMIA EKONOMICZNA W KATOWICACH

JANUSZ WYWIAŁ

**WERYFIKACJA  
HIPOTEZ O BŁĘDACH  
PREDYKCJI  
ADAPTACYJNEJ**

OSSOLINEUM

AKADEMIA EKONOMICZNA W KATOWICACH

**Janusz Wywiał**

**WERYFIKACJA HIPOTEZ  
O BŁĘDACH PREDYKCJI ADAPTACYJNEJ**

**OSSOLINEUM**

WROCLAW•WARSZAWA•KRAKÓW  
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH  
WYDAWNICTWO 1995

Publikację opiniowali  
Prof. dr hab. Czesław Domański  
Prof. dr hab. Aleksander Zeliaś

Wydanie publikacji finansowane przez Komitet Badań Naukowych

*© Copyright by Zakład Narodowy im. Ossolińskich - Wydawnictwo  
Wrocław 1995  
Printed in Poland*

**ISBN 83-04-04307-6**

Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław  
Oddział w Krakowie 1995  
Objętość: ark. wyd. 6,80 ark. druk. 8,00  
Skład i łamanie tekstu: Agencja Wydawnicza "TRIO", Katowice  
Druk: Drukarnia DRUKROL S.C., Kraków, al. 29 Listopada 46

## SPIS TREŚCI

<b>WSTĘP</b> .....	5
<b>1. OCENA DOKŁADNOŚCI PROGNOZ</b> .....	9
<b>1.1. Podstawowe definicje i oznaczenia</b> .....	9
1.1.1. Predykcja jednowymiarowej cechy .....	9
1.1.2. Predykcja wektora cech .....	12
<b>1.2. Wskaźniki dokładności prognoz</b> .....	17
1.2.1. Klasyczne wskaźniki dokładności ex-post prognoz .....	18
1.2.2. Współczynnik Theila .....	19
1.2.3. Współczynnik janusowy .....	20
1.2.4. Zmodyfikowany współczynnik janusowy .....	22
1.2.5. Skorygowany współczynnik janusowy .....	25
1.2.6. Regresja prognoz względem zmiennej prognozowanej .....	28
1.2.7. Giętkość predyktora .....	32
<b>2. WYBRANE METODY ESTYMACJI TRENDU</b> .....	37
<b>2.1. Założenia o szeregu czasowym</b> .....	37
<b>2.2. Metoda najmniejszych kwadratów</b> .....	38
<b>2.3. Metoda wykorzystująca średnie ruchome</b> .....	40
<b>2.4. Metoda wyrównywania wykładniczego</b> .....	44
<b>2.5. Metoda trendu pelzającego</b> .....	46
<b>2.6. Metoda regresji nieparametrycznej</b> .....	49
<b>2.7. Weryfikacja hipotezy o występowaniu trendu liniowego</b> .....	50
2.7.1. Test Tietjena-Moora .....	51
2.7.2. Test na stałość nadziei matematycznych ciągu zmiennych losowych .....	54
<b>2.8. Weryfikacja hipotezy o występowaniu wahań cyklicznych</b> .....	55
<b>2.9. Testowanie zgodności postulowanego modelu trendu z rzeczywistym trendem</b> ...	58
<b>3. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI WYBRANYCH PREDYKTORÓW</b> .....	61
<b>3.1. Średnie ruchome</b> .....	61
<b>3.2. Prognozowanie poprzez ekstrapolację trendu liniowego</b> .....	64
<b>3.3. Metoda wyrównywania wykładniczego</b> .....	66
<b>3.4. Prognozowanie metodą wag harmoniczych</b> .....	68
<b>3.5. Test-predyktory</b> .....	69
<b>4. WERYFIKACJA HIPOTEZ O NIEOBCIĄŻONOŚCI PREDYKCJI</b> .....	73
<b>4.1. Nieobciążoność pojedynczej prognozy</b> .....	73
4.1.1. Testowanie na podstawie reszt modelu trendu .....	73
4.1.2. Testy wykorzystujące wcześniej obserwowane błędy predykcji .....	78
<b>4.2. Weryfikacja hipotezy o nieobciążoności ciągu prognoz</b> .....	81

4.2.1. Testowanie za pomocą współczynnika janusowego i jego modyfikacji.....	81
4.2.2. Iloraz form kwadratowych błędów predykcji i reszt funkcji wygładzającej błędy predykcji .....	84
4.2.3. Modyfikacja statystyki Bartletta .....	88
4.2.4. Przykłady weryfikacji nieobciążoności predyktorów .....	89
<b>4.3. Weryfikacja hipotezy o równoważności dwóch predyktorów .....</b>	<b>100</b>
<b>4.4. Testowanie nieobciążoności prognozy wektorowej .....</b>	<b>106</b>
<b>5. DODATEK. ROZKŁADY ZALEŻNYCH FORM KWADRATOWYCH .....</b>	<b>113</b>
<b>5.1. Reprezentacje form kwadratowych .....</b>	<b>113</b>
<b>5.2. Momenty form kwadratowych .....</b>	<b>114</b>
<b>5.3. Momenty ilorazu dwóch form kwadratowych .....</b>	<b>115</b>
<b>5.4. Dystrybuanta rozkładu ilorazu dwóch form kwadratowych .....</b>	<b>116</b>
<b>5.5. Metody przybliżonego obliczania dystrybuanty formy kwadratowej .....</b>	<b>120</b>
<b>5.6. Warunki niezależności formy kwadratowej i formy liniowej wektora losowego .....</b>	<b>121</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>122</b>
<b>SUMMARY .....</b>	<b>127</b>

## WSTĘP

W praktyce badań statystycznych mamy często do czynienia z potrzebą krótkookresowego prognozowania niestacjonarnych szeregów czasowych. Tego typu zagadnienia pojawiają się np. przy analizach związanych z rynkiem kapitałowym, a w szczególności z problemami prognozowania kursów walutowych lub cen akcji. Występują tutaj jednak kłopoty przy konstrukcji prognoz, gdy trend analizowanego szeregu czasowego zmienia niespodziewanie kierunek. Wtedy stosuje się specjalne procedury prognozowania zwane adaptacyjnymi, co oznacza, że mają one własność dynamicznego przystosowywania się do zmian kierunków trendu w sensie szybkiego spadku błędów prognozowania po wystąpieniu takiej nieprzewidzianej zmiany.

Głównym celem pracy jest zastosowanie odpowiednich testów statystycznych do wspomaganie analizy jakości procedur prognozowania oraz racjonalnego wyboru jednej spośród nich. Jakość predyktora jest głównie badana z punktu widzenia obciążoności otrzymywanych za jego pomocą prognoz. Uważa się, że predyktor daje nieobciążoną prognozę na dany okres, gdy wartość oczekiwana błędu predykcji jest równa zeru. Własność ta jest weryfikowana za pomocą odpowiednio konstruowanych testów. Weryfikowane są również hipotezy o nieobciążoności ciągu kolejno otrzymywanych prognoz. Do tego celu są przeznaczane testy statystyczne, których sprawdzianami są ilorazy dwóch odpowiednich form kwadratowych wektorów obserwacji zmiennej. Zwykle w liczniku znajduje się forma kwadratowa wektora błędów predykcji, a w mianowniku forma kwadratowa reszt trendu. Wówczas hipotezę o nieobciążoności błędów predykcji odrzuca się, gdy wartość sprawdzianu jest istotnie duża. Kłopot polega na tym, że brane pod uwagę sprawdziany są ilorazami form kwadratowych, które są od siebie zależne. Wówczas rozkład takiego ilorazu bynajmniej nie jest znanym rozkładem Fishera-Snedecora. Rozkład ten ma skomplikowane funkcje gęstości i dystrybuanty, bo zwykle da się je tylko przedstawić w postaci odpowiednich szeregów nieskończonych lub wyrażeń całkowitych. Po to, by obliczać wartości dystrybuanty tych sprawdzianów należy używać odpowiednich metod numerycznych.

Pierwszy rozdział pracy jest poświęcony podstawowym wiadomościom z dziedziny predykcji. Znajdziemy tu m.in. pewne rozważania dotyczące oceny dokładności predyktorów wektorowych, wykorzystujące własności macierzy wariancji i kowariancji wektora błędów predykcji. Ponadto szeroko są analizowane własności znanego wskaźnika janusowego, który jest używany do oceny przydatności predyktora z punktu widzenia wielkości błędów predykcji jakie były popełnione przy jego stosowaniu. Wprowadza się tu pewne modyfikacje tego wskaźnika. W końcu analizowany jest szeroko problem giętkości predyktora. Badano tu również rozkład współczynnika janusowego i jego mutacji, który sprowadza się do rozkładu

opisywanego już wyżej ilorazu dwóch form kwadratowych wektora o sferycznym wielowymiarowym rozkładzie normalnym.

Metody wyznaczania trendu szeregu czasowego są prezentowane w drugim rozdziale. Reszty trendów zapisywano jako liniowe funkcje obserwacji zmiennej. Przedstawiono tu również wybrane zagadnienia testowania zgodności ocen trendów z rzeczywistym przebiegiem trendu. Do tego celu wykorzystywano sprawdziany będące funkcją wektora reszt. Reszty wyznaczanych trendów są wykorzystywane do oceny wariancji składnika losowego trendu, względem której są porównywane formy kwadratowe błędów predykcji, a wśród nich tzw. wariancji predykcji ex-post. Treść tego rozdziału ma charakter pomocniczy zwłaszcza w stosunku do czwartego rozdziału dotyczącego już szczegółów weryfikacji hipotez o błędach predykcji.

Prezentację wybranych procedur prognozowania adaptacyjnego znajdujemy w trzecim rozdziale. Wyprowadzono podstawowe własności rozkładu wektorów błędów predykcji. Przedstawiono również tzw. test-predyktory, czyli procedury prognozowania, których parametry ustala się na bieżąco w zależności od wyników weryfikacji hipotezy o nieobciążoności wcześniej sformułowanych prognoz.

Czwarty rozdział jest najważniejszym z punktu widzenia celu realizowanej pracy. Tu właśnie są formułowane hipotezy o nieobciążoności pojedynczej prognozy bądź ciągu prognoz. Następnie są konstruowane sprawdziany testów jako ilorazy odpowiednio określanych form kwadratowych. Niektóre z nich są funkcjami wcześniej analizowanego współczynnika janusowego bądź jego modyfikacji. Inne sprawdziany są ilorazami formy kwadratowej wektora błędów predykcji przez formę kwadratową reszt powstałych przy „wygładzaniu” ciągu błędów predykcji. Rozkłady większości z analizowanych sprawdzianów należy wyznaczać za pomocą odpowiednich metod, które są prezentowane w Dodatku do pracy stanowiącym ostatnią jej część. Do testowania sformułowanych hipotez sugerowano również wykorzystać nieparametryczne testy, których szeroki przegląd można znaleźć w pracy Domańskiego (1979, 1990). Wielką zaletą tych testów jest to, iż nie wymagają one założenia o normalności rozkładu zmiennych tworzących szereg czasowy.

Treść Dodatku do pracy zawiera opis metod analizy rozkładu form kwadratowych wektorów o rozkładzie normalnym niekoniecznie sferycznym lub nieosobliwym. Zamieszczone tu wiadomości pochodzą z pracy Mathai i Provosta (1992). W szczególności przedstawiono metody wyznaczania momentów takich form kwadratowych. Opisano wybrane sposoby reprezentacji rozkładu prawdopodobieństwa formy kwadratowej wektora losowego o rozkładzie normalnym. Przedstawiono także wybrane sposoby reprezentacji dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa ilorazu takich form kwadratowych i niektóre sposoby aproksymacji wartości tej dystrybuanty.

Większość otrzymanych wyników pracy może być wykorzystana przy krótko-terminowym prognozowaniu za pomocą analizowanych procedur. Otrzymane tutaj rezultaty winny ułatwić racjonalny wybór predyktora. Opisane metody będą przydatne tam, gdzie mamy do czynienia z prognozowaniem niestacjonarnych szeregów czasowych. W szczególności powinny one m.in. wzbogacić metodologię tzw. analizy technicznej kursów akcji, walut itp.

Większość wykorzystywanych w pracy do celów podniesienia jakości predykcji testów statystycznych wymaga ostrych założeń o badanym szeregu czasowym. Postuluje się, aby zmienne losowe tworzące szereg czasowy były niezależne i aby każda z nich miała rozkład normalny o tej samej wariancji. Wprawdzie w przypadku dostatecznie długich szeregów czasowych można te założenia próbować weryfikować za pomocą odpowiednich testów statystycznych, co jest rzeczą co najmniej uciążliwą. W tej sytuacji można wykorzystać testy nieparametryczne, których stosowanie nie wymaga już, by te zmienne miały normalny rozkład prawdopodobieństwa. Wydaje się więc, że w tym kierunku można rozwijać zagadnienie wspomagania procesu konstrukcji prognoz poprzez weryfikację hipotez o błędach predykcji za

pomocą jeszcze innych testów nieparametrycznych od tych, które już do tego celu adaptowano w niniejszej pracy.

Konstruowane w pracy metody analizy jakości predykcji można także rozwijać z innego punktu widzenia. W wielu przypadkach będzie to tylko polegało na uwzględnieniu innych predyktorów w skonstruowanych już ogólnych procedurach weryfikacji dokładności stawianych prognoz.

W niniejszej pracy był podejmowany tylko wycinek problemu konstrukcji prognoz statystycznych. Sugerowane tu procedury postępowania mają być przyczynkiem do podniesienia trafności prognozowania niestacjonarnych szeregów czasowych. Nie ujęte zagadnienia można znaleźć w innych pracach. Problemy podstaw prognozowania ilościowego są wykładane m.in. w pracach Chowa (1995), Cieślak i in. (1993), Czerwińskiego i Guzika (1980), Hellwiga (1973), Pawłowskiego (1973, 1974, 1982), Theila (1961, 1966) i Zelasia (1984). Z kolei szczególnie zagadnienia prognozowania jak predykcja na podstawie danych przekrojowo-czasowych była podejmowana m.in. w pracach Bolfarina i Zacksa (1992), Grabińskiego, Maliny i Zelasia (1990). Problem prognozowania zjawisk przestrzennych był podejmowany przez Cressiego (1993), Grabińskiego i in. (1979, 1983). Zmianami w czasie wartości parametrów strukturalnych modeli ekonometrycznych zajmowali się m.in. Kudrycka (1984) i Zeliaś (1979). Milo (1992,1995) zajmuje się stabilnością i wrażliwością predyktorów. Zagadnienie prognozowania na podstawie modeli autoregresyjnych było analizowane m.in w pracach Boxa i Jenkinsa (1983) oraz Talagi i Zielińskiego (1986).

Wiele cennych uwag dotyczących treści i formy tej pracy przekazali mi profesorzy Czesław Domański i Aleksander Zeliaś za co im bardzo dziękuję.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr IP 11004306 pod tytułem *Weryfikacja hipotez o błędach prognozowania adaptacyjnego* finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.



## 1. OCENA DOKŁADNOŚCI PROGNOZ

W niniejszym rozdziale prezentujemy tylko te spośród ogólnie znanych własności procedur prognozowania, które będą przydatne w dalszej analizie, a zwłaszcza zagadnienia weryfikacji hipotez o błędach predykcji.

### 1.1. Podstawowe definicje i oznaczenia

#### 1.1.1. Predykcja jednowymiarowej cechy

Przedmiotem niniejszej analizy jest proces stochastyczny  $\{Y_1, \dots, Y_{m+n}\}$  charakteryzujący się następującymi parametrami:

$$E(Y_t) = \mu_t, D^2(Y_t) = \sigma_t^2, Cov(Y_t Y_{t+\tau}) = c_{t,\tau}$$

gdzie  $t = 1, \dots, n + m$ . W szczególności będą brane pod uwagę następujące modele:

Model A: składowe ciągu  $\{Y_t\}$  mają wielowymiarowy i nieosobliwy rozkład normalny:

$$\bigwedge_{t=1, \dots, m} \sigma_t^2 = \sigma^2 \quad \text{i} \quad \bigwedge_{\substack{t=1, \dots, n+m \\ \tau=1, \dots, n+m-1}} c_{t,\tau} = \sigma^2 \rho_\tau \quad (1.1)$$

gdzie  $\rho_\tau$  jest nazywany współczynnikiem autokorelacji rzędu  $\tau$ . Proces ten charakteryzuje się więc stacjonarnością wariancji i współczynników autokorelacji. Te ostatnie są zależne tylko od różnicy okresów  $\tau$ . Dopuszcza się więc tylko możliwość niestacjonarności nadziei matematycznej. Zwykle będziemy zakładać, że ciąg okresów (bądź momentów) czasowych  $t=1, \dots, n+m$  dzieli się na podciągi  $\{t_i\} = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_{m_i}}\}$ , gdzie  $1 \leq m_i \leq n$   $i=0, \dots, g \leq n+m$  oraz  $m_0=n$ , w których nadzieje matematyczne są stacjonarne, bądź ich wartości zmieniają się liniowo.

Model B. W stosunku do modelu A dodatkowo zakładamy, że:

$$\bigwedge_{\substack{t=1, \dots, n+m \\ t=1, \dots, n+m-1}} rc_{t,t} = 0 \quad (1.2)$$

Niech  $Y_T$  będzie zmienną losową, której wartość jest prognozowana w okresie T-tym, przy czym  $m \geq T > n > 1$ . Zadanie polega na ocenie wartości zmiennej  $Y_T$  ( $T=n+1, \dots, n+m$ ) na podstawie wartości dotychczas obserwowanych zmiennych  $Y_1, \dots, Y_n$ . Pawłowski (1973, s. 15) przez predykcję (ekonometryczną) rozumie „ogół zasad i metod wnioskowania w przyszłość na podstawie odpowiedniego modelu ekonometrycznego natomiast konkretny wynik tego procesu wnioskowania” nazywa mianem prognozy badanej zmiennej. Pawłowski (1973, 1982) podaje również definicję predyktora, której podstawą jest pojęcie modelu ekonometrycznego<sup>1</sup>. Z racji tego, że przedmiotem niniejszej pracy bynajmniej nie są podstawy teorii prognozowania będziemy posługiwać się uproszczonym pojęciem predyktora, które definiujemy następująco: Predyktorem wartości zmiennej  $Y_T$  jest każda statystyka  $Y_{TP}=f(Y_1, \dots, Y_n)$ , która jest funkcją wcześniej obserwowanych zmiennych losowych  $Y_1, \dots, Y_n$ . Wartość  $y_{TP}$  predyktora  $Y_{TP}$  jest prognozą wartości  $y_T$  zmiennej  $Y_T$ .

Przedstawione określenie jest w pewnym sensie bliskie definicji predyktora parametru tzw. nadpopulacji wprowadzane m.in. przez Cassela, Sarndala i Wretmana (1977) oraz Bolfarine'a i Zacksa (1992).

Błąd prognozy określa wzór:

$$U_T = Y_T - Y_{TP} \quad (1.3)$$

Wartość oczekiwana tego błędu jest nazywana obciążeniem predykcji bądź predyktora<sup>2</sup>:

$$\Delta_T = E(U_T) = \mu_T - \delta_T \quad (1.4)$$

przy czym:

$$\delta_T = E(Y_{TP})$$

Predyktor jest nieobciążony<sup>3</sup> gdy  $\Delta_T = 0$  i wtedy mówimy, że stawiana prognoza nie jest obciążona błędem systematycznym. Z kolei gdy  $\Delta_T \neq 0$ , to przy predykcji występuje błąd systematyczny.

Wariancję ex-ante błędu predykcji można zdekomponować w następujący sposób:

$$D^2(U_T) = D^2(Y_T) + 2 \text{Cov}(Y_T, Y_{TP}) + D^2(Y_{TP}) \quad (1.5)$$

gdzie  $D^2(Y_{TP})$  jest wariancją predyktora,  $D^2(Y_T)$  jest wariancją zmiennej prognozowanej i  $\text{Cov}(Y_T, Y_{TP})$  jest kowariancją zmiennej prognozowanej i jej predyktora.

Błąd średnio-kwadratowy predykcji ex-ante ma postać<sup>4</sup>:

$$V_{SR}(U_T) = E(U_T^2) = D^2(U_T) + \Delta_T^2 \quad (1.6)$$

<sup>1</sup> Por. także poglądy na problem definicji pojęcia: predykcji, predyktora i prognozy m.in. autorów Czerwińskiego i Guzika (1980), Hellwiga (1973), Waszkiewicz (1976), Zeliasia (1979).

<sup>2</sup> Por. również definicję nieobciążoności predyktora w pracy Cassela i in. (1977).

<sup>3</sup> Por. np. Pawłowski (1973).

<sup>4</sup> Tamże.

Pierwiastek z błędu średniokwadratowego predykcji jest oceną przeciętnego rzędu spodziewanego odchylenia prognozy od wartości zmiennej prognozowanej. W szczególności gdy predyktor jest nieobciążony, to:

$$V_{SR}(U_T) = D^2(U_T)$$

Podobnie jak w przypadku estymacji parametrów populacji<sup>5</sup> będziemy mówili, że wariancja błędu predykcji mierzy precyzję predykcji, natomiast błąd średniokwadratowy dokładność predykcji. Zatem mimo dużej precyzji predykcji jej błąd może być duży, jeśli występuje znaczne obciążenie predykcji.

Względny błąd średni predykcji ex-ante określa wzór postaci:

$$\gamma(U_T) = \frac{\sqrt{V_{SR}(U_T)}}{E(Y_T)} \quad (1.7)$$

Niech  $\mathbf{U}=[U_{n+1} \dots U_{n+m}]$  będzie wektorem błędów predykcji z okresów  $T=n+1, \dots, n+m$ . Przez  $\mathbf{Y}_p=[Y_{n+1,p} \dots Y_{n+m,p}]$  oznaczony jest wektor predyktorów. W końcu niech  $\mathbf{Y}=[\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_m]$ , gdzie  $\mathbf{Y}_n=[Y_1 \dots Y_n]$ ,  $\mathbf{Y}_m=[Y_{n+1} \dots Y_{n+m}]$ . Zatem:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Y}_m - \mathbf{Y}_p \quad (1.8)$$

Zakładamy, że prognozy są obliczane zgodnie z zasadą (regułą) predykcji nieobciążonej. Oznacza to, że jeśli np. predyktor jest konstruowany na podstawie estymatora trendu dla okresów  $t=1, \dots, n$ , z których pochodzą dane oraz gdy w okresach  $t=n+1, \dots, n+m$  postać analityczna trendu nie zmienia się, to jego ekstrapolacja na okresy prognozowane stanowi właśnie regułę (zasadę) predykcji nieobciążonej<sup>6</sup>.

Będziemy mówili, że predyktor  $Y_{TP}^{(1)}$  daje dokładniejsze prognozy na okres T-ty niż predyktor  $Y_{TP}^{(2)}$ , jeśli  $V_{SR}(Y_{TP}^{(1)}) < V_{SR}(Y_{TP}^{(2)})$ .

Ocena błędu średniokwadratowego ma kluczowe znaczenie bowiem pozwala stwierdzić, czy budowane prognozy są dopuszczalne w sensie nieprzekroczenia przez ten błąd założonego z góry poziomu. Wartości oczekiwane określonych wektorów oznaczamy następująco:

$$\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{Y}); \boldsymbol{\mu}_n = E(\mathbf{Y}_n); \boldsymbol{\mu}_m = E(\mathbf{Y}_m); \boldsymbol{\delta} = E(\mathbf{Y}_p); \boldsymbol{\Delta} = E(\mathbf{U}); \text{czyli } \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\mu}_m - \boldsymbol{\delta}$$

Macierze wariancji i kowariancji tych wektorów oznaczamy następująco:

$$\mathbf{V}(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}))^T (\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})) = \boldsymbol{\Sigma}$$

<sup>5</sup> Por. np. Jessen (1978).

<sup>6</sup> Por. np. Pawłowski (1973) lub Cieślak i in. (1993), s. 41.

przy czym:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{nn} & \Sigma_{nm} \\ \Sigma_{mn} & \Sigma_{mm} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{Y}_n) &= \Sigma_{nn}, & \mathbf{V}(\mathbf{Y}_m) &= \Sigma_{mm} \\ \mathbf{V}(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_m) &= \Sigma_{nm} = \Sigma_{mn}^T \\ \mathbf{V}(\mathbf{Y}_p) &= \Sigma_{pp} \\ \mathbf{V}(\mathbf{U}) &= \Sigma_{mm} \cdot \Sigma_{mP} - \Sigma_{Pm} + \Sigma_{PP} \end{aligned} \quad (1.10)$$

gdzie:

$$\Sigma_{mP} = \mathbf{V}(\mathbf{Y}_m, \mathbf{Y}_p) = \Sigma_{Pm}^T \quad (1.11)$$

Macierz drugich momentów zwykłych wektora błędów predykcji zapisujemy wzorem postaci:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{U}) = \mathbf{E}(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) = \mathbf{V}(\mathbf{U}) + \Delta^T \Delta \quad (1.12)$$

Predyktory pozwala porządkować następujące określenie: Predyktor  $Y_{Tp}^{(1)}$  jest nie gorszy od predyktora  $Y_{TP}^{(2)}$  w okresach  $T=n+1, \dots, n+m$ , gdy<sup>7</sup>:

$$\bigwedge_{t=n+1, \dots, n+m} V_{SR}(Y_{Tp}^{(1)}) \leq V_{SR}(Y_{TP}^{(2)}) \quad (1.13)$$

Predyktor  $Y_{Tp}^{(1)}$  jest lepszy od predyktora  $Y_{TP}^{(2)}$  w okresach  $T=n+1, \dots, n+m$ , jeżeli jedna z powyższych nierówności jest ostra.

### 1.1.2. Predykcja wektora cech

Zagadnieniem prognozowania wektora cech zajmowali się m.in. Lutkepohl (1993), Pawłowski (1982), Stolarska (1987) i Zeliaś (1984). Wprowadzone wcześniej pojęcia można uogólnić na przypadek prognozowania wektora cech. Niech:  $\mathbf{Y}=[Y_{ij}]$ , jest macierzą o wymiarach  $k \times (m+n)$  zmiennych losowych, którą w sposób blokowy zapisujemy następująco:  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_n \ \mathbf{Y}_m]$ , gdzie  $\mathbf{Y}_n = [Y_{ij}]$ ,  $\mathbf{Y}_m = [Y_{ih}]$ , przy czym  $i=1, \dots, k$ ,  $j=1, \dots, n$ ,  $h=n+1, \dots, n+m$ . Inne

zapisy macierzy  $\mathbf{Y}$  są postaci:  $\mathbf{Y}=[\mathbf{Y}_{*1} \dots \mathbf{Y}_{*(n+m)}]$ , gdzie:  $\mathbf{Y}_{*j}^T = [Y_{1j} \dots Y_{kj}]$ ,  $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1*} \\ \dots \\ \mathbf{Y}_{k*} \end{bmatrix}$ , gdzie:

<sup>7</sup>Por. sposób porządkowania predyktorów wprowadzony np. przez Cassela i in. (1977).

$\mathbf{Y}_{i^*}=[Y_{i1}\dots Y_{in} \ Y_{i,n+1}\dots Y_{i,n+m}]$ . Predyktor wektora zmiennych  $\mathbf{Y}_{*j}$  oznaczamy przez  $\mathbf{Y}_{*j,p}=\mathbf{f}(\mathbf{Y}_{*j-1},\dots,\mathbf{Y}_{*1})$ , przy czym:

$$\mathbf{Y}_{*j,p} = \begin{bmatrix} Y_{ij,p} \\ \dots \\ Y_{kij,p} \end{bmatrix}, j = n + 1, \dots, n + m$$

Macierz takich predyktorów oznaczamy  $\mathbf{Y}_p=[Y_{ij,p}]$  o wymiarach  $k \times m$ , przy czym  $j=n+1,\dots,n+m$ . Macierz błędów predykcji  $\mathbf{U}=\mathbf{Y}_m-\mathbf{Y}_p$  można więc zapisać wzorem postaci:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Y}_m - \mathbf{Y}_p \quad (1.14)$$

Przyjmijmy także, iż  $\mathbf{U}=[\mathbf{U}_{*n+1}\dots\mathbf{U}_{*n+m}]$ , gdzie:  $\mathbf{U}_{*j} = \mathbf{Y}_{*j} - \mathbf{Y}_{*j,p}$ , lub

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1*} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{U}_{k*} \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \mathbf{U}_{i*} = \mathbf{Y}_{i*} - \mathbf{Y}_{i*,p}$$

Zakładamy, że wektory kolumnowe tworzące macierz  $\mathbf{Y}=[\mathbf{Y}_{*1}\dots\mathbf{Y}_{*n+m}]$  są niezależne i każdy z nich ma nieosobliwy  $k$ -wymiarowy rozkład normalny, a zatem:

$$\bigwedge_{j=n+1,\dots,n+m} \mathbf{Y}_{*j} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{*j}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (1.15)$$

Przekształćmy macierz  $\mathbf{Y}=[\mathbf{Y}_{*1}\dots\mathbf{Y}_{*n}\dots\mathbf{Y}_{*n+1}\dots\mathbf{Y}_{*n+m}]$  w wektor postaci:

$$\mathbf{Y}_{\#} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{*1} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{Y}_{*n} \\ \mathbf{Y}_{*n+1} \\ \mathbf{L} \\ \mathbf{Y}_{*n+m} \end{bmatrix}$$

Wtedy  $\mathbf{Y}_{\#} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\#}, \boldsymbol{\Sigma}_{\#})$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\mu}_{\#} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{*1} \\ \mathbf{L} \\ \boldsymbol{\mu}_{*n+m} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\Sigma}_{\#} = \mathbf{I}_{n+m} \otimes \boldsymbol{\Sigma}$$

przy czym  $\mathbf{I}_{n+m}$  jest macierzą jednostkową stopnia  $n+m$ , natomiast  $\otimes$  jest tzw. iloczynem macierzy Kroneckera, a zatem:

$$\Sigma_{\#} = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{0} & K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma & K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & K & \Sigma \end{bmatrix}$$

przy czym przez  $\mathbf{0}$  oznaczono macierz zerową o wymiarach  $k \times k$ .

Przyjmijmy, że  $\mathbf{Y}_{\#} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{\#n} \\ \mathbf{Y}_{\#m} \end{bmatrix}$ , gdzie  $\mathbf{Y}_{\#n} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{*1} \\ \dots \\ \mathbf{Y}_{*n} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{Y}_{\#m} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{*n+1} \\ \dots \\ \mathbf{Y}_{*n+m} \end{bmatrix}$ . Wtedy

$\mathbf{Y}_{\#n} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\#n}, \mathbf{I}_n \otimes \Sigma)$ ,  $\mathbf{Y}_{\#m} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\#m}, \mathbf{I}_m \otimes \Sigma)$ .

Podobnie jak macierz  $\mathbf{Y}$  przekształcono w wektor  $\mathbf{Y}_{\#}$  teraz macierz  $\mathbf{Y}_p$  przekształcamy w wektor  $\mathbf{Y}_{\#p}$ , który ma postać:

$$\mathbf{Y}_{\#p} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{*1p} \\ \dots \\ \mathbf{Y}_{*mp} \end{bmatrix}$$

Wtedy  $\mathbf{Y}_{\#p} \sim N(\boldsymbol{\delta}_{\#}, \Sigma_{pp})$ .

Zamiast macierzy wektorów błędów  $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_{*n+1} \dots \mathbf{U}_{*n+m}]$  analizujemy wektor postaci:

$$\mathbf{U}_{\#} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{*n+1} \\ \dots \\ \mathbf{U}_{*n+m} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{\#m} - \mathbf{Y}_{\#p} \quad (1.16)$$

Wtedy:

$$\mathbf{U}_{\#} \sim N(\Delta_{\#}, \Sigma_{UU}),$$

gdzie:

$$\Delta_{\#} = \boldsymbol{\mu}_{\#m} - \boldsymbol{\delta}_{\#}$$

$$\Sigma_{UU} = \mathbf{I}_m \otimes \Sigma - \Sigma_{mp} - \Sigma_{pm} + \Sigma_{pp} \quad (1.17)$$

przy czym:

$$\Sigma_{mp} = E(\mathbf{Y}_{\#m} - \boldsymbol{\mu}_{\#m})(\mathbf{Y}_{\#p} - \boldsymbol{\delta}_{\#}), \Sigma_{pm} = \Sigma_{mp}^T \quad (1.18)$$

Macierz błędów średniokwadratowych predykcji ma więc postać:

$$\mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{\#}) = \Sigma_{uu} + \Delta_{\#} \Delta_{\#}^T \quad (1.19)$$

Zatem jeśli predykcja jest nieobciążona, to:

$$\mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{\#}) = \Sigma_{uu}$$

W szczególności błąd predykcji  $\mathbf{U}_{*j} \sim N(\Delta_{*j}, \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*j}))$ , gdzie:

$$\Delta_{*j} = \boldsymbol{\mu}_{*j} - \boldsymbol{\delta}_{*j} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{U}_{*j}) = \mathbf{V}(\mathbf{Y}_{*j} - \mathbf{Y}_{*jp})$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{U}_{*j}) = \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{V}(\mathbf{Y}_{*j}; \mathbf{Y}_{*jp}) - \mathbf{V}(\mathbf{Y}_{*jp}; \mathbf{Y}_{*j}) + \mathbf{V}(\mathbf{Y}_{*jp}) \quad (1.21)$$

Wtedy także mamy:

$$\mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{*j}) = \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*j}) + \boldsymbol{\Delta}_{*j} \boldsymbol{\Delta}_{*j}^T \quad (1.22)$$

Na głównej przekątnej macierzy  $\mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{*j})$  znajdujemy więc błędy średniokwadratowe predykcji poszczególnych zmiennych tworzących wektor  $\mathbf{Y}_{*j}$ ; dla  $j > n$ .

Przypuśćmy, że celem predykcji jest kombinacja liniowa zmiennych postaci:

$$\mathbf{Z}_T = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{Y}_{*T} \quad (1.23)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\alpha}^T = [\alpha_1 \dots \alpha_k]$$

Do predykcji można więc użyć następującej statystyki:

$$\mathbf{Z}_{Tp} = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{Y}_{*Tp} \quad (1.24)$$

Wtedy  $\mathbf{Z}_{Tp} \sim N(\delta_{ZT}, D^2(\mathbf{Z}_{Tp}))$ , gdzie:

$$\delta_{ZT} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\delta}_{*T} \quad (1.25)$$

$$D^2(\mathbf{Z}_{Tp}) = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{V}(\mathbf{Y}_{*jp}) \boldsymbol{\alpha} \quad (1.26)$$

Błąd predykcji kombinacji ma postać:

$$\mathbf{U}_{ZT} = \mathbf{Z}_T - \mathbf{Z}_{Tp} \quad (1.27)$$

$$\mathbf{U}_{ZT} = \boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{Y}_{*T} - \mathbf{Y}_{*Tp}) \quad (1.28)$$

Wtedy:  $\mathbf{U}_{ZT} \sim N(\Delta_{ZT}; D^2(\mathbf{U}_{ZT}))$ , gdzie:

$$\Delta_{ZT} = \boldsymbol{\alpha}^T (\boldsymbol{\mu}_{*T} - \boldsymbol{\delta}_{*T}) = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Delta}_{*T} \quad (1.29)$$

$$D^2(\mathbf{U}_{ZT}) = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T}) \boldsymbol{\alpha} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{ZT}) = D^2(\mathbf{U}_{ZT}) + (\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Delta}_{*T})^2 \quad (1.31)$$

Przypuśćmy, że wektor wag  $\boldsymbol{\alpha}$  nie jest znany lecz spełnia warunek  $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = 1$ . Wówczas ze znanych twierdzeń o wartościach własnych macierzy wynika, że:

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = 1} \left\{ \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T}) \boldsymbol{\alpha} \right\} = \boldsymbol{\alpha}_0^T \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T}) \boldsymbol{\alpha}_0 = \lambda_{1T} \quad (1.32)$$

Przez  $\lambda_{1T}$  oznaczono maksymalną wartość własną macierzy wariancji i kowariancji błędów predykcji  $\mathbf{U}_{*T}$ . Wariancja predyktora  $Z_{TP}$  przyjmuje więc maksymalną wartość, gdy wektor wag  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$  i  $\boldsymbol{\alpha}_0^T \boldsymbol{\alpha}_0 = 1$ . Zatem wektor  $\boldsymbol{\alpha}_0$  jest najmniej korzystnym systemem wag z punktu widzenia wariancji predykcji. Wynik ten ma ważne znaczenie praktyczne, ponieważ umożliwia ocenę dopuszczalności prognoz kombinacji liniowej  $Z_T = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{Y}_{*T}$  nawet wtedy, gdy wektor wag  $\boldsymbol{\alpha}$  nie jest znany lecz spełnia warunek  $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = 1$ .

W wielu praktycznych zagadnieniach trudno żądać by wektor wag spełniał warunek  $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = 1$ . Przypuśćmy, że warunek ten nie jest spełniony, wówczas zamiast wariancji błędu predykcji  $U_{ZT}$  można analizować względny wskaźnik zróżnicowania błędów predykcji, który określamy następująco:

$$\gamma^2(U_{ZT}/\boldsymbol{\alpha}) = \frac{D^2(U_{ZT})}{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}} \quad (1.33)$$

Wskaźnik  $\gamma(U_{ZT}/\boldsymbol{\alpha})$  można nazwać współczynnikiem zmienności błędu predykcji względem wektora wag  $\boldsymbol{\alpha}$ . Liczba  $\gamma 100\%$  wskazuje jaki procent długości  $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}}$  wektora wag  $\boldsymbol{\alpha}$  stanowi odchylenie standardowe błędu predykcji  $D(U_{ZT})$ . Niech  $\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}}}$ , wówczas współczynnik  $\gamma(U_{ZT}/\boldsymbol{\alpha})$  można zastąpić przez  $\gamma(U_{ZT}/\boldsymbol{\beta})$ , który ma postać:

$$\gamma^2(U_{ZT}/\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T}) \boldsymbol{\beta} \quad (1.34)$$

Przy czym  $\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\beta} = 1$ . Podobnie jak to miało miejsce w przypadku wzoru (1.32) dochodzimy do wniosku, że:

$$\lambda_{1T} = \boldsymbol{\beta}_0^T \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T}) \boldsymbol{\beta}_0 = \text{maximum} \{ \gamma^2(U_{ZT}/\boldsymbol{\beta}) \} \quad (1.35)$$

$$\boldsymbol{\beta}_0^T \boldsymbol{\beta}_0 = 1$$

gdzie:  $\lambda_{1T}$  jest maksymalną wartością własną macierzy wariancji kowariancji  $\mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T})$ . Z kolei z równania  $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}}} = \boldsymbol{\beta}_0$  równoważnym równaniu  $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta}_0)^2$  wyznaczamy najmniej korzystne

wektory  $\boldsymbol{\alpha}_0$ , dla których określony wzorem (1.33) względny wskaźnik zróżnicowania błędów prognoz przyjmuje najmniej pożądaną maksymalną wartość.

Dodajmy, że jeśli prognozowane zmienne są wyrażone w tych samych jednostkach, to do oceny dokładności predykcji wektora  $\mathbf{Y}_{*T}$  można zalecić średniokwadratowy promień predykcji definiowany następująco:

$$\rho_{SR}^2(\mathbf{U}_{*T}) = \text{tr} \mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{*T}) \quad (1.36)$$

Ze wzoru (1.22) wynika więc, że:

$$\rho_{SR}^2(\mathbf{U}_{*T}) = \rho^2(\mathbf{U}_{*T}) + \sum_{i=1}^k \Delta_{iT}^2 \quad (1.37)$$

gdzie:



$$\rho^2(\mathbf{U}_{*T}) = \text{tr} \mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T}) = \sum_{i=1}^k D^2(U_{iT}) \quad (1.38)$$

$$\Delta_{iT} = \mu_{iT} - \delta_{i,T} = E(U_{iT}) \quad (1.39)$$

Parametr  $\rho_{SR}(\mathbf{U}_{*T})$  określa średnią odległość wartości predyktora wektorowego (czyli prognozy wektorowej)  $\mathbf{Y}_{*T,P}$  od realizacji wektora prognozowanego  $\mathbf{Y}_{*T}$ .

Następnym parametrem umożliwiającym ocenę dokładności prognozy wektorowej jest wyznacznik z macierzy błędów średniokwadratowych, który oznaczamy następująco:

$$g_{SR}(\mathbf{U}_{*T}) = \det \mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{*T}) \quad (1.40)$$

Ze wzoru (1.22) wynika, że:

$$g_{SR}(\mathbf{U}_{*T}) = \det(\mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T}) + \Delta_{*T} \Delta_{*T}^T) \quad (1.41)$$

Na podstawie dowodzonego przez Wywiła (1990 b) twierdzenia o wyznaczniku sum macierzy nieujemnie określonych wnioskujemy, że:

$$g_{SR}(\mathbf{U}_{*T}) \geq g(\mathbf{U}_{*T}) \quad (1.42)$$

gdzie:

$$g(\mathbf{U}_{*T}) = \det(\mathbf{V}(\mathbf{U}_{*T})) \quad (1.43)$$

jest uogólnioną wariancją wektora  $\mathbf{U}_{*T}$ . Zatem w szczególności jeśli predykcja wektora  $\mathbf{Y}_{*T}$  jest nieobciążona, czyli  $\Delta_{*T} = \mathbf{0}$ , to:

$$g_{SR}(\mathbf{U}_{*T}) = g(\mathbf{U}_{*T})$$

Parametr  $g_{SR}(\mathbf{U}_{*T})$  jest proporcjonalny do objętości elipsoidy, której środek znajduje się w punkcie  $\Delta_{*T} = E(\mathbf{U}_{*T})$ , a jej półosiami są odpowiednie wartości własne macierzy błędów średniokwadratowych  $\mathbf{V}_{SR}(\mathbf{U}_{*T})$ . Podobnie interpretujemy uogólnioną wariancję wektora błędów  $\mathbf{U}_{*T}$ , lecz w tym przypadku środek elipsoidy jest w początku układu współrzędnych. Parametr ten może więc służyć do oceny precyzji prognoz w postaci elipsoidalnych obszarów ufności.

## 1.2. Wskaźniki dokładności prognoz

Określone w poprzednim podrozdziale parametry dokładności ex-ante prognoz pozwalają jedynie określić hipotetyczne poziomy błędów prognozowania. Otrzymywano je zakładając, że analizowany proces losowy będzie przebiegał w okresach prognozowanych przy tych samych założeniach, co w okresach wcześniejszych.

W rzeczywistości dokładność sformułowanych prognoz można tylko ocenić w sensie ex-post, czyli po realizacji wartości zmiennej prognozowanej. Przedział czasowy, składający się z kolejnych okresów o numerach  $t = n + 1, \dots, n + m$ , w których jest oceniana dokładność prognoz nazywamy przedziałem empirycznej weryfikacji prognoz.

### 1.2.1. Klasyczne wskaźniki dokładności ex-post prognoz

Błąd prognozy ex-post jest wartością następującej zmiennej losowej:

$$U_T = Y_T - Y_{TP} \quad (1.44)$$

Względny błąd prognozowania dla T-tego okresu jest wartością zmiennej losowej:

$$W_T = \frac{U_T}{Y_T} 100\% \quad (1.45)$$

Średniokwadratowy błąd prognozy ex-post jest definiowany wzorem:

$$S_u^2 = \frac{1}{m} \sum_{T=n+1}^{n+m} U_T^2 \quad (1.46)$$

Parametr ten można zdekomponować następująco:

$$S_u^2 = (\bar{Y} - \bar{Y}_p)^2 + S_y^2 + S_p^2 - 2S_y S_p r \quad (1.47)$$

gdzie:

$$S_y^2 = \frac{1}{m} \sum_{T=n+1}^{n+m} (Y_T - \bar{Y})^2, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{T=n+1}^{n+m} Y_T \quad (1.48)$$

$$S_p^2 = \frac{1}{m} \sum_{T=n+1}^{n+m} (Y_{TP} - \bar{Y}_p)^2, \quad \bar{Y}_p = \frac{1}{m} \sum_{T=n+1}^{n+m} Y_{TP} \quad (1.49)$$

$$r = \frac{C(Y, Y_p)}{S_y S_p} \quad (1.50)$$

$$C(Y, Y_p) = \frac{1}{m} \sum_{T=n+1}^{n+m} (Y_T - \bar{Y})(Y_{TP} - \bar{Y}_p) \quad (1.51)$$

Zatem poziom błędu średniokwadratowego prognozy ex-post jest wprost proporcjonalny do kwadratu różnicy między średnią rzeczywistych obserwacji cechy a średnią prognoz tej cechy. Ponadto jest on odwrotnie proporcjonalny do dodatniej wartości współczynnika korelacji między realizacjami zmiennej prognozowanej a ich prognozami.

## 1.2.2. Współczynnik Theila

Theil (1961), (1966) proponuje następujący względny wskaźnik jakości prognoz:

$$I^2 = \frac{mS_u^2}{\sum_{T=n+1}^{n+m} Y_T^2} \quad (1.52)$$

Korzystając ze wzoru (1.47) współczynnik ten można zdekomponować do następującej postaci:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 \quad (1.53)$$

gdzie:

$$I_1^2 = \frac{m(\bar{Y} - \bar{Y}_p)^2}{\sum_{T=n+1}^{n+m} Y_T^2} \quad (1.54)$$

$$I_2^2 = \frac{m(S_y - S_p)^2}{\sum_{T=n+1}^{n+m} Y_T^2} \quad (1.55)$$

$$I_3^2 = \frac{2mS_yS_p(1-r)}{\sum_{T=n+1}^{n+m} Y_T^2} \quad (1.56)$$

Bliskie zeru wartości każdego z określonych wyżej wskaźników świadczą o dużej dokładności prognoz. Wartości poszczególnych współczynników wskazują na inne źródło powstawania błędów prognozowania. Wskaźnik  $I_1^2$  ocenia wpływ obciążoności oceny wartości średniej zmiennej prognozowanej. Z kolei wskaźnik  $I_2$  świadczy o stopniu braku elastyczności metody prognozowania, czyli nieodgadnięcia wahań zmiennej prognozowanej. W końcu  $I_3^2$  ocenia wpływ niedostatecznej zgodności prognoz z rzeczywistymi realizacjami zmiennej prognozowanej na dokładność prognozowania.

## 1.2.3. Współczynnik janusowy

Gadd i Wold (1964) zaproponowali<sup>8</sup> tzw. współczynnik janusowy, który ma postać:

$$J = \frac{S_u^2}{S_e^2} \quad (1.57)$$

przy czym  $S_u^2$  jest określonym wzorem (1.46) średnim kwadratowym błędem prognoz ex-post, natomiast  $S_e^2$  jest wariancją resztową dopasowania modelu np. trendu do szeregu czasowego z okresów poprzedzających przedział empirycznej weryfikacji prognoz, a zatem<sup>9</sup>:

$$S_e^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2 \quad (1.58)$$

gdzie:  $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ , przy czym  $\hat{Y}_t$  jest tzw. wartością „teoretyczną” szacowanego trendu. Im mniejsza jest wartość współczynnika J, to tym bardziej są trafne prognozy. Przyjmuje się, że są one ostatecznie dokładne jeżeli wartość współczynnika janusowego jest mniejsza od jedności.

Niech  $U=[U_1...U_m]$ , natomiast  $e=[e_1...e_n]$ . Wtedy współczynnik janusowy można przepisać następująco:

$$J = \frac{n}{m} R \quad (1.59)$$

gdzie:

$$R = \frac{UU^T}{ee^T}$$

Załóżmy, że wektor błędów predykcji oraz wektor reszt są kombinacjami liniowymi odpowiednio wektorów:  $Y=[Y_n Y_m]$  i  $Y_n$  (por. punkt 1.1.1 niniejszego rozdziału), co w macierzowy sposób zapisujemy następująco:

$$e = Y_n A \quad (1.60)$$

$$U = Y B \quad (1.61)$$

gdzie macierz  $A$  ma wymiary  $n \times m$ , natomiast macierz  $B$  ma wymiary  $(n+m) \times m$ . Wtedy współczynnik janusowy można zapisać następująco:

$$J = \frac{n}{m} \frac{Y B B^T Y^T}{Y_n A A^T Y_n^T} \quad (1.62)$$

<sup>8</sup> Por. pracę Pawłowskiego (1973).

<sup>9</sup> W niektórych przypadkach (np. gdy trend jest wyznaczany metodą najmniejszych kwadratów) zamiast liczby reszt bierze się pod uwagę liczbę stopni swobody, czyli  $n-k$ , gdzie  $k$  jest liczbą szacowanych parametrów trendu.

Stąd i z faktu, że  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_m]$  wynika, że współczynnik janusowy jest ilorazem dwóch zwykle zależnych form kwadratowych.

Założmy, że  $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$ , gdzie wektor  $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_n \boldsymbol{\mu}_m]$ , a macierz wariancji i kowariancji określa wzór (1.9). Wtedy z ogólnie znanych własności wielowymiarowego rozkładu normalnego wynika, że wektor  $[\mathbf{e}\mathbf{U}]$  ma  $(n+m)$  wymiarowy rozkład normalny rzędu  $r \leq n+m$ , który oznaczamy przez  $N(\boldsymbol{\mu}_s; \boldsymbol{\Sigma}_s)$ , gdzie  $\boldsymbol{\mu}_s = [E(\mathbf{e}) E(\mathbf{U})]$ , przy czym:

$$E(\mathbf{e}) = \boldsymbol{\mu}_n \mathbf{A}, \quad E(\mathbf{U}) = \boldsymbol{\mu}_m \mathbf{B} \quad (1.63)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{eu} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ue} & \boldsymbol{\Sigma}_{uu} \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ee} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn} \mathbf{A} \quad (1.65)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{uu} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}_m \mathbf{B} \quad (1.66)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{eu} = \mathbf{A}^T [\boldsymbol{\Sigma}_{nn} \boldsymbol{\Sigma}_{nm}] \mathbf{B} \quad (1.67)$$

W szczególności, gdy  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}_{n+m}$ , to:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ee} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (1.68)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{uu} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (1.69)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{eu} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_n \quad (1.70)$$

gdzie  $\mathbf{B}_n$  jest pierwszym blokiem o wymiarach  $n \times n$  macierzy  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}$ .

W celu znalezienia rozkładu prawdopodobieństwa i momentów współczynnika janusowego skorzystamy z ogólnych wyników zamieszczonych w pracach Mathai i Provosta (1992) oraz Provosta i Rudiuka (1993), które zreferowano w Dodatku do niniejszej pracy. Punktem wyjścia obliczenia dystrybuanty:

$$F_J(x) = P\{J < x\} = P\left\{R \left\langle \frac{m}{n} x \right\rangle\right\} = P\{R \langle c \rangle = F_R(c)\}$$

jest określona wzorem (5.28) macierz  $\mathbf{S}_c$ . W naszym przypadku będzie ona miała postać:

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_n^T & \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{B}_n^T & \mathbf{B}_n & \mathbf{B}_n^T & -c\mathbf{A}\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

Zgodnie z procedurami opisanymi w podrozdziałach 4 i 5 Dodatku można już teraz w sposób przybliżony obliczyć dystrybantę  $F_R(c) = F_J(x)$ .

## 1.2.4. Zmodyfikowany współczynnik janusowy

Analizę ograniczamy do przedziału empirycznej weryfikacji prognoz. Sumę kwadratów błędów prognoz dekomponujemy następująco:

$$mS_u^2 = \sum_{T=1}^m (Y_T - Y_{T_p})^2 = \sum_{T=1}^m (e_T + \hat{Y}_T - Y_{T_p})^2$$

gdzie:  $e_T = Y_T - \hat{Y}_T$  jest resztą, natomiast  $\hat{Y}_T$  jest oceną trendu w T-tym okresie. Wtedy mamy:

$$mS_u^2 = \sum_{T=1}^m e_T^2 + 2 \sum_{T=1}^m (\hat{Y}_T - Y_{T_p}) e_T + \sum_{T=1}^m (\hat{Y}_T - Y_{T_p})^2$$

Różnicę między trendem  $\hat{Y}_T$ , a prognozą  $Y_{T_p}$  można traktować jako ocenę obciążenia predykcji trendu i oznaczamy przez:

$$V_T = Y_T - \hat{Y}_{T_p}$$

$$mS_u^2 = \sum_{T=1}^m e_T^2 + 2 \sum_{T=1}^m V_T e_T + \sum_{T=1}^m V_T^2 \quad (1.73)$$

Niech:

$$\bar{e} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m e_T \quad (1.74)$$

$$\bar{V} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m V_T = \bar{e} - \bar{U} \quad (1.75)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m U_T \quad (1.76)$$

Przez  $\bar{e}$  oznaczono średnią resztę, a przez  $\bar{U}$  średni błąd predykcji, natomiast przez  $\bar{V}$  średnie obciążenie predykcji trendu. Wtedy:

$$mS_u^2 = \sum_{T=1}^m (e_T - \bar{e})^2 + m\bar{e}^2 + 2 \sum_{T=1}^m (V_T - \bar{V})(e_T - \bar{e}) + m\bar{e}\bar{V} + \sum_{T=1}^m (V_T - \bar{V})^2 + m\bar{V}^2 \quad (1.77)$$

Przyjmując, że  $U_T = e_T + (U_T - e_T)$  na podstawie wzoru (1.46) otrzymujemy następującą dekompozycję sumy kwadratów błędów predykcji:

$$mS_u^2 = \sum_{T=1}^m (U_T - e_T)^2 + 2 \sum_{T=1}^m U_T e_T - \sum_{T=1}^m e_T^2 \quad (1.78)$$

lub

$$mS_u^2 = \sum_{T=1}^m V_T^2 + 2 \sum_{T=1}^m U_T e_T - \sum_{T=1}^m e_T^2 \quad (1.79)$$

lub

$$mS_u^2 = \sum_{T=1}^m (V_T - \bar{V})^2 + m\bar{V}^2 + 2\bar{U}\bar{V} + 2 \sum_{T=1}^m (U_T - \bar{U})(e_T - \bar{e}) - \sum_{T=1}^m (e_T - \bar{e})^2 - \bar{e}^2 \quad (1.80)$$

Ze wzoru (1.73) wynika, że współczynnik janusowy można zapisać w następującej postaci:

$$J = \frac{S_u^2}{S_e^2} = 1 + \frac{2\mu_{11}(V, e) + \mu_2(V)}{S_e^2} \quad (1.81)$$

gdzie:

$$S_e^2 = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m e_T^2$$

$$\mu_{11}(V, e) = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m V_T e_T$$

$$\mu_2(V) = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m V_T^2$$

Gdy średnia reszt  $\bar{e} = 0$ , jak to ma miejsce np. w przypadku, gdyby parametry trendu były szacowane metodą najmniejszych kwadratów oraz  $\bar{V} = 0$ , czyli predykcja trendu jest nieobciążona, to:

$$\mu_{11}(V, e) = S_e S_v \rho(e, V) \quad (1.82)$$

$$\mu_2(V) = S_v^2 \quad (1.83)$$

Wówczas:

$$J = 1 + 2 \frac{S_v}{S_e} \rho(e, V) + \frac{S_v^2}{S_e^2} \quad (1.84)$$

Stąd wynika, że współczynnik J jest rosnącą funkcją ilorazu  $\frac{S_v}{S_e}$  i jest wprost proporcjonalny

do współczynnika korelacji  $\rho(V, e)$ . Należy oczekiwać, że w praktyce ten współczynnik korelacji będzie raczej przyjmował wartości dodatnie, bo należy się spodziewać, że dużym błędom oceny trendu będą odpowiadały duże obciążenia predykcji trendu.

Na podstawie wzoru (1.79) mamy:

$$J = \frac{\mu_2(\mathbf{V}) + 2\mu_{11}(\mathbf{U}, \mathbf{e})}{S_e^2} - 1 \quad (1.85)$$

Gdy założymy, że  $\bar{\mathbf{V}} = 0$ ,  $\bar{\mathbf{U}} = 0$ , lub  $\bar{\mathbf{e}} = 0$ , to:

$$J = \frac{S_v^2 + 2S_u S_e \rho(\mathbf{U}, \mathbf{e})}{S_e^2} - 1 \quad (1.86)$$

Stąd, między innymi wynika, że wskaźnik  $J$  jest wprost proporcjonalny do wartości współczynnika korelacji między błędami predykcji i resztami trendu.

Stopień obciążenia predykcji trendu oceniamy za pomocą następującego wskaźnika:

$$J_o = \frac{\mu_2(\mathbf{V})}{S_e^2} = \frac{\sum_{T=1}^m (\hat{Y}_T - Y_{TP})^2}{\sum_{T=1}^m (Y_T - \hat{Y}_T)^2} \quad (1.87)$$

Jeśli  $\mu_{11}(\mathbf{U}, \mathbf{e}) = 0$ , to ze wzorów (1.85) i (1.87) wynika, że  $J_o = J + 1$ .

Wskaźnik  $J_o$  nazwiemy szczególnym współczynnikiem janusowym, bowiem pozwala on ocenić rozmiar występowania tylko systematycznego błędu predykcji jakim jest obciążenie.

Przyjmujemy, że predyktor i estymator trendu są liniowymi funkcjami wektora losowego  $\mathbf{Y}_m$ . Wtedy:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y}_m \mathbf{B} \quad (1.88)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}_m \mathbf{A} \quad (1.89)$$

Stąd i ze wzorów (1.59) i (1.81) mamy:

$$J = \frac{\mathbf{Y}_m \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}_m^T}{\mathbf{Y}_m \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_m^T} \quad (1.90)$$

Dodajmy, że wariancja resztowa występująca w mianowniku statystyki  $J$  może być zastąpiona przez wariancję resztową rozszerzoną o dane z okresów wcześniejszych, od tych z empirycznego przedziału weryfikacji prognoz. Ta wariancja może być również obliczana tylko na podstawie danych poprzedzających okresy prognozowane.

Wskaźnik  $J_o$  nazwiemy szczególnym współczynnikiem janusowym bowiem pozwala on ocenić rozmiar występowania tylko systematycznego błędu predykcji jakim jest obciążenie.

Założmy, że  $\mathbf{Y}_m \sim N(\boldsymbol{\mu}_m, \boldsymbol{\Sigma}_{mm})$ . Wtedy dystrybuantę współczynnika  $J_o$  wyznaczamy na podstawie ogólnych wzorów zamieszczonych w podrozdziale 4 Dodatku. Sprowadza się to do wyliczenia prawdopodobieństwa  $F_y(c) = P(J_o < c) = P\{\mathbf{V}^T \mathbf{M}_c \mathbf{V} < 0\}$ . W naszym przypadku, występująca we wzorze (5.31), macierz  $\mathbf{M}_c$  ma postać:

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{A} \mathbf{A}^T - c \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (1.91)$$

Następne kroki prowadzące do wyliczenia dystrybuanty  $F(c)$  opisano w paragrafie 4 Dodatku, a sposoby aproksymacji w podrozdziale 5 Dodatku.



## 1.2.5. Skorygowany współczynnik janusowy

Formy kwadratowe tworzące określony wzorem (1.62) współczynnik janusowy można zapisać następująco :

$$Q_1 = \mathbf{YBB}^T\mathbf{Y}^T = [\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_n & \mathbf{B}_n^T & \mathbf{B}_n & \mathbf{B}_m^T \\ \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n^T \\ \mathbf{Y}_m^T \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

$$Q_2 = \mathbf{Y}_n \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_n^T = [\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{A}^T & \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathbf{O}_{m \times n} & \mathbf{O}_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n^T \\ \mathbf{Y}_m^T \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

Załóżmy, że wektor  $\mathbf{Y}$  ma  $(n+m)$  wymiarowy nieosobliwy rozkład normalnej:  $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Przyjmując, że macierz  $\mathbf{BB}^T$  jest nieosobliwa na podstawie znanych twierdzeń algebry liniowej (por. np. Rao (1982)) wnioskujemy, że istnieje taka nieosobliwa macierz  $\mathbf{G}$ , iż:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{ZG} \quad (1.94)$$

oraz

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^n a_i Z_i^2 \quad (1.95)$$

przy czym  $a_i \geq 0$  dla  $i = 1, \dots, n$  oraz istnieje przynajmniej jeden wskaźnik  $k=1, \dots, n$ , że  $a_k > 0$ . Wtedy również  $Z \sim N(\boldsymbol{\mu} \mathbf{G}^{-1}, \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{G}^{-1})^T)$ . Analiza rozkładu ilorazu takich form jest więc dość złożona, aczkolwiek przeprowadzono ją w poprzednim rozdziale. Problem ten można uprościć poprzez zastąpienie macierzy obu form kwadratowych innymi (por. Wywiół (1982)). Wtedy mamy jednak do czynienia już z inną postacią współczynnika janusowego i dlatego nazywamy ją zmodyfikowaną, a definiują ją wzory:

$$J_* = \frac{n}{m} \frac{Q_{*U}}{Q_{*e}} \quad (1.96)$$

gdzie:

$$Q_{*U} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^- \mathbf{U}^T \quad (1.97)$$

$$Q_{*e} = \mathbf{e} \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^- \mathbf{e}^T \quad (1.98)$$

gdzie  $\boldsymbol{\Sigma}_{UU}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_{ee}$  są macierzami wariancji i kowariancji wektorów odpowiednio błędów predykcji  $\mathbf{U}$  i reszt trendu  $\mathbf{e}$ . Z kolei  $\boldsymbol{\Sigma}_{UU}^-$  i  $\boldsymbol{\Sigma}_{ee}^-$  są pseudoodwrotnościami macierzy odpowiednio  $\boldsymbol{\Sigma}_{UU}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_{ee}$ . Zatem:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{UU} \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^- \boldsymbol{\Sigma}_{UU} = \boldsymbol{\Sigma}_{UU} \quad (1.99)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ee} \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^- \boldsymbol{\Sigma}_{ee} = \boldsymbol{\Sigma}_{ee} \quad (1.100)$$

Przypomnijmy, że wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}$  określa przekształcenie liniowe, dane wzorem (1.61), a wektor reszt  $\mathbf{e}$  transformację określoną wzorem (1.60). Utrzymujemy założenie, że  $\mathbf{U} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}_U, \boldsymbol{\Sigma}_{UU})$  oraz  $\mathbf{e} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}_e, \boldsymbol{\Sigma}_{ee})$ .

Gdy macierze  $\boldsymbol{\Sigma}_{ee}$  lub  $\boldsymbol{\Sigma}_{UU}$  są nieosobliwe, to pseudoodwrotności tych macierzy występujące we wzorach (1.97) i (1.98) zastępujemy macierzami odwrotnymi.

Łączny rozkład wektorów  $[\mathbf{Ue}] \sim N(\boldsymbol{\mu}_s, \boldsymbol{\Sigma}_s)$ , gdzie wektor  $\boldsymbol{\mu}_s$  i macierz  $\boldsymbol{\Sigma}_s$  określają odpowiednio wzory (1.63) i (1.64)—(1.70).

Na podstawie twierdzeń dowodzonych przez Rao i Mitrę (1971) wnioskujemy, że  $Q_{*U}$  i  $Q_{*e}$  mają niecentralne rozkłady *chi*-kwadrat z parametrami niecentralności odpowiednio:

$$\kappa_U = \boldsymbol{\mu}_U^T \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^{-1} \boldsymbol{\mu}_U; \quad \kappa_e = \boldsymbol{\mu}_e^T \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1} \boldsymbol{\mu}_e$$

oraz z liczbami stopni swobody odpowiednio:

$$r_U = R(\boldsymbol{\Sigma}_{UU}^{-1}); \quad r_e = R(\boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1})$$

W ogólności formy kwadratowe  $Q_{*U}$  i  $Q_{*e}$  będą miały zależne rozkłady. Wynika to z zależności rozkładów wektorów  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{e}$ . Dalej jednak także będziemy mieli do czynienia z przypadkami, gdy rozkłady wektorów  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{e}$  będą niezależne. Wówczas przy założeniu, że  $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$  rozkład zmodyfikowanego współczynnika janusowego będzie niecentralnym rozkładem Snedecora-Fishera.

W ogólnym jednak przypadku rozkład współczynnika  $J_*$  będzie ilorzem dwóch zależnych form kwadratowych, z których każda ma centralny rozkład *chi*-kwadrat przy założeniu, że  $\boldsymbol{\mu}_U = \mathbf{0}$  i  $\boldsymbol{\mu}_e = \mathbf{0}$ . Wówczas dystrybuentę tego rozkładu wyznaczamy na podstawie ogólnej procedury opisanej w podrozdziale 4 Dodatku. Wtedy jednak na podstawie wzorów (1.97) i (1.98) oraz (1.60) i (1.61) statystykę  $Q_{*U}$  zapiszemy następująco:

$$Q_{*U} = \mathbf{Y} \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}^T \quad (1.101)$$

$$Q_{*e} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{O}_{nm} \\ \mathbf{O}_{mn} & \mathbf{O}_{mm} \end{bmatrix} \mathbf{Y}^T \quad (1.102)$$

Stąd i z ogólnego wzoru (5.28) wyznaczamy macierz postaci:

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^{-1} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_m \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^{-1} \mathbf{B}_n^T \\ \mathbf{B}_n \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^{-1} \mathbf{B}_m^T & \mathbf{B}_n \boldsymbol{\Sigma}_{UU}^{-1} \mathbf{B}_n^T - \mathbf{c} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1} \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

przy czym  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_m \mathbf{B}_n]$ . Wtedy dystrybuanta ma postać:

$$F_{J_*}(x) = P\{J_* \leq x\} = P\left\{\frac{Q_{*U}}{Q_{*e}} \leq \frac{m}{n} x\right\} = P\left\{\frac{Q_{*U}}{Q_{*e}} \leq c\right\} = P\{R \leq c\} = F_R(c) \quad (1.104)$$

Dystrybuantę  $F_R(\mathbf{c})$  obliczamy już numerycznie wykorzystując macierz  $\mathbf{S}_c$  i odpowiednie procedury opisane w podrozdziałach 4 i 5 Dodatku.

Autor (1990a) zaproponował, aby zależne wektory  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{e}$  przekształcić w wektor  $\mathbf{W}$ , który będzie niezależny od wektora  $\mathbf{U}$ . Na podstawie ogólnych wyników zamieszczonych w pracy Rao i Mitry (1971) mamy:

$$\mathbf{e}_\# = \mathbf{e} - \mathbf{U}\Sigma_{UU}^{-1}\Sigma_{Ue} \quad (1.105)$$

przy czym:  $\mathbf{e}_\# \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\#e}, \Sigma_{\#e})$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\mu}_{\#e} = E(\mathbf{e}_\#) = \boldsymbol{\mu}_e - \boldsymbol{\mu}_U \Sigma_{UU}^{-1} \Sigma_{Ue} \quad (1.106)$$

$$\Sigma_{\#e} = \Sigma_{ee} - \Sigma_{eU} \Sigma_{UU}^{-1} \Sigma_{Ue} \quad (1.107)$$

Ponadto wektory  $\mathbf{e}_\#$  i  $\mathbf{U}$  są niezależne. Wówczas dana wzorem (1.97) forma kwadratowa  $Q_{*U}$  będzie niezależna od następującej:

$$Q_{\#e} = \mathbf{e}_\# \Sigma_{\#e}^{-1} \mathbf{e}_\#^T \quad (1.108)$$

Załóżmy, że  $\boldsymbol{\mu}_{\#e} = \mathbf{0}$ . Wtedy iloraz:

$$J_* = \frac{n}{m} \frac{Q_{*U}}{Q_{\#e}} \quad (1.109)$$

będzie miał niecentralny rozkład Snedecora-Fischera z  $r_U = R(\Sigma_{UU}^{-1})$  oraz  $r_{\#e} = R(\Sigma_{\#e}^{-1})$  stopniami swobody. Parametr niecentralności wynosi:

$$\kappa = \frac{m}{n} \boldsymbol{\mu}_U \Sigma_{UU}^{-1} \boldsymbol{\mu}_U^T$$

Łatwiej, jak się wydaje, będzie można przyjąć założenie, że wektor wartości oczekiwanych reszt  $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ , a nie, że wektor skorygowanych reszt  $E(\mathbf{e}_\#) = \mathbf{0}$ . W związku z tym należałoby preferować transformację postaci:

$$\mathbf{U}_\# = \mathbf{U} - \mathbf{e} \Sigma_{ee}^{-1} \Sigma_{eU} \quad (1.110)$$

Wtedy:  $\mathbf{U}_\# \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\#U}, \Sigma_{\#U})$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\mu}_{\#U} = \boldsymbol{\mu}_U - \boldsymbol{\mu}_e \Sigma_{ee}^{-1} \Sigma_{eU} \quad (1.111)$$

$$\Sigma_{\#U} = \Sigma_{UU} - \Sigma_{Ue} \Sigma_{ee}^{-1} \Sigma_{eU} \quad (1.112)$$

Wówczas wektor skorygowanych błędów predykcji  $\mathbf{U}_\#$  ma rozkład niezależny od wektora reszt  $\mathbf{e}$  oraz forma kwadratowa:

$$Q_{\#U} = \mathbf{U}_\# \boldsymbol{\Sigma}_{\#U}^- \mathbf{U}_\#^T \quad (1.113)$$

ma rozkład niezależny od rozkładu formy kwadratowej  $Q_{*e}$ .

Przyjmijmy, że  $\boldsymbol{\mu}_e = \mathbf{0}$ . Wtedy iloraz:

$$J_\# = \frac{r_e}{r_{\#U}} \frac{Q_{\#U}}{Q_{*e}} \quad (1.114)$$

ma niecentralny rozkład Snedecora-Fishera z  $r_e = R(\boldsymbol{\Sigma}_{ee}^-)$  i  $r_{\#U} = R(\boldsymbol{\Sigma}_{\#U}^-)$  stopniami swobody oraz parametrem niecentralności  $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\mu}_\# \boldsymbol{\Sigma}_{\#U}^- \boldsymbol{\mu}_\#$ , przy czym statystykę  $Q_{*e}$  określa wzór (1.98).

Wskaźniki  $J_*$  i  $J_\#$  są funkcjami skorygowanych wektorów odpowiednio reszt i błędów predykcji. Dlatego właśnie nazwiemy je skorygowanymi współczynnikami janusowymi.

### 1.2.6. Regresja prognoz względem zmiennej prognozowanej

Theil (1966) analizuje problem badania dokładności ciągu prognoz w czasie, poprzez wykorzystanie do tego celu liniowej funkcji regresji II rodzaju prognoz względem zmiennej prognozowanej<sup>10</sup>. Należy bowiem oczekiwać, że współczynnik kierunkowy tej regresji powinien być równy jedności, a wyraz wolny (stała) zeru.

Niech  $Y_{T_p}$  będą prognozami zmiennych  $Y_T$  dla  $T=1,2,\dots,m$ . Wtedy regresja prognoz względem zmiennych prognozowanych ma postać:

$$Y_{T_p} = aY_T + b + e_T \quad (1.115)$$

Przyjmijmy najpierw, że  $b = 0$ . Wtedy estymator otrzymamy metodą najmniejszych kwadratów parametru  $a$  ma postać:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{T=1}^m Y_{T_p} Y_T}{\sum_{T=1}^m Y_T^2} \quad (1.116)$$

Można go przekształcić do postaci:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{T=1}^m Y_T U_T}{\sum_{T=1}^m Y_T^2} + 1 \quad (1.117)$$

---

<sup>10</sup> Por. Melich (1974).

gdzie przypomnijmy  $U_T = Y_T - Y_{T_p}$  jest błędem predykcji. Stąd wynika, że do testowania hipotezy  $H_0$ , że  $a = 1$  można użyć sprawdzianu postaci:

$$Z = \tilde{a} - 1 = \frac{\sum_{T=1}^m Y_T U_T}{\sum_{T=1}^m Y_T^2} \quad (1.118)$$

Istotnie różne od zera wartości sprawdzianu  $Z$  będą świadczyły przeciwko hipotezie  $H_0$ .

$Z$  technicznego punktu widzenia wyprowadzenie rozkładu statystyki  $Z$  będzie złożonym problemem. Zatem można go zastąpić, jak się wydaje prostszym sprawdzianem, który ma postać:

$$Z_1 = \sum_{T=1}^m Y_T U_T \quad (1.119)$$

Istotnie różne od zera wartości sprawdzianu  $Z_1$  świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$ . Sprawdzian  $Z_1$  jest z formalnego punktu widzenia drugim momentem zwykłym zmiennej prognozowanej i błędów predykcji. Staje się on kowariancją tych wielkości, gdy średnia błędów predykcji jest równa zeru, co wynika ze wzoru:

$$Z_1 = \sum_{T=1}^m Y_T (U_T - \bar{U}) - m \bar{Y} \bar{U} \quad (1.120)$$

gdzie:

$$\bar{U} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m U_T, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m Y_T$$

Stąd wyciągamy wniosek, że wartość sprawdzianu  $Z_1$  zależy od stopnia skorelowania wartości zmiennej z błędami ich prognoz i średniej zmiennej prognozowanej i średniej błędów predykcji.

Rozkład sprawdzianu  $Z_1$  nie będzie, jak się wydaje, łatwy dla wyprowadzenia w ogólnym przypadku. Można jednak przy założeniu, że  $E(\bar{U}) = 0$  problem oceny zależności liniowej między wartościami zmiennej obserwowanymi w kolejnych okresach (momentach) czasu, a błędami ich prognoz zastąpić oceną skorelowania rang tych wielkości. Niech  $\{A_i, B_i\}$  będą rangami wartości par  $\{Y_T, U_T\}$ . Wtedy współczynnik korelacji rangowej Spearmana ma postać:

$$R_S = 1 - \frac{6 \sum_{T=1}^m (A_i - B_i)^2}{m(m^2 - 1)} \quad (1.121)$$

Istotnie różne od zera wartości współczynnika  $R_s$  będą więc świadczyły przeciwko hipotezie  $H_0: a=1$ . Tablice wartości krytycznych testu na brak korelacji rangowej wykorzystującej sprawdzian  $R_s$  znajdujemy np. w pracy Zielińskiego (1972) dla  $m \leq 10$ . Dla  $m \geq 10$  stosuje się do weryfikacji postawionej hipotezy następujący sprawdzian:

$$Z_2 = \sqrt{m-1} R_s \quad (1.122)$$

Gdy jest prawdziwa hipoteza o braku korelacji, to  $Z_2$  ma w przybliżeniu rozkład normalny standardowy. Dodajmy, że zamiast współczynnika korelacji rang Spearmana można użyć współczynnik korelacji rangowej Kendalla (1955).

Hipotezę  $H_0: a=1$  można również testować za pomocą nieparametrycznego testu Theila opisanego przez Domańskiego (1979).

Rozpatrzmy teraz ogólniejszy przypadek dopuszczając, że określony we wzorze (1.115) parametr  $b$  może być różny od zera. Wtedy otrzymane metodą najmniejszych kwadratów estymatory parametrów  $a$  i  $b$  mają postać:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{T=1}^m (Y_{T_p} - \bar{Y}_p)(Y_T - \bar{Y})}{\sum_{T=1}^m (Y_T - \bar{Y})^2} \quad (1.123)$$

gdzie:

$$\bar{Y}_p = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m Y_{T_p}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m Y_T$$

$$\hat{b} = \bar{Y}_p - \hat{a} \bar{Y} \quad (1.124)$$

Statystykę  $\hat{a}$  można przekształcić do postaci:

$$\hat{a} = \frac{1}{m S_y^2} \sum_{T=1}^m \left( (Y_{T_p} - Y_T) - (\bar{Y}_p - \bar{Y}) + (Y_T - \bar{Y}) \right) (Y_T - \bar{Y})$$

gdzie:

$$S_y^2 = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m (Y_T - \bar{Y})^2$$

Po odpowiednich prostych przekształceniach mamy:

$$\hat{a} = -\frac{S_u}{S_y} r_{uy} + 1 \quad (1.125)$$

$$\hat{b} = \bar{U} + \frac{S_u}{S_y} r_{uy} \quad (1.126)$$

gdzie:

$$\bar{U} = \bar{Y}_p - \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m U_T$$

$$S_u^2 = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m (U_T - \bar{U})^2$$

$$r_{uy} = \frac{s(U, Y)}{s(U)s(Y)}$$

$$s(U, Y) = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m (U_T - \bar{U})(Y_T - \bar{Y})$$

Ze wzoru (1.125) wynika więc, że teraz problem weryfikacji hipotezy  $H_0: a=1$ , sprowadza się do testowania hipotezy, że zmienna prognozowania i błędy jej prognoz są od siebie liniowo niezależne. Hipotezę tę można testować pośrednio poprzez weryfikację hipotezy o tym, że współczynnik korelacji rang wartości zmiennej prognozowanej i rang błędów ich prognoz jest równy zeru. W tym celu należy użyć współczynnika korelacji rangowej Spearmana.

Hipotezę  $H_0: b = 0$  należałoby testować za pomocą statystyki:

$$Z_3 = \frac{\bar{U}}{S_u} \sqrt{m-1} \quad (1.127)$$

W ogólnym przypadku nawet gdy zmienne  $Y_1, \dots, Y_m$  mają rozkład wielowymiarowy normalny, to nie należy się spodziewać, że sprawdzian  $Z_3$  ma rozkład Studenta ponieważ składowe ciągu  $U_1, \dots, U_m$  są od siebie zależne. W tej sytuacji należałoby najpierw przekształcić wektor  $\mathbf{U}$  w wektor  $\mathbf{W}$  składający się z niezależnych zmiennych. Pamiętając, że  $E(\mathbf{U}) = \boldsymbol{\mu}_u$ , natomiast macierz wariancji i kowariancji wektora  $\mathbf{U}$  oznaczyliśmy przez  $\boldsymbol{\Sigma}_{uu}$  założmy, że jest ona nieosobliwa. Wtedy można znaleźć takie przekształcenie liniowe:

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}\mathbf{G} \quad (1.128)$$

że  $\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \boldsymbol{\Sigma}_{uu}$  oraz  $\mathbf{W} \sim N(\boldsymbol{\mu}_w, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ , gdzie  $\boldsymbol{\mu}_w = \boldsymbol{\mu}_u \mathbf{G}$ . Wówczas jeśli  $\boldsymbol{\mu}_u = \mathbf{0}_m$ , to  $\boldsymbol{\mu}_w = \mathbf{0}_m$ . Podkreślmy jednak, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Otrzymany rezultat pozwala nam skonstruować test dla hipotezy  $H_0: b = 0$ , który ma postać:

$$Z_4 = \frac{\bar{W}}{S_w} \sqrt{m-1} \quad (1.129)$$

gdzie:

$$\bar{W} = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m W_T$$

$$S_w^2 = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m (W_T - \bar{W})^2$$

Statystyka  $Z_4$  ma niecentralny rozkład Studenta z  $(m-1)$  stopniami swobody oraz parametrem niecentralności:

$$\delta = \mu_u \mathbf{G} \mathbf{J}_u \quad (1.130)$$

gdzie:  $\mathbf{J}_m$  jest kolumną składającą się tylko z  $m$ -jedynek. Gdy hipoteza  $H_0'$  jest prawdziwa, to  $Z_4$  ma centralny rozkład Studenta z  $(m-1)$  stopniami swobody. Zatem przeciwko hipotezie  $H_0'$  świadczą istotnie różne od zera wartości sprawdzianu  $Z_4$ .

### 1.2.7. Giętkość predyktora

Trend analizowanej cechy może podlegać zmianom w sensie zmiany postaci analitycznej opisującego go wyrażenia funkcyjnego. W szczególności może wystąpić zmiana jego postaci wykładniczej na liniową itp. Jeśli trend jest liniowy, to jego kąt nachylenia do osi, może zmienić się, a w szczególności trend rosnący może przejść w trend stały bądź malejący. Zmiany te mogą wystąpić bądź to przy zachowaniu ciągłości funkcji trendu bądź nie będzie można wykluczyć zerwania tej ciągłości.

Wykrycie zmian trendu jest rzeczą utrudnioną z racji tego, że są obserwowane nie jego wartości, ale realizacje zmiennej podlegające wahaniom przypadkowym, które mogą być przyjmowane za symptomy zmiany kierunku trendu. W wielu przypadkach możemy jednak spodziewać się, że obserwowane zjawisko w czasie winno zachowywać się monotonicznie. Wtedy okres czasu, w którym ta monotoniczność została przerwana jest nazywany punktem zwrotnym.

Pawłowski (1973), s. 51, pisze, że „punktem zwrotnym realizacji zmiennej jest taki punkt (okres)  $t_1$ , w którym następuje, choćby tylko lokalnie, zmiana dotychczasowego kierunku realizacji tej zmiennej. Oznaczając przez  $Z_{t_1}$  zdarzenie losowe polegające na wystąpieniu punktu zwrotnego w okresie  $t_1$ , mówimy, że zdarzenie to realizuje się wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie jedna z następujących par nierówności:”

$$\begin{aligned} & Y_{t_1} \rangle Y_{t_1-1} \quad \text{oraz} \quad Y_{t_1} \rangle Y_{t_1+1} \\ \text{lub} & \\ & Y_{t_1} \langle Y_{t_1-1} \quad \text{oraz} \quad Y_{t_1} \langle Y_{t_1+1} \end{aligned} \quad (1.131)$$

Wydaje się, że wystąpienie tak określonego punktu zwrotnego bynajmniej nie musi świadczyć o zmianie kierunku trendu, jeśli traktujemy jego poziom jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej. Bowiemy wtedy określone wyżej nierówności mogą być zdarzeniami występującymi z dodatnimi prawdopodobieństwami nawet wówczas, gdy dotychczasowy kierunek funkcji trendu (zwłaszcza gdy jest funkcją stałą) nie zmienił się. Z tego powodu w niniejszej pracy będziemy mówić o wystąpieniu punktu zwrotnego trendu, jeśli w wyrażeniu (1.131) realizacje zmiennych zastąpimy ich wartościami oczekiwanymi. Wtedy jednak trzeba wyraźnie podkreślać, że mamy do czynienia z punktem zwrotnym trendu, a nie realizacją wartości zmiennej.



Theil (1961) określa błędy pierwszego i drugiego rodzaju, jakie można popełnić przy predykcji punktów zwrotnych realizacji zmiennej prognozowanej. Błąd pierwszego rodzaju polega na tym, że przewidywano wystąpienie punktu zwrotnego, gdy on nie wystąpił. Z kolei jeśli występuje punkt zwrotny mimo, iż tego nie prognozowano, to mamy do czynienia z błędem drugiego rodzaju. Theil określa także wskaźniki częstości pojawiania się błędów pierwszego lub drugiego rodzaju, które omawia m.in. Pawłowski (1973).

Zachodzi potrzeba analizy zachowania się w czasie dokładności predykcji wraz z oddalaniem się w przeszłość ostatniego z zaobserwowanych punktów zwrotnych. W tym celu Pawłowski (1973), s. 125—126, definiuje wskaźnik ex-post giętkości predyktora rozpoczynając od definicji zbioru  $I_{pj}$  numerów okresów (momentów) czasu, spełniających następujące warunki:

- a)  $t \in I_p$ , czyli okres  $t$ -ty należy do wcześniej określonego przedziału empirycznej weryfikacji prognoz,
- b) w okresie  $t$ -tym wystąpił punkt zwrotny realizacji zmiennej prognozowanej,
- c) na odcinku  $(t, t+j>$ , gdzie  $j$  jest z góry ustaloną liczbą naturalną nie było punktu zwrotnego.

Wtedy Pawłowski giętkość predyktora  $Y_{tp}$  analizuje za pomocą następującej statystyki:

$$S_{pj}^2 = \frac{\sum_{t \in I_{pj}} (Y_{t+j} - Y_{t+j,p})^2}{m_j} \quad (1.132)$$

przy czym  $m_j$  jest licznością zbioru  $I_{pj}$ . Przez  $k$  oznaczamy liczbę okresów czasu między najdalej odległymi od siebie punktami zwrotnymi, czyli  $m_k=2$ . Zależność wskaźnika  $S_{pj}^2$  od parametru  $j$  jest nazywana giętkością predyktora. Gdy  $S_{pj}^2$  jest monotonicznie malejącą funkcją  $j$ , to analizowany predyktor jest nazywany normalnym.

Założmy, że dla wybranego predyktora  $Y_{tp}$  wartości oczekiwane  $E(S_{pj}^2)$  są nierosnącą funkcją parametru  $j$ , wówczas taki predyktor nazwiemy oczekiwanie normalnym. Ponadto założmy, że istnieje takie  $h$ , że  $E(S_{pj}^2) = \text{const}$  dla  $j \geq h$ . Wtedy predyktor nazwiemy oczekiwanie  $h$ -giętkim. Oznacza to, że po  $h$ -okresach od wystąpienia punktu zwrotnego oczekiwany poziom wariancji predykcji stabilizuje się na poziomie pewnej stałej. Dodajmy, że jest on również  $(h+1)$  giętkim bo  $E(S_{pj}^2) = \text{const}$  dla  $j \geq h+1$ . Przypomnijmy, że  $k$  jest liczbą okresów czasu między najdalej odległymi od siebie punktami zwrotnymi. Zakładamy, że każdy predyktor jest przynajmniej oczekiwanie  $k$ -giętki, czyli  $h \leq k$ . Wtedy algorytm wyznaczania wskaźnika  $h$ -giętkości predyktora jest następujący. Najpierw weryfikujemy hipotezę  $H_0^{(k-1)}$  głoszącą, że predyktor jest oczekiwanie  $(k-1)$ -giętki względem hipotezy alternatywnej  $H_1^{(k-1)}$  głoszącej, iż predyktor jest oczekiwanie  $k$ -giętki. Hipotezy te są formułowane następująco:

$$\begin{cases} H_0^{(k-1)}: E(S_{p,k-1}^2) = E(S_{p,k}^2) \\ H_1^{(k-1)}: E(S_{p,k-1}^2) > E(S_{p,k}^2) \end{cases} \quad (1.133)$$

Jeśli przy ustalonym poziomie istotności  $\alpha$  odrzucamy hipotezę sprawdzaną  $H_0^{(k-1)}$  na korzyść alternatywnej, to będziemy mówili, że predyktor jest oczekiwanie  $k$ -giętki. Wobec tego kończymy poszukiwanie parametru giętkości predyktora. Dodajmy, że prawdopodobieństwo tego, iż predyktor jest  $k$ -giętki wynosi  $\alpha$ . W przeciwnym przypadku, gdy nie odrzucimy hipotezy  $H_0^{(k-1)}$ , to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że predyktor jest  $h \leq k-1$  giętki. Dlatego więc procedurę testowania kontynuujemy przechodząc do testowania hipotezy  $H_0^{(k-2)}$ , że predyktor jest  $(k-2)$ -giętki. Jeśli teraz okaże się, że hipotezę  $H_0^{(k-2)}$  należy odrzucić, to znaczy, że predyktor nie jest  $(k-2)$ -giętki lecz  $(k-1)$ -giętki, czyli  $h=k-1$ . W przeciwnym wypadku należy przejść do testowania hipotezy  $H_0^{(k-3)}$  itd. Za sprawdzian hipotezy  $H_0^{(j)}$  przyjmujemy następującą statystykę:

$$F_j = \frac{S_{p,j-1}^2}{S_{p,j}^2} \quad (1.134)$$

$$F_j = \frac{\sum_{t \in I_{p,j-1}} (Y_{t+j-1} - Y_{t+j-1,p})^2}{\sum_{t \in I_{p,j}} (Y_{t+j} - Y_{t+j,p})^2} \frac{m_j}{m_{j-1}} \quad (1.135)$$

W ogólnym przypadku sprawdzian  $F_j$  będzie ilorzem dwóch zależnych form kwadratowych, wówczas jego dystrybucję można wyznaczyć za pomocą jednej z procedur opisanych w dodatku niniejszej pracy.

Zaproponowana teraz procedura wyznaczania predyktorów  $h$ -giętkich ma pewne słabe punkty. Przez  $\alpha$  oznaczono prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju, które jest subiektywnie ustalane przez statystyka. Praktycznie poza jego kontrolą pozostaje moc testu czyli prawdopodobieństwo niepopelniania błędu drugiego rodzaju, który w naszym przypadku oznaczałby przyjęcie hipotezy  $H_0^{(j)}$ , że predyktor jest nie więcej niż  $j$ -giętki, gdy w rzeczywistości nie jest ona prawdziwa. Moc testu jest w tym przypadku trudna do oceny i należy się spodziewać, że będzie ona mała dla małych liczebności  $m_j$ . Czyli dla dużych parametrów  $j$  należy się spodziewać, że z dużym prawdopodobieństwem popełnienia błędu drugiego rodzaju nie odrzucimy hipotezy  $H_0^{(j)}$ . Tym samym przejdziemy do testowania hipotezy  $H_0^{(j-1)}$ , co w konsekwencji może doprowadzić do wyznaczenia parametru  $h$  oczekiwanej giętkości predyktora na zbyt optymistycznym, czyli małym poziomie.

Niech analizowany predyktor  $Y_{tp}$  będzie oczekiwanie normalnie giętkim predyktorem w przedziale empirycznej weryfikacji prognoz  $I_p$  czyli, że  $E(S_{pj}^2)$  jest nierosnącą funkcją parametru  $j$ . Wówczas predyktor  $Y_{tp}$  nazwiemy wystarczająco w-okresowo giętkim jeśli<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Por. Pawłowski (1973), s. 126.

$$E(S_{pw}^2) \leq E(S_p^2) \quad \text{i} \quad E(S_{p,w-1}^2) > E(S_p^2) \quad (1.136)$$

Zatem należy oczekiwać, że po  $w$ -okresach czasu błąd średniokwadratowy predykcji spadnie co najmniej do poziomu oczekiwanej wartości wariancji ex-post predykcji. Parametr  $w$  można określić podobnie jak poprzednio poprzez testowanie hipotezy postaci:

$$\begin{cases} H_0^{(j)} : E(S_{pj}^2) = E(S_p^2) \\ H_1^{(j)} : E(S_{pj}^2) > E(S_p^2) \end{cases} \quad (1.137)$$

przy czym  $j=1, \dots, k$ , gdzie  $k$  jest maksymalną odległością między kolejnymi punktami zwrotnymi. Jeśli przy wybranym poziomie istotności hipoteza  $H_0^{(1)}$  nie jest odrzucona na korzyść  $H_1$ , to uznajemy, że predyktor może być 1-okresowo wystarczająco giętkim, a w przeciwnym przypadku testujemy hipotezę  $H_0^{(2)}$ . Gdy jej nie odrzucimy, to tym samym nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o 2-okresowo wystarczającej giętkości predyktora. W przeciwnym przypadku, gdy  $H_0^{(2)}$  zostanie odrzucona, to należy przejść do testowania hipotezy  $H_0^{(3)}$ , itd. W ogólności nie odrzucenie hipotezy  $H_0^{(j)}$  oznacza nie odrzucenie o  $j$ -okresowej wystarczającej giętkości predyktora. W przeciwnym przypadku odrzucamy hipotezę o  $j$ -okresowej wystarczającej giętkości z prawdopodobieństwem popełnienia błędu równym założonemu poziomowi istotności  $\alpha$ . Wtedy to należy przejść do weryfikacji hipotezy  $H_0^{(j+1)}$ ; itd. Do testowania hipotezy  $H_0^{(j)}$  używamy następującego sprawdzianu:

$$F_{pj} = \frac{S_{pj}^2}{S_p^2} \quad (1.138)$$

Wobec specyfikacji hipotezy alternatywnej  $H_1^{(j)}$  obszar krytyczny testu należy budować prawostronnie. Podobnie jak w przypadku statystyki  $F_j$  określonej wzorami (1.134) lub (1.135) sprawdzian  $F_{pj}$  jest ilorazem zwykle dwóch zależnych form kwadratowych wektorów o rozkładzie normalnym. Zatem dystrybucję jego rozkładu należy wyznaczać jedną z metod omówionych w Dodatku do niniejszej pracy.

Dodajmy, że predyktor wystarczająco giętki można jeszcze inaczej definiować. Niech  $I_{p^*} = I_p - I_{p_0}$ , gdzie  $I_{p_0}$  jest zbiorem okresów będących punktami zwrotnymi. Zatem zbiór  $I_{p^*}$  składa się z wszystkich okresów empirycznego przedziału weryfikacji prognoz oprócz tych, które są punktami zwrotnymi. Wtedy określamy następującą statystykę:

$$S_{p^*}^2 = \frac{1}{m_*} \sum_{t \in I_{p^*}} (Y_t - Y_{tp})^2 \quad (1.139)$$

przy czym  $m_*$  jest liczbą elementów tworzących zbiór  $I_{p*}$ . Zastępując w wyrażeniach (1.136) wariancję predykcji  $S_p^2$  przez statystykę  $S_{p*}^2$  otrzymujemy zmodyfikowaną definicję predyktora wystarczająco w-giętkiego. Dokonując tej samej zamiany we wzorach (1.137) i (1.138) dochodzimy do reguły wyznaczania parametru  $w$ .

Pawłowski (1973), s. 126 wprowadza pojęcie predyktora najbardziej giętkiego. Modyfikując jego określenie wprowadzamy następującą definicję predyktora  $w_*$ -okresowo wystarczająco najbardziej giętkiego. Niech  $\Pi = \{\pi_w\}$  będzie zbiorem predyktorów w przedziale empirycznej weryfikacji prognoz  $I_p$ , przy czym  $w$  jest parametrem wystarczającej  $w$ -okresowej giętkości. Wtedy predyktor  $\pi_*$  nazwiemy najbardziej  $w_*$ -okresowo wystarczająco giętkim predyktorem, jeśli dla niego jest spełniona nierówność określona wzorem (1.136) oraz

$$w_* = \min_{\pi_w \in \Pi} \text{imum}\{w\} \quad (1.140)$$

Należy więc spodziewać się, że po wystąpieniu punktu zwrotnego predyktor  $\pi_*$  średnio rzecz biorąc najszybciej osiągnie poziom wariancji ex-post predykcji.

## 2. WYBRANE METODY ESTYMACJI TRENDU

### 2.1. Założenia o szeregu czasowym

Szereg czasowy traktujemy jako ciąg zmiennych losowych  $Y_1, \dots, Y_n$  indeksowanych numerami okresów bądź momentów czasu. Wartości oczekiwane, wariancje i kowariancje tych zmiennych losowych oznaczamy odpowiednio symbolami:

$$E(Y_t) = \mu_t, \quad D^2(Y_t) = \sigma_t^2, \quad \text{Cov}(Y_t, Y_h) = c_{th} = \sigma_t \sigma_h \rho_{th}$$

przy czym  $\rho_{th}$  jest współczynnikiem autokorelacji między zmiennymi  $Y_t$  oraz  $Y_h$ .

W niniejszej pracy będziemy analizę szeregu czasowego prowadzili przy następujących założeniach:

$$\bigwedge_{t=1, \dots, n} Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \wedge E(\varepsilon_t) = 0 \quad (2.1)$$

gdzie  $\varepsilon_t$  jest tzw. składnikiem losowym. Dalej będziemy zakładali, że:

$$\bigwedge_{t=1, \dots, n} E(Y_t) = \mu_t, \quad D^2(Y_t) = D^2(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad (2.2)$$

oraz

$$\bigwedge_{\substack{t \neq h \\ t, h = 1, \dots, n}} \rho_{th} = \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_h) = 0 \quad (2.3)$$

Zatem założyliśmy, że składnik losowy ma stałą wariancję w czasie. Ponadto składniki losowe nie są parami skorelowane.

Przyjmujemy, że funkcja  $\mu_t = f(t)$ ,  $t = 1, \dots, n$  tworzy systematyczną składową szeregu czasowego  $\{Y_t\}$ . Szeroko nie zajmujemy się problemem wyodrębniania składowej periodycznej szeregu czasowego oprócz prostego przykładu testowania braku addytywnie nakładających się wahań periodycznych, który jest analizowany w ósmym podrozdziale niniejszego rozdziału. Zatem koncentrujemy się na badaniu przebiegu funkcji trendu lub jego aproksymanty  $\hat{f}(t)$ ,

która jest funkcją zmiennych tworzących szereg czasowy. Wtedy dywergencją lub ciągiem reszt są nazywane różnice:

$$\varepsilon_t = Y_t - f(t), \quad t = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Postuluje się aby ciąg  $\{\varepsilon_t\}$  spełniał określone własności<sup>12</sup>, a m.in. aby  $E(\varepsilon_t)=0$  dla każdego  $t=1, \dots, n$ .

Głównie będą analizowane dwa następujące modele szeregu czasowego. Pierwszy m.in. zakłada stałość nadziei matematycznej:

$$\bigwedge_{\substack{t \neq h \\ t, h = 1, \dots, n}} E(Y_t) = \mu \wedge D^2(Y_t) = D^2(\varepsilon_t) = \sigma^2 \wedge \text{Cov}(Y_t, Y_h) = 0 \quad (2.5)$$

Drugi model dopuszcza możliwość występowania trendu liniowego:

$$\bigwedge_{\substack{t \neq h \\ t, h = 1, \dots, n}} E(Y_t) = at + b \wedge D^2(Y_t) = \sigma^2, \quad \text{Cov}(Y_t, Y_h) = 0 \quad (2.6)$$

W dalszej analizie będziemy także zwykle zakładali, że ciąg zmiennych losowych  $\{Y_t\}$  ma łącznie wielowymiarowy rozkład normalny, co wobec wyżej pojawiającego się założenia, że  $\text{Cov}(Y_t, Y_h) = 0$  dla  $t \dots h = 1, \dots, n$  oznacza, że składowe ciągi  $\{Y_t\}$  będą niezależne.

## 2.2. Metoda najmniejszych kwadratów

Przyjmuje się, że trend można opisać za pomocą analitycznie zadanej funkcji gładkiej. Najprostsza jest funkcja liniowa, czyli:

$$f(t) = at + b; \quad t = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

Inne najczęściej pojawiające się w praktycznych analizach funkcje to wielomian, funkcja potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna, logistyczna, które określają kolejno wzory:

$$f(t) = \sum_{k=0}^h a_k t^k \quad (2.8)$$

$$f(t) = bt^a \quad (2.9)$$

$$f(t) = e^{at+b} \quad (2.10)$$

---

<sup>12</sup> Por. artykuł Hellwiga (1967), gdzie m.in. są określone własności, jakie winna mieć dywergencja szeregu, aby można było uznać trend za dobrze wyodrębniony.

$$f(t) = a \ln t + b \quad (2.11)$$

$$f(t) = \frac{a}{1 + e^{b-ct}} \quad (2.12)$$

Przegląd innych funkcji oraz metod oceny ich parametrów można znaleźć w pracy Stanisza (1986).

W niniejszej pracy koncentrujemy się na analizie liniowej funkcji trendu, chociaż otrzymane tu wyniki, bez większych kłopotów, można przenieść na te funkcje trendu, które za pomocą prostego przekształcenia np. logarytmicznego, dają się sprowadzić do postaci liniowej. Dotyczy to więc funkcji określonych wzorami (2.9)—(2.12).

Parametry liniowej funkcji trendu zwykle szacuje się znaną metodą najmniejszych kwadratów, która daje kolejno następujące estymatory parametrów  $a$  i  $b$ :

$$A_n = \frac{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t}) Y_t}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2} = \frac{6 \sum_{t=1}^n (2t - n - 1) Y_t}{n(n^2 - 1)} \quad (2.13)$$

$$B_n = \bar{Y} - A_n \bar{t} = \frac{2 \sum_{t=1}^n (2n - 3t + 1) Y_t}{n(n - 1)} \quad (2.14)$$

gdzie:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t, \quad \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n t = \frac{n+1}{2} \quad (2.15)$$

Wtedy ocenę trendu (nazywaną jego wartością teoretyczną) otrzymujemy następująco:

$$\hat{Y}_t = A_n t + B_n, \quad t = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

Wiadomo, że jeśli jest prawdziwy model dany wzorem (2.6), to:

$$E(\hat{Y}_t) = at + b = f(t), \quad t = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

Zatem statystyki  $\hat{Y}_t$  dają nieobciążone oceny wartości trendu liniowego.

Niech:  $\mathbf{Y}_n = [Y_1 \dots Y_n]$  oraz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ n & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\hat{\mathbf{e}} = [\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n]$ . Wtedy:

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{Y}\mathbf{M} \quad (2.18)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T \quad (2.19)$$

jest macierzą idempotentną, czyli  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^2$ , natomiast  $\mathbf{I}_n$  jest macierzą jednostkową stopnia  $n$ . Do oceny wariancji składnika losowego  $\sigma^2$  używa się wariancji resztowej:

$$\hat{S}_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2 \quad (2.20)$$

lub

$$\hat{S}_e^2 = \frac{1}{n-2} \mathbf{Y}_n \mathbf{M} \mathbf{Y}_n^T \quad (2.21)$$

Statystyka  $\hat{S}_e$  przy prawdziwości założeń danych wyrażeniem (2.6) jest nieobciążonym estymatorem wariancji składnika losowego.

Otrzymane tutaj wyniki są przydatne przy konstrukcji innych metod wyodrębniania trendu. Oceny trendów liniowych z danych pochodzących ze spójnych podokresów są wykorzystywane w zaproponowanej przez Hellwiga (1967) procedurze wyrównywania szeregów czasowych nazwanej metodą trendu pełzającego. Z kolei Waszkiewicz (1976) analizuje tzw. metodę trendu odcinkowego<sup>13</sup>.

### 2.3. Metoda wykorzystująca średnie ruchome

W literaturze jest dobrze znana metoda wygładzania szeregu czasowego polegająca na przypisywaniu danemu okresowi czasu wartości średniej z obserwacji otaczających go. Niech  $k$  będzie liczbą składników tej średniej, która także jest nazywana (por. Cieślak i in. (1993)) stałą wygładzania. Wtedy jeśli  $k$  jest liczbą nieparzystą to:

$$\bar{Y}_t(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{t+i-(k+1)/2} \quad \text{dla } t = \frac{k+1}{2}, \dots, n - \frac{k-1}{2} \quad (2.22)$$

W przypadku gdy  $k$  jest liczbą parzystą, to:

$$\bar{Y}_t(k) = \frac{1}{2k} (Y_{t-k/2} + Y_{t+k/2}) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} Y_{t+i-k/2} \quad \text{dla } t = \frac{k}{2} + 1, \dots, n - \frac{k}{2} \quad (2.23)$$

Jeśli trend jest funkcją stałą, to  $E(Y_t(k)) = \mu$  dla każdego  $t$  oraz  $k$ . Z kolei gdy spełnione są założenia dane wyrażeniem (2.6), to dla  $k$  parzystego i  $k$  nieparzystego mamy:

---

<sup>13</sup> Por. również artykuł Zadory (1969).



$$E(\bar{Y}_t(k)) = at + b$$

Zatem średnia ruchoma jest nieobciążonym estymatorem odpowiedniej wartości trendu liniowego. Ponadto dla  $k$  nieparzystego mamy:

$$D^2(\bar{Y}_t(k)) = \frac{\sigma^2}{k} \quad (2.24)$$

Dla  $k$  parzystego mamy:

$$D^2(\bar{Y}_t(k)) = \frac{2k-1}{2k^2} \sigma^2 \quad (2.25)$$

Kowariancje dla  $k$  nieparzystego oraz  $t \neq h$  są następujące:

$$\text{Cov}(\bar{Y}_t(k), \bar{Y}_h(k)) = \begin{cases} \frac{k-|t-h|}{k^2} \sigma^2 & \text{dla } |t-h| < k \\ 0 & \text{dla } |t-h| \geq k \end{cases} \quad (2.26)$$

Dla  $k$  parzystego mamy:

$$\text{Cov}(\bar{Y}_t(k), \bar{Y}_h(k)) = \begin{cases} \frac{k-|t-h|}{k^2} \sigma^2 & \text{dla } |t-h| < k \\ \frac{1}{4k^2} \sigma^2 & \text{dla } |t-h| = k \\ 0 & \text{dla } |t-h| > k \end{cases} \quad (2.27)$$

Reszty estymatora trendu wyznaczonego metodą średnich ruchomych mają postać:

$$e_t(k) = Y_t - \bar{Y}_t(k) \quad (2.28)$$

Dla  $k$  nieparzystego mamy:

$$D^2(e_t(k)) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sigma^2 \quad (2.29)$$

Dla  $k$  parzystego mamy:

$$D^2(e_t(k)) = \left(1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) \sigma^2 \quad (2.30)$$

Kowariancje reszt dla  $k$  nieparzystego oraz  $t \neq h$  są postaci:

$$\text{Cov}(e_t(k), e_h(k)) = \begin{cases} -\frac{|t-h|}{k^2} \sigma^2 & \text{dla } 0 < |t-h| \leq k \\ 0 & \text{dla } |t-h| > k \end{cases} \quad (2.31)$$

Dla  $k$  parzystych mamy:

$$\text{Cov}(e_t(k), e_h(k)) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{k} + \frac{|t-h|}{k^2}\right) \sigma^2 & \text{dla } 0 < |t-h| < \frac{k}{2} \\ -\frac{|t-h|}{k^2} \sigma^2 & \text{dla } |t-h| = \frac{k}{2} \\ \left(\frac{1}{k} - \frac{|t-h|}{k^2}\right) \sigma^2 & \text{dla } \frac{k}{2} < |t-h| < k \\ \frac{1}{4k^2} \sigma^2 & \text{dla } |t-h| = k \\ 0 & \text{dla } |t-h| > k \end{cases} \quad (2.32)$$

Niech  $\mathbf{Y} = [Y_1 \dots Y_n]$  oraz  $\bar{Y}(k) = [\bar{Y}_p(k), \bar{Y}_r(k)]$ , gdzie w zależności od tego czy stała  $k$  jest nieparzysta bądź parzysta numery okresów  $p$  i  $r$  są określone we wzorach odpowiednio (2.22) bądź (2.23). Wtedy mamy:

$$\bar{Y}(k) = \mathbf{Y} \mathbf{G}^T(k) \quad (2.33)$$

przy czym jeśli  $k$  jest nieparzyste, to:

$$\mathbf{G}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p(k) \\ \dots \\ \mathbf{G}_r(k) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$p = \frac{k+1}{2}, \quad r = n - \frac{k-1}{2} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{G}_t(k) = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{t-p} & \mathbf{J}_k^T & \mathbf{0}_{r-t} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{G}_t^T(\mathbf{k}) = \frac{1}{k} \left[ \mathbf{0}_{t-p} \ Y_{t-p+1} \dots Y_{t+k-p} \ \mathbf{0}_{r-t} \right]$$

gdzie  $t=p, \dots, r$ , natomiast przez  $\mathbf{0}_r$  oznaczono  $r$ -elementowy wektor wierszowy składający się z samych zer, a przez  $\mathbf{J}_r$   $r$ -elementową kolumnę składającą się tylko z jedynek.

Jeśli stała wygładzania  $k$  jest parzysta, to:

$$p = \frac{k}{2} + 1, \quad r = n - \frac{k}{2} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{G}_t(\mathbf{k}) = \frac{1}{k} \left[ \mathbf{0}_{t-p} \quad \frac{1}{2} \mathbf{J}_{k-1}^T \quad \frac{1}{2} \mathbf{0}_{r-t} \right] \quad (2.38)$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{G}_t^T(\mathbf{k}) = \frac{1}{k} \left[ \mathbf{0}_{t-p} \quad \frac{1}{2} Y_{t-p+1} Y_{t-p+1} Y_{t-p+2} Y_{t-p+3} \dots Y_{t+p-2} \quad \frac{1}{2} Y_{t+p-1} \mathbf{0}_{r-t} \right]$$

przy czym  $t = p, \dots, r$ . Dodajmy, że jeśli  $k$  jest parzyste, to macierz  $\mathbf{G}(\mathbf{k})$  ma wymiary  $(n-k) \times n$ , a gdy  $k$  jest nieparzyste, to wymiary  $(n-k-1) \times n$ .

Wektor reszt ma postać:

$$\mathbf{e}(\mathbf{k}) = \mathbf{Y}\mathbf{M}^T(\mathbf{k}) \quad (2.39)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}) = \mathbf{I}(\mathbf{k}) - \mathbf{G}(\mathbf{k})$$

Gdy  $k$  jest nieparzyste, to:

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}) = [\mathbf{0}_{(n-k) \times p} \quad \mathbf{I}_{n-k} \quad \mathbf{0}_{(n-k) \times (k-1)/2}] \quad (2.40)$$

gdzie  $p$  określa wyrażenie (2.35),  $\mathbf{0}_{m \times h}$  jest macierzą o wymiarach  $m \times h$ , natomiast  $\mathbf{I}_h$  jest macierzą jednostkową stopnia  $(n-k)$ . Jeśli  $k$  jest parzyste, to:

$$\mathbf{I}(\mathbf{k}) = [\mathbf{0}_{(n-k-1) \times p} \quad \mathbf{I}_{n-k-1} \quad \mathbf{0}_{(n-k-1) \times k/2}] \quad (2.41)$$

przy czym  $p$  określono w wyrażeniu (2.37). Macierz wariancji i kowariancji reszt można wyznaczyć z relacji:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ee}(\mathbf{k}) = E(\mathbf{e}^T(\mathbf{k})\mathbf{e}(\mathbf{k})) = \mathbf{M}(\mathbf{k})\mathbf{V}(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})\mathbf{M}^T(\mathbf{k}) \quad (2.42)$$

Jeśli  $\mathbf{V}(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}) = \mathbf{I}_n \sigma^2$ , to elementy macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}_{ee}(\mathbf{k})$  określają wzory (2.29)—(2.32).

## 2.4. Metoda wyrównywania wykładniczego

Jedną z popularniejszych metod wygładzania szeregów czasowych jest tzw. metoda wyrównywania wykładniczego zaproponowana przez Browna (1959) i (1963). Uproszczoną wersję tej metody (por. np. Pawłowski (1973)) określa wzór postaci:

$$\hat{Y}_{t+1}(\alpha) = \alpha Y_{t+1} + (1 - \alpha) \hat{Y}_t(\alpha), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

gdzie:  $0 < \alpha < 1$  jest tzw. parametrem wygładzania wykładniczego oraz  $\hat{Y}_1(\alpha) = Y_1$ . Ocena trendu w okresie  $t+1$  jest więc średnią ważoną obserwacji z tego okresu i oceny trendu w okresie  $t$ -tym. Wyrażenie (2.43) można rozwinąć następująco (por. np. Cieślak i in. (1993) lub Siedlecka (1993)):

$$\hat{Y}_{t+1}(\alpha) = \alpha \sum_{h=1}^{t+1} \beta^{t-h+1} Y_h, \quad t = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.44)$$

gdzie  $\beta = 1 - \alpha$ .

Niech prawdziwy będzie model trendu stałego określonego wzorem (2.5). Wówczas ze wzoru (2.44) wynika, że:

$$E(\hat{Y}_{t+1}(\alpha)) = \alpha \mu \sum_{h=1}^{t+1} \beta^{t-h+1} = \alpha \mu \sum_{h=1}^{t+1} \beta^{h-1}$$

Korzystając ze znanego wzoru na sumę wyrazów postępu geometrycznego mamy:

$$E(\hat{Y}_{t+1}(\alpha)) = \alpha \mu \frac{\beta^{t+1} - 1}{\beta - 1} = \mu (1 - \beta^{t+1}) \quad (2.45)$$

Jeśli więc  $t \rightarrow \infty$ , to  $E(\hat{Y}_{t+1}(\alpha)) = \mu$ . Zatem w rozważanym przypadku statystyka  $\hat{Y}_{t+1}(\alpha)$  nie doszacowuje nadzieję matematyczną  $\mu$ . Dopiero gdy wskaźnik  $t$  oraz parametr  $\alpha$  są dostatecznie duże, to statystyka  $\hat{Y}_{t+1}(\alpha)$  daje nieobciążone oceny wartości oczekiwanej  $\mu$ .

Niech  $\hat{Y} = [\hat{Y}_2(\alpha) \dots \hat{Y}_n(\alpha)]$ . Wówczas:

$$\hat{Y}(\alpha) = \mathbf{Y} \mathbf{A}^T(\alpha) \quad (2.46)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2(\alpha) \\ \dots \\ \mathbf{A}_n(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

jest macierzą o wymiarach  $(n-1) \times n$ , której kolejne wiersze są następujące:

$$\mathbf{A}_t(\alpha) = \alpha \begin{bmatrix} \beta^t \beta^{t-1} \dots \beta & 1 & \mathbf{0}_{n-t-1} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Macierz wariancji i kowariancji wektora  $\hat{\mathbf{Y}}(\alpha)$  określa wzór:

$$\Sigma_{yy}(\alpha) = \mathbf{A}^T(\alpha) \mathbf{V}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}) \mathbf{A}(\alpha) \quad (2.49)$$

Przyjmując, że  $\mathbf{V}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$  można wyznaczyć poszczególne elementy macierzy  $\Sigma_{YY}(\alpha)$ :

$$D^2(\hat{Y}_t(\alpha)) = \alpha^2 \sum_{h=0}^{t-1} \beta^{2h} + \beta$$

Korzystając ze znanego wzoru na sumę skończonego postępu geometrycznego mamy:

$$D^2(\hat{Y}_t(\alpha)) = \frac{\alpha + 2(1-\alpha)^{2t+1}}{2-\alpha} \quad (2.50)$$

Dla  $c \geq 1$  mamy:

$$\text{Cov}(\hat{Y}_t(\alpha), \hat{Y}_{t+c}(\alpha)) = \beta^c D^2(\hat{Y}_t(\alpha)) \quad (2.51)$$

Wektor reszt określa wzór:

$$\mathbf{e}(\alpha) = \mathbf{Y} \mathbf{B}^T(\alpha) \quad (2.52)$$

gdzie:

$$\mathbf{B}(\alpha) = \mathbf{I}_{n-1}^1 - \mathbf{A}(\alpha) \quad (2.53)$$

przy czym  $\mathbf{I}_{n-1}^1$  jest macierzą blokową, której ogólna postać jest następująca:

$$\mathbf{I}_b^a = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{b \times a} & \mathbf{I}_{b \times b} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Macierz  $\mathbf{I}_{b \times b} = \mathbf{I}_b$  jest macierzą jednostkową stopnia b, natomiast  $\mathbf{O}_{a \times b}$  jest macierzą zerową o wymiarach  $a \times b$ .

Macierz wariancji i kowariancji reszt ocen trendu metodą wyrównywania wykładniczego określa więc wzór:

$$\Sigma_{ee}(\alpha) = \mathbf{B}(\alpha) \mathbf{V}(\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}) \mathbf{B}^T(\alpha) \quad (2.55)$$

Po odpowiednich przekształceniach algebraicznych i uproszczeniach mamy:

$$D^2(\mathbf{e}_t) = \beta^2 [1 + D^2(\hat{Y}_2(\alpha))] \quad (2.56)$$

$$\text{lub} \quad D^2(e_t) = \frac{2\beta^2(1 + \beta^{2t-1})}{2 - \alpha} \quad (2.57)$$

$$\text{Cov}(e_t, e_{t+c}) = \beta^c [D^2(\hat{Y}_t(\alpha)) - \alpha^2] \quad (2.58)$$

lub

$$\text{Cov}(e_t, e_{t+c}) = \beta^{c+2} D^2(\hat{Y}_{t-1}(\alpha)) \quad (2.59)$$

### 2.5. Metoda trendu pelzającego

Hellwig (1967) zaproponował do wygładzania szeregu czasowego tzw. trend pelzający, który wyznacza się w następujący sposób. Na podstawie  $m$  obserwacji zmiennych  $Y_k, Y_{k+1}$ , gdzie  $k=1, \dots, n-m+1$  jest wyznaczany trend liniowy za pomocą zwykłej metody najmniejszych kwadratów<sup>14</sup>:

$$\hat{Y}_{h,k} = A_k h + B_k \quad (2.60)$$

gdzie po odpowiednich przekształceniach algebraicznych:

$$A_k = \frac{6}{m(m^2 - 1)} \sum_{t=1}^m (2t - m - 1) Y_{k+t-1} \quad (2.61)$$

$$B_k = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{t=1}^m (2m - 3t + 1) Y_{k+t-1} \quad (2.62)$$

przy czym  $h = 1, 2, \dots, n$ . Następnie są wyznaczone dla ustalonego okresu  $h$  średnie wartości ocen trendów wyliczane m.in. na podstawie  $h$ -tej obserwacji. Zatem:

$$\tilde{Y}_h = \begin{cases} \frac{1}{h} \sum_{v=1}^h (A_v h + B_v) & \text{dla } h = 1, \dots, m-1 \\ \frac{1}{m} \sum_{v=h-m+1}^h (A_v h + B_v) & \text{dla } h = m, m+1, \dots, n-m+1 \\ \frac{1}{n-h+1} \sum_{v=h-m+1}^{n-m+1} (A_v h + B_v) & \text{dla } h = n-m+2, \dots, n \end{cases} \quad (2.63)$$

<sup>14</sup> Hellwig także proponuje do oceny parametrów tego trendu tzw. metodę dwóch punktów.

Statystykę  $\tilde{Y}_h$  można także zapisać w postaci:

$$\tilde{Y}_h = \tilde{A}_h h + \tilde{B}_h \quad (2.63)$$

gdzie dla  $h = 1, \dots, n-m+1$ :

$$\tilde{A}_h = \frac{6}{m(m^2-1)} \sum_{t=1}^m (2t-m-1) \bar{Y}_{t+h-1} \quad (2.65)$$

$$\tilde{B}_h = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{t=1}^m (2m-3t+1) \bar{Y}_{t+h-1} \quad (2.66)$$

przy czym:

$$\bar{Y}_h = \begin{cases} \frac{1}{h} \sum_{v=1}^h Y_v & \text{dla } h = 1, \dots, m-1 \\ \frac{1}{m} \sum_{v=h-m+1}^h Y_v & \text{dla } h = m, \dots, n-m+1 \\ \frac{1}{n-h+1} \sum_{v=h}^n Y_v & \text{dla } h = n-m+2, \dots, n \end{cases} \quad (2.67)$$

Statystyka  $\bar{Y}_h$  jest średnią ruchomą zdefiniowaną wzorami (2.22) i (2.23). Zatem określona wzorem (2.64) wartość trendu pełzającego w okresie  $h$ -tym jest oceną trendu liniowego wyznaczoną metodą najmniejszych kwadratów na podstawie odpowiedniego podciągu kolejnych średnich ruchomych.

Założmy, że szereg czasowy posiada trend liniowy określony wyrażeniem (2.6). Wtedy określona wzorem (2.60) statystyka daje nieobciążone oceny trendu. Stąd i z faktu, że trend pełzający jest średnią arytmetyczną takich ocen wynika, że daje on również nieobciążone oceny trendu.

Równanie (2.64) możemy również zapisać w postaci następującej liniowej kombinacji średnich ruchomych:

$$\tilde{Y}_h = \frac{6h}{m(m^2-1)} \sum_{t=1}^m (2t-m-1) \bar{Y}_{t+h-1} + \frac{2}{m(m-1)} \sum_{t=1}^m (2m-3t+1) \bar{Y}_{t+h-1} \quad (2.68)$$

przy czym  $h=1, \dots, n-m+1$ . Wygodnie jest estymatory dane wzorem (2.68) zapisać w ujęciu macierzowym. Niech:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{Y}_1 \dots \tilde{Y}_n] \quad (2.69)$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\bar{Y}_1 \dots \bar{Y}_n] \quad (2.70)$$

przy czym elementy macierzy  $\tilde{\mathbf{Y}}$  i  $\bar{\mathbf{Y}}$  określają odpowiednie wzory (2.63) i (2.67). Wprowadzamy następujące macierze, każda o wymiarach  $n \times n$ :

$$\mathbf{G}(m) = \mathbf{G}_A(m) + \mathbf{G}_B(m) \quad (2.71)$$

$$\mathbf{G}_A(m) = \frac{6}{m(m^2 - 1)} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{A1} \\ \dots \\ \mathbf{g}_{An} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

gdzie:

$$\mathbf{g}_{AZ} = [\mathbf{O}_{z-1} \quad 1-m \quad 2-m \quad \dots \quad m-2 \quad m-1 \quad \mathbf{O}_{n-m-z+1}]$$

$$\mathbf{G}_B(m) = \frac{2}{m(m-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{B1} \\ \dots \\ \mathbf{g}_{Bn} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

gdzie:

$$\mathbf{g}_{Bz} = [\mathbf{O}_{z-1} \quad 2m-2 \quad 2m-5 \quad \dots \quad 1-m \quad \mathbf{O}_{n-m-z+1}]$$

Wtedy:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{Y}} \mathbf{G}^T(m) \quad (2.74)$$

Niech wektor  $\mathbf{J}_z$  będzie wektorem kolumnowym o wymiarze  $z \times 1$  składającym się z samych jedynek. Określmy macierz:

$$\mathbf{G}_o(m) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{o1} \\ \dots \\ \mathbf{g}_{on} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

gdzie:

$$\mathbf{g}_{oz} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_z^T & \mathbf{O}_{n-z} \end{bmatrix} \quad \text{dla } z=1, \dots, m-1$$

$$\mathbf{g}_{oz} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m-z} & \mathbf{J}_m^T & \mathbf{O}_{n-m-z+1} \end{bmatrix} \quad \text{dla } z=m, \dots, n-m+1$$

$$\mathbf{g}_{oz} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_z & \mathbf{J}_{n-z+1}^T \end{bmatrix} \quad \text{dla } z = n - m + 2, \dots, n$$

Zauważmy, że określony wzorami (2.67) i (2.70) wektor średnich ruchomych jest następującą liniową funkcją wektora  $\mathbf{Y} = [Y_1 \dots Y_n]$ :

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \mathbf{G}_o^T(m) \quad (2.76)$$

Składając to przekształcenie z określoną wzorem (2.74) transformacją otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \mathbf{H}^T(m) \quad (2.77)$$

gdzie:

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}(m) \mathbf{G}_o(m) \quad (2.78)$$



Jeśli spełnione są założenia określone wzorem (2.6), to wektor  $\tilde{Y}$  jest nieobciążonym estymatorem wartości trendu liniowego, a jego macierz wariancji i kowariancji ma postać:

$$\Sigma_{HH} \sigma^2 \mathbf{H}_{(m)} \mathbf{H}_{(m)}^T \quad (2.79)$$

Reszty trendu pełzającego określamy równaniem:

$$\tilde{\epsilon}_h = \mathbf{Y}_h - \tilde{Y}_h \quad (2.80)$$

gdzie  $h = 1, \dots, n - m + 1$ . Zapisujemy je wektorowo następująco:  $\tilde{\epsilon} = [\tilde{\epsilon}_1 \dots \tilde{\epsilon}_{n-m+1}]$ , przy czym:

$$\tilde{\epsilon} = \mathbf{Y} \mathbf{M}_H^T \quad (2.81)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_H = \mathbf{I}_{n-m+1}^{m-1} - \mathbf{H}(m) \quad (2.82)$$

przy czym macierz blokową  $\mathbf{I}_{n-m+1}^{m-1}$  określa wzór (2.54). Wtedy jeśli są prawdziwe założenia określone wyrażeniem (2.6), to  $E(\tilde{\epsilon}) = \mathbf{O}_{n-m+1}$  natomiast macierz wariancji i kowariancji tego wektora ma postać:

$$\Sigma(\tilde{\epsilon}) = \sigma^2 \mathbf{M}_H \mathbf{M}_H^T \quad (2.83)$$

## 2.6. Metoda regresji nieparametrycznej

Składowe wektora  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \dots \mu_n]$  traktujemy dalej jako wartości oczekiwane funkcji regresji, czyli  $\mu_t = f(t) = \epsilon_t$ , gdzie  $\epsilon_t$  jest składnikiem losowym. Do estymacji wartości funkcji trendu  $f(t)$  można użyć nieparametrycznych metod. Obszerny przegląd tych metod można znaleźć m.in. w pracy Härdlego (1991). Jedną z nich jest kernelowski estymator, którego jedna z najprostszych odmian ma postać:

$$\hat{\mu}_t = \sum_{j=1}^n Y_j a_{tj} \quad (2.84)$$

gdzie:

$$a_{ij} = \frac{g\{(i-j)/h\}}{\sum_{j=1}^m g\{(i-j)/h\}} \quad (2.85)$$

przy czym przez  $h>0$  oznaczono tzw. parametr wygładzania, a przez  $g\{\cdot\}$  funkcję gęstości standardowego rozkładu normalnego. Niech  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_n]$  oraz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ . Wówczas:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{Y}\mathbf{A}^T \quad (2.86)$$

Wektor reszt nieparametrycznej funkcji regresji określa wzór:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \quad (2.87)$$

lub

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y}\mathbf{B}^T \quad (2.88)$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_m - \mathbf{A} \quad (2.89)$$

przy czym  $\mathbf{I}_m$  jest macierzą jednostkową stopnia  $m$ . Rząd macierzy  $\mathbf{B}$  wynosi<sup>15</sup>:  $R(\mathbf{B}) \leq m - R(\mathbf{A}) < m$ .

Ponieważ wektor  $\mathbf{e}$  jest liniową funkcją wektora  $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n)$  to  $\mathbf{e} \sim N(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Sigma}_e)$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{B}^T \quad (2.90)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_e = \mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad (2.91)$$

Macierz wariancji i kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}_e$  jest rzędu<sup>4</sup>  $R(\boldsymbol{\Sigma}_e) = R(\mathbf{B}) < m$ . Zatem wektor  $\mathbf{e}$  ma osobliwy rozkład normalny. Składowymi wektora  $\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}^T$  są wartości oczekiwane nieparametrycznej funkcji regresji wyjaśniającej zmiany trendu. Przyjmujemy, że  $\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\mu}$ , co na podstawie wzoru (2.86) prowadzi do równości  $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{O}$ . Wtedy  $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{O}; \boldsymbol{\Sigma}_e)$ .

## 2.7. Weryfikacja hipotezy o występowaniu trendu liniowego

Analizowane w uprzednich podrozdziałach oprócz 2.4 metody wyrównywania szeregów czasowych dawały nieobciążone oceny trendu liniowego. Wtedy reszty otrzymywane jako różnice między oceną trendu a rzeczywistą wartością zmiennej miały zerowe wartości oczekiwane. Fakt ten posłużył do weryfikacji hipotezy o liniowości trendu. Niniejsze rozważania ograniczymy do przypadku, gdy trend jest szacowany metodą najmniejszych kwadratów opisaną w drugim podrozdziale niniejszego rozdziału. Otrzymane tu wyniki dają się przenieść również na przypadek pozostałych z rozważanych tu metod oceny trendu.

---

<sup>15</sup> Por. np. Rao (1982), s. 48.

## 2.7.1. Test Tietjena-Moora

Założmy, że obydwie parametry trendu zależą od numeru  $h$  okresu czasu, a oznaczamy je przez  $\alpha_h, \beta_h$  ( $h = 1, \dots, n$ ). Sprawdzana hipoteza ma więc postać:

$$H_0: \bigwedge_{h=1, \dots, n} \alpha_h = \alpha \quad \text{i} \quad \beta_h = \beta \quad (2.92)$$

wobec hipotezy alternatywnej:

$$H_1: \bigvee_{h=1, \dots, n} \{ \alpha_h \neq \alpha \quad \text{lub} \quad \beta_h \neq \beta \} \quad (2.93)$$

Rozważmy następującą szczegółową hipotezę w stosunku do  $H_1$ :

$$H_2: \begin{cases} \alpha_h = \alpha^{(1)} & \text{i} \quad \beta_h = \beta^{(1)} & \text{dla} \quad h = 1, \dots, n_1 \\ \alpha_h = \alpha^{(2)} & \text{i} \quad \beta_h = \beta^{(2)} & \text{dla} \quad h = n_1 + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.94)$$

Hipoteza  $H_2$  głosi więc zmianę kierunku trendu liniowego lub przesunięcie jego przebiegu.

Przedstawioną hipotezę sprawdzaną  $H_0$  będziemy weryfikować na podstawie wektora  $\mathbf{Y}$ . W tej sytuacji korzystamy z pewnej transformacji liniowej wektora  $\mathbf{Y}$ <sup>16</sup>.

Pierwsza transformacja jest adaptacją przekształcenia Csorgo i Seshadriego (1970) i ma postać:

$$\hat{U}_h = \sqrt{\frac{h}{h+1}} Y_h - \frac{1}{\sqrt{h(h+1)}} \sum_{j=1}^h Y_j \quad (2.95)$$

przy czym  $h=1, \dots, n-1$ . Niech  $\hat{\mathbf{U}} = [\hat{U}_1 \dots \hat{U}_{n-1}]$ . Wtedy zapisany układ równań wyrazamy równaniem macierzowym:

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{G}^T \mathbf{Y} \quad (2.96)$$

gdzie:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \dots \mathbf{G}_{n-1}] \quad (2.97)$$

$$\mathbf{G}_h = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_h \\ h \\ \mathbf{0}_{n-h-1} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{h(h+1)}}, \quad h=1, \dots, n-1 \quad (2.98)$$

Można wykazać, że jeśli  $\mathbf{Y} \sim N(\beta \mathbf{J}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ , to  $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}_{n-1}, \sigma^2 \mathbf{I}_{n-1})$ .

<sup>16</sup> Zob. Wywił (1988 a; 1989).

W przypadku, gdy są prawdziwe założenia określone wzorem (2.6), to można wykazać, że składowe wektora  $\tilde{\mathbf{U}}$  są niezależne i wariancja każdej z nich wynosi  $\sigma^2$ , natomiast wartość oczekiwana jest równa:

$$a_h = \frac{1}{2}a\sqrt{h(h+1)}, \quad h=1, \dots, n-1 \quad (2.99)$$

Niech  $\mathbf{A}^T = [a_1 \dots a_{n-1}]$ , wtedy  $\tilde{\mathbf{U}} \sim N(\mathbf{A}, \sigma^2 \mathbf{I}_{n-1})$ . Wprowadźmy przekształcenie liniowe postaci:

$$\tilde{U}_h = \frac{1}{c_h} \sum_{j=1}^h a_j \tilde{U}_j - \frac{b_{h+1}}{c_h} \tilde{U}_{h+1}, \quad h=1, \dots, n-2 \quad (2.100)$$

gdzie:

$$b_{h+1} = \frac{1}{a_{h+1}} \sum_{j=1}^h a_j^2 = \frac{1}{6} h \sqrt{(h+1)(h+2)} \quad (2.101)$$

$$c_h = \sum_{i=1}^h a_i^2 + b_{h+1}^2 = \frac{1}{6} h \sqrt{(h+1)(h+2)(h+3)} \quad (2.102)$$

Niech  $\tilde{\mathbf{U}}^T = [\tilde{U}_1 \dots \tilde{U}_{n-2}]$ , wtedy przekształcenie (2.100) w ujęciu macierzowym przyjmuje postać:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{U}} \quad (2.103)$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_{n-2}] \frac{1}{c_h}$$

$$\mathbf{B}_h^T = [a_1 \dots a_h - b_{h+1} 0 \dots 0]$$

przy czym każdy wektor  $\mathbf{B}_h$  ma wymiar  $1 \times (n-1)$ .

Można wykazać, że jeśli jest prawdziwa hipoteza  $H_0$ , to  $\tilde{\mathbf{U}} \sim N(\mathbf{0}_{n-2}, \sigma^2 \mathbf{I}_{n-2})$ . W przypadku, gdy jest prawdziwa hipoteza alternatywa  $H_1$  dana wzorem (2.94), to składowe wektora  $\tilde{\mathbf{U}}$  są niezależne i wariancja każdej z nich wynosi  $\sigma^2$ , natomiast wartości oczekiwane:

$$\begin{cases} E(\tilde{U}_h) = 0 & \text{dla } h = 1, \dots, n_1 - 2 \\ E(\tilde{U}_h) = \Delta_h & \text{dla } h = n_1 - 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.104)$$

gdzie:

$$\Delta_h = \frac{1}{6} c_h \left\{ (2h - 3n_1 + 3) + \frac{1}{2} n_1 (n_1 + 1) \delta_\alpha - \frac{1}{2} (n_1 - 1) n_1 (n_1 + 1) \delta_\alpha + n_1 (2h - 3n_1 + 3) \delta_\beta \right\}$$

przy czym:

$$\delta_\alpha = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \quad \delta_\beta = \beta^{(1)} - \beta^{(2)} \quad (2.105)$$

Na podstawie wzorów (2.103) i (2.96) otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{F}\mathbf{Y} \quad (2.106)$$

gdzie:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \quad (2.107)$$

Przekształcenie (2.106) pozwala zastąpić hipotezy  $H_0$  i  $H_2$  odpowiednio przez:

$$H'_0: E(\tilde{\mathbf{U}}) = \mathbf{0}_{n-2} \quad (2.108)$$

$$H'_2: \begin{cases} E(\tilde{U}_h) = 0 & \text{dla } h = 1, \dots, n_1 - 2 \\ E(\tilde{U}_h) = \Delta_h & \text{dla } h = n_1 - 1, \dots, n - 2 \end{cases} \quad (2.109)$$

gdzie  $\Delta_h$  określa wzór (2.97).

Do weryfikacji sformułowanej hipotezy proponuje się użyć testu Tietjena-Moora (1972), którego opis wraz z tablicami wartości krytycznych można znaleźć w pracy Smoljaka i Titarienki (1980). W naszym przypadku test ten jest używany dla  $\kappa \leq n - n_1 - 2$ . Przed obliczeniem sprawdzianu testu ciąg obserwacji zmiennych losowych  $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{n-2}$  tak porządkujemy, aby otrzymać ciąg  $\tilde{U}^{(1)}, \dots, \tilde{U}^{(n-2)}$ , którego kolejne elementy spełniają nierówności:

$$|\tilde{U}^{(1)} - \bar{U}| \leq |\tilde{U}^{(2)} - \bar{U}| \leq \mathbf{K} \leq |\tilde{U}^{(n-2)} - \bar{U}|$$

przy czym:

$$\bar{U} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} \tilde{U}_i$$

Po tej operacji wyznaczamy wartość sprawdzianu postaci:

$$Z_{n-2}^{(\kappa)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-2-\kappa} (\tilde{U}^{(i)} - \bar{U}^\kappa)^2}{\sum_{i=1}^{n-2} (\tilde{U}_i - \bar{U})^2} \quad (2.110)$$

gdzie:

$$\bar{U}^\kappa = \frac{1}{n - \kappa - 2} \sum_{i=1}^{n-\kappa-2} U^{(i)}$$

Obszar krytyczny przedstawionego testu jest budowany lewostronnie.

## 2.7.2. Test na stałość nadziei matematycznych ciągu zmiennych losowych

Hipotezę  $H'_0$  względem hipotezy alternatywnej  $H_2$  można weryfikować za pomocą testu skonstruowanego przez autora (1987, 1988). Sprawdzenie tego testu ma postać:

$$Z_{@} = -\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} \ln(\tilde{U}_i^2) + \ln\left(\sum_{i=1}^{n-2} \tilde{U}_i^2\right) \quad (2.111)$$

Istotnie duże wartości statystyki  $Z_{@}$  świadczą przeciwko hipotezie  $H'_0$ , a więc obszar krytyczny testu jest prawostronny.

Niech  $m=n-2$  i  $m' = \frac{n-3}{2}$ ,  $m'' = \frac{n-4}{2}$ . Wtedy przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza  $H'_0$  sprawdzian  $Z_{@}$  ma następujące momenty:

$$E(Z_{@}) = \begin{cases} 2 \sum_{r=1}^{m'} \frac{1}{2r-1} & \text{dla } m' = 3, 5, \dots \\ 2 \ln(2) + \sum_{r=1}^{m''} \frac{1}{r} & \text{dla } m'' = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (2.112)$$

$$D^2(Z_{@}) = \begin{cases} 4 \sum_{r=1}^{m'} \frac{1}{(2r-1)^2} - \frac{m-1}{2m} \pi^2 & \text{dla } m' = 3, 5, \dots \\ \sum_{r=1}^{m''} \frac{1}{r^2} - \frac{m-3}{6m} \pi^2 & \text{dla } m'' = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (2.113)$$

$$\eta_3(Z_{@}) = \begin{cases} 16 \sum_{r=1}^{m'} \frac{1}{(2r-1)^3} - 14 \zeta(3) \frac{m^2-1}{m^2} & \text{dla } m' = 3, 5, \dots \\ 2 \sum_{r=1}^{m''} \frac{1}{r^3} - 2 \zeta(3) \frac{m^2-7}{m^2} & \text{dla } m'' = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (2.114)$$

przy czym  $\zeta(3) \approx 1.202$ .

$$\eta_4(Z_{@}) = \Delta(Z_{@}) + 3D^2(Z_{@}) \quad (2.115)$$

gdzie:

$$\Delta(Z_{@}) = \begin{cases} 96 \sum_{r=1}^{m'} \frac{1}{(2r-1)^4} - \frac{m^3-1}{m^3} \pi^4 & \text{dla } m' = 3, 5, \dots \\ 2 \sum_{r=1}^{m''} \frac{1}{r^4} - \frac{m^3-15}{15m^3} \pi^4 & \text{dla } m'' = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (2.116)$$

Przybliżone wartości tych momentów określają następujące wzory:

$$E(Z_{@}) \approx \ln(2(n-2)) + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-2} = o(n) \quad (2.117)$$

$$D^2(Z_{@}) \approx \frac{2.828}{n-2} - \frac{2}{(n-2)^2} = O(n^{-2}) \quad (2.118)$$

$$\eta_3(Z_{@}) \approx \frac{12.828}{(n-2)^2} - \frac{8}{(n-2)^3} = O(n^{-3}) \quad (2.119)$$

$$\Delta(Z_{@}) \approx \frac{81.409}{(n-2)^3} - \frac{48}{(n-2)^4} = O(n^{-3}) \quad (2.120)$$

W przypadku dużych rozmiarów prób można rozkład standardowej postaci statystyki testującej aproksymować za pomocą standardowego rozkładu normalnego. Gdy liczebność próby nie jest wystarczająco duża, to rozkład sprawdzianu testu można aproksymować na podstawie jego momentów za pomocą krzywych Pearsona<sup>17</sup>.

Moc testów wykorzystujących sprawdziany  $Z_{n-2}^{(\kappa)}$  i  $Z_{@}$  badano na podstawie wyników symulacji komputerowej<sup>18</sup>. Główne wnioski były następujące: Dla małych wartości parametru  $\kappa$  test  $Z_{n-2}^{(\kappa)}$  miał zwykle większą moc od mocy testu  $Z_{@}$ . Z kolei test  $Z_{@}$  był mocniejszy od  $Z_{n-2}^{(\kappa)}$  przy liczebności  $\kappa$  zbliżającej się do połowy rozmiaru próby i zwłaszcza wtedy, gdy oczekiwane wartości składowych wektora  $\tilde{U}$  były silnie zróżnicowane.

## 2.8. Weryfikacja hipotezy o występowaniu wahań cyklicznych

Przebieg zmian badanego w czasie zjawiska reprezentowanego szeregiem czasowym może charakteryzować się wahaniami cyklicznymi. Zachodzi więc potrzeba wcześniejszego sprawdzenia, czy takie wahania występują. Przegląd wybranych sposobów weryfikacji hipotezy o występowaniu wahań periodycznych można znaleźć np. w pracy Z. Zielińskiego (1979). Do tego celu są adaptowane testy analizy wariancji oraz niektóre testy nieparametryczne, a wśród nich rangowy test Kendalla (1955). Tutaj przedstawiamy metodę weryfikacji wykorzystującą własności rozkładu wektora reszt  $\hat{\epsilon}$  określonego wzorem (2.18).

Na podstawie własności wektora reszt szacowanego modelu regresji liniowej wnioskujemy, że wartość oczekiwana określonego wzorem (2.18) wektora reszt  $\hat{\epsilon}$  jest różna od

<sup>17</sup> W celu obliczenia przybliżonych wartości kwantyli sprawdzianu można wykorzystać rozwinięcie Cornich-Fihera, którego opis znajduje się np. w pracy Kendalla i Stuarta (1966).

<sup>18</sup> Zob. Wywiał (1988 a; 1991).

zera wtedy i tylko wtedy, gdy trend nie jest liniowy bądź występują wartości oddalone, bądź występują wahania cykliczne<sup>19</sup>. Sposoby wykrywania dwóch pierwszych z wymienionych przyczyn rozważano w podrozdziale 2.2. Teraz przedstawimy dwie metody wykrywania wahań periodycznych na podstawie wektora reszt.

Głównie po to, aby uprościć zapis przyjmujemy, że występują wahania addytywne o długości cyklu równym dwóm numerom bieżącym elementów populacji uporządkowanej. Wtedy hipotezę sprawdzaną  $H_0$  określa wzór (2.92), natomiast alternatywną określamy wzorem:

$$H_3: E(Y_h) = \begin{cases} \beta_1 & \text{dla } h = 1 \\ \beta_2 & \text{dla } h = i + 1 \end{cases} \quad (2.121)$$

przy czym  $i = 1, 2, \dots$  oraz  $\beta_1 \neq \beta_2$ .

Przekształćmy wektor  $\mathbf{Y} = [Y_1 \dots Y_n]$ , na wektor  $\tilde{\mathbf{U}}$  określony wyrażeniem (2.106). Wtedy można wykazać, że sformułowana hipoteza  $H_3$  sprowadza się do postaci:

$$H_3': \bigvee_{h=1, \dots, n-2} E(\tilde{U}_h) \neq 0 \quad (2.122)$$

Hipoteza sprawdzana  $H_0$ , dana wzorem (2.92) jest wtedy równoważna hipotezie  $H'_0$  danej wzorem (2.108). Wobec tak sformułowanej hipotezy  $H'_0$  można do jej weryfikacji względem hipotezy  $H_3'$  użyć testu Tietjena-Moora, który opisano w punkcie 2.7.1. Podczas obliczania sprawdzianu tego testu parametr  $\kappa$  należy ustalić na poziomie liczby spodziewanych cykli wahań.

W publikowanych już pracach rozważano inny sposób weryfikacji hipotezy o występowaniu wahań cyklicznych zmiennej wyjaśnianej klasycznym modelem regresji liniowej wielu zmiennych<sup>20</sup>. W analizowanym przypadku zapis tej procedury nieco upraszcza się, ponieważ mamy do czynienia z jedną zmienną objaśniającą w modelu trendu. W wektorze reszt  $\hat{\mathbf{e}}$  określonym wzorem (2.18) wyróżniamy dwa podwektory  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot}$  i  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot\cdot}$ , przy czym podwektor  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot}$  o wymiarze  $n_{\cdot} \times 1$ , gdzie  $1 \leq n_{\cdot} < n$ , powinien zawierać reszty o numerach, którym odpowiada ten sam numer elementu wewnątrz danego cyklu. Przykładowo zgodnie ze specyfikacją hipotezy  $H_3$ , danej wzorem (2.121), wektor  $\hat{\mathbf{e}}$  powinien być utworzony z reszt:  $\hat{e}_{1s}, \hat{e}_{3s}, \hat{e}_{5s}$ , bądź  $\hat{e}_{2s}, \hat{e}_{4s}, \hat{e}_{6s}$ . Elementy podwektora reszt  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot\cdot}$  o wymiarze  $n_{\cdot\cdot} \times 1$  są tymi elementami wektora  $\hat{\mathbf{e}}$ , których nie włączono do  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot}$ . Przez  $\mathbf{M}_{11}$  ( $\mathbf{M}_{22}$ ) oznaczmy podmacierz otrzymywaną z macierzy  $\mathbf{M}$ , danej wzorem (2.19), poprzez skreślenie w niej wierszy i kolumn o numerach będących numerami pierwotnymi reszt tworzących wektor  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot}$  ( $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot\cdot}$ ). Z kolei niech  $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}^T$  będzie podmacierzą macierzy  $\mathbf{M}$  pozostałą po skreśleniu w niej wierszy o numerach równych numerom reszt tworzących wektor  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot\cdot}$  i po skreśleniu w  $\mathbf{M}$  kolumn o numerach równych indeksom reszt tworzących wektor  $\hat{\mathbf{e}}_{\cdot}$ . Przez  $\mathbf{Y}_{\cdot}$  i  $\mathbf{Y}_{\cdot\cdot}$  oznaczamy podwektory wektora  $\mathbf{Y}$ , które są utworzone z jego elementów o numerach zgodnych z

<sup>19</sup> Zob. Wywiał (1986; 1990 c).

<sup>20</sup> Tamże.



numerami reszt wchodzących odpowiednio w skład wektorów  $\hat{\mathbf{e}}_{*g}$  i  $\hat{\mathbf{e}}_{**g}$ . Wtedy rozkład wektora  $\hat{\mathbf{e}}_{**}$  jest niezależny od rozkładu wektora:

$$\hat{\mathbf{e}}_g = \hat{\mathbf{e}}_* - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{[-1]}\hat{\mathbf{e}}_{**} \quad (2.123)$$

Wprowadźmy formy kwadratowe:

$$\mathbf{Q}_* = \hat{\mathbf{e}}_g^T(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1})\hat{\mathbf{e}}_g \quad (2.124)$$

$$\mathbf{Q}_{**} = \hat{\mathbf{e}}_{**}^T\mathbf{M}_{22}^{-1}\hat{\mathbf{e}}_{**} \quad (2.125)$$

Sprawdzian hipotezy  $H_0$  względem  $H_3$  ma postać:

$$F = \frac{\mathbf{Q}_{**} \ n_* - 2}{\mathbf{Q}_* \ n_{**}} \quad (2.126)$$

Gdy jest prawdziwa hipoteza  $H_0$ , to statystyka  $F$  ma znany rozkład centralny Snedecora-Fishera z  $n_{**}$  i  $n_* - 2$  stopniami swobody. W przypadku, gdy jest prawdziwa hipoteza  $H_3$ , zmienna losowa ma niecentralny rozkład Fishera z tymi samymi stopniami swobody co rozkład centralny, a parametr niecentralności ma postać:

$$\delta_F^2 = \frac{a^2}{\sigma^2 n_{**}} \mathbf{J}_{**}^T \mathbf{M}_{22s} \mathbf{J}_{**} \quad (2.127)$$

gdzie  $a = |\beta_1 - \beta_2|$  jest amplitudą wahań, natomiast  $\mathbf{J}_{**}$  jest kolumną jednostkową. Obszar krytyczny testu jest prawostronny.

Ze wzoru (2.127) wynika, że w naszym przypadku moc rozważanego testu rośnie wraz ze wzrostem amplitudy wahań periodycznych, czego należało oczekiwać.

Podkreślmy, że wyżej przedstawiono jedynie dwa spośród wielu testów pozwalających weryfikować hipotezę o liniowości trendu. Dodajmy, że Azzalini i Bowman (1993) wykorzystują do tego celu interesujący sprawdzian konstruowany jako iloraz formy kwadratowej reszt trendu liniowego i reszt regresji nieparametrycznej. Z kolei Domański (1979, 1990) sugeruje do weryfikacji hipotezy o liniowości trendu użyć testu serii i testu na równość stosunku korelacyjnego i współczynnika korelacji. Pierwszy z wymienionych testów ma szczególną zaletę polegającą na tym, że można go stosować przy dowolnym ciągłym rozkładzie reszt. W naszym przypadku sprawdzianem testu może być ogólna liczba serii znaków obserwacji kolejnych elementów wektora losowego  $\tilde{\mathbf{U}}$  określonego wzorem (2.106) lub długość najliczniejszej serii znaków tych obserwacji. Hipotezę o losowości ciągu tych znaków odrzucamy, gdy liczba serii bądź długość serii jest istotnie duża. Wówczas także należy odrzucić hipotezę o liniowości trendu. Analizowaną hipotezę można weryfikować oprócz testów serii za pomocą również innych testów losowości ciągu obserwacji, których przegląd znajdziemy w pracy Domańskiego (1979).

## 2.9. Testowanie zgodności postulowanego modelu trendu z rzeczywistym trendem

Postać analityczna funkcji trendu bądź stała wyrównywania wykładniczego może być nietrafnie wybrana. Świadczyć o tym może wysoka wartość wariancji resztowej, bądź zbyt długie serie tylko dodatnich bądź tylko ujemnych reszt trendu. Wtedy wartości oczekiwane reszt trendu mogą różnić się od zera. Domański (1979, 1990) proponuje do testowania dla weryfikacji hipotezy o równej wektorowi zerowemu wartości oczekiwanej wektora reszt klasycznego modelu regresji liniowej użyć testów nieparametrycznych jak np. testu serii. Z kolei autor (1986, 1987 i 1990a, b) analizował inne testy, które można również wykorzystać w naszym przypadku, gdy hipotetyczny trend jest liniowy lub sprowadzalny poprzez proste transformacje do postaci liniowej. Przy konstrukcji sprawdzianu tego testu wykorzystuje się jednak ograniczające założenie, że przynajmniej w spójnym podciągu okresów czasu szeregu czasowego rzeczywisty trend jest zgodny z hipotetycznym.

Teraz przedstawimy test, który nie będzie wymagał tego krępującego założenia, zwłaszcza z powodu trudności związanych z wyróżnieniem takiego podciągu okresów szeregu czasowego.

Niech  $\mathbf{e}=[e_1 \dots e_n]$  będzie wektorem reszt trendu otrzymanego określaną metodą estymacji np. jedną z opisanych na początku niniejszego podrozdziału. Zakładamy jednak, że wektor  $\mathbf{e}$  jest liniową funkcją zmiennych tworzących szereg czasowy  $Y=[Y_1 \dots Y_N]$ ,  $N \geq n$ . To przekształcenie oznaczamy następująco:

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y}\mathbf{P}^T \quad (2.128)$$

gdzie  $\mathbf{P}$  jest macierzą ustalonych współczynników o wymiarach  $N \times n$  i rzędu  $1 < R(\mathbf{P}) \leq n$ . Ponadto zakładamy, że  $\mathbf{Y} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N \sigma^2)$ . Wektor wartości oczekiwanych oraz macierz wariancji i kowariancji wektora  $\mathbf{e}$  oznaczamy odpowiednio poprzez:

$$\boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{\mu}\mathbf{P}^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{ee} = \sigma^2 \mathbf{P}\mathbf{P}^T \quad (2.129)$$

Zatem  $\mathbf{e} \sim N(\boldsymbol{\delta}_e, \boldsymbol{\Sigma}_{ee})$ .

Gdy postulowana postać trendu jest zgodna z rzeczywistą, to zachodzi równość  $\boldsymbol{\delta}_e = \mathbf{0}$ , natomiast w przeciwnym przypadku, gdy rzeczywisty trend odbiega od zakładanego, to może zajść nierówność  $\boldsymbol{\delta}_e \neq \mathbf{0}$ . Zatem analizowane hipotezy można zapisać następująco:

$$H_0 : \boldsymbol{\delta}_e = \mathbf{0}; \quad H_1 : \boldsymbol{\delta}_e \neq \mathbf{0} \quad (2.130)$$

Odrzucenie hipotezy  $H_0$  przy założonym poziomie istotności będzie świadczyło o występowaniu niezgodności trendów rzeczywistego i postulowanego.

Sprawdzian testu skonstruujemy jako iloraz pewnej formy kwadratowej reszt  $\mathbf{e}$  hipotetycznego trendu przez formę kwadratową reszt będących wynikiem wygładzania właśnie reszt  $\mathbf{e}$ . Wygładzanie reszt  $\mathbf{e}$  ma na celu wyznaczenie ewentualnie występującej funkcji opisującej zmiany wartości oczekiwanych reszt. Przyjmujemy, że ta metoda wyrównywana jest liniowa względem reszt trendu hipotetycznego  $\mathbf{e}$ , czyli niech  $\tilde{\mathbf{e}} = [\tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_n]$  natomiast  $\mathbf{L}$  niech będzie macierzą o nielosowych elementach i wymiarach  $n \times n$  oraz rzędu  $1 \leq R(\mathbf{L}) \leq n$ . Wtedy:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}\mathbf{L}^T \quad (2.131)$$

Reszty powstałe z odjęcia od reszt hipotetycznych ich odpowiednich postaci wygładzonych oznaczamy następująco:

$$\mathbf{W} = \mathbf{e} - \tilde{\mathbf{e}} \quad (2.132)$$

Reszty  $\mathbf{W}$  nazwiemy wtórnymi w stosunku do  $\tilde{\mathbf{e}}$  hipotetycznego trendu. Wtedy ze wzoru (2.131) wynika:

$$\mathbf{W} = \mathbf{eM}_W^T \quad (2.133)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_W = \mathbf{I}_n - \mathbf{L}^T \quad (2.134)$$

Z założenia, że  $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \sigma^2 \mathbf{I})$  oraz ze wzorów (2.131), (2.132) wynika, że:

$$\mathbf{W} = \mathbf{Y P}^T \mathbf{M}_W^T \quad (2.135)$$

$$E(\mathbf{W}) = \boldsymbol{\delta}_w, \quad \Sigma_{ww} = \sigma^2 \mathbf{M P P}^T \mathbf{M}_W^T = \mathbf{M}_w \Sigma_{ee} \mathbf{M}_w^T \quad (2.136)$$

Wówczas  $\mathbf{W} \sim N(\boldsymbol{\delta}_w; \Sigma_{ww})$ .

Założmy, że przyjęta metoda wyrównywania reprezentowana macierzą  $\mathbf{L}$  daje nieobciążone oceny wartości oczekiwanych reszt  $\mathbf{e}$ , a zatem, że spełniona jest równość  $E(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$ , czyli:

$$\boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{\delta}_e \mathbf{L}^T \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\mu P}^T \mathbf{M}_W^T = \mathbf{0} \quad (2.137)$$

Otrzymane rezultaty pozwalają nam sformułować następujące sprawdziany testu dla weryfikacji hipotezy, danej wzorem (2.130):

$$F_1 = \frac{\mathbf{e e}^T}{\mathbf{W W}^T} \quad (2.138)$$

$$F_2 = \frac{\mathbf{e} \Sigma_{ee}^- \mathbf{e}^T}{\mathbf{W} \Sigma_{ww}^- \mathbf{W}^T} \quad (2.139)$$

Przy czym przez  $\Sigma_{ee}^-$  i  $\Sigma_{ww}^-$  oznaczono pseudo-odwrotności macierzy odpowiednio  $\Sigma_{ee}$  i  $\Sigma_{ww}$ . Na podstawie wcześniej otrzymanych własności reszt hipotetycznych  $\mathbf{e}$  oraz reszt typu  $\mathbf{W}$ , dalej nazywanych wtórnymi, mamy:

$$F_1 = \frac{\mathbf{Y P}^T \mathbf{P Y}^T}{\mathbf{Y P}^T \mathbf{M}_W^T \mathbf{M}_W^T \mathbf{P Y}^T} \quad (2.140)$$

$$F_2 = \frac{\mathbf{Y}\mathbf{P}^T\boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Y}^T}{\mathbf{Y}\mathbf{P}^T\mathbf{M}_W^T\boldsymbol{\Sigma}_{ww}^{-1}\mathbf{M}_W\mathbf{P}\mathbf{Y}^T} \quad (2.141)$$

Łączny rozkład wektora  $[\mathbf{e}\mathbf{W}] \sim N(\boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\Sigma})$ , gdzie  $\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\delta}_e \mathbf{0}]$ ,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{ew} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{we} & \boldsymbol{\Sigma}_{ww} \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

przy czym  $\boldsymbol{\Sigma}_{ee}$  i  $\boldsymbol{\Sigma}_{ww}$  określają wzory odpowiednio (2.129) i (2.136), natomiast:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ew} = E(\mathbf{e} - E(\mathbf{e}))^T (\mathbf{W} - E(\mathbf{W})) = \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{P}\mathbf{M}_W^T \mathbf{L} \quad (2.143)$$

Rozkłady statystyk  $F_1$  i  $F_2$  są ilorazami dwóch zależnych form kwadratowych wektora  $\mathbf{Y}$ . Sprawdzian  $F_2$  jest ilorazem dwóch zależnych zmiennych, z których każda ma rozkład  $\chi^2$ , przy czym liczba stopni swobody tych zmiennych nie przekracza liczby elementów szeregu czasowego. Gdy jest prawdziwa hipoteza sprawdzana, dana wzorem (2.130), to  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$  i wtedy statystyki  $F_1$  i  $F_2$  mają centralne rozkłady. W przypadku, gdy jest prawdziwa hipoteza alternatywna, to należy oczekiwać, że  $\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\delta}_e \mathbf{0}]$ . Wówczas formy kwadratowe tworzące liczniki ułamków definiujących statystyki  $F_1$  i  $F_2$  będą miały wartości oczekiwane odpowiednio dane wzorami:

$$E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T | H_1) = E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T | H_0) + \boldsymbol{\delta}_e \boldsymbol{\delta}_e^T > E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T | H_0) \quad (2.144)$$

$$E(\mathbf{e}\boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1}\mathbf{e}^T | H_1) = E(\mathbf{e}\boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1}\mathbf{e}^T | H_0) + \boldsymbol{\delta}_e \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1} \boldsymbol{\delta}_e^T \geq E(\mathbf{e}\boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1}\mathbf{e}^T | H_0) \quad (2.145)$$

Zatem istotne duże wartości statystyk  $F_1$  i  $F_2$  będą świadczyły przeciwko hipotezie  $H_0: E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ , a więc w konsekwencji przeciwko hipotezie o zgodności postulowanego trendu z rzeczywistym.

Rozkładów statystyk  $F_1$  i  $F_2$  nie można określić w prosty sposób. Ich rozkłady są szczególnymi przypadkami ilorazu dwóch zależnych form kwadratowych wektora losowego o rozkładzie normalnym, którego własności obszernie prezentują Mathai i Provost (1992). Potrzebne tu rezultaty pochodzące z ich pracy zamieszczono w Dodatku, gdzie również opisano metody, które w przybliżony sposób pozwolą wyliczyć dystrybuanty statystyk  $F_1$  i  $F_2$  w przypadku, gdy jest prawdziwa hipoteza sprawdzana.

Pozostał jeszcze jeden problem w jaki sposób wybrać metody wygładzania reszt hipotetycznego trendu. Do tego celu można, m.in. wykorzystać metodę średnich ruchomych lub trendu pełzającego. Wtedy jednak liczba elementów wektora  $\mathbf{W}$ , danego wzorem (2.133), może być mniejsza od liczby  $n$  elementów wektora  $\mathbf{e}$ . W tym jednak przypadku równość  $\boldsymbol{\delta}_w = \mathbf{0}$  nie koniecznie musi być spełniona, chociaż małe wartości parametru  $\kappa = \boldsymbol{\delta}_w \boldsymbol{\delta}_w^T$  nie powinny istotnie wpłynąć na rozkład statystyk  $F_1$  i  $F_2$  w stosunku do przypadku, gdy  $\kappa = 0$ .

Można również reszty  $\mathbf{e}$  wygładzać za pomocą tzw. regresji nieparametrycznej, którą opisano w podrozdziale 2.6.

### 3. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI WYBRANYCH PREDYKTORÓW

Niniejszy rozdział prezentuje konstrukcje wybranych predyktorów i ich podstawowe własności. Zatem, m.in. znajdziemy tu wzory na ich błędy średniokwadratowe oraz macierze wariancji i kowariancji błędów predykcji. Oprócz klasycznej metody predykcji polegającej na ekstrapolacji oszacowanego trendu liniowego są brane pod uwagę predyktory konstruowane na podstawie modeli adaptacyjnych. Pawłowski (1973, s. 237) wskazuje, iż "duże ich znaczenie praktyczne polega na tym, że nadają się do efektywnego budowania prognoz nie tylko w warunkach ustabilizowanego rozwoju interesujących nas zjawisk ekonomicznych, lecz także i wtedy, gdy rozwój ten przebiega w sposób nieregularny, a nawet często skokowy, prowadząc do niespodziewanych załamywań się dotychczasowych trendów lub do zakłócenia regularności występujących w przeszłości wahań sezonowych". Ponadto Pawłowski pisze, predyktor konstruowany na podstawie modelu adaptacyjnego powinien charakteryzować się wysoką dokładnością i dużą giętkością. Więcej informacji o własnościach predyktorów adaptacyjnych i ich zastosowaniu podają m.in. Hellwig (1967, 1982), Fijałkowska w pracy pod redakcją Pawłowskiego (1979), Makridakis i Wheelwright (1989), Pawłowski (1973, 1974, 1976 i 1982), Zadora (1970, 1973), Zeliaś (1984) i autorzy artykułów w pracy pod redakcją Hackla i Westlunda (1991).

#### 3.1. Średnie ruchome

Przyjmujemy, iż są ważne założenia o szeregu czasowym określone wzorem (2.5). Bodajże najprostszym predyktorem wartości zmiennej  $Y_T$  ( $T=1, \dots, n$ ) jest obserwacja zmiennej z okresu wcześniejszego, czyli:

$$Y_{Tp1} = Y_{T-1} \quad (3.1)$$

Predyktor ten jest nazywany naiwnym (por. np. Cieślak i in. (1993)). Jego wariancja wynosi:

$$D^2(Y_{Tp1}) = D^2(Y_{T-1}) = \sigma^2 \quad (3.2)$$

Wobec przyjętych założeń, jest on nieobciążony. Wariancje i kowariancje błędów predykcji mają postać:

$$D^2(U_{1,T}) = D^2(Y_T - Y_{T-1}) = 2\sigma^2, \quad T=2, \dots, n+1 \quad (3.3)$$

$$\text{Cov}(U_{1,T}U_{1,T+c}) = \begin{cases} -\sigma^2 & \text{dla } c=1 \\ 0 & \text{dla } c>1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Przypuśćmy, że wartości oczekiwane zmiennych prognozowanych są zgodne z liniowym trendem. Wtedy:

$$\hat{\wedge}_{t \neq h=1, \dots, n} E(Y_t) = at + b \wedge D^2(Y_t) = \sigma^2 \wedge \text{Cov}(Y_t, Y_h) = 0 \quad (3.5)$$

Wówczas:

$$E(U_{1,T}) = a, \quad T=2, \dots, n+1 \quad (3.6)$$

$$E(U_{1,T}^2) = 2\sigma^2 + a^2 \quad (3.7)$$

Zatem prognozy są nieobciążone tylko wtedy, gdy  $a=0$ .

Przedstawiany predyktor z powodzeniem był stosowany do prognozowania kursów walut, akcji i innych zmiennych charakteryzujących rynek papierów wartościowych na co wskazuje m.in.<sup>22</sup> Makridakis (1988 i 1989).

Drugi predyktor jest średnią arytmetyczną z  $k$ -najświeższych obserwacji (por. np. Cieślak i in. (1993) lub Kohler i College (1988):

$$Y_{Tp2}(k) = \frac{1}{k} \sum_{t=T-k}^{T-1} Y_t, \quad T=k+1, \dots, n+1 \quad (3.8)$$

Wówczas jeśli są spełnione założenia określone wyrażeniem (2.5), to:

$$E(Y_{Tp2}(k)) = \mu, \quad D^2(Y_{Tp2}(k)) = \frac{\sigma^2}{k} \quad (3.9)$$

$$\text{Cov}(Y_{Tp2}(k), Y_{Hp2}(k)) = \begin{cases} \frac{k - |H - T|}{k^2} \sigma^2 & \text{dla } |H - T| < k \\ 0 & \text{dla } |H - T| \geq k \end{cases} \quad (3.10)$$

Założmy, że prognozujemy tylko na najbliższy z przyszłych okresów. Wtedy:

$$U_{2T}(k) = Y_T - Y_{Tp2}(k) \quad (3.11)$$

$$D^2(U_{2T}(k)) = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \sigma^2 \quad (3.12)$$

<sup>22</sup> Wiadomość tę podajemy za Cieślak i in. (1993), gdzie prezentowano również inne metody naiwnego prognozowania.

$$\text{Cov}(U_{2,T}(k), U_{2,H}(k)) = \begin{cases} -\frac{1}{k^2} |H-T| \sigma^2 & \text{dla } 0 < |H-T| \leq k \\ 0 & \text{dla } |H-T| > k \end{cases} \quad (3.13)$$

Gdy wartości oczekiwane wykazują trend liniowy (por. wyrażenie (2.6)), to:

$$E(U_{2T}(k)) = a \frac{k+1}{2} \quad (3.14)$$

Zatem w przypadku występowania trendu liniowego predyktor  $Y_{tp2}(k)$  jest obciążony.

Dodajmy, że szczególnym przypadkiem predyktora  $Y_{tp2}$  jest predyktor naiwny  $Y_{tp1}$  określony wzorem (3.1).

Z porównania obciążeń obu predyktorów wynika, że predyktor naiwny  $Y_{tp1}$  daje mniej obciążone prognozy od predyktora  $Y_{tp2}(k)$ ,  $k > 2$ , w przypadku występowania liniowego trendu.

Niech  $\mathbf{Y}_{p2} = [Y_{k+1p2} \dots Y_{n+1p2}]$ . Wtedy ze wzoru (3.8) mamy:

$$\mathbf{Y}_{p2} = \mathbf{Y} \mathbf{G}_2^T(k) \quad (3.15)$$

gdzie:

$$\mathbf{G}_2(k) = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_k(k) \\ \dots \\ \mathbf{g}_n(k) \end{bmatrix}_{(n-k+1) \times n} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{g}_t(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{t-k} & \mathbf{J}_k^T & \mathbf{0}_{n-t} \end{bmatrix}, \quad t = k, \dots, n \quad (3.17)$$

Wektor błędów predykcji definiowanych wzorem (3.11) oznaczamy przez  $\mathbf{U}_2 = [U_{2,k+1} \dots U_{2,n+1}]$ :

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{B}_2^T \quad (3.18)$$

gdzie:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = [Y_1 \dots Y_{n+1}] = [\mathbf{Y} \ Y_{n+1}]$$

$$\mathbf{B}_2 = [\mathbf{0}_{(n-k+1) \times k} \mid \mathbf{I}_{n-k+1}] - [\mathbf{G}(k) \mid \mathbf{0}_{(n-k+1) \times 1}] \quad (3.19)$$

Przyjmując założenia określone wzorem (2.5) mamy następujący wektor wartości oczekiwanych błędów predykcji oraz ich macierz wariancji i kowariancji:

$$E(\mathbf{U}_2) = \mathbf{0}, \quad \Sigma_u = \sigma^2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \quad (3.20)$$

Dodajmy, że w pracach Cieślak i in. (1993), Levy'ego (1948) i Siedleckiej (1993) przedstawiono uogólnienie prezentowanej tutaj procedury predykcji, które jest nazywane metodą ważonych średnich ruchomych.

### 3.2. Prognozowanie poprzez ekstrapolację trendu liniowego

Analityczną metodę oceny liniowego trendu przedstawiono w podrozdziale 2.2. Zwykły predyktor ocen wartości cechy w okresach  $T=n+1, \dots, n+m$  otrzymujemy poprzez przyjęcie we wzorze (2.16), że  $t=T$ , a zatem:

$$Y_{Tp3} = AT + B \quad (3.21)$$

przy czym statystyki A i B określają wzory (2.13)–(2.15). Predyktor ten można również zapisać jako kombinację liniową:

$$Y_{Tp3} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^n c_t(T) Y_t \quad (3.22)$$

gdzie:

$$c_t(T) = \frac{3T}{n+1} (2t - n - 1) + 2n - 3t + 1 \quad (3.23)$$

Wariancje i kowariancje błędów predykcji  $U_{3,T} = Y_T - Y_{Tp3}$  są postaci<sup>23</sup>:

$$D^2(U_{3,T}) = \sigma^2 \left[ 1 + \frac{12h(n+h-1) + 2(n-1)(2n-1)}{(n-1)n(n+1)} \right] \quad (3.24)$$

przy czym:  $T=n+h$ ,  $h=1, \dots, m$ ,

$$\text{Cov}(U_{3,T}, U_{3,k}) = \frac{12hk + 6(n-1)(h+k) + 2(n-1)(2n-1)}{(n-1)n(n+1)} \sigma^2 \quad (3.25)$$

przy czym:  $T=n+h$ ;  $K=n+h$ ;  $h, k=1, \dots, m$ ;  $h \neq k$ .

Następny predyktor ma postać:

$$Y_{Tp4} = A_{T-1} + B_{T-1}, \quad T=n+1, \dots, N+m \quad (3.26)$$

przy czym statystyki  $A_{T-1}$  i  $B_{T-1}$  otrzymujemy ze wzorów (2.13)–(2.15) zastępując w nich wskaźnik  $n$  przez  $T-1$ . Zapisany predyktor daje prognozy na następny okres w stosunku do tego, z którego dysponujemy danymi. Parametry błędów predykcji wyznaczone na podstawie rezultatów otrzymanych przez Browna i in. (1975) są postaci<sup>24</sup>:

$$\begin{cases} D^2(U_{4,T}) = \left( 1 + \frac{4n+4h-2}{(n+h-1)(n+h-2)} \right) \sigma^2 = \frac{T}{T-2} \sigma^2 \\ \text{Cov}(U_{4,T}, U_{4,K}) = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

przy czym  $T \neq K = n+1, \dots, n+m$ .

<sup>23</sup> Por. np. Wywił (1990).

<sup>24</sup> Tamże.



Trzeci predyktor daje prognozę na jeden okres w przyszłość poprzez ekstrapolację trendu liniowego wyznaczanego metodą najmniejszych kwadratów na podstawie  $n$  najświeższych obserwacji:

$$Y_{Tp5} = A_{n,T-1}T + B_{n,T-1}; \quad T = n+1, \dots, n+m \quad (3.28)$$

gdzie statystyki  $A_{n,T-1}$  i  $B_{n,T-1}$  określają wzory (2.60)—(2.62) dla  $h=n+1$ ,  $K=T-1$  oraz  $m+n$ . Na ich podstawie predyktor można zapisać następująco:

$$Y_{Tp5} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{t=1}^n (3t - n - 2) Y_{T-t-2} \quad (3.29)$$

Przyjmując założenia określone wyrażeniem (2.5) mamy<sup>25</sup>:

$$D^2(U_{5,T}) = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n-1)} \sigma^2 = \left(1 + \frac{2(n+1)}{n(n-1)}\right) \sigma^2 \quad (3.30)$$

$$\text{Cov}(U_{5,T}, U_{5,k}) = \begin{cases} \frac{-2c(3c^2 - 9nc + 7n^2 - 2n + 1)}{n^2(n-1)} \sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{n} & \text{dla } 0 < |T - k| \leq n \\ 0 & \text{dla } |T - k| > n \end{cases} \quad (3.31)$$

przy czym  $T \neq K = n+1, \dots, n+m$ , natomiast parametr  $c$  jest liczbą tych samych zmiennych  $Y_t$ , których funkcjami są jednocześnie  $Y_{Tp5}$  i  $Y_{Kp5}$ .

Wektor predyktorów  $\mathbf{Y}_{p5} = [Y_{n+1p,5}, \dots, Y_{n+mp,5}]$  wektora  $\mathbf{Y}_m = [Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m}]$  wyznaczamy z następującego równania:

$$\mathbf{Y}_{p5} = \mathbf{Y} \mathbf{G}_5^T \quad (3.32)$$

gdzie:

$$\mathbf{G}_5 = \frac{2}{n(n-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{1,5} \\ \dots \\ \mathbf{g}_{m,5} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{g}_{i,5} = [\mathbf{0}_{i-1} \quad \mathbf{N}_n \quad \mathbf{0}_{n-i+1}] \quad (3.34)$$

$$\mathbf{N}_n = [1-n \quad 4-n \quad 7-n \quad \dots \quad 2n-8 \quad 2n-5 \quad 2n-2] \quad (3.35)$$

Niech:

$$\mathbf{B}_5 = [\mathbf{0}_{m \times n} \mid \mathbf{I}_n] - \mathbf{G}_5 \quad (3.36)$$

Wtedy wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_5 = \mathbf{Y}_m - \mathbf{Y}_{p5}$  można zapisać jako następującą kombinację liniową wektora  $\mathbf{Y}$ :

<sup>25</sup> Tamże.

$$\mathbf{U}_5 = \mathbf{Y}\mathbf{B}_5 \quad (3.37)$$

W konsekwencji wektor wartości oczekiwanych oznaczamy przez  $\delta_5 = E(\mathbf{U}_5)$ , natomiast ich macierz wariancji i kowariancji przy założeniu danym wzorem (2.5) ma postać:

$$\Sigma_{uu}^{(5)} = \mathbf{B}_5^T \mathbf{B}_5 \sigma^2 \quad (3.38)$$

Zakładając, że model szeregu czasowego jest zgodny z założeniami danymi wyrażeniem (2.6), można wykazać, że wszystkie z analizowanych w niniejszym podrozdziale predyktorów są nieobciążone.

### 3.3. Metoda wyrównywania wykładniczego

Prognoza stawiana prostą metodą wyrównywania wykładniczego ma postać (por. np. Cieślak i in. (1993) lub Siedlecka (1993)):

$$Y_{Tp6} = \hat{Y}_{T-1}(\alpha) \quad (3.39)$$

przy czym  $\hat{Y}_{T-1}(\alpha)$  jest oceną trendu otrzymaną prostą metodą wyrównywania wykładniczego, którą określa wzór (2.43) lub wzory (2.44), (2.46) i (2.47). Na podstawie tych wzorów zapisujemy wektor predyktorów jako liniową funkcję zmiennych  $\mathbf{Y} = [Y_1 \dots Y_{1+m}]$  w następujący sposób:

$$\mathbf{Y}_{p6} = \mathbf{Y}\mathbf{A}^T(\alpha) \quad (3.40)$$

przy czym macierz  $\mathbf{A}(\alpha)$  określono wzorami (2.46)–(2.48).

Wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_6 = \mathbf{Y}_m - \mathbf{Y}_{p6}$  można zapisać następująco:

$$\mathbf{U}_6 = \mathbf{Y}\mathbf{B}_6^T(\alpha) \quad (3.41)$$

gdzie:

$$\mathbf{B}_6(\alpha) = [\mathbf{0}_{m \times 1} | \mathbf{I}_m] - \mathbf{A}(\alpha) \quad (3.42)$$

Wektor wartości oczekiwanych oznaczamy przez  $\delta_6 = E(\mathbf{Y}_{p6})$ , a macierz wariancji i kowariancji przez:

$$\Sigma_{uu}^{(6)} = \mathbf{B}_6(\alpha)\mathbf{B}_6(\alpha)\sigma^2 \quad (3.43)$$

Gdy model szeregu czasowego wyjaśnia wyrażenie (2.5), to stawiane opisaną procedurą prognozy są nieobciążone.

Opisana metoda predykcji jest uważana za uproszczoną w stosunku do metody Browna (1959) i (1963), której opis jest prezentowany m.in. przez Pawłowskiego (1973), (1982) i Zadorę (1970), (1973). Tutaj przedstawimy szczególną postać tego predyktora opisaną, m.in. w pracach Pawłowskiego (1982) lub Zeliasia (1979). Ma on następującą postać:

$$Y_{T_{p7}} = \hat{Y}_{T-1}(\alpha) + (\hat{Y}_{T-1}(\alpha) - \hat{Y}_{T-2}(\alpha))h \quad (3.44)$$

gdzie  $h$  jest tzw. wyprzedzeniem czasowym predykcji. Dalej przyjmujemy, że  $h=1$ , czyli stawiamy prognozę na najbliższy okres, a zatem:

$$Y_{T_{p7}} = 2\hat{Y}_{T-1}(\alpha) - \hat{Y}_{T-2}(\alpha) \quad (3.45)$$

Na podstawie wzorów (2.44)—(2.47) i (3.40) zapisujemy wektor predyktorów  $\mathbf{Y}_{p7}$  jako następującą funkcję wektora zmiennych  $\mathbf{Y}=[Y_1 \dots Y_{1+m}]$ :

$$\mathbf{Y}_{p7} = \mathbf{Y}_{p6} \mathbf{A}_0^T \quad (3.46)$$

gdzie wektor  $\mathbf{Y}_{p6}$  wyjaśnia wzór (3.40) natomiast  $\mathbf{A}_0$  jest macierzą o wymiarach  $(m-1) \times m$  postaci:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Zatem:

$$\mathbf{Y}_{p7} = \mathbf{Y} \mathbf{A}_0^T(\alpha) \quad (3.48)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_0(\alpha) = \mathbf{A}_0 \mathbf{A}(\alpha) \quad (3.49)$$

przy czym  $\mathbf{Y}_{p7}$  ma wymiar  $(m-1) \times 1$  natomiast  $\mathbf{A}_0(\alpha)$  ma wymiary  $(m-1) \times (m+1)$ . Wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_7 = \mathbf{Y}_{m-1} - \mathbf{Y}_{p7}$  da się zapisać następująco:

$$\mathbf{U}_7 = \mathbf{Y} \mathbf{B}_7^T(\alpha) \quad (3.50)$$

gdzie:

$$\mathbf{B}_7(\alpha) = [\mathbf{0}_{(m-1) \times 2} \quad \mathbf{I}_{m-1}] - \mathbf{A}_0(\alpha) \quad (3.51)$$

Wtedy macierz wariancji i kowariancji wektora błędów predykcji ma postać:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{uu}^{(7)} = \mathbf{B}_7(\alpha) \mathbf{B}_7^T(\alpha) \sigma^2 \quad (3.52)$$

Wektor wartości oczekiwanych (czyli obciążeń predykcji) oznaczamy przez  $\boldsymbol{\delta}_7 = E(\mathbf{U}_7)$ .

Opisana procedura wyznaczania prognoz została już znacznie rozbudowana, poprzez m.in. uwzględnienie przy wyznaczanych prognozach dotychczasowych obserwacji błędów predykcji. Należą do nich m.in. metoda Holta i Wintersa, której opis można znaleźć np. w pracy Cieślak i in. (1993).

### 3.4. Prognozowanie metodą wag harmonicznyc

Hellwig (1967) zaproponował metodę tzw. wag harmonicznyc<sup>26</sup> wyznaczania prognoz na podstawie m.in. trendu pelzającego, który tutaj opisano w podrozdziale piątym drugiego rozdziału. Korzystając z wprowadzonego tam macierzowego zapisu wyznaczamy wektor przyrostów trendu pelzającego  $\mathbf{W}=[W_2 W_3 \dots W_n]$  następująco:

$$\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{D}^T \quad (3.53)$$

przy czym wektor  $\tilde{\mathbf{Y}}$  określają wzory (2.69)—(2.77) natomiast  $\mathbf{D}$  jest macierzą o wymiarach  $(n-1) \times n$  postaci:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oznaczmy wektor tzw. wag harmonicznyc wzorem:

$$\mathbf{c}(n) = [c_2(n) \ c_3(n) \dots c_n(n)] \quad (3.54)$$

gdzie:

$$c_{h+1}(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^h \frac{1}{n-i} \quad (3.55)$$

przy czym  $h=1, \dots, n-1$ . Teraz ważoną sumę przyrostów określa wzór:

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{c}(n)\mathbf{W}^T \quad (3.56)$$

W końcu prognozę na okres T-ty wyznacza równanie:

$$Y_{Tp8} = \tilde{\mathbf{Y}}_n + (T-n)\bar{\mathbf{W}} \quad (3.57)$$

lub

$$Y_{Tp8} = \tilde{\mathbf{Y}}_n + (T-n)\mathbf{c}(n)\mathbf{D}\tilde{\mathbf{Y}}^T \quad (3.58)$$

Na podstawie wzorów (2.71)—(2.74) mamy:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_n = \bar{\mathbf{Y}}\mathbf{g}^T \quad (3.59)$$

gdzie:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{A,n} + \mathbf{g}_{B,n} \quad (3.60)$$

<sup>26</sup> Waszkiewicz (1976) analizuje tzw. uproszczoną metodę wag harmonicznyc.

Z kolei ze wzorów (2.76)—(2.78) wynika:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{Y}\mathbf{G}_o^T \mathbf{g}^T = \mathbf{g}\mathbf{G}_o \mathbf{Y}^T \quad (3.61)$$

Podobnie na podstawie wyrażeń (2.71)—(2.78) uzyskujemy:

$$\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{c}(n)\mathbf{D}\mathbf{H}(m)\mathbf{Y}^T = \mathbf{Y}\mathbf{H}^T(m)\mathbf{D}^T \mathbf{c}^T(n) \quad (3.62)$$

Zakładając, że  $T=n+1$  ze wzorów (3.61), (3.62) i (3.58) wynika:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{Tp8} = \mathbf{Y}\mathbf{P}_H^T \quad (3.63)$$

gdzie:

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{g}\mathbf{G}_o + \mathbf{c}(n)\mathbf{D}\mathbf{H}(m) \quad (3.64)$$

Można wykazać, że jeśli szereg czasowy ma liniowy trend oraz są spełnione założenia dane wyrażeniem (2.6), to  $\mathbf{Y}_{Tp8}$  daje nieobciążone oceny trendu w  $T$ -tym okresie, a jego wariancja wynosi:

$$D^2(\mathbf{Y}_{Tp8}) = \mathbf{P}_H^T \mathbf{P}_H \sigma^2 \quad (3.65)$$

Modyfikacje opisanej metody prognozowania lub pokrewne do niej procedury znajdziemy np. w pracach Bartosiewicza (1970 i 1975), Czerwińskiego i Guzika (1980) oraz Waszkiewicz i Waszkiewicz (1971) lub Waszkiewicz (1976).

### 3.5. Test-predyktory

Dalej ograniczamy analizę predyktorów do tych, które dają prognozy na jeden okres w przyszłość w stosunku do ostatniego okresu, z którego pochodzą obserwowane dane. Ponadto, dla ustalenia uwagi, analizujemy dalej tylko dwie metody wyznaczania prognoz, co nie umniejsza otrzymywanych tutaj rezultatów, ponieważ można je przenieść na inne procedury konstrukcji prognoz. Pierwsza z analizowanych metod konstrukcji prognoz to procedura wykorzystująca średnie ruchome, a drugi sposób wyznaczania prognoz polega na ekstrapolacji liniowego trendu. Przyjmujemy jednak, że liczba danych, na podstawie których są wyznaczane prognozy może być zmienna. Gdy prognoza na okres  $T$ -ty jest stawiana poprzez ekstrapolację trendu wyznaczonego na podstawie najświeższych  $k$  danych, to predyktor ten wyznaczamy ze wzorów (3.29) lub (3.32)—(3.35) przez zastąpienie liczebności danych  $n$  liczbą  $k$ . Wtedy:

$$\mathbf{Y}_{Tp5}(k) = \mathbf{Y}\mathbf{g}_{T,9}(k|0); \quad n < T \leq n+m \quad (3.66)$$

gdzie:

$$\mathbf{g}_{T,9}(k|0) = \frac{2}{k(k-1)} [\mathbf{0}_{T-k-1} \quad \mathbf{N}_k \quad \mathbf{0}_{n+m-k-i+1}] \quad k \leq n \quad (3.67)$$

Z kolei średnią ruchomą wyznaczaną z  $k$  najświeższych obserwacji oznaczamy przez:

$$\mathbf{Y}_{Tp2}(k) = \mathbf{Y}\mathbf{g}_{T,9}(k|1); \quad n < T \leq n+m \quad (3.68)$$

gdzie:<sup>27</sup>

$$\mathbf{g}_{T,9}(k|i) = \frac{1}{k} \left[ \mathbf{0}_{T-k-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{0}_{n+m-k-i+1} \right] \quad (3.69)$$

Wówczas wektor składający się z predyktorów  $Y_{tp2}(k)$  lub  $Y_{tp5}(k)$  oznaczamy symbolem:

$$\mathbf{Y}_{p9} = \mathbf{Y} \mathbf{G}_9^T \quad (3.70)$$

gdzie:

$$\mathbf{G}_9 = [\mathbf{g}_{T,9}(k|\eta)], \quad T=n+1, \dots, n+m \quad (3.71)$$

przy czym  $\eta=0$ , gdy użyjemy predyktora  $Y_{tp5}(k)$ , natomiast  $\eta=1$ , jeśli jest wykorzystywany predyktor  $Y_{tp2}(k)$ .

Wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_9 = \mathbf{Y}_m - \mathbf{Y}_{p9}$  można zapisać następująco:

$$\mathbf{U}_9 = \mathbf{Y} \mathbf{B}_9 \quad (3.72)$$

gdzie:

$$\mathbf{B}_9 = [\mathbf{0}_{m \times n} \mid \mathbf{I}_n] - \mathbf{G}_9 \quad (3.73)$$

Wektor wartości oczekiwanych wektora błędów predykcji i jego macierz wariancji i kowariancji są postaci:

$$E(\mathbf{U}_9) = \boldsymbol{\delta}_9, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^{(9)} = \mathbf{B}_9^T \mathbf{B}_9 \boldsymbol{\sigma}^2 \quad (3.74)$$

Pozostaje problem sposobu podejmowania decyzji o wyborze predyktora, za którego pomocą ma być obliczana prognoza na  $t$ -ty okres. W przypadku niestacjonarnego przebiegu szeregu czasowego, gdy mamy do czynienia ze zmianami kierunku trendu można zaproponować, by podejmować decyzję na podstawie obserwacji najświeższego błędu predykcji w okresie  $T-1$ .

Przypuśćmy, że prognozy obliczamy tylko poprzez ekstrapolację oceny liniowego trendu na najbliższy przyszły okres. Zatem używamy do tego celu predyktora  $Y_{tp9}(k) = Y_{tp5}$ , przy czym dopuszczamy możliwość zmiany rozmiaru  $k$  próby, na podstawie której jest szacowany trend. Przypuśćmy, że dopuszczalny błąd predykcji został ustalony na poziomie  $d$ . Niech prognoza na okres  $T$ -ty będzie stawiana za pomocą predyktora  $Y_{tp5}(k)$ . Wtedy jeśli zaobserwowany w  $T$ -tym okresie błąd prognozy  $u_{9,T} \leq d$ , to prognozy na okres  $T+1$  stawiamy na podstawie predyktora  $Y_{T+1p5}(k+1)$ , będącego funkcją oceny trendu wyznaczonego na podstawie  $k+1$  najświeższych danych. Prognoza na okres  $T$ -ty była wyznaczona na podstawie  $k$  danych, czyli o jedną mniej niż prognoza na kres  $T+1$ . Wzrost liczebności danych powoduje spadek wariancji ex-ante błędu predykcji, co wynika ze wzoru (3.30). Należałoby więc zwiększać liczebność próby, na podstawie której jest oceniany później ekstrapolowany trend, ponieważ należy się spodziewać spadku wariancji predykcji ex-ante. Tego należy jednak oczekiwać tylko wtedy, gdy trend badanego zjawiska jest liniowy i nie zmienia w czasie kierunku. Gdy zmiany kierunku trendu występują, to wówczas prognozy będą obciążone, czyli  $\delta_T = E(U_{5,T}) \neq 0$ .

Wówczas także wzrośnie błąd średniokwadratowy predykcji  $E(U_{5,T})^2 = D^2(U_{5,T}) + \delta_T^2$ . Wtedy należy spodziewać się, iż prognoza może być niedopuszczalna, czyli  $u_{5,T} > d$ . W tej

<sup>27</sup> Por. wzory (3.15) — (3.17).

sytuacji należy liczyć się z ewentualną zmianą kierunku trendu. W tym przypadku prognozę na okres  $T+1$  można wyznaczyć w dwojaki sposób. Pierwszy jest radykalny i polega na wykorzystaniu predyktora naiwnego  $Y_{T+1p1}$ , analizowanego na początku niniejszego rozdziału. Drugi sposób otrzymywania prognozy będzie polegał na ekstrapolacji trendu wyznaczonego na podstawie zmniejszanej liczby obserwacji. Można pominąć jedną najstarszą obserwację z dotychczas wykorzystanych do oceny trendu. Zatem wykorzystuje się predyktor  $Y_{T+1p9(k-1)} = Y_{T+1p5}$ .

Można oczywiście stosować inny rząd redukcji danych. Trzeba przy tym jednak pamiętać, że zmniejszenie liczebności danych powoduje wzrost wariancji *ex-ante* predykcji, natomiast wtedy predyktor  $Y_{tp9(k)}$  powinien w przyszłych okresach szybciej zaadaptować się do zmiany kierunku trendu w tym sensie, że w szybkim tempie winno się zmniejszyć obciążenie predykcji zmiennej. Radykalne podejście winno więc zapewnić dużą giętkość predyktora. Należałoby więc je zalecać zwłaszcza wtedy, gdy zaobserwujemy znaczne przekroczenie błędu dopuszczalnego predykcji. Wówczas wydaje się, że jest to silny sygnał znaczącej zmiany kierunku trendu. Wtedy aby predyktor  $Y_{tp9(k)}$  szybko zaadaptował się do trendu, który będzie przebiegał w innym niż dotychczas kierunku, należy stawiać prognozy na najbliższy okres za pomocą predyktora naiwnego bądź  $Y_{T+1,p9(2)}$ , bądź  $Y_{T+1,p9(3)}$ . Wówczas gdy wyznaczona prognoza na okres  $T+1$  jest dopuszczalna, to dodajemy najświeższą obserwację zmiennej prognozowanej do zbioru danych jednocześnie nie pomijając najstarszej obserwacji z dotychczasowego zbioru danych. W następnych okresach powtarzamy opisaną procedurę ustalania liczby  $k$  danych, na podstawie których jest wyznaczany predyktor.

Przedstawiona tu procedura predykcji jest podobna do metody prognozowania na podstawie tzw. liniowego trendu odcinkowego wprowadzonej przez Waszkiewicz (1976). W tym przypadku liczbę obserwacji, na podstawie której jest oceniany liniowy trend powiększa się sukcesywnie do momentu zaobserwowania czterech kolejnych reszt trendu o tym samym znaku<sup>28</sup>. Wówczas następną ocenę trendu wyznacza się na podstawie dwóch najświeższych obserwacji szeregu czasowego, potem trzech obserwacji itd., aż do momentu ewentualnego pojawienia się znów czterech reszt o tym samym znaku. Wtedy znów prowadzi to do redukcji danych, na podstawie których wyznacza się trend, a potem prognozy badanej zmiennej.

Zauważmy, że seria czterech kolejnych reszt trendu o tym samym znaku staje się bardziej prawdopodobna wraz z wydłużaniem się szeregu czasowego, na podstawie którego są oceniane parametry trendu liniowego. Dlatego należy znaleźć regułę ustalania ilości kolejnych reszt trendu o tym samym znaku, przy której będzie należało uznać, że te reszty nie układają się losowo, co może świadczyć o zmianie kierunku przebiegu trendu. Do tego celu można wykorzystać test serii<sup>29</sup>. Wówczas przy zadanym poziomie ufności znajdujemy krytyczną długość serii. Gdy zaobserwowana najdłuższa liczba kolejnych reszt o tym samym znaku jest większa od tej wartości krytycznej, to należy uznać, że ciąg reszt nie jest losowy przy wybranym poziomie istotności testu i wtedy należy zmniejszyć ilość kolejnych obserwacji szeregu czasowego, na podstawie którego jest szacowany trend. Z kolei jeśli zaobserwowana najdłuższa liczba kolejnych reszt o tym samym znaku jest mniejsza od wartości krytycznej długości serii znaków, to nie ma podstaw do uznania reszt jako ciągu nielosowego. Wówczas należy włączyć najświeższą obserwację szeregu czasowego do danych, na podstawie których jest szacowany trend używany dalej do prognozowania.

Opisane sposoby sprawdzania dopuszczalności otrzymanych prognoz można zastąpić testowaniem istotności odchyień od zera obserwowanych błędów prognoz lub innymi słowy

<sup>28</sup> Por. artykuł Zadory (1969).

<sup>29</sup> Szczegółowy opis tego testu oraz odpowiednie tablice znajdziemy np. w pracach Domańskiego (1979 i 1990).

weryfikacji hipotezy głoszącej, że obciążenie predykcji jest równe zeru, co zapisujemy następująco:

$$H_0 : \delta_T = 0; \quad H_1 : \delta_T \neq 0 \quad (3.75)$$

Gdy przy przyjętym poziomie istotności nie będzie podstaw do odrzucenia hipotezy  $H_0$ , to prognozę na okres  $T+1$  obliczamy za pomocą predyktora  $Y_{T+1|p_9}(k+1)$ . W przeciwnym przypadku, gdy przy założonym poziomie istotności odrzucimy hipotezy  $H_0$  na korzyść  $H_1$ , to należy zastanowić się nad problemem o ile zredukować liczbę danych  $k$ , aby stosowany predyktor okazał się w przyszłości dostatecznie giętkim. Podejmowanie decyzji o wyborze predyktora, co w tym przypadku sprowadza się do ustalenia wartości parametru  $k$ , odbywa się poprzez testowanie hipotezy  $H_0$  i dlatego właśnie tak określony sposób wyznaczania prognozy będziemy nazywali test-predyktorem<sup>30</sup>. Do tego typu metod predykcji należy również zaliczyć wyżej opisaną procedurę wykorzystującą test serii do ustalania liczby obserwacji szeregu, na podstawie którego jest wyznaczany trend liniowy i prognozy.

Konstruowaną teraz procedurę prognozowania można wzbogacić poprzez uwzględnienie predyktora  $Y_{tp2}(k)$  będącego średnią ruchomą. Jest on w pewnym sensie szczególny do predyktora  $Y_{tp9}(k)$ , ponieważ średnia ta jest oceną wyrazu wolnego (stałej) liniowego trendu. Ten predyktor zaleca się stosować wówczas, gdy w przebiegu szeregu czasowego występują okresy stacjonarne w tym sensie, że trend jest funkcją stałą. Aby zidentyfikować ten stan rzeczy, należałoby zbadać istotność odchylenia od zera współczynnika kierunkowego trendu wyznaczonego na podstawie  $v \leq k$  najświeższych danych. Sformułowana hipoteza sprawdzana i do niej alternatywna mają więc postać:

$$H_0 : a = 0; \quad H_1 : a \neq 0 \quad (3.76)$$

przy czym hipoteza  $H_0$  ma obowiązywać na odcinku czasu  $t=T-v, \dots, T$ ;  $v \leq k$ . Podstawą konstrukcji sprawdzianu testu byłaby więc statystyka  $A_{v,T}$ , określona wzorami (2.61) i (3.28). Przypuśćmy, że hipoteza  $H_0$  przy ustalonym poziomie istotności nie została odrzucona dla  $v \leq v_0$ . Wtedy można na okres  $T+1$  stawiać prognozę za pomocą średniej ruchomej  $Y_{tp2}(v_0)$ , a nie za pomocą predyktora  $Y_{tp5}(k)$ . Trzeba jednak zaznaczyć, że dla małych  $v_0$  nie tylko moc stosowanego testu będzie niska z racji właśnie małej liczby danych, ale także z tego samego powodu wariancja predykcji będzie duża. Chociaż z drugiej strony gdyby szereg czasowy zachowałby się w przyszłości stacjonarnie, to nie wystąpiłoby obciążenie predykcji.

Opisany test-predyktor można zastąpić innymi. Przykładowo można rozważyć metodę wag harmonicznycy Hellwiga, której podstawą byłby trend pełzający o zmiennym segmencie wygładzania<sup>31</sup>. Można także wziąć pod uwagę metodę wyrównywania wykładniczego. W tym przypadku parametr wyrównywania wykładniczego należałoby zwiększać, gdy wystąpiłby niedopuszczalny błąd predykcji, a ewentualnie zmniejszać, gdy szereg zachowywałby się dostatecznie długo stacjonarnie w sensie stałości trendu.

Zagadnienie sprawdzania dopuszczalności prognoz można rozszerzyć poprzez sprawdzanie nieobciążoności ciągu prognoz otrzymanych dla kolejnych okresów poprzedzających okres bieżący. Do tego celu można wykorzystać odpowiednie testy analizowane w następnym rozdziale.

<sup>30</sup> Por. pojęcie test-predyktora wprowadzone w artykule Bankrofta (1975).

<sup>31</sup> Trend ten opisano w pracach Hellwiga (1984) i Siedleckiej (1993).



## 4. WERYFIKACJA HIPOTEZ O NIEOBCIĄŻONOŚCI PREDYKCJI

### 4.1. Nieobciążoność pojedynczej prognozy

Niech  $Y_{tp}$  będzie predyktorem wartości zmiennej losowej  $Y_T$ . Predyktor ten jest funkcją wektora zmiennych losowych  $\mathbf{Y}=[Y_1 \dots Y_n]$ , przy czym  $T > n$ . Błąd predykcji oznaczamy przez  $U_T = Y_T - Y_{tp}$ , a jego parametry przez:  $\delta_T = E(U_T)$  oraz  $\sigma_{U_T}^2 = D^2(U_T)$ . Ponadto zakładamy, że zmienne losowe  $\mathbf{Y}$  i  $Y_T$  mają łącznie wielowymiarowy rozkład normalny i są niezależne oraz  $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{I}\sigma^2)$ ,  $Y_T \sim N(\mu; \sigma^2)$ .

#### 4.1.1. Testowanie na podstawie reszt modelu trendu

Przedmiotem rozważań będzie weryfikacja hipotezy o nieobciążoności predyktora  $Y_{tp}$ , którą zapisujemy następująco:

$$H_0 : \delta_T = 0: \quad H_1 : \delta_T \neq 0 \quad (4.1)$$

Niech  $Q$  jest formą kwadratową wektora  $\mathbf{Y}_h = [Y_1 \dots Y_h]$ ,  $h < T$ , która ma centralny rozkład  $\chi^2$  z  $k$  stopniami swobody. Wówczas sprawdzian testu określamy następująco:

$$Z_T = \frac{U_T}{c_T \sqrt{Q}} \sqrt{k} \quad (4.2)$$

gdzie parametr  $c_T$  wynika z równości:

$$D^2(U_T) = \sigma_{U_T}^2 = c_T^2 \sigma^2$$

Statystyka  $Q$  będzie konstruowana w trojaki sposób. Po pierwsze może być funkcją reszt oceny trendu w okresach  $t=1, \dots, n < T$ . Oznaczając te reszty wektorem  $\mathbf{e}=[e_1 \dots e_n]$  mamy:

$$Q(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{e}^T \quad (4.3)$$

przy czym  $\mathbf{M}^{-1}$  jest pseudo-odwrotnością macierzy  $\mathbf{M}$ , którą określa wzór:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e = \sigma^2 \mathbf{E}(\mathbf{e} - \mathbf{E}(\mathbf{e}))(\mathbf{e} - \mathbf{E}(\mathbf{e}))^T$$

Jeśli wektor reszt  $\mathbf{e}$  i błąd predykcji  $U_T$  są niezależne<sup>32</sup> oraz  $\mathbf{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ , to statystyka:

$$Z_{Te} = \frac{U_T}{c_T \sqrt{Q(\mathbf{e})}} \sqrt{k} \quad (4.4)$$

ma niecentralny rozkład Studenta z  $k$  stopniami swobody i parametrem niecentralności  $\Delta_e$  określonym wzorem:

$$k = R(\mathbf{M}_e), \quad \Delta_e^2 = \frac{\delta_T^2}{c_T^2 \sigma^2} \quad (4.5)$$

przy czym  $R(\mathbf{M}_e)$  jest rzędem macierzy  $\mathbf{M}_e$ . Rozkład statystyki  $Z_{Te}$  wyprowadza się następująco:  $c_T^{-1} U_T \sim N(c_T^{-1} \delta_T; \sigma^2)$ . Forma kwadratowa  $Q(\mathbf{e})$  jest niezależna od  $U_T$  oraz ma rozkład  $\chi_k^2$  z  $k = R(\mathbf{M}_e)$  stopniami swobody, por. Rao (1962) lub Rao i Mitra (1971). Stąd i ze znanej definicji rozkładu Studenta wynika już, że  $Z_{Te}$  ma niecentralny rozkład Studenta z parametrem niecentralności określonym w wyrażeniu (4.5).

Jeśli hipoteza  $H_0$  jest prawdziwa, to  $Z_{Te}$  ma centralny rozkład Studenta. Zatem istotnie duże lub małe wartości sprawdzianu  $Z_{Te}$  będą świadczyły przeciwko hipotezie  $H_0$  głoszącej, że prognoza wyznaczona na  $T$ -ty okres jest nieobciążona. Obszar krytyczny testu jest więc dwustronny.

Trzeba tu podkreślić, że statystykę  $Z_{Te}$  można stosować tylko wtedy, gdy został trafnie dobrany trend, w tym sensie, że spełniona jest równość  $\mathbf{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$ .

W szczególności, gdy prognozy są obliczane poprzez ekstrapolację liniowego trendu za pomocą predyktora  $Y_{ip3}$ , określonego w podrozdziale 3.2, to błąd predykcji  $U_{3,T}$  ma niezależny rozkład od reszt trendu liniowego  $\hat{\mathbf{e}} = [\hat{e}_1 \dots \hat{e}_n]$ ,  $n < T$ , por. Rao (1982) lub Wywiół (1982). Wtedy na podstawie wzoru (3.24) określona wzorem (4.4) statystyka przyjmuje następującą postać (por. Chow (1995), str. 87):

$$Z_{Te} = \frac{U_T}{c_T \sqrt{\hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T}} \sqrt{n-2} \quad (4.6)$$

gdzie:

$$c_T^2 = 1 + \frac{12h(n+h-1) + 2(n-1)(2n-1)}{(n-1)n(n+1)} \quad (4.7)$$

przy czym  $T = n+h$ ,  $h > 0$ , a reszty określają wzory (2.18) i (2.19). Statystyka  $Z_{Te}$  ma niecentralny rozkład Studenta z  $(n-2)$  stopniami swobody i parametrem niecentralności danym wzorem (4.5), przy czym występującą w nim wielkość  $c_T^2$  określa teraz wzór (4.7).

---

<sup>32</sup> Warunki niezależności formy liniowej i formy kwadratowej wektora losowego o rozkładzie normalnym podano w Dodatku do niniejszej pracy.

Trzeba podkreślić, że analizowany teraz sprawdzian ma rozkład Studenta, gdy w okresach  $t=1, \dots, n$  rzeczywiście trend jest liniowy.

W przypadku, gdy prognoza jest formułowana za pomocą średniej ruchomej  $Y_{Tp2}(k)$  określonej wzorem (3.8), to statystyka  $Z_{Te}$  przyjmuje postać:

$$Z_{Te} = \frac{U_T}{\hat{S}} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \quad (4.8)$$

gdzie:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{t=T-h-k}^{T-h} (Y_t - \bar{Y})^2, \quad \bar{Y} = \frac{1}{k} \sum_{t=T-h-k}^{T-h} Y_t$$

przy czym  $h \geq 1$  jest czasowym wyprzedzeniem predykcji. Zapisany teraz sprawdzian ma niecentralny rozkład Studenta z  $(k-1)$  stopniami swobody i parametrem niecentralności:

$$\Delta_T^2 = \delta_T^2 \sigma^{-2} \frac{k}{k+1} \quad (4.9)$$

Statystykę określoną wzorem (4.8) można stosować tylko wówczas, gdy w okresach  $t=T-h-k, \dots, T-h$  trend szeregu czasowego jest stały. W przeciwnym przypadku statystyka  $Z_{Te}$  miałaby niecentralny rozkład  $\chi^2$ , a co za tym idzie zmienna losowa  $Z_{Te}$  nie miałaby rozkładu Studenta.

W przypadku wielu predyktorów może okazać się, że błąd predykcji nie będzie niezależny od reszt trendu, na podstawie którego był on tworzony. Przypuśćmy, że łączny rozkład wektora  $[U_T, \mathbf{e}] \sim N(\boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\Sigma})$ , gdzie  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_u \mathbf{0}]$ ,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \begin{bmatrix} c & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{ee} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

gdzie:  $c^2 \sigma^2 = D^2(U_T)$ ,  $\mathbf{b}$  jest wektorem kowariancji błędu  $U_T$  z elementami wektora reszt  $\mathbf{e}$ . Wprowadźmy następującą transformację (por. Rao (1982)):

$$W_T = U_T - \mathbf{e} \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1} \mathbf{b}^T \quad (4.11)$$

Wtedy:  $W_T \sim N(\delta_w; d_w^2 \sigma^2)$ , gdzie:

$$d_w^2 = \sigma^{-2} D^2(W_T) = c - \mathbf{b} \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1} \mathbf{b}^T \quad (4.12)$$

Korzystając z otrzymanych przez Rao (1962) oraz Rao i Mitrę (1971) własności rozkładów form kwadratowych wektora losowego o ewentualnie osobliwym rozkładzie normalnym wnioskujemy, że:

$$Q(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \boldsymbol{\Sigma}_{ee}^{-1} \mathbf{e}^T \quad (4.13)$$

ma niezależny od  $W_T$  rozkład  $\chi_k^2$  z  $k$  stopniami swobody pod warunkiem, że  $E(\mathbf{e})=\mathbf{0}$ , przy czym  $k=R(\Sigma_{ee})$ . Otrzymane rezultaty prowadzą do następującego sprawdzianu:

$$V_{Te} = \frac{W_T}{d_w \sqrt{Q(\mathbf{e})}} \sqrt{k} \quad (4.14)$$

Gdy  $E(\mathbf{e})=\mathbf{0}$ , to zmienna losowa  $V_T$  ma niecentralny rozkład Studenta z  $k$  stopniami swobody i parametrem niecentralności:

$$\Delta_T^2 = \frac{\delta_T^2}{\sigma^2 d_w^2} \quad (4.15)$$

Przykładowo załóżmy, że prognoza na  $T$ -ty okres jest stawiana opisaną w rozdziale 3 metodą wag harmonicznnych. Z kolei w okresach  $t=1, \dots, n$  jest wyznaczany tzw. trend pełzający, zaprezentowany w drugim rozdziale. Dla  $T=n+1$  błąd predykcji określa wzór:

$$U_T = Y_T - Y_{Tp8} \quad (4.16)$$

gdzie:  $Y_{Tp8}$  określają wzory (3.53)—(3.58). Z kolei wektor reszt trendu pełzającego  $\tilde{\mathbf{e}}$  i jego macierz wariancji i kowariancji wyjaśniają wzory (2.81)—(2.83). Błąd predykcji na okres  $T=n+1$  ma postać:

$$U_{8,n+1} = Y_{n+1} - \mathbf{Y} \mathbf{P}_\#^T \quad (4.17)$$

lub

$$U_{8,n+1} = \mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{B}_8^T \quad (4.18)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n+1} &= [\mathbf{Y}_n \ \mathbf{Y}_{n+1}] \\ \mathbf{B}_8 &= [-\mathbf{P}_H \ 1] \end{aligned} \quad (4.19)$$

przy czym wektor  $\mathbf{P}_H$  określa wzór (3.64). Ze wzorów (2.81), (2.83) wynika macierz wariancji i kowariancji wektora  $[U_{8,n+1} \ \tilde{\mathbf{e}}]$ , dana wzorem ogólnym (4.10), przy czym:

$$\Sigma_{ee} = \mathbf{M}_H \mathbf{M}_H^T \quad (4.20)$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{M}_H \mathbf{P}_H^T \quad (4.21)$$

$$c = 1 + \mathbf{P}_H \mathbf{P}_H^T \quad (4.22)$$

Rezultaty te pozwalają już nam wyznaczyć sprawdzian  $V_{Te}$  określony wzorami (4.11)—(4.14). Niech  $\mathbf{Y}_{n+1} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \sigma^2 \mathbf{I}_{n+1})$ , przy czym  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \dots \mu_{n+1}]$ ,  $\mu_t = at + b$  dla  $t=1, \dots, n$ . Wówczas można na podstawie własności trendu pełzającego wykazać, że wektor jego reszt  $\tilde{\mathbf{e}} \sim N(\mathbf{0}_n; \sigma^2 \mathbf{M}_H \mathbf{M}_H^T)$ . Stąd i z wcześniej opisanych własności statystyki  $V_{Te}$  wynika, że będzie ona miała niecentralny rozkład Studenta z parametrem niecentralności określonym przez

wzory (4.15) i (4.12). Rozkład ten jest centralny, gdy będzie prawdziwa hipoteza o nieobciążoności prognoz w okresie  $T=n+1$ , a zatem istotnie duże<sup>33</sup>, co do modułu wartości sprawdzianu będą świadczą przeciwko tej hipotezie.

Drugi przykład dotyczy problemu testowania hipotezy o nieobciążoności prognozy na  $T$ -ty okres stawianej za pomocą predyktora  $Y_{Tp6}$ , danego wzorem (3.39), będącego uproszczonym sposobem budowy prognoz na podstawie trendu otrzymanego metodą wyrównywania wykładniczego. Przyjmijmy, że  $T=n+1$ . Wtedy wariancja błędu predykcji:

$$U_{n+1,6} = Y_{n+1} - \mathbf{Y}_n \mathbf{A}_n(\alpha) \quad (4.23)$$

ma postać:

$$D^2(U_{n+1,6}) = [1 + \mathbf{A}_n(\alpha) \mathbf{A}_n^T(\alpha)] \sigma^2 = d_w^2 \sigma \quad (4.24)$$

gdzie:  $\mathbf{A}_n(\alpha)$  wyjaśnia wzór (2.48). Z kolei na podstawie wzorów (4.23) i (2.52), (2.53) mamy następujący wektor kowariancji błędu predykcji  $U_{n+1,6}$  i wektora reszt  $\mathbf{e}(\alpha)$ :

$$\text{Cov}(\mathbf{e}(\alpha), U_{n+1}) = \mathbf{b}^T = (\mathbf{I}_{n-1}^1 + \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{A}_n^T(\alpha)) \quad (4.25)$$

przy czym występujące w powyższym wyrażeniu wektory i macierze wyjaśniają odpowiednio wzory (2.54), (2.47) i (2.48). Otrzymane wyniki pozwalają już wyznaczyć wszystkie komponenty tworzące sprawdzian określony wzorem (4.14). Można go wtedy użyć do testowania hipotezy głoszącej, że predyktor  $Y_{Tp6}$  dał nieobciążoną prognozę szeregu czasowego w okresie  $T=n+1$ .

Dotychczas analizowane testy były konstruowane przy założeniu, że wartości oczekiwane reszt trendu, na podstawie którego wyznaczono prognozy, są równe zero. Świadczy to o trafnym wyborze postaci trendu, a przede wszystkim ma znaczenie techniczne, bo zapewnia nam, to iż statystyki  $Q(\mathbf{e})$  tworzące mianownik sprawdzianów  $Z_{Te}$  lub  $V_{Te}$  mają centralny rozkład  $\chi^2$ . Jak sobie jednak radzić wówczas, gdy mamy uzasadnione podejrzenia, że niektóre wartości oczekiwane trendu nie są równe zero. Jeśli będzie to spowodowane tzw. wartościami oddolnymi, to można te obserwacje usunąć ze zbioru danych, na podstawie których jest oceniany trend.<sup>34</sup> Inny sposób będzie polegał na skróceniu szeregu czasowego do ciągu najświeższych danych, które winny odzwierciedlać najnowszą tendencję rozwojową i oczywiście nie zawierają wartości oddalonych, czyli odbiegających istotnie od określonego trendu. Wreszcie w wypadku podejrzenia, że reszty nie mają zerowych wartości oczekiwanych można zaproponować wygładzanie ich za pomocą jednej z metod nieparametrycznych. W tym jednak przypadku nie wydaje się to zbyt właściwe, bo przecież można było od razu wygładzać szereg czasowy metodą nieparametryczną, a otrzymane tą drogą reszty wykorzystać do konstrukcji statystyki tworzącej mianowniki opisanych wcześniej sprawdzianów.

Opisane tutaj metody testowania obciążoności pojedynczych prognoz wydają się być zwłaszcza przydatne przy stosowaniu test-predyktorów. Pozwolą one m.in. racjonalnie dobrać liczbę najświeższych danych, na podstawie których są właśnie wyznaczane predyktory.

<sup>33</sup> Rozumiemy przez to, że przy ustalonym poziomie istotności wartość sprawdzianu testu wpada do obszaru krytycznego.

<sup>34</sup> Problem ten był już omawiany szerzej w podrozdziale 2.7.

## 4.1.2. Testy wykorzystujące wcześniej obserwowane błędy predykcji

Przypuśćmy, że dysponujemy obserwacjami ciągu błędów predykcji  $\mathbf{U}_{m+1}=[\mathbf{U}_m \mathbf{U}_{n+m+1}]$ ,  $\mathbf{U}_m=[\mathbf{U}_{n+1} \dots \mathbf{U}_{n+m}]$ . Wektor ich wartości oczekiwanych  $\boldsymbol{\delta}=\mathbf{E}(\mathbf{U}_{m+1})=[\delta_1 \dots \delta_{m+1}]$ , a macierz wariancji i kowariancji wektora  $\mathbf{U}_m$  ma postać:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{uu} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{mm} & \mathbf{P}_{m,l} \\ \mathbf{P}_{l,m} & \mathbf{P}_{ll} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Przypuśćmy, że predyktor dający prognozy na okresy  $T=n+1, \dots, n+m+1$  jest liniową funkcją obserwacji  $t=1, \dots, T-1$ . Wtedy wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_{m+1}$  można zapisać jako następującą liniową funkcję wektora  $\mathbf{Y}=[\mathbf{Y}_1 \dots \mathbf{Y}_{n+m+1}]$ :

$$\mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{Y}\mathbf{B}^T \quad (4.27)$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{b}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \dots \\ \mathbf{b}_{m+1} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{b}_t = [\mathbf{a}_{n+t-1} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0}_{m-t+1}] \quad (4.29)$$

$$\mathbf{a}_{n+t} = [\mathbf{a}_{n+t-1,1} \ \dots \ \mathbf{a}_{n+t-1,n+t-1}] \quad (4.30)$$

Zatem wektor wartości oczekiwanych błędów predykcji wynosi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}_{m+1}) = \mathbf{E}(\mathbf{Y})\mathbf{B}^T = \boldsymbol{\delta}_{m+1} \quad (4.31)$$

a bloki określonej wzorem (4.26) macierzy wariancji i kowariancji są postaci:

$$\mathbf{P}_{m,m} = \mathbf{B}_m \mathbf{B}_m^T, \quad \mathbf{P}_{m,l} = \mathbf{B}_m \mathbf{b}_{m+1}^T, \quad \mathbf{P}_{l,l} = \mathbf{b}_{m+1} \mathbf{b}_{m+1}^T \quad (4.32)$$

Gdy wektor losowy  $\mathbf{Y}$  ma sferyczny  $(n+m+1)$  wymiarowy rozkład normalny czyli  $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}; \sigma^2 \mathbf{I}_{n+m+1})$ , to  $\mathbf{U}_m \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\Sigma}_{UU})$ .

Przedmiotem dalszej analizy jest weryfikacja hipotezy określonej wzorem (4.1) dla  $T=m+1$ . Sprawdzian testu konstruujemy w następujący sposób:

$$V_T = \frac{X_T}{d_x \sqrt{Q(\mathbf{U}_m)}} \sqrt{k} \quad (4.33)$$

gdzie:

$$X_T = U_T - \mathbf{U}_m \mathbf{P}_{mm}^{-1} \mathbf{P}_{m,l} \quad (4.34)$$

$$d_x^2 = \frac{1}{\sigma^2} D^2(X_T) = p_{11} - \mathbf{P}_{1,m} \mathbf{P}^- \mathbf{P}_{m,1} \quad (4.35)$$

$$Q(\mathbf{U}_m) = \mathbf{U}_m \mathbf{P}_{mm}^- \mathbf{U}_m^T \quad (4.36)$$

przy czym  $k=R(\mathbf{P}_{mm})$  natomiast  $\mathbf{P}_{mm}^-$  jest pseudoodwrotnością macierzy  $\mathbf{P}_{mm}$ . W szczególności, jeśli  $k=m$ , to  $\mathbf{P}_{mm}^- = \mathbf{P}_{mm}^{-1}$ .

Podobnie, jak w poprzednim punkcie, można wykazać, że jeśli  $U_{m+1} \sim N(\delta, \Sigma_{uu})$  i  $\delta = [\mathbf{0}_{1 \times n} \delta_{m+1}]$ , to sprawdzian  $V_T$  ma rozkład Studenta z  $k$  stopniami swobody i parametrem niecentralności:

$$\Delta_T^2 = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\delta_{m+1}^2}{d_x^2} \quad (4.37)$$

Gdy dodatkowo założymy, że określona wzorem (4.1) hipoteza  $H_0$  jest prawdziwa, to  $V_T$  ma centralny rozkład Studenta z  $k$ -stopniami swobody. Zatem istotnie duże co do modułu wartości sprawdzianu  $V_T$  świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$ , a na korzyść  $H_1$ .

W szczególności, gdy błąd  $U_T$ , gdzie  $T=n+m+1$ , jest niezależny od formy kwadratowej<sup>35</sup>  $Q(\mathbf{U}_m)$ , to statystykę testową  $V_T$  można zastąpić następującą:

$$V_{TU} = \frac{U_T}{d_T \sqrt{Q(\mathbf{U}_m)}} \sqrt{k} \quad (4.38)$$

gdzie:

$$d_T^2 = p_{11} \quad (4.39)$$

Wówczas  $V_{TU}$  ma rozkład Studenta z parametrem niecentralności:

$$\Delta_{TU}^2 = \frac{\delta_{m+n+1}^2}{\sigma^2 p_{11}} \quad (4.40)$$

Obie wyżej analizowane statystyki można użyć do testowania hipotezy o nieobciążoności predykcji na  $T$ -ty okres, gdy  $E(\mathbf{U}_m) = \mathbf{0}$ , co oznacza, że wyznaczone prognozy w  $m$  okresach poprzedzających  $T$ -ty okres były nieobciążone. Nie zawsze tak musi być. W związku z tym można ograniczyć liczbę okresów do tych, w których otrzymano nieobciążone prognozy.

Drugie wyjście polega na wygładzeniu szeregu błędów predykcji tworzących wektor  $\mathbf{U}_m$ . Można to uczynić, za pomocą tzw. regresji nieparapetrycznej<sup>36</sup>. Ten sposób wygładzania może być liniową funkcją niezależnych zmiennych tworzących wyjściowy szereg i na dodatek mających ten sam poziom wariancji. Bynajmniej macierz błędów predykcji  $\Sigma_{uu}$  nie spełnia

<sup>35</sup> Warunki niezależności form liniowych i kwadratowych wektora losowego podano w Dodatku do niniejszej pracy.

<sup>36</sup> Można również próbować użyć do tego celu średnich ruchomych wygładzania wykładniczego, czy trendu pełzającego.

tych warunków. Dlatego należy najpierw znaleźć takie przekształcanie liniowe, które przeprowadzi wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_m$  w wektor  $\mathbf{G}=[G_1 \dots G_k]$  składający się z niezależnych zmiennych losowych, przy czym  $G_i \sim (\eta_i; \sigma^2)$ . Przekształcenie takie istnieje (por. np. Rao (1982) lub Rao i Mitra (1971)), a określa go wyrażenie:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_m \mathbf{F}^T \quad (4.41)$$

przy czym:

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T \quad (4.42)$$

Macierz  $\mathbf{C}$  o wymiarach  $m \times k$  składa się z kolumn będących wektorami własnymi macierzy  $\mathbf{P}_{nm}$  odpowiadającymi jej kolejnym wartościom własnym  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , bo pozostałe  $\lambda_i = 0$  dla  $i = k+1, \dots, m$ . Z kolei  $\mathbf{D}$  jest macierzą diagonalną stopnia  $k$  z elementami diagonalnymi równymi kolejnym wartościom własnym  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Niech  $\hat{\mathbf{G}} = [\hat{G}_1 \dots \hat{G}_k]$  będzie wygładzeniem otrzymanym metodą nieparametrycznej regresji wektora  $\mathbf{G}$ . W szczególności jedną z najprostszyc wersji tej procedury opisuje równanie liniowe postaci:

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \mathbf{A}^T \quad (4.43)$$

gdzie elementy macierzy  $\mathbf{A}=[a_{ij}]$  wyjaśnia wzór (2.85). Reszty powstałe tą drogą wygładzania oznaczamy następującymi symbolami:

$$\mathbf{e}_G = \mathbf{G} - \hat{\mathbf{G}} \quad (4.44)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_G = \mathbf{G}(\mathbf{I}_k - \mathbf{A}^T) \quad (4.45)$$

Przyjmijmy, że  $E(\hat{\mathbf{e}}_G) = \mathbf{0}$  wtedy macierz wariancji i kowariancji ma postać:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{GG} = (\mathbf{I}_k - \mathbf{A})(\mathbf{I}_k - \mathbf{A}^T) \quad (4.46)$$

Rezultaty te pozwalają sprawdzian  $V_T$ , dany wzorem (4.33), zastąpić następującym:

$$V_{TG} = \frac{X_T}{d_x \sqrt{Q(\hat{\mathbf{e}}_G)}} \sqrt{k} \quad (4.47)$$

gdzie  $X_T$  i  $d_x$  określają odpowiednio wzory (4.34) i (4.35), natomiast:

$$Q(\hat{\mathbf{e}}_G) = \hat{\mathbf{e}}_G \boldsymbol{\Sigma}_{GG} \hat{\mathbf{e}}_G^T \quad (4.48)$$

Forma kwadratowa  $Q(\hat{\mathbf{e}}_G)$  ma, przy utrzymaniu wcześniejszych założeń o rozkładzie wektora  $\mathbf{Y}$ , rozkład  $\chi_k^2$  z  $k$  stopniami swobody. Zatem  $V_{TG}$  ma rozkład Studenta z  $k$  stopniami swobody i parametrem niecentralności określonym wzorami (4.35) i (4.37).

Wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_m$ , na podstawie którego jest weryfikowana hipoteza o nieobciążoności predykcji w okresie  $T$ -tym może składać się z błędów uznanych za dopuszczalne. Kryteria dopuszczalności są różnie konstruowane lecz najczęściej uznaje się



prognozę za dopuszczalną, gdy nie przekracza ustalonego poziomu moduł obserwacji względnego błędu predykcji określonego wzorem:

$$h_t = \frac{U_t}{Y_{tp}}, \quad t > n \quad (4.49)$$

Wtedy można już uważać, że w tym okresie predykcja była wystarczająco dokładana.

Z drugiej strony wektor  $U_m$  można tworzyć sukcesywnie dołączając do niego te błędy predykcji, dla których hipoteza o zerowości ich nadziei matematycznej nie została odrzucona.

Uogólnieniami zaprezentowanych w niniejszym podrozdziale metod na weryfikację hipotezy o nieobciążoności prognoz w kolejnych okresach czasu zajmiemy się w następnym podrozdziale.

## 4.2. Weryfikacja hipotezy o nieobciążoności ciągu prognoz

Rozwijamy tu analizowany w podrozdziale 4.1 problem weryfikacji hipotezy o nieobciążoności na ustalony okres. Tutaj hipoteza sprawdzana głosi, że prognozy wyznaczane na kolejne kilka okresów są nieobciążone. Niech  $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_m] = E(U)$ . Wtedy sformułowane hipotezy zapisujemy wyrażeniem:

$$H_0: \delta = \mathbf{0}; \quad H_1: \delta \neq \mathbf{0} \quad (4.50)$$

Do weryfikacji tych hipotez użyjemy przede wszystkim współczynnika janusowego i jego modyfikacji, które opisano w pierwszym rozdziale.

Dodajmy, że prezentowane dalej testy są również ważne dla przypadku, gdy jest weryfikowana nieobciążoność pojedynczej prognozy. W tym jednak przypadku sprawdzania nieobciążoności pojedynczej prognozy jest lepiej stosować testy wykorzystujące statystykę Studenta opisaną w poprzednim rozdziale, bo umożliwi to formułowanie na różne sposoby hipotez alternatywnych.

### 4.2.1. Testowanie za pomocą współczynnika janusowego i jego modyfikacji

Założmy, że dane o szeregu czasowym rozdzielają się na dwa spójne podzbiory. W pierwszym z nich obserwujemy wartości zmiennych  $Y_1, \dots, Y_n$ , na podstawie których jest wyodrębniany trend. Obserwacje te wraz z obserwacjami zmiennych losowych  $Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m}$  służą do wyznaczania prognoz wartości  $Y_T$  dla  $T = n+1, \dots, n+m$ . Zakładamy, że szacowany trend dla okresów  $t=1, \dots, n$  został trafnie wybrany w tym sensie, że wektor wartości oczekiwanych jego reszt jest wektorem zerowym. Wówczas hipotezę  $H_0$  określoną wzorem (4.50) możemy weryfikować za pomocą trzech sprawdzianów. Pierwszy sprawdzian jest ilorazem wariancji predykcji ex-post przez wariancję resztową, a określają go wzory (1.57)—(1.62). Zatem w tym przypadku statystyka jest współczynnikiem janusowym określonym zgodnie z jego pierwotną definicją. Istotnie duże wartości tego współczynnika będą świadczyły przeciwko hipotezie  $H_0$ .

Wtedy bowiem należy spodziewać się występowania prognoz obciążonych. Występują tu jednak poważne trudności ze znalezieniem wartości krytycznych sprawdzianu przy ustalonym poziomie istotności. Związane to jest przede wszystkim z tym, iż należy zwykle spodziewać się zależności łącznego rozkładu obu statystyk tworzących licznik i mianownik sprawdzianu. Ponadto, gdyby nawet były one niezależne, to bynajmniej nie należy spodziewać się, że zwłaszcza statystyka tworząca licznik sprawdzianu będzie miała rozkład  $\chi^2$ , co ułatwiłoby znacznie dalsze wnioskowanie.

Założmy, że  $\mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}; \sigma^2 \mathbf{I}_{n+m})$ . Oznacza to, że wektor  $\mathbf{Y}$  ma sferyczny  $n+m$  wymiarowy rozkład normalny. Wtedy ze wzorów (1.60) i (1.61) wynika że: parametry rozkładu łącznego wektorów reszt  $\mathbf{e}$  i błędów predykcji  $\mathbf{U}$  są postaci:  $[\mathbf{e} \ \mathbf{U}] \sim N(\boldsymbol{\mu}_s; \boldsymbol{\Sigma}_s)$ , gdzie  $\boldsymbol{\mu}_s = [\mathbf{0}_{1 \times n} \ \boldsymbol{\delta}_u]$ , bo założyliśmy, że  $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}_{1 \times n}$

$$\boldsymbol{\Sigma}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{ee} & \boldsymbol{\Sigma}_{eu} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ue} & \boldsymbol{\Sigma}_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

gdzie:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n \times m}] \quad (4.52)$$

Wynik ten oraz wyrażenie (1.71) umożliwia skorzystanie z procedur opisanych w podrozdziałach 4 i 5 Dodatku, które umożliwiają obliczenie wartości dystrybucyjnego sprawdzianu przy założeniu, że jest prawdziwa hipoteza sprawdzana  $H_0$ . To pozwoli już nam obliczyć tzw. obserwowany poziom istotności, czyli prawdopodobieństwo tego, że sprawdzian przyjmie wartość większą od jego zaobserwowanej realizacji przy prawdziwości hipotezy  $H_0$ . Z kolei to umożliwi nam podjęcie decyzji o odrzuceniu, bądź nieodruceniu hipotezy sprawdzanej bez wyznaczania wartości krytycznej testu, co w tym przypadku byłoby rzeczą uciążliwą, z racji tego, że byłoby trudno skonstruować odpowiednie tablice obejmujące wszystkie przypadki charakteryzujące wyjściowy rozkład wektora  $[\mathbf{e} \ \mathbf{U}]$ .

Rozkład sprawdzianu testu, danego wzorami (1.96)—(1.98) jest, przynajmniej z formalnego punktu widzenia, prostszy. Ma on bowiem rozkład taki jak iloraz dwóch zależnych zmiennych losowych, z których ta znajdująca się w liczniku ma niecentralny rozkład  $\chi^2$ , natomiast statystyka tworząca mianownik tego ilorazu będzie miała centralny rozkład  $\chi^2$ . Liczba stopni swobody tych rozkładów zależy od rzędu macierzy form kwadratowych tworzących licznik i mianownik statystyki testowej. W przypadku, gdy jest prawdziwa hipoteza o nieobciążoności ciągu postawionych prognoz, to statystyka tworząca licznik sprawdzianu testu będzie miała centralny rozkład  $\chi^2$ . Zatem, podobnie jak uprzednio duże wartości sprawdzianu świadczą przeciwko hipotezie o nieobciążoności ciągu postawionych prognoz. Ocenę wartości dystrybucyjnego sprawdzianu przy założeniu, że hipoteza sprawdzana o nieobciążoności prognoz jest prawdziwa, otrzymujemy wykorzystując wzory (1.103) i (1.104) oraz odpowiednio procedury opisane w Dodatku do niniejszej pracy.

Można spodziewać się, że predyktory będące np. funkcją trendu będą dawały prognozy, których błędy będą miały rozkład niezależny od reszt trendu. Wówczas rozważany sprawdzian  $J^*$  będzie miał znany rozkład Snedecora-Fishera. Tablice z kwantylami tego rozkładu są, jak wiadomo, ogólnie dostępne. W szczególności jeśli prognozy byłyby wyznaczone za pomocą predyktora określonego wzorem (3.26), to ich błędy będą niezależne od reszt bazowego liniowego trendu. Wtedy sprawdzian  $J^*$  upraszcza się do postaci (por. Wywiał 1982):

$$J_* = \frac{m-2}{m} \frac{\sum_{h=1}^m d_h^{-2} U_{4,n+h}^2}{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}^T} \quad (4.53)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{e}}$  jest wektorem reszt określonym wzorami (2.18) i (2.19), a przez  $d_h^2$  oznaczono wariancję ex-ante błędu predykcji  $U_{4,n+h}$ , którą określa wyrażenie (3.27). Statystyka ta przy wprowadzonych wcześniej założeniach ma niecentralny rozkład Snedecora-Fishera z parametrem niecentralności:

$$\Delta_4^2 = \sum_{h=1}^m d_h^{-2} \delta_{n+h}^2$$

Zatem, istotnie duże wartości sprawdzianu  $J_*$  świadczą przeciwko hipotezie o nieobciążoności prognoz otrzymanych za pomocą predyktora  $Y_{tp4}$ .

W końcu wydaje się, że najwygodniejszym do używania w praktyce jest sprawdzian określony wzorem (1.114). Charakteryzuje się on tym, że ma niecentralny rozkład Snedecora-Fishera nawet wtedy, gdy rozkład błędów predykcji jest zależny od wektora reszt. W przypadku, gdy jest prawdziwa hipoteza o nieobciążoności ciągu analizowanych prognoz, to sprawdzian ma rozkład centralny Snedecora-Fishera, którego wartości krytyczne, jak wiadomo, są stabilizowane.

Metoda predykcji szeregu czasowego nie koniecznie musi być „spokrewniona” z procedurą wyodrębniania trendu. Przykładowo może być wyznaczony trend pełzający, a prognozy stawiane metodą test-predyktora. W tym przypadku rozmiary poszczególnych błędów predykcji będą zależać od sposobu zachowania się statystyka przy napotkaniu w danych na punkt zwrotny szeregu czasowego, w którym może wystąpić znaczny błąd predykcji. Może on uznać istotność różnicy od zera błędu predykcji za silny sygnał występowania punktu zwrotnego trendu, a zwłaszcza wtedy, gdy obserwowany poziom istotności stosowanego testu jest bardzo niski. Wówczas można zdecydować by prognozę na następny okres obliczać na poziomie wartości aktualnie obserwowanej zmiennej. Jest to skrajna decyzja, bo być może należałoby jednak prognozę wyznaczać poprzez ekstrapolację liniowego trendu wyznaczonego na podstawie dwóch, bądź trzech najświeższych obserwacji. Można również ekstrapolować trend wyznaczony na podstawie danych, spośród których wyeliminowano nietypowe dane (te, którym odpowiadają nieproporcjonalnie duże reszty). Z drugiej strony, gdy istotność odchylenia od zera błędu predykcji nie jest duża w tym sensie, że obserwowany poziom istotności nie jest zbyt niski, to należałoby uznać występowanie obciążenia predykcji za przypadkowe lub za sygnał występowania łagodnej zmiany kierunku trendu. W tym przypadku wystarczyłoby przy budowaniu prognozy poprzez ekstrapolację liniowego trendu wyznaczyć ją na podstawie oceny trendu obliczanej z najświeższych danych lecz w liczbie pomniejszanej o jedną i to tę obserwację najstarszej zmiennej (w stosunku do okresu bieżącego). W tym jednak przypadku nie możemy wykluczyć, że trafniejszą prognozę otrzymalibyśmy przy skróceniu ciągu danych o dwie lub trzy najstarsze obserwacje zmiennej.

Mamy więc dwie skrajnie różne strategie test-predyktora. Pierwsza polegałaby na skracaniu do jednej obserwacji danych, na podstawie których wyznacza się prognozę w przypadku napotkania istotnie różnego od zera błędu predykcji. Druga skrajna strategia polega na wyznaczaniu ekstrapolowanego trendu z danych skróconych o tylko jedną najstarszą obserwację cechy. W praktyce należałoby zalecać pośrednią strategię konstruowaną we wcześniej opisany sposób.

Pojedyncze błędy predykcji mogą nieistotnie różnić się od zera, natomiast ich podciągi mogą nieść wartości umiarkowanie duże i tego samego znaku. Wówczas należałoby to uznać za sygnał występowania punktu zwrotnego. Aby sprawdzić istotność odchyień od zera takich podciągów błędów predykcji można użyć jednej z wersji współczynnika janusowego.

#### 4.2.2. Iloraz form kwadratowych błędów predykcji i reszt funkcji wygładzającej błędy predykcji

Azzalini i Bowman (1993) zaproponowali test hipotezy o liniowości funkcji regresji z jedną zmienną niezależną. Szkic jego budowy przedstawiono w podrozdziale 2.7. Idea tej procedury jest tutaj podstawą konstrukcji testu dla hipotezy głoszącej, że używany predyktor daje ciąg nieobciążonych prognoz. Tak określona hipoteza jest równoważna hipotezie głoszącej, że wartość oczekiwana wektora błędów predykcji w kolejnych okresach czasu jest równa wektorowi zerowemu i określa ją wzór (4.50). Zatem predyktor w badanych okresach czasu jest nieobciążony. W celu zweryfikowania postawionej hipotezy wyznacza się nieparametryczną funkcję regresji błędów predykcji jako funkcję numerów okresów prognozowanych. Jest to więc nieparametryczny trend błędów predykcji. Naturalnie, wtedy sprawdzian testu należy zbudować jako iloraz sumy kwadratów błędów predykcji przez sumę kwadratów reszt nieparametrycznego trendu tych błędów. Dodajmy, że zamiast nieparametrycznej regresji można użyć innej metody wygładzania błędów predykcji. Należą do nich metody opisane w drugim rozdziale niniejszej pracy. Wśród nich na uwagę zasługiwałyby średnie ruchome, trend pełzający czy metoda wyrównywania wykładniczego.

Niech  $Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m}$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym  $Y_t \sim N(\mu_t, \sigma)$ . Prognozujemy wartości zmiennych  $Y_T$ , dla  $T=n+1, \dots, n+m$ . Predyktor oznaczamy przez  $\tilde{Y}_T$  i zakładamy, że jest on liniową funkcją ciągu zmiennych  $Y_1, \dots, Y_{T-1}$ . Wtedy wektor prognoz  $\tilde{\mathbf{Y}} = [\tilde{Y}_{n+1} \dots \tilde{Y}_{n+m}]$  można zapisać następująco:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{M} \quad (4.54)$$

przy czym  $\mathbf{Y} = [Y_{n+m-1} \dots Y_n \dots Y_1]$ , a macierz  $\mathbf{M}$  ma wymiary  $m \times (n+m-1)$ . Błędy predykcji oznaczamy przez:

$$U_T = Y_T - \tilde{Y}_T, \quad T=n+1, \dots, n+m \quad (4.55)$$

Błędy te tworzą wektor:  $\mathbf{U} = [U_{n+1} \dots U_{n+m}]$ , który jest następującą funkcją wektora  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{Y}\mathbf{W}^T \quad (4.56)$$

gdzie:

$$\mathbf{W} = \mathbf{S} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{S} = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_{m \times (n-1)}] \quad (4.57)$$

przy czym  $\mathbf{I}_m$  jest macierzą jednostkową stopnia  $m$ , natomiast  $\mathbf{0}_{m \times (n-1)}$  jest macierzą zerową o wymiarach  $m \times (n-1)$ . Wtedy  $\mathbf{U} \sim N(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Sigma}_u)$ , ponieważ  $\mathbf{U}$  jest liniową funkcją wektora zmiennych  $\mathbf{Y}$ , które łącznie mają rozkład normalny. Ponadto ze wzoru (4.56) wynika, że:

$$\Sigma_u = \sigma^2 \mathbf{w} \mathbf{w}^T \quad (4.58)$$

Predyktor  $Y_{T,p}$  jest nieobciążony w okresach  $T=n+1, \dots, n+m$ , gdy  $\delta=0$ , co jest przedmiotem analizowanej hipotezy sprawdzanej  $H_0$  określonej wzorem (4.50).

Niech  $\Sigma_u$  będzie macierzą dodatnio określoną. Wtedy istnieje taka macierz  $\mathbf{Z}$ , że  $\mathbf{z}^T \mathbf{z} = \Sigma_u^{-1}$ . Wówczas:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{Z}^T \quad (4.59)$$

ma rozkład normalny  $N(\boldsymbol{\gamma}; \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\gamma} = \delta \mathbf{Z}^T \quad (4.60)$$

Wektor  $\mathbf{X}$  reprezentuje niezależne zmienne losowe otrzymane w wyniku liniowego przekształcenia błędów predykcji.

Składowe wektora  $\delta$  można traktować jako wartości oczekiwane funkcji regresji błędów predykcji względem okresów prognozowanych, czyli  $\delta_T = f(T) + \varepsilon_T$ , gdzie  $\varepsilon_T$  jest składnikiem losowym. Do estymacji wartości funkcji  $f(T)$  można użyć nieparametrycznych metod. Jedną z nich jest już wcześniej używany kernelowski estymator, który w tym przypadku ma postać:

$$\hat{\delta}_{n+i} = \sum_{j=1}^m U_{n+j} a_{ij} \quad (4.61)$$

gdzie:

$$a_{ij} = \frac{g\{(i-j)/h\}}{\sum_{j=1}^m g\{(i-j)/h\}} \quad (4.62)$$

Przez  $h>0$  oznaczono tzw. parametr wygładzania, a przez  $g\{\cdot\}$  funkcję gęstości standardowego rozkładu normalnego. Niech  $\hat{\boldsymbol{\delta}} = [\hat{\delta}_{n+1} \dots \hat{\delta}_{n+m}]$  oraz  $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ . Wtedy:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{U} \mathbf{A}^T \quad (4.63)$$

Wektor reszt nieparametrycznej funkcji regresji określa następujący wzór:

$$\mathbf{e} = \mathbf{U} - \hat{\boldsymbol{\delta}} \quad (4.64)$$

lub

$$\mathbf{e} = \mathbf{U} \mathbf{B}^T \quad (4.65)$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_m - \mathbf{A} \quad (4.66)$$

przy czym  $\mathbf{I}_m$  jest macierzą jednostkową stopnia  $m$ . Rząd macierzy  $\mathbf{B}$  wynosi<sup>37</sup>:  $R(\mathbf{B}) \leq m - R(\mathbf{A}) < m$ .

Ponieważ wektor  $\mathbf{e}$  jest liniową funkcją wektora  $\mathbf{U} \sim N(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Sigma}_u)$ , to  $\mathbf{e} \sim N(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\Sigma}_e)$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{B}^T \quad (4.67)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_e = \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma}_u \mathbf{B}^T \quad (4.68)$$

Macierz wariancji i kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}_e$  jest rzędu<sup>38</sup>  $R(\boldsymbol{\Sigma}_e) = R(\mathbf{B}) < m$ . Zatem wektor  $\mathbf{e}$  ma osobliwy rozkład normalny. Składowymi wektora  $\boldsymbol{\delta} \mathbf{A}^T$  są wartości oczekiwane nieparametrycznej funkcji regresji wyjaśniającej zmiany błędów predykcji. Przyjmujemy, że  $\boldsymbol{\delta} \mathbf{A} = \boldsymbol{\delta}$ , co na podstawie wzorów (4.67) i (4.69) prowadzi do równości  $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0}$ .

Do weryfikacji hipotezy  $H_0: \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$  użyjemy następującego sprawdzianu:

$$R_1 = \frac{\mathbf{U} \mathbf{U}^T}{\mathbf{e}^T \mathbf{e}^T} \quad (4.69)$$

lub

$$R_1 = \frac{\mathbf{U} \mathbf{U}^T}{\mathbf{U} \mathbf{C} \mathbf{U}^T} \quad (4.70)$$

gdzie:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (4.71)$$

Istotnie duże wartości sprawdzianu  $R$  świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$ .

Rozkład prawdopodobieństwa statystyki  $R$  należy do klasy ilorazu dwóch zależnych form kwadratowych wektorów losowych o rozkładzie normalnym. Dystrybuanty rozkładu zmiennej  $R$  można obliczyć na podstawie następujących transformacji:

$$F_1(r) = P(R_1 < r) = P\left(\frac{\mathbf{U} \mathbf{U}^T}{\mathbf{U} \mathbf{C} \mathbf{U}^T} < r\right) = P(\mathbf{U}(\mathbf{I}_m - r\mathbf{C})\mathbf{U}^T < 0)$$

Zatem:

$$F(r) = P(\mathbf{Q}_1(r) < 0) \quad (4.72)$$

gdzie:

$$\mathbf{Q}_1(r) = \mathbf{U} \mathbf{G}(r) \mathbf{U}^T \quad (4.73)$$

$$\mathbf{G}(r) = \mathbf{I}_m - r\mathbf{C} \quad (4.74)$$

Stąd i ze wzorów (4.56) i (4.57) wynika, że daną wzorem (4.70) statystykę można zapisać następująco:

<sup>37</sup> Por. np. Rao (1982), s. 48.

<sup>38</sup> Tamże.

$$R_1 = \frac{\mathbf{Y}\mathbf{W}\mathbf{W}^T\mathbf{Y}^T}{\mathbf{Y}\mathbf{W}\mathbf{C}\mathbf{W}^T\mathbf{Y}^T} \quad (4.75)$$

Wtedy określona wzorem (4.73) forma kwadratowa przyjmuje postać

$$Q_1(r) = \mathbf{Y}\mathbf{L}(r)\mathbf{Y}^T \quad (4.76)$$

gdzie:

$$\mathbf{L}(r) = \mathbf{W}\mathbf{G}(r)\mathbf{W}^T \quad (4.77)$$

Prawdopodobieństwo  $F_1(r) = P(Q_1(r) < 0)$  Azzalini i Bowman (1993) obliczają w przybliżeniu poprzez aproksymację rozkładu statystyki  $Q_1(r)$  krzywymi Pearsona. Szczegóły sposobu przybliżonego obliczania wartości dystrybuanty tego rozkładu znajdziemy w podrozdziałach 4 i 5 Dodatku do niniejszej pracy.

Transformacja (4.59) prowadzi do wyznaczenia niezależnych błędów predykcji reprezentowanych wektorem  $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\gamma}; \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ . Kernelowski estymator wektora  $\boldsymbol{\gamma}$  ma postać:

$$\hat{\gamma}_{n+i} = \sum_{j=1}^m X_{n+j} a_{ij}, \quad i=1, \dots, m \quad (4.78)$$

gdzie:  $a_{ij}$  są wyjaśniane przez wzór (4.62). Zatem jeżeli  $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = [\hat{\gamma}_{v+1} \dots \hat{\gamma}_{v+\mu}]$ , to:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{X}\mathbf{A}^T \quad (4.79)$$

Wektor reszt ma więc postać:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}\mathbf{B}^T \quad (4.80)$$

gdzie  $\mathbf{B}$  określa wzór (4.66). Wtedy wektor błędów  $\boldsymbol{\xi} \sim N(\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\Sigma}_\xi)$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{B}^T \quad (4.81)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_\xi = \sigma^2 \mathbf{C} \quad (4.82)$$

gdzie macierz  $\mathbf{C}$  określa wzór (4.71).

Hipoteza sprawdzana jest formułowana wyrażeniem:  $H_0: \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , a hipoteza alternatywna:  $H_1: \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ . Do weryfikacji hipotezy  $H_0$  użyjemy następującej statystyki:

$$R_2 = \frac{\mathbf{X}\mathbf{X}^T}{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T} \quad (4.83)$$

lub

$$R_2 = \frac{\mathbf{X}\mathbf{X}^T}{\mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}^T} \quad (4.84)$$

lub

$$R_2 = \frac{\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}_u^{-1}\mathbf{U}^T}{\mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{C}\mathbf{Z}^T\mathbf{U}^T} \quad (4.85)$$

Rozkład sprawdzianu  $R_2$  jest wyznaczany podobnie jak rozkład statystyki  $R_1$ , danej wzorem (4.69). Dystrybuantę statystyki  $R_2$  zapisujemy następująco:

$$F_2(r) = P(Q_2(r) < 0) \quad (4.86)$$

gdzie:

$$Q_2(r) = \mathbf{X}\mathbf{G}(r)\mathbf{X}^T \quad (4.87)$$

przy czym  $\mathbf{G}(r)$  określa wzór (4.74).

Należy oczekiwać, że analizowane tu testy będą różniły się mocą.

#### 4.2.3. Modyfikacja statystyki Bartletta

Celem analizy jest w dalszym ciągu weryfikacja hipotezy  $H_0$  określonej wzorem (4.50), a głoszącej, że wartości oczekiwane składowych wektora błędów predykcji  $\mathbf{U}=[U_1 \dots U_m]$  są równe zeru. Do tego celu użyjemy następującej procedury opisanej przez Wywiła (1982). Niech  $\mathbf{U} \sim N(\boldsymbol{\delta}_u; \boldsymbol{\Sigma}_{uu})$ , przy czym  $\det \boldsymbol{\Sigma} > 0$ , wtedy korzystając z przekształcenia, danego wzorem (4.59), otrzymujemy wektor  $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\gamma}; \sigma^2 \mathbf{I}_m)$ , gdzie  $\boldsymbol{\gamma}$  określa wzór (4.60). Z racji tego, że macierz  $\mathbf{Z}$ , występująca we wzorze (4.59), jest nieosobliwa, to  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\boldsymbol{\delta}_u = \mathbf{0}$ , co wynika z równania (4.60). Wówczas hipotezy określone wzorem (4.50) można zastąpić hipotezami postaci:

$$H'_0: \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}; \quad H'_1: \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0} \quad (4.88)$$

Do testowania sformułowanej hipotezy wykorzystujemy następujący sprawdzian:

$$G_m = -\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \ln(W_t^2) \quad (4.89)$$

gdzie:

$$W_t = \frac{X_t - \bar{X}}{\sqrt{\sum_{t=1}^m (X_t - \bar{X})^2}}, \quad \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m X_t \quad (4.90)$$

Można wykazać, że  $G_m$  osiąga minimalną wartość, gdy  $Z_t = \frac{1}{m}$  dla każdego  $t=1, \dots, m$ .

Zatem duże wartości sprawdzianu  $G_m$  świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$ . Obszar krytyczny testu jest więc prawostronny. Wywił (1988) wykazał, że standardowa postać statystyki  $G_m$  ma



przy prawdziwości hipotezy  $H_0$  i przy  $m \rightarrow \infty$  rozkład normalny standaryzowany. Zbieżność jej rozkładu do rozkładu normalnego nie jest szybka. Dlatego też sugeruje się aby rozkład tej statystyki, a właściwie potrzebne jej kwantyle, wyznaczać w sposób przybliżony. Pierwszy sposób polega na wykorzystaniu do tego celu znanych krzywych Pearsona. W tym celu oblicza się współczynniki skośności i kurtozy, które odpowiednio określają wzory postaci:

$$\beta_1 = \frac{v_3(G_m)}{D^3(G_m)}, \quad \beta_2 = \frac{v_4(G_m)}{D^4(G_m)} \quad (4.91)$$

przy czym momenty statystyki  $G_m$  są takie same jak momenty statystyki  $Z_{@}$ , a określono je wzorami (2.105)–(2.116). Para wartości tych współczynników pozwala już wyznaczyć potrzeby kwantyl rozkładu krzywej Pearsona na podstawie specjalnie do tego celu utworzonych tablic, które zamieszczono, m.in. w pracach Pearsona i Hartley'a (1972) lub Zielińskiego (1972).

Kwantyle statystyki  $G_m$  można również wyznaczyć na podstawie tzw. rozwinięcia Cornish-Fishera, którego opis zapożyczamy z pracy Kendalla i Stuarta (1966), s. 229–233. W naszym przypadku ma ono postać:

$$x = \zeta + \frac{1}{6}\beta_1(\zeta^2 - 1) + \frac{1}{24}(\beta_2 - 3)(\zeta - 3)\zeta - \frac{1}{36}(2\zeta - 5)\zeta \quad (4.92)$$

gdzie:

$$x = \frac{g_m - E(G_m)}{D(G_m)}$$

natomiast  $\xi \sim N(0, 1)$ . Wówczas potrzebny kwantyl rzędu  $\alpha$  zmiennej  $G_m$  wyznaczamy ze wzoru (4.92), w którym w miejsce  $\xi$  wstawiamy kwantyl tego rzędu zmiennej losowej  $\xi$ .

Przykład weryfikacji hipotezy o nieobciążoności ciągu prognoz można znaleźć w pracy autora (1995).

#### 4.2.4. Przykłady weryfikacji nieobciążoności predyktorów

Szereg czasowy trendu może być prognozowany za pomocą tzw. naiwnego predyktora, który określa wzór (3.1). Niech  $\mathbf{Y}_1 = [Y_1 \dots Y_{n+m}]$ . Wtedy wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_1 = [U_{1,n+1} \dots U_{1,n+m}]$ , gdzie  $U_{1,T} = Y_T - \tilde{Y}_{1,T}$ , można zapisać następująco:

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{Y}_1 \mathbf{B}_1^T \quad (4.93)$$

gdzie  $\mathbf{B}_1$  jest macierzą o wymiarach  $(m+1) \times m$  postaci:

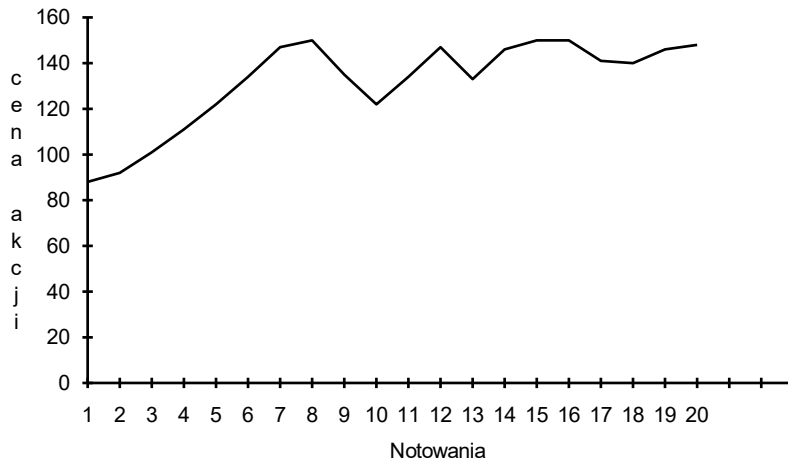
$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Wtedy macierz  $\mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1$  ma wymiary  $(m+1) \times (m+1)$  i ma postać:

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

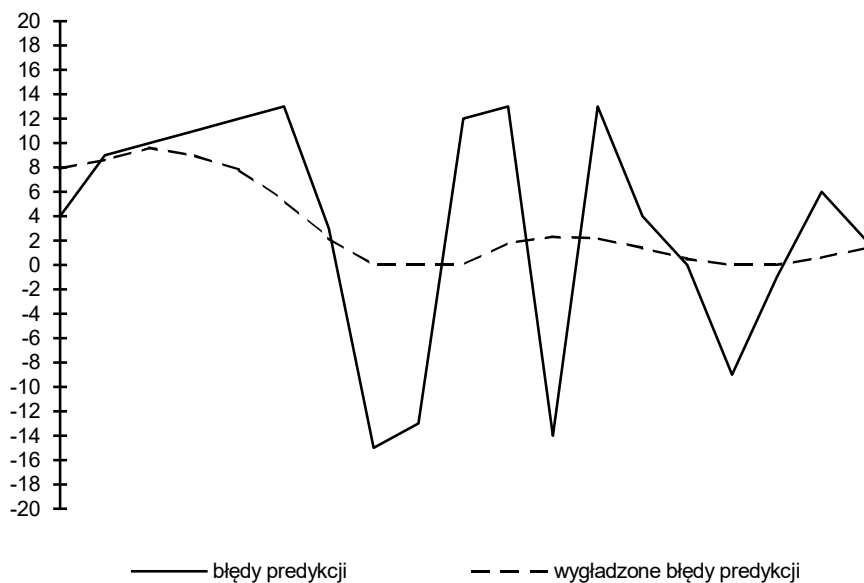
Utrzymując założenia wprowadzone w poprzednim punkcie wnioskujemy, że wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_1 \sim N(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \sigma^2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$



Rys. 1. Notowania kursów akcji Browaru Żywieckiego

Opisaną metodę predykcji użyto do prognozowania kursu akcji Browaru Żywieckiego. Notowania tych akcji z 23 sesji od 22.10.1992r. do 04.02.1993r. ilustruje rysunek 1. Prognozowano kursy od sesji z dnia 29.10.1992r. do 28.01.1993r. za pomocą predyktora naiwnego. Obserwacje błędów predykcji oraz wygładzone ich poziomy za pomocą regresji nieparametrycznej prezentuje rysunek 2. Z kolei niezależne błędy predykcji otrzymane w wyniku przekształcenia (4.59) i ich wygładzone wartości prezentuje rysunek 3.



Rys. 2. Błędy predykcji metody naiwnej



Rys. 3. Niezależne błędy predykcji naiwnej

Weryfikujemy hipotezę  $H_0: E(U)=0$  o nieobciążoności analizowanego predyktora. Obliczono wartości, danych wzorami (4.70) i (4.83), sprawdzianów testów:  $r_1=1.2061$ ,  $r_2=1.8293$ . Wartości dystrybuant tych statystyk są następujące:  $F_1(r_1)=0.2179$  i  $F_2(r_2)=0.2388$ . Obliczono je za pomocą komputerowego programu. Stąd, że obserwowane poziomy istotności będące prawdopodobieństwami  $1-F_1(r_1)=0.7821$  i  $1-F_2(r_2)=0.7612$  wynika, iż wartości obu sprawdzianów testów nie wpadają do obszarów krytycznych. Zatem nie odrzucamy hipotezy o nieobciążoności stosowanego predyktora akcji w badanych sesjach.

Gdy szereg czasowy ma trend, to Henschel (1979), s. 31, proponuje<sup>39</sup> następujący predyktor:

$$\tilde{Y}_{2,T} = Y_{T-1} + (Y_{T-1} - Y_{T-2}), \quad T=n+1, \dots, n+m \quad (4.97)$$

Niech  $\mathbf{Y}_2 = [Y_{n-1} \ Y_n \ \dots \ Y_{n+m}]$ , wtedy wektor błędów predykcji ma postać:

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_2^T \quad (4.98)$$

gdzie  $\mathbf{B}_2$  ma wymiary  $(m+2) \times m$  i jest postaci:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

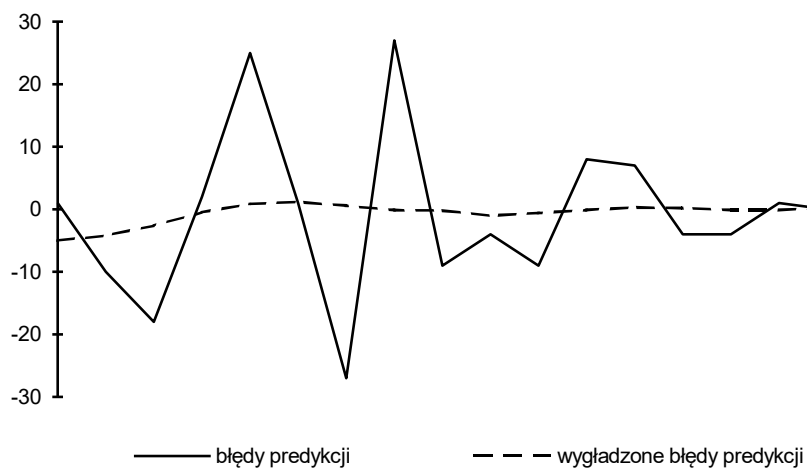
Macierz  $\mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2$  ma wymiary  $(m+2) \times (m+2)$  i ma postać:

$$\mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

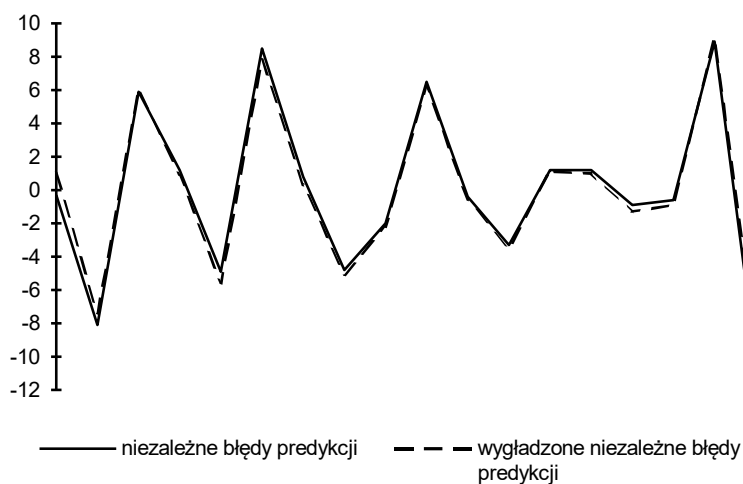
Ponadto  $\mathbf{U}_2 \sim N(\boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \sigma^2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

<sup>39</sup> Wiadomość tę podajemy za Cieślak i in. (1993).

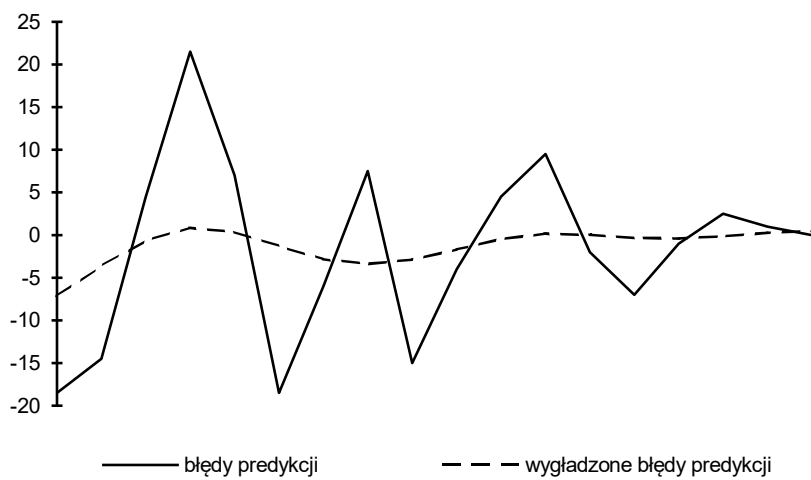


Rys. 4. Błędy predykcji naiwnej z uwzględnieniem przyrostu

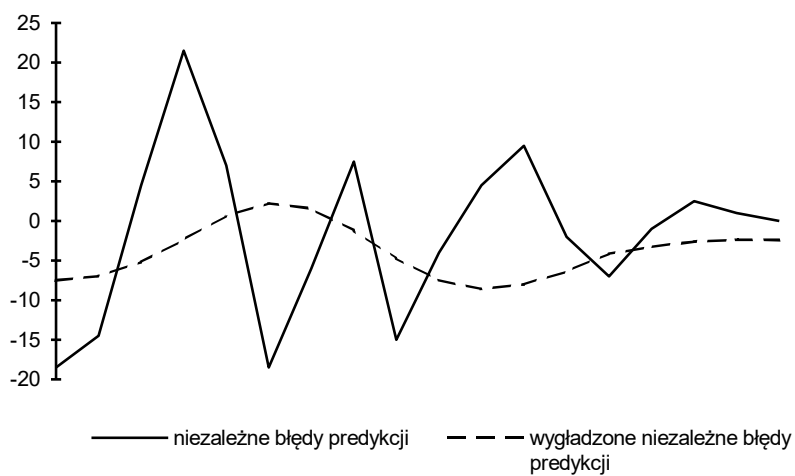


Rys. 5. Niezależne błędy predykcji naiwnej z uwzględnieniem przyrostu

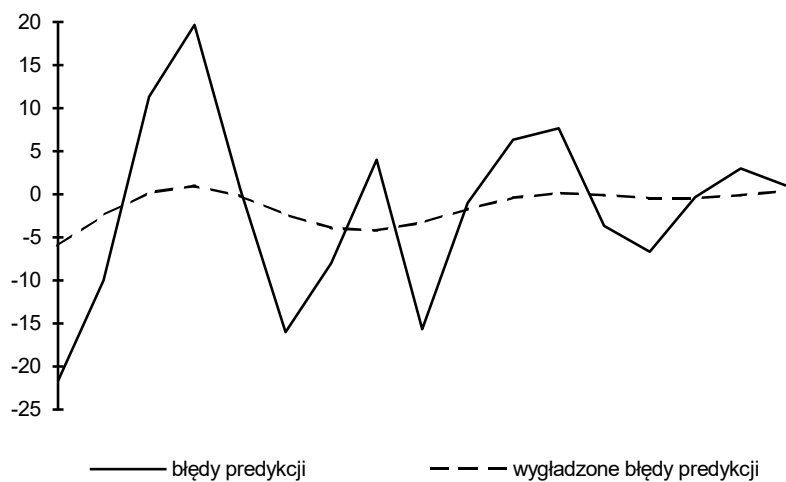
Za pomocą opisanego predyktora wyznaczono prognozy akcji Browaru Żywieckiego. Błędy predykcji i ich wygładzenia prezentują rysunki 4 i 5. Hipotezę o nieobciążoności predyktora weryfikujemy za pomocą, danych wzorami (4.70) i (4.83) sprawdzianów  $R_1$  i  $R_2$ , które przyjmują następujące wartości  $r_1=1.0618$  i  $r_2=1.0616$ . Obliczone wartości dystrybuant wynoszą:  $F_1(r_1)=0.3071$  i  $F_2(r_2)=0$ . Stąd już wnioskujemy, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o nieobciążoności rozważanego predyktora w badanych okresach.



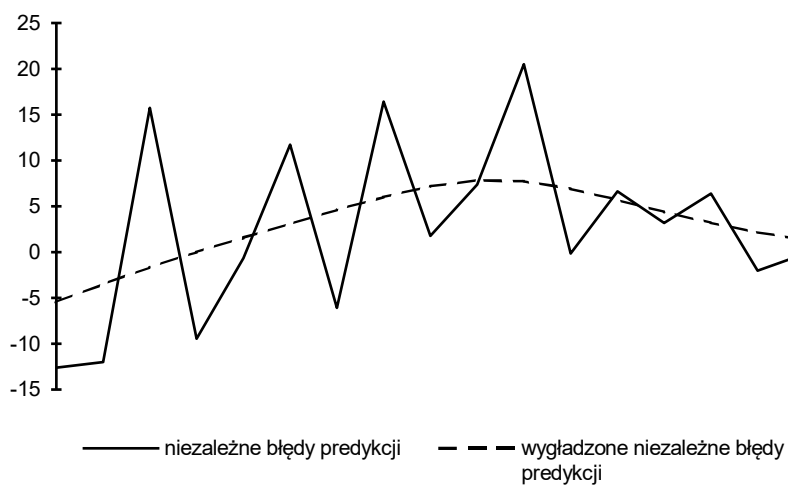
Rys. 6. Błędy predykcji metodą średniej ruchomej z parametrem wygładzania  $k=2$



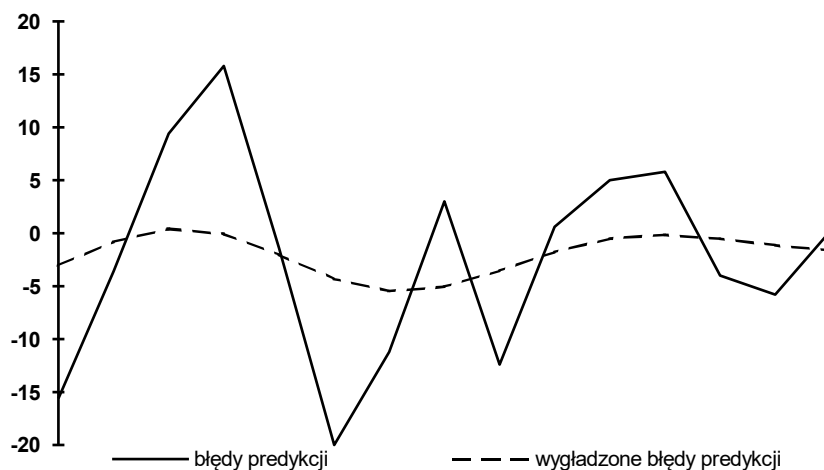
Rys. 7. Niezależne błędy predykcji metodą średniej ruchomej z parametrem wygładzania  $k=2$



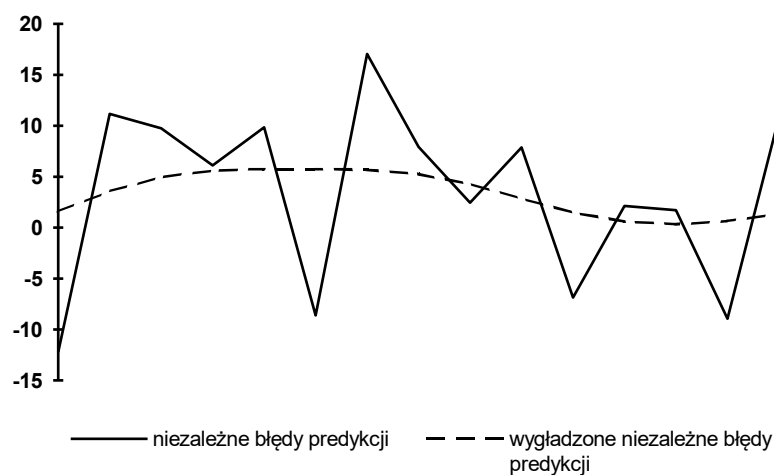
Rys. 8. Błędy predykcji metodą średniej ruchomej z parametrem wygładzania  $k=3$



Rys. 9. Niezależne błędy predykcji metodą średniej ruchomej z parametrem wygładzania  $k=3$



Rys. 10. Błędy predykcji metodą średniej ruchomej z parametrem wygładzania  $k=5$



Rys. 11. Niezależne błędy predykcji metodą średniej ruchomej z parametrem wygładzania  $k=5$

Predykcję na podstawie średnich ruchomych opisano w podrozdziale 3.1.

Podobnie jak uprzednio weryfikujemy hipotezę o nieobciążoności predykcji za pomocą średnich ruchomych o parametrach wygładzania odpowiednio 2, 3 i 5. Wykresy błędów predykcji i ich wygładzeń prezentują rysunki 6–11. Wartości sprawdzianów obu testów prezentuje tablica 1.

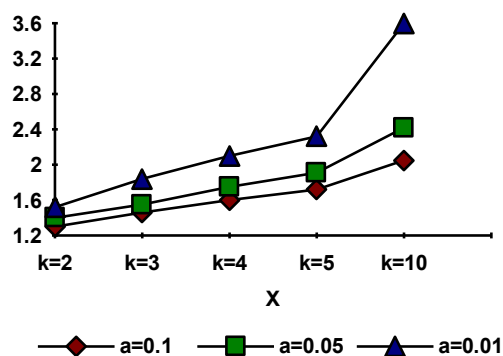


Tabela 1. Wartości sprawdzianów i ich dystrybuant.

Liczba okresów prognoz.	Parametr wygładzania	$r_1$	$F_1(r_1)$	$r_2$	$F_2(r_2)$
18	2	1.2735	0.4772	1.9739	0.2279
17	3	1.3154	0.4748	1.5088	0.3016
15	5	1.3384	0.4692	1.3508	0.3551

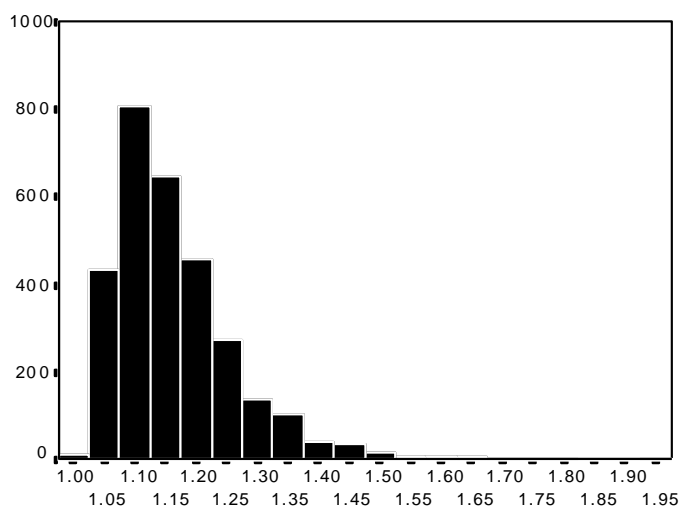
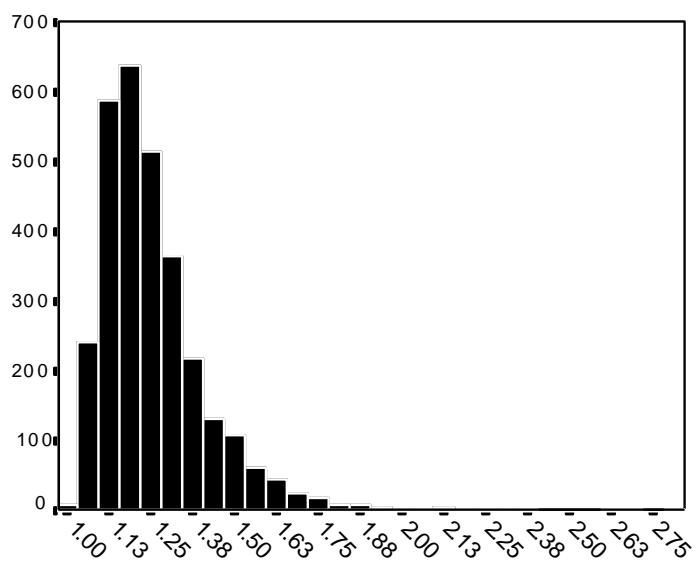
Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 1 wnioskujemy, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o nieobciążoności rozważanych predyktorów.

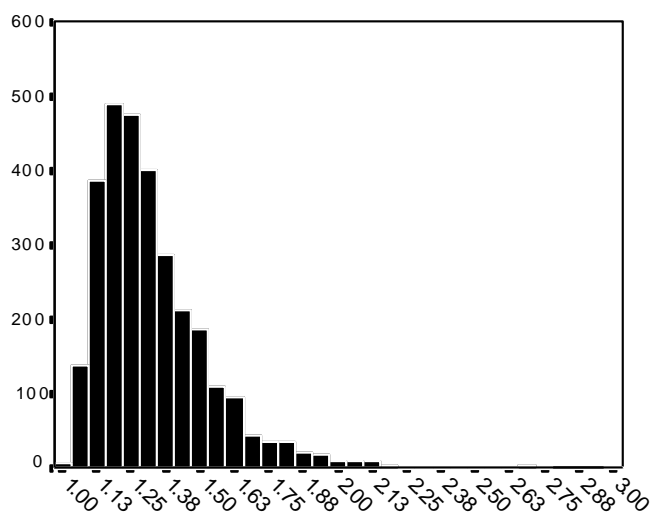
Wartości krytyczne używanych testów da się również wyznaczyć w sposób symulacyjny. W tym celu za pomocą odpowiedniego programu komputerowego wyznaczano symulacyjnie rozkład sprawdzianu  $R_1$ . Generowano 3000 prób prostych składających się z pseudolosowych liczb o rozkładzie normalnym. Każdą taką liczbę obliczono jako standardową postać sumy 12 liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym, które otrzymywano za pomocą odpowiedniej instrukcji języka komputerowego PASCAL. Następnie na podstawie tych prób obliczano wartości statystyki  $R_1$ . Tym sposobem otrzymano 3000 obserwacji tego sprawdzianu przy założeniu prawdziwości hipotezy głoszącej, że ciąg prognoz jest nieobciążony.



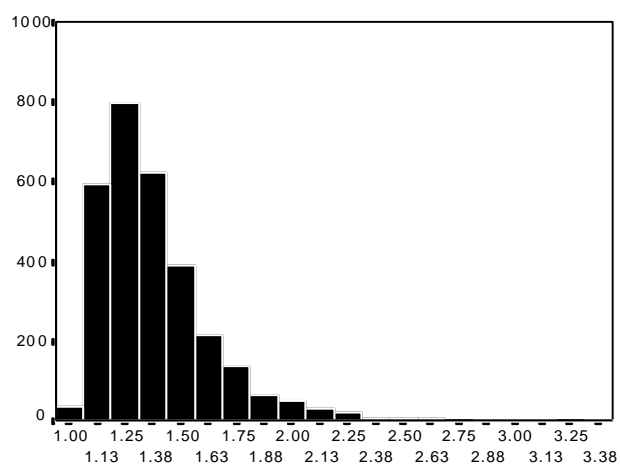
Rys. 12. Wartości krytyczne testu

Histogramy rozkładu sprawdzianu dla wybranych poziomów liczebności n próby i liczby k składników średniej ruchomej prezentują rysunki 13—16. Charakteryzują się one prawostronną asymetrią. Oceny wartości krytycznych testu dla poziomów istotności  $\alpha=0.1$ ; 0.05; 0.01 prezentuje tabela 2 oraz rysunek 12.

Rys. 13. Rozkład sprawdzianu R1 dla  $n=20$  i  $k=2$ Rys. 14. Rozkład sprawdzianu R1 dla  $n=20$  i  $k=3$



Rys. 15. Rozkład sprawdzianu R1 dla n=20 i k=4



Rys. 16. Rozkład statystyki R1 dla n=20 i k=5

Na podstawie tablic 1 i 2 wnioskujemy, że wartości sprawdzianu  $R_1$  nie przekraczają żadnej z wartości krytycznej dla każdej z rozważanych liczby  $k$  składników średniej. Zatem, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że stawiane ciągi prognoz są nieobciążone. Otrzymaliśmy więc ten sam wynik jak wcześniej, gdy o prawdziwości hipotezy sprawdzanej decydowaliśmy na podstawie przybliżonej oceny dystrybuanty sprawdzianu testu.

Tabela. 2. Wartości krytyczne sprawdzianu testu otrzymane metodą symulacyjną. Liczba symulacji 3000.

Liczeb. próby	Licz. skład. średn.	Poziomy istotności		
		0.10	0.05	0.01
10	5	2.539	3.259	6.945
10	4	2.247	2.760	3.866
10	3	1.843	2.165	3.229
10	2	1.532	1.706	2.082
20	2	1.295	1.359	1.516
20	3	1.463	1.554	1.837
20	4	1.597	1.751	2.095
20	5	1.722	1.913	2.316
20	10	2.051	2.422	3.602

### 4.3. Weryfikacja hipotezy o równoważności dwóch predyktorów

Prognozy cechy w danym okresie można formułować za pomocą różnych predyktorów. Wybór optymalnego predyktora zależy głównie od przyjętego kryterium. Zwykle, preferuje się ten predyktor, który ma najmniejszą wariancję ex-ante. Wydaje się jednak, że bardziej będzie rozsądnym wybór tego predyktora, który sprawdził się w przynajmniej kilku wcześniejszych okresach w tym sensie, że odpowiadająca mu wariancja predykcji ex-post nie przyjmuje istotnie dużych wartości. Świadczy to bowiem o niewystępowaniu obciążonych prognoz. Należałoby więc wybrać ten predyktor spośród dwóch analizowanych, który miałby istotnie mniejszy poziom wariancji predykcji ex-post.

Precyzyjniej stawiamy problem formułujemy zaczynając od potwierdzenia ważności założeń wprowadzonych na początku rozdziału drugiego (wzoru 2.6). Dodatkowo założymy, że wektor  $Y \sim N(\mu; \sigma^2 I_{n+m})$ , gdzie  $\mu = [\mu_1 \dots \mu_{n+m}]$ , a w szczególności  $\mu_t = at + b$ ,  $t = 1, \dots, n+m$ . Wektor wartości oczekiwanych rozbijmy na dwa podwektory postaci  $[\mu_n \ \mu_m] > \mu$ , gdzie:  $\mu_n = [\mu_1 \dots \mu_n]$ , a  $\mu_m = [\mu_{n+1} \dots \mu_{n+m}]$ . Niech  $Y_{pA}$ ,  $Y_{pB}$  będą dwoma predyktorami wektora  $Y_m = [Y_{n+1} \dots Y_{n+m}]$ . Błędy predykcji oznaczamy przez  $U_{AT} = Y_T - Y_{TpA}$  i  $U_{BT} = Y_T - Y_{TpB}$ , a wektory z nich złożone odpowiednio przez  $U_A$  i  $U_B$ . Niech ponadto:  $\delta_A = E(U_A)$  oraz  $\delta_B = E(U_B)$ , a  $\Sigma_A$  i  $\Sigma_B$  będą macierzami wariancji i kowariancji odpowiednio wektorów  $U_A$  i  $U_B$ . Wtedy hipotezę o równoważności obu predyktorów formujemy następująco<sup>40</sup>:

$$H_0: E(S_A^2) = E(S_B^2) \quad (4.102)$$

$$H_1: E(S_A^2) \neq E(S_B^2) \quad (4.103)$$

<sup>40</sup> Inaczej formułuje ten problem autor (1986).

przy czym  $S_A^2$  i  $S_B^2$  są tzw. wariancjami ex-post obu predyktorów a określają je wzory:

$$S_A^2 = \frac{1}{m} \mathbf{U}_A \mathbf{U}_A^T = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m U_{tA}^2 \quad (4.104)$$

$$S_B^2 = \frac{1}{m} \mathbf{U}_B \mathbf{U}_B^T = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m U_{tB}^2 \quad (4.105)$$

Niech  $\mathbf{G}_A = \mathbf{U}_A - \boldsymbol{\delta}_A$  oraz  $\mathbf{G}_B = \mathbf{U}_B - \boldsymbol{\delta}_B$ . Wtedy  $E(\mathbf{G}_A) = E(\mathbf{G}_B) = \mathbf{0}$  oraz

$$E(S_A^2) = \frac{1}{m} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}_A + \frac{1}{m} \boldsymbol{\delta}_A \boldsymbol{\delta}_A^T \quad (4.106)$$

lub

$$E(S_A^2) = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (D^2(U_{At}) + \delta_{At}^2)$$

$$E(S_B^2) = \frac{1}{m} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma}_B + \frac{1}{m} \boldsymbol{\delta}_B \boldsymbol{\delta}_B^T \quad (4.107)$$

lub

$$E(S_B^2) = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (D^2(U_{Bt}) + \delta_{Bt}^2)$$

Zatem wartość oczekiwana wariancji ex-post predykcji zależy od sumy wariancji ex-ante predyktora w poszczególnych okresach prognozowanych oraz od sumy kwadratów obciążeń stawianych prognoz. W szczególności, gdy obydwa predyktory będą dawały nieobciążone prognozy, to wariancje predykcji ex-post będą zależęć tylko od wariancji ex-ante danych predyktorów.

Do testowania hipotezy  $H_0$  użyjemy następującego ilorazu:

$$R_1 = \frac{S_A^2}{S_B^2} \quad (4.108)$$

przy czym:

$$S_A^2 \geq S_B^2$$

Duże wartości sprawdzianu  $R_1$  będą świadczyły przeciwko hipotezie  $H_0$ . Aby jednak ocenić, czy otrzymana wartość sprawdzianu jest istotnie duża, trzeba wyznaczyć jego rozkład przy założeniu, że jest prawdziwa hipoteza  $H_0$ . Dlatego uproścmy analizę przyjmując, że obydwa predyktory są liniowymi funkcjami wartości dotychczasowych zmiennych. Wtedy błędy predykcji są również liniowymi funkcjami wektora  $\mathbf{Y} = [Y_1 \dots Y_{n+m}]$ , które można napisać następująco:

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{Y} \mathbf{C}_A, \quad \mathbf{U}_B = \mathbf{Y} \mathbf{C}_B \quad (4.109)$$

Stąd i ze wzorów (4.104), (4.105) i (4.108) mamy:

$$R_1 = \frac{Y C_A C_A^T Y^T}{Y C_B C_B Y^T} \quad (4.110)$$

Stąd więc wynika, że statystyka  $R_1$  jest ilorazem dwóch zależnych form kwadratowych.

Najpierw analizujemy prostszy przypadek hipotezy  $H_0$ , gdy  $\delta_A = \delta_B = 0$ . Wtedy sprawdzian  $R_1$  można zapisać jako iloraz kombinacji liniowych zmiennych o centralnym rozkładzie  $\chi^2$ , co wynika z Dodatku do niniejszej pracy, gdzie również podano metody wyznaczania dystrybuanty zmiennych losowych, których szczególnym przypadkiem jest analizowany tu sprawdzian. Pozwoli to wyliczyć wartości krytyczne testu lub obserwowane poziomy istotności.

Gdy  $\delta_A \neq 0$  i  $\delta_B = 0$ , to procedura wnioskowania nie zmienia się, bo również teraz istotnie duże wartości statystyki  $R_1$  świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$ . Dlatego także w tym przypadku potrzebne kwantyle statystyki  $R_1$  lub obserwowane poziomy istotności można wyliczyć przy założeniu, że  $\delta_A = \delta_B = 0$ .

Sprawa komplikuje się, gdy nie możemy utrzymać założenia o nieobciążoności obu rozważanych predyktorów, a zatem wówczas, gdy  $\delta_A \neq 0$ , i  $\delta_B \neq 0$ . W tym jednak przypadku wyprowadzenie rozkładu sprawdzianu testu bez znajomości ocen obu wektorów obciążeń predykcji nie jest możliwe. Wydaje się, że w tej sytuacji można by obciążenia obu predyktorów oceniać za pomocą różnicy między prognozami a odpowiednimi ocenami trendu otrzymanymi na podstawie np. nieparametrycznej regresji.

Wtedy rozkład sprawdzianu  $R_1$  można aproksymować już tym razem za pomocą złożonych metod, które można znaleźć w pracy Mathai i Provosta (1992).

Ze wzorów (4.106) i (4.107) wynika, że równoważność dwóch predyktorów zależy od ich błędów ex-ante i od obciążeń stawianych prognoz.

Równoważność dwóch predyktorów można także rozumieć jako równość ich wartości oczekiwanych w analizowanym ciągu okresów czasu. Autor (1986) analizuje następujące hipotezy:

$$H_0 : E(Y_{pA}) = E(Y_{pB}) = \mu_m \quad (4.111)$$

$$H_1 : E(Y_{pA}) \neq E(Y_{pB}) = \mu_m \quad (4.112)$$

Przez  $\mu_m = [E(Y_{n+1}) \dots E(Y_{n+m})]$  oznaczono wartości oczekiwane prognozowanych zmiennych. Hipoteza sprawdzana  $H_0$  głosi, że obydwa predyktory nie tylko, że są równoważne w sensie równości ich wartości oczekiwanych, to jeszcze obydwa są nieobciążone. Z kolei hipoteza alternatywna głosi, że jeden z analizowanych predyktorów jest nieobciążony, co jest bardzo silnym założeniem i trudno sprawdzalnym. Do testowania tej hipotezy proponuje się sprawdzian konstruowany na podstawie następujących statystyk:

$$Q_B = U_B \Sigma_{UB} U_B^T \quad (4.113)$$

gdzie wektor błędów  $U_B \sim N(0; \Sigma_{UB} \sigma^2)$ .

Wprowadza się następującą zmienną:

$$\mathbf{U}_{A/B} = \mathbf{U}_A - \mathbf{U}_B \boldsymbol{\Sigma}_{UB}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{BA} \quad (4.114)$$

przy czym  $\boldsymbol{\Sigma}_{UB}^{-1}$  jest pseudoodwrotnością macierzy wariancji i kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}_{UB}$  wektora błędów  $\mathbf{U}_B$ , a  $\boldsymbol{\Sigma}_{BA}$  jest macierzą kowariancji wektorów błędów  $\mathbf{U}_A$  i  $\mathbf{U}_B$ . Wówczas  $\mathbf{U}_{A/B} \sim N(\boldsymbol{\delta}_A; \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_{A/B})$ , gdzie:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{A/B} = \boldsymbol{\Sigma}_{AA} - \boldsymbol{\Sigma}_{AB} \boldsymbol{\Sigma}_{BB}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{BA} \quad (4.115)$$

przy czym  $\boldsymbol{\Sigma}_{AA}$  jest macierzą wariancji i kowariancji błędów  $\mathbf{U}_A$ . Wprowadzimy następującą formę kwadratową:

$$Q_{A/B} = \mathbf{U}_{A/B} \boldsymbol{\Sigma}_{A/B}^{-1} \mathbf{U}_{A/B}^T \quad (4.116)$$

Wówczas sprawdzian testu dla hipotezy  $H_0$  określonej wzorem (4.111) względem alternatywnej  $H_1$  ma postać:

$$F_2 = \frac{Q_{A/B}}{Q_B} \frac{k_B}{k_{A/B}} \quad (4.117)$$

przy czym  $k_{A/B} = R(\boldsymbol{\Sigma}_{A/B})$  i  $k_B = R(\boldsymbol{\Sigma}_{BB})$ . Przy założeniu, że prawdziwą jest hipoteza  $H_0$  statystyka  $F_2$  ma znany rozkład Fishera-Snedecora z  $k_{A/B}$  i  $k_B$  stopniami swobody. Gdy prawdziwą jest hipoteza  $H_1$ , to sprawdzian  $F_2$  ma niecentralny rozkład Fishera-Snedecora. Zatem istotnie duże wartości świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$ .

Opisana procedura weryfikacji będzie jednak miała bardzo ograniczone znaczenie praktyczne z uwagi na to, że należy mieć już nieobciążony predyktor rozważanej cechy. Wtedy istota analizowanego problemu polega na testowaniu czy inny predyktor jest także nieobciążony. Jeśli w wyniku weryfikacji opisanym testem nie odrzucimy hipotezy o równoważności obu predyktorów, to w konsekwencji można następnę prognozy stawiać za pomocą kombinacji liniowej (ze współczynnikami sumującymi się do jedynki) obu predyktorów. Pamiętajmy jednak, że jeden z analizowanych predyktorów z założenia ma być nieobciążony, co jest, jak już wspomniano, trudnym do przyjęcia warunkiem z praktycznego punktu widzenia. Z tego powodu przeanalizujemy teraz przypadek nie wymagający tego bardzo krępującego założenia.

Hipotezę o równoważności dwóch predyktorów formułujemy następująco:

$$H_0 : E(\mathbf{Y}_{TpA}) - E(\mathbf{Y}_{TpB}) = \boldsymbol{\delta}_{AB} = \mathbf{0} \quad (4.118)$$

$$H_1 : \boldsymbol{\delta}_{AB} \neq \mathbf{0} \quad (4.119)$$

Sprawdziany testu określonych hipotez będą budowane za pomocą następujących statystyk  $\mathbf{U}_{AB} \sim N(\boldsymbol{\delta}_{AB}, \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_{AB})$ , przy czym:

$$\mathbf{U}_{AB} = \mathbf{Y}_{TpA} - \mathbf{Y}_{TpB} \quad (4.120)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{AB} = \boldsymbol{\Sigma}_{AA} + \boldsymbol{\Sigma}_{AB} + \boldsymbol{\Sigma}_{BA} + \boldsymbol{\Sigma}_{BB} \quad (4.121)$$

przy czym  $\Sigma_{*AA}$  ( $\Sigma_{*BB}$ ) jest macierzą wariancji i kowariancji wektora  $\mathbf{Y}_{TpA}$  ( $\mathbf{Y}_{TpB}$ ), natomiast  $\Sigma_{*BA}$  jest macierzą kowariancji obu tych wektorów.

Przez  $\hat{\mathbf{Y}} = [Y_n \dots Y_{n+m}]$ , gdzie  $1 \leq h \leq n+1$  oznaczamy oceny trendu badanej cechy, zakładamy, że  $E(\hat{\mathbf{Y}}) = \boldsymbol{\mu} = [\mu_n \dots \mu_{n+m}]$ , co oznacza, że  $\hat{\mathbf{Y}}$  daje nieobciążone oceny trendu. Przez  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$  oznaczamy reszty trendu, przy czym  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \sim N(\mathbf{0}; \sigma^2 \Sigma_{ee})$ , wówczas konstruujemy statystyki postaci:

$$Q_{AB} = \mathbf{U}_{AB} \Sigma_{*AA}^{-} \mathbf{U}_{AB}^T \quad (4.122)$$

$$Q_e = \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \Sigma_{ee}^{-} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \quad (4.123)$$

gdzie  $\Sigma_{ee}^{-}$  ( $\Sigma_{*AB}^{-}$ ) jest pseudoodwrotnością macierzy wariancji i kowariancji reszt  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  (różnic  $\mathbf{U}_{AB}$ ). Rezultaty te prowadzą do następującego sprawdzianu:

$$F_3 = \frac{Q_{AB}}{Q_e} \frac{k_e}{k_{AB}} \quad (4.124)$$

gdzie:  $k_e = R(\Sigma_{ee})$ ,  $k_{AB} = R(\Sigma_{AB})$ . Formy kwadratowe tworzące licznik i mianownik statystyki  $F_3$  będą zwykle zależne. Powoduje to konieczność sięgnięcia po metody wyznaczania rozkładu ilorazu zależnych form kwadratowych, które opisano w Dodatku do niniejszej pracy. W związku z tym konstruujemy nowy sprawdzian, którego obliczenie wymaga więcej operacji numerycznych, lecz za to istnieje możliwość korzystania z ogólnie dostępnych tablic przy uzyskaniu wartości krytycznych. Przy jego konstrukcji wykorzystujemy następujące statystyki:

$$\mathbf{U}_{AB/e} = \mathbf{U}_{AB} - \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \Sigma_{ee}^{-} \Sigma_{eAB} \quad (4.125)$$

przy czym  $\Sigma_{eAB}$  jest macierzą kowariancji wektorów  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  i  $\mathbf{U}_{AB}$ . Ponadto przy wprowadzonych wcześniej założeniach  $\mathbf{U}_{AB/e} \sim N(\boldsymbol{\delta}_{AB}, \sigma^2 \Sigma_{AB/e})$ , przy czym  $\boldsymbol{\delta}_{AB}$  specyfikuje hipoteza  $H_0$  dana wzorem (4.118) oraz:

$$\Sigma_{AB/e} = \Sigma_{*AB} - \Sigma_{ABe} \Sigma_{ee}^{-} \Sigma_{eAB} \quad (4.126)$$

W końcu konstruujemy statystykę postaci:

$$Q_{AB/e} = \mathbf{U}_{AB/e} \Sigma_{AB/e}^{-} \mathbf{U}_{AB/e}^T$$

Wyniki te prowadzą do następującego sprawdzianu:

$$F_4 = \frac{Q_{AB/e}}{Q_e} \frac{k_e}{k_{AB/e}} \quad (4.128)$$

przy czym  $k_{AB/e} = R(\Sigma_{AB/e})$ . Można wykazać na podstawie ogólnych twierdzeń prezentowanych przez Rao (1962) lub Rao i Mitra (1971), że sprawdzian  $F_4$  ma rozkład Snedecora-Fishera z  $k_{AB/e}$  i  $k_e$  stopniami swobody i parametrem niecentralności:



$$\Delta = \frac{k_e}{k_{AB/e}} \delta_{*AB} \Sigma_{AB/e} \delta_{*AB}^T \quad (4.129)$$

Jeśli więc hipoteza  $H_0$  dana wzorem (4.118) jest prawdziwa, to  $F_4$  ma rozkład centralny Snedecora-Fishera z tą samą liczbą stopni swobody. Zatem obszar krytyczny testu należy budować prawostronnie.

Zaznaczmy, że przy konstrukcji tego testu można wykorzystywać różne procedury wyznaczania trendu. Wydaje się jednak, że należałoby się posługiwać tylko tymi metodami, które są „giętkie” na ewentualne zmiany kierunku trendu. Należą do nich np. metoda wyrównywania wykładniczego, średnich ruchomych lub nieparametryczna.

W szczególności można testować równoważność metody naiwnej predykcji z metodą wyrównywania wykładniczego. Drugi przykład dotyczy testowania równoważności metody predykcji na podstawie średnich ruchomych o różnych ilościach składników. W końcu można również sprawdzić równoważność predykcji metodą wyrównywania wykładniczego przy różnych jej parametrach.

Na zakończenie przedstawiamy jeszcze inny sprawdzian hipotezy  $H_0$  określonej wzorem (4.118). Wykorzystywany do tego celu będzie tylko wektor różnic błędów predykcji  $U_{AB}$ , danej wzorem (4.120), przy czym niech  $U_{AB}$  ma nieosobliwy rozkład normalny  $U_{AB} \sim N(\delta_{*AB}, \sigma^2 \Sigma_{*AB})$ . Wtedy istnieje taka macierz  $C$  że  $CC^T = \Sigma_{*AB}^{-1}$  i

$$W = U_{AB} C^T \quad (4.130)$$

oraz  $W \sim N(\delta_w; \sigma^2 I_m)$ , przy czym:

$$\delta_w = \delta_{*AB} C^T \quad (4.131)$$

Do estymacji wektora  $\delta_w$  można użyć nieparametrycznej regresji. Jedną z najprostszych odmian tej metody prezentuje wzór:

$$\hat{\delta}_w = W A^T \quad (4.132)$$

przy czym elementy macierzy  $A = [a_{ij}]$  wyjaśnia wzór (4.62). Reszty tej funkcji regresji określa wzór:

$$e_w = W - \hat{\delta}_w \quad (4.133)$$

lub

$$e_w = W B_W^T$$

gdzie:

$$B_W = I_m - A$$

Stąd i ze wzoru (4.130) mamy:

$$e_w = U_{AB} C^T B_W^T \quad (4.134)$$

Macierz wariancji i kowariancji reszt ma postać:

$$\Sigma_{ee} = \mathbf{B}_w \mathbf{C} \Sigma_{*AB} \mathbf{C}^T \mathbf{B}_w^T \quad (4.135)$$

Zakładamy, że  $E(\mathbf{e}_w) = \mathbf{0}$ , a więc  $\mathbf{e}_w \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{AB})$ . Macierz korelacji reszt i przekształconego wektora reszt określa wzór:

$$\Sigma_{ew} = \mathbf{C} \mathbf{B}_w \Sigma_{*AB} \quad (4.136)$$

Wprowadźmy następujący wektor losowy:

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{W} - \mathbf{e}_w \Sigma_{ee}^{-1} \Sigma_{ew} \quad (4.137)$$

Wtedy wektory  $\mathbf{W}_e$  oraz  $\mathbf{e}_w$  są niezależne oraz  $\mathbf{W}_e \sim N(\delta_w; \sigma^2 \Sigma_{w/e})$ , przy czym:

$$\Sigma_{w/e} = \mathbf{I}_m - \Sigma_{we} \Sigma_{ee}^{-1} \Sigma_{ew} \quad (4.138)$$

Otrzymane rezultaty pozwalają skonstruować następujący sprawdzian:

$$F_5 = \frac{Q_{w/e}}{Q_e} \frac{k_e}{k_{w/e}} \quad (4.139)$$

przy czym  $k_e = R(\Sigma_{ee})$ ,  $k_{w/e} = R(\Sigma_{w/e})$  oraz

$$Q_{w/e} = \mathbf{W}_e \Sigma_{w/e}^{-1} \mathbf{W}_e^T \quad (4.140)$$

$$Q_e = \mathbf{W}_e \Sigma_{ee}^{-1} \mathbf{W}_e^T \quad (4.141)$$

Przy określonych założeniach statystyka  $F_5$  ma rozkład Snedecora-Fishera z  $k_{w/e}$  i  $k_e$  stopniami swobody. Gdy określona wzorem (4.118) hipoteza  $H_0$  jest prawdziwa to  $F_5$  ma rozkład centralny Snedecora-Fishera. Zatem istotnie duże wartości sprawdzianu  $F_5$  świadczą o nierównoważności obu predyktorów.

#### 4.4. Testowanie nieobciążoności prognozy wektorowej

Niech  $\mathbf{Y} = [Y_{it}]$  będzie macierzą losową o wymiarze  $m \times n$ . Przez  $\mathbf{Y}_{*t}$  oznaczmy  $t$ -tą kolumnę macierzy  $\mathbf{Y}$ , której wartości są obserwacjami  $m$  cech w  $t$ -tym okresie czasu. Przez  $\mathbf{Y}_{i*}$  oznaczamy  $i$ -ty wiersz macierzy  $\mathbf{Y}$ , czyli obserwacje  $i$ -tej cechy w  $n$  okresach czasu. Podobnie określamy macierz losową  $\mathbf{e} = [e_{it}]$  oraz wektory  $\mathbf{e}_{i*} = [e_{i1} \dots e_{in}]$ ,  $\mathbf{e}_{*t} = [e_{1t} \dots e_{mt}]^T$ .

Model szeregu szacowego  $i$ -tej cechy z trendem liniowym zapisujemy w następującej postaci:

$$Y_{it} = a_{i1}t + a_{i2} + e_{it}, \quad t=1, \dots, n$$

Niech  $\mathbf{a}=[a_{ij}]$  będzie macierzą o wymiarach  $m \times 2$  współczynników trendu. Pierwsza kolumna tej macierzy zawiera współczynniki kierunkowe trendów i oznaczmy ją przez  $\mathbf{a}_{*1}$ . Wyrazy wolne trendów tworzą elementy drugiej kolumny  $\mathbf{a}_{*2}$  macierzy  $\mathbf{a}$ . Przez  $\mathbf{a}_{i*}=[a_{i1} \ a_{i2}]$  oznaczono  $i$ -ty wiersz macierzy  $\mathbf{a}$ . Wtedy model  $m$  wymiarowego szeregu czasowego z trendami liniowymi można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{Y}_{*t}=\mathbf{a}_{*1}t+\mathbf{a}_{*2}+\mathbf{e}_{*t}, \quad t=1,\dots,n \quad (4.142)$$

lub

$$\mathbf{Y}_{i*}=\mathbf{a}_{i*}\mathbf{T}^T+\mathbf{e}_{i*}, \quad i=1,\dots,m \quad (4.143)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ n & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ t_n \end{bmatrix}$$

Zakładamy, że dla każdego  $t \neq h=1,\dots,n$  wektory  $\mathbf{e}_{*t}$ ,  $\mathbf{e}_{*h}$  są niezależne i  $\mathbf{e}_{*t} \sim N(\mathbf{0}; \mathbf{C})$ , gdzie  $\mathbf{C}=[c_{ij}]$  jest macierzą wariancji i kowariancji składników losowych  $c_{ij}=E(e_{it}e_{jt})$ , zatem  $\mathbf{Y}_{*t} \sim N(\mathbf{l}_t; \mathbf{C})$ , gdzie  $\mathbf{l}_t=\mathbf{a}_{*1}t+\mathbf{a}_{*2}$ ,  $t=1,\dots,n$ . Trend  $i$ -tej cechy w okresie  $t$  ma więc postać:  $E(Y_{it})=l_{it}=a_{i1}t+a_{i2}$ . Niech w okresie  $n+h$  ( $h>0$ ) wektor  $\mathbf{Y}_{n+h}$  ma rozkład niezależny od macierzy  $\mathbf{Y}$  oraz  $\mathbf{Y}_{n+h} \sim N(\boldsymbol{\delta}_{n+h}; \mathbf{C})$ .

Wektor wartości oczekiwanych  $E(\mathbf{Y}_{n+h})=\boldsymbol{\delta}_{n+h}$  nie koniecznie musi być równy wektorowi  $\mathbf{l}_{n+h}=\mathbf{a}_{*1}(n+h)+\mathbf{a}_{*2}$ . Zatem dopuszczamy możliwość występowania w okresie  $t=n+h$  odchylenia dotychczasowych trendów od wartości oczekiwanej przynajmniej jednej z cech.

Parametry  $\mathbf{a}_{i*}=[a_{i1} \ a_{i2}]$   $i$ -tego trendu szacujemy zwykłą metodą najmniejszych kwadratów. Ich estymatory mają postać:

$$\hat{\mathbf{a}}_{i*}=\mathbf{Y}_{i*}\mathbf{T}(\mathbf{T}^T\mathbf{T})^{-1} \quad (4.144)$$

Wektor reszt  $i$ -tego trendu wyznacza równanie:

$$\hat{\mathbf{e}}_{i*}=\mathbf{Y}_{i*}\mathbf{M}=\mathbf{e}_{i*}\mathbf{M} \quad (4.145)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}=\mathbf{I}_n-\mathbf{T}(\mathbf{T}^T\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^T \quad (4.146)$$

jest macierzą idempotentną, czyli  $\mathbf{M}^2=\mathbf{M}$ , natomiast  $\mathbf{I}_n$  jest macierzą jednostkową stopnia  $n$ .

Ze znanych własności rozkładu reszt (por. np. Theil (1979)) wiadomo, że dla każdego  $i=1,\dots,m$   $E(\hat{\mathbf{e}}_{i*})=\mathbf{0}$ , a macierz wariancji i kowariancji ma postać:

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{e}}_{i*})=\sigma^2\mathbf{M} \quad (4.147)$$

gdzie:

$$\sigma_i^2 = D^2(\epsilon_{it}), \quad \text{dla każdego } t=1,2,\dots$$

Kowariancję wektorów  $\mathbf{e}_{i*}$  oraz  $\mathbf{e}_{j*}$  dla  $i \neq j=1,\dots,m$  określa wzór:

$$\mathbf{Cov}(\mathbf{e}_{i*}, \mathbf{e}_{j*}) = E(\mathbf{e}_{i*}^T \mathbf{e}_{j*}) = c_{ij} \mathbf{M} \quad (4.148)$$

Ponadto:

$$E(\mathbf{e}_{i*} \mathbf{e}_{j*}^T) = (n-2)c_{ij} \quad (4.149)$$

Nieobciążonym estymatorem macierzy wariancji i kowariancji  $\mathbf{C}$  jest macierz:

$$\hat{\mathbf{C}} = [\hat{c}_{ij}] \quad (4.150)$$

gdzie:

$$\hat{c}_{ij} = \frac{1}{n-2} \mathbf{e}_{i*} \mathbf{e}_{j*}^T$$

Stąd i ze wzorów (4.145) i (4.146) wynika, że:

$$(n-2)\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{e}_{i*} \mathbf{e}_{j*}^T] = \mathbf{e}_{i*} \mathbf{M} \mathbf{e}_{j*}^T = \mathbf{e} \mathbf{M} \mathbf{e}^T$$

Wtedy:

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{n-2} \mathbf{e} \mathbf{M} \mathbf{e}^T \quad (4.151)$$

Predyktor wartości i-tej cechy ma postać (por. np. Theil (1979)):

$$\tilde{Y}_{i,n-h} = \hat{a}_{i1}(n+h) + \hat{a}_{i2} \quad (4.152)$$

Jest wygodniej zapisać go w następujący sposób:

$$\tilde{Y}_{i,n+h} = \mathbf{N}_h \mathbf{Y}_{i*}^T \quad (4.153)$$

gdzie:

$$\mathbf{N}_h = \mathbf{t}_{n+h} \mathbf{A} \quad (4.154)$$

$$\mathbf{t}_{n+h} = [n+h \ 1], \quad \mathbf{A} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \quad (4.155)$$

Wtedy wektor predyktorów  $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}$  wektora losowego  $\mathbf{Y}_{n+h}$  ma postać:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}^T = [\mathbf{N}_h \mathbf{Y}_{1*}^T \dots \mathbf{N}_h \mathbf{Y}_{m*}^T] \quad (4.156)$$

Wektor błędów predykcji określa więc wzór:

$$\mathbf{U}_h = \mathbf{Y}_{n+h} - \tilde{\mathbf{Y}}_{n+h} \quad (4.157)$$

Wartość oczekiwana predyktora wynosi:

$$E(\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}) = \mathbf{a}_{*1}(n+h) + \mathbf{a}_{*2} = \mathbf{I}_{n+h} \quad (4.158)$$

**Lemat 4.1:** Przy określonych założeniach modelu szeregu czasowego danego wzorami (4.142) lub (4.143) parametry wektora błędów predykcji są następujące:

$$E(\mathbf{U}_h) = \mathbf{\Delta}_h = \boldsymbol{\delta}_{n+h} - \mathbf{I}_{n+h} \quad (4.159)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{U}_h) = w\mathbf{C} \quad (4.160)$$

gdzie:

$$w = 1 + \mathbf{t}_{n+h}(\mathbf{T}^T\mathbf{T})^{-1}\mathbf{t}_{n+h}^T \quad (4.161)$$

**Dowód:** Wzór (4.159) wynika bezpośrednio ze wzorów (4.157), (4.58) i założenia, że  $\mathbf{Y}_{n+h} \sim (\boldsymbol{\delta}_{n+h}; \mathbf{C})$ . Wyprowadzenie wzoru (4.160) przebiega następująco. Z niezależności rozkładu wektora  $\mathbf{Y}_{n+h}$  oraz wektorów  $\mathbf{Y}_1 \dots \mathbf{Y}_n$  wynika, że wektory  $\mathbf{Y}_{n+h}$  i  $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}$  są także niezależne, wtedy:

$$\mathbf{V}(\mathbf{U}_h) = \mathbf{V}(\mathbf{Y}_{n+h} - \tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}) = \mathbf{V}(\mathbf{Y}_{n+h}) + \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}) = \mathbf{C} + \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}) \quad (4.162)$$

Na podstawie wzorów (4.143) i (4.152)—(4.154) mamy:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i,n+h} = \mathbf{t}_{n+h}(\mathbf{T}^T\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^T(\mathbf{T}\mathbf{a}_{i*}^T + \mathbf{e}_{i*}^T) = a_{i1}(n+h) + a_{i2} + \mathbf{N}_h \mathbf{e}_{i*}^T$$

Stąd i ze wzoru (4.156)—(4.158) mamy:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h} - E(\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}) = [\mathbf{N}_h \mathbf{e}_{1*}^T \dots \mathbf{N}_h \mathbf{e}_{m*}^T]$$

Stąd i z faktu, że  $\mathbf{N}_h \mathbf{e}_{i*}^T = \mathbf{e}_{i*} \mathbf{N}_h^T$  wynika, że:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}) &= E[\mathbf{N}_h \mathbf{e}_{1*}^T \dots \mathbf{N}_h \mathbf{e}_{m*}^T]^T [\mathbf{e}_{1*} \mathbf{N}_h^T \dots \mathbf{e}_{m*} \mathbf{N}_h^T] = E[\mathbf{N}_h E(\mathbf{e}_{i*}^T \mathbf{e}_{j*}) \mathbf{N}_h^T] = \\ &= E[\mathbf{N}_h (c_{ij} \mathbf{I}_n) \mathbf{N}_h^T] = [c_{ij} \mathbf{N}_h \mathbf{N}_h^T] = [c_{ij} \mathbf{t}_{n+h}(\mathbf{T}^T\mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}_{n+h}^T] = [(w-1)c_{ij}] = (w-1)\mathbf{C} \end{aligned}$$

Stąd i ze wzoru (4.162) otrzymujemy natychmiastowo wyrażenie (4.160).

**Lemat 4.2:** Rozkład wektora błędów predykcji  $\mathbf{U}_{n+h}$  jest niezależny od rozkładu wektorów reszt  $\mathbf{e}_{1*}, \dots, \mathbf{e}_{m*}$ .

**Dowód:** Stąd, że wyszczególnione wyżej wektory mają łącznie wielowymiarowy rozkład normalny wystarczy wykazać, że  $\text{Cov}(\mathbf{U}_{i,n+h}, \mathbf{e}_{jk}) = 0$  dla każdego  $i, j = 1, \dots, m$  oraz  $k = 1, \dots, n$ . Stąd, że  $E(\mathbf{e}_{jk}) = 0$  dla każdego  $j = 1, \dots, m$  i  $k = 1, \dots, n$  mamy:

$$\text{Cov}(U_{i,n+h}, e_{jk}) = E(U_{i,n+h} e_{jk}) = E(Y_{i,n+h} - \mathbf{t}_{n+h} \mathbf{A} \mathbf{Y}_{i*}^T)(Y_{j,k} - \mathbf{t}_k \mathbf{A} \mathbf{Y}_{j*}^T)$$

Stąd i na podstawie wzoru (4.143) mamy:

$$\text{Cov}(U_{i,n+h}, e_{jk}) =$$

$$\begin{aligned} &= E[a_{i1}(n+h) + a_{i2} + e_{i,n+h} \mathbf{t}_{n+h} \mathbf{A} (\mathbf{T} \mathbf{a}_{i*}^T + \mathbf{e}_{i*}^T)] [a_{j1}k + a_{j2} + e_{j,k} \mathbf{t}_k \mathbf{A} (\mathbf{T} \mathbf{a}_{j*}^T + \mathbf{e}_{j*}^T)] = \\ &= E(e_{i,n+h} - \mathbf{t}_{n+h} \mathbf{A} \mathbf{e}_{i*}^T)(e_{j,k} - \mathbf{t}_k \mathbf{A} \mathbf{e}_{j*}^T) = -\mathbf{t}_{n+h} \mathbf{A} E(\mathbf{e}_{i*}^T e_{j,k}) + \mathbf{t}_{n+h} \mathbf{A} E(\mathbf{e}_{i*}^T \mathbf{e}_{j*}^T) \mathbf{A}^T \mathbf{t}_k^T = \\ &= -\mathbf{t}_{n+h} \mathbf{A} [0 \dots 0 \ c_{ij} \ 0 \dots 0]^T + c_{ij} \mathbf{t}_{n+h} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}_k^T = -c_{ij} \mathbf{t}_{n+h} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} [k \ 1]^T + \\ &+ c_{ij} \mathbf{t}_{n+h} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}_k^T = -c_{ij} \mathbf{t}_{n+h} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}_k^T + c_{ij} \mathbf{t}_{n+h} (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t}_k^T = 0 \end{aligned}$$

Przedmiotem analizy jest weryfikacja hipotezy głoszącej, że dany wzorem (4.156) predyktor wektorowy  $\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}$  daje nieobciążone prognozy wektora zmiennych  $\mathbf{Y}_{n+h}$ , czyli  $E(\tilde{\mathbf{Y}}_{n+h}) = E(\mathbf{Y}_{n+h})$ . Tak określona hipoteza jest równoważna hipotezie  $H_0$  głoszącej, że dany wzorem (4.157) wektor błędów predykcji  $\mathbf{U}_{n+h}$  ma wartość oczekiwaną równą wektorowi zerowemu, czyli  $H_0: E(\mathbf{U}_{n+h}) = \mathbf{0}$  wobec hipotezy alternatywnej  $H_1: E(\mathbf{U}_{n+h}) \neq \mathbf{0}$ .

Do testowania postawionej hipotezy użyjemy dwóch sprawdzianów. Pierwszy z nich ma postać:

$$\mathbf{G} = \frac{n-2}{w} \mathbf{U}_{n+h}^T \hat{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{U}_{n+h} \quad (4.163)$$

gdzie: macierz  $\hat{\mathbf{C}}$  określa wzór (4.151), a współczynnik w wzór (4.161).

**Twierdzenie 4.1:** Statystyka  $G$  ma niecentralny rozkład Hotellinga z  $m$  oraz  $n-m-1$  stopniami swobody i parametrem niecentralności:

$$\tau^2 = \boldsymbol{\delta}_{n+h}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\delta}_{n+h} \quad (4.164)$$

**Dowód:** Przy wyprowadzeniu statystyki  $H$  jest przydatne następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 4.2.** Rao (1982), s. 535—6: Jeśli kolumny macierzy losowej  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_n]$  są niezależne i  $\mathbf{X}_i \sim N(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\Sigma})$  dla każdego  $i=1, \dots, n$ , to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, żeby forma kwadratowa  $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$  miała centralny rozkład Wisharta jest, by macierz  $\mathbf{A}$  była idempotentna i  $\mathbf{A} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ .

W naszym przypadku statystyka  $(n-2) \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{e} \mathbf{M} \mathbf{e}^T$  ma centralny rozkład Wisharta z  $n-2$  stopniami swobody, bo macierz  $\mathbf{M}$  jest idempotentna i jest rzędu  $n-2$ , natomiast kolumny macierzy  $\mathbf{e}$  są niezależne i każda z nich ma rozkład  $N(\mathbf{0}; \mathbf{C})$ . Z kolei z lematu 1 wynika, że

wektor losowy  $\frac{1}{\sqrt{w}}\mathbf{U}_h$  ma rozkład  $N(\boldsymbol{\kappa}_{n+h}, \mathbf{C})$ , gdzie  $\boldsymbol{\kappa}_{n+h} = \frac{\Delta_{n+h}}{\sqrt{w}}$ . Stąd i ze znanej definicji statystyki Hotellinga wynika już twierdzenie 4.1.

W praktyce będzie wygodniej korzystać ze znanej transformacji statystyki Hotellinga, która w naszym przypadku przyjmuje następującą postać:

$$G_1 = \frac{n-m-1}{m(n-2)}G \sim F(m, n-m-1, \tau^2) \quad (4.165)$$

Statystyka  $G_1$  ma znany rozkład Snedecora-Fishera z  $m$  oraz  $n-m-1$  stopniami swobody i parametrem niecentralności  $\tau^2$ .

Obszar krytyczny testu wykorzystującego sprawdzian  $G$  bądź  $G_1$  należy budować prawostronnie. Zatem istotnie duże wartości sprawdzianów  $G$  i  $G_1$  świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$  głoszącej, że wektor prognoz jest nieobciążony.

Do weryfikacji tej hipotezy można także użyć transformacji statystyki Hotellinga (por. np. Rao (1982), s. 541), która w naszym przypadku prowadzi do następującego sprawdzianu:

$$G_2 = \left(1 + \frac{G}{n-2}\right)^{-1} = \frac{\det(\hat{\mathbf{C}})}{\det\left(\hat{\mathbf{C}} + \frac{1}{w}\mathbf{U}_h\mathbf{U}_h^T\right)} \quad (4.166)$$

Gdy hipoteza  $H_0$  jest prawdziwą to statystyka  $G_2$  ma rozkład beta  $B\left(\frac{n-m-1}{2}; \frac{m}{2}\right)$ . Teraz istotnie małe wartości statystyki  $G_2$  świadczą przeciwko hipotezie  $H_0$ . W tym więc przypadku obszar krytyczny jest lewostronny.

Na podstawie danych pochodzących z Roczników Statystycznych oszacowano trendy produkcji węgla i elektryczności w Polsce w latach 1970–1979. Trend produkcji węgla (mln t) prezentuje następujące równanie:

$$\mathbf{y}_{wt} = \begin{matrix} 6.8303t + & 130.7333 \\ & (0.2031) & (1.2602) \end{matrix}$$

Trend produkcji energii elektrycznej (mld kWh) określa wzór:

$$\mathbf{y}_{et} = \begin{matrix} 6.1515t + & 59.2667 \\ & (0.2023) & (1.2551) \end{matrix}$$

Odchylenie standartowe reszt trendu produkcji węgla wynosi  $s_w=1.8447$ , a trendu produkcji elektryczności  $s_e=1.8373$ . Współczynniki determinacji obu trendów wynoszą 99.1%. Współczynnik korelacji liniowej reszt trendów wynosi -0.652. Używając graficznych procedur<sup>41</sup>

<sup>41</sup> Wykorzystano tutaj procedury zaprogramowane w komputerowym pakiecie statystycznym SPSS.

nie odrzucono hipotezy o normalności rozkładu składników losowych obu trendów. Test Studenta odrzuca hipotezę o zerowości poszczególnych parametrów trendów. Na podstawie statystyki Durbina-Watsona  $d_w=1.3804$  (dla produkcji węgla),  $d_w=1.3631$  (dla produkcji elektryczności) nie odrzucamy hipotezy o braku autokorelacji rzędu pierwszego składników losowych obu trendów.

Zadanie polega na obliczaniu prognoz produkcji węgla i elektryczności za pomocą wektorowego predyktora. Następnie należy sprawdzić, czy ten predyktor jest nieobciążony.

Na podstawie wzorów (4.152)—(4.156) otrzymujemy następującą prognozę wektorową na rok 1980:  $\tilde{\mathbf{y}}_{1980} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{w1980} \\ \tilde{y}_{el1980} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205.9 \\ 126.9 \end{bmatrix}$ , przy czym pierwszy element wektora to prognoza produkcji węgla, a drugi element to prognoza produkcji elektryczności. Wektor zaobserwowanych rzeczywistych poziomów produkcji tych dóbr wynosi:  $\mathbf{y}_{1980} = \begin{bmatrix} 193 \\ 122 \end{bmatrix}$ .

Zatem realizacja wektora błędów predykcji ma postać:  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 12.9 \\ 4.9 \end{bmatrix}$ . Ocena macierzy wariancji i

kowariancji reszt trendów ma postać:  $\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 3.0248 & -1.9643 \\ -1.9643 & 3.0005 \end{bmatrix}$ . Wartość określonego wzorem (4.161) współczynnika wynosi  $w=1.4667$ . Z kolei wartość danej wzorem (4.163) statystyki Hotellinga wynosi  $g=857.5311$ , a wartość określonej wzorem (4.165) statystyki wynosi  $g_1=375.1698$ . Stąd i na podstawie tablic rozkładu Snedecora-Fishera wnioskujemy, że hipotezę o nieobciążoności predyktora dającego prognozy produkcji na rok 1980 należy odrzucić i to przy poziomie istotności 0.001. Do tego samego wniosku prowadzi test wykorzystujący statystykę  $G_2$ , daną wzorem (4.166). Zatem w roku 1980 nastąpił istotny spadek poziomu produkcji przynajmniej jednego z analizowanych dóbr.



## 5. DODATEK. ROZKŁADY ZALEŻNYCH FORM KWADRATOWYCH

Ten rozdział pracy napisano głównie na podstawie książki A. M. Mathai i S. B. Provosta (1992).

### 5.1. Reprezentacje form kwadratowych

Niech wektor losowy  $\mathbf{X}^T = [X_1 \dots X_p]$  ma wartość oczekiwaną  $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$  i macierz wariancji i kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}$  rzędu  $R(\boldsymbol{\Sigma}) = r \leq p$ . Analizujemy dalej formę kwadratową:

$$Q(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \quad (5.1)$$

Założmy, że macierz  $\boldsymbol{\Sigma}$  jest nieosobliwa, czyli  $R(\boldsymbol{\Sigma}) = p$ . Niech  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  będą wartościami własnymi macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ , przy czym  $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$ . Przez  $\mathbf{U}^T = [U_1 \dots U_p]$  oznaczamy wektor losowy, którego wartość oczekiwana jest wektorem zerowym, a macierz wariancji i kowariancji jest macierzą jednostkową. przez  $\mathbf{P}$  oznaczamy taką macierz ortogonalną, że  $\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{I}$ . Ponadto niech  $\mathbf{b}^T = [b_1 \dots b_p] = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \boldsymbol{\mu}$ . Wtedy zakładając, że  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  mamy (por. Mathai i Provost (1992), s. 29):

$$Q(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^p \lambda_j (U_j + b_j)^2, \quad \text{gdy } \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0} \quad (5.2)$$

$$Q(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^p \lambda_j U_j^2, \quad \text{gdy } \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

Założmy teraz, że macierz  $\boldsymbol{\Sigma}$  jest osobliwa, czyli  $R(\boldsymbol{\Sigma}) = r < p$ . Wtedy przyjmując, że  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , istnieje taka macierz  $\mathbf{B}$  o wymiarach  $p \times r$ , że  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T$  i  $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ . Przez  $\mathbf{P}$  oznaczamy taką macierz ortogonalną, że  $\mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{I}$  i  $\mathbf{P}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_r)$ . Ponadto niech  $\mathbf{b}^T = [b_1 \dots b_r] = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{P}$  oraz  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}$ . Przez  $\mathbf{Z}^T = [Z_1 \dots Z_r]$  oznaczamy wektor losowy, którego wartość oczekiwana jest wektorem zerowym, a macierz wariancji i kowariancji jest macierzą jednostkową. Wtedy (por. Mathai i Provost (1992), s. 36) jeśli  $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ , to:

$$Q(\mathbf{X}) = a + 2 \sum_{j=1}^r b_j Z_j + \sum_{j=1}^r \lambda_j Z_j^2 \quad (5.4)$$

$$Q(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \left( Z_j + \frac{b_j}{\lambda_j} \right)^2 + a - \sum_{j=1}^r \frac{b_j^2}{\lambda_j} \quad (5.5)$$

Gdy  $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$ , to:

$$Q(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^r \lambda_j Z_j^2 \quad (5.6)$$

## 5.2. Momenty form kwadratowych

Mathai i Provost (1992), s. 49 podają:

**Twierdzenie 5.1:** Niech  $Q(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ ,  $E(\mathbf{X})=\boldsymbol{\mu}$ ,  $\text{Cov}(\mathbf{X})=\boldsymbol{\Sigma}>0$ . Wtedy dla  $r=1,2,\dots$  zachodzi:

$$E(Q(\mathbf{X}))^r = \sum_{r_1+\dots+r_p=r} \frac{r! \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_p^{r_p}}{r_1! \dots r_p!} E\left(V_1^{r_1} \dots V_p^{r_p}\right) \quad (5.7)$$

gdzie  $\lambda_1 \dots \lambda_p$  są wartościami własnymi macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$  lub  $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $V_j=(U_j+b_j)^2$ , przy czym dla każdej pary  $i \neq j=1, \dots, p$   $u_i$  oraz  $u_j$  są nieskorelowane i  $E(U_j)=0$  oraz  $D^2(U_j)=1$ . Ponadto niech  $\mathbf{b}^T=[b_1 \dots b_p]=\boldsymbol{\mu}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{P}$ , gdzie  $\mathbf{P}$  jest macierzą ortogonalną taką, że  $\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\mathbf{I}$ .

W szczególności  $E(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})=\text{tr}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ .

**Twierdzenie 5.2** (Mathai i Provost (1992), str. 53): Niech  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\Sigma})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}>0$ ,  $Q(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$ . Wówczas:

$$E(Q(\mathbf{X}))^r = \left\{ \sum_{r_1=0}^{r-1} \binom{r-1}{r_1} g^{(r-1-r_1)} \sum_{r_2=0}^{r_1-1} \binom{r_1-1}{r_2} g^{(r_1-1-r_2)} \dots \right\} \quad (5.8)$$

gdzie:

$$g^{(k)} = 2^k k! \{ \text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^{k+1} + (k+1) \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^k \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (5.9)$$

W szczególności:

$$E(Q(\mathbf{X})) = \text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mu_1 \quad (5.10)$$

$$E(Q(\mathbf{X}))^2 = 2[\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^2 + 2\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}] + [\text{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]^2 = \mu_2 \quad (5.11)$$

$$E(Q(\mathbf{X}))^3 = 8[\text{tr}(\mathbf{A}\Sigma)^3 + 3\mu^T(\mathbf{A}\Sigma)^2\mathbf{A}\mu] + 6[\text{tr}(\mathbf{A}\Sigma)^2 + 2\mu^T\mathbf{A}\Sigma\mu][\text{tr}(\mathbf{A}\Sigma) + \mu^T\mathbf{A}\mu] + \\ + [\text{tr}(\mathbf{A}\Sigma) + \mu^T\mathbf{A}\mu]^3 = \mu_3 \quad (5.12)$$

$$E(Q(\mathbf{X}))^4 = g^{(3)} + 3g^{(2)}\mu_1 + 3g^{(2)}\mu_2 + 3g^{(1)}\mu_3 = \mu_4 \quad (5.13)$$

Mathai i Provost (1992), s. 55, stwierdzają, że powyższe cztery wzory na momenty formy kwadratowej  $Q(\mathbf{X})$  są również ważne dla przypadku, gdy rozkład wektora  $\mathbf{X}$  jest osobliwy, czyli  $\rho(\Sigma) \leq p$ . Na podstawie wzorów (5.10)—(5.13) mamy:

$$D^2(Q(\mathbf{X})) = 2\text{tr}(\mathbf{A}\Sigma)^2 + 4\mu^T\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}\mu \quad (5.14)$$

$$\eta_3(Q(\mathbf{X})) = 8[\text{tr}(\mathbf{A}\Sigma)^3 + 3\mu^T(\mathbf{A}\Sigma)^2\mu] \quad (5.15)$$

$$\eta_4(Q(\mathbf{X})) = 48[\text{tr}(\mathbf{A}\Sigma)^4 + 4\mu^T(\mathbf{A}\Sigma)^3\mathbf{A}\mu] + 3D^2(Q(\mathbf{X})) \quad (5.16)$$

### 5.3. Momenty ilorazu dwóch form kwadratowych

Niech  $X_i$ ,  $i=1, \dots, p_1$ ,  $Y_j$ ,  $j=1, \dots, p_2$  i  $Z_k$ ,  $k=1, \dots, p_3$  będą trzema zbiorami wzajemnie niezależnych zmiennych losowych, gdzie:  $X_i$ ,  $Y_j$ ,  $Z_k$  mają rozkłady chi kwadrat ze stopniami swobody odpowiednio:  $l_i$ ,  $m_j$ ,  $n_k$ .

Niech:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{p_1} a_i X_i + \sum_{j=1}^{p_3} c_j Z_j \quad (5.17)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{p_2} b_i Y_i + \sum_{j=1}^{p_3} d_j Z_j \quad (5.18)$$

gdzie niektóre spośród współczynników  $c_j$ ,  $d_j$  dla  $j=1, 2, \dots, p_3$  mogą być równe zero. Załóżmy,

że  $Q_2 > 0$  i  $R = \frac{Q_1}{Q_2}$ . Wtedy Morin-Wahhab (1985) podaje następujący<sup>42</sup> wzór na momenty

ilorazu  $R$ :

$$E(R^\alpha) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{p_1} + \delta_1 + \dots + \delta_{p_3} = \alpha} \frac{\alpha!(2\theta)^{\alpha-\gamma}}{\alpha_1! \dots \alpha_{p_1}! \delta_1! \dots \delta_{p_3}!} \frac{\Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma)} \times$$

<sup>42</sup> Wiadomość tę podajemy za Mathai i Provostem (1992), s. 146—147.

$$\left[ \times \prod_{i=1}^{p_1} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{l_i}{2} + \alpha_i\right)}{\Gamma\left(\frac{l_i}{2}\right)} \right) \right] \left[ \left( \prod_{j=1}^{p_2} b_j^{-m_j/2} \right) \right] \left[ \prod_{k=1}^{p_3} \left( \frac{\Gamma\left(\frac{n_k}{2} + \delta_k\right) d_k^{-n_k/2 - \delta_k}}{\Gamma\left(\frac{n_k}{2}\right)} \right) \right] \times$$

$$\times F_D \left( \gamma - \alpha; \frac{m_1}{2}, \dots, \frac{m_{p_2}}{2}, \frac{m_1}{2} + \delta_1, \dots, \frac{m_{p_3}}{2} + \delta_{p_3}; \gamma; \frac{2b_1\theta - 1}{2b_1\theta}, \dots, \frac{2b_{p_2}\theta - 1}{2b_{p_2}\theta}, \frac{2d_1\theta - 1}{2d_1\theta}, \dots, \frac{2d_{p_3}\theta - 1}{2d_{p_3}\theta} \right) \quad (5.19)$$

gdzie:  $\alpha$  jest dodatnią liczbą naturalną mniejszą od  $\gamma$ , przy czym:

$$\gamma = \sum_{j=1}^{p_2} \frac{m_j}{2} + \sum_{k=1}^{p_3} \left( \frac{n_k}{2} + \delta_k \right) \quad (5.20)$$

Wielkość  $\theta$  powinna być tak wybrana aby  $b_j\theta > 0.25$  dla każdego  $j=1, \dots, p_2$  i  $d_k\theta > 0.25$  dla każdego  $k=1, \dots, p_3$ . Przyczynia się to do dokładniejszej oceny wartości funkcji Lauricella  $F_D$ , którą określa następujący wzór ogólny<sup>43</sup>:

$$F_D(a; b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} (1-ux_1)^{-b_1} \dots (1-ux_n)^{-b_n} du \quad (5.21)$$

przy czym  $|x_i| < 1$  dla każdego  $i=1, \dots, n$ ;  $\text{Re}(a) > 0$ ,  $\text{Re}(c-a) > 0$

$$F_D(a; b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b)_{m_1+\dots+m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!} \quad (5.22)$$

dla  $|x_i| < 1$ ,  $i=1, \dots, n$ , przy czym np.:  $(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1)$ ,  $a_0 = 1$ .

#### 5.4. Dystrybuanta rozkładu ilorazu dwóch form kwadratowych

Forma kwadratowa wektora losowego o rozkładzie normalnym ma rozkład centralny, gdy wartość oczekiwana tego wektora jest wektorem zerowym. Do analizy rozkładu właśnie takich form kwadratowych ograniczamy niniejszą analizę. Provost i Rudiuk (1991) zaproponowali<sup>44</sup>: Niech  $[\mathbf{X}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Z}^T] \sim N_p(\mathbf{0}; \Sigma)$ , gdzie macierz  $\Sigma$  jest rzędu  $r \leq p$ , przy czym  $p$  jest wymiarem macierzy  $\Sigma$ . Wektory  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  mają wymiary odpowiednio  $s \times 1$ ,  $t \times 1$ ,  $u \times 1$ . Niech

<sup>43</sup> Prezentujemy ją na podstawie pracy Mathai i Provosta (1992), s. 331.

<sup>44</sup> Tamże, s. 152-153.

$\mathbf{A}=\mathbf{A}^T=[\mathbf{A}_{ij}]$  będzie macierzą blokową, gdzie blok  $\mathbf{A}_{11}$  ma wymiary  $s \times s$ ,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}^T$  ma wymiary  $s \times t$  oraz macierz  $\mathbf{A}_{22}$  ma wymiary  $t \times t$ . Macierz  $\mathbf{B}=\mathbf{B}^T=[\mathbf{B}_{ij}]$  jest również blokowa, przy czym:  $\mathbf{B}_{11}$ ,  $\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{21}^T$  i  $\mathbf{B}_{22}$  są blokami o wymiarach odpowiednio  $t \times t$ ,  $t \times u$  i  $u \times u$ . Przedmiotem analizy jest iloraz:

$$R = \frac{Q_1}{Q_2} \quad (5.23)$$

gdzie:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T & \mathbf{Y}^T \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^T & \mathbf{Z}^T \end{bmatrix} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Dystrybuantę zmiennej losowej  $R$  przekształcamy następująco:

$$F_R(c) = P\{R < c\} = P\{Q_1 - cQ_2 < 0\} = P\{\mathbf{W}^T \mathbf{S}_c \mathbf{W} < 0\} = P\{Q < 0\} \quad (5.26)$$

gdzie:

$$\mathbf{W}^T = [\mathbf{X}^T \ \mathbf{Y}^T \ \mathbf{Z}^T] \quad (5.27)$$

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} - c\mathbf{B}_{11} & -c\mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{0} & -c\mathbf{B}_{12} & -c\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Wektor  $\mathbf{W}$ , jak już określono, ma rozkład normalny  $\mathbf{W} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ ,  $\rho(\mathbf{\Sigma}) = r \leq p$ . Wiadomo, że istnieje taka macierz  $\mathbf{L}$  o wymiarach  $p \times r$ , że  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ . Wtedy wektor  $\mathbf{W}$  można przekształcić w wektor  $\mathbf{V}$  o wymiarach  $r \times 1$  za pomocą transformacji:

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}\mathbf{V} \quad (5.29)$$

Wektor  $\mathbf{V} \sim N_r(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , wtedy wyprowadzenie (5.26) kontynuujemy następująco:

$$F_c(c) = P\{\mathbf{V}^T \mathbf{M}_c \mathbf{V} < 0\} = P\{Q < 0\} \quad (5.30)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c^T = \mathbf{L}^T \mathbf{S}_c \mathbf{L}$$

Istnieje taka macierz ortogonalna  $\mathbf{P}$ , że  $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$  i

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{P} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M}_c \mathbf{P} = \mathbf{D}_c \quad (5.32)$$

gdzie:  $\mathbf{D}_c$  jest macierzą diagonalną składającą się z wartości własnych macierzy  $\mathbf{M}_c$ . Niektóre spośród nich są dodatnie, a inne ujemne bądź równe zero. Przyjmijmy, co nie umniejsza ogólności wyników, że  $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_e, -d_{e+1}, \dots, -d_r)$ , przy czym  $d_i > 0$  dla  $i=1, \dots, r$ . Wówczas równanie (5.30) jest równoważne następującemu:

$$F_R(c) = P\{\mathbf{Z}^T \mathbf{D}_c \mathbf{Z} < 0\} \quad (5.33)$$

przy czym  $\mathbf{Z} \sim N_r(\mathbf{0}, \mathbf{I}_r)$ . Przyjmując, że:

$$Z^+ = \sum_{i=1}^e d_i Z_i^2, \quad Z^- = \sum_{i=e+1}^r d_i Z_i^2 \quad (5.34)$$

gdzie:  $Z_i$  ma rozkład  $\chi^2$  z jednym stopniem swobody, mamy:

$$F_R(c) = P\{Z^+ - Z^- < 0\} \quad (5.35)$$

Wiadomo (por. np. Fisz (1967)), że  $U_i = d_i Z_i^2$  ma rozkład gamma z parametrami  $a_i > 0$  oraz  $b_i > 0$ ,  $i=1, \dots, p$ . Wtedy wprowadzając oznaczenia postaci:

$$U^+ = \sum_{i=1}^e U_i, \quad U^- = \sum_{i=e+1}^p U_i \quad (5.36)$$

mamy:

$$F_R(c) = P\{U^+ - U^- < 0\} \quad (5.37)$$

Imhof (1961) wyraził dystrybuantę  $F_R(c)$  w postaci całkowej<sup>45</sup>. W naszym przypadku prowadzi to już do wyznaczenia danego wzorem (5.30) prawdopodobieństwa  $P\{Q < 0\}$  poprzez zastosowanie odpowiednich metod numerycznych do obliczenia następującej całki niewłaściwej:

$$F_R(c) = P\{Q(r) < 0\} = P\{\mathbf{V}^T \mathbf{M}_c \mathbf{V} < 0\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\sin(\varepsilon(v))}{v\gamma(v)} dv \quad (5.38)$$

gdzie:

$$\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \text{tg}^{-1}(\lambda_i v) \quad (5.39)$$

$$\gamma(v) = \prod_{i=1}^m \sqrt{1 + \lambda_i^2 v^2} \quad (5.40)$$

---

<sup>45</sup> Wiadomość tę podajemy za Mathai i Provost (1992).

przy czym przez  $\lambda_i$  oznaczono  $i$ -tą wartość własną macierzy  $\mathbf{M}_c$ , którą otrzymujemy ze wzoru (5.32). Zapisaną całkę niewłaściwą przybliży się zadaną dokładnością  $d$  poprzez zastąpienie w niej nieskończonej granicy przez liczbę  $x$ , którą tak wyznacza się aby<sup>46</sup>:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(\varepsilon(v))}{v\gamma(v)} dv \right| < \frac{2}{m} \frac{1}{\pi} \left( \prod_{i=1}^m \sqrt{|\lambda_i|} \right)^{-1} x^{-\frac{m}{2}} = d \quad (5.41)$$

Całkę  $\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(\varepsilon(v))}{v\gamma(v)} dv$  należy obliczyć w przybliżeniu stosując odpowiednią metodę numerycznego całkowania, którą może być znana metoda Simpsona opisana np. w pracy Demidowicza i Marona (1965) lub Burdena i Fairesa (1985).

Imhof (1961) podaje całkowity wzór na dystrybuantę formy kwadratowej wektora normalnego w przypadku, gdy wartość oczekiwana tego wektora nie jest wektorem zerowym. Inne sposoby całkowitej reprezentacji dystrybuanty rozkładu takiej formy kwadratowej zaproponowali m.in.<sup>47</sup> Martynov (1975) i Rice (1980).

Provost (1989) otrzymał następującą reprezentację funkcji dystrybuanty<sup>48</sup>:

$$F_R(c) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} K_v K'_w \frac{\Gamma(\rho_1 + \rho_2 + v + w + j)}{(\rho_1 + v)_{j+1}} 2^{-(\rho_1 + \rho_2 + v + w + j)} \quad (5.42)$$

gdzie:

$$K_v = \sum_{v_1 + \dots + v_r = v} \prod_{j=1}^r \frac{\mu_j^{-a_j} (a_j)_{v_j} \gamma_j^{v_j}}{v_j! \Gamma(\rho_1 + v)} \quad (5.43)$$

$$K'_w = \sum_{w_{r+1} + \dots + w_p = w} \prod_{j=r+1}^p \frac{\mu_j^{-a_j} (a_j)_{w_j} \gamma_j^{w_j}}{w_j! \Gamma(\rho_2 + w)} \quad (5.44)$$

$$\gamma_j = 1 - \frac{1}{\mu_j} \quad \text{i} \quad \mu_j = \frac{b_j}{\theta} > \frac{1}{2} \quad \text{dla } j=1, \dots, r, \dots, p$$

$$\rho_1 = a_1 + \dots + a_r, \quad \rho_2 = a_{r+1} + \dots + a_p$$

Symbol  $(a)_m$  wyjaśnia wzór:

$$(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1), \quad (a)_0 = 1 \quad (5.45)$$

<sup>46</sup> Wzór ten podajemy za Koertsem i Abrahamsem (1969).

<sup>47</sup> Prezentowane są one również w pracy Mathai i Provosta (1992).

<sup>48</sup> Tamże, s. 149.

W praktyce obliczanie dystrybuanty  $F_R(c)$  będzie wiązało się jednak z koniecznością aproksymacji sum nieskończonych występujących we wzorze (5.42).

Mathai i Provost (1992) przedstawiają jeszcze inne sposoby pozwalające wyznaczyć dystrybuantę  $F_R(c)$ . Wśród nich należy wspomnieć rozwijaną przez Imhofa (1961) i Mathai (1983) metodę wyznaczania dystrybuanty formy kwadratowej wektora normalnego poprzez przedstawienie jej w postaci liniowej kombinacji dystrybuant zmiennych losowych, z których każda ma rozkład chi kwadrat o parzystej liczbie stopni swobody.

### 5.5. Metody przybliżonego obliczania dystrybuanty formy kwadratowej

Analizowany w uprzednim podrozdziale rozkład formy kwadratowej  $Q = \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^r d_i Z_i^2$  można aproksymować za pomocą metody proponowanej przez Pearsona (1959). Polega ona na aproksymacji rozkładu zmiennej losowej  $Q$  przez kombinację liniową zmiennej losowej  $U_\nu$  o rozkładzie chi kwadrat z  $\nu$  stopniami swobody:

$$Q \approx c U_\nu + b \quad (5.46)$$

gdzie:

$$c = \frac{\theta_3}{\theta_2}, \quad b = -\frac{\theta_2^2}{\theta_3} + \theta_1 \quad (5.47)$$

$$\nu = \frac{\theta_2^3}{\theta_3^2} \quad (5.48)$$

$$\theta_k = \sum_{i=1}^r d_i^k = \text{tr} \mathbf{A}^k \quad (5.49)$$

Wtedy:

$$P\{Q < q\} \approx P\{U_\nu < u\} \quad (5.50)$$

gdzie:

$$u = \frac{q - \theta_1}{\sqrt{\theta_2}} \sqrt{\nu} + \nu \quad (5.51)$$

Solomon i Stephens (1978) zaproponowali przybliżenie rozkładu formy kwadratowej  $Q$  za pomocą krzywych Pearsona. W tym celu należy obliczyć współczynniki skośności i kurtozy:

$$\beta_1 = \frac{\eta_3^2}{\eta_2^3}, \quad \beta_2 = \frac{\eta_4}{\eta_2^2} \quad (5.52)$$



Momenty centralne  $\eta_2, \eta_3, \eta_4$  formy kwadratowej  $Q$  określają wzory (5.14)–(5.16). Niech

$$z = \frac{Q - E(Q)}{D(Q)}, \text{ wówczas dla ustalonego prawdopodobieństwa } \alpha = P\{Z \geq z_\alpha\} \text{ kwantyl } z_\alpha$$

wyznacza się jako funkcję pary  $(\beta_1, \beta_2)$  na podstawie specjalnych tablic opracowanych przez Pearsona i Hartley'a (1972). Wtedy z równania  $q_\alpha = z_\alpha D(Q) + E(Q)$  wyznacza się kwantyl rzędu  $\alpha$  formy kwadratowej  $Q$ . Gdy danej pary  $(\beta_1, \beta_2)$  nie ma w tablicach, to Solomon i Stephens (1978) sugerują, że wykorzystanie liniowej interpolacji daje dostatecznie dobre przybliżenie szukanego kwantyla. Bouver i Bargmann (1974) opublikowali specjalny program napisany w języku komputerowym FORTRAN pozwalający wyznaczyć nie tylko kwantyle, ale i obliczyć prawdopodobieństwa  $\alpha$  dla dowolnego  $q$ .

### 5.6. Warunki niezależności formy kwadratowej i liniowej wektora losowego

W niniejszym podrozdziale prezentujemy twierdzenie i jego szczególne przypadki dotyczące niezależności form kwadratowej i liniowej. Są one zwłaszcza ważne dlatego, że iloraz formy liniowej i pierwiastka z formy kwadratowej wektora losowego o rozkładzie normalnym ma znany rozkład Studenta właśnie przy spełnieniu warunku o niezależności tych statystyk.

**Twierdzenie<sup>49</sup> 5.3:** Niech  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , przy czym  $\det \boldsymbol{\Sigma} > 0$ . Niech  $Q = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{a}_1 + d_1$  i  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  oraz  $L = \mathbf{X}^T \mathbf{a}_2 + d_2$ . Wtedy warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby  $Q$  i  $L$  były niezależne jest spełnienie następujących równości:

$$\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (5.53)$$

$$(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{A}\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \quad (5.54)$$

W szczególności, gdy wyznacznik  $\det \boldsymbol{\Sigma} > 0$ , to równanie (5.53) redukuje się do postaci  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ . Jeśli  $\det \boldsymbol{\Sigma} > 0$  i  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  i  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ , to  $\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$  jest jedynym warunkiem niezależności analizowanych statystyk.

---

<sup>49</sup>Pochodzi ono z pracy Mathai i Provosta (1992), którzy wskazują, że jest ono szczególnym przypadkiem ogólniejszego twierdzenia dowodzonego przez Gooda (1963) i Shanbhaga (1966). Dodajmy, że tym problemem zajmował się już Lukacs (1952).

## LITERATURA

- Azoff E. M. (1994):** Neural network time series forecasting of financial markets. John Wiley & Sons Chichester–New YorkBrisbane–TorontoSingapore.
- Azzalini A., Bowman A. (1993):** On nonparametric regression for checking linear relationships. *The Journal of the Royal Statistical Society*, B55(2), 549–557.
- Bankroft T.A. (1975):** Testimating, testipredicting and testitesting as aids in using Snedecor and Cochran's "Statistical Methods". *Biometrics*, vol. 31, 319–323.
- Bartosiewicz S. (1976):** Ekonometria. PWE, Warszawa.
- Bartosiewicz T. (1970):** Budowa prognozy statystycznej metoda wyznaczania aproksymanty segmentowej z uzmiennionymi parametrami. [w]: Wybrane problemy prognoz statystycznych, GUS, t: 11.
- Bartosiewicz T. (1975):** Idea sekwencyjnej procedury budowy prognozy statystycznej. *Przegląd Statystyczny*, nr 4.
- Bolfarine H., Zacks S. (1992):** Prediction theory for finite populations. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest.
- Bouver H., Bargmann R.E. (1974):** Tables of the standardized percentage points of the Pearson system of curves in terms of  $\beta_1$  and  $\beta_2$ . Technical Report No. 107, Department of Statistics and Computer Science, University of Georgia, Athens.
- Brown R.G. (1959):** Statistical forecasting for inventory control. McGraw-Hill, New York.
- Brown R.G. (1963):** Smoothing, forecasting and prediction of discrete time-series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Box G.E.P., Jenkins G.M. (1983):** Analiza szeregów czasowych. PWN, Warszawa.
- Brockwell P.J., Davis R.A. (1991):** Time Series: Theory and Methods, Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapeszt.
- Burden R.L., Faires J.D. (1985):** Numerical analysis, third edition. Prindle, Weber & Schmidt, Boston.
- Cassel C.M., Sarndal C.E., Wretman J.H. (1977):** Fundation of inference in survey sampling. John Wiley & Sons, New York–London–Sydney–Toronto.
- Chow G.C. (1995):** Ekonometria. PWN, Warszawa.
- Cieślak M.(red.), Dittman P., Kania-Gospodarowicz A., Krupowicz J., Kwiatkowska D., Radzikowska B. (1993):** Prognozowanie gospodarcze. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Cressie N.A.C. (1993):** Statistics for spatial data. John Wiley & Sons, Inc., New York–Chichester–Toronto–Brisbane–Singapore.

- Csorgo M., Seshadri V. (1970):** On the problem of replacing hypotheses by equivalent simple ones. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 38.
- Czerwiński Z., Guzik B. (1980):** Prognozowanie ekonometryczne. PWE, Warszawa.
- Demidowicz B.P., Maron I.A. (1965):** Metody numeryczne, cz. I. PWN, Warszawa.
- Domański Cz. (1979):** Statystyczne testy nieparametryczne. PWE, Warszawa.
- Domański Cz. (1990):** Testy statystyczne. PWE, Warszawa.
- Domański Cz., Markowski K., Tomaszewicz A. (1979):** Test serii dla hipotezy o liniowości modelu ekonometrycznego z dwiema zmiennymi objaśniającymi. *Przegląd Statystyczny*, t. 25.
- Fisz M. (1967):** Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.
- Gadd A., Wold H. (1964):** The janus quotient: a measure for the accuracy of prediction. [w:] *Econometric Model building*. Amstredam.
- Gasser T., Muller H.G., Mammitzsch V. (1985):** Kernels for nonparametric curve estimation. *The Journal of the Royal Statistical Society*, B47(2), 238–252.
- Good I.J. (1963):** On the independence of quadratic expressions. *The Journal of the Royal Statistical Society*, B25, 377–382, (Correction: B28, 584).
- Grabiński T., Malina A., Zeliaś A. (1990):** Metody analizy danych empirycznych na podstawie szeregów przekrojowo-czasowych. Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków.
- Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A. (1979):** Niektóre metody konstrukcji prognoz globalnych. *Folia Oeconomica Cracoviensia*, vol. 22.
- Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A. (1983):** Metody prognozowania rozwoju społeczno -gospodarczego. PWE, Warszawa.
- Guzik B. (1993):** Segmentowe modele ekonometryczne. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Hackl P., Westlund A.H. (redaktorzy) (1991):** Economic structural change. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest.
- Härdle W. (1991):** Smoothing Techniques (With implementation in S). Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona.
- Hellwig Z. (1967):** Schemat budowy prognozy statystycznej metodą wag harmoniczných, *Przegląd Statystyczny*, t. 14(2), 133–153.
- Hellwig Z. (red.), Bartosiewicz S., Cieślak M., Niedzielska E. (1973):** Zarys Ekonometrii. PWN, Warszawa.
- Hellwig Z. (1975):** Wykorzystanie perturbacji w definiowaniu pojęcia prognozy krótko-, średnio- i długoterminowej. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 62.
- Hellwig Z. (1982):** Crowling trend procedure and its application for short time series prediction. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 197.
- Hellwig Z. (1984):** Problem of estimation of stochastic processvariance by means of time series data. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 301.
- Henschel H. (1979):** Wistchaftsprognosen. Verlag F. Vahlen, München.
- Hozer J., Zawadzki J. (1990):** Zmienna czasowa i jej rola w badaniach ekonometrycznych. PWN, Warszawa.
- Imhof J.P. (1961):** Computing the distribution of quadratic forms in normal variables. *Biometrika*, 48, 419–426.
- Jessen R.J. (1978):** Statistical survey techniques. John Wiley & Sons, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore.
- Kendall M.G., Stuart A. (1966):** Tjeoria raspriedjelijenij. Nauka, Moskwa.
- Kendall M.G. (1955):** Rank correlation methods. Griffin, London.
- Koerts J., Abrahamse A.P.J. (1969):** On the theory and application of the general linear model. Rotterdam University Press.

- Kohler H., College A. (1988):** Essentials of Statistics. Glenview, Illinois: Scott, Foresman & Company.
- Kudrycka I. (1984):** Problemy i metody modelowania ekonometrycznego. PWN, Warszawa.
- Levy P. (1948):** Proceses stochastiques. Gauthier Villers, Paris.
- Lukacs E. (1952):** The stochastic independence of symmetric and homogenous linear and quadratic statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23, 442–449.
- Lutkepohl H. (1993):** Introduction to multiple time series analysis. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest.
- Makridakis S. (1988):** Metaforecasting. Ways of improving forecasting accuracy and usefulness. *International Journal of Forecasting*, nr 4.
- Makridakis S., Wheelwright S.C. (1989):** Forecasting. Methods for management. John Wiley & Sons, New York.
- Martynov G.V. (1975):** Computations of distribution functions of quadratic forms in normally distributed random variables. *Theory of Probability and its Applications*, 20, 782–793.
- Mathai A.M. (1983):** On linear combination of independent exponential variables. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 12(6), 625–632.
- Mathai A.M., Provost S.B. (1992):** Quadratic forms in random variables (Theory and Applications). Marcel Dekker, Inc., New York–Basel–Hong Kong.
- Melich K. (1974):** Wykorzystanie informacji ex-post przy budowie prognoz ekonometrycznych (rozprawa doktorska). Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice.
- Milo W. (1992):** Odporność w ekonometrii. WUŁ, Łódź.
- Milo W. (1995):** Stabilność i wrażliwość metod ekonometrycznych. WUŁ, Łódź.
- Morin-Wahhab D. (1985):** Moments of ratios of quadratic forms. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 14(2), 499–508.
- Pawłowski Z. (1956):** Sprawdzanie hipotezy nieparametrycznej o dwóch liniach regresji. *Przegląd Statystyczny*, t. 3, s. 305–310.
- Pawłowski Z. (1958):** O testach jednoznacznych. *Przegląd Statystyczny*, t. 5, s. 273–285.
- Pawłowski Z. (1973):** Prognozy ekonometryczne. PWN, Warszawa.
- Pawłowski Z. (1974):** Teoria prognozy ekonometrycznej w gospodarce socjalistycznej. PWN, Warszawa.
- Pawłowski Z. (1976):** Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego. PWN, Warszawa.
- Pawłowski Z. (1980):** Ekonometria. PWN, Warszawa.
- Pawłowski Z. (1982):** Zasady predykcji ekonometrycznej. PWN, Warszawa.
- Pawłowski Z. (red.), Barczak A., Fijałkowska Cz., Stolarska E., Zadora H. (1979):** Ekonometryczne metody prognozowania wykonania planów gospodarczych. PWN, Warszawa.
- Pearson E.S. (1959):** Note on an approximation to the distribution of noncentral  $\chi^2$ . *Biometrika*, 46, 346–346.
- Pearson E.S., Hartley H.O. (1972):** Biometrika tables for statisticians. vol. 8. Cambridge University Press.
- Priestley M.B., Chao M.T. (1972):** Non-parametric function fitting. *The Journal of the Royal Statistical Society*, B34, 385–392.
- Provost S.B. (1989):** The distribution function of some ratios of quadratic forms. [in:] Recent Developments in Statistical and Actuarial Science. SCI-TEX Publications, London, Canada, 143–154.
- Provost S.B., Rudiuk E.M. (1991):** Some distributional aspects of ratios of *quadratis* forms. Technical Report 91-01. Department of Statistical and Actuarial Sciences, U.W.O., London, Canada.

- Provost S.B., Rudiuk E.M. (1993):** Some distributional results for ratios of quadratic forms in central normal variables. *Pakistan Journal of Statistics*, 9(1) A, 79–91.
- Rao C.R. (1962):** Note on generalized inverse of matrix with applications to problems in mathematical statistics. *Journal of the Royal Statistical Society*, B24.
- Rao C.R. (1982):** Modele liniowe statystyki matematycznej. PWN, Warszawa.
- Rao C.R., Mitra S.K. (1971):** Generalized inverse of matrices and its applications. John Wiley & Sons, New York–London–Sydney–Toronto.
- Rice S.O. (1980):** Distribution of quadratic forms in normal variables. Evaluation by numerical integration. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 1, 438–448.
- Shanbhag D.N. (1966):** On the independence of quadratic forms. *The Journal of the Royal Statistical Society*, B28, 582–583.
- Siedlecka U. (1993):** Prognozy ostrzegawcze. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 651.
- Smoljak S.A., Titarienko B.R. (1980):** Ustojczywyje metody oceniwanija. Statistika, Moskwa.
- Solomon H., Stephens M. (1978):** Approximations to density functions using Pearson curves. *Journal of the American Statistical Association*, 73, 153–160.
- Stanisz T. (1986):** Funkcje jednej zmiennej w badaniach ekonomicznych. PWN, Warszawa.
- Stolarska E. (1987):** Dynamiczne modele ekonometryczne. Własności i zastosowania PWN, Warszawa.
- Talaga L., Zieliński (1986):** Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym. PWN, Warszawa.
- Theil H. (1961):** Economic policy and forecasting. North Holland. Amsterdam.
- Theil H. (1966):** Applied economic forecasting. North Holland. Amsterdam.
- Theil H. (1979):** Zasady ekonometrii. PWN, Warszawa.
- Tietjen G., Moore M. (1972):** Some Grubb's type statistics for the detection of several outliers. *Technometrics*, 14.
- Waszkiewicz J., Waszkiewicz L. (1971):** Prognozowanie bez wygładzania. *Przegląd Statystyczny*, s. 295–307.
- Waszkiewicz L. (1976):** Weryfikacja procedur prognostycznych. PWN, Warszawa.
- Wywiał J. (1982):** Weryfikacja hipotez o błędach predykcji. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu*, nr 215, 183–198.
- Wywiał J. (1986):** Badanie stabilności klasycznego modelu regresji liniowej na podstawie reszt. [w:] Raport z prac kierowanych przez K. Zadorę nad problemem CPBP 10.09 pt.: Ekonometryczna analiza zmian struktury. Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice.
- Wywiał J. (1987):** Własności wybranych testów stabilności oczekiwanych reszt modelu regresji liniowej w zastosowaniu do badania zmian struktury [w:] Raport z prac kierowanych przez K. Zadorę nad problemem CPBP 10.09 pt.: Ekonometryczna analiza zmian struktury. Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice.
- Wywiał J. (1988):** Test dla hipotezy o wartości oczekiwanej wielowymiarowej zmiennej losowej o sferycznym rozkładzie normalnym. *Przegląd Statystyczny*, t. 35, 341–355.
- Wywiał J. (1988a):** Badanie mocy testu istotności odchyień od zera reszt modelu regresji liniowej. [w:] Raport z prac kierowanych przez K. Zadorę nad problemem CPBP 10.09 pt.: Ekonometryczna analiza zmian struktury. Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice.
- Wywiał J. (1989):** Weryfikacja hipotezy o liniowości trendu na podstawie reszt. *Wiadomości Statystyczne*, nr 10, 29–31.
- Wywiał J. (1990):** O zgodności estymatorów średniego obciążenia predykcji. *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach*, nr 104/86, 189–202.

- Wywiał J. (1990a):** O badaniu istotności odchyień od zera reszt modelu ekonometrycznego. *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach*, nr 104/86, 175–187.
- Wywiał J. (1990b):** O wyznaczniku sumy macierzy. *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach*, nr 104/86, 95–118.
- Wywiał J. (1990c):** Weryfikacja wybranych hipotez o błędach specyfikacji modelu regresji liniowej. *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach*, nr 115/90, 123–144.
- Wywiał J. (1990d):** Statystyczna metoda reprezentacyjna w badaniach ekonomicznych (Optymalizacja badań próbkowych). *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach*, Katowice.
- Wywiał J. (1991):** Badanie mocy wybranych testów na występowanie wartości oddalonych. [w:] Materiały z XXV Konferencji Ekonometrycznej i VII Seminarium Naukowego im. Zbigniewa Pałowski. *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach*, 35–49.
- Wywiał J. (1995):** On moments of Bartlett's statistic. *Badania Operacyjne i Decyzje* (w druku).
- Zadora K. (1969):** O predykcji punktów zwrotnych trendu i ustalaniu horyzontu prognozy. *Przegląd Statystyczny*, t. 16, 51–57.
- Zadora K. (1970):** Predykcja szeregów czasowych metodą wyrównywania wykładniczego. *Przegląd Statystyczny*, t. 17.
- Zadora K. (1973):** Kilka uwag o wyrównywaniu wykładniczym. *Przegląd Statystyczny*, t. 20.
- Zeliaś A. (1979):** Metody budowy długookresowej prognozy statystycznej. *Przegląd Statystyczny*, t. 26.
- Zeliaś A. (1984):** Teoria prognozy. PWE, Warszawa.
- Zieliński R. (1972):** Tablice statystyczne. PWN, Warszawa.
- Zieliński Z. (1979):** Metody analizy dynamiki i rytmiczności zjawisk gospodarczych. PWN, Warszawa.

## SUMMARY

A prediction of a nonstationary time series is considered. The time series is treated as a sequence of independent and normally distributed random variables and each of them has the same variance. Their expected values are treated as values of a trend function. It is assumed that the trend can suddenly change its direction or it is discontinuous.

In this situation, the so called flexible predictors should be used to make forecasts. These predictors are able to adapt to changing directions of a trend. The properties of the predictors based on the following estimators of a trend are considered: moving average, crawling trend, exponential smoothing of a time series and the estimator of a linear trend based on the variable size of data.

The main purpose of this book is presentation of procedures which lead to choice a reasonable predictor. We say that a predictor is good if it provides a sequence of unbiased forecasts. The forecast is unbiased if the expected value of the prediction error equals zero. The well known Student statistic is used to test unbiasedness of a forecast. This statistic is proportional to the ratio of the prediction error and the square root of the residual variance of a trend's estimator.

The basic problem is more general and deals with testing the hypothesis that the expected value of the vector of prediction errors is equal to the null vector. The test statistics are constructed as a ratio of two random quadratic forms usually dependent on each other. The numerator is a quadratic form of the vector of prediction errors. The denominator is a quadratic form of the vector of residuals obtained as the result of smoothing the observed time series.

Particularly, the well known Janus coefficient, defined as the ratio of ex-post prediction variance and the residual variance, is considered. The significantly large value of that statistic leads to the rejection of the hypothesis that the calculated forecasts are unbiased. Then, in this situation the predictor is inadmissible.

Usually, the introduced test statistic has a rather complicated distribution function dependent on the matrix of the quadratic forms of vectors of normally distributed random variables. Moreover, these quadratic forms usually have dependent probability distributions. The appropriate numerical methods have to be used to approximate the distribution function of these ratio statistics. A large review of properties of distribution of these statistics can be found in the book by Mathai and Provost (1992).

Let us suppose that the hypothesis on unbiasedness of forecasts is rejected. Then, either the method of prediction or the parameters of the predictor should be changed. For example, let us assume that forecasts are obtained through an extrapolation of the least-square estimator of the linear trend based on  $n$ -size data. If the hypothesis on unbiasedness of a forecast is rejected, we can expect that the trend is changing its direction. Hence, the next forecast can be obtained through an extrapolation of the linear trend estimated on the data of the size smaller than  $n$ . If the test does not reject the hypothesis on unbiasedness of a forecast, the next forecast can be made through an extrapolation of the linear trend estimated on the basis of data of the size bigger than  $n$ . The presented procedure is called the test-predictor.

ISBN 83-04-04307-6