POLITECHNIKA
OPOLSKA

SKRYPT
NR 223

Andrzej Przytulski

ZBIÓR ZADAŃ Z PODSTAW ELEKTROTECHNIKI

DLA STUDENTÓW STUDIÓW ZAOCZNYCH
cz. II

ISSN 1427-9932

OW OFICYNA WYDAWNICZA

Opole 1999

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Materiał zawarty w skrypcie, przeznaczony jest do ćwiczeń rachunkowych z podstaw elektrotechniki, dla studentów studiów zaocznych Wydziału Elektrotechniki i Automatyki, w drugim semestrze nauki tego przedmiotu.

Tytuły rozdziałów tego opracowania odpowiadają tematyce wykładów, a ilość zadań jest proporcjonalna do czasu poświęconego na zajęciach poszczególnym zagadnieniom. Duża część zadań jest własnego pomysłu autora i stanowi efekt wieloletnich doświadczeń w pracy ze studentami studiów zaocznych. Zbiór uzupełniają przykłady z cytowanej literatury, publikowane tam bez rozwiązań. Różnorodność wybranych zadań i metod powinna pomóc studentom w samodzielnej nauce i usprawnić proces dydaktyczny.

Pani prof. dr hab. inż. Marii ZĄBKOWSKIEJ-WACŁAWEK składam serdeczne podziękowania za trud recenzowania skryptu.

Panu inż. Eugeniuszowi GŁOWIENKOWSKIEMU dziękuję za bardzo staranne wykonanie szaty graficznej.

Autor

1. WIELKOŚCI CHARAKTERYZUJĄCE PRZEBIEGI OKRESOWE

Zadanie 1.1

Wyznaczyć okres T, częstotliwość f oraz wartości prądu $i(0)$ lub napięcia $u(0)$ w chwili $t=0$ dla następujących przebiegów:

a) $i = 8\sqrt{2}\sin 105\left(t + \frac{T}{4}\right)$,

b) $i = 15\sqrt{2}\sin\left(157t - \frac{\pi}{6}\right)$,

c) $u = 220\sqrt{2}\sin\left[314(t + 0{,}05)\right]$,

d) $u = 110\sqrt{2}\sin\left(377t + 60^{o}\right)$.

Odpowiedź :

a) $T = 0{,}06s$, $f = 16\frac{2}{3}Hz$, $i(0) = 11{,}31A$,

b) $T = 0{,}04s$, $f = 25Hz$, $i(0) = -10{,}61A$,

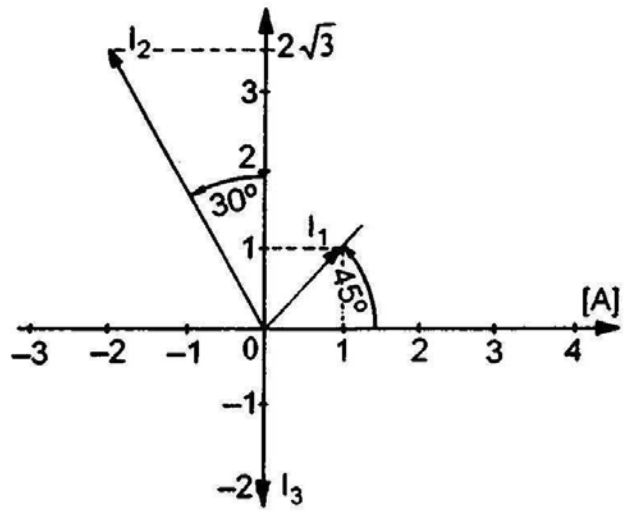
c) $T = 0{,}02s$, $f = 50Hz$, $u(0) = 0V$,

d) $T = 0{,}0167s$, $f = 60Hz$, $u(0) = 134{,}72V$.

Zadanie 1.2

Na rysunku 1.1 przedstawiono wskazy prądów $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ w wartościach, skutecznych. Zapisać odpowiadające im funkcje czasu.

Rys.1.1



Zadanie 1.3

Wyznaczyć fazę i wartość chwilową prądu w podanej niżej chwili t dla następujących przebiegów:

a) $i = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, $f = 16\frac{2}{3}\text{Hz}$, $t = 0{,}01\text{s}$,

b) $i = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, $f = 25\text{Hz}$, $t = 0{,}0033\text{s}$,

c) $i = 5\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 90^o\right)$, $f = 50\text{Hz}$, $t = 0{,}005\text{s}$,

d) $i = 30\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 120^o\right)$, $f = 60\text{Hz}$, $t = 0{,}0028\text{s}$.

Odpowiedź :

a) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $i = 1{,}5\sqrt{6} = 3{,}67\text{A}$,

b) $\alpha = -0{,}085\pi$, $i = -2{,}59\sqrt{2} = -3{,}73\text{A}$,

c) $\alpha = 180^o$ po zmianie na sinusoidę $\alpha = 270^o$, $i = -5\sqrt{2} = 7{,}07\text{A}$,

d) $\alpha = 180^o$, $i = 0\text{A}$.

Zadanie 1.4

Jakie są amplitudy i wartości skuteczne napięć o podanych niżej przebiegach i wartościach chwilowych w chwili $t = 0$:

a) $e = E_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$, $e(0) = 155{,}5\text{V}$,

b) $e = E_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$, $e(0) = 465{,}4\text{V}$,

c) $e = E_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $e(0) = 155{,}6\text{V}$,

d) $e = E_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, $e(0) = -127{,}3\text{V}$.

Odpowiedź : a) $E_m = 311\text{V}$, $E = 220\text{V}$, b) $E_m = 537\text{V}$, $E = 380\text{V}$,
c) $E_m = 156\text{V}$, $E = 110\text{V}$, d) $E_m = 180\text{V}$, $E = 127\text{V}$.

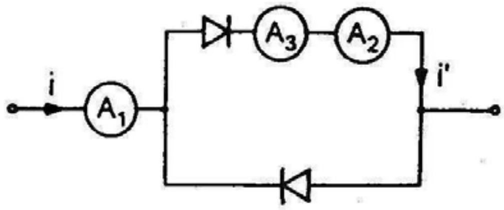
Zadanie 1.5

Wyznaczyć wartość skuteczną i średnią napięcia o przebiegu danym funkcją $u = U_0 + U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Odpowiedź : $U = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}U_m^2}$, $\quad \bar{u} = U_0$.

Zadanie 1.6

W gałąź prądu sinusoidalnego włączono 3 amperomierze i dwa idealne prostowniki jak pokazano na rysunku 1.2. A_1 i A_3 są amperomierzami elektrodynamicznymi a amperomierz A_2 magnetoelektryczny. Obliczyć wskazania amperomierzy A_2 i A_3 jeżeli na amperomierzu A_1 odczytano $I = 15$A.



Rys.1.2

Rozwiązanie :

$$i = 15\sqrt{2}\sin\omega t, \qquad i' = 15\sqrt{2}\sin\omega t, \quad \text{dla} \quad 0 \le t \le \frac{T}{2},$$

$$i' = 0, \quad \text{dla} \quad \frac{T}{2} \le t \le T.$$

Amperomierz A_2 wskazuje

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T |i'(t)|dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 15\sqrt{2}\sin\omega t = \frac{1}{\omega T}15\sqrt{2}\left[-\cos\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}15\sqrt{2}\left[-\cos\pi + \cos 0\right] = \frac{15\sqrt{2}}{\pi} = 6{,}75\text{A},$$

gdzie: $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Amperomierz A_3 wskazuje

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m^2 \sin^2\omega t\,dt} = \sqrt{\frac{450}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)dt} =$$

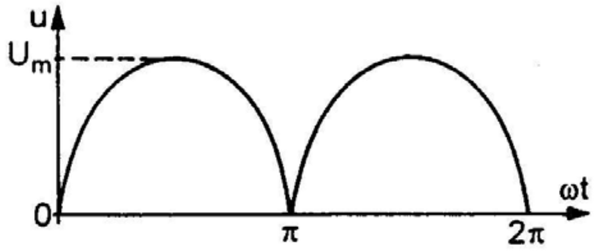
$$= \sqrt{\frac{1}{T}225\frac{T}{2}} = \sqrt{\frac{225}{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} = 10{,}61\text{A}\,.$$

Odpowiedź: Amperomierze wskazują następujące wartości A_2, 6,75A i A_3, 10,61A

Zadanie 1.7

Obliczyć wartość skuteczną i wyprostowaną napięcia sinusoidalnie zmiennego wyprostowanego całofalowo o przebiegu $u = 155{,}6\sin\omega t$. Wyznaczyć też współczynnik kształtu i szczytu. Rysunek 1.3 przedstawia napięcie sinusoidalne wyprostowane całofalowo.

Rys.1.3

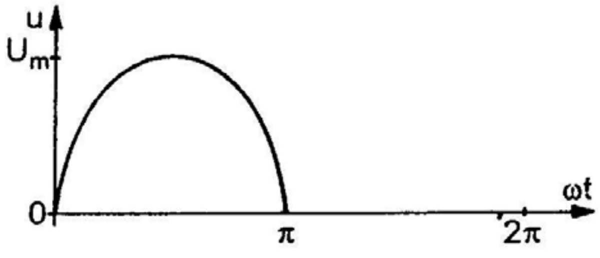


Odpowiedź: $U = 110\text{V}$, $\overline{U} = 99\text{V}$, $k_{sz} = \sqrt{2}$, $k = 1{,}11$

Zadanie 1.8

Obliczyć wartość skuteczną i średnią napięcia sinusoidalnie zmiennego wyprostowanego półfalowo o przebiegu jak w poprzednim zadaniu. Rysunek 1.4 przedstawia napięcie sinusoidalne wyprostowane półfalowo.

Rys.1.4



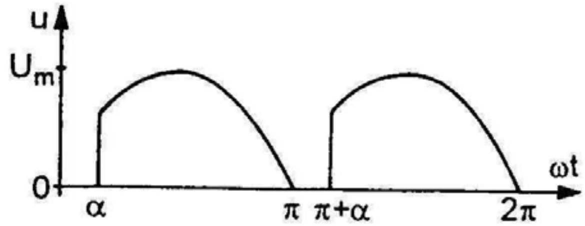
Odpowiedź : $U = 77{,}8\text{V}$, $\overline{u} = 49{,}5\text{V}$.

Zadanie 1.9

Napięcie sinusoidalne wyprostowane ma przy obciążeniu tyrystora przebieg pokazany na rysunku 1.5. Wyznaczyć wartość wyprostowaną i wartość skuteczną napięcia przy kącie zapłonu α. Obliczyć wartości liczbowe $\overline{U}$ i U dla

$U_m = 311\text{V}$ oraz kątach a) $\frac{\pi}{6}$, b) $\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{3}$.

Rys.1.5



Rozwiązanie :

$$\overline{U} = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\frac{T}{2}} U_m \sin\omega t dt = \frac{2U_m}{\omega T}\left[-\cos\omega t\right]_{\alpha}^{\frac{T}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{\pi}U_m,$$

$$\overline{U}_{(\alpha=\frac{\pi}{6})} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi}\cdot 311 = 184{,}7\text{V}, \qquad \overline{U}_{(\alpha=\frac{\pi}{4})} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi}\cdot 311 = 169\text{V},$$

$$\overline{U}_{(\alpha=\frac{\pi}{3})} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\pi}\cdot 311 = 148{,}5\text{V},$$

$$U = \sqrt{\frac{2U_m^2}{T}\int_{\alpha}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t dt} = U_m\sqrt{\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)dt} =$$

$$= U_m\sqrt{\frac{2}{T}\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right]_{\alpha}^{\frac{T}{2}}} = U_m\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\omega T}+\frac{1}{2\omega T}\sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{U_m}{2}\sqrt{\frac{2(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{\pi}},$$

$$U_{(\alpha=\frac{\pi}{6})} = \frac{311}{2}\sqrt{\frac{2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{3}}{\pi}} = 216{,}7\text{V},$$

$$U_{(\alpha=\frac{\pi}{4})} = 209{,}7\text{V}, \qquad U_{(\alpha=\frac{\pi}{3})} = 197{,}2\text{V}.$$

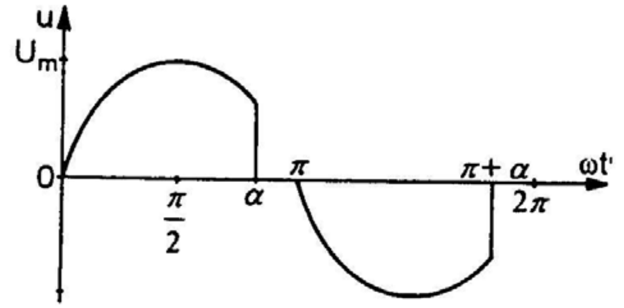
Odpowiedź: a) $\overline{U} = 184{,}7\text{V}$, $U = 216{,}7\text{V}$, b) $\overline{U} = 169\text{V}$, $U = 209{,}7\text{V}$,
c) $\overline{U} = 148{,}5\,\text{V}$, $U = 180{,}3\text{V}$.

Zadanie 1.10

Wartość skuteczną napięcia sinusoidalnie zmiennego można regulować wyłączając go przy dowolnym kącie α jak pokazano na rysunku 1.6. Obliczyć wartość skuteczną dla $U_m = 311\text{V}$ i kątach dla przypadków:

a) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, b) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, c) $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Rys.1.6



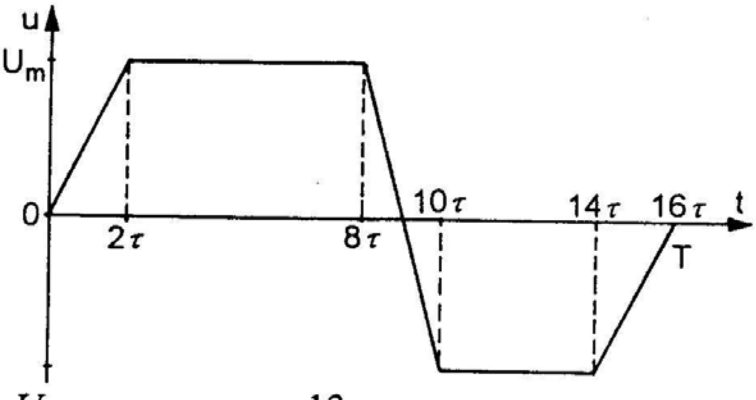
Odpowiedź: $$U = \frac{U_m}{2}\sqrt{\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi}},$$
a) $U = 216{,}7\text{V}$, b) $U = 197\text{V}$, c) $U = 155{,}5\text{V}$.

Zadanie 1.11

Dla podanego z rysunku 1.7 trapezoidalnego przebiegu napięcia obliczyć wartość średnią, wyprostowaną i skuteczną.

Dane: $U_m = 80\text{V}$.

Rys.1.7

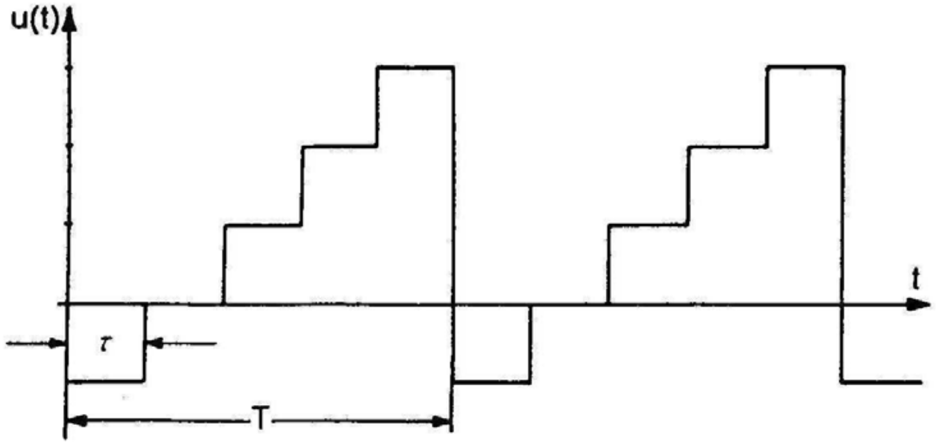


Odpowiedź: $\bar{u} = \frac{U_m}{8} = 10\text{V}$, $\overline{U} = \frac{13}{16}U_m = 65\text{V}$,

$$U = \frac{\sqrt{3}}{2}U_m = \sqrt{3}\cdot 40 = 69{,}3\text{V}.$$

Zadanie 1.12

Rysunek 1.8 przedstawia przebieg napięcia schodkowego o okresie $T = 5\tau$ i amplitudę pojedynczego schodka równą 1V. Obliczyć wartość średnią i skuteczną, wyprostowaną oraz współczynnik szczytu i kształtu.



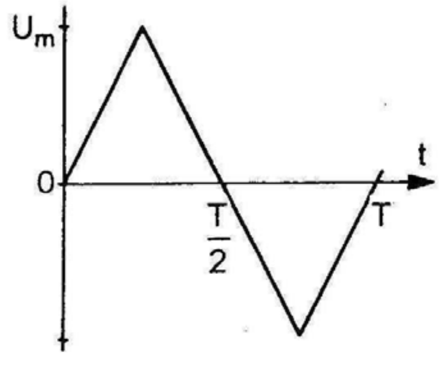
Rys.1.8

Odpowiedź: $\bar{u} = 1\text{V}$, $U = \sqrt{3}\text{V}$, $\bar{U} = 1{,}4\text{V}$, $k_{sz} = \sqrt{3}$, $k = 1{,}24$.

Zadanie 1.13

Obliczyć wartość skuteczną i wyprostowaną oraz współczynniki szczytu i kształtu napięcia o przebiegu trójkątowym jak na rysunku 1.9.

Dane: $U_m = 5\text{V}$.



Rys.1.9

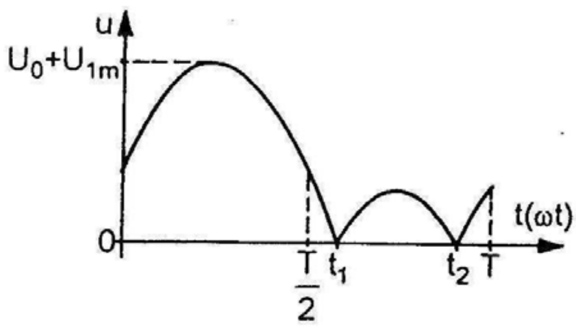
Odpowiedź: $U = 2{,}89\text{V}$, $\bar{U} = 2{,}5\text{V}$, $k_{sz} = \sqrt{3} = 1{,}73$, $k = 1{,}16$.

Zadanie 1.14

Obliczyć wartość wyprostowaną napięcia o przebiegu

u=86,6+100sin ωt

przedstawionego na rysunku 1.10.



Rys.1.10

Rozwiązanie: Jeżeli wartość składowej stałej jest równa lub większa od amplitudy składowej zmiennej to przebieg $u(t)$ przybiera tylko dodatnie wartości. W innym przypadku, tak jak w zadaniu należy ustalić punkty t_1 i t_2.

$$u(t) = U_0 + U_{1m}\sin\omega t = 0, \qquad \frac{-U_0}{U_{1m}} = \sin\omega t,$$

$$t = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{-U_0}{U_{1m}}\right) = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left(\frac{-U_0}{U_{1m}}\right), \quad \text{gdyż} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$\overline{U} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{t_1} u(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt + \int_{t_2}^{T} u(t)dt\right] = \frac{1}{T}\int_0^{t_1}(86{,}6 + 100\sin\omega t)dt +$$

$$-\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}(86{,}6 + 100\sin\omega t)dt + \frac{1}{T}\int_{t_2}^{T}(86{,}6 + 100\sin\omega t)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\left(86{,}6t - 100\frac{T}{2\pi}\cos\omega t\right)\right]_0^{t_1} - \frac{1}{T}\left[\left(86{,}6t - 100\frac{T}{2\pi}\cos\omega t\right)\right]_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \frac{1}{T}\left[\left(86{,}6t - 100\frac{T}{2\pi}\cos\omega t\right)\right]_{t_2}^{T},$$

$$\overline{U} = \frac{86{,}6}{T}\left(t_1 - 0 - t_2 + t_1 + T - t_2\right) - \frac{100}{2\pi}\left(\cos\omega t_1 - \cos\omega 0\right) +$$

$$+ \frac{100}{2\pi}\left(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1\right) - \frac{100}{2\pi}\left(\cos\omega T - \cos\omega t_2\right) =$$

$$= 173{,}2\left(\frac{1}{2} + \frac{t_1 - t_2}{T}\right) + 31{,}83\left(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1\right).$$

Celem określenia czasu t_1 i t_2 należy rozwiązać równanie pierwsze

$$t = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left(\frac{-86{,}6}{100}\right) = \frac{T}{2\pi}\arcsin(-0{,}866).$$

Wykorzystując rysunek 1.10 można ustalić, że

$$t_1 = \frac{T}{2\pi}\frac{4\pi}{3} = \frac{2}{3}T, \qquad t_2 = \frac{T}{2\pi}\frac{5\pi}{3} = \frac{5}{6}T.$$

Po podstawieniu

$$\overline{U} = 173{,}2\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6}\right) + 31{,}83\left(\cos\frac{2\pi}{T}\frac{5T}{6} - \cos\frac{2\pi}{T}\frac{2T}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{6}173{,}2 + 31{,}83\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 89{,}56\text{V}.$$

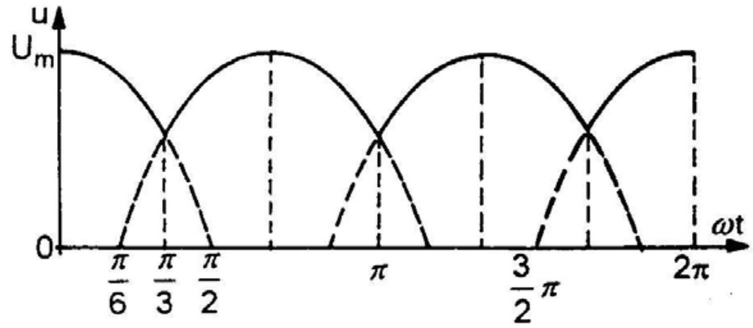
Odpowiedź: $\overline{U} = 89{,}56\text{V}$.

Zadanie 1.15

Wyznaczyć wartość średnią i skuteczną napięcia sinusoidalnego wyprostowanego w obwodzie prostownika trójfazowego jednopołówkowego o przebiegu przedstawionym na rysunku 1.11. Obliczyć również współczynniki szczytu i kształtu.

Dane: $U_m = 311\text{V}$.

Rys.1.11



Rozwiązanie :

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{T}6U_m\int_0^{\frac{T}{6}}\cos\omega t\, dt = \frac{6U_m}{\omega T}[\sin\omega t]_0^{\frac{T}{6}},$$

gdzie $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$,

$$\bar{u} = \frac{3U_m}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}U_m = 0{,}827U_m = 257{,}2\text{V},$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{6U_m^2}{T}\int_0^{\frac{T}{6}}\cos^2\omega t dt}.$$

Korzystamy z podstawienia $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)$

i ostatecznie

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$U = U_m\sqrt{\frac{6}{T}\int_0^{\frac{T}{6}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)dt} = U_m\sqrt{\frac{6}{T}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2\omega t\right]_0^{\frac{T}{6}}} =$$

$$= U_m\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{6}{2\pi}} = U_m\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}} = 0{,}841U_m = 261{,}6\text{V},$$

$$k_{sz} = \frac{U_m}{U} = \frac{U_m}{0{,}841U_m} = 1{,}19, \qquad k = \frac{U}{\overline{U}} = \frac{0{,}841U_m}{0{,}827U_m} = 1{,}02.$$

Odpowiedź : $\overline{u} = 0{,}827U_m = 257{,}2\text{V}$, $U = 0{,}841U_m = 261{,}6\text{V}$, $k_{sz} = 1{,}19$, $k = 1{,}02$.

Zadanie 1.16

Obliczyć wartość skuteczną napięcia o przebiegu:

$$u = 220\sqrt{2}\cos\omega t + 70\sqrt{2}\cos 3\omega t.$$

Rozwiązanie :

$$u = 311\cos\omega t + 99\cos 3\omega t,$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [311\cos\omega t + 99\cos 3\omega t]^2 dt},$$

$$\int_0^T [311\cos\omega t + 99\cos 3\omega t]^2 dt = \int_0^T \left[311^2\cos^2\omega t + 99^2\cos^2 3\omega t\right]dt +$$

$$+ \int_0^T 2\cdot 311\cdot 99\cos\omega t\,\cos 3\omega t\,dt,$$

$$\int_0^T [311\cos\omega t + 99\cos 3\omega t]^2 dt = 311^2\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T +$$

$$+99^2\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{12\omega}\sin 6\omega t\right]_0^T +$$

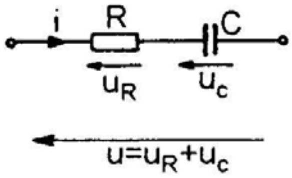
$$+2\cdot 311\cdot 99\left[\frac{\sin(\omega - 3\omega)}{2(\omega - 3\omega)} + \frac{\sin(\omega + 3\omega)t}{2(\omega + 3\omega)}\right]_0^T = 311^2\frac{T}{2} + 99^2\frac{T}{2},$$

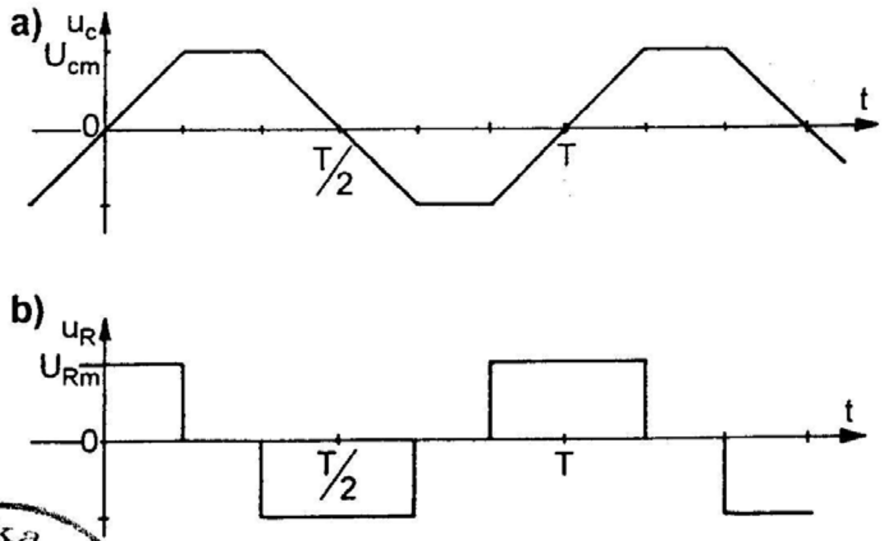
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{311^2 + 99^2} = 0{,}707\cdot\sqrt{106522} \approx 231\text{V}.$$

Odpowiedź: $U \approx 231\text{V}$.

Zadanie 1.17

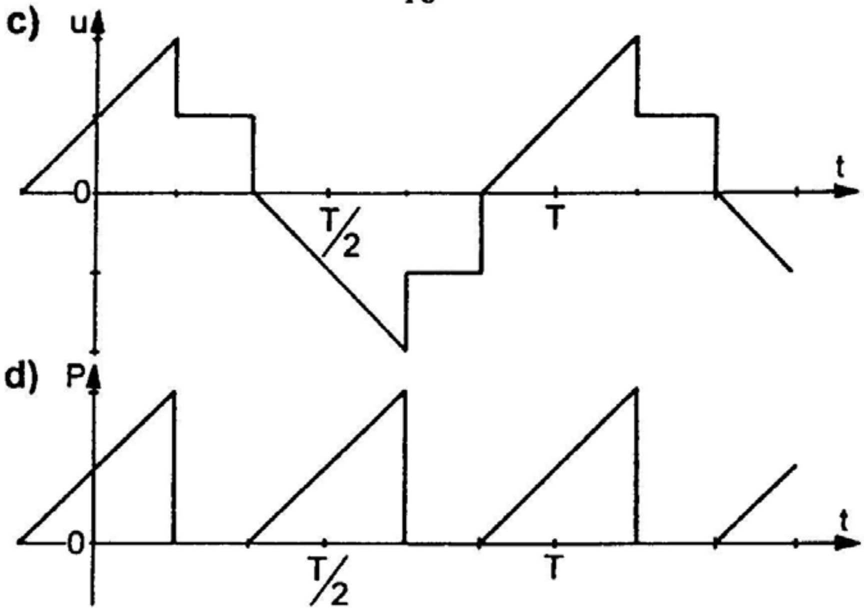
Na kondensatorze C został zdjęty przebieg napięcia u_c rysunek 1.12a. Wyznaczyć przebiegi napięcia u_R, u_R+u_c oraz przebieg mocy chwilowej p na gałęzi szeregowej RC przedstawionej na rysunku 1.12 jeżeli U_{Rm}= U_{cm} a p=ui





Rys. 1.12a, b

Politechnika Opolska
BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
w Opolu

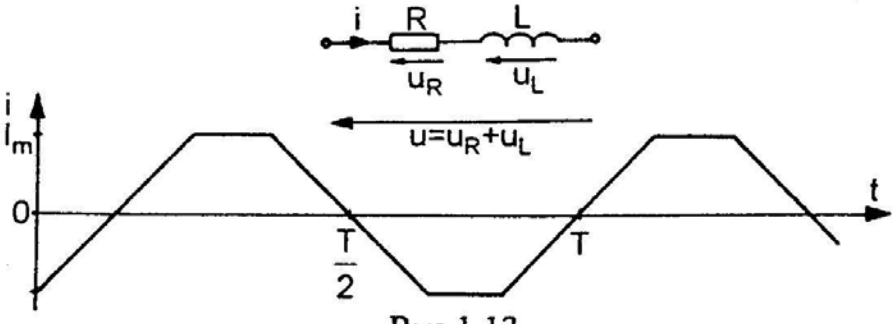


Rys. 1.12c, d

Odpowiedź : Przy konstrukcji wykresów czasowych wykorzystano prawa Ohma w postaci czasowej $i = \frac{du_c}{dt}$, $u_R = Ri$, $p = ui$.

Zadanie 1.18

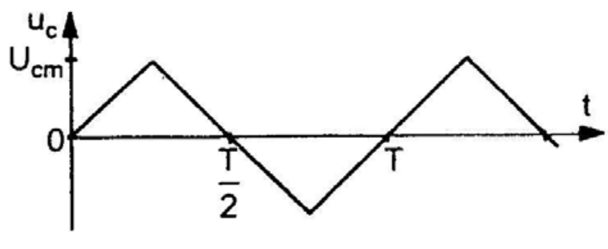
W układzie szeregowym R, L jak na rysunku 1.13 zdjęto przebieg prądu na indukcyjności L rys. 1.13a. Wyznaczyć graficznie przebiegi u_R, u_L, $u = u_R + u_L$ oraz przebieg mocy p_L na cewce indukcyjnej ($p_L = u_L i$). Przyjąć, że $U_{Lm} = U_{Rm}$



Rys.1.13

Zadanie 1.19

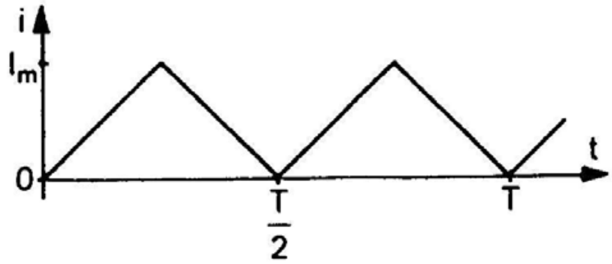
Dla układu z zadania 1.17 wyznaczyć i, u_R, u, p, p_R, p_c jeżeli napięcie zdjęte na pojemności C ma przebieg trójkątny jak na rys. 1.14. Przyjąć, że $U_{Cm} = U_{Rm}$



Rys.1.14

Zadanie 1.20

Dla układu z zadania 1.18 wyznaczyć u_L, u_R, u, p, p_R, p_c jeżeli przebieg pradu $i(t)$ ma przebieg trójkątny jak na rys.1.15. Przyjąć, że $U_{Rm}=U_{Lm}$.



Rys.1.15.

Zadanie 1.21

W szereg połączono dwa źródła napięcia sinusoidalnego o następujących przebiegach :

a) $e_1 = 220\sqrt{2}\sin\omega t$, $\quad e_2 = 220\sqrt{2}\cos\omega t$,

b) $e_1 = 110\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad e_2 = 110\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$,

c) $e_1 = 127\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad e_2 = 42\sqrt{2}\cos\omega t$,

d) $e_1 = 220\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, $\quad e_2 = 220\sqrt{2}\sin\omega t$,

e) $e_1 = 110\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $\quad e_2 = 110\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Wyznaczyć wartość skuteczną napięcia źródła zastępczego.

Odpowiedź : a) $E = 220\sqrt{2} = 311\text{V}$, b) $E = 2\cdot 110 = 220\text{V}$, c) $E = 133{,}8\text{V}$, d) $E = 220\sqrt{3} = 380\text{V}$, e) $E = 0\text{V}$.

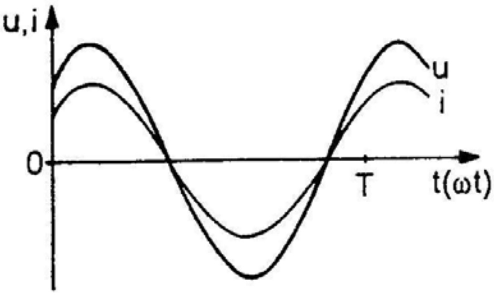
Podać również rozwiązania wykreślne.

2. ELEMENTY R, L, C, PRZY WYMUSZENIU SINUSOIDALNYM

Zadanie 2.1

Opornik o rezystancji $R = 25\Omega$ włączono na napięcie sinusoidalne

$$u = 110\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$



Napisać równanie przebiegu prądu. Jaka jest wartość skuteczna prądu? Narysować orientacyjnie sinusoidy napięcia i prądu.

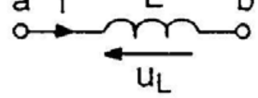
Rozwiązanie :

$$I = \frac{U}{R} = \frac{110}{25} = 4{,}4\mathrm{A}, \qquad i = 4{,}4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Odpowiedź: $I = 4{,}4A, \quad i = 4{,}4\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$

Zadanie 2.2

Prąd dopływający do zacisku a cewki indukcyjnej o indukcyjności $L = 127{,}4\mathrm{mH}$ ma przebieg $i = 5{,}5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$. Jaka jest wartość napięcia na cewce w chwili $t = 0{,}005\mathrm{s}$? Który z zacisków **a** czy **b** cewki ma wtedy wyższy potencjał? Jaka jest największa wartość energii pola magnetycznego cewki? Rysunek 2.1 przedstawia cewkę indukcyjną. Naszkicować orientacyjnie przebiegi napięcia i prądu $\omega = 314 s^{-1}$



Rys. 2.1

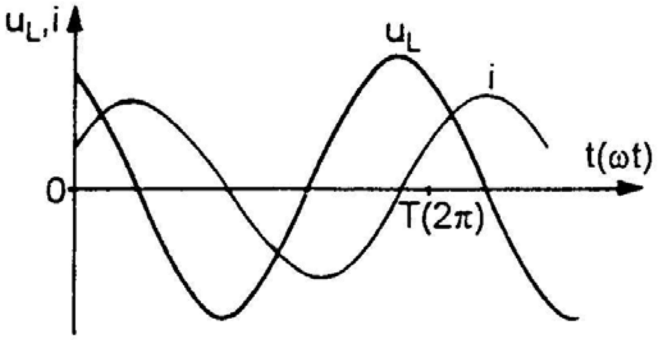
Rozwiązanie :

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L \cdot 5{,}5\sqrt{2}\cos\left(314 + \frac{\pi}{6}\right) = 220\sqrt{2}\cos\left(314 + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$u_L(0{,}005) = 220\sqrt{2}\cos\left(1{,}57 + \frac{\pi}{6}\right) = -155{,}35\text{V},$$

$$\varphi_a < \varphi_b,$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI_m^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}127 \cdot 7{,}78^2 = 3{,}84\text{J}.$$



Odpowiedź: $u_L(0{,}005)$=-155,35V, $\varphi_b > \varphi_a$, W_m=3,84J.

Zadanie 2.3

Obliczyć pojemność C kondensatora, który włączony do sieci o napięciu $U = 110\text{V}$, f = 60Hz pobiera prąd I = 2A. Zapisać przebieg tego prądu jeżeli $\psi_u = -\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązanie:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I} = \frac{110}{2} = 55\Omega, \qquad \omega = 2\pi f = 377s^{-1},$$

$$C = \frac{1}{\omega X_c} = \frac{1}{377 \cdot 55} = 48{,}2\mu\text{F},$$

$$u = 110\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 110\sqrt{2}\sin\left(377 - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$i = C\frac{du}{dt} = \omega C \cdot 110\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(314 - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\left(314 + \frac{\pi}{6}\right).$$

Odpowiedź: C = 48,2μF, a przebiegi u oraz i zapisano powyżej.

Zadanie 2.4

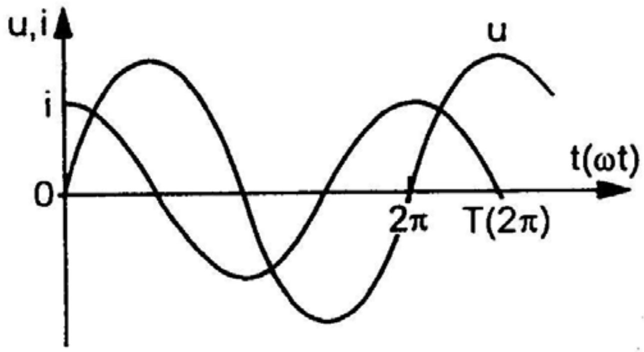
Do źródła napięcia sinusoidalnego o wartości skutecznej $U = 220\text{V}$ i częstotliwości $f = 50\text{Hz}$ włączono kondensator o pojemności $C = 39{,}8\mu\text{F}$. Jaka jest wartość skuteczna prądu płynącego przez kondensator i maksymalna energia zmagazynowana w polu elektrycznym kondensatora? Narysować orientacyjne sinusoidy napięcia i prądu oraz zapisać te przebiegi dla przypadku $\psi_u = 0$.

Rozwiązanie:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 39{,}8 \cdot 10^{-6}} = 80\Omega, \qquad I = \frac{U}{X_c} = \frac{220}{80} = 2{,}75\text{A},$$

$$W_m = \frac{1}{2} C U_m^2 = 0{,}5 \cdot 39{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 311^2 = 1{,}92\text{J},$$

$$u = 220\sqrt{2}\sin\omega t, \qquad i = 2{,}75\sqrt{2}\cos\omega t$$



Odpowiedź: $I = 2{,}75\text{A}$, $W_m = 1{,}92\text{J}$, przebiegi napięcia i prądu oraz ich orientacyjne sinusoidy napisano i naszkicowano powyżej.

Zadanie 2.5

Na napięcie sinusoidalne włączono jeden z elementów R, L lub C. Wyznaczyć parametr charakteryzujący ten element mając dane przebiegi napięcia i prądu.

a) $u = 220\sqrt{2}\sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$, $\quad i = \sqrt{2}\sin\left(314t - \frac{\pi}{3}\right)$,

b) $u = 380\sqrt{2}\sin\left(314t - \frac{2}{3}\pi\right)$, $\quad i = 9{,}5\sin\left(314t + \frac{4}{3}\pi\right)$,

c) $u = 127\sqrt{2}\cos 314t$, $\quad i = -2{,}54\sin 314t$,

d) $u = 110\sqrt{2}\cos\left(377t + \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad i = 1{,}1\sqrt{2}\cos\left(377t + \frac{5}{6}\pi\right)$,

e) $u = 500\sqrt{2}\cos\left(157t - \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad i = 2{,}5\sqrt{2}\sin\left(157t + \frac{\pi}{4}\right)$,

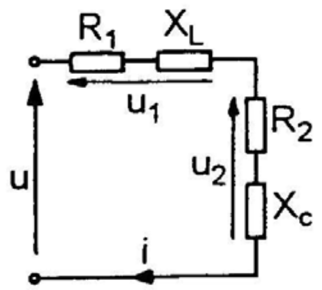
f) $u = 330\sqrt{2}\cos\left(105t - \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad i = 22\sqrt{2}\sin\left(105t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Odpowiedź: a) $L = 0{,}7\text{H}$, b) $R = 40\Omega$, c) $C = 63{,}7\mu\text{F}$,
d) $C = 26{,}5\mu\text{F}$, e) $R = 200\Omega$, f) $L = 143\text{mH}$.

Zadanie 2.6

W obwodzie jak na rysunku 2.2 dany jest przebieg napięcia

u_1=240sin(ωt+30°)



Rys. 2.2

oraz parametry obwodu: R_1=10Ω, X_L=10Ω, R_2=5Ω, X_c=8,66Ω. Wyznaczyć wartości skuteczne prądu I, napięcia zasilającego U, napięcia U_2, oraz przebiegi $i=f(t)$, $u=f(t)$, $u_2=f(t)$. Narysować wykres wektorowy.

Rozwiązanie:

$$\underline{Z}_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} = 14{,}1\Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = \sqrt{R_2^2 + X_c^2} = \sqrt{5^2 + 8{,}86^2} = 10\Omega,$$

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{240}{\sqrt{2}} = 169{,}7\text{V}, \qquad I = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{240}{\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}} = 12\text{A},$$

$$U_2 = Z_2 I = 10 \cdot 12 = 120\text{V},$$

$$U_{R1} = R_1 I = 10\cdot 12 = 120\text{V}, \qquad U_{R2} = R_2 I = 5\cdot 12 = 60\text{V},$$

$$U_L = X_L I = 10\cdot 12 = 120\text{V}, \qquad U_c = X_c I = 8{,}66\cdot 12 = 103{,}92\text{V},$$

$$\varphi_1 = arctg\frac{X_L}{R_1} = arctg\frac{10}{10} = 45^o,$$

$$\varphi_2 = arctg\frac{-X_c}{R_2} = arctg\frac{-8,66}{5} = -60^o,$$

$$\varphi = arctg\frac{X_L - X_c}{R_1 + R_2} = arctg\frac{10-8,66}{10+5} = 5^o,$$

$$i = 12\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 15^o\right),$$

$$Z = \sqrt{\left(R_1 + R_2\right)^2 + \left(X_L - X_c\right)^2} = \sqrt{15^2 + 1,34^2} = 15,06\Omega,$$

$$U = ZI = 15,06 \cdot 12 = 180,72 \approx 181\text{V},$$

$$u = 181\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 10^o\right),$$

$$u_2 = 120\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 75^o\right).$$

Odpowiedź: I=12A, U=181V, a przebiegi odpowiednich napięć i prądów zapisano powyżej

Zadanie 2.7

Wyznaczyć parametry gałęzi szeregowej złożonej z dwóch elementów idealnych mając podane przebiegi prądu w gałęzi i napięcia na końcach gałęzi przy f = 50Hz:

a) $u = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^o\right)$, $\quad i = 4,4\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 23^o\right)$,

b) $u = 110\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right)$, $\quad i = 0,78\sqrt{2}\cos\omega t$,

c) $u = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 60^o\right)$, $\quad i = 8,8\sqrt{2}\cos\left(\omega t - 60^o\right)$.

Odpowiedź :

a) $R = 30\Omega$, $\quad L = 127\text{mH}$,
b) $R = 100\Omega$, $\quad C = 31,8\mu\text{F}$,
c) $R = 21,65\Omega$, $\quad L = 39,8\text{mH}$.

Zadanie 2.8

Gałąź szeregowa złożona z elementów idealnych $R = 50\Omega$ i $C = 20\mu F$ zasilana jest napięciem sinusoidalnym o przebiegu $u = 380\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_u)$. Jakie jest napięcie na kondensatorze jeżeli odłączenie nastąpiło w chwili, gdy napięcie zasilające a) $u = 0$, b) $u = 380\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 159{,}2\Omega,$$

$$\varphi = arctg\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) = arctg\left(-\frac{1}{314 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}\right) = -73^o,$$

a) $u = 0$, gdy $(\omega t + \psi_u) = k\pi$, k - liczba całkowita,

b) $u = U_m$, gdy $(\omega t + \psi_u) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Dla uproszczenia można przyjąć, że $\psi_u = 0$ wtedy

a) $u = 0$, gdy $\omega t = k\pi$,

b) $u = U_m$, gdy $\omega t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{50^2 + 159{,}2^2} = \sqrt{27844{,}64} = 166{,}9\Omega,$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{380}{166{,}9} = 2{,}28A,$$

$$U_c = X_c I = 159{,}2 \cdot 2{,}28 = 362{,}5V,$$

$$u_c = 362{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_u + 73^o - 90^o),$$

$$u_c = 362{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_u - 17^o).$$

Podstawiając dla $\psi_u = 0$ odpowiednie wartości ωt

a) $u_c = 362{,}5\sqrt{2}\sin(\pi - 17^o) = 150V$,

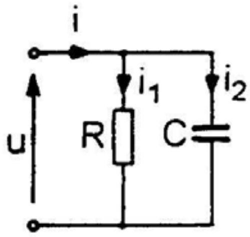
$u_c = 362{,}5\sqrt{2}\sin(2\pi - 17^o) = -150V$,

b) $u_C = 362{,}5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 17^o\right) = 490$.

Odpowiedź: a) $u_C = \pm\ 150$V, b) $u_C = 490$V.

Zadanie 2.9

Do źródła o napięciu sinusoidalnym $u = 220\sqrt{2}\sin 314t$ włączono równolegle dwa idealne elementy R, C jak na rysunku 2.3. Wyznaczyć parametry R, C oraz przebiegi prądów $i_1 = f(t)$, $i_2 = f_2(t)$, jeżeli prąd wypadkowy ma przebieg $i = 16{,}14\sin(314 + 29^o)$.

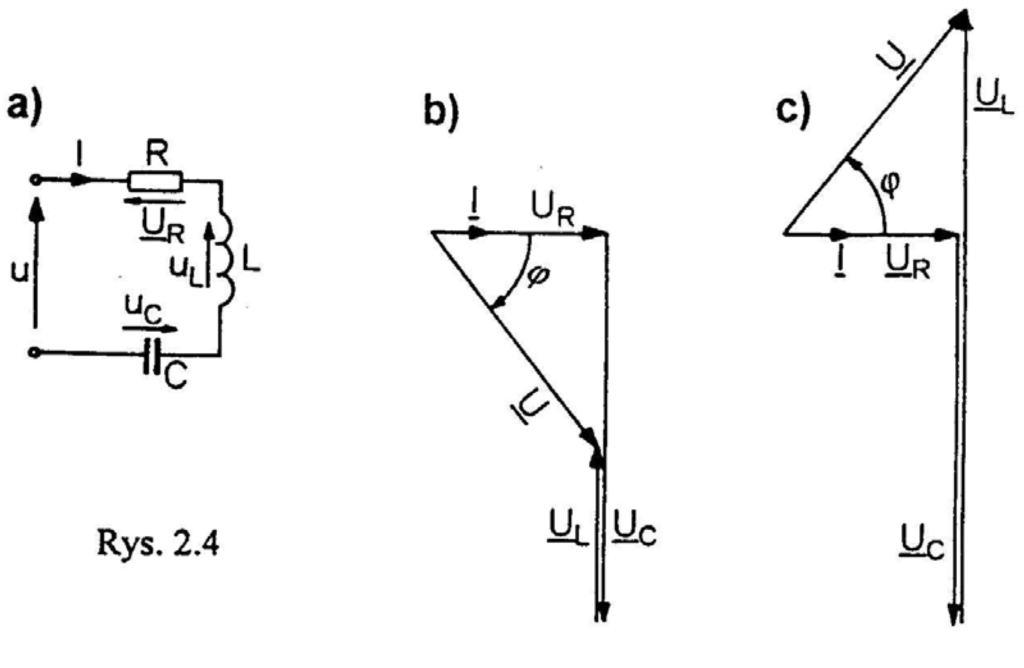


Rys.2.3

Odpowiedź: $R = 22\Omega$, $C = 79{,}6\mu$F,
$i_1 = 10\sqrt{2}\sin 314t$, $i_2 = 5{,}5\sqrt{2}\cos 314t$.

Zadanie 2.10

Do źródła napięcia sinusoidalnego o wartości skutecznej $U = 300$V i częstotliwości $f = 50$Hz włączono gałąź szeregową złożoną z elementów idealnych opornika o rezystancji $R = 120\Omega$, pojemności $C = 15{,}9\mu$F i cewki o nieznanej indukcyjności L. Zmierzono wartość skuteczną napięcia na oporniku $U_R = 180$V. Obliczyć prąd w gałęzi, reaktancję gałęzi, indukcyjność cewki, napięcie na cewce i kąt przesunięcia fazowego φ dla całej gałęzi. Jaki charakter ma dana gałąź indukcyjny czy pojemnościowy. Rysunek 2.4a przedstawia schemat obwodu a rysunki 2.4b i c wykresy wektorowe dla $\varphi<0$ i $\varphi>0$.



Rys. 2.4

Rozwiązanie:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_x^2} \ ,$$

$$U_x = \pm\sqrt{U^2 - U_R^2} = \pm\sqrt{300^2 - 180^2} = \pm\sqrt{57600} = \pm 240\text{V} \ ,$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 15{,}9 \cdot 10^{-6}} = 200\Omega \ ,$$

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{180}{120} = 1{,}5\text{A} \ , \qquad U_c = X_c I = 200 \cdot 1{,}5 = 300\text{V} \ ,$$

$$U_x = U_L - U_c, \qquad U_L = U_x + U_c,$$

$$U_L = 240 + 300 = 540\text{V} \ , \quad \text{lub} \quad U_L = -240 + 300 = 60\text{V} \ ,$$

$$X_L = \frac{540}{1{,}5} \quad \text{lub} \quad X_L = \frac{60}{1{,}5},$$

$$X_L = 360\Omega \quad \text{lub} \quad X_L = 40\Omega,$$

$$L = \frac{360}{314} \quad \text{lub} \quad L = \frac{40}{314},$$

$$L = 1{,}15\text{H} \quad \text{lub} \quad L = 127\text{mH} \ ,$$

$$X = X_L - X_c,$$

$$X = 360 - 200 \ , \quad \text{lub} \quad X = 40 - 200 \ ,$$

$$X = 160\Omega, \quad \text{lub} \quad X = -160\,\Omega,$$

$$\varphi = arctg\frac{X}{R},$$

$$\varphi = arctg\frac{160}{120}, \quad \text{lub} \quad \varphi = arctg - \frac{160}{120},$$

$$\varphi = 53^o, \quad \text{lub} \quad \varphi = -53^o.$$

Odpowiedź :

1) $I = 1{,}5\text{A}$, $X = 160\Omega$, $L = 1{,}15\text{H}$, $U_L = 540\text{V}$, $\varphi = 53^\circ$
charakter gałęzi czynno-indukcyjny,

2) $I = 1{,}5\text{A}$, $X = -160\Omega$, $L = 127\text{mH}$, $U_L = 60V$, $\varphi = -53^\circ$
charakter czynno-pojemnościowy.

Zadanie 2.11

Obliczyć indukcyjność cewki w obwodzie z poprzedniego zadania dla następujących danych: U=300V, U_R=180V, f=50Hz, R=120Ω, C=106,2μF. Wykonać wykres wektorowy przyjmując fazę początkową prądu ψ_i=0.

Odpowiedź: Istnieje tylko jedno rozwiązanie z zastosowaniem cewki indukcyjnej $L = 605$mH.

Zadanie 2.12

W gałęzi szeregowej R, L, C o wartościach $R = 40\Omega$, $L = 382$mH, $C = 26{,}5\mu$F znany jest przebieg napięcia na cewce $u_L = 660\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Wyznaczyć przebiegi prądu, napięć u_R, u_c i napięcia zasilającego u w funkcji czasu dla $f = 50$Hz. Obliczyć wartość prądu i wartości napięć u_R, u_L, u_c w chwili $t = 0$.

Odpowiedź: $i = 5{,}5\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, $u_R = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$,

$u_c = 660\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$, $u = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$.

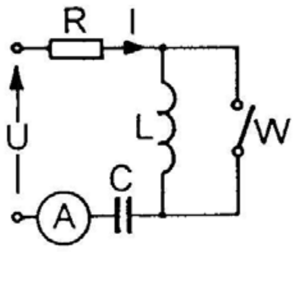
Dla chwili $t = 0$:

$i = -3{,}89$A, $u_R = -155{,}56$V, $u_L = 808{,}33$V,
$u_c = -808{,}33$V, $u = u_R = -155{,}56$V.

Zadanie 2.13

W układzie przedstawionym na rysunku 2.5 wskazanie amperomierza nie ulega zmianie niezależnie od tego czy wyłącznik jest otwarty czy zamknięty.

Dane: $U = 200$V, $I = 8A$, $R = 15\Omega$, $f = 50$Hz. Obliczyć parametry L i C.



Rys. 2.5

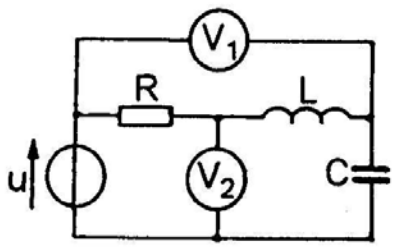
Odpowiedź: L = 0,127H, C = 159,2μF.

Zadanie 2.14

Na napięcie $u = 440\sqrt{2}\sin\left(314t + 30^o\right)$ włączono gałąź szeregową złożoną z trzech elementów idealnych jak pokazano na rysunku 2.6.

Dane: $R = 30\Omega$, $L = 63{,}7\text{mH}$, $C = 53{,}1\mu\text{F}$.

Obliczyć wartości skuteczne prądu i napięcia na poszczególnych elementach R, L, C oraz napięć mierzonych przez woltomierze V_1 i V_2. Zapisać przebiegi czasowe wszystkich wymienionych wielkości.



Rys. 2.6

Odpowiedź: $I = 8{,}8\text{A}$, $U_R = 264\text{V}$, $U_L = 176\text{V}$, $U_c = 528\text{V}$,

$U_1 = 317{,}3\text{V}$, $U_2 = 352V$,

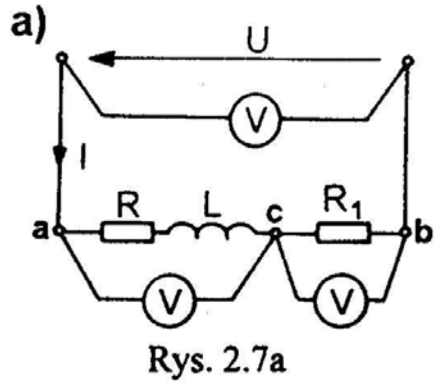
$i = 8{,}8\sqrt{2}\sin\left(314t + 83^o\right)$, $u_R = 264\sqrt{2}\sin\left(314t + 83^o\right)$,

$u_L = 176\sqrt{2}\sin\left(314t + 173^o\right)$, $u_c = 528\sqrt{2}\sin\left(314t - 7^o\right)$,

$u_1 = 317{,}3\sqrt{2}\sin\left(314t + 117^o\right)$, $u_2 = 352\sqrt{2}\sin\left(314t - 7^o\right)$.

Zadanie 2.15

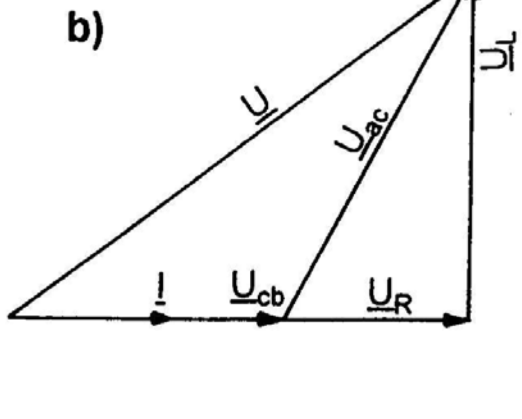
Do wyznaczenia nieznanych parametrów R, L odbiornika zastosowano metodę trzech woltomierzy w układzie przedstawionym na rysunku 2.7a. Napięcie zasilające U=500V, f=50Hz, pozostałe napięcia U_{cb}=240V, U_{ac}=340V, a rezystancja $R_1 = 480\Omega$. Obliczyć wartości R, X_L, L.



Rys. 2.7a

Rozwiązanie:

Rysunek 2.7b przedstawia wykres wektorowy napięć



Rys. 2.7b

$$U_R^2 + U_L^2 = U_{ac}^2, \quad U_L^2 = U_{ac}^2 - U_R^2,$$

$$\left(U_{cb} + U_R\right)^2 + U_L^2 = U^2, \qquad U_{cb}^2 + 2U_{cb}U_R + U_R^2 + U_{ac}^2 - U_R^2 = U^2,$$

$$U_R = \frac{U^2 - U_{ac}^2 - U_{cb}^2}{2U_{cb}} = \frac{250000 - 115600 - 57600}{480} = 160\text{V},$$

$$I = \frac{U_{cb}}{R_1} = \frac{240}{480} = 0{,}5\text{A}, \qquad R = \frac{U_R}{I} = \frac{160}{0{,}5} = 320\Omega,$$

$$U_L^2 = U_{ac}^2 - U_R^2 = 340^2 - 160^2 = 115600 - 25600 = 90000,$$

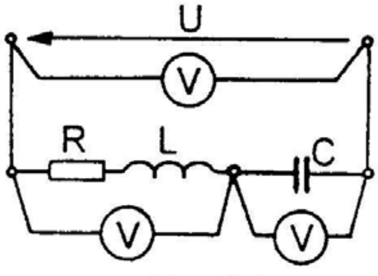
$$U_L = \sqrt{90000} = 300\text{V}, \qquad X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{300}{0{,}5} = 600\Omega,$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{600}{314} = 1{,}91\text{H}.$$

Odpowiedź: $R = 320\Omega$, $X_L = 600\Omega$, $L = 1{,}91\text{H}$.

Zadanie 2.16

W obwodzie jak na rysunku 2.8 wszystkie woltomierze wskazują tę samą wartość skuteczną. Wyznaczyć parametry R i L jeżeli C=53,05μF, a częstotliwość napięcia zasilającego f= 60Hz.

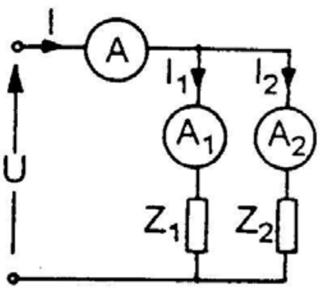


Rys.2.8

Odpowiedź: $R = 43{,}3\Omega$, $L = 66{,}3\text{mH}$.

Zadanie 2.17

W obwodzie jak na rysunku 2.9 wszystkie amperomierze wskazują 5A. Wartość skuteczna napięcia wynosi U=220V przy częstotliwości f=50Hz. Wyznaczyć parametry gałęzi o impedancjach Z_1 i Z_2, jeżeli w jednej z gałęzi znajduje się tylko cewka lub tylko kondensator.



Rys.2.9

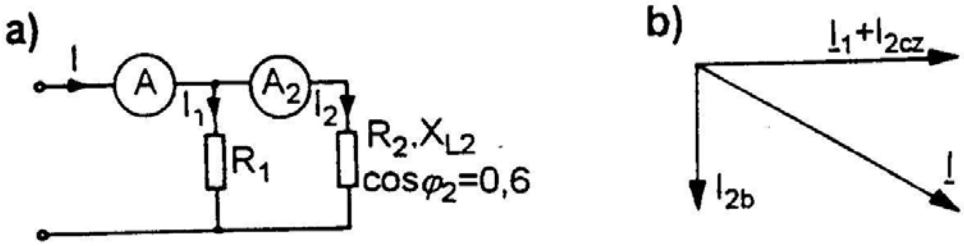
Odpowiedź: Zadanie ma dwa rozwiązania:

1) $Z_1 = X_c = 44\Omega$, $C = 72{,}4\mu F$, $Z_2(R,L)$, $R = 38{,}1\Omega$, $X_L = 22\Omega$, $L = 70mH$,

2) $Z_1 = X_L = 44\Omega$, $L = 140mH$, $Z_2(R,C)$, $R = 38{,}1\Omega$, $X_c = 22\Omega$, $C = 144{,}8\mu F$.

Zadanie 2.18

Dwa odbiorniki, jeden rezystancyjny a drugi rezystancyjno-indukcyjny o $\cos\varphi = 0{,}6$ połączono równolegle jak pokazano na rysunku 2.10a i zmierzono prąd $I_2 = 18{,}75A$ oraz prąd wypadkowy $I = 25A$. Obliczyć wartość skuteczną prądu I_1.



Rys.2.10

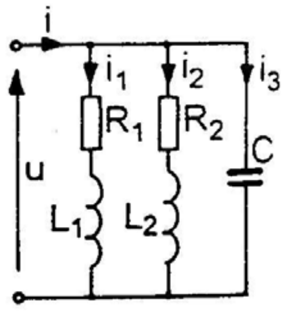
Rysunek 2.10b przedstawia wykres wektorowy prądów

Odpowiedź : $I_1 = 8{,}75A$

Zadanie 2.19

W obwodzie przedstawionym na rysunku 2.11 obliczyć rozpływ prądów (napisać ich przebiegi czasowe).

Dane: $R_1 = 24\Omega$, $R_2 = 15\Omega$,
$L_1 = 47{,}7mH$,
$L_2 = 53mH$,
$c = 66{,}3\mu F$
a przebieg napięcia
$u = 110\sqrt{2}\sin 377t$.



Rys.2.11

Rozwiązanie :

$$X_{L1} = \omega L_1 = 377 \cdot 47{,}7 \cdot 10^{-3} = 18\Omega,$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 377 \cdot 53 \cdot 10^{-3} = 20\Omega,$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{377 \cdot 66{,}3 \cdot 10^{-6}} = 40\Omega,$$

$$Z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3,$$

$$Z_1 = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{900} = 30\Omega,$$

$$Z_2 = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25\Omega,$$

$$Z_3 = 40\Omega,$$

$$I_k = \frac{U}{Z_k}, \quad I_1 = \frac{110}{30} = 3{,}67\text{A}, \quad I_2 = \frac{110}{25} = 4{,}4\text{A}, \quad I_3 = \frac{110}{40} = 2{,}75\text{A},$$

$$\cos\varphi_k = \frac{R_k}{Z_k}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{24}{30} = 0{,}8, \quad \cos\varphi_2 = \frac{15}{25} = 0{,}6, \quad \cos\varphi_3 = \frac{0}{40} = 0,$$

$$\sin\varphi_k = \frac{X_k}{Z_k}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{18}{30} = 0{,}6, \quad \sin\varphi_2 = \frac{20}{25} = 0{,}8, \quad \sin\varphi_3 = \frac{-40}{40} = -1,$$

Składowe czynne poszczególnych prądów:

$$I_{kcz} = I_k \cos\varphi_k, \qquad I_{1cz} = 3{,}67 \cdot 0{,}8 = 2{,}94\text{A},$$

$$I_{2cz} = 4{,}4 \cdot 0{,}6 = 2{,}64\text{A}, \qquad I_{3cz} = 2{,}75 \cdot 0 = 0\text{A}.$$

Składowe bierne poszczególnych prądów:

$$I_{kb} = I_k \sin\varphi_k, \quad I_{1b} = 3{,}67 \cdot 0{,}6 = 2{,}20\text{A}, \quad I_{2b} = 4{,}4 \cdot 0{,}8 = 3{,}52\text{A},$$

$$I_{3b} = 2{,}75 \cdot (-1) = -2{,}75\text{A}.$$

$$I = \sqrt{\left(\sum I_k \cos\varphi_k\right)^2 + \left(\sum I_k \sin\varphi_k\right)^2} = \sqrt{5{,}58^2 + 2{,}97^2} = 6{,}32\text{A},$$

$$tg\varphi = \frac{\sum I_k \sin\varphi_k}{\sum I_k \cos\varphi_k} = \frac{2{,}97}{5{,}58} = 0{,}53, \quad \varphi = arctg 0{,}53 = 28^o,$$

$$\varphi_1 = 37^o, \quad \varphi_2 = 53^o, \quad \varphi_3 = -90^o.$$

Odpowiedź : $i_1 = 3{,}67\sqrt{2}\sin\left(377t - 37^o\right)$, $\quad i_2 = 4{,}4\sqrt{2}\sin\left(377t - 53^o\right)$,

$i_3 = 2{,}75\sqrt{2}\cos 377t$, $\quad i = 6{,}32\sqrt{2}\sin\left(377t - 28^o\right)$.

Zadanie 2.20

Jedną gałąź układu równoległego stanowi dławik o prądzie $I_1 = 15A$ przy $\cos\varphi_1 = 0{,}17$, drugą odbiornik rezystancyjno-pojemnościowy o $\cos\varphi_2 = 0{,}6$. Obliczyć prąd I_2 oraz prąd wypadkowy I, jeżeli wiadomo, że prąd ten jest opóźniony w fazie względem napięcia o kąt $\varphi = 37^\circ$ $(\cos\varphi = 0{,}8)$.

Odpowiedź: $I_2 = 10{,}29A$, $I = 10{,}9A$.

$$Z_k = \sqrt{R_k^2 + X_k^2} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3,$$

$$Z_1 = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{900} = 30\Omega,$$

$$Z_2 = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25\Omega,$$

$$Z_3 = 40\Omega,$$

$$I_k = \frac{U}{Z_k}, \quad I_1 = \frac{110}{30} = 3{,}67\text{A}, \quad I_2 = \frac{110}{25} = 4{,}4\text{A}, \quad I_3 = \frac{110}{40} = 2{,}75\text{A},$$

$$\cos\varphi_k = \frac{R_k}{Z_k}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{24}{30} = 0{,}8, \quad \cos\varphi_2 = \frac{15}{25} = 0{,}6, \quad \cos\varphi_3 = \frac{0}{40} = 0,$$

$$\sin\varphi_k = \frac{X_k}{Z_k}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{18}{30} = 0{,}6, \quad \sin\varphi_2 = \frac{20}{25} = 0{,}8, \quad \sin\varphi_3 = \frac{-40}{40} = -1,$$

Składowe czynne poszczególnych prądów:

$$I_{kcz} = I_k \cos\varphi_k, \qquad I_{1cz} = 3{,}67 \cdot 0{,}8 = 2{,}94\text{A},$$

$$I_{2cz} = 4{,}4 \cdot 0{,}6 = 2{,}64\text{A}, \qquad I_{3cz} = 2{,}75 \cdot 0 = 0\text{A}.$$

Składowe bierne poszczególnych prądów:

$$I_{kb} = I_k \sin\varphi_k, \quad I_{1b} = 3{,}67 \cdot 0{,}6 = 2{,}20\text{A}, \quad I_{2b} = 4{,}4 \cdot 0{,}8 = 3{,}52\text{A},$$

$$I_{3b} = 2{,}75 \cdot (-1) = -2{,}75\text{A}.$$

$$I = \sqrt{\left(\sum I_k \cos\varphi_k\right)^2 + \left(\sum I_k \sin\varphi_k\right)^2} = \sqrt{5{,}58^2 + 2{,}97^2} = 6{,}32\text{A},$$

$$tg\varphi = \frac{\sum I_k \sin\varphi_k}{\sum I_k \cos\varphi_k} = \frac{2{,}97}{5{,}58} = 0{,}53, \quad \varphi = arctg 0{,}53 = 28^o,$$

$$\varphi_1 = 37^o, \quad \varphi_2 = 53^o, \quad \varphi_3 = -90^o.$$

Odpowiedź: $i_1 = 3{,}67\sqrt{2}\sin\left(377t - 37^o\right)$, $\quad i_2 = 4{,}4\sqrt{2}\sin\left(377t - 53^o\right)$,

$i_3 = 2{,}75\sqrt{2}\cos 377t$, $\quad i = 6{,}32\sqrt{2}\sin\left(377t - 28^o\right)$.

Zadanie 2.20

Jedną gałąź układu równoległego stanowi dławik o prądzie $I_1 = 15A$ przy $\cos\varphi_1 = 0,17$, drugą odbiornik rezystancyjno-pojemnościowy o $\cos\varphi_2 = 0,6$. Obliczyć prąd I_2 oraz prąd wypadkowy I, jeżeli wiadomo, że prąd ten jest opóźniony w fazie względem napięcia o kąt $\varphi = 37^{\circ}$ ($\cos\varphi = 0,8$).

Odpowiedź: $I_2 = 10,29A$, $I = 10,9A$.

3. MOC PRĄU PRZEMIENNEGO

Zadanie 3.1

Dane są następujące przebiegi prądu i napięcia odbiornika. Wyznaczyć odpowiadające im moce czynne, bierne i pozorne oraz współczynnik mocy:

a) $i = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 30^o\right)$, $u = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^o\right)$,

b) $i = 31{,}1\sin\left(\omega t + 30^o\right)$, $u = 311\cos\omega t$,

c) $i = 5\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 30^o\right)$, $u = 100\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 60^o\right)$,

d) $i = 28{,}28\cos\left(\omega t - 45^o\right)$, $u = 177\sin\left(\omega t + 45^o\right)$,

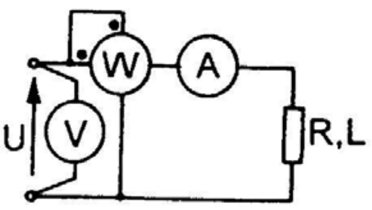
e) $i = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 90^o\right)$, $u = 100\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 60^o\right)$,

f) $i = 14{,}14\cos\omega t$, $u = 537{,}4\sin\left(\omega t + 37^o\right)$.

Odpowiedź:
a) P=1100W, Q=1905var, S=2200VA, cosφ=0,5,
b) P=2420W, Q=4192var, S=4840VA, cosφ=0,5,
c) P=250W, Q=-433var, S=500VA, cosφ=0,5,
d) P=2500W, Q=0var, S=2500VA, cosφ=1,
e) P=173W, Q=100var, S=200VA, cosφ=0,866,
f) P=2280W, Q=-3040var, S=3800VA, cosφ=0,6.

Zadanie 3.2

W celu wyznaczenia parametrów cewki powietrznej włączono ją jak na rysunku 3.1 do źródła napięcia sinusoidalnego o częstotliwości f=50Hz i zmierzono: U=10V, I=4A, P=32W. Obliczyć rezystancję i indukcyjność cewki.



Rys.3.1

Rozwiązanie:

$$P = RI^2, \qquad R = \frac{P}{I^2} = \frac{32}{4^2} = 2\Omega,$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{10}{4} = 2{,}5\Omega,$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \qquad X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5\Omega,$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{1{,}5}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 4{,}78\text{mH}.$$

Odpowiedź: R=2Ω, L=4,78mH.

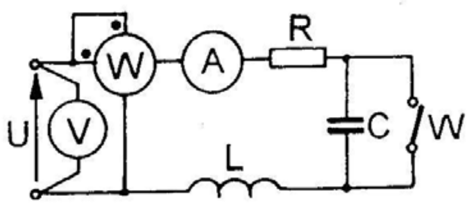
Zadanie 3.3

Odbiornik rezystancyjno indukcyjny zasilany napięciem stałym U=60V pobiera moc P=120W. Ten sam odbiornik zasilany napięciem sinusoidalnym o napięciu skutecznym U=60V, f=50Hz pobiera moc P=43,2W. Wyznaczyć parametry odbiornika.

Odpowiedź: R=30Ω, L=127mH.

Zadanie 3.4

W układzie na rysunku 3.2 przy otwartym wyłączniku przyrządy wskazywały następujące wartości U=220V, I=5,5A, P=605W. Po zamknięciu wyłącznika wskazania te nie uległy zmianie. Wyznaczyć parametry R, L, C obwodu dla f = 50Hz. Ile wynosiła moc bierna Q_1 przy otwartym wyłączniku, oraz Q_2 po jego zamknięciu.



Rys.3.2

Rozwiązanie:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{5{,}5} = 40\Omega, \qquad P = RI^2, \qquad R = \frac{P}{I^2} = \frac{605}{30{,}25} = 20\Omega.$$

Z - impedancja układu przed zamknięciem wyłącznika,

Z' - impedancja układu po zamknięciu wyłącznika.

Aby wskazania przyrządów nie uległy zmianie niezależnie od stanu wyłącznika wystarcza spełnienie warunku $Z = Z'$

$$\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

$$R^2 + X_L^2 - 2X_L X_C + X_C^2 = R^2 + X_L^2,$$

$$-2X_L X_C + X_C^2 = 0,$$

$$X_C(X_C - 2X_L) = 0, \quad \text{czyli} \quad X_C = 0, \quad \text{lub} \quad X_C = 2X_L,$$

$$Z' = 40\Omega, \quad \text{czyli} \quad X_L = \sqrt{Z'^2 - R^2} = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34{,}64\Omega,$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{34{,}64}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 110{,}3\text{mH},$$

$$C = \frac{1}{2X_L \cdot 2\pi f} = \frac{1}{69{,}28 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 45{,}95\mu\text{F},$$

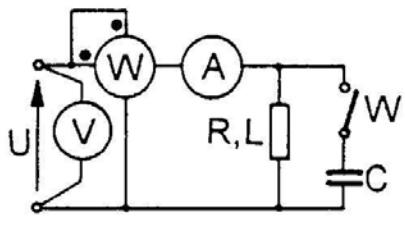
$$Q_1 = (X_L - X_C)I^2 = -34{,}64 \cdot 5{,}5^2 = -1047{,}86\,\text{var},$$

$$Q_2 = X_L I^2 = 34{,}64 \cdot 5{,}5^2 = 1047{,}86\,\text{var}.$$

Odpowiedź: R=20Ω, L=110,3mH, C≈46μF, Q_1=-1047,86var, Q_2=1047,86var.

Zadanie 3.5

Do źródła napięcia sinusoidalnego o częstotliwości f=50Hz włączono odbiornik rezystancyjno-indukcyjny jak na rysunku 3.3. Wskazania przyrządów były następujące: U=220V, I=8A, P=1056W. Następnie przez zamknięcie wyłącznika włączono równolegle kondensator o pojemności 72,3μF. Wyznaczyć współczynnik mocy $\cos\varphi$ odbiornika, wskazania watomierza i amperomierza oraz współczynnik mocy $\cos\varphi_w$ po włączeniu kondensatora. Jaki kondensator C' należałoby włączyć aby $\cos\varphi_w$=0,8?

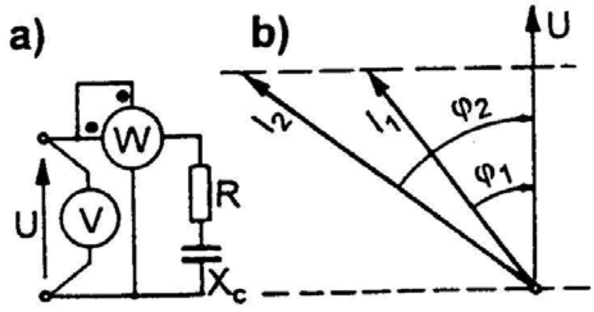


Rys.3.3

Odpowiedź: $\cos\varphi$=0,6 wskazanie watomierza nie ulegnie zmianie, I=5A, $\cos\varphi_w$=0,96, C'=40,5μF.

Zadanie 3.6

W obwodzie przedstawionym na rysunku 3.4a dane są X_C=24Ω, wartość skuteczna napięcia U=400V, moc czynna P=3200W. Obliczyć wartość skuteczną prądu I, współczynnik mocy cosφ oraz rezystancję R.



Rys.3.4

Rozwiązanie:

$$P = RI^2 \quad \text{i} \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}},$$

$$R = \frac{P}{I^2}, \qquad R = \frac{P\left(R^2 + X_C^2\right)}{U^2}, \qquad RU^2 = PR^2 + PX_C^2,$$

$$R^2 - \frac{U^2}{P}R + X_C^2 = 0 \quad \text{czyli} \quad R^2 - 50R + 576 = 0,$$

$$\Delta = 2500 - 2304 = 196, \qquad \sqrt{\Delta} = 14,$$

$$R_1 = \frac{50 + 14}{2} = 32\Omega, \qquad R_2 = \frac{50 - 14}{2} = 18\Omega$$

$$Z_1 = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40\Omega, \qquad Z_2 = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30\Omega,$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{400}{40} = 10\text{A}, \qquad I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{400}{30} = 13{,}33\text{A},$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{32}{40} = 0{,}8, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{18}{30} = 0{,}6.$$

Odpowiedź: Zadanie ma dwa rozwiązania:

a) I=10A, cosφ=0,8 (φ=-37°), R=32Ω,

b) I=13,33A, cosφ=0,6 (φ=-53°), R=18Ω,

Rysunek 3.4b przedstawia wykres wskazowy.

Zadanie 3.7

Odbiornik zasilany napięciem U=220V, f=50Hz pobiera z sieci moc czynną P=1161,6W przy prądzie I=8,8A. Wyznaczyć współczynnik mocy oraz parametry szeregowego układu zastępczego.

Odpowiedź: Zadanie ma dwa rozwiązania:

a) dla charakteru odbiornika czynno-idukcyjnego $\cos\varphi$=0,6, R=15Ω, $X_L = 20\Omega$, $L = 63{,}7\text{mH}$,

b) dla charakteru odbiornika czynno-pojemnościowego $\cos\varphi$=0,6, R=15Ω, X_C=20Ω, C=159,2.

Zadanie 3.8

Dla danych jak w zadaniu poprzednim wyznaczyć parametry równoległego układu zastępczego.

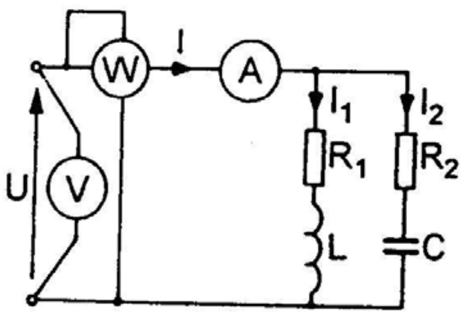
Odpowiedź: Zadanie ma również jak poprzednio dwa rozwiązani:

a) dla charakteru odbiornika czynno-indukcyjnego $\cos\varphi$=0,6, R=41,67Ω, X_L=31,25Ω, L=99,5mH,

b) dla charakteru odbiornika czynno-pojemnościowego $\cos\varphi$=0,6, R=41,67Ω, X_C=31,25Ω, C=101,9μF.

Zadanie 3.9

W obwodzie przedstawionym na rysunku 3.5 R_1=18Ω, X_L=24Ω, R_2=32Ω, U=400V, P=6400W. Obliczyć moce pobierane przez poszczególne gałęzie, reaktancję X_C, pojemność C oraz wartość skuteczną prądu wypadkowego.



Rys.3.5

Rozwiązanie:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{900} = 30\Omega,$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{400}{30} = 13{,}33\text{A}, \quad P_1 = R_1 I_1^2 = 18 \cdot 13{,}33^2 = 3200\text{W},$$

$$P_2 = P - P_1 = 6400 - 3200 = 3200\text{W},$$

$$P_2 = R_2 I_2^2\,, \quad I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{3200}{32}} = 10\text{A}\,, \quad Z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{400}{10} = 40\Omega\,,$$

$$X_C = \sqrt{Z_2^2 - R_2^2} = \sqrt{40^2 - 32^2} = \sqrt{576} = 24\Omega\,,$$

$$C = \frac{1}{X_C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{1}{24 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 132{,}6\mu\text{F}\,,$$

$\cos\varphi_1 = 0{,}6,\quad \cos\varphi_2 = 0{,}8,\quad \sin\varphi_1 = 0{,}8,\quad \sin\varphi_2 = 0{,}6,$

$I_{1cz} = I_1\cos\varphi_1 = 13{,}33 \cdot 0{,}6 = 8\text{A},\quad I_{1b} = I_1\sin\varphi_1 = 13{,}33 \cdot 0{,}8 = 10{,}67\text{A},$

$I_{2cz} = I_2\cos\varphi_2 = 10 \cdot 0{,}8 = 8\text{A},\quad I_{2b} = \text{I}_2\sin\varphi_2 = 10 \cdot 0{,}6 = 6\text{A},$

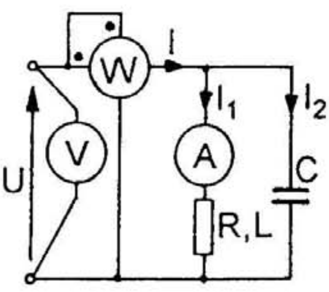
$I_{cz} = I_{1cz} + I_{2cz} = 8 + 8 = 16\text{A},\quad I_b = I_{1b} - I_{2b} = 10{,}67 - 6 = 4{,}67\text{A},$

prąd I_{2b} jest prądem o charakterze pojemnościowym dlatego znak minus.

$$I = \sqrt{I_{cz}^2 + I_b^2} = \sqrt{16^2 + 4{,}67^2} = \sqrt{277{,}81} = 16{,}67\text{A}\,.$$

Odpowiedź: $P_1 = P_2 = \dfrac{P}{2} = 3200\text{W}$, X_C=24Ω, C=132,6μF, I=16,67A.

Zadanie 3.10



Rys.3.6

W obwodzie przedstawionym na rysunku 3.6 napięcie U=240V, moc P=1152W a prąd I_1=6A. Współczynnik mocy całego układu jest równy jedności. Wyznaczyć nieznane parametry R, L, C oraz przebiegi prądów $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i(t)$ dla f=50Hz i fazy początkowej napięcia ψ_u=30°

Rozwiązanie :

$$P = UI_1\cos\varphi_1\,, \qquad \cos\varphi_1 = \frac{P}{UI_1} = \frac{1152}{240 \cdot 6} = 0{,}8\,,$$

$$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{240}{6} = 40\Omega\,, \qquad R = Z_1\cos\varphi_1 = 40 \cdot 0{,}8 = 32\Omega\,,$$

$$X_L = Z_1 \sin\varphi_1 = 40 \cdot 0{,}6 = 24\Omega\,, \qquad L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{24}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 76{,}4\text{mH}\,,$$

$$I_{1b}=I_1\sin\varphi_1=6\cdot0{,}6=3{,}6\text{A}, \qquad I_2=I_{1b}=3{,}6\text{A},$$

$$I=I_{1cz}=I_1\cos\varphi_1=6\cdot0{,}8=4{,}8\text{A},$$

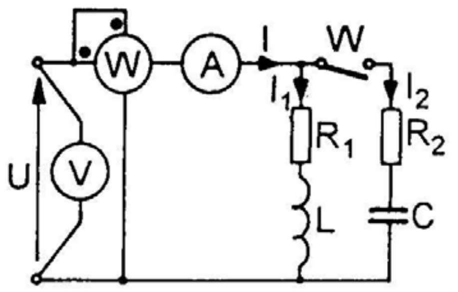
$$X_C = \frac{U}{I_2} = \frac{240}{3{,}6} = 66{,}67\Omega\,,$$

$$C = \frac{1}{X_C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{1}{66{,}67 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 47{,}7\mu\text{F}\,.$$

Odpowiedź: $R=32\Omega$, $L=76{,}4\text{mH}$, $C=47{,}7\mu\text{F}$, $I=4{,}8\text{A}$, $I_2=3{,}6\text{A}$,
$i_1(t) = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 7^o\right)$, $i_2(t) = 3{,}6\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 120^o\right)$,
$i(t) = 4{,}8\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^o\right)$.

Zadanie 3.11

W przedstawionym na rysunku 3.7 obwodzie zasilanym ze źródła o napięciu sinusoidalnym $U=110\text{V}$, $f=60\text{Hz}$, zmierzono moc czynną i wartość skuteczną prądu: a) przed zamknięciem wyłącznika $P=1210\text{W}$, $I = 11\sqrt{2} \approx 15{,}56\text{A}$, b) po zamknięciu wyłącznika $P=1573\text{W}$, $I=15{,}76\text{A}$. Wyznaczyć parametry układu R_1, R_2, L, C oraz przebiegi prądów przed i po zamknięciu wyłącznika. Dla przebiegu napięcia przyjąć fazę początkową $\psi_u=0$.



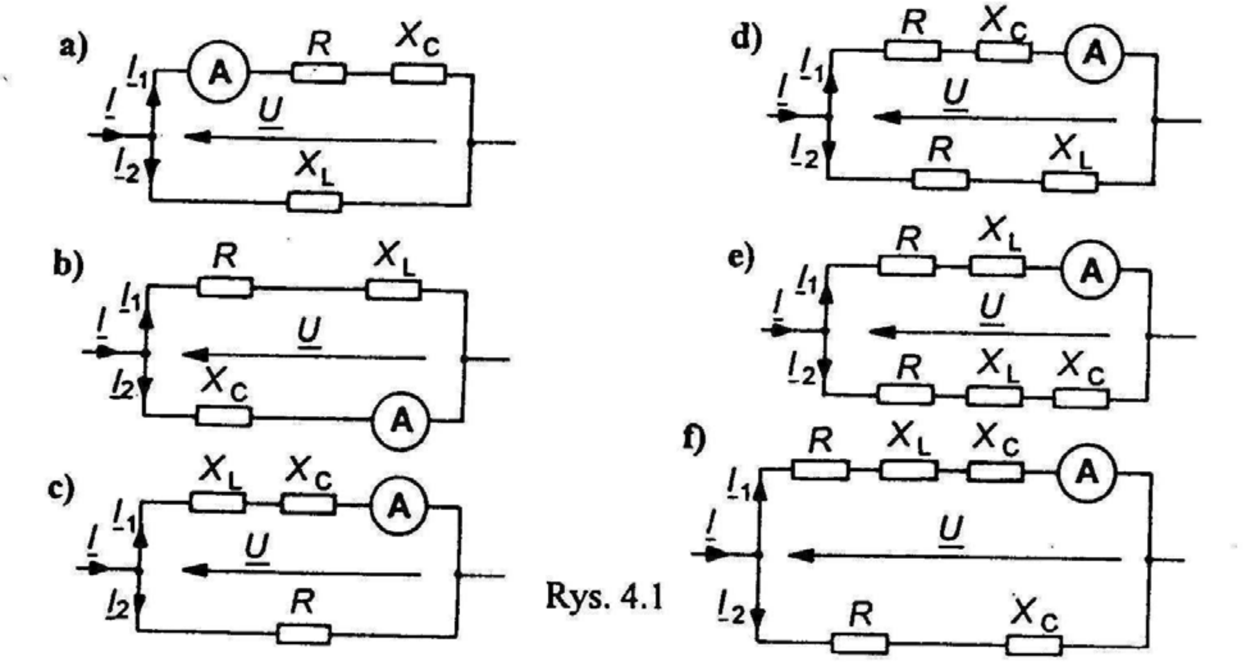
Rys.3.7

Odpowiedź: $R_1=5\Omega$, $R_2=12\Omega$, $L=13{,}3\text{mH}$, $C=165{,}8\mu\text{F}$,
$u(t) = 110\sqrt{2}\sin\omega t$. Przed zamknięciem wyłącznika
$i=i_1=22\sin(\omega t-45^o)$, $i_2=0$. Po zamknięciu wyłącznika
$i_1=22\sin(\omega t-45^o)$, $i_2 = 5{,}5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 53^o\right)$,
$i = 15{,}76\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 25^o\right)$.
Zagadnienia obliczania mocy występować będą również w zadaniach następnych rozdziałów.

4. ANALIZA OBWODÓW PRĄDU SINUSOIDALNEGO METODĄ LICZB ZESPOLONYCH

Zadanie 4.1

W przedstawionych na rysunkach 4.1a, b, c, d, e, f układach, zachodzi równość parametrów $R=X_L=X_C$. Obliczyć wartość skuteczną prądu wypadkowego I, jeżeli na amperomierzu włączonym we wskazaną gałąź odczytano prąd I_A=8A.



Rys. 4.1

Rozwiązanie: Przyjmując, że $i(t) = 8\sqrt{2}\sin\omega t$, czyli $\psi_{iA} = 0$ można zapisać, że $\underline{I}_A = I_A = 8\text{A}$.

a) $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{R - jX_C} = \dfrac{\underline{U}}{R - jR}$ ponieważ $R = X_L = X_C$,

$\underline{U} = 8(R - jR)$, $\quad \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}}{jX_l} = \dfrac{\underline{U}}{jR}$ to $\underline{U} = jR\underline{I}_2$,

$$\underline{I}_2 = \frac{8R(1 - j1)}{jR} = \frac{8(1 - j1)}{j} = (-8 - j8)\text{A},$$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 8 - 8 - j8 = -j8\text{A}$, $\quad$ to $\quad I = 8\text{A}$,

b) $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{-jX_C}$, to $\underline{U} = 8(-jR)$,

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R + jX_L} = \frac{-8jR}{R + jR} = -8\frac{j}{1+j} = -8(0{,}5 + j0{,}5) = (-4 - j4)\text{A},$$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 8 - 4 - j4 = (4 - j4)\text{A}$, to $I = 4\sqrt{2}$,

$I = 5{,}66\text{A}$.

c) $\underline{U} = \underline{I}_1(jX_L - jX_C) = 0$ - rezonans szeregowy,

$\underline{I} = \underline{I}_1 = 8A$, $\underline{I}_2 = 0A$, $I = 8A$,

d) $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{R - jX_C} = \dfrac{\underline{U}}{R - jR}$, to $\underline{U} = 8(R - jR)$,

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R + jX_L} = 8\frac{R - jR}{R + jR} = -j8\text{A},$$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (8 - j8)\text{A}$,

$I = 8\sqrt{2} = 11{,}31\text{A}$.

e) $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{R + jX_L} = \dfrac{\underline{U}}{R + jR}$, to $\underline{U} = 8(R + jR)$,

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\underline{U}}{R} = 8\frac{R + jR}{R} = (8 + j8)\text{A},$$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 8 + 8 + j8 = (16 + j8)\text{A}$,

$I = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{320} = 17{,}89\text{A}$.

f) $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{R + j(X_L - X_C)} = \dfrac{\underline{U}}{R}$, to $\underline{U} = 8R$,

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R - jX_C} = \frac{8R}{R - jR} = \frac{8}{1 - j} = (4 + j4)\text{A},$$

$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 8 + 4 + j4 = 12 + j4$, $I = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 12{,}65\text{A}$.

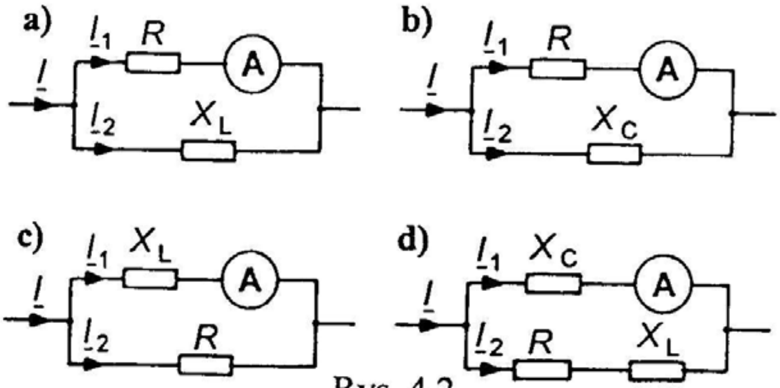
Odpowiedź: a) 8A; b) 5,66A; c) 8A; d) 11,31A; e) 17,89A; f) 12,65A.

Zadanie 4.2

W pokazanych na rysunkach 4.2a, b, c, d układach, zmierzono prąd $\underline{I}_1$=10A. Wyznaczyć wartość zespoloną prądu zasilającego $\underline{I}$ w postaci algebraicznej i wykładniczej, jeżeli faza początkowa prądu I_2 wynosi ψ_{i2}=-30°, a między parametrami zachodzą zależności:

a) $X_L=2R$; b) $X_C=4R$; c) $X_L=4R$; d) $X_C=2X_L=2R$.

Wykonać wykresy wektorowe prądów.



Rys. 4.2

Rozwiązanie:

a) $\underline{I}_1 = 10\cos 60° + j10\sin 60°$, $\quad \underline{I}_1 = (5 + j8{,}66)\text{A}$.

Z drugiego prawa Kirchhoffa:

$$R\underline{I}_1 = jX_L\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{R\underline{I}_1}{jX_L} = \frac{\underline{I}_1}{j2} = \frac{5 + j8{,}66}{j2} = (4{,}33 - j2{,}5)\text{A},$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (9{,}33 + j6{,}16)\text{A},$$

$$I = \sqrt{9{,}33^2 + 6{,}16^2} = \sqrt{124{,}99} = 11{,}18 \approx 11{,}2\text{A},$$

$$\psi_i = ar\,\text{ctg}\frac{6{,}16}{9{,}33} \approx 33{,}5°,$$

$$\underline{I} = 11{,}2e^{j33{,}5°}.$$

b) $\underline{I}_1 = 10\cos(-120°) + j10\sin(-120°)$, $\quad \underline{I}_1 = (-5 - j8{,}66)\text{A}$,

$$R\underline{I}_1 = -jX_C\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{jR\underline{I}_1}{X_C} = \frac{j\underline{I}_2}{4} = \frac{j(-5 - j8{,}66)}{4} = (2{,}17 - j1{,}25)\mathrm{A}\,,$$

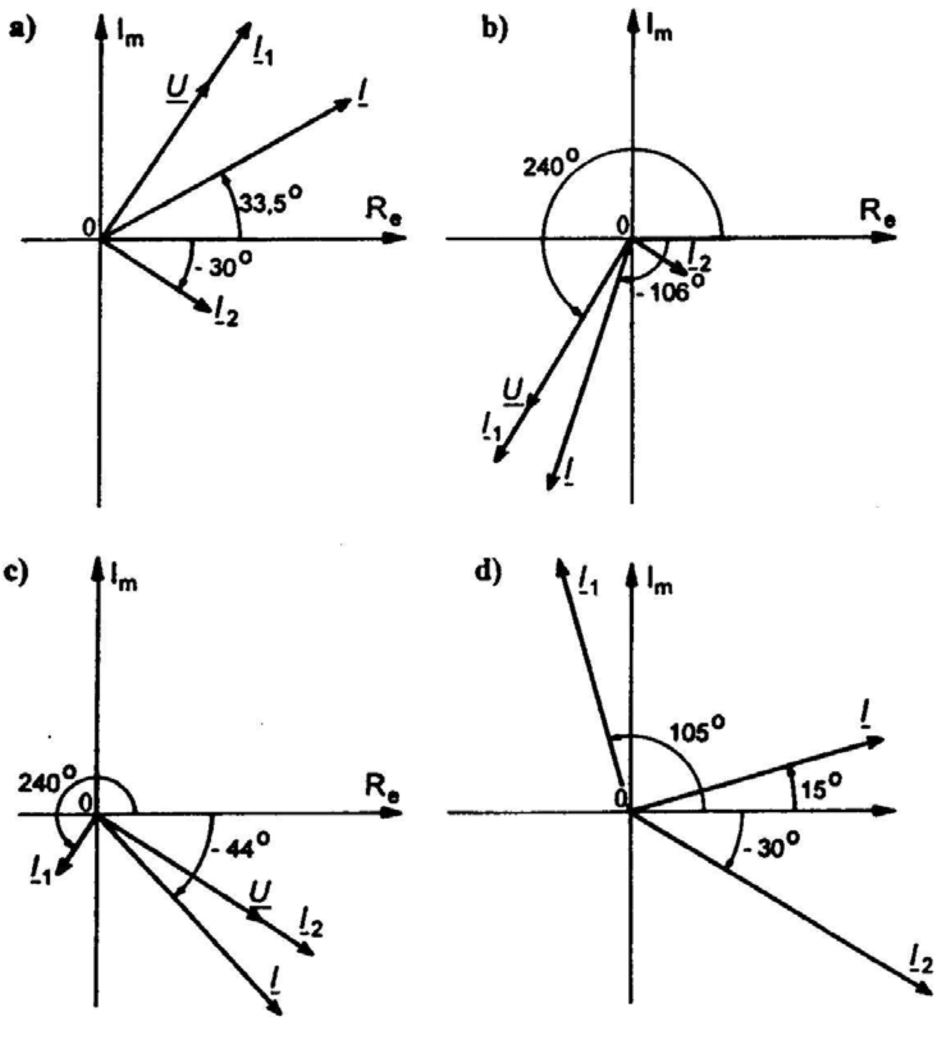
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (-2{,}83 - j9{,}91)\mathrm{A}\,,$$

$$\underline{I} = \sqrt{2{,}83^2 + 9{,}91^2} = \sqrt{106{,}21} \approx 10{,}3\mathrm{A}\,,$$

$$\psi_i = -180^\circ + ar\,\mathrm{ctg}\frac{9{,}91}{2{,}83} \approx -106^\circ\,,$$

$$\underline{I} = 10{,}3e^{-j106^\circ}\,.$$

Wykresy wskazowe



c) $\underline{I}_1 = 10\cos(-120°) + j10\sin(-120°)$, $\quad \underline{I}_1 = (-5 - j8{,}66)\text{A}$,

$$jX_L\underline{I}_1 = R\underline{I}_2, \quad \underline{I}_2 = \frac{jX_L\underline{I}_1}{R} = \frac{j4R\underline{I}_1}{R} = j4\underline{I}_1 = (34{,}64 - j20)\text{A},$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (29{,}64 - j28{,}66)\text{A},$$

$$I = \sqrt{29{,}64^2 + 28{,}66^2} = \sqrt{1699{,}93} = 41{,}23,$$

$$\psi_i = ar\,\text{ctg}\frac{-28{,}66}{29{,}64} = -44°, \quad \underline{I} = 41{,}23e^{-j44°}.$$

d) $\underline{I}_1 = 10\cos 105° + j10\sin 105°$, $\quad \underline{I}_1 = (-2{,}59 + j9{,}66)\text{A}$,

$$-jX_C\underline{I}_1 = (R + jX_L)\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{-jX_C\underline{I}_1}{R + jX_L} = \frac{-j2R\underline{I}_1}{R + jR} = \underline{I}_1\frac{-j2}{1+j} = \underline{I}_1\frac{-j2(1-j)}{2} =$$
$$= \underline{I}_1(-1-j) = (-2{,}59 + j9{,}66)(-1-j) = (12{,}25 - j7{,}07)\text{A},$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (9{,}66 + j2{,}59)\text{A}, \quad I = \sqrt{9{,}66^2 + 2{,}59^2} = \sqrt{100{,}02} \approx 10,$$

$$\psi_i = ar\,\text{ctg}\frac{2{,}59}{9{,}66} = 15°, \quad \underline{I} = 10e^{j15°}.$$

Odpowiedź: a) $\underline{I} = 11{,}2e^{j33{,}5°} = (9{,}33 + j6{,}16)\text{A}$,

b) $\underline{I} = 10{,}3e^{-j106°} = (-2{,}83 - j9{,}91)\text{A}$,

c) $\underline{I} = 41{,}23e^{-j44°} = (29{,}64 - j28{,}66)\text{A}$,

d) $\underline{I} = 10e^{j15°} = (9{,}66 + j2{,}59)\text{A}$.

Zadanie 4.3

Wyznaczyć kąt przesunięcia fazowego $\varphi=\psi_u-\psi_i$ między napięciem, a prądem zasilającym układ dwóch równoległych gałęzi o impedancjach:

a) $\underline{Z}_1 = 8 - j8$, $\quad \underline{Z}_2 = j8$,

b) $\underline{Z}_1 = 6 + j8$, $\quad \underline{Z}_2 = 1 - j2$,

c) $\underline{Z}_1 = 10 + j5$, $\quad \underline{Z}_2 = 2 - j5$,

Rozwiązanie:

a) $\underline{Z}=\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\dfrac{(8-j8)j8}{8-j8+j8}=\dfrac{64+j64}{8}=8+j8,$

$\varphi = arc\ \mathrm{tg}\dfrac{8}{8} = arc\ \mathrm{tg}1 = 45^\circ.$

b) $\underline{Z}=\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\dfrac{(6+j8)(1-j2)}{6+j8+1-j2}=\dfrac{130-j160}{85}=1{,}53-j1{,}88,$

$\varphi = ar\,\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{1{,}88}{1{,}53}\right) = ar\,\mathrm{ctg}(-1{,}23) = -50{,}86 \approx -51^\circ.$

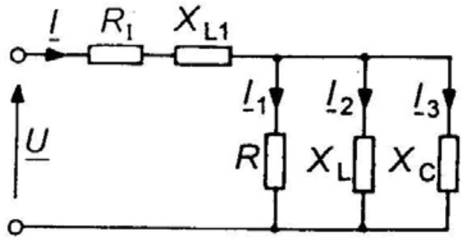
c) $\underline{Z}=\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}=\dfrac{(10+j5)(2-j5)}{10+j5+2-j5}=\dfrac{45-j40}{12}=3{,}75-j3{,}33,$

$\varphi = ar\,\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{3{,}33}{3{,}75}\right) = ar\,\mathrm{ctg}(-0{,}88) = -41{,}6^\circ.$

Odpowiedź: a) $\varphi = 45^\circ$, b) $\varphi = -51^\circ$, c) $\varphi = -41{,}6^\circ$.

Zadanie 4.4

W obwodzie przedstawionym na rysunku 4.3 dane są parametry R_1=4Ω, X_{L1}=8Ω, R=2Ω, X_L=8Ω, X_C=8Ω oraz napięcie $\underline{U}=(26+j168)\mathrm{V}$. Wyznaczyć wartość skuteczną napięcia U, impedancję zastępczą obwodu, wartości zespolone i skuteczne prądów $\underline{I}$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ oraz współczynnik mocy.



Rys. 4.3

Odpowiedź: $U=170\mathrm{V}$, $\underline{Z}=6+j8=10e^{j53^\circ}$, $\underline{I}=\underline{I}_1=15+j8,$
$I=I_1=17\mathrm{A}$, $\underline{I}_2=2-j3{,}75,$ $\underline{I}_3=-2+j3{,}75,$
$I_2=I_3=4{,}25\mathrm{A}$, $\cos\varphi=0{,}6.$

Zadanie 4.5

W obwodzie przedstawionym na rysunku 4.4 dane są parametry R_1=90Ω, R_2=90Ω, X_L=270Ω, X_C=300Ω oraz napięcie $\underline{U}_{ab}$=j990V. Wyznaczyć impedancję całego obwodu $\underline{Z}_{ab}$, prąd $\underline{I}$ oraz napięcia $\underline{U}_{ac}$ i $\underline{U}_{cb}$.

Rys. 4.4

Rozwiązanie:

$$\underline{Z}_{cb} = \frac{(R_2 + jX_L)(-jX_C)}{R + j(X_L - X_C)}, \qquad \underline{Z}_{ac} = R_1, \qquad \underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{cb}.$$

Podstawiając dane otrzymuje się

$$\underline{Z}_{ab} = 90 + \frac{(90 + j270)(-j300)}{90 - j30} = 90 + \frac{81000 - j2700}{90 - j30} = 990\Omega,$$

$$\underline{Z}_{ab} = 990\Omega,$$

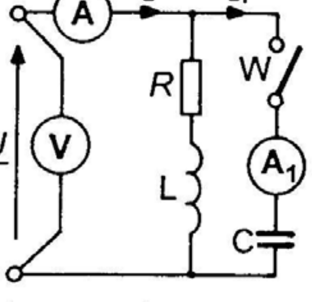
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{j990}{990} = j1\text{A},$$

$$\underline{U}_{ac} = R_1\underline{I} = 90 \cdot j1 = j90\text{V}, \qquad \underline{U}_{cb} = \underline{U}_{ab} - \underline{U}_{ac} = j990 - j90 = j900\text{V}.$$

Odpowiedź: $\underline{Z}_{ab}$=990Ω, $\underline{I}$=j1A, $\underline{U}_{ac}$=j90V, $\underline{U}_{cb}$=j900V.

Zadanie 4.6

W obwodzie przedstawionym na rysunku 4.5 zmierzono przy otwartym wyłączniku napięcie zasilające U=150V, f=60Hz, a prąd I=10A. Równolegle do odbiornika o parametrach R, L włączono przez zamknięcie wyłącznika kondensator C i stwierdzono, że prąd w gałęzi kondensatora wynosił I_1=12A, a prąd zasilający nadal I=10A. Obliczyć wartości R i L.



Rys. 4.5

Rozwiązanie:

Dla otwartego wyłącznika admitancja zespolona układu wynosi

$$\underline{Y}_1 = \frac{11}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2},$$

a jej moduł

$$Y_1 = \sqrt{\frac{R^2}{\left[R^2 + (\omega L)^2\right]^2} + \frac{(\omega L)^2}{\left[R^2 + (\omega L)^2\right]^2}}.$$

Dla zamkniętego wyłącznika admitancja zespolona układu wynosi

$$Y_2 = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C =$$

$$= \frac{R - j\omega L + j\omega R^2 C + j\omega^3 L^2 C}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L - \omega R^2 C + \omega^3 L^2 C}{R^2 + (\omega L)^2},$$

a jej moduł

$$Y_2 = \sqrt{\frac{R^2}{\left[R^2 + (\omega L)^2\right]^2} + \frac{\left(\omega^3 L^2 C + \omega R^2 C - \omega L\right)^2}{\left[R^2 + (\omega L)^2\right]^2}}.$$

Moduł prądu przed i po zamknięciu wyłącznika jest taki sam jeżeli $Y_1 = Y_2$ czyli

$$\omega L = \omega^3 L^2 C + \omega R^2 C - \omega L, \qquad 2L = \omega^2 L^2 C + R^2 C.$$

Przy zamkniętym wyłączniku

$$X_C = \frac{U}{I_1} = \frac{150}{12} = 12{,}5\Omega, \qquad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{377 \cdot 12{,}5} = 212{,}2\mu\text{F}.$$

Przy otwartym wyłączniku

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{150}{10} = 15\Omega, \qquad Z^2 = R^2 + (\omega L)^2,$$

$$R^2 = Z^2 - (\omega L)^2, \qquad \text{i} \qquad 2L = \omega^2 L^2 C + \left[Z^2 - (\omega L)^2\right]C,$$

$$2L = Z^2 C, \qquad L = \frac{Z^2 C}{2} = \frac{225 \cdot 212{,}2 \cdot 10^{-6}}{2} = 0{,}0239\text{H}, \qquad L = 23{,}9\text{ mH},$$

$$X_L = \omega L = 377 \cdot 0{,}0239 \approx 9\Omega,$$

$$R = \sqrt{Z^2 - X_L^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\Omega.$$

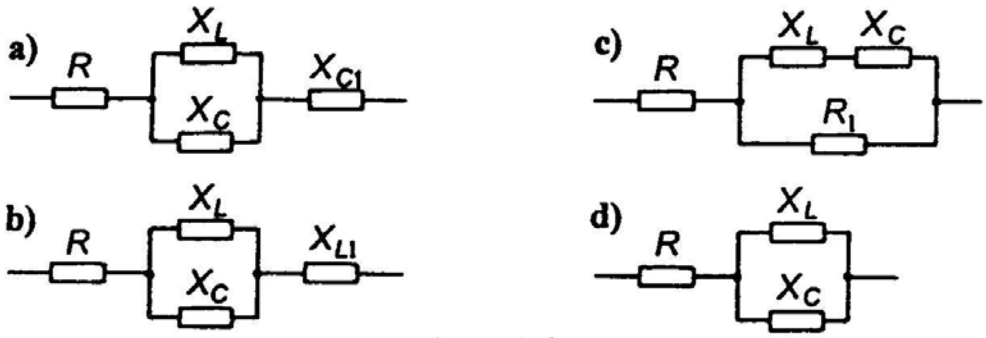
Odpowiedź: R=12Ω, L=23,9mH.

Zadanie 4.7

Wyznaczyć impedancje zastępcze poszczególnych układów przedstawionych na rysunkach 4.6a, b, c, d.

Dane:

dla przypadku a) R=30Ω, X_L=10Ω, X_C=20Ω, X_{C1}=20Ω,
dla przypadku b) R=40Ω, X_L=30Ω, X_C=20Ω, X_{L1}=10Ω,
dla przypadku c) R=20Ω, X_L=30Ω, X_C=30Ω, R_1=40Ω,
dla przypadku d) R=20Ω, X_L=30Ω, X_C=30Ω.



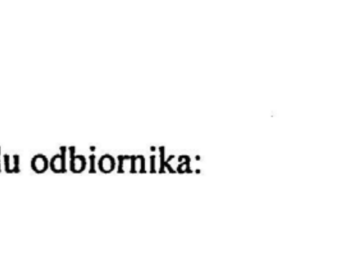
Rys. 4.6

Odpowiedź: a) $\underline{Z}$=30Ω, b) $\underline{Z}$=(40-j50)Ω, c) $\underline{Z}$=30Ω, d) $\underline{Z} \to \infty$.

Zadanie 4.8

Wyznaczyć impedancję zastępczą między zaciskami **a**, **b** układu przedstawionego na rysunku 4.7.

Dane: R_1=2Ω, X_{L1}=5Ω,
R_2=5Ω, X_{L2}=15Ω,
R_3=8Ω, X_C=6Ω.



Rys. 4.7

Odpowiedź: $\underline{Z}$=(12+j5)Ω, Z=13Ω.

Zadanie 4.9

Dane są wartości zespolone napięcia i prądu odbiornika:

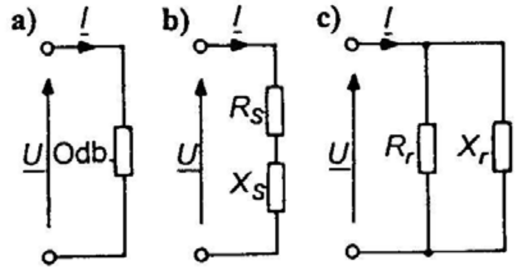
a) $\underline{U} = 84e^{j45^\circ}$, $\quad \underline{I} = 4e^{j60^\circ}$,

b) $\underline{U} = 64e^{j\frac{\pi}{6}}$, $\quad \underline{I} = 16e^{-j\frac{\pi}{6}}$,

c) $\underline{U} = 200 + j50$, $\quad \underline{I} = 4 - j2$,

d) $\underline{U} = 80 + j320, \quad \underline{I} = 8 + j2.$

Wyznaczyć moc zespoloną, impedancję i admitancję oraz parametry najprostszego zastępczego układu szeregowego i układu równoległego, składowe czynne napięcia i prądu. Rysunek 4.8a przedstawia odbiornik, a rysunki 4.8b i c najprostsze układy zastępcze odbiornika - szeregowy i równoległy.



Rys. 4.8

Rozwiązanie:

a) $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = 84e^{j45^\circ}4e^{-j60^\circ} = 336e^{-j15^\circ} = 324{,}6 - j87,$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{84e^{j45^\circ}}{4e^{j60^\circ}} = 21e^{-j15^\circ} = (20{,}3 - j5{,}4)\Omega, \quad R_S = 20{,}3\Omega,$$

$X_S = 5{,}4$ (reaktancja pojemnościowa),

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{4e^{j60^\circ}}{84e^{j45^\circ}} = 0{,}048e^{j15^\circ} = (0{,}046 + j0{,}012)S,$$

$$R_r = \frac{1}{G} = \frac{1}{0{,}046} = 21{,}74\Omega,$$

$$X_r = \frac{1}{B} = \frac{1}{0{,}012} = 83{,}33\Omega \text{ (reaktancja pojemnościowa).}$$

b) $\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = 64e^{j\frac{\pi}{6}}16e^{j\frac{\pi}{6}} = 1024e^{j\frac{\pi}{3}} = 512 + j886{,}8,$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{64e^{j\frac{\pi}{6}}}{16e^{-\frac{\pi}{6}}} = 4e^{j\frac{\pi}{3}} = (2 + j3{,}46)\Omega,$$

$R_S = 2\Omega,\ X_S = 3{,}46\Omega$ (reaktancja indukcyjna),

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{16e^{-\frac{\pi}{6}}}{64e^{j\frac{\pi}{6}}} = 0{,}25e^{-j\frac{\pi}{3}} = (0{,}125 - j0{,}217)S,$$

$$R_r = \frac{1}{G} = \frac{1}{0{,}125} = 8\Omega,$$

$$X_r = \frac{1}{B} = \frac{1}{0{,}217} = 4{,}61\Omega \text{ (reaktancja indukcyjna)},$$

c) $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = (200 + j50)(4 + j2) = 700 + j600,$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{200 + j50}{4 - j2} = \frac{(200 + j50)(4 + j2)}{20} = \frac{700 + j600}{20} = 35 + j30,$$

$R_S = 35\Omega,\ X_S = 30\Omega$ (reaktancja indukcyjna),

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{35 + j30} = \frac{35 - j30}{2125} = (0{,}0165 - j0{,}0141)S,$$

$$R_r = \frac{1}{G} = \frac{1}{0{,}0165} = 60{,}60\Omega,$$

$$X_r = \frac{1}{B} = \frac{1}{0{,}0141} = 70{,}92\Omega \text{ (reaktancja indukcyjna)}.$$

d) $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = (80 + j320)(8 - j2) = 1280 + j2400,$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{80 + j320}{8 + j2} = \frac{1280 + j2400}{68} = (18{,}82 + j35{,}29)\Omega,$$

$R_S = 18{,}82\Omega, X_S = 35{,}29$ (reaktancja indukcyjna),

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{18{,}82 + j35{,}29} = \frac{18{,}82 - j35{,}29}{1600} = (0{,}0118 - j0{,}0221)S,$$

$$R_r = \frac{1}{G} = \frac{1}{0{,}0118} = 84{,}75\Omega,$$

$$X_r = \frac{1}{B} = \frac{1}{0{,}0221} = 45{,}25\Omega \text{ (reaktancja indukcyjna)}.$$

Składowe czynne i bierne prądów i napięć dla poszczególnych przypadków:

a) $\underline{I}_{cz} = 4\cos 15^\circ e^{j45^\circ} = 3{,}86e^{j45^\circ},$

$\underline{I}_b = 4\cos 75^\circ e^{j135^\circ} = 1{,}04e^{j135^\circ},$

$\underline{U}_{cz} = 84\cos 15^\circ e^{j60^\circ} = 81{,}14e^{j60^\circ},$

$\underline{U}_b = 84\cos 75^\circ e^{-j30^\circ} = 21{,}74e^{-j30^\circ}.$

b) $\underline{I}_{cz} = 16\cos 60^\circ e^{j30^\circ} = 8e^{j30^\circ},$

$\underline{I}_b = 16\sin 60°\, e^{-j60°} = 13{,}86e^{-j60°}$,

$\underline{U}_{cz} = 64\cos 60°\, e^{-j30°} = 32e^{-j30°}$,

$\underline{U}_b = 64\sin 60°\, e^{j60°} = 55{,}43e^{j60°}$.

c) $\underline{U} = 206{,}16e^{j14°}$, $\underline{I} = 4{,}47e^{-j26{,}5°}$,

$\underline{I}_{cz} = 4{,}47\cos 40{,}5°\, e^{j14°} = 3{,}4e^{j14°}$,

$\underline{I}_b = 4{,}47\sin 40{,}5°\, e^{-j76°} = 2{,}9e^{-j76°}$,

$\underline{U}_{cz} = 206{,}16\cos 40{,}5°\, e^{-j26{,}5°} = 156{,}77e^{-j26{,}5°}$,

$\underline{U}_b = 206{,}16\sin 40{,}5°\, e^{j63{,}5°} = 133{,}89e^{j63{,}5°}$.

d) $\underline{U} = 329{,}85e^{j76°}$, $\underline{I} = 8{,}25e^{j14°}$,

$\underline{I}_{cz} = 8{,}25\cos 62°\, e^{j76°} = 3{,}87e^{j76°}$,

$\underline{I}_b = 8{,}25\sin 62°\, e^{-j14°} = 7{,}28e^{-j14°}$,

$\underline{U}_{cz} = 329{,}85\cos 62°\, e^{j14°} = 154{,}86e^{j14°}$,

$\underline{U}_b = 329{,}85\sin 62°\, e^{j104°} = 291{,}24e^{j104°}$.

Odpowiedź: a) $\underline{S} = 336e^{-j15°} = 324{,}6 - j87$, $\underline{Z} = 21e^{-j15°} = 20{,}3 - j5{,}4$,

$\underline{Y} = 0{,}048e^{j15°} = 0{,}046 + j0{,}012$, $R_r = 21{,}74\Omega$,

$X_r = 83{,}33\Omega$ (reaktancja pojemnościowa), $\underline{I}_{cz} = 3{,}86e^{j45°}$,

$\underline{I}_b = 1{,}04e^{j135°}$, $\underline{U}_{cz} = 81{,}14e^{j60°}$, $\underline{U}_b = 21{,}74e^{-j30°}$.

b) $\underline{S} = 1024e^{j\frac{\pi}{3}} = 512 + j886{,}8$, $\underline{Z} = 4e^{j\frac{\pi}{3}} = 2 + j3{,}46$,

$\underline{Y} = 0{,}25e^{-j\frac{\pi}{3}} = 0{,}125 - j0{,}217$,

$R_r = 8\Omega$, $X_r = 4{,}61\Omega$ (reaktancja indukcyjna), $\underline{I}_{cz} = 8e^{j30°}$,

$\underline{I}_b = 13{,}86e^{-j60°}$, $\underline{U}_{cz} = 32e^{-j30°}$, $\underline{U}_b = 55{,}43e^{j60°}$.

c) $\underline{S} = 700 + j600$, $\underline{Z} = 35 + j30$, $\underline{Y} = 0{,}0165 - j0{,}0141$,

$R_r = 60{,}60\Omega$, $X_r = 70{,}92\Omega$ (reaktancja indukcyjna),

$\underline{I}_{cz} = 3{,}4e^{j14^\circ}$, $\underline{I}_b = 2{,}9e^{-j76^\circ}$, $\underline{U}_{cz} = 156{,}77e^{-j26{,}5^\circ}$,

$\underline{U}_b = 133{,}89e^{j63{,}5^\circ}$.

d) $\underline{S} = 1280 + j2400$, $\underline{Z} = 18{,}82 + j35{,}29$,

$\underline{Y} = 0{,}0118 - j0{,}0221$,

$R_r = 84{,}75\Omega, X_r = 45{,}25$ (reaktancja indukcyjna),

$\underline{I}_{cz} = 3{,}87e^{j76^\circ}$, $\underline{I}_b = 7{,}28e^{j14^\circ}$, $\underline{U}_{cz} = 154{,}86e^{j14^\circ}$,

$\underline{U}_b = 291{,}24e^{j104^\circ}$.

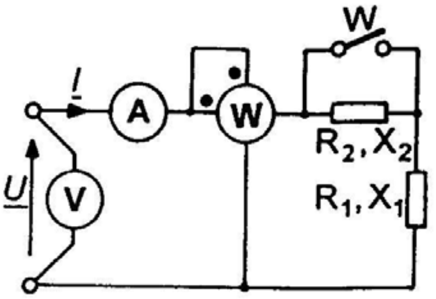
Zadanie 4.10

W szereg z odbiornikiem włączono cewkę indukcyjną, jak pokazano na rysunku 4.9 i zmierzono:

a) przy zamkniętym wyłączniku U=400V, I=4A, P=960W,

b) przy otwartym wyłączniku U=400V, I=5A, P=1600W.

Wyznaczyć parametry R_2, X_2 cewki oraz parametry R_1, X_1 odbiornika.



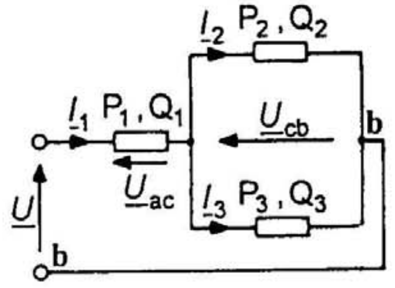
Rys. 4.9

Odpowiedź: R_1=60Ω, X_1=80Ω.

Uwaga! odbiornik ma charakter czynno-pojemnościowy R_2=4Ω, X_2=32Ω.

Zadanie 4.11

W przedstawionym na rysunku 4.10 układzie zasilanym napięciem sinusoidalnym o wartości skutecznej U=400V i częstotliwości f=50Hz moce czynne i bierne poszczególnych odbiorników wynoszą: P_1=1000W, P_2=200W, P_3=400W, Q_1=400var, Q_2=1000var, Q_3=-200var. Obliczyć napięcie U_{cb} oraz rezystancje i reaktancje zastępcze poszczególnych odbiorników.



Rys. 4.10

Rozwiązanie:

$$\underline{U} = \underline{U}_{ac} + \underline{U}_{cb} = 400\text{V},$$

$$P_{23} = P_2 + P_3 = 200 + 400 = 600\text{W},$$

$$Q_{23} = Q_2 + Q_3 = 1000 - 200 = 800\,\text{var},$$

$$P = P_1 + P_{23} = 1000 + 600 = 1600\text{W},$$

$$Q = Q_1 + Q_{23} = 400 + 800 = 1200\,\text{var},$$

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*, \qquad \underline{S} = P + jQ,$$

$$\underline{I}^* = \frac{\underline{S}}{\underline{U}} = \frac{1600 + j1200}{400} = (4 + j3)\text{A},$$

$$\underline{I} = (4 - j3)\text{A},$$

$$\underline{U} = \frac{S}{\underline{I}^*}, \underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = 1000 + j400\,\text{V},$$

$$\underline{U}_{ac} = \frac{1000 + j400}{4 + j3} = (208 - j56)\text{V},$$

$$\underline{U}_{cb} = \underline{U} - \underline{U}_{ac} = 400 - 208 + j56 = (192 + j56)\text{V},$$

$$U_{cb} = \sqrt{192^2 + 56^2} = 200\text{V},$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_{ac}}{\underline{I}} = \frac{208 - j56}{4 - j3} = (40 + j16)\Omega,$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1}, \quad R_1 = 40\Omega, \quad X_{\text{L1}} = 16\Omega,$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{cb}\underline{I}_2^*, \qquad \underline{S}_2 = P_2 + jQ_2,$$

$$\underline{I}_2^* = \frac{\underline{S}_2}{\underline{U}_{cb}} = \frac{200 + j1000}{192 + j56} = (2{,}36 + j4{,}52)\text{A},$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_{cb}}{\underline{I}_2} = \frac{192 + j56}{2{,}36 - j4{,}52} = (7{,}7 + j38{,}46)\Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2}, \qquad R_2 = 7{,}7\Omega, \qquad X_{L2} = 38{,}46\Omega,$$

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{cb}\underline{I}_3^*, \qquad \underline{S}_3 = P_3 + jQ_3,$$

$$\underline{I}_3^* = \frac{\underline{S}_3}{\underline{U}_{cb}} = \frac{400 - j200}{192 + j56} = (1{,}64 - j1{,}52)\text{A},$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{U}_{cb}}{\underline{I}_3} = \frac{192 + j56}{1{,}64 + j1{,}52} = (80 - j40)\Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3}, \qquad R_3 = 80\Omega, \qquad X_{C3} = 40\Omega,$$

$$L_1 = \frac{X_{L1}}{\omega} = \frac{16}{314} = 51\text{mH}, \qquad L_2 = \frac{X_{L2}}{\omega} = \frac{38{,}46}{314} = 122{,}5\text{mH},$$

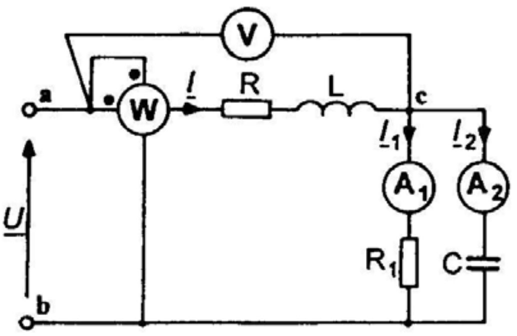
$$C_3 = \frac{1}{\omega X_{C3}} = \frac{1}{314 \cdot 40} = 79{,}6\mu\text{F},$$

Odpowiedź:

$U_{cb} = 200\text{V},\ R_1 = 40\Omega,\ X_{L1} = 16\Omega,\ R_2 = 7{,}7\Omega,$
$X_{L2} = 38{,}46\Omega,\ R_3 = 80\Omega, X_{C3} = 40\Omega,$
$L_1 = 51\text{mH},\ L_2 = 122{,}5\text{mH},\ C = 79{,}6\mu\text{F}.$

Zadanie 4.12

W obwodzie pokazanym na rysunku 4.11 zmierzono moc P=2480W i wartości skuteczne: I_1=8A, I_2=6A i U_{ac}=130V. Wyznaczyć prąd I, parametry R, L, C obwodu i napięcie zasilające U_{ab}, jeżeli R_1=20Ω, f=50Hz.

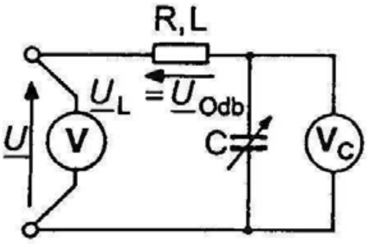


Rys. 4.11

Odpowiedź: $R = 12\Omega,\ L = 15{,}9\text{mH},\ C = 119{,}4\mu\text{F},\ U_{ab} = 252{,}23\text{V}.$

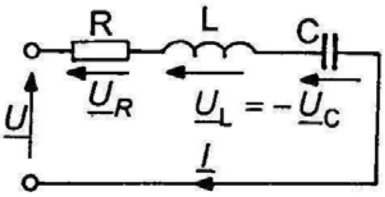
Zadanie 4.13

W pokazanym na rys.4.12a obwodzie zasilanym napięciem U=60V dobrano pojemność kondensatora tak, że woltomierz włączony na zaciski kondensatora wskazywał największą wartość.
Jakie jest wtedy napięcie na odbiorniku R, L jeżeli napięcie na kondensatorze wynosi U_C=80V?



Rys. 4.12a

Rozwiązanie: Ponieważ spadek napięcia na kondensatorze jest maksymalny, w obwodzie zachodzi rezonans szeregowy rysunek 4.12b



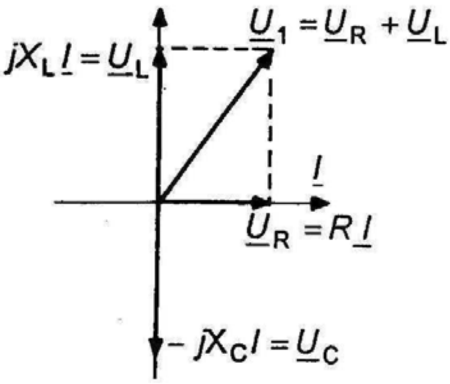
Rys. 4.12b

$$\underline{U} = \underline{U}_R = R\underline{I} = 60\text{V}, \qquad \underline{U}_1 = \underline{U}_{odb} = U + j\underline{U}_L,$$

gdzie: $\underline{U}_L = -\underline{U}_C$ jak przedstawiono na rysunku 4.12c

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_R + \underline{U}_L = 60 + j80,$$

$$U_1 = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100\text{V}.$$

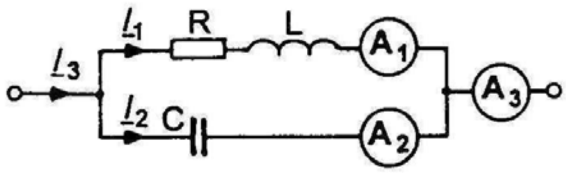


Rys. 4.12c.

Odpowiedź: Napięcie odbiornika U_1=100V.

Zadanie 4.14

W układzie przedstawionym na rysunku 4.13 zachodzi rezonans prądów. Amperomierze wskazują następujące wartości skuteczne I_1=1,3A, I_3=1,2A. Obliczyć prąd I_2 w gałęzi z kondensatorem.

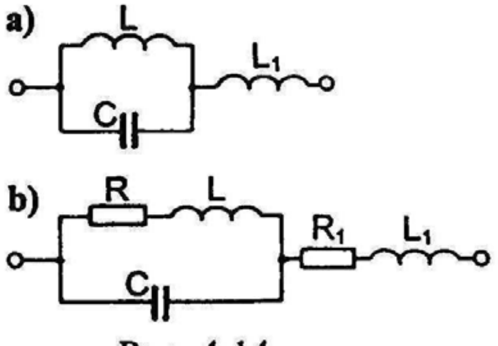


Rys. 4.13

Odpowiedź: I_2=0,5A.

Zadanie 4.15

W pokazanych na rysunku 4.14a i 4.14b układach dane są parametry: L=0,4H, R=4Ω, R_1=0,1Ω. Dobrać tak pozostałe parametry, aby uzyskać rezonans równoległy przy f=25Hz, a rezonans szeregowy przy f=100Hz.



Rys. 4.14

Odpowiedź: a) C=101,32μF, L_1=26,7mH, b) C=100,91μF, L_1=26,8mH.

Zadanie 4.16

Wyznaczyć częstotliwość, przy której w układzie podanym na rysunku 4.15 wystąpi rezonans:

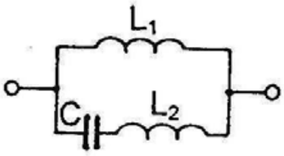
a) szeregowy,

b) równoległy.

Obliczyć konkretne wartości f_1 i f_2 dla następujących danych:

C=50,7μF, L_1=0,389mH, L_2=0,5mH.

Rys. 4.15



Rozwiązanie:

a) Rezonans szeregowy ma miejsce wtedy, gdy część urojona impedancji zastępczej równa jest zeru.

$$\underline{Z} = \frac{jX_{L1}\left[j\left(X_{L2} - X_C\right)\right]}{j\left(X_{L1} + X_{L2} - X_C\right)} = \frac{jX_{L1}\left(X_{L2} - X_C\right)}{X_{L1} + X_{L2} - X_C}.$$

Reaktancja X jest równa zeru gdy licznik ułamka jest równy zeru.

$$X_{L1}\left(X_{L2} - X_C\right) = 0, \quad \text{to} \quad \omega_0^2 L_1 L_2 - \frac{L_1}{C} = 0,$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_2 C}, \quad \text{to} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}, \quad \mathrm{f}_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C}}.$$

$$\operatorname{Im}\underline{Z} = \frac{R^2(X_L - X_C) + X_L X_C^2}{R^2 + X_C^2},$$

$$\operatorname{Im}\underline{Z} = 0, \quad \text{gdy} \quad R^2(X_L - X_C) + X_L X_C^2 = 0,$$

$$R^2\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) + \frac{L}{\omega_0 C^2} = 0, \qquad R^2\left(\omega_0^2 L - \frac{1}{C}\right) + \frac{L}{C^2} = 0,$$

$$\omega_0^2 R^2 L - \frac{R^2}{C} + \frac{L}{C^2} = 0, \qquad \omega_0^2 R^2 L = \frac{R^2}{C} - \frac{L}{C^2},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}},$$

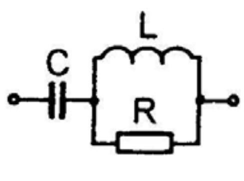
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(RC)^2}},$$

$$Z_0 = \operatorname{Re}\underline{Z} = \frac{RX_C^2}{R^2 + X_C^2} = \frac{\dfrac{R}{\left[\dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{(RC)^2}\right]C^2}}{R^2 + \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{(RC)^2}\right]C^2}} = \frac{R}{\dfrac{R^2C^2}{LC}} = \frac{L}{RC}.$$

Odpowiedź: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{(RC)^2}}, \quad Z_0 = \dfrac{L}{RC}.$

Zadanie 4.18

Dla obwodu z rysunku 4.17 wyznaczyć częstotliwość rezonansową f_0 i impedancję przy rezonansie Z_0.



Rys. 4.17

Dla danych wartości

$$f_0 = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{50{,}7\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}}} = 1000\text{Hz}.$$

b) Rezonans równoległy ma miejsce wtedy, gdy część urojona admitancji zastępczej równa jest zeru

$$\underline{Y} = -j\frac{X_{L1}+X_{L2}-X_C}{X_{L1}\left(X_{L2}-X_C\right)}.$$

Susceptancja B jest równa zeru gdy licznik ułamka jest równy zeru.

$$X_{L1}+X_{L2}-X_C = 0, \qquad \omega_0\left(L_1+L_2\right)-\frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\left(L_1+L_2\right)C}, \quad \text{to} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(L_1+L_2\right)C}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(L_1+L_2\right)C}}.$$

Dla danych wartości

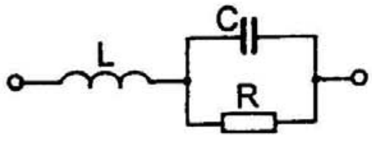
$$f_0 = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{50{,}7\cdot 10^{-6}\left(0{,}389+0{,}5\right)\cdot 10^{-3}}} = 750\text{Hz},$$

Odpowiedź: *a)* $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C}}$, $f_0 = 1000\text{Hz}$,

b) $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\left(L_1+L_2\right)C}}$, $f_0 = 750\text{Hz}$.

Zadanie 4.17

Dla obwodu z rysunku 4.16 wyznaczyć częstotliwość rezonansową f_0 i impedancję przy rezonansie Z_0



Rys. 4.16

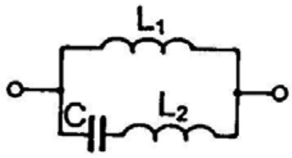
Rozwiązanie:

$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R(-jX_C)}{R-jX_C} = jX_L + \frac{R(-jX_C)(R+jX_C)}{R^2+X_C^2} =$$

$$= jX_L + \frac{RX_C^2 - jX_C R^2}{R^2+X_C^2} = \frac{jX_L R^2 + jX_L X_C^2 + RX_C^2 - jX_C R^2}{R^2+X_C^2},$$

Zadanie 4.24

W pokazanym na rysunku 4.23 układzie dana jest pojemność C oraz częstotliwość f_1 rezonansu szeregowego i f_2 rezonansu równoległego. Obliczyć pozostałe parametry L_1, L_2 obwodu. Która z częstotliwości f_1, f_2 jest większa?



Rys. 4.23

Rozwiązanie: Dla rezonansu szeregowego $Im\underline{Z}=0$

$$\underline{Z}=\frac{jX_{L1}j(X_{L2}-X_C)}{j(X_{L1}+X_{L2}-X_C)}=\frac{j(X_{L1}X_{L2}-X_{L1}X_C)}{X_{L1}+X_{L2}-X_C},$$

$$X_{L1}X_{L2}-X_{L1}X_C=0,\quad X_{L2}-X_C=0,\quad X_{L2}=X_C,$$

$$L_2=\frac{1}{\omega_1^2C}=\frac{1}{4\pi^2f_1^2C}.$$

Dla rezonansu równoległego $Im\underline{Y}=0$

$$X_{L1}+X_{L2}-X_C=0,\quad \omega_2L_1+\omega_2L_2-\frac{1}{\omega_2C}=0,$$

$$\omega_2L_1=\frac{1}{\omega_2C}-\omega_2\frac{1}{\omega_1^2C},$$

$$L_1=\frac{1}{\omega_2^2C}-\frac{1}{\omega_1^2C}=\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2C}=\frac{f_1^2-f_2^2}{f_1^2f_2^2C},$$

$$f_1=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C}},\qquad f_2=\frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)C}}.$$

Wynika z tego, że $f_2<f_1$.

Odpowiedź: $L_2=\dfrac{1}{4\pi^2f_1^2C}$, $L_1=\dfrac{f_1^2-f_2^2}{f_1^2\cdot f_2^2C}$, $f_2<f_1$.

Rozwiązanie:

$$\underline{Z} = -jX_C + \frac{jX_L R}{R + jX_L} = -jX_C + \frac{jX_L R(R - jX_L)}{R^2 + X_L^2} =$$

$$= \frac{-jX_C R^2 - jX_C X_L^2 + jX_L R^2 + RX_L^2}{R^2 + X_L^2},$$

$$\operatorname{Im} \underline{Z} = \frac{X_L R^2 - X_C\left(R^2 - X_L^2\right)}{R^2 + X_L^2},$$

$$\operatorname{Im} \underline{Z} = 0, \quad gdy \quad X_L R^2 - X_C\left(R^2 - X_L^2\right) = 0,$$

$$\omega_0 L R^2 - \frac{1}{\omega_0 C}\left(R^2 - \omega_0^2 L^2\right) = 0, \qquad \omega_0 L R^2 - \frac{R^2}{\omega_0 C} - \omega_0 \frac{L^2}{C} = 0,$$

$$\omega_0^2 LCR^2 - R^2 - \omega_0^2 L^2 = 0, \qquad \omega_0^2\left(LCR^2 - L^2\right) = R^2,$$

$$\omega_0^2 = \frac{R^2}{LCR^2 - L^2} = \frac{1}{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}},$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}},$$

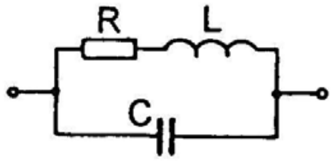
$$Z_0 = \operatorname{Re} \underline{Z} = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} = \frac{\dfrac{RL^2}{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}}{R^2 + \dfrac{L^2}{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}} = \frac{RL^2}{R^2 LC} = \frac{L}{RC}.$$

Odpowiedź: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC - \left(\frac{L}{R}\right)^2}}, \qquad Z_0 = \dfrac{L}{RC}.$

Zadanie 4.19

Dla obwodu z rysunku 4.18 wyznaczyć częstotliwość rezonansową f_0 i impedancję przy rezonansie Z_0.

Rys. 4.18



Rozwiązanie: W odróżnieniu od obwodów z zadań 4.17 i 4.18 wystąpi tu rezonans równoległy (prądów), który zachodzi dla warunku $Im\underline{Y}=0$.

$$\underline{Y}_1=\frac{1}{R+jX_L}=\frac{R}{R^2+X_L^2}-j\frac{X_L}{R^2+X_L^2},\qquad \underline{Y}_2=j\frac{1}{X_C},$$

$$\underline{Y}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2=\frac{R}{R^2+X_L^2}+j\left(\frac{1}{X_C}-\frac{X_L}{R^2+X_L^2}\right),$$

$$\operatorname{Im}\underline{Y}=\frac{1}{X_C}-\frac{X_L}{R^2+X_L^2}=\frac{R^2+X_L^2-X_LX_C}{X_C\left(R^2+X_L^2\right)},$$

$$\operatorname{Im}\underline{Y}=0,\quad gdy\quad R^2+X_L^2-X_LX_C=0,\qquad \omega_0^2L^2=\frac{L}{C}-R^2,$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2},\qquad \omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2},$$

$$f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2},$$

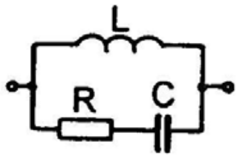
$$Y_0=\operatorname{Re}\underline{Y}=\frac{R}{R^2+L^2\left[\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]}=\frac{RC}{L},\qquad to\qquad Z_0=\frac{L}{RC}.$$

Odpowiedź: $f_0=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{L}\right)^2},\qquad Z_0=\dfrac{L}{RC}.$

Zadanie 4.20

Dla obwodu z rysunku 4.19 wyznaczyć częstotliwość rezonansową f_0 i impedancję przy rezonansie Z_0.

Rys. 4.19

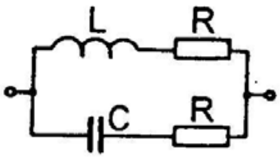


Odpowiedź: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC-(RC)^2}}$, $Z_0 = \dfrac{L}{RC}$.

Zadanie 4.21

Dla obwodu z rysunku 4.20 wyznaczyć częstotliwość rezonansową f_0 i impedancję przy rezonansie Z_0.

Rys. 4.20

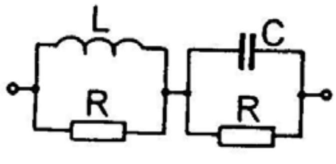


Odpowiedź: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $Z_0 = \dfrac{R}{2} + \dfrac{L}{2RC}$.

Zadanie 4.22

Dla obwodu z rysunku 4.21 wyznaczyć częstotliwość rezonansową f_0 i impedancję przy rezonansie Z_0.

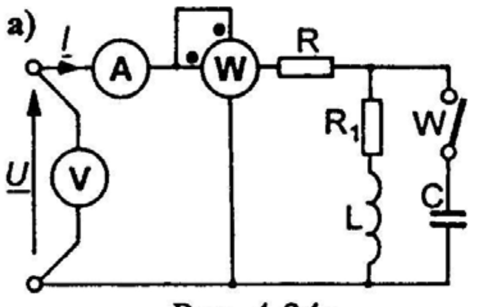
Rys. 4.21



Odpowiedź: $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, $Z_0 = \dfrac{2R\dfrac{L}{C}}{R^2 + \dfrac{L}{C}}$.

Zadanie 4.25

W obwodzie przedstawionym na rysunku 4.24a o danych R_1=60Ω, R=20Ω zmierzono U=500V, P=2000W, f=50Hz. Obliczyć prąd I, a następnie dobrać tak pojemność kondensatora C, aby po jego włączeniu współczynnik mocy całego układu był równy jedności. Wyznaczyć prąd po zamknięciu wyłącznika oraz moc P_1 pobraną przy zamkniętym wyłączniku.



Rys. 4.24a

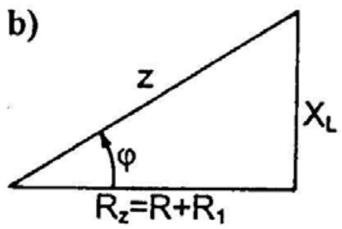
Rozwiązanie: Przed zamknięciem wyłącznika

$$P = R_z I^2,$$

gdzie: $R_z = R + R_1 = 20 + 60 = 80\Omega$, $\quad I = \sqrt{\frac{P}{R_z}} = \sqrt{\frac{2000}{80}} = 5\text{A}$,

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{500}{5} = 100\Omega.$$

Korzystając z trójkąta impedancji, rysunek 4.24b



Rys. 4.24b

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R_z^2} = \sqrt{10000 - 6400} = 60\Omega.$$

Po zamknięciu wyłącznika $\cos\varphi = 1$. W układzie wystąpi rezonans równoległy. $Im\underline{Y}$=0 (dla gałęzi równoległych).

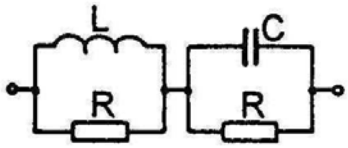
$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + j\omega C,$$

$$\underline{Y} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right),$$

$$\mathrm{Im}\underline{Y} = 0, \quad \text{gdy} \quad \omega C - \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = 0,$$

Zadanie 4.23

Obliczyć rezystancję R dla obwodu z rysunku 4.22, dla której rezonans występuje przy dowolnej częstotliwości.



Rys. 4.22

$$\underline{Z}_1 = \frac{jX_L R}{R + jX_L} = \frac{jX_L R(R - jX_L)}{R^2 + X_L^2} = \frac{RX_L^2 + jX_L R^2}{R^2 + X_L^2},$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{-jX_C R}{R - jX_C} = \frac{-jX_C R(R + jX_C)}{R^2 + X_C^2} = \frac{RX_C^2 - jX_C R^2}{R^2 + X_C^2},$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2,$$

$$\operatorname{Im}\underline{Z} = \frac{X_L R^2}{R^2 + X_L^2} - \frac{X_C R^2}{R^2 + X_C^2} = \frac{X_L R^2\left(R^2 + X_C^2\right) - X_C R^2\left(R^2 + X_L^2\right)}{\left(R^2 + X_L^2\right)\left(R^2 + X_C^2\right)},$$

$$\operatorname{Im}\underline{Z} = 0 \quad gdy \quad X_L\left(R^2 + X_C^2\right) - X_C\left(R^2 + X_L^2\right) = 0,$$

$$X_L\left(R^2 + X_C^2\right) = X_C\left(R^2 + X_L^2\right),$$

$$R^2(X_L - X_C) = X_C X_L^2 - X_L X_C^2,$$

$$R^2(X_L - X_C) = (X_L - X_C)X_L X_C,$$

$$R^2 = X_L X_C, \qquad R = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Odpowiedź: Dla $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ rezonans szeregowy (napięć) występuje dla każdej częstotliwości.

$$C = \frac{X_L}{\omega\left(R_1^2 + X_L^2\right)} = \frac{60}{2\pi \cdot 50 \cdot \left(60^2 + 60^2\right)} = 26{,}54\mu\text{F}.$$

Po zamknięciu wyłącznika

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \qquad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 26{,}54 \cdot 10^{-6}} = 120\Omega,$$

$$\underline{Z} = R + \frac{(R_1 + jX_L)(-jX_C)}{R_1 + jX_L - jX_C} = 20 + \frac{(60 + j60)(-j120)}{60 + j60 - j120} = 20 + 120 = 140\Omega,$$

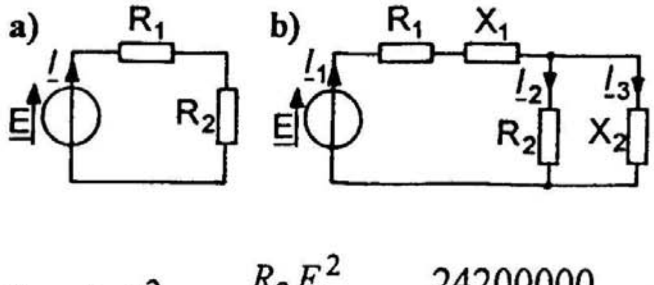
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{500}{140} = 3{,}57\text{A},$$

$$P_1 = UI\cos\varphi = 500 \cdot 3{,}57 \cdot 1 = 1785\text{W}.$$

Odpowiedź: Przed zamknięciem wyłącznika I=5A, Pojemność C=26,54μF.
Po zamknięciu wyłącznika I=3,57A, P_1=1785W.

Zadanie 4.26

Do źródła o napięciu E=220V i rezystancji wewnętrznej R_1=100Ω ma być przyłączony odbiornik o rezystancji R_2=500Ω. Obliczyć moc P_1 odbiornika przy bezpośrednim jego włączeniu do źródła rysunek 4.25a. W celu powiększenia mocy odbiornika zastosowano układ podany na rysunku 4.25b. Dobrać tak parametry X_1, X_2, aby uzyskać maksimum mocy odbiornika. Obliczyć moc P. Obliczyć prądy i wykonać wykres w stanie dopasowania.



Rys. 4.25

Rozwiązanie:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}, \qquad P_1 = R_2 I^2 = \frac{R_2 E^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{24200000}{360000} = 67{,}22\text{W}.$$

Dla układu z rysunku b)

$$\underline{Z} = R_1 + jX_1 + \frac{R_2 jX_2}{R_2 + jX_2} = R_1 + jX_1 + \frac{jR_2^2 X_2 + R_2 X_2^2}{R_2^2 + X_2^2},$$

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{R_2 X_2^2}{R_2^2 + X_2^2} + j\left(X_1 + \frac{R_2^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2}\right).$$

Uwzględniając warunek dopasowania $\underline{Z}=2R_1$

$$\frac{R_2 X_2^2}{R_2^2 + X_2^2} = R_1 \qquad \text{i} \qquad X_1 + \frac{R_2^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} = 0,$$

$$R_2 X_2^2 = R_1 X_2^2 + R_1 R_2^2, \qquad X_2^2 (R_2 - R_1) = R_1 R_2^2, \qquad X_2^2 = \frac{R_1 R_2^2}{R_2 - R_1},$$

$$X_2 = \pm R_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2 - R_1}} = \pm 500 \sqrt{\frac{100}{400}} = \pm 250\Omega,$$

$$X_1 = -\frac{R_2^2 X_2}{R_2^2 + X_2^2} = \mp \frac{250000 \cdot 250}{250000 + 62500} = \mp \frac{62500000}{312500} = \mp 200\Omega.$$

Prądy $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ wynoszą:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R_1 + jX_1 + \dfrac{jR_2 X_2}{R_2 + jX_2}} = \frac{220}{100 - j200 + \dfrac{j500 \cdot 250}{500 + j250}} =$$

$$= \frac{220}{100 - j200 + 100 + j200} = \frac{220}{200} = 1{,}1\text{A},$$

przy czym podstawiono odpowiednio X_1=-200Ω, X_2=250Ω lub X_1=200 i X_2=-250Ω.

Z drugiego prawa Kirchhoffa:

$$\underline{E} = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2, \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{E} - (R_1 + jX_1)\underline{I}_1}{R_2},$$

dla X_1=-200Ω X_2=250Ω,

$$\underline{I}_2 = \frac{220 - (100 - j200)1{,}1}{500} = \frac{110 + j220}{500} = (0{,}22 + j0{,}44)\text{A},$$

dla X_1=200Ω, X_2=-250Ω,

$$\underline{I}_2 = \frac{220-(100+j200)1,1}{500} = \frac{110-j220}{500} = (0,22-j0,44)\text{A}.$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffa:

dla X_1=-200Ω, X_2=250Ω

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2, \qquad \underline{I}_3 = 1,1-(0,22+j0,44) = (0,88-j0,44)\text{A},$$

dla X_1=200Ω, X_2=-250Ω,

$$I_3 = 1,1-(0,22-j0,44) = (0,88+j0,44)\text{A}.$$

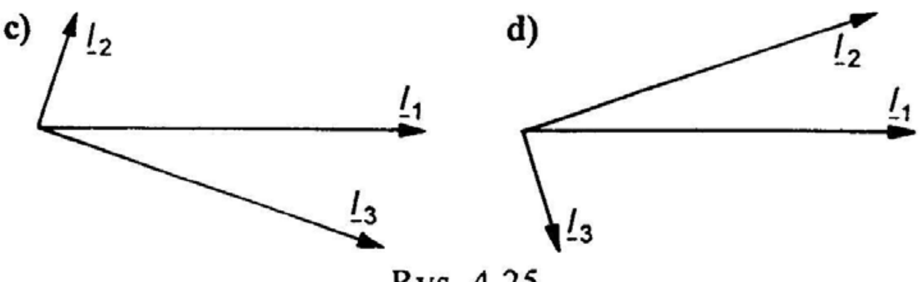
Maksymalna moc (dla stanu dopasowania) wynosi:

$$P = R_2 I_2^2 = 500\left(\sqrt{0,22^2+0,44^2}\right)^2 = 500\cdot 0,242 = 121\text{W}.$$

Wykresy w stanie dopasowania przedstawiają rysunki 4.25c, d

dla $\underline{I}_1 = 1,1\text{A}$, $\underline{I}_2 = (0,22+j0,44)\text{A}$, dla $\underline{I}_1 = 1,1\text{A}$, $\underline{I}_2 = (0,22-j0,44)\text{A}$,

$\underline{I}_3 = (0,88-j0,44)\text{A}$, $\underline{I}_3 = (0,88+j0,44)\text{A}$.



Rys. 4.25

Odpowiedź: P_1=67,22W, X_1=±200Ω, X_2=±250Ω, P=121W,
gdy X_1>0, to X_2<0 i na odwrót.

Zadanie 4.27

Jaką największą moc można przesłać linią dwuprzewodową przy napięciu skutecznym U=500V, f=50Hz i współczynniku mocy:
a) cosφ=1, b) cosφ=0,8. Jakie wystąpią w obu przypadkach spadki napięć?

Dane: przekrój S=70mm^2 Al, długość l=300m, reaktancja jednostkowa linii X_0=0,75Ω/km. Przyjąć konduktywność materiału przewodowego γ=34 Sm/mm^2. Dopuszczalna strata mocy ΔP%=4%.

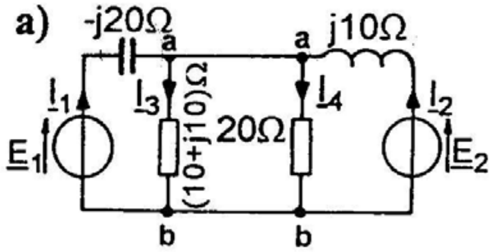
Odpowiedź: a) P=40kW, ΔU%=4%, b) P=25,6kW, ΔU%=4,3%.

Zadanie 4.28

W obwodzie przedstawionym na rysunku 4.26a wyznaczyć prądy, stosując:
a) metodę potencjałów węzłowych,
b) metodę prądów oczkowych.

Dane: $\underline{E}_1$=90V; $\underline{E}_2$=(45+j60)V; $\underline{Z}_1$=-j20Ω; $\underline{Z}_2$=j10Ω; $\underline{Z}_3$=(10+j10)Ω; $\underline{Z}_4$=20Ω.

Rys. 4.26a



Rozwiązanie:
a)

$$\underline{V}_a(\underline{Y}_1+\underline{Y}_3+\underline{Y}_4+\underline{Y}_2)=\underline{E}_1\underline{Y}_1+\underline{E}_2\underline{Y}_2,$$

$$\underline{V}_a(j0{,}05+0{,}05-j0{,}05+0{,}05-j0{,}1)=j4{,}5-j4{,}5+6,$$

$$\underline{V}_a=\frac{6}{0{,}1-j0{,}1}=(30+j30)\text{V},$$

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{E}_1-\underline{V}_a}{\underline{Z}_1}=\frac{90-30-j30}{-j20}=\frac{60-j30}{-j20}=(1{,}5+j3)\text{A},$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{E}_2-\underline{V}_a}{\underline{Z}_2}=\frac{45+j60-30-j30}{j10}=\frac{15+j30}{j10}=(3-j1{,}5)\text{ A},$$

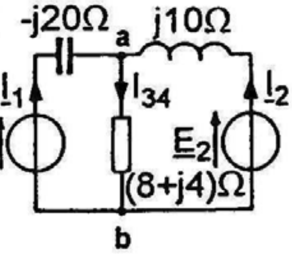
$$\underline{I}_3=\frac{\underline{V}_a}{\underline{Z}_3}=\frac{30+j30}{10+j10}=3\text{A},\qquad \underline{I}_4=\frac{\underline{V}_a}{\underline{Z}_4}=\frac{30+j30}{20}=(1{,}5+j1{,}5)\text{A}.$$

Sprawdzenie:

$$\underline{I}_1-\underline{I}_3-\underline{I}_4+\underline{I}_2=1{,}5+j3-3-1{,}5-j1{,}5+3-j1{,}5=0.$$

b) Dla metody prądów oczkowych gałęzie z impedancjami $\underline{Z}_3$ i $\underline{Z}_4$ zastąpione zostaną gałęzią z impedancją $\underline{Z}_{ab}$ rysunek 4.26b

b)



Rys. 4.26b

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{20(10+j10)}{30+j10} = (8+j4)\Omega,$$

$$\begin{bmatrix} 8-j16 & 8+j4 \\ 8+j4 & 8+j14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 45+j60 \end{bmatrix}.$$

Powyższy układ równań typu $\underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}$ zostanie zapisany w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} A_R & -A_I \\ A_I & A_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ x_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_R \\ b_I \end{bmatrix}.$$

Indeksy R oznaczają części rzeczywiste, a I części urojone.

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 16 & -4 \\ 8 & 8 & -4 & -14 \\ -16 & 4 & 8 & 8 \\ 4 & 14 & 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1R} \\ I_{2R} \\ I_{1I} \\ I_{2I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 45 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Kolejne kroki przedstawiają sposób obliczania macierzy $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 8 & 8 & -16 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 14 \\ 16 & -4 & 8 & 8 \\ -4 & -14 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 800 & -1600 & -4000 & 1600 \\ -1600 & 3200 & 1600 & 3200 \\ 4000 & -1600 & 800 & -1600 \\ -1600 & -3200 & -1600 & 3200 \end{bmatrix},$$

$$\det A = 64000$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{640} & -\frac{16}{640} & -\frac{40}{640} & \frac{16}{640} \\ -\frac{16}{640} & \frac{32}{640} & \frac{16}{640} & \frac{32}{640} \\ \frac{40}{640} & -\frac{16}{640} & \frac{8}{640} & -\frac{16}{640} \\ -\frac{16}{640} & -\frac{32}{640} & -\frac{16}{640} & \frac{32}{640} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0125 & -0{,}0250 & -0{,}0625 & 0{,}0250 \\ -0{,}0250 & 0{,}0500 & 0{,}0250 & 0{,}0500 \\ 0{,}0625 & -0{,}0250 & 0{,}0125 & -0{,}0250 \\ -0{,}0250 & -0{,}0500 & -0{,}0250 & 0{,}0500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 \\ 45 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|l} 1{,}5 & I_{1R} \\ 3 & I_{2R} \\ 3 & I_{1I} \\ -1{,}5 & I_{2I} \end{array}.$$

Wyniki są zgodne z uzyskanymi poprzednio z metody potencjałów węzłowych

$$\underline{I}_{34} = \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (4{,}5 + j1{,}5)\text{A}.$$

Na zakończenie obliczone zostaną wartości skuteczne prądów.

$$I_1 = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{11{,}25} = 3{,}35\text{A}, \quad I_2 = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2} = 3{,}35\text{A},$$

$$I_3 = 3\text{A}, \quad I_4 = 1{,}5\sqrt{2} = 2{,}12\text{A},$$

Odpowiedź: $\underline{I}_1=(1{,}5+j3)$A; $\underline{I}_2=(3-j1{,}5)$A; $\underline{I}_3=3$A; $\underline{I}_4=(1{,}5+j1{,}5)$A;
$I_1=3{,}35$A; $I_2=3{,}35$A; $I_3=3$A; $I_4=2{,}12$A.

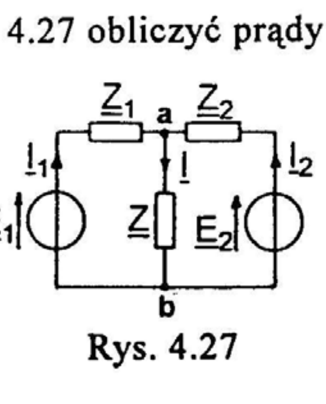
Zadanie 4.29

W obwodzie przedstawionym na rysunku 4.27 obliczyć prądy stosując metodę potencjałów węzłowych.

Dane: $\underline{E}_1=(120-j50)$V; $\underline{E}_2=125$V;

$\underline{Z}_1=(2+j1)\Omega$; $\underline{Z}_2=(2+j11)\Omega$;

$\underline{Z}=(24+j7)\Omega$.



Rys. 4.27

Rozwiązanie: $\underline{V}_a(\underline{Y}_1+\underline{Y}+\underline{Y}_2)=\underline{E}_1\underline{Y}_1+\underline{E}_2\underline{Y}_2$,

$$\underline{V}_a\left(\frac{2-j1}{5}+\frac{24-j7}{625}+\frac{2-j11}{125}\right)=(120-j50)\frac{2-j1}{5}+125\frac{2-j11}{125},$$

$$\underline{V}_a\left(\frac{250-j125+24-j7+10-j55}{625}\right)=$$

$$=\frac{(120-j50)(250-j125)+125(10-j55)}{625}$$

$$\underline{V}_a(284-j187)=25000-j34375,$$

$$\underline{V}_a=\frac{25000-j34375}{284-j187}=\frac{(25000-j34375)(284+j187)}{115625}=$$

$$=\frac{13528125-j5087500}{115625}=(117-j44)\text{V},$$

$$U_{ab}=\sqrt{117^2+44^2}=\sqrt{13689+1936}=\sqrt{15625}=125\text{V},$$

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{E}_1-\underline{V}_a}{\underline{Z}_1}=\frac{120-j50-117+j44}{2+j1}=\frac{3-j6}{2+j1}=\frac{(3-j6)(2-j1)}{5}=$$

$$=\frac{6-6-j3-j12}{5}=-j3\text{A},$$

$$\underline{I}=\frac{\underline{V}_a}{\underline{Z}}=\frac{117-j44}{24+j7}=\frac{(117-j44)(24-j7)}{625}=\frac{2500-j1875}{625}=(4-j3)\text{A},$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{E}_2-\underline{V}_a}{\underline{Z}_2}=\frac{125-117+j44}{2+j11}=\frac{(8+j44)(2-j11)}{125}=\frac{500}{125}=4\text{A},$$

$$I_1=3\text{A};\qquad I=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5\text{A};\qquad I_2=4\text{A},$$

Odpowiedź: $\underline{V}_a$=(117-j44)V; U_{ab}=125V; $\underline{I}_1$=-j3A; $\underline{I}$=(4-j3)A; $\underline{I}_2$=4A; I_1=3A; I=5A; I_2=4A.

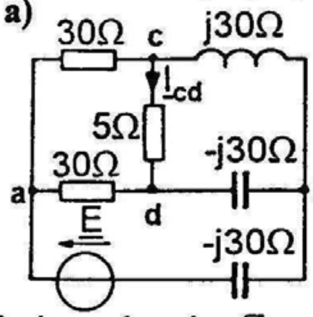
Zadanie 4.30

Rozwiązać zadanie 4.29 stosując metodę prądów oczkowych i postępując podobnie jak w zadaniu 4.28.

Zadanie 4.31

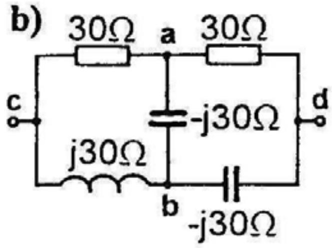
W obwodzie przedstawionym na rysunku 4.28a obliczyć prąd w gałęzi c-d stosując twierdzenie Thevenina.

Dane: $\underline{E}$=(150-j150)V, a rezystancje i reaktancje zaznaczono na rysunku.



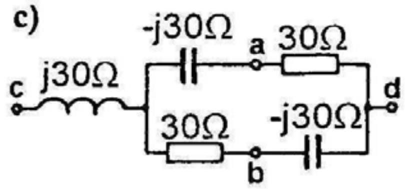
Rys. 4.28a

Rozwiązanie: Na początku wyznaczona zostanie impedancja $\underline{Z}_0$ widziana z zacisków c-d po usunięciu gałęzi z opornością R=5Ω i zwarciu źródła napięcia. Odpowiedni schemat przedstawia rysunek 4.28b



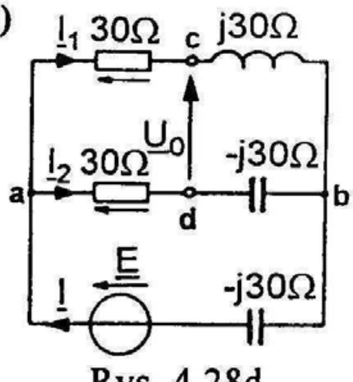
Rys. 4.28b

Trójkąt impedancji **abc** zostanie zamieniony na równoważną gwiazdę jak na rysunku 4.28c



Rys. 4.28c

$$\underline{Z}_0 = j30 - j15 + 15 = (15 + j15)\Omega.$$



Rys. 4.28d

Rysunek 4.28d przedstawia schemat, na podstawie którego obliczono napięcie $\underline{U}_0$.

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{150 - j150}{30 - j30} = \frac{15\sqrt{2}e^{-j45^\circ}}{3\sqrt{2}\,e^{-j45^\circ}} = 5\text{A},$$

gdzie $\underline{Z}$ jest impedancją na zaciskach źródła.

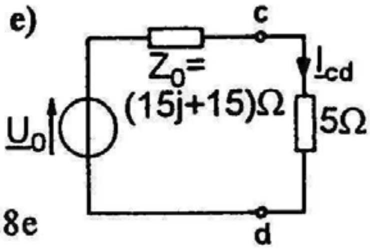
Zgodnie z regułą dzielnika prądu

$$\underline{I}_1 = (2{,}5 - j2{,}5)\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_2 = (2{,}5 + j2{,}5)\mathrm{A},$$

$$\underline{U}_0 = 30\underline{I}_2 - 30\underline{I}_1 = j150\mathrm{V}.$$

Ostatecznie prąd $\underline{I}_{cd}$ obliczony zostanie na podstawie schematu z rysunku 4.28e.



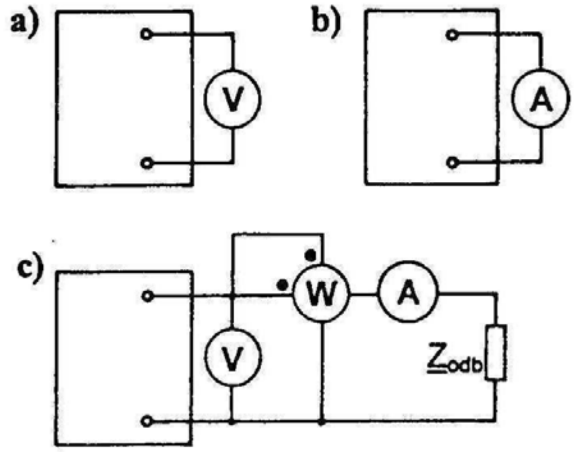
Rys. 4.28e

$$\underline{I}_{cd} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0 + 5\Omega} = \frac{j150}{20 + j15} = (3{,}6 + j4{,}8)\mathrm{A}, \qquad I_{cd} = 6\mathrm{A}.$$

Odpowiedź: $\underline{I}_{cd}=(3{,}6+j4{,}8)\mathrm{A}$, $I_{cd}=6\mathrm{A}$.

Zadanie 4.32

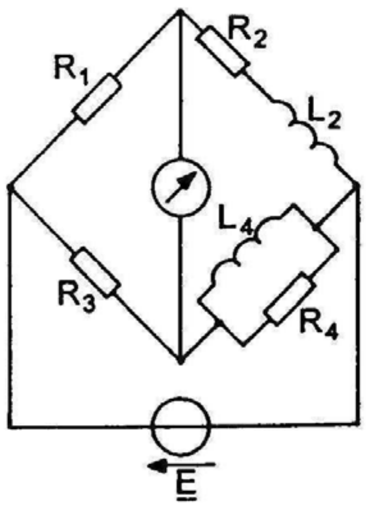
W dwójniku źródłowym zmierzono: napięcie w stanie jałowym $U_0=240\mathrm{V}$ (rysunek 4.29a), prąd zwarcia $I_z=34{,}29\mathrm{A}$ (rysunek 4.29b) i przy obciążeniu mocą $P=2400\mathrm{W}$ ($\varphi>0$): napięcie $U=250\mathrm{V}$, prąd $I=10\mathrm{A}$ (rysunek 4.29c). Wyznaczyć parametry $\underline{Z}$ odbiornika i impedancję wewnętrzną $\underline{Z}_w$ dwójnika.



Rys. 4.29

Odpowiedź: $\underline{Z}=(24+j7)\Omega$, $\underline{Z}_w=-j7\Omega$.

Zadanie 4.33



Wykazać, że w pokazanym na rysunku 4.30 mostku, stosowanym do pośredniego pomiaru częstotliwości, zachodzi równowaga, gdy

$$\omega = \sqrt{\frac{R_2 R_4}{L_2 L_4}}.$$

Rys. 4.30

Wskazówka: zastosować warunek równowagi mostka.

5. OBWODY SPRZĘŻONE

Zadanie 5.1

Impedancja układu szeregowego dwóch cewek sprzężonych połączonych zgodnie $\underline{Z}_z = (30 + j61)\Omega$ a w przypadku połączenia przeciwsobnego $\underline{Z}_p = (30 + j21)\Omega$. Wyznaczyć R_1, L_2, M i k jeżeli f=50Hz, R_2=10Ω, L_1=79,6mH.

Rozwiązanie: $\underline{Z}_z = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M = R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} + 2X_M)$,

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M = R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - 2X_M),$$

$$\underline{Z}_z - \underline{Z}_p = j4X_M, \quad j4X_M = j40\Omega, \quad X_M = 10\Omega,$$

$$M = \frac{X_M}{\omega} = \frac{10}{314} = 31{,}8\text{mH},$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 79{,}6 \cdot 10^{-3} = 25\Omega,$$

$$X_{L1} + X_{L2} + 2X_M = 61\Omega, \qquad X_{L2} = 61 - 25 - 20 = 16\Omega,$$

$$L_2 = \frac{X_{L2}}{\omega} = \frac{16}{314} = 51\text{mH},$$

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \qquad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{31{,}8}{\sqrt{79{,}6 \cdot 51}} = 0{,}5,$$

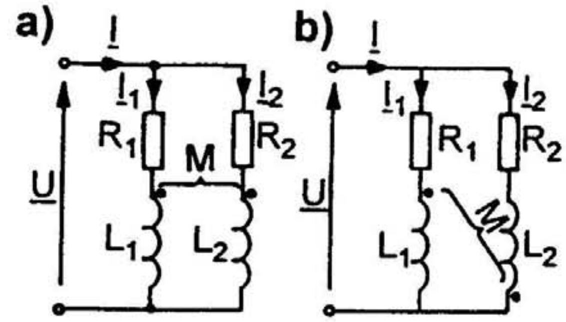
$$R_1 + R_2 = 30\Omega, \qquad R_1 = 30 - R_2 = 30 - 10 = 20\Omega.$$

Odpowiedź: R_1=20Ω, L_2=51mH, M=31,8mH, k=0,5.

Zadanie 5.2

Dwie jednakowe cewki o rezystancjach R_1=R_2=2Ω i reaktancjach ωL_1=ωL_2=10Ω połączono równolegle. Jaka jest impedancja zastępcza układu dla k=0,6, gdy cewki są połączone zgodnie rysunek 5.1a; cewki są połączone przeciwsobnie, rysunek 5.1b.

Rys. 5.1



Rozwiązanie :

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$, $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ można wyznaczyć z układu równań

$$\left.\begin{aligned} \underline{U} &= R_1\underline{I}_1 + j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2 \\ \underline{U} &= R_2\underline{I}_2 + j\omega L_2\underline{I}_2 + j\omega M\underline{I}_1 \end{aligned}\right\} \text{ dla połączenia zgodnego}$$

lub inaczej

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{U} \end{bmatrix}$$

gdzie $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_M = j\omega M$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$\underline{W} = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2, \quad \underline{W}_1 = \left(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M\right)\underline{U}, \quad \underline{W}_2 = \left(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M\right)\underline{U},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}\underline{U}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}\underline{U}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}\underline{U},$$

czyli

$$\underline{Z}_z = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M},$$

$$\underline{Z}_z = \frac{(2 + j10)(2 + j10) - (j6)^2}{2 + j10 + 2 + j10 - 2\cdot j6} = \frac{-60 + j40}{4 + j8} = \frac{(-60 + j40)(4 - j8)}{80} =$$

$$= \frac{80 + j640}{80} = (1 + j8)\Omega.$$

Dla połączenia przeciwsobnego:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_M \\ -\underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{U} \end{bmatrix}$$

$$\underline{W} = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2, \quad \underline{W}_1 = \left(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M\right)\underline{U}, \quad \underline{W}_2 = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M\right)\underline{U},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}\underline{U}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}\underline{U}, \quad I = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2},$$

czyli
$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M},$$

$$\underline{Z}_p = \frac{(2+j10)(2+j10)-(j6)^2}{2+j10+2+j10+2\cdot j6} = \frac{-60+j40}{4+j32} = \frac{(-60+j40)(4-j32)}{1040} =$$
$$= \frac{1040 + j2080}{1040} = (1 + j2)\Omega$$

Odpowiedź: a) $\underline{Z}_z = (1 + j8)\Omega, \quad \underline{Z}_p = (1 + j2)\Omega.$

Zadanie 5.3

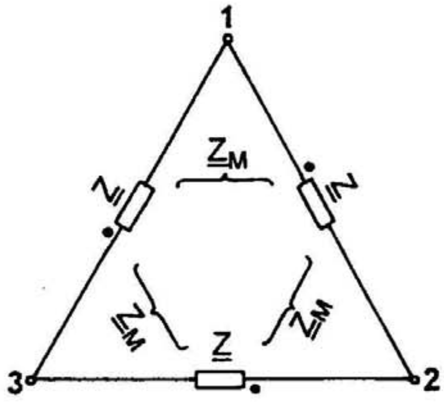
Dwie sprzężone magnetycznie cewki indukcyjne o parametrach L_1=31,8mH, L_2=63,7mH, M=27mH i pomijalnie małej rezystancji połączono równolegle i zasilano napięciem U=220V, f=50Hz. Obliczyć prądy I_1, I_2 w obu cewkach i prąd wypadkowy przy połączeniu cewek: a) zgodny, b) przeciwsobny.

Wskazówka: patrz rysunki i wyprowadzenia w poprzednim zadaniu.

Odpowiedź: a) I_1=19,8A, I_2=2,58A, I=22,38A,
b) I_1=49,1A, I_2=31,86A, I=80,96A.

Zadanie 5.4

Wyznaczyć równoważny układ zastępczy gwiazdowy i trójkątowy układu trójkątowego symetrycznego ze sprzężeniami magnetycznymi jak na rysunku 5.2.



Rys. 5.2

Dane: $\underline{Z} = 30 + j60$, $\underline{Z}_M = j15\Omega$.

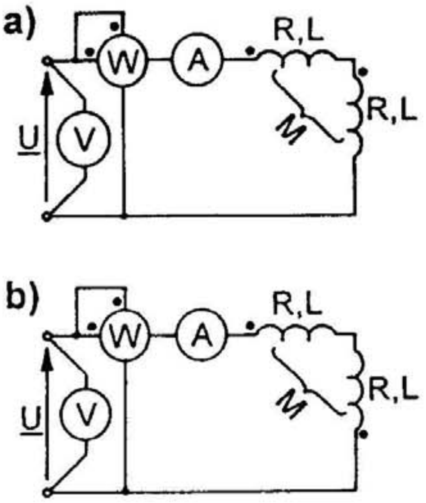
Odpowiedź: $\underline{Z}_* = (10 + j15)\Omega$,

$\underline{Z}_\Delta = (30 + j45)\Omega$.

Zadanie 5.5

Dwie jednakowe cewki indukcyjne sprzężone magnetyczne włączono na napięcie U=220V, f=50Hz w układach szeregowych: zgodnym rysunek 5.3a i przeciwsobnym rysunek 5.3b.

Zmierzono prądy i moce dla obydwu przypadków: a) zgodnym I=2,14A, P=229W, b) przeciwsobnym I=4,31A. Wyznaczyć parametry R, L każdej z cewek oraz indukcyjność wzajemną M.



Rys. 5.3

Rozwiązanie:

$$\underline{Z}_z = 2[R + j(X_L + X_M)],$$

$$Z_z = \sqrt{(2R)^2 + [2(X_L + X_M)]^2},$$

$$Z_z = \frac{220}{2,14} = 102,8\Omega, \quad P = 2RI^2, \quad 2R = \frac{P}{I^2} = \frac{229}{2,14^2} = 50\Omega,$$

$$R = 25\Omega, \quad 2(X_L + X_M) = \sqrt{Z_z^2 - (2R)^2} = \sqrt{102,8^2 - 50^2} = 89,82\Omega,$$

$$Z_p = \frac{220}{4,31} = 51,04\Omega,$$

$$2(X_L - X_M) = \sqrt{Z_p^2 - (2R)^2} = \sqrt{51,04^2 - 50^2} = \sqrt{105,08} = 10,25\Omega,$$

$$4X_M = 89,82 - 10,25 = 79,57\Omega, \qquad X_M \approx 20\Omega,$$

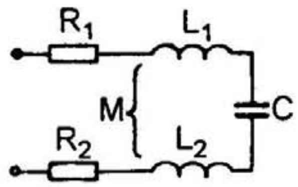
$$4X_L = 89,82 + 10,25 = 100,07\Omega, \qquad X_L = 25\Omega,$$

$$M=\frac{X_M}{\omega}=\frac{20}{314}=63{,}6\text{mH}, \qquad L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{25}{314}=79{,}6\text{mH}.$$

Odpowiedź: R=25Ω, X_L=25Ω, X_M=20Ω, L=79,6mH, M=63,6mH.

Zadanie 5.6

Obliczyć częstotliwości rezonansowe obwodu szeregowego złożonego z kondensatora o pojemności C=1μF i dwóch cewek sprzężonych o parametrach R_1=2Ω, R_2=1Ω, L_1=10mH, L_2=6mH, M=4,66mH dla zgodnego i przeciwsobnego połączenia cewek. Schemat układu przedstawia rysunek 5.4.

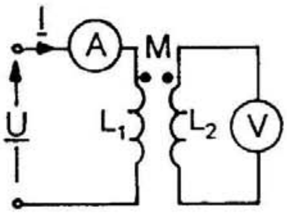


Rys.5.4

Odpowiedź: f_{0z}=1000Hz=1kHz, f_{0p}=1947Hz.

Zadanie 5.7

Uzwojenie pierwotne transformatora powietrznego zasilane jest prądem I=2A o częstotliwości f=1000Hz. Napięcie strony wtórnej w stanie jałowym wynosi 100V. Jaka jest indukcyjność wzajemna obu cewek? Schemat układu przedstawia rysunek 5.5.

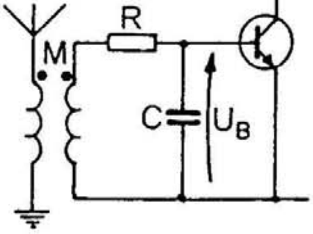


Rys.5.5

Odpowiedź: M=7,96mH.

Zadanie 5.8

Cewka antenowa odbiornika jest sprzężona z cewką obwodu wejściowego, jak pokazano na rysunku 5.6. Dane są: indukcyjność wzajemna obu cewek M=25μH oraz R=10Ω, C=250pF, wartość skuteczna prądu w cewce antenowej I_{ant}=1μA. Obliczyć napięcie na bazie tranzystora jeżeli obwód jest dostrojony do rezonansu.



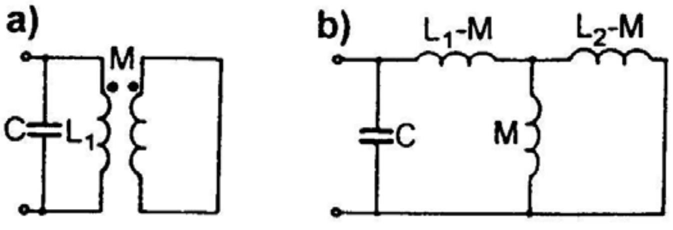
Rys.5.6

Odpowiedź: U_B=10mV.

Zadanie 5.9

Wyznaczyć częstotliwość rezonansową dwójnika pokazanego na rysunku 5.7a.

Dane: L_1=70,4mH, C=1μF, k=0,8.



Rys.5.7

Rozwiązanie:

Rysunek 5.7b przedstawia dwójnik z rysunku 5.7a po eliminacji sprzężenia magnetycznego. Dla rezonansu równoległego (prądów) susceptancja części obwodu złożona z indukcyjności powinna być równa susceptancji pojemnościowej.

$$\underline{X}_L = j\left(X_{L1} - X_M\right) + \frac{jX_M j\left(X_{L2} - X_M\right)}{j\left(X_M + X_{L2} - X_M\right)} =$$

$$= j\left(X_{L1} - X_M\right) + j\left(X_M - \frac{X_M^2}{X_{L2}}\right) =$$

$$= j\frac{X_{L1}X_{L2} - X_M X_{L2} + X_M X_{L2} - X_M^2}{X_{L2}} =$$

$$= j\frac{X_{L1}X_{L2} - X_M^2}{X_{L2}}.$$

Po podstawieniu $M = k\sqrt{L_1 L_2}$, $M^2 = k^2 L_1 L_2$ i $X_M^2 = k^2 X_{L1} X_{L2}$,

$$\underline{X}_L = j\frac{X_{L1}X_{L2} - k^2 X_{L1}X_{L2}}{X_{L2}} = jX_{L1}\left(1 - k^2\right),$$

$$X_L = X_{L1}\left(1 - k^2\right), \quad X_c = \frac{1}{\omega C}, \quad B_L = \frac{1}{\omega L_1\left(1 - k^2\right)}, \quad B_c = \omega C.$$

Rezonans równoległy zachodzi dla warunku

$$B_C = B_L,$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C\left(1-k^2\right)}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C\left(1-k^2\right)}},$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C\left(1-k^2\right)}}.$$

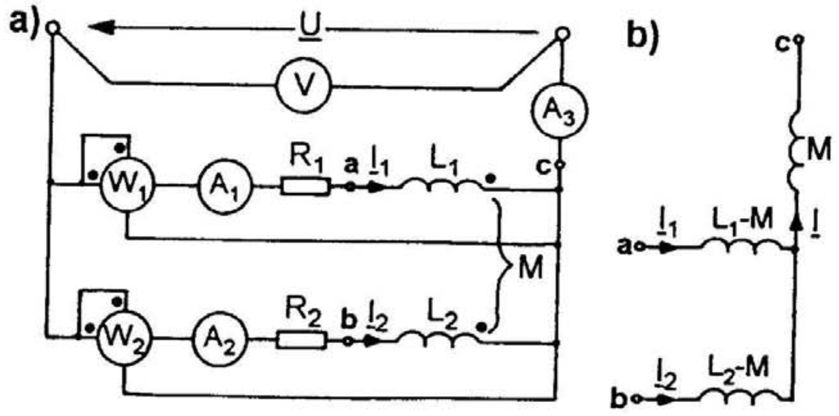
Po podstawieniu danych

$$f_0 = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{70{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 10^{-6}\left(1-0{,}8^2\right)}} = 1\text{kHz}.$$

Odpowiedź: f_0=1kHz.

Zadanie 5.10

W obwodzie przedstawionym na rysunku 5.8a prąd $\underline{I}_2 = I_2 = 6\text{A}$. Parametry obwodu są następujące R_1=15Ω, R_2=25Ω, X_{L1}=30Ω, X_{L2}=10Ω, X_M=10Ω. Wyznaczyć wskazania woltomierza, amperomierzy A_1 i A_3, watomierzy W_1 i W_2. Przeprowadzić bilans mocy, porównać wskazania watomierzy z mocami pobieranymi przez poszczególne oporniki, wyznaczyć moce przekazywane z jednej gałęzi do drugiej przez sprzężenie magnetyczne.



Rys.5.8

Rozwiązanie:

Rysunek 5.8b przedstawia fragment obwodu pomiędzy zaciskami a, b, c po eliminacji sprzężeń. Zgodnie z regułą dzielnika prądu

$$\underline{I}_2 = \underline{I}\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \qquad \text{czyli} \qquad \underline{I} = \underline{I}_2\frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \frac{R_1 + R_2 + j\left(X_{L1} + X_{L2} - 2X_M\right)}{R_1 + j\left(X_{L1} - X_M\right)} = 6\frac{15 + 25 + j(30 + 10 - 20)}{15 + j(30 - 10)} =$$

$$= 6\frac{40 + j20}{15 + j20} = \frac{240 + j120}{15 + j20} = \frac{(240 + j120)(15 - j20)}{625} =$$

$$= \frac{3600 + 2400 + j(1800 - 4800)}{625} = (9{,}6 - j4{,}8)\mathrm{A},$$

$$I = \sqrt{9{,}6^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{115{,}2} = 10{,}73\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}, \qquad \underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2 = 9{,}6 - j4{,}8 - 6 = (3{,}6 - j4{,}8)\mathrm{A},$$

$$I_1 = \sqrt{3{,}6^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{36} = 6\mathrm{A},$$

$$\underline{U} = \left[R_2 + j\left(X_{L2} - X_M\right)\right]\underline{I}_2 + jX_M\underline{I} = 25 \cdot 6 + j10(9{,}6 - j4{,}8) =$$
$$= (198 + j96)\mathrm{V},$$

$$U = \sqrt{198^2 + 96^2} = \sqrt{48420} = 220\mathrm{V}.$$

Watomierze wskazują następujące moce:

W_1, $\quad P_1 = \mathrm{Re}\underline{S}_1 = \mathrm{Re}\underline{U}\underline{I}_1^* = (198 + j96)(3{,}6 + j4{,}8) =$
$\quad = 712{,}8 + (-460{,}8) = 252\mathrm{W},$

W_2, $\quad P_2 = \mathrm{Re}\underline{S}_2 = \mathrm{Re}\underline{U}\underline{I}_2^* = (198 + j96) \cdot 6 = 1188\mathrm{W}.$

Moce wydzielane na opornikach poszczególnych gałęzi:

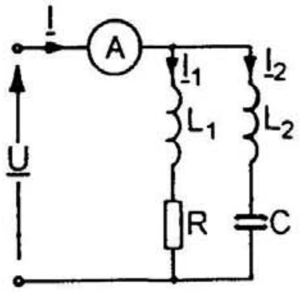
$$R_1 I_1^2 = 15 \cdot 6^2 = 15 \cdot 36 = 540\mathrm{W}, \qquad R_2 I_2^2 = 25 \cdot 6^2 = 25 \cdot 36 = 900\mathrm{W},$$

$$P_1 + P_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2, \qquad jX_M \underline{I}_1 \underline{I}_2^* = j10 \cdot (3{,}6 - j4{,}8)6 = 288 + j216,$$

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = (3{,}6 - j4{,}8)\mathrm{A}$, $I_1 = 6\mathrm{A}$, $\underline{I} = (9{,}6 - j4{,}8)\mathrm{A}$,
$I = 10{,}73\mathrm{A}$, $\underline{U} = (198 + j96)\mathrm{V}$, $U = 220\mathrm{V}$, $P_1 = 252\mathrm{W}$,
$R_1 I_1^2 = 540\mathrm{W}$, $P_2 = 1188\mathrm{W}$, $R_2 I_2^2 = 900\mathrm{W}$,
$P_1 + P_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$, $jX_M \underline{I}_1 \underline{I}_2^* = 288 + j216$,
gałąź 2 przekazuje gałęzi 1 moc 288W.

Zadanie 5.11

Wartość zespolona prądu dopływającego do układu dwóch gałęzi równoległych przedstawionego na rysunku 5.9 $\underline{I} = j5\text{A}$.
Wyznaczyć prądy $\underline{I}_1, \underline{I}_2$, napięcie U oraz moc czynną, bierną i pozorną pobieraną z sieci.



Rys.5.9

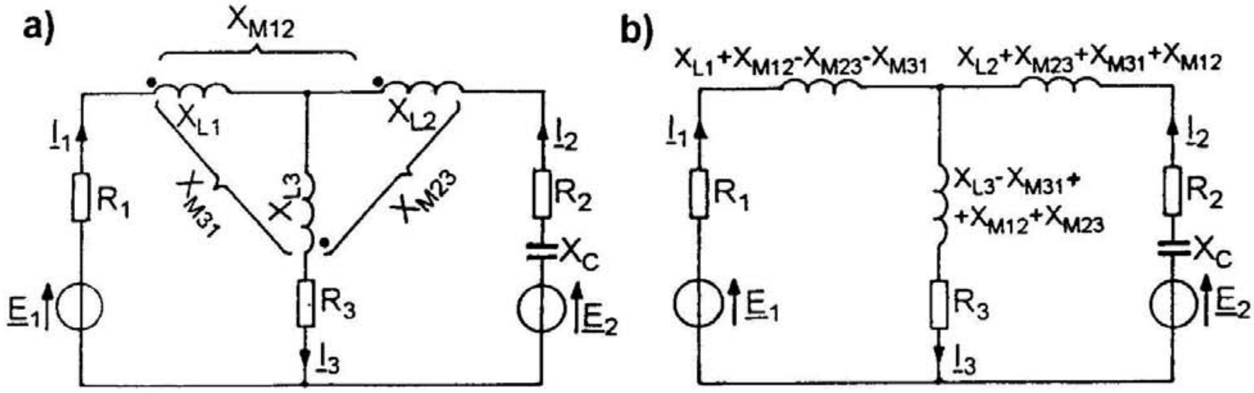
Dane: R=18Ω, X_{L1}=36Ω, X_{L2}=22Ω, X_c=40Ω, X_M=12Ω.

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = (7{,}5 + j2{,}5)\text{A}$, $\underline{I}_2 = (-7{,}5 + j2{,}5)\text{A}$, U=225,5V, P=1125W, Q=-75var, S=1127,5VA.

Zadanie 5.12

W układzie przedstawionym na rysunku 5.10a wyznaczyć rozpływ prądów.

Dane: $\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = 200\text{V}$, $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = R_3 = \frac{1}{2}R_1 = 40\Omega$, $X_{L1} = 20\Omega$, X_{L2}=30Ω, X_{L3}=45Ω, X_{M12}=20Ω, X_{M23}=30Ω, X_{M31}=25Ω, X_c=75Ω.



Rys. 5.10

Rozwiązanie: Rysunek 5.10b przedstawia układ z rysunku 5.10a po usunięciu sprzężeń zgodnie z regułami ich eliminacji. Impedancje poszczególnych gałęzi wynoszą odpowiednio:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\left(X_{L1} + X_{M12} - X_{M23} - X_{M31}\right) =$$

$$= 80 + j(20 + 20 - 30 - 25) = (80 - j15)\Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\left(X_{L2} + X_{M23} + X_{M31} + X_{M12} - X_c\right) =$$
$$= 40 + j(30 + 30 + 25 + 20 - 75) = (40 + j30)\Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\left(X_{L3} - X_{M31} - X_{M12} + X_{M23}\right) =$$
$$= 40 + j(45 - 25 - 20 + 30) = (40 + j30)\Omega,$$

Równania oczkowe

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 120 + \mathrm{j}15 & 40 + \mathrm{j}30 \\ 40 + \mathrm{j}30 & 80 + \mathrm{j}60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W} = 9600 - 900 + j(7200 + 1200) - 1600 + 900 - j(1200 + 1200) =$$
$$= 8000 + j6000,$$

$$\underline{W}_1 = 200(80 + j60) - 200(40 + j30) = 8000 + j6000,$$

$$\underline{W}_2 = 200(120 + j15) - 200(40 + j30) = 16000 - j3000,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{W}_1}{\underline{W}} = \frac{8000 + j6000}{8000 + j6000} = 1\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{W}_2}{\underline{W}} = \frac{16000 - j3000}{8000 + j6000} = \frac{16 - j3}{8 + j6} = \frac{(16 - j3)(8 - j6)}{100} =$$
$$= \frac{110 - j120}{100} = (1{,}1 - j1{,}2)\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1 + 1{,}1 - j1{,}2 = (2{,}1 - j1{,}2)\mathrm{A},$$

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = 1\mathrm{A}$, $\underline{I}_2 = (1{,}1 - j1{,}2)\mathrm{A}$, $\underline{I}_3 = (2{,}1 - j1{,}2)\mathrm{A}$.

Zadanie 5.13

W obwodzie przedstawionym na rysunku 5.11 obliczyć rozpływ prądów.

Dane: $\underline{E}_1 = (56 - j148)\text{V}$,

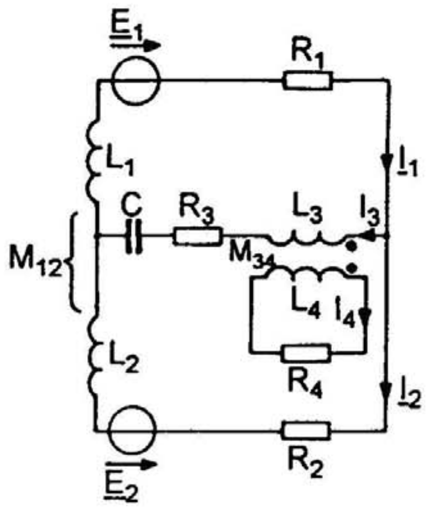
$\underline{E}_2 = (16 - j28)$, R_1=2Ω,

R_2=6Ω, R_3=5Ω, R_4=10Ω,

X_{L1}=6Ω, X_{L2}=8Ω, X_{L3}=8Ω,

X_{L4}=10Ω, X_{M12}=X_{M34}=j5Ω,

X_c=12Ω.



Rys.5.11

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = -j8\text{A}$, $\underline{I}_2 = -8\text{A}$,

$\underline{I}_3 = (8 - j8)\text{A}$, $\underline{I}_4 = 4\text{A}$.

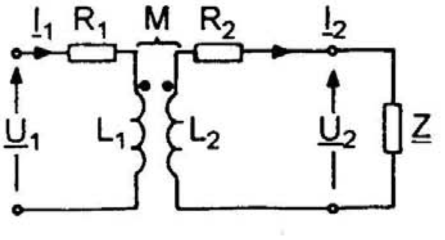
Zadanie 5.14

Wyznaczyć prądy pierwotny i wtórny oraz napięcie na zaciskach odbiornika w transformatorze bezrdzeniowym jak na rysunku 5.12. Obliczyć również moc zespoloną pobraną przez stronę pierwotną i moc zespoloną dostarczaną odbiornikowi.

Dane: R_1=40Ω, X_{L1}=400Ω, R_2=80Ω,

X_{L2}=200Ω, $\underline{Z} = (220 + j300)\Omega$,

k=0,32, $\underline{U}_1 = j220V$.



Rys.5.12

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = (0{,}56 + j0{,}07) = 0{,}56e^{j7^o}\text{A}$,

$\underline{I}_2 = (0{,}08 + j0{,}06) = 0{,}1e^{j37^o}\text{A}$,

$\underline{U}_2 = (-0{,}4 + j37{,}2) = 37{,}2e^{j91^o}\text{V}$, $\underline{S}_1 = 15{,}4 + j123{,}2$,

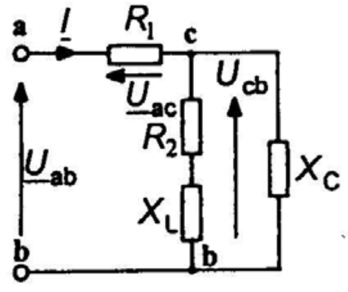
P_1=15,4W, Q_1=123,2var, $\underline{S}_2 = 2{,}2 + j3$, P_2=2,2W,

Q_2=3var. Wykonać wykres wektorowy.

Zadanie 5.15

Transformator przedstawiony na rysunku 5.13 znajduje się w stanie rezonansu zupełnego. Obliczyć prąd wejściowy $\underline{I}_1$ i wyjściowy $\underline{I}_2$ moc pobraną P_1 i przekazaną do obwodu wtórnego P_2, sprawność oraz wyznaczyć L_1 C_1, L_2, C_2 i M.

Dane: $\underline{E}_1 = E = 220\text{V}$, R_1=20Ω, R_2=5Ω, Q_1=10, Q_2=100.



Rys.5.13

Odpowiedź: $\underline{I}_1 = 5{,}5\text{A}$, $\underline{I}_2 = j11\text{A}$, $P_1 = 1210\text{W}$, $P_2 = 605\text{W}$, η= 0,50, L_1=637mH, C_1=15,92μF, L_2=1,59H, C_2=6,37μF, M=31,8mH.

6. CZWÓRNIKI I FILTRY

Tabela 6.1

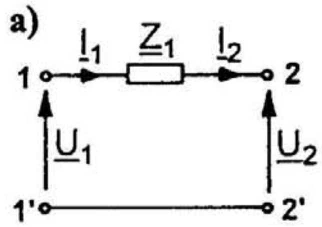
Zależności między parametrami czwórnika przy strzałkowaniu przelotowym

	$\underline{A}$	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$	$\underline{H}$
$\underline{A}$	$\begin{matrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{-\det \underline{Z}}{\underline{Z}_{21}} \\ \frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{-\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{1}{\underline{Y}_{21}} \\ -\frac{\det \underline{Y}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{21}} & \frac{\underline{H}_{11}}{\underline{A}_{21}} \\ -\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} & \frac{1}{\underline{A}_{21}} \end{matrix}$
$\underline{Z}$	$\begin{matrix} \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} & -\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{21}} \\ \frac{1}{\underline{A}_{21}} & -\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{\det \underline{Y}} & -\frac{\underline{Y}_{12}}{\det \underline{Y}} \\ -\frac{\underline{Y}_{21}}{\det \underline{Y}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{Y}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{22}} & \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{A}_{22}} \\ -\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} & \frac{1}{\underline{A}_{22}} \end{matrix}$
$\underline{Y}$	$\begin{matrix} \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} & -\frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{12}} \\ \frac{1}{\underline{A}_{12}} & -\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{Z}} & -\frac{\underline{Z}_{12}}{\det \underline{Z}} \\ -\frac{\underline{Z}_{21}}{\det \underline{Z}} & \frac{\underline{Z}_{11}}{\det \underline{Z}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{1}{\underline{H}_{11}} & -\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{A}_{11}} \\ \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} & \frac{\det \underline{H}}{\underline{A}_{11}} \end{matrix}$
$\underline{H}$	$\begin{matrix} \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} & \frac{\det \underline{A}}{\underline{A}_{22}} \\ \frac{1}{\underline{A}_{22}} & -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\det \underline{Z}}{\underline{Z}_{22}} & \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}} \\ -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}} & \frac{1}{\underline{Z}_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{\underline{Y}_{11}} & -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}} \\ \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}} & \frac{\det \underline{Y}}{\underline{Y}_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{matrix}$

Aby związki przedstawione w tabeli miały sens, odpowiednie wyrażenia w mianownikach muszą być różne od zera.

Zadanie 6.1

Dla czwórnika przedstawionego na rysunku 6.1a obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej. $\underline{Z}_1 = j10\Omega$.



Rys.6.1a

Rozwiązanie: Dla układu z rysunku 6.1a ważne są następujące równania

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2.$$

Obydwa równania można zapisać w następującej formie

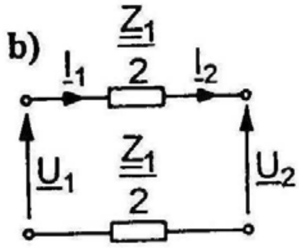
$$\underline{U}_1 = 1 \cdot \underline{U}_2 + \underline{Z}_1 \underline{I}_2, \qquad \underline{I}_1 = 0 \cdot \underline{U}_2 + 1 \cdot \underline{I}_2,$$

z której otrzymuje sie parametry łańcuchowe $\underline{A}_{11},\dots\underline{A}_{22}$.

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \underline{Z}_1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Korzystając z tabeli 6.1 otrzymuje sie elementy macierzy admitancyjnej. Ponieważ $\underline{A}_{21} = 0$ dla elementów macierzy impedancyjnej otrzymuje się wartości równe ∞ tzn. macierz impedancyjna nie istnieje. $\underline{Z}$ - nie istnieje.

Odpowiedź: $\underline{A}_{11} = 1$, $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 = j10\Omega$, $\underline{A}_{21} = 0\text{S}$, $\underline{A}_{22} = 1$, $\underline{Z}_{11}\dots\underline{Z}_{22}$ nie istnieją $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 = -j0{,}1\text{S}$, $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_1 = j0{,}1\text{S}$, $\underline{Y}_{21} = \underline{Y}_1 = -j0{,}1\text{S}$, $\underline{Y}_{22} = -\underline{Y}_1 = j0{,}1\text{S}$



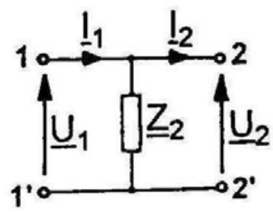
Rys. 6.1b

Uwaga: Takie samo rozwiązanie otrzymuje się dla czwórnika przedstawionego na rysunku 6.1b

Zadanie 6.2

Dla czwórnika przedstawionego na rysunku 6.2 obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej.

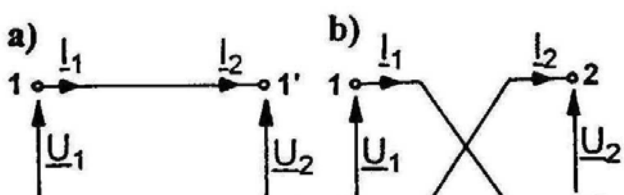
Dane: $\underline{Z}_2 = -j20\Omega$.



Rys.6.2

Odpowiedź: $\underline{A}_{11} = 1$, $\underline{A}_{12} = 0\Omega$, $\underline{A}_{21} = \underline{Y}_2 = j0{,}05S$, $\underline{A}_{22} = 1$,
$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_2 = -j20\Omega$, $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_2 = j20\Omega$,
$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_2 = -j20\Omega$, $\underline{Z}_{22} = -\underline{Z}_2 = j20\Omega$,
$\underline{Y}_{11}\dots\underline{Y}_{22}$ nie istnieją.

Zadanie 6.3



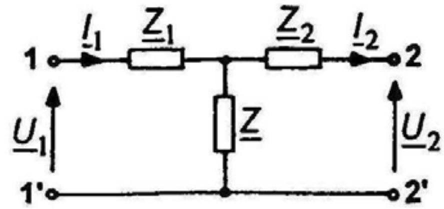
Obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej dla czwórników przedstawionych na rysunku 6.3a i b

Rys.6.3

Odpowiedź: a) $\underline{A}_{11}=1$, $\underline{A}_{12}=0\Omega$, $\underline{A}_{21}=0\mathrm{S}$, $\underline{A}_{22}=1$, b) $\underline{A}_{11}=-1$, $\underline{A}_{12}=0\Omega$, $\underline{A}_{21}=0\mathrm{S}$, $\underline{A}_{22}=-1$. Dla obydwu czwórników macierze impedancyjne i admitancyjne nie istnieją ponieważ $\underline{A}_{11}=\underline{A}_{21}=0$, porównaj zależności w tabeli 6.1.

Zadanie 6.4

Obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej dla czwórnika kształtu T przedstawionego na rysunku 6.4.
Dane: $\underline{Z}_1=j10\Omega$, $\underline{Z}_2=-j10\Omega$, $\underline{Z}=10\Omega$.



Rys.6.4

$$\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}},\quad \underline{Y}_1=\frac{1}{\underline{Z}_1},\quad \underline{Y}_2=\frac{1}{\underline{Z}_2}.$$

Odpowiedź: $\underline{A}_{11}=1+\underline{Z}_1\underline{Y}=1+j1$, $\underline{A}_{12}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y}=10\Omega$,

$\underline{A}_{21}=\underline{Y}=0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{A}_{22}=1+\underline{Z}_2\underline{Y}=1-j1$,

$\underline{Z}_{11}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2=(10+j10)\Omega$, $\underline{Z}_{12}=-\underline{Z}=-10\Omega$,

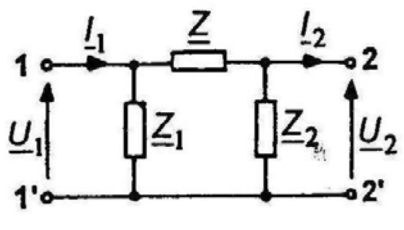
$\underline{Z}_{21}=\underline{Z}=10\Omega$, $\underline{Z}_{22}=-(\underline{Z}+\underline{Z}_2)=(-10+j10)\Omega$,

$$\underline{Y}_{11}=\frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}+\underline{Y}_2)}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}}=(0{,}1-j0{,}1)\mathrm{S},\quad \underline{Y}_{12}=\frac{-\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}}=-0{,}1\mathrm{S},$$

$$\underline{Y}_{21}=\frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}}=0{,}1\mathrm{S},\quad \underline{Y}_{22}=\frac{-\underline{Y}_2(\underline{Y}_1+\underline{Y})}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}}=(-0{,}1-j0{,}1)\mathrm{S}$$

Zadanie 6.5

Obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej dla czwórnika przedstawionego na rysunku 6.5.
Dane: $\underline{Z}_1=j10\Omega$, $\underline{Z}=10\Omega$, $\underline{Z}_2=-j10\Omega$.



Rys.6.5

$$\underline{Y}_1=\frac{1}{\underline{Z}_1},\quad \underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}},\quad \underline{Y}_2=\frac{1}{\underline{Z}_2}.$$

Odpowiedź: $\underline{A}_{11}=1+\underline{Z}\underline{Y}_2=1+j1$, $\underline{A}_{12}=\underline{Z}=10\Omega$,

$$\underline{A}_{21}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}=0{,}1\mathrm{S},\qquad \underline{A}_{22}=1+\underline{Z}\,\underline{Y}_1=1-j1,$$

$$\underline{Z}_{11}=\frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}+\underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}}=(10+j10)\Omega,\qquad \underline{Z}_{12}=\frac{-\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}}=-10\Omega,$$

$$\underline{Z}_{21}=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}}=10\Omega,,\qquad \underline{Z}_{22}=\frac{-\underline{Z}_2(\underline{Z}_1+\underline{Z})}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}}=(-10=j10)\Omega,$$

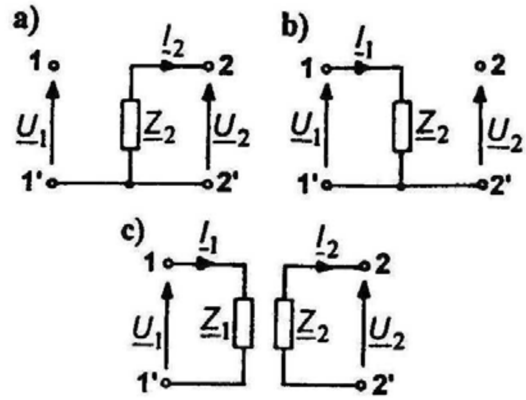
$$\underline{Y}_{11}=\underline{Y}_1+\underline{Y}=(0{,}1-j0{,}1)\mathrm{S},\qquad \underline{Y}_{12}=-\underline{Y}=-0{,}1\mathrm{S},$$

$$\underline{Y}_{21}=\underline{Y}=0{,}1\mathrm{S},\qquad \underline{Y}_{22}=-(\underline{Y}+\underline{Y}_2)=(-0{,}1-j0{,}1)\mathrm{S}.$$

Zadanie 6.6

Obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej dla czwórników przedstawionych na rysunkach 6.6a,b,c.

Dane: $\underline{Z}_1=j10\Omega$, $\underline{Z}_2=-j10\Omega$.



Rys.6.6

Odpowiedź: a) $\underline{A}_{11}=\infty$, $\underline{A}_{12}=\infty$, $\underline{A}_{21}=\underline{Y}_2=j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{A}_{22}=1$,
$\underline{Z}_{11}=\infty$, $\underline{Z}_{12}=j10\Omega$, $\underline{Z}_{21}=-j10\Omega$, $\underline{Z}_{22}=j10\Omega$,
$\underline{Y}_{11}=0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{12}=0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{21}=0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{22}=-j0{,}1\mathrm{S}$.

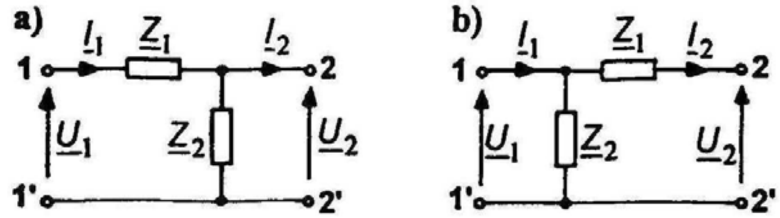
b) $\underline{A}_{11}=1$, $\underline{A}_{12}=\infty$, $\underline{A}_{21}=\underline{Y}_2=j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{A}_{22}=\infty$,
$\underline{Z}_{11}=-j10\Omega$, $\underline{Z}_{12}=j10\Omega$, $\underline{Z}_{21}=-j10\Omega$, $\underline{Z}_{22}=\infty$,
$\underline{Y}_{11}=j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{12}=0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{21}=0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{22}=0\mathrm{S}$.

c) $\underline{A}_{11}$, $\underline{A}_{12}$, $\underline{A}_{21}$ i $\underline{A}_{22}$ nie istnieją.
$\underline{Z}_{11}=j10\Omega$, $\underline{Z}_{12}=0\Omega$, $\underline{Z}_{21}=0\Omega$, $\underline{Z}_{22}=j10\Omega$,
$\underline{Y}_{11}=-j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{12}=0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{21}=0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{22}=-j0{,}1\mathrm{S}$.

Zadanie 6.7

Obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej dla czwórników przedstawionych na rysunkach 6.7a i b.

Dane: $\underline{Z}_1 = j10\Omega$, $\underline{Z}_2 = -j10\Omega$



Rys.6.7

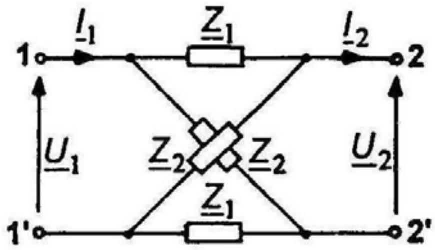
Odpowiedź: a) $\underline{A}_{11} = 0$, $\underline{A}_{12} = j10\Omega$, $\underline{A}_{21} = j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{A}_{22} = 1$,
$\underline{Z}_{11} = 0\Omega$, $\underline{Z}_{12} = j10\Omega$, $\underline{Z}_{21} = -j10\Omega$, $\underline{Z}_{22} = j10\Omega$,
$\underline{Y}_{11} = -j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{12} = j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{21} = -j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{22} = 0\mathrm{S}$.

b) $\underline{A}_{11} = 1$, $\underline{A}_{12} = j10\Omega$, $\underline{A}_{21} = j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{A}_{22} = 0$,
$\underline{Z}_{11} = -j10\Omega$, $\underline{Z}_{12} = j10\Omega$, $\underline{Z}_{21} = -j10\Omega$, $\underline{Z}_{22} = 0\Omega$,
$\underline{Y}_{11} = 0\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{12} = j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{21} = -j0{,}1\mathrm{S}$, $\underline{Y}_{22} = j0{,}1\mathrm{S}$.

Zadanie 6.8

Dla czwórnika przedstawionego na rysunku 6.8 obliczyć parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej.

Dane: $\underline{Z}_1 = 10\Omega$, $\underline{Z}_2 = j10\Omega$. Przeprowadzić dyskusję dla jakich wartości $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ niektóre z tych macierzy nie egzystują lub elementy macierzy przyjmują wartości równe zeru.



Rys. 6.8

Odpowiedź: $$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} = -j = 1e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{2\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} = (10 - j10)\Omega = 10\sqrt{2}\,e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} = (-0{,}1 - j0{,}1)\mathrm{S} = 0{,}1\sqrt{2}\,e^{-j135^\circ},$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} = (5 + j5)\Omega = 5\sqrt{2}\,e^{j45^\circ},$$

$$\underline{Z}_{12} = -\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} = (5 - j5)\Omega = 5\sqrt{2}\, e^{-j45^{\circ}},$$

$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2} = (-5 + j5)\Omega = 5\sqrt{2}\, e^{j135^{\circ}},$$

$$\underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} = (-5 - j5)\Omega = 5\sqrt{2}\, e^{-j135^{\circ}}.$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} = (0{,}05 - j0{,}05)\mathrm{S} = 0{,}05\sqrt{2}\, e^{-j45^{\circ}}$$

$$\underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2}{2} = (-0{,}05 - j0{,}05)\mathrm{S} = 0{,}05\sqrt{2}\, e^{-j135^{\circ}}$$

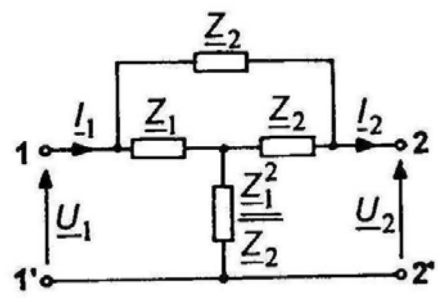
$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2}{2} = (0{,}05 + j0{,}05)\mathrm{S} = 0{,}05\sqrt{2}\, e^{j45^{\circ}}$$

$$\underline{Y}_{22} = -\frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} = (-0{,}05 + j0{,}05)\mathrm{S} = 0{,}05\sqrt{2}\, e^{j135^{\circ}}.$$

Zadanie 6.9

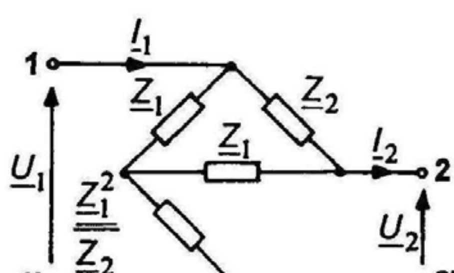
Dla czwórnika przedstawionego na rysunku 6.9a wyprowadzić zależności na parametry macierzy łańcuchowej, impedancyjnej i admitancyjnej.

Dane: $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$. Przeprowadzić podobną dyskusję jak w poprzednim zadaniu.



Rys. 6.9a

Czwórnik ten równoważny jest czwórnikowi z rysunku 6.9b



Rys. 6.9b

Odpowiedź: $$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_2^2 + 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_1^2}{2\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)},$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{Z}_2(2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}\Omega,$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{Z}_2(2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{2\underline{Z}_1^2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}\mathrm{S}.$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń (patrz tabela 6.1) otrzymuje się:

$$\underline{Z}_{11} = -\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Z}_1\left(\underline{Z}_2^2 + 2\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_1^2\right)}{\underline{Z}_2\left(\underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_1\right)}\Omega,$$

$$\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21} = \frac{-2\underline{Z}_1^2\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)}{\underline{Z}_2\left(\underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_1\right)}\Omega,$$

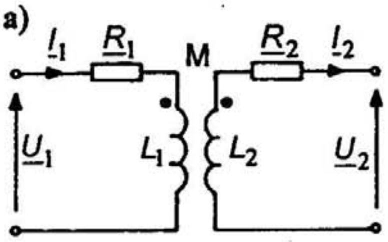
$$\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Y}_1 + 2\underline{Y}_2\left(1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_2\right)}{1 + 2\underline{Z}_1\underline{Y}_2}\text{S},$$

$$\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = \frac{-2\underline{Y}_2\left(1 + \underline{Z}_1\underline{Y}_2\right)}{1 + 2\underline{Z}_1\underline{Y}_2}\text{S}.$$

Zadanie 6.10

Parametry transformatora bezrdzeniowego przedstawionego na rysunku 6.10a wynoszą R_1, L_1, R_2, L_2 a współczynnik sprzężenia k. Wyznaczyć indukcyjność wzajemną M, a następnie traktując transformator jako czwórnik wyznaczyć stałe $\underline{A}_{11}, \underline{A}_{12}, \underline{A}_{21}$ i $\underline{A}_{22}$

a)



$$M = k\sqrt{L_1 L_2}.$$

Rys.6.10a

Rozwiązanie: Dla schematu z rysunku 6.10a ważne są równania:

$$\underline{U}_1 = \left(R_1 + j\omega L_1\right)\underline{I}_1 - j\omega M\underline{I}_2,$$
$$\underline{U}_2 = -\left(R_2 + j\omega L_2\right)\underline{I}_2 + j\omega M\underline{I}_1,$$

lub

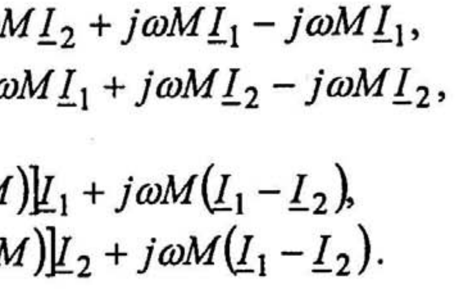
$$\underline{U}_1 = \left(R_1 + j\omega L_1\right)\underline{I}_1 - j\omega M\underline{I}_2 + j\omega M\underline{I}_1 - j\omega M\underline{I}_1,$$
$$\underline{U}_2 = -\left(R_2 + j\omega L_2\right)\underline{I}_2 + j\omega M\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2 - j\omega M\underline{I}_2,$$

po przekształceniach

$$\underline{U}_1 = \left[R_1 + j\omega\left(L_1 - M\right)\right]\underline{I}_1 + j\omega M\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2\right),$$
$$\underline{U}_2 = -\left[R_2 + j\omega\left(L_2 - M\right)\right]\underline{I}_2 + j\omega M\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_2\right).$$

Ostatnim dwum równaniom odpowiada schemat zastępczy transformatora przedstawiony na rysunku 6.10b

b)



Rys. 6.10b

Dla czwórnika niesymetrycznego kształtu T ważne są zależności:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1\underline{Y}, \qquad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Y},$$

$$\underline{A}_{21} = \underline{Y}, \qquad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_2\underline{Y}.$$

Oznaczając: $\underline{Z}_1^{'} = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2^{'} = R_2 + j\omega L_2$ oraz $\underline{Z}_M = j\omega M$,

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{R_1 + j\omega(L_1 - M)}{j\omega M} = \frac{j\omega M + R_1 + j\omega L_1 - j\omega M}{j\omega M} = \frac{\underline{Z}_1^{'}}{\underline{Z}_M},$$

$$\underline{A}_{12} = R_1 + j\omega(L_1 - M) + R_2 + j\omega(L_2 - M) + \frac{[R_1 + j\omega(L_1 - M)][R_2 + j\omega(L_2 - M)]}{j\omega M}$$

$$= \frac{j\omega MR_1 - \omega^2 M(L_1 - M) + j\omega MR_2 - \omega^2 M(L_2 - M)}{j\omega M} +$$

$$+ \frac{j\omega(L_2 - M)R_1 + j\omega(L_1 - M)R_2 - \omega^2(L_1 - M)(L_2 - M)}{j\omega M} =$$

$$= \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) - |Z_M|^2}{\underline{Z}_M} = \frac{\underline{Z}_1^{'}\underline{Z}_2^{'} - |Z_M|^2}{\underline{Z}_M},$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{j\omega M} = \frac{1}{\underline{Z}_M},$$

$$\underline{A}_{22} = 1 + \frac{R_2 + j\omega(L_2 - M)}{j\omega M} = \frac{j\omega M + R_2 + j\omega L_2 - j\omega M}{j\omega M} = \frac{\underline{Z}_2^{'}}{\underline{Z}_M},$$

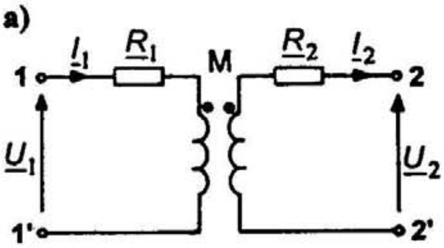
Odpowiedź: $\underline{A}_{11} = \dfrac{\underline{Z}_1^{'}}{\underline{Z}_M}$, $\underline{A}_{12} = \dfrac{\underline{Z}_1^{'}\underline{Z}_2^{'} - |Z_M|^2}{\underline{Z}_M}$, $\underline{A}_{21} = \dfrac{1}{\underline{Z}_M}$,

$\underline{A}_{22} = \dfrac{\underline{Z}_2^{'}}{\underline{Z}_M}$.

Zadanie 6.11

Dla transformatora przedstawionego na rysunku 6.11a wyznaczyć parametry macierzy impedancyjnej.

Dane: R_1, R_2, L_1, L_2, k. Dla tego samego transformatora wyznaczyć macierze impedancyjną, admitancyjną i łańcuchową przy założeniu braku strat i nie występowaniu strumienia rozproszenia. Następnie zakładając nieskończenie wielkie indukcyjności wyznaczyć parametry wspomnianych trzech macierzy dla tzw. transformatora idealnego.



Rys.6.11a

Rozwiązanie: Równania dla napięć $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_2$ można zapisać w postaci:

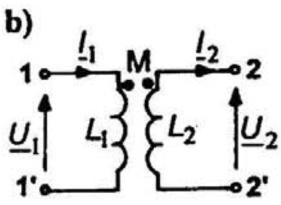
$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega k\sqrt{L_1 L_2}\,\underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = j\omega k\sqrt{L_1 L_2}\,\underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2.$$

Wynika z tego, że:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1, \quad \underline{Z}_{12} = -j\omega k\sqrt{L_1 L_2},$$

$$\underline{Z}_{21} = j\omega k\sqrt{L_1 L_2}, \quad \underline{Z}_{22} = -(R_2 + j\omega L_2).$$



Rys.6.11b

Przy braku strat i nie występowaniu strumienia rozproszenia $R_1 = R_2 = 0$ i k=1 rysunek 6.11b.

$$\underline{Z}_{11} = j\omega L_1, \quad \underline{Z}_{12} = -j\omega\sqrt{L_1 L_2},$$

$$\underline{Z}_{21} = j\omega\sqrt{L_1 L_2}, \quad \underline{Z}_{22} = -j\omega L_2.$$

Parametry $\underline{Y}$ nie istnieją

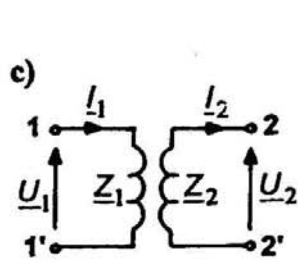
$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad \underline{A}_{12} = 0\Omega, \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{j\omega\sqrt{L_1 L_2}}\,\mathrm{S}, \quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}},$$

lub:

$$\underline{A}_{11} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \underline{A}_{22} = \frac{z_2}{z_1},$$

gdzie: z_1 - liczba zwojów po stronie pierwotnej,

z_2 - liczba zwojów po stronie wtórnej ($L = z^2\Lambda$, patrz część pierwsza skryptu).



Rys.6.11c

Dla transformatora idealnego rysunek 6.11c

Macierze $\mathbf{\underline{Z}}$ i $\mathbf{\underline{Y}}$ nie istnieją.

$$\underline{A}_{11} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \underline{A}_{12} = 0, \quad \underline{A}_{21} = 0 \quad \underline{A}_{22} = \frac{z_2}{z_1},$$

lub wprowadzając oznaczenie:

$$\vartheta = \frac{z_1}{z_2} \text{ - przekładnia transformatora,}$$

$$\underline{A}_{11} = \vartheta, \quad \underline{A}_{12} = 0, \quad \underline{A}_{21} = 0, \quad \underline{A}_{22} = \frac{1}{\vartheta}.$$

Odpowiedź: Patrz wyprowadzenia powyżej.

Zadanie 6.12

Podczas pomiaru stanu jałowego i stanu zwarcia czwórnika symetrycznego otrzymano następujące wyniki:
Stan jałowy $U_0 = 120\text{V}$, $I_0 = 7{,}5\text{A}$, $P_0 = 540\text{W}$, $\varphi_0 > 0$.
Stan zwarcia $U_z = 67{,}5\text{V}$, $I_z = 7{,}5\text{A}$, $P_z = 405\text{W}$, $\varphi_z > 0$.
Wyznaczyć stałe $\underline{A}_{11}, \underline{A}_{12}, \underline{A}_{21}$ czwórnika, jego impedanncje falową, współczynnik przenoszenia i sprawność przy obciążeniu dopasowanym falowo. Wyznaczyć parametry zastępczego czwórnika o kształcie T.
Rozwiązanie:

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{120}{7{,}5} = 16\Omega,$$

$$\varphi_0 = arc\cos\frac{P_0}{U_0 I_0} = arc\cos\frac{540}{120 \cdot 7{,}5} = arc\cos 0{,}6 = 53^\circ,$$

$$\underline{Z}_0 = 16e^{j53^\circ} = (9{,}6 + j12{,}8)\Omega,$$

$$Z_z = \frac{U_z}{I_z} = \frac{76{,}5}{7{,}5} = 9\Omega,$$

$$\varphi_z = arc\cos\frac{P_z}{U_z I_z} = arc\cos\frac{405}{67{,}5 \cdot 7{,}5} = arc\cos 0{,}8 = 37^\circ,$$

$$\underline{Z}_z = 9e^{j37^\circ} = (7{,}2 + j5{,}4)\Omega,$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Z}_z} = \sqrt{16e^{j53^\circ} \cdot 9e^{j37^\circ}} = \sqrt{144e^{j90^\circ}} = 12e^{j45^\circ} =$$
$$= 8{,}49 + j8{,}49,$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_z = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1,$$

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{11}\underline{Z}_z\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_0} = 1, \qquad \underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{11}^2\frac{\underline{Z}_z}{\underline{Z}_0} = 1,$$

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_z}} = \sqrt{\frac{16e^{j53^\circ}}{9{,}6 + j12{,}8 - 7{,}2 - j5{,}4}} = \sqrt{\frac{16e^{j53^\circ}}{2{,}4 + j7{,}4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16e^{j53^\circ}}{7{,}78e^{j72^\circ}}} = \sqrt{2{,}06e^{-j19^\circ}} = 1{,}44e^{-j9{,}5^\circ} = 1{,}42 - j0{,}24,$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_z\underline{A}_{11} = 9e^{j37^\circ}\cdot 1{,}44e^{-j9{,}5^\circ} = 12{,}96e^{j27{,}5^\circ} = (11{,}5 + j5{,}98)\Omega,$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_0} = \frac{1{,}44e^{-j9{,}5^\circ}}{16e^{j53^\circ}} = 0{,}09e^{-j62{,}5^\circ} = (0{,}04 - j0{,}08)\mathrm{S},$$

$$\underline{\vartheta} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = 1{,}42 - j0{,}24 + \sqrt{12{,}96e^{j27{,}5^\circ}\cdot 0{,}09e^{j62{,}5^\circ}} =$$

$$= 1{,}42 - j0{,}24 + \sqrt{1{,}17e^{j90^\circ}} = 1{,}42 - j0{,}24 + 1{,}08e^{j45^\circ} =$$

$$= 1{,}42 - j0{,}24 + 0{,}76 + j0{,}76 = 2{,}18 + j0{,}52 = 2{,}24e^{j13{,}5^\circ},$$

$$g = a + jb = \ln\underline{\vartheta} = 0{,}81 + j0{,}24, \;\; 0{,}24 = 13{,}5^\circ,$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{e^{2a}} = \frac{1}{e^{1{,}62}} = \frac{1}{5{,}05} = 0{,}2, \qquad \text{to} \qquad \eta = 20\,\%,$$

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}(2 + \underline{Z}\underline{Y}), \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y},$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1{,}42 - j0{,}24 - 1}{0{,}04 - j0{,}08} = \frac{0{,}42 - j0{,}24}{0{,}04 - j0{,}08} = \frac{0{,}48e^{-j30^\circ}}{0{,}09e^{-j62{,}5^\circ}} =$$

$$= 5{,}33e^{j32{,}5^\circ} = 4{,}5 + j2{,}86,$$

$$\underline{Y} = \underline{A}_{21} = (0{,}04 - j0{,}08)\mathrm{S}.$$

Odpowiedź: $\underline{A}_{11} = 1{,}42 - j0{,}24$, $\underline{A}_{12} = (11{,}5 + j5{,}98)\Omega$,

$\underline{A}_{21} = (0{,}04 - j0{,}08)\mathrm{S}$, $\underline{Z}_c = 12e^{j45^0} = (8{,}49 + j8{,}49)\Omega$,

$\vartheta = 2{,}18 + j0{,}52 = 2{,}24e^{j13{,}5^0}$, $g = a + jb = 0{,}81 + j0{,}24$,

$\eta = 0{,}2$, $\underline{Z} = (4{,}5 + j2{,}86)\Omega$, $\underline{Y} = (0{,}04 - j0{,}08)\mathrm{S}$.

Zadanie 6.13

Na wejściu łańcuchowego układu trzech jednakowych symetrycznych czwórników zmierzono $U_1 = 220\mathrm{V}$ przy obciążeniu impedancją falową

$$\underline{Z}_c = (50 + j86{,}6)\Omega.$$

Wyznaczyć moc pobieraną przez ten układ z sieci, moc pobieraną przez odbiornik, napięcie i prąd w odbiorniku i sprawność jeżeli współczynnik przenoszenia jednego czwórnika $g = 0{,}1 + j\dfrac{\pi}{12}$. Jaki jest przebieg napięcia na odbiorniku, jeżeli napięcie $u_1 = 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Rozwiązanie:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_{n+1} + \underline{A}_{12}\underline{I}_{n+1} = \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right)\underline{U}_{n+1},$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_{n+1} + \underline{A}_{11}\underline{I}_{n+1} = \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right)\underline{I}_{n+1},$$

$$\underline{A}_{11} = chng, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_c shng, \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_c} shng,$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{n+1} chng + \underline{Z}_c \underline{I}_{n+1} shng,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{n+1}}{\underline{Z}_c} shng + \underline{I}_{n+1} chng,$$

$$ng = 3g = 0{,}3 + j\frac{\pi}{4},$$

$$ch(x+y) = chxchy + shxshy, \qquad sh(x+y) = shxchy + chxshy,$$

$$chjb = \cos b,\ shjb = j\sin b, \qquad ch(a+jb) = cha\cos b + jsha\sin b,$$

$$sh(a+jb) = cha\cos b + jcha\sin b,$$

$$ch\left(0{,}3 + j\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}05 \cdot 0{,}707 + j0{,}30 \cdot 0{,}07 = 0{,}74 + j0{,}21,$$

$$sh\left(0{,}3+j\frac{\pi}{4}\right)=0{,}30\cdot 0{,}707+j1{,}05\cdot 0{,}07=0{,}21+j0{,}74,$$

$$\underline{A}_{11}+\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}=chng+shng=0{,}95+j0{,}95=1{,}34e^{j45^{0}},$$

$$\underline{U}_{n+1}=\underline{U}_4=\frac{\underline{U}_1}{\underline{A}_{11}+\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}}=\frac{220e^{j45^{0}}}{1{,}34e^{j45^{0}}}=164{,}18\,\mathrm{V},$$

$$u_4=164{,}18\sqrt{2}\sin\omega t,\qquad \underline{Z}_c=50+j86{,}6=100e^{j60^{0}}\,\Omega,$$

$$\underline{I}_4=\frac{\underline{U}_4}{\underline{Z}_c}=\frac{164{,}18}{100e^{j60^{0}}}=1{,}64e^{-j60^{0}},$$

$$\underline{I}_1=\underline{I}_4\underline{\vartheta}=1{,}64e^{-j60^{0}}\cdot 1{,}34e^{j45^{0}}=2{,}2e^{-j15^{0}},$$

$$P_1=U_1I_1\cos\varphi_1=220\cdot 2{,}2\cos 60^{0}=242\,\mathrm{W},$$

$$P_4=U_4I_4\cos\varphi_4=164{,}18\cdot 1{,}64\cos 60^{0}=134{,}63\,\mathrm{W},$$

$$\eta=\frac{P_4}{P_1}=\frac{134{,}63}{242}=0{,}556\approx 0{,}56.$$

Odpowiedź: $P_1=242\,\mathrm{W}$, $P_4=134{,}63\,\mathrm{W}$, $\underline{U}_4=164{,}18\,\mathrm{V}$,

$\underline{I}_4=1{,}64e^{-j60^{0}}\,\mathrm{A}$, $\eta\approx 56\,\%$, $u_4=164{,}18\sqrt{2}\sin\omega t$

Zadanie 6.14

Układ łańcuchowy 6 symetrycznych czwórników obciążono impedancją falową $\underline{Z}_c=(5+j8{,}66)\Omega$ i zmierzono napięcie na zaciskach wejściowych ostatniego czwórnika $U_6=60\,\mathrm{V}$ oraz prąd wejściowy drugiego czwórnika $I_2=9{,}9\,\mathrm{A}$. Obliczyć współczynnik tłumienia jednego czwórnika, całego łańcucha czwórników, napięcie i prąd na wejściu pierwszego czwórnika oraz sprawność całego układu.

Odpowiedź: $a=0{,}125$, $6a=0{,}75$, $I_1=11{,}22\,\mathrm{A}$, $U_1=112{,}2\,\mathrm{V}$,

$\eta=0{,}223$ (22,3%).

Zadanie 6.15

Wyznaczyć współczynnik przenoszenia czwórnika symetrycznego obciążonego impedancją falową mając dane:

a) $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c = 50e^{j30^0}\,\Omega,\quad \underline{I}_2 = 2e^{j30^0}\,\text{A},\quad \underline{U}_1 = j223\,\text{V},$

b) $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c = 500e^{j60^0}\,\Omega,\quad \underline{U}_2 = j200\,\text{V},\quad \underline{I}_1 = 0{,}4e^{j60^0}\,\text{A},$

Rozwiązanie: Współczynnik przenoszenia czwórnika $g = a + jb$,

$$g = \ln\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \ln\underline{U}_1 - \ln\underline{U}_2 = \ln\underline{I}_1 - \ln\underline{I}_2.$$

Dla liczby zespolonej w postaci $z = re^{j(\alpha+2k\pi)}$, k=0,1,2...
$Lnz = Ln\left(re^{j(\alpha+2k\pi)}\right) = \ln r + j(\alpha + 2k\pi)$ - nieskończenie wiele wartości różniących się o $j2k\pi$.
Logarytm główny przy k=0, $\ln z = \ln r + j\alpha$,

a) $\underline{U}_2 = \underline{Z}_c\underline{I}_2 = 50e^{j30^0}\cdot 2e^{j30^0} = 100e^{j60^0}$,

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{223e^{j90^0}}{100e^{j60^0}} = 2{,}23e^{j30^0},$$

$$g = \ln 2{,}23e^{j30^0} = 0{,}8 + j\frac{\pi}{6},$$

b) $$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} = \frac{200e^{j90^0}}{500e^{j60^0}} = 0{,}4e^{j30^0},$$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{0{,}4e^{j60^0}}{0{,}4e^{j30^0}} = 1e^{j30^0},$$

$$g = \ln 1e^{j30^0} = 0 + j\frac{\pi}{6}.$$

Odpowiedź: a) $g = 0{,}8 + j\frac{\pi}{6}$, b) $g = 0 + j\frac{\pi}{6}$.

Zadanie 6.16

Współczynnik przenoszenia czwórnika symetrycznego $g = 0{,}8 + j\frac{\pi}{3}$, impedancja falowa $\underline{Z}_c = (75 + j100)\Omega$, prąd obciążenia odbiornikiem dopasowanym falowo $\underline{I}_2 = 1{,}25e^{j30^\circ}$ A. Obliczyć $\underline{\vartheta}, \underline{I}_1, \underline{U}_1, \underline{P}_1, \underline{U}_2$ i $\underline{P}_2$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{\vartheta} = e^g,$$

$$e^g = e^{a+jb} = e^a e^{jb} = \left|e^g\right| e^{jb},$$

$$\underline{\vartheta} = e^g = e^{0,8} e^{j\frac{\pi}{3}} = 2{,}23e^{j60^\circ},$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \underline{\vartheta} = 1{,}25e^{j30^\circ} \cdot 2{,}23e^{j60^\circ} = 2{,}79e^{j90^\circ} = j2{,}79 \text{ A},$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_c \underline{I}_2 = 125e^{j53^\circ} \cdot 1{,}25e^{j30^\circ} = 156{,}25e^{j83^\circ} \text{ V},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \underline{\vartheta} = 156{,}25e^{j83^\circ} \cdot 2{,}23e^{j60^\circ} = 348{,}44e^{j143^\circ} \text{ V}$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi = U_1 I_1 \cos 53^\circ = 348{,}44 \cdot 2{,}79 \cdot 0{,}6 = 583{,}28 \text{ W}$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi = U_2 I_2 \cos 53^\circ = 156{,}25 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}6 = 195{,}31 \text{ W}.$$

Odpowiedź: $\underline{\vartheta} = 2{,}23e^{j60^\circ}$, $\underline{I}_1 = j2{,}79$ A, $\underline{U}_1 = 348{,}44e^{j143^\circ}$ V,
$P_1 = 583{,}28$ W, $\underline{U}_2 = 156{,}25e^{j83^\circ}$ V, $P_2 = 195{,}31$ W.

Zadanie 6.17

Dane są stałe łańcuchowe czwórnika symetrycznego $\underline{A}_{11} = 0{,}52 + j0{,}36$, $\underline{A}_{12} = (3{,}74 + j8{,}59)\Omega$. Wyznaczyć parametry zastępcze czwórnika o kształcie T, impedancję falową, przekładnię, współczynnik tłumienia i współczynnik fazowy. Obliczyć wartości skuteczne napięcia i prądu w odbiorniku dopasowanym falowo do czwórnika, jeżeli wartośc skuteczna napięcia zasilającego $U_1 = 220$V.

Rozwiązanie: Dla czwórnika symetrycznego

$$\underline{A}_{11}^2-\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}=1, \qquad \text{czyli} \qquad \underline{A}_{21}=\frac{\underline{A}_{11}^2-1}{\underline{A}_{12}},$$

$$\underline{A}_{21}=\frac{(0{,}52+j0{,}36)^2-1}{3{,}74+j8{,}59}=\frac{0{,}14+j0{,}374-1}{3{,}74+j8{,}59}=\frac{-0{,}86+j0{,}374}{3{,}74+j8{,}59},$$

$$\underline{A}_{21}=j0{,}1\mathrm{S}.$$

Dla czwórnika symetrycznego w kształcie T ważne są zależności:

$$\underline{A}_{11}=\underline{A}_{22}=1+\underline{Z}\underline{Y}, \qquad \underline{A}_{12}=\underline{Z}(2+\underline{Z}\underline{Y}),$$

$$\underline{A}_{21}=\underline{Y}, \quad \text{albo} \quad \underline{Z}=\frac{\underline{A}_{11}-1}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Y}=\underline{A}_{21}$$

$$\underline{Z}=\frac{0{,}52+j0{,}36-1}{j0{,}1}=(3{,}6+j4{,}8)\Omega, \qquad \underline{Y}=j0{,}1\mathrm{S},$$

$$\underline{Z}_c=\sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}=\sqrt{\frac{3{,}74+j8{,}59}{j0{,}1}}=\sqrt{85{,}9-j37{,}4}=\sqrt{93{,}69e^{-j23{,}5^\circ}}=$$

$$=9{,}68e^{-j11{,}75^\circ}=(9{,}48-j1{,}97)\Omega,$$

$$\underline{\vartheta}=\underline{A}_{11}+\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}=0{,}52+j0{,}36+\sqrt{(3{,}74=j8{,}59)j0{,}1}=$$

$$=0{,}52+j0{,}36+\sqrt{0{,}94e^{j156{,}5^\circ}}=0{,}52+j0{,}36+0{,}97e^{j78{,}25^\circ}=$$

$$=0{,}52+j0{,}36=0{,}2=j0{,}95=0{,}72+j1{,}31,$$

$$\text{jeżeli} \quad \underline{\vartheta}=e^g \quad \text{to} \quad g=\ln\underline{\vartheta}=\ln 1{,}5e^{j61{,}2^\circ}=0{,}4+j61{,}2^\circ,$$

$$a=\ln\frac{U_1}{U_2}\; e^a=\frac{U_1}{U_2}=\frac{I_1}{I_2},$$

$$U_2=\frac{U_1}{e^a}=\frac{220}{e^{0{,}4}}=147{,}47\,\mathrm{V},$$

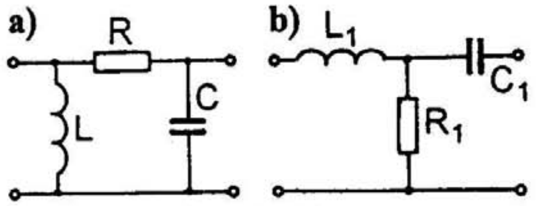
$$I_2=\frac{U_2}{Z_c}=\frac{147{,}47}{9{,}68}=15{,}23\,\mathrm{A}.$$

Odpowiedź: $\underline{Z} = (3{,}6 + j4{,}8)\Omega$, $\underline{Y} = j0{,}1S$, $\underline{Z}_c = (9{,}48 - j1{,}97)\Omega$, $\underline{\vartheta} = 0{,}72 + j1{,}31$, a=0,4, b=1,07rad, $U_2 = 147{,}47\text{V}$, $I_2 = 15{,}23\text{A}$.

Zadanie 6.18

Dla czwórnika z rysunku 6.12a wyznaczyć impedancje czwornika równoważnego kształtu T dla częstotliwości, dla której,

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = R = 10\Omega .$$



Rys.6.12

Odpowiedź: $\omega L_1 = \dfrac{1}{\omega C_1} = R_1 = 10$. Rozmieszczenie elementów w poszczególnych gałęziach przedstawia rysunek 6.12b. Dla czwórnika kształtu π $\underline{Y}_1 = -j0{,}1\text{S}$, $\underline{Z} = 10\Omega$, $\underline{Y}_2 = j0{,}1\text{S}$. Dla czwórnika kształtu T $\underline{Z}_1 = j10\Omega$, $\underline{Y} = 0{,}1\text{S}$, $\underline{Z}_2 = -j10\Omega$

Zadanie 6.19

Filtr dolnoprzepustowy o kształcie T i impedancji falowej przy $\omega \to 0$ $\underline{Z}_{C(0)} = R = \sqrt{\dfrac{L}{C}} = 120\Omega$ powinien mieć przy f=200Hz współczynnik tłumienia a=4. Jaka jest częstotliwość graniczna f_0 i parametry L i C filtru?

Rozwiązanie: Dla filtrów (czwórników) $\underline{A}_{11} = chg = cha\cos b + jsha\sin b$.

W paśmie przepustowym a=0, sha=0, cha=1, $\underline{A}_{11} = \cos b$ $\quad -1 \le \underline{A}_{11} \le 1$.

Dla filtrów symetrycznych $\underline{A}_{11} = 1 + \dfrac{\underline{ZY}}{2}$ czyli $-1 \le \dfrac{\underline{ZY}}{4} \le 0$.

Dla filtru dolnoprzepustowego $-1 \le \dfrac{\underline{ZY}}{4} \le 0$,

$$0 \le \omega \le \frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_o \quad \text{lub} \quad 0 \le f \le \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = f_o,$$

$\omega_o = \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$ pulsacja graniczna,

$$a = 2arch\sqrt{-\frac{\underline{Z}\underline{Y}}{4}} = 2arch\frac{\omega}{\omega_o},$$

$$4 = 2arch\frac{f}{f_o}, \qquad 2 = archx,$$

$$x = ch2 = \frac{1}{2}\left(e^2 + e^{-2}\right) = \frac{1}{2}(7{,}39 + 0{,}14) = 3{,}76,$$

$$f_o = \frac{f}{x} = \frac{200}{3{,}76} = 53{,}19\text{Hz},$$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \underline{Z}_{C(0)}, \qquad \sqrt{LC} = \frac{2}{\omega_o}.$$

Wynika stąd, że:

$$L = \frac{2\underline{Z}_{c(0)}}{\omega_o} = \frac{2 \cdot 120}{334{,}2} = 0{,}718H = 718\text{mH},$$

$$C = \frac{2}{\omega_o \underline{Z}_{c(0)}} = \frac{2}{334{,}2 \cdot 120} = 49{,}87\mu\text{F} \approx 50\mu\text{F}.$$

Odpowiedź: $f_o = 53{,}19\text{Hz}$, L=718mH, $C \approx 50\mu\text{F}$.

Zadanie 6.20

Dana jest częstotliwość graniczna filtru górnoprzepustowego $f_o = 5\text{kHz}$ i rezystancja odbiornika $R = 1\text{k}\Omega$ dopasowanego do filtru przy f=6kHz. Wyznaczyć parametry filtru:

a) o kształcie T,

b) o kształcie π.

Rozwiązanie: Impedancje falowe filtrów górnoprzepustowych kształtów T i π wyrażają się wzorami:

$$\underline{Z}_{cT} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}\left(1 + \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2},$$

$$\underline{Z}_{c\pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}\frac{1}{1+\frac{\underline{ZY}}{4}}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}.$$

Obie impedancje są sobie równe, gdy $\omega = \infty$

$$\underline{Z}_{c(\infty)} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad \omega_o = \frac{1}{2\sqrt{LC}}, \qquad L = \frac{\underline{Z}_{c(\infty)}}{2\omega_o}, \qquad C = \frac{1}{2\omega_o \underline{Z}_{c(\infty)}}.$$

Dla filtru kształtu T

$$1000 = Z_{c(\infty)}\sqrt{1-\left(\frac{5000}{6000}\right)^2} = Z_{c(\infty)} \cdot 0{,}55,$$

$$Z_{c(\infty)} = 1818{,}18\Omega, \quad L = \frac{1818{,}18}{62831{,}85} = 0{,}029\text{H} = 29\text{mH},$$

$$C = \frac{1}{114239618{,}6} = 8{,}75\text{nF}, \quad 2C = 17{,}5\text{nF}.$$

Dla filtru kształtu π

$$1000 = Z_{c(\infty)} \cdot \frac{1}{0{,}55}, \quad Z_{c(\infty)} = 550,$$

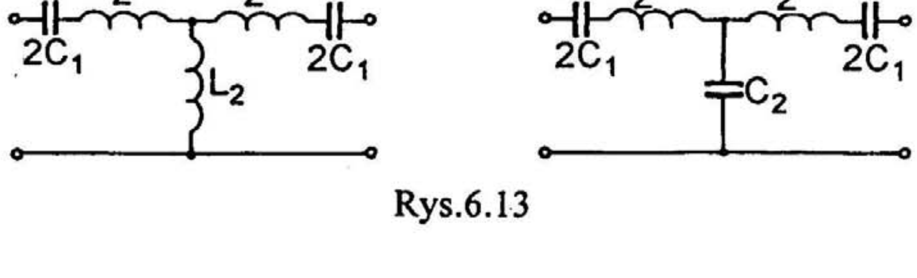
$$L = \frac{550}{62831{,}85} = 8{,}75\text{mH}, \quad 2L = 17{,}5\text{mH},$$

$$C = \frac{1}{34557519{,}19} = 28{,}94\text{nF}.$$

Odpowiedź: a) $L = 29\text{mH}$, $2C = 17{,}5\text{nF}$, b) $2L = 17{,}5\text{mH}$, $C \approx 29\text{nF}$.

Zadanie 6.21

Wyznaczyć pasma przepustowe filtrów przedstawionych na rysunkach 6.13a i b



Rys.6.13

Rozwiązanie:

$$\underline{Z} = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L_2},$$

$$\underline{ZY} = \frac{1}{\omega L_2}\left(\frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega C_1}\right) = \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega^2 L_2 C_1},$$

$$\frac{\underline{ZY}}{4} = \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{4\omega^2 L_2 C_1}, \qquad -1 \le \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{4\omega^2 L_2 C_1} \le 0,$$

$$-1 \le \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{4\omega^2 L_2 C_1} \quad \text{i} \quad \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{4\omega^2 L_2 C_1} \le 0.$$

Mianownik w układzie tych nierówności jest zawsze większy od zera.

$$-4\omega^2 L_2 C_1 \le \omega^2 L_1 C_1 - 1 \quad \text{i} \quad \omega^2 L_1 C_1 - 1 \le 0,$$

$$\omega^2 (4L_2 C_1 + L_1 C_1) \ge 1 \quad \text{i} \quad \omega^2 L_1 C_1 \le 1,$$

$$\omega^2 \ge \frac{1}{L_1 C_1\left(1 + \frac{4L_2}{L_1}\right)} \quad \text{i} \quad \omega^2 \le \frac{1}{L_1 C_1},$$

$$\omega \ge \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}\sqrt{1 + \frac{4L_2}{L_1}}}, \quad \text{i} \quad \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Obydwie nierówności kwadratowe posiadają również rozwiązania dla wartości ω mniejszych od zera. W zadaniu tym jak i w następnych jako realne przyjęto tylko rozwiązania dla pulsacji (częstotliwości) większej od zera.

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}\sqrt{1 + \frac{4L_2}{L_1}}} \le \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

b) $$\underline{Z} = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad \underline{Y} = j\omega C_2, \quad \underline{ZY} = -\frac{C_2}{C_1}\left(\omega^2 L_1 C_1 - 1\right),$$

$$\frac{\underline{ZY}}{4} = \frac{C_2 - \omega^2 L_1 C_1 C_2}{4C_1}, \qquad -1 \le \frac{C_2 - \omega^2 L_1 C_1 C_2}{4C_1} \le 0,$$

$$-1 \le \frac{C_2 - \omega^2 L_1 C_1 C_2}{4C_1}, \quad \text{i} \quad \frac{C_2 - \omega^2 L_1 C_1 C_2}{4C_1} \le 0,$$

$$-4C_1 \le C_2 - \omega^2 L_1 C_1 C_2, \quad \text{i} \quad C_2 - \omega^2 L_1 C_1 C_2 \le 0,$$

$$\omega^2 L_1 C_1 C_2 \le C_2 + 4C_1, \qquad \omega^2 L_1 C_1 C_2 \ge C_2,$$

$$\omega^2 \le \frac{1}{L_1 C_1}\left(1 + \frac{4C_1}{C_2}\right), \qquad \omega^2 \ge \frac{1}{L_1 C_1},$$

$$\omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}\sqrt{1 + \frac{4C_1}{C_2}}, \qquad \omega \ge \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \le \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}\sqrt{1 + \frac{4C_1}{C_2}}.$$

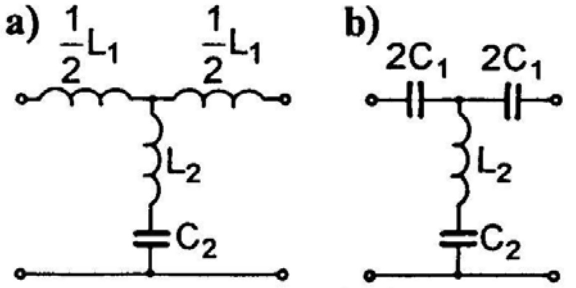
Odpowiedź: Obydwa filtry są środkowoprzepustowe przy czym ω znajduje sie w przedziałach:

a) $$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}\sqrt{1 + \frac{4L_2}{L_1}}} \le \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \le \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}\sqrt{1 + \frac{4C_1}{C_2}}.$$

Zadanie 6.22

Wyznaczyć pasma przepustowe filtrów przedstawionych na rysunkach 6.14a i b



Rys.6.14

Rozwiązanie:

a) $\underline{Z} = j\omega L_1$, $\quad \underline{Y} = \dfrac{\omega C_2}{j\left(\omega^2 L_2 C_2 - 1\right)}$, $\quad \underline{ZY} = \dfrac{\omega^2 L_1 C_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1}$,

$$\frac{\underline{\underline{ZY}}}{4}=\frac{\omega^2L_1C_2}{4\omega^2L_2C_2-4}, \qquad -1\le\frac{\omega^2L_1C_2}{4\omega^2L_2C_2-4}\le 0,$$

$$-1\le\frac{\omega^2L_1C_2}{4\left(\omega^2L_2C_2-1\right)}, \quad \text{i} \quad \frac{\omega^2L_1C_2}{4\left(\omega^2L_2C_2-1\right)}\le 0,$$

$$0\le\frac{4\left(\omega^2L_2C_2-1\right)+\omega^2L_1C_2}{4\left(\omega^2L_2C_2-1\right)},$$

$$0\le\left[4\left(\omega^2L_2C_2-1\right)+\omega^2L_1C_2\right]\left[\omega^2L_2C_2-1\right],$$

$$\left[\omega^2\left(L_2C_2+\frac{L_1C_2}{4}\right)-1\right]\left[\omega^2L_2C_2-1\right]\ge 0,$$

$$\left(\omega\sqrt{L_2C_2+\frac{L_1C_2}{4}}+1\right)\left(\omega\sqrt{L_2C_2+\frac{L_1C_2}{4}}-1\right)\left(\omega\sqrt{L_2C_2}+1\right)\left(\omega\sqrt{L_2C_2}-1\right)\ge 0$$

Nierówność tą spełnia ω z przedziałów

$$-\infty\le\omega\le-\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}},$$

$$-\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}\sqrt{1+\frac{L_1}{4L_2}}}\le\omega\le\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}\sqrt{1+\frac{L_1}{4L_2}}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}\le\omega\le+\infty,$$

$$\omega^2L_1C_2\left(\omega^2L_2C_2-1\right)\le 0,$$

$$\omega^2L_1C_2\left(\omega\sqrt{L_2C_2}+1\right)\left(\omega\sqrt{L_2C_2}-1\right)\le 0.$$

Nierówność tą spełnia ω z przedziału $-\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}\le\omega\le\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$ ponieważ $\omega=0$ jest pierwiastkiem podwójnym. Za rozwiązanie realne przyjmowane są tylko ω dodatnie. Wspólnym przedziałem dla obydwu nierówności jest:

$$0\le\omega\le\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}\sqrt{1+\frac{L_1}{4L_2}}},$$

b) $\underline{Z} = \dfrac{1}{j\omega C_1}$, $\quad \underline{Y} = \dfrac{\omega C_2}{j\left(\omega^2 L_2 C_2 - 1\right)}$, $\quad \underline{ZY} = \dfrac{\omega C_2}{\omega C_1 - \omega^3 L_2 C_1 C_2}$,

$$\frac{\underline{ZY}}{4} = \frac{C_2}{4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right)}, \qquad -1 \le \frac{C_2}{4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right)} \le 0,$$

$$-1 \le \frac{C_2}{4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right)} \quad \text{i} \quad \frac{C_2}{4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right)} \le 0,$$

$$0 \le \frac{4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right) + C_2}{4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right)},$$

$$0 \le \left[4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right) + C_2\right]\left[1-\omega^2 L_2 C_2\right],$$

$$\left(1+\omega\sqrt{\frac{4L_2C_2C_1}{4C_1+C_2}}\right)\left(1-\omega\sqrt{\frac{4L_2C_2C_1}{4C_1+C_2}}\right)\left(1+\omega\sqrt{L_2C_2}\right)\left(1-\omega\sqrt{L_2C_2}\right) \ge 0.$$

Nierówność tą spełnia ω z przedziałów:

$$-\infty \le \omega \le -\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}\sqrt{1+\frac{C_2}{4C_1}}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} \le \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}},$$

$$\text{i} \quad \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}\sqrt{1+\frac{C_2}{4C_1}} \le \omega \le +\infty,$$

$$\frac{C_2}{4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right)} \le 0, \qquad 4C_1\left(1-\omega^2 L_2 C_2\right) \le 0,$$

$$1-\omega^2 L_2 C_2 \le 0, \qquad -\omega^2 L_2 C_2 \le -1, \qquad \omega^2 L_2 C_2 \ge 1,$$

$$\omega^2 \ge \frac{1}{L_2C_2} \quad \text{realne tylko} \quad \omega \ge \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}.$$

Para nierówności spełniona jest tylko dla

$$\omega \ge \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}\sqrt{1+\frac{C_2}{4C_1}}.$$

Odpowiedź: Filtr z rysunku a) jest dolnoprzepustowy a ω znajduje się w przedziale $0 \le \omega \le \dfrac{1}{\sqrt{L_2C_2}\sqrt{1+\dfrac{L_1}{4L_2}}}$, filtr z rysunku b) jest górnoprzepustowy i przepuszcza sygnały dla $\omega \ge \dfrac{1}{\sqrt{L_2C_2}}\sqrt{1+\dfrac{C_2}{4C_1}}$.

Zadanie 6.23

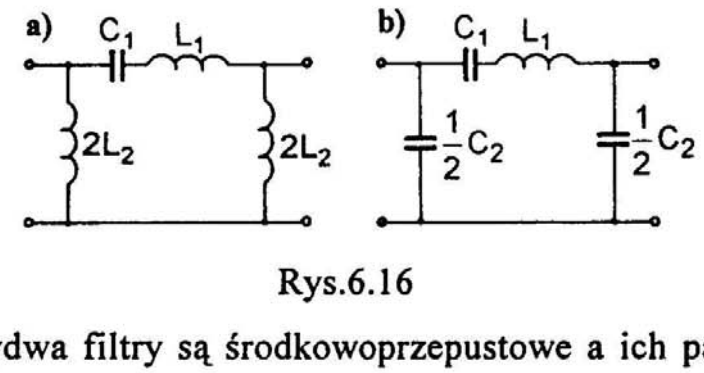
Wyznaczyć pasma przepustowe filtrów przedstawionych na rysunkach 6.15a i b

Rys.6.15

Odpowiedź: Pierwszy z filtrów rys. 6.15a jest górnoprzepustowy $\omega \ge \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}\sqrt{1+\dfrac{L_1}{4L_2}}$, drugi rys. 6.15b jest filtrem dolnoprzepustowym $0 \le \omega \le \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}\sqrt{1+\dfrac{C_2}{4C_1}}}$.

Zadanie 6.24

Wyznaczyć pasma przepustowe filtrów przedstawionych na rysunkach 6.16a i b.



Rys.6.16

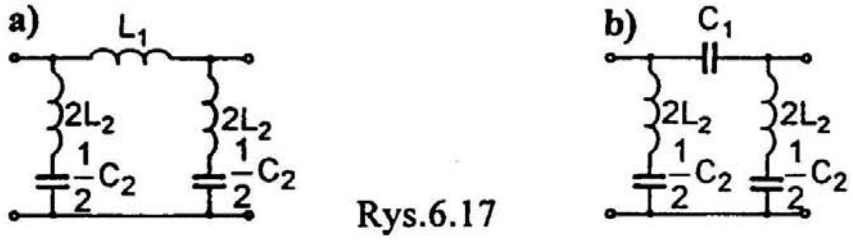
Odpowiedź: Obydwa filtry są środkowoprzepustowe a ich pasma przepuszczenia zawierają się w granicach:

a) $$\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}\sqrt{1+\frac{4L_2}{L_1}}} \le \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}},$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \le \omega \le \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}\sqrt{1+\frac{4C_1}{C_2}}.$$

Zadanie 6.25

Wyznaczyć pasma przepustowe filtrów przedstawionych na rysunkach 6.17a i b

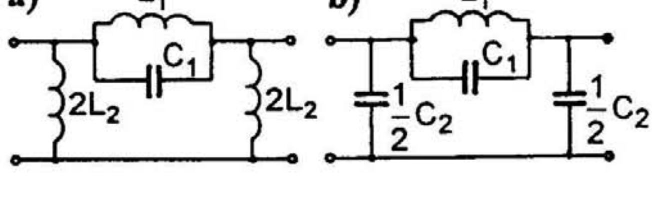


Rys.6.17

Odpowiedź: Filtr z rysunku 6.17a jest filtrem dolnoprzepustowym i przepuszcza w paśmie $0 \le \omega \le \dfrac{1}{\sqrt{L_2C_2}\sqrt{1+\dfrac{L_1}{4L_2}}}$, filtr z rysunku 6.17b jest natomiast filtrem górnoprzepustowym i przepuszcza dla $\omega \ge \dfrac{1}{\sqrt{L_2C_2}}\sqrt{1+\dfrac{C_2}{4C_1}}$.

Zadanie 6.26

Wyznaczyć pasma przepustowe filtrów przedstawionych na rysunkach 6.18a i b

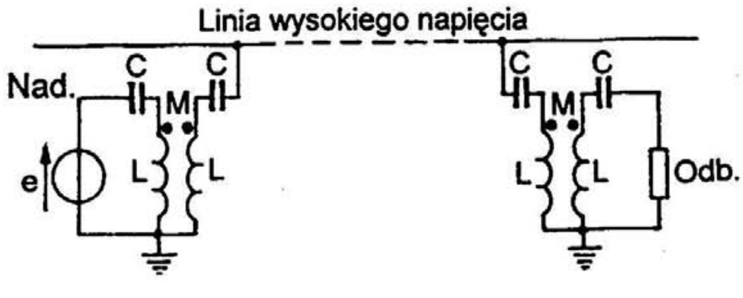


Rys.6.18

Odpowiedź: Pierwszy z filtrów jest filtrem górnoprzepustowym i przepuszcza w paśmie $\omega \geq \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}\sqrt{1+\frac{L_1}{4L_2}}$, drugi jest filtrem dolnoprzepustowym i przepuszcza sygnały dla ω z przedziału $0 \leq \omega \leq \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}\sqrt{1+\frac{C_2}{4C_1}}}$.

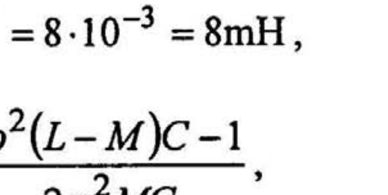
Zadanie 6.27

W celu wykorzystania przewodów linii wysokiego napięcia do przesyłania sygnałów wielkiej częstotliwości do zdalnego sterowania i łączności zastosowano w miejscach nadania i odbioru sygnałów filtry w układzie przedstawionym na rysunku 6.19a wyposażone w specjalne kondensatory wysokonapięciowe. Wyznaczyć zakres przepuszczania filtru o parametrach L=10mH, C=1nF, k=0,8.



Rys.6.19a

Rozwiązanie: Po wyeliminowaniu sprzężenia magnetycznego filtry przy nadajniku i odbiorniku przedstawia rysunek 6.19b



Rys.6.19b

$$M = k\sqrt{L_1L_2} = k\sqrt{L^2} = 0{,}8\sqrt{\left(10\cdot 10^{-3}\right)^2} = 8\cdot 10^{-3} = 8\text{mH},$$

$$\frac{\underline{ZY}}{4} = j\left[\omega(L-M)-\frac{1}{\omega C}\right]\frac{1}{j2\omega M} = \frac{\omega^2(L-M)C-1}{2\omega^2 MC},$$

$$-1 \le \frac{\omega^2(L-M)C-1}{2\omega^2 MC}, \qquad -2\omega^2 MC \le \omega^2(L-M)C-1,$$

$$\omega^2(L+M)C-1 \ge 0, \qquad \omega^2 \ge \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}},$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L+M)C}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{18\cdot 10^{-12}}} = 37{,}51\text{kHz},$$

$$\frac{\omega^2(L-M)C-1}{2\omega^2 MC} \le 0, \qquad \omega^2 \le \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}},$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L-M)C}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{2\cdot 10^{-12}}} = 112{,}54\text{kHz},$$

$$f_1 \le f \le f_2.$$

Odpowiedź: Zakres przepuszczania filtru mieści się w granicach od 37,5 do 112,5kHz.

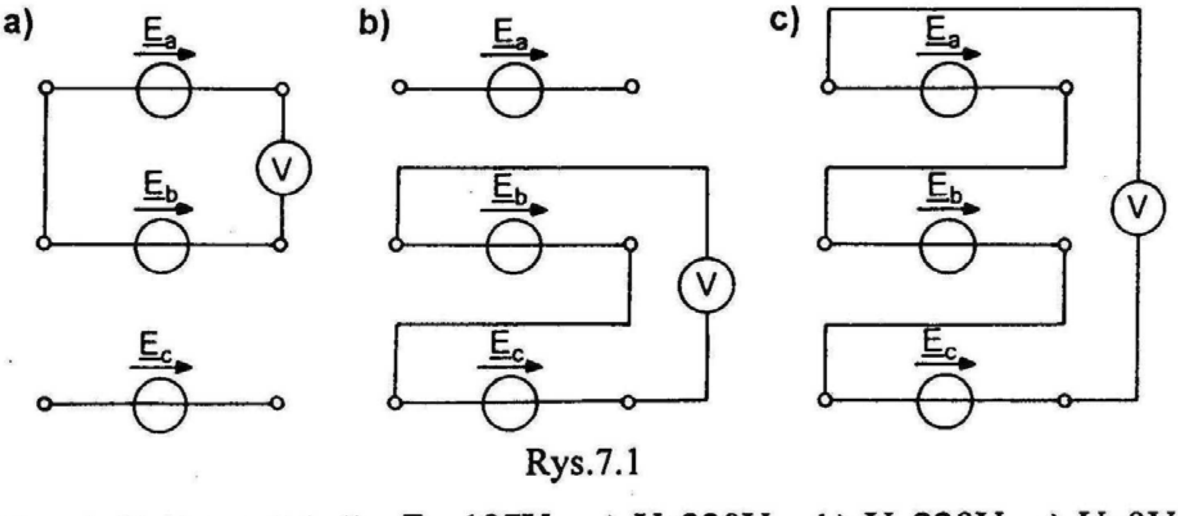
7. PRĄDY TRÓJFAZOWE

Zadanie 7.1

W układzie trójfazowym symetrycznym gwiazdowym dane jest napięcie fazowe U_f=E_f=127V oraz kąt fazowy początkowy ψ_a fazy A. Napisać wyrażenia zespolone napięć $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c, \underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$, wykonać wykresy wskazowe dla: a) ψ_a=0°, b) ψ_a=30°, c) ψ_a=60°, d) ψ_a=90°.

Zadanie 7.2

Obliczyć wskazania woltomierzy w układach pokazanych na rysunkach 7.1 a, b, c. Zadanie wykonać dla dwóch przypadków:
a) E_f = 127V, b) E_f = 220V.
Napięcia $\underline{E}_a$, $\underline{E}_b$, i $\underline{E}_c$ tworzą układ symetryczny rzędu pierwszego. Wyniki sprawdzić na wykresie wskazowym.



Rys.7.1

Odpowiedź: Przypadek dla E_f=127V, a) U=220V, b) U=220V, c) U=0V.
Przypadek dla E_f=220V, b) U=380V, b) U=380V, c) U=0V.

Zadanie 7.3

Przy łączeniu uzwojeń prądnicy trójfazowej w gwiazdę zamieniono początek fazy A z jej końcem. Wyznaczyć napięcia międzyfazowe jeżeli napięcie fazowe wynosi U_f=220V. Wykonać wykres wskazowy i sprawdzić wyniki obliczeń z wykresem. Przyjąć jako podstawowe napięcie fazy B, np. $\underline{U}_b$ = 220V .

Odpowiedź : $\underline{U}_b = 220\text{V}$, $\underline{U}_{ab} = (-110 - j190)\text{V}$,
$\underline{U}_{bc} = (330 + j190)\text{V}$, $\underline{U}_{ca} = -220\text{V}$,
$U_{ab}=U_{ca}=220\text{V}$, $U_{bc}=380\text{V}$.

Zadanie 7.4

Układ zasilający o napięciu U=380/220V obciążono symetrycznie odbiornikiem o impedancji fazowej (włączonej między przewód fazowy i przewód zerowy) $\underline{Z} = (6{,}6 - j8{,}8)\Omega$. Przyjąwszy ψ_a=0° dla napięcia fazy A wyznaczyć wartości zespolone napięć $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c, \underline{U}_{ac}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ i prądów $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$. Wykonać wykres wektorowy wymienionych napięć i prądów oraz wyznaczyć kąty:

$$\angle(\underline{U}_{ac}, \underline{I}_a), \angle(\underline{U}_{bc}, \underline{I}_b).$$

Sprawdzić wyniki obliczeń z wykresem.

Rozwiązanie:

$$\underline{U}_a = 220e^{j0^o} = 220\text{V},$$

$$\underline{U}_b = 220e^{-j120^o} = (-110 - j190)\text{V},$$

$$\underline{U}_c = 220e^{j120^o} = (-110 + j190)\text{V},$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b = 220 + 110 + j190 = (330 + j190)\text{V},$$

$$\underline{U}_{ab} = 380e^{j30^o}\ \text{V},$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c = -110 - j190 + 110 - j190 = -j380\text{V},$$

$$\underline{U}_{bc} = 380e^{-j90^o}\ \text{V},$$

$$\underline{U}_{ca} = \underline{U}_c - \underline{U}_a = -110 + j190 - 220 = (-330 + j190)\text{V},$$

$$\underline{U}_{ca} = 380e^{j150^o}\ \text{V},$$

$$\underline{U}_{ac} = \underline{U}_a - \underline{U}_c = 220 + 110 - j190 = (330 - j190)\text{V},$$

$$\underline{U}_{ac} = 380e^{-j30^o} = -\underline{U}_{ca}\ \text{V},$$

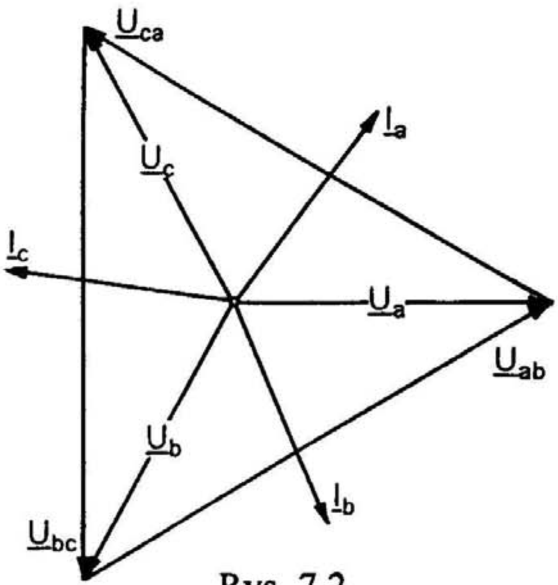
$$\underline{Z} = (6{,}6 - j8{,}8)\Omega = 11e^{-j53^o}\ \text{V},$$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}} = \frac{220}{11e^{-j53^o}} = 20e^{j53^o} = (12 + j16)\text{A},$$

$$\underline{I}_b = 20e^{-j67^o} = (7{,}8 - j18{,}4)\text{A},$$

$$\underline{I}_c = 20e^{j173^o} = (-19{,}8 + j2{,}4)\text{A}.$$

Rysunek 7.2 przedstawia wykres wskazowy prądów i napięć.



Rys. 7.2

$$\angle(\underline{U}_{ac}, \underline{I}_a) = \psi_{uac} - \psi_{ia} = -30^o - 53^o = -83^o,$$

$$\angle(\underline{U}_{bc}, \underline{I}_b) = \psi_{ubc} - \psi_{ib} = -90^o + 67^o = -23^o.$$

Odpowiedź: $\underline{U}_a$=220V, $\underline{U}_b$=(-110-j190)V, $\underline{U}_c$=(-110+j190)V, $\underline{U}_{ab} = (330 + j190)$V, $\underline{U}_{bc} = -j380$V, $\underline{U}_{ca} = (-330 + j190)$V, $\angle(\underline{U}_{ac}, \underline{I}_a) = -83^o$, $\angle(\underline{U}_{bc}, \underline{I}_b) = -23^o$.

Zadanie 7.5

Do układu trójfazowego czteroprzewodowego o napięciu U=380/220V włączono trzy połączone w gwiazdę odbiorniki jak na rysunku 7.3a.

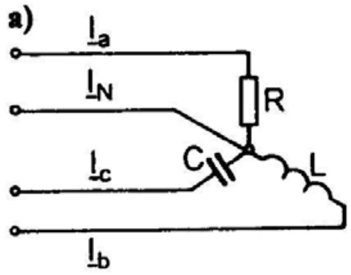
Dane: $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 10\Omega$.

Rozwiązanie:

Obierając wskaz $\underline{U}_a = 220\text{V}$ jak w zadaniu 7.4, otrzymuje się pozostałe napięcia:

$$\underline{U}_b = (-110 - j190)\text{V},$$

$$\underline{U}_c = (-110 + j190)\text{V}.$$



Rys.7.3a

Prądy w poszczególnych odbiornikach

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{R} = \frac{220}{10} = 22\text{A}, \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{j\omega L} = \frac{-110 - j190}{j10} = (-19 + j11)\text{A},$$

$$\underline{I}_c = j\omega C\underline{U}_c = j\frac{1}{10}(-110 + j190) = (-19 - j11)\text{A}.$$

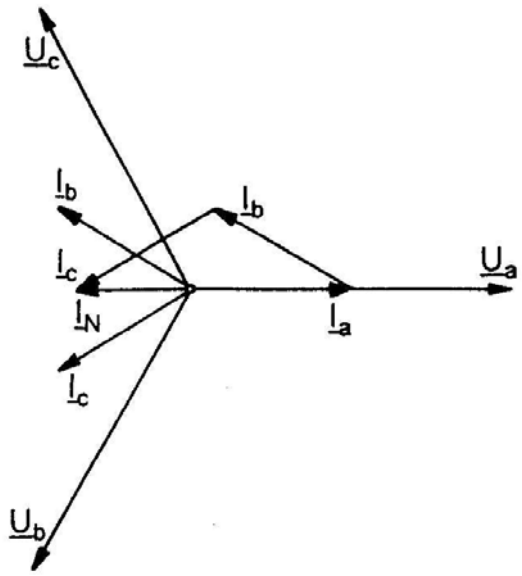
Prąd w przewodzie zerowym

$$\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 22 - 19 + j11 - 19 - j11 = -16\text{A}.$$

Wartości skuteczne prądów

$I_a = I_b = I_c = 22\text{A}, \quad I_N = 16\text{A}.$

Wykres wskazowy napięć i prądów przedstawiono na rysunku 7.3b.



Rys.7.3b

Odpowiedź: $\underline{I}_a$=22A, $\underline{I}_b$=(19+j11)A,

$\underline{I}_c$=(-19-j11)A, $\underline{I}_N$=-16A - wartości skuteczne prądów,

$I_a = I_b = I_c$=22A, I_N=16A

Zadanie 7.6

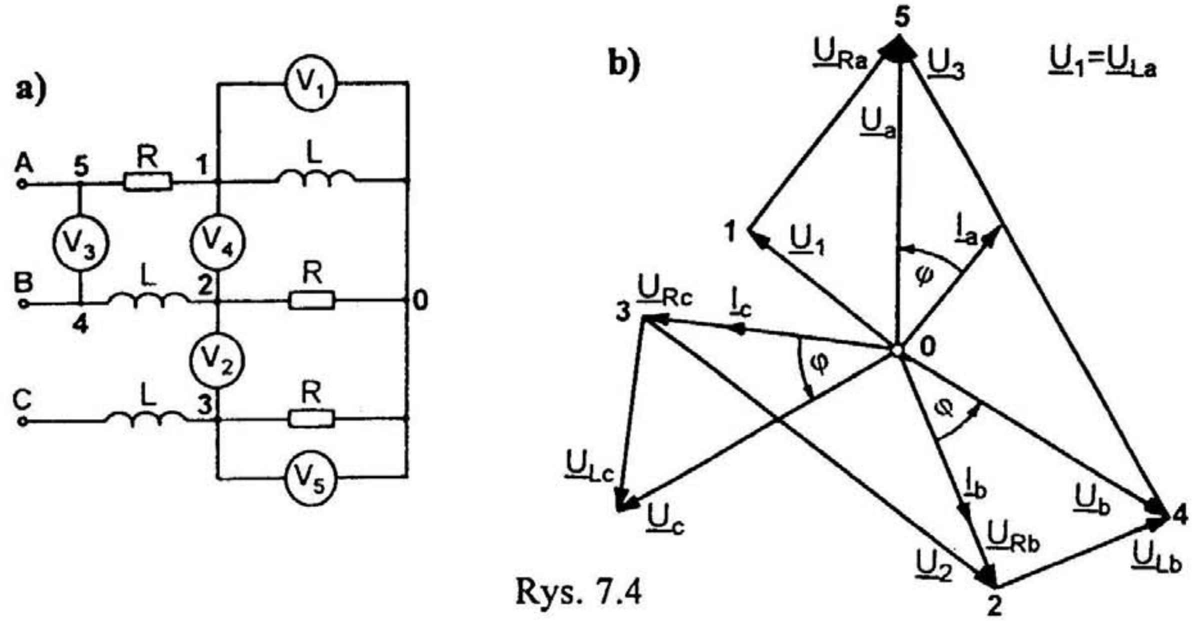
Jak zmieni się prąd w przewodzie zerowym gdy w schemacie z rysunku 7.3a elementy L i C zamienione zostaną ze sobą miejscami. Wykonać odpowiedni wykres wskazowy.

Odpowiedź: $\underline{I}_N = 60\text{A} = I_N$

Zadanie 7.7

W układzie symetrycznym przedstawionym na rysunku 7.4a dane są wskazania woltomierzy V_1 i V_2-U_1=150V, U_2=346V.
Wyznaczyć wskazania woltomierzy V_3, V_4, V_5.

Rozwiązanie: Rysunek 7.4b przedstawia wykres wskazowy (topograficzny) dla obwodu z rysunku 7.4a



Rys. 7.4

$$U_2 = 346\text{V} \quad \text{to} \quad U_5 = U_{30} = \frac{U_2}{\sqrt{3}} = \frac{346}{\sqrt{3}} = 200\text{V},$$

$$U_3 = U_{54} = \sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + U_5^2} = \sqrt{3}\sqrt{150^2 + 200^2} = 433\text{V}.$$

Napięcie U_4 wskazywane przez woltomierz V_4 można obliczyć w następujący sposób:

$$\underline{U}_{La} - \underline{U}_4 - \underline{U}_{Rb} = 0, \quad \text{to} \quad \underline{U}_4 = \underline{U}_{La} - U_{Rb}.$$

Napięcie $\underline{U}_4$ panuje między punktami 1 i 2, z wykresu wskazowego wynika, że

$$\underline{U}_{La} = 150e^{j143^o} = (-120 + j90)\text{V},$$

$$\underline{U}_{Rb} = 200e^{-j67^o} = (78 - j184)\text{V},$$

$$\underline{U}_4 = (-120 + j90) - (78 - j184) = (-198 + j274)\text{V},$$

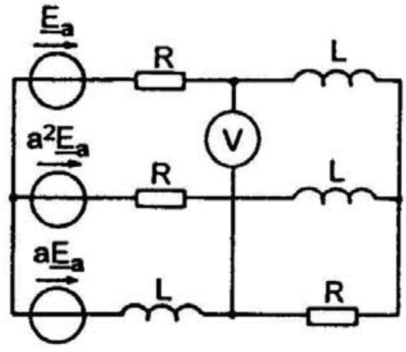
$$U_4 = \sqrt{(-198)^2 + 274^2} = \sqrt{39204 + 75076} = \sqrt{114280} = 338\text{V}.$$

Odpowiedź: $U_3 = 433$V, $U_4 = 338$V, $U_5 = 200$V.

Zadanie 7.8.

W obwodzie z rysunku 7.5 wyznaczyć wskazanie woltomierza. Zasilanie jest symetryczne.

Dane: $\underline{E}_a = j220\mathrm{V}$, $R = \omega L$.



Rys. 7.5

Odpowiedź: U=80,53V.

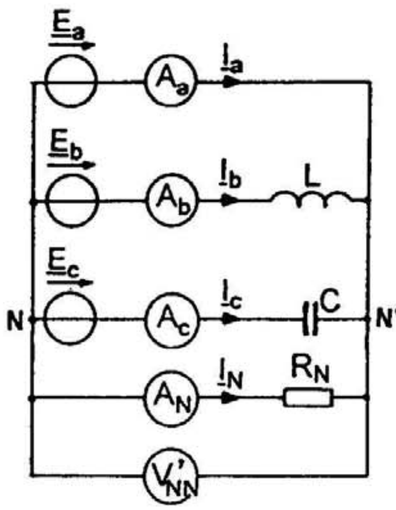
Zadanie 7.9.

W układzie przedstawionym na rysunku 7.6 obliczyć wskazania przyrządów.

Dane:

$$R_N = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10\Omega,$$

$\underline{E}_a = 220\mathrm{V}$, kolejność faz zgodna.



Rys.7.6

Rozwiązanie: $\underline{E}_b = (-110 - j190)\mathrm{V}$,

$$\underline{E}_c = (-110 + j190)\mathrm{V},$$

$$\underline{U}_{N'N} = \underline{E}_a = 220\mathrm{V},\ \underline{Y}_a = \infty,\ \underline{Y}_b = -j0{,}1\mathrm{S},\ \underline{Y}_c = j0{,}1\mathrm{S},\ \underline{Y}_N = 0{,}1\mathrm{S},$$

$$\underline{I}_b = \underline{Y}_b\left(\underline{E}_b - \underline{U}_{N'N}\right) = -j0{,}1(-330 - j190) = (-19 + j33)\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_c = \underline{Y}_c\left(\underline{E}_c - \underline{U}_{N'N}\right) = j0{,}1(-330 + j190) = (-19 - j33)\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_N = \underline{Y}_N \underline{U}_{N'N} = 0{,}1 \cdot 220 = 22\mathrm{A}.$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffa

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c - \underline{I}_N = 0,$$

$$\underline{I}_a = \underline{I}_N - \underline{I}_b - \underline{I}_c = 22 + 19 - j33 + 19 + j33 = 60\mathrm{A},$$

$$I_b = I_c = \sqrt{19^2 + 33^2} = \sqrt{1450} = 38\text{A}.$$

Odpowiedź: Przyrządy wskazują odpowiednio: I_a=60A, I_b=I_c=38A, I_N=22A, $U_{N'N}$=220V.

Zadanie 7.10

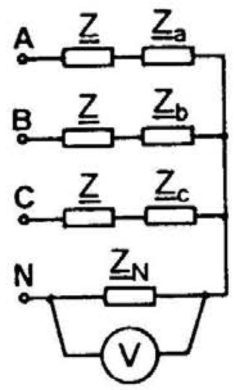
W układzie pokazanym na rysunku 7.7 obliczyć wskazanie woltomierza.

Dane: $\underline{U}_a = j220V$, układ zasilający symetryczny o kolejności zgodnej,

$\underline{Z} = (1 + j2)\Omega$, $\underline{Z}_a = (9 - j2)\Omega$,

$\underline{Z}_b = (5 + j6)\Omega$, $\underline{Z}_c = (5 - j10)\Omega$,

$\underline{Z}_N = (1{,}2 + j1{,}6)\Omega$,



Rys.7.7

Rozwiązanie :

$$\underline{Z} + \underline{Z}_a = (1 + j2) + (9 - j2) = 10\Omega,$$

$$\underline{Z} + \underline{Z}_b = (1 + j2) + (5 + j6) = (6 + j8)\Omega = 10e^{j53^o},$$

$$\underline{Z} + \underline{Z}_c = (1 + j2) + (5 - j10) = (6 - j8)\Omega = 10e^{-j53^o},$$

$$\underline{Y}_a^{'} = 0{,}1\text{S}, \qquad \underline{Y}_b^{'} = 0{,}1e^{-j53^o} = (0{,}06 - j0{,}08)\text{S},$$

$$\underline{Y}_c^{'} = 0{,}1e^{j53^o} = (0{,}06 + j0{,}08)\text{S}, \qquad \underline{Y}_N = 0{,}5e^{-j53^o} = (0{,}3 - j0{,}4)\text{S},$$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{Y}'\underline{E}_a + \underline{Y}_b^{'}\underline{E}_b + \underline{Y}_c^{'}\underline{E}_c}{\underline{Y}_a^{'} + \underline{Y}_b^{'} + \underline{Y}_c^{'} + \underline{Y}_N},$$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{22e^{j90} + 22e^{-j83^o} + 22e^{-j97}}{0{,}52 - j0{,}4} =$$

$$= \frac{j22 + 2{,}68 - j21{,}84 - 2{,}68 - j21{,}84}{0{,}66e^{-j37^o}},$$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{-j21{,}68}{0{,}66e^{-j37^o}} = \frac{21{,}68e^{-j90^o}}{0{,}66e^{-j37^o}} = 32{,}85e^{-j53^o},$$

$$\underline{U}_{N'N} = (19{,}78 - j26{,}24)\text{V}.$$

Odpowiedź : U=32,85V.

Zadanie 7.11

W układzie przedstawionym na rysunku 7.8a obliczyć wskazania przyrządów.

Dane: $\underline{E}_a = j220\,\text{V}$,

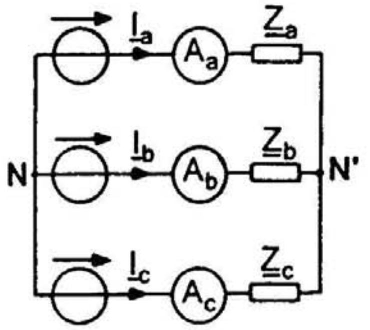
$\underline{E}_b = (190 - j110)\,\text{V}$,

$\underline{E}_c = (-190 - j110)\,\text{V}$,

$\underline{Z}_a = (8 + j6)\Omega$,

$\underline{Z}_b = (4 + j3)\Omega$,

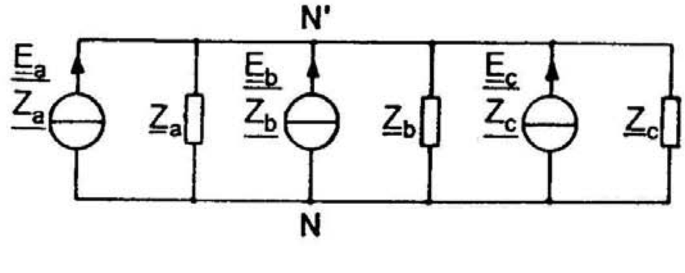
$\underline{Z}_c = (8 + j6)\,\Omega$.

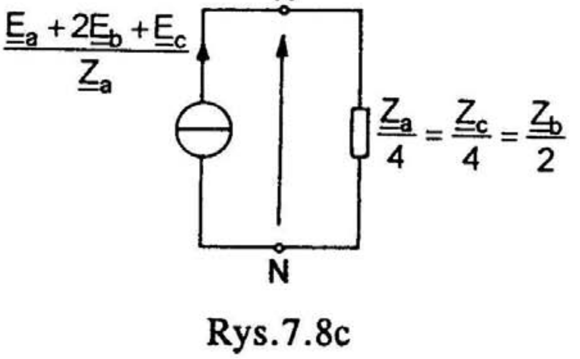


Rys.7.8a

Rozwiązanie: Na rysunku 7.8b przedstawiono ekwiwalentny schemat zastępczy układu z rysunku 7.8a, w którym źródła napięcia zastąpiono źródłami prądu.

Rys.7.8b





Rys.7.8c

W następnym kroku wszystkie źródła prądu zastają zastąpione jednym źródłem a wszystkie impedancje jedną impedancją rysunek 7.8c.

$$\underline{Z}_a = R + j\omega L\,,$$

$$\underline{U}_{N'N} = \left(\frac{R}{4} + \frac{j\omega L}{4}\right)\frac{\underline{E}_a + 2\underline{E}_b + \underline{E}_c}{R + j\omega L} = \frac{\underline{E}_b}{4}\,,$$

$$\underline{U}_{N'N} = (47{,}5 - j27{,}5)\,\mathrm{V} = 55e^{-j30^\circ}\,,$$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{E}_a - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_a} = \frac{j220 - 47{,}5 + j27{,}5}{8 + j6} =$$

$$= \frac{-47{,}5 + j247{,}5}{8 + j6} = \frac{252e^{j101^\circ}}{10e^{j37^\circ}} = 25{,}2e^{j64^\circ}\,,$$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{E}_b - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_b} = \frac{190 - j110 - 47{,}5 + j27{,}5}{4 + j3} =$$

$$= \frac{142{,}5 - j82{,}5}{5e^{j37^\circ}} = \frac{165e^{-j30^\circ}}{5e^{j37^\circ}} = 33e^{-j67^\circ}\,,$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{E}_c - \underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_c} = \frac{-190 - j110 - 47{,}5 + j27{,}5}{8 + j6} =$$

$$= \frac{-237{,}5 - j82{,}5}{10e^{j37^\circ}} = \frac{252e^{j199^\circ}}{10e^{j37^\circ}} = 25{,}2e^{j162^\circ}\,.$$

Sprawdzenie: Prądy w postaciach algebraicznych wynoszą

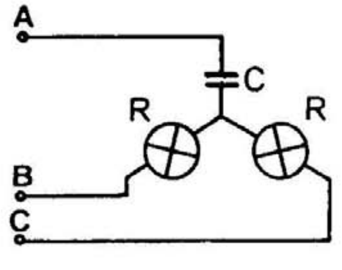
$$\underline{I}_a = (11{,}05 + j22{,}65)\,A,\quad \underline{I}_b = (12{,}90 - j30{,}38)\,\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_c = (-23{,}95 + j7{,}73)\,\mathrm{A}.$$

Odpowiedź: Amperomierze wskazują następujące wartości prądów
$I_a = 25{,}2\,\mathrm{A}$, $I_b = 33\,\mathrm{A}$, $I_c = 25{,}2\,\mathrm{A}$.

Zadanie 7.12

Do wyznaczania kolejności faz napięcia sieci zastosowano pokazany na rysunku 7.9 układ dwóch żarówek o rezystancjach R i kondensatora o reaktancji $X_c = 0{,}5R$. Przyjmując, że kondensator włączony jest do fazy A, wyznaczyć napięcia na żarówkach w fazach B i C. Która z nich świeci jaśniej?. Przyjąć $\underline{E}_a = E_f$



Rys.7.9

Rozwiązanie:

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{j\omega C\underline{E}_a + \frac{2}{R}\underline{E}_b + \frac{2}{R}\underline{E}_c}{j\omega C + \frac{2}{R} + \frac{2}{R}}.$$

Po uwzględnieniu, że $\frac{1}{2}R = \frac{1}{\omega C}$,

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{j - 1 - j\sqrt{3} - 1 + j\sqrt{3}}{4 + j}\underline{E}_a = \frac{-2 + j}{4 + j}\underline{E}_a,$$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{(-2 + j)(4 - j)}{4^2 + 1} = \frac{-7 + j6}{17} = (-0{,}41 + j0{,}35)\underline{E}_a,$$

$$\underline{U}_{N'N} = (-0{,}41 + j0{,}35)E_f.$$

Napięcia na poszczególnych fazach układu

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N} = (1 + 0{,}41 - j0{,}35)E_f = (1{,}41 - j0{,}35)E_f,$$

$$\underline{U}_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N} = (-0{,}5 - j0{,}866 + 0{,}41 - j0{,}35)E_f =$$
$$= (-0{,}09 - j1{,}216)E_f,$$

$$\underline{U}_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} = (-0{,}5 + j0{,}866 + 0{,}41 - j0{,}35)E_f =$$
$$= (-0{,}09 + j0{,}516)E_f,$$

$$U_b = \sqrt{(-0{,}09)^2 + 1{,}216^2}\,E_f = 1{,}22E_f\,,$$

$$U_c = \sqrt{(-0{,}09)^2 + 0{,}516^2}\,E_f = 0{,}52E_f\,,$$

Odpowiedź: $U_b = 1{,}22E_f$, $U_c = 0{,}52E_f$. Żarówka w fazie B świeci jaśniej.

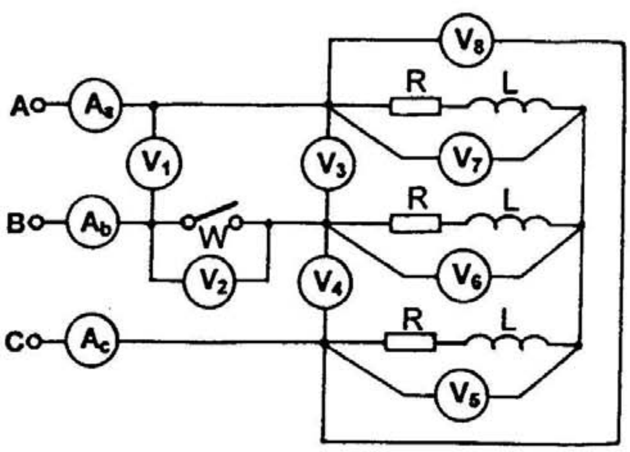
Zadanie 7.13

Jak zmieniają się napięcia w poszczególnych fazach układu jeżeli zamiast reaktancji pojemnościowej, w fazie A włączona zostanie reaktancja indukcyjna o wartości $X_L = 0{,}5R$, $\underline{E}_a = E_f$.

Odpowiedź: $\underline{U}_a = (0{,}75 + j0{,}75)E_f$, $\underline{U}_b = (-0{,}75 - j0{,}116)E_f$, $\underline{U}_c = (-0{,}75 + j1{,}62)E_f$, $U_a = 1{,}06E_f$, $U_b = 0{,}76E_f$, $U_c = 1{,}78E_f$. Tym razem żarówka świeci jaśniej w fazie C.

Zadanie 7.14

W odbiorniku połączonym w gwiazdę symetryczną o parametrach $R = 20\Omega$, $X_L = 15\Omega$ nastąpiła przerwa w zasilaniu fazy B jak na rysunku 7.10. Napięcie zasilające jest symetryczne i wynosi 380V. Wyznaczyć wskazania przyrzadów.



Rys.7.10

Odpowiedź: $I_a = I_c = 7{,}6\,\text{A}$, $I_b = 0\,\text{A}$, $U_1 = U_8 = 380\,\text{V}$, $U_2 = 330\,\text{V}$, $U_3 = U_4 = U_5 = U_7 = 190\,\text{V}$, $U_6 = 0\,\text{V}$.

Zadanie 7.15

W obwodzie przedstawionym na rysunku 7.11 nastąpiło zwarcie odbiornika w fazie A co zaznaczono w postaci zamknięcia wyłącznika.

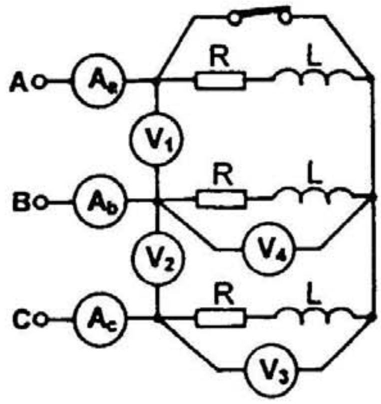
Wyzanczyć wskazania przyrządów:

a) przed zwarciem,

b) b) po zwarciu.

Dane: $U=380V$, układ symetryczny.

$R=20\Omega$, $X_L=15\Omega$.



Rys.7.11

Odpowiedź: a) $I_a=I_b=I_c=8{,}8\text{A}$,

$U_{ab}=U_{bc}=380\text{V}$ czyli $U_1=U_2=380\text{V}$,

$U_b=U_c=220\text{V}$ czyli $U_3=U_4=220\text{V}$,

b) $I_a=26{,}4\text{A}$, $I_b=I_c=15{,}2\text{A}$,

$U_{ab}=U_{bc}=U_b=U_c=380\text{V}$ czyli

$U_1=U_2=U_3=U_4=380\text{V}$.

Zadanie 7.16

Do układu trójfazowego symetrycznego jak na rysunku 7.12a o napięciu międzyfazowym $U=380\text{V}$ włączono odbiornik symetryczny połączony w gwiazdę i zmierzono moc metodą dwóch watomierzy. Jaka jest impedancja fazowa $\underline{Z}$ odbiornika, jeżeli wskazania watomierzy wynoszą:

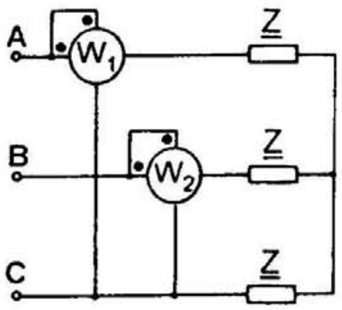
a) $P_1=3872\text{W}$, $P_2=0\text{W}$,

b) $P_1=0\text{W}$, $P_2=3872\text{W}$,

c) $P_1=P_2=3872\text{W}$,

d) $P_1=4472{,}5\text{W}$,

$P_2=2236{,}25\text{W}$



Rys.7.12a

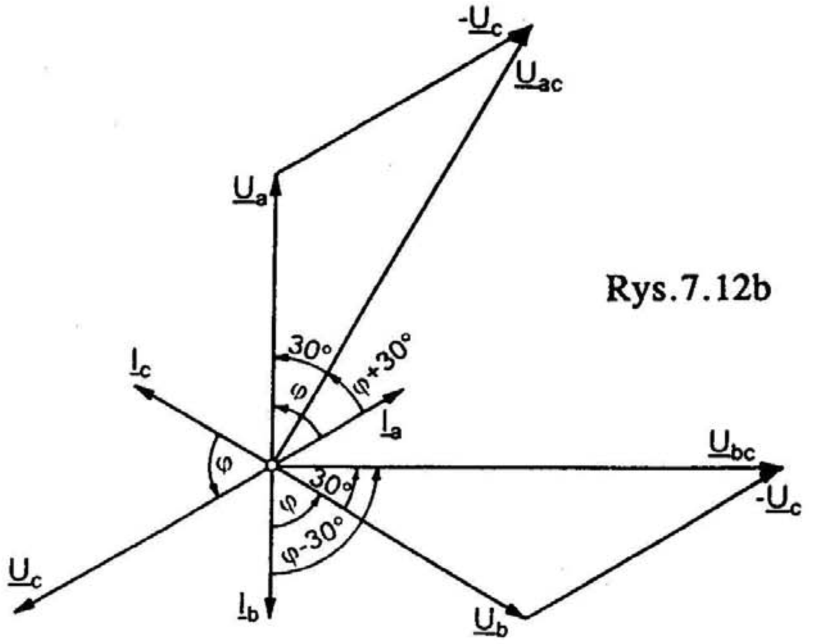
Rozwiązanie: Rysunek 7.12b przedstawia wykres wskazowy dla schematu z rysunku 7.12a w przypadku obciążenia o charakterze czynno-indukcyjnym

$$\angle\left(\underline{U}_{ac},\underline{I}_a\right)=\varphi-30^{\circ},$$

$$\angle\left(\underline{U}_{bc},\underline{I}_b\right)=\varphi+30^{\circ},$$

$$P_1=UI\cos\left(\varphi-30^{\circ}\right),$$

$$P_2=UI\cos\left(\varphi+30^{\circ}\right).$$



Rys.7.12b

Korzystając ze wzorów

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$P_1+P_2=2UI\cos\varphi\cos30^{\circ}=\sqrt{3}UI\cos\varphi=P,$$

$$P_1-P_2=UI\sin\varphi,$$

$$2P_1=UI\left(\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi\right)=\sqrt{3}UI\cos\varphi\left(1+\frac{tg\varphi}{\sqrt{3}}\right),$$

$$P_1=\frac{P}{2}\left(1+\frac{tg\varphi}{\sqrt{3}}\right),\qquad P_2=\frac{P}{2}\left(1+\frac{tg\varphi}{\sqrt{3}}\right),\qquad tg\varphi=\sqrt{3}\frac{P_1-P_2}{P_1+P_2},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}=\frac{P_1+P_2}{2\sqrt{P_1^2+P_2^2-P_1P_2}}.$$

Dla poszczególnych przypadków

a) $tg\varphi=\sqrt{3}\dfrac{P_1-P_2}{P_1+P_2}=\sqrt{3}$, $\cos\varphi=0{,}5$, $\sin\varphi=0{,}866$, $\varphi=60^{\circ}$,

$$I=11{,}77\text{A},\qquad Z=\frac{U}{\sqrt{3}I}=\frac{380}{\sqrt{3}\cdot11{,}77}=18{,}65\Omega,$$

$$\underline{Z}=18{,}65\left(\cos60^{\circ}+j\sin60^{\circ}\right)=\left(9{,}33+j16{,}15\right)\Omega,$$

b) $tg\varphi=-\sqrt{3}$, $\cos\varphi=0{,}5$, $\sin\varphi=-0{,}866$, $\varphi=-60^{\circ}$,

$$I=11{,}77\text{A},\qquad Z=18{,}65\Omega,$$

$$\underline{Z} = 18{,}65\left[\cos\left(-60^{\circ}\right) + j\sin\left(-60^{\circ}\right)\right] = \left(9{,}33 - j16{,}15\right)\Omega\,,$$

c) $tg\varphi = 0, \quad \cos\varphi = 1, \quad \sin\varphi = 0, \quad \varphi = 0^{\circ},$

$$I = 11{,}77\text{A}, \qquad Z = 18{,}65\Omega,$$

$$\underline{Z} = 18{,}65\left(\cos 0^{\circ} + j\sin 0^{\circ}\right) = 18{,}65\Omega\,,$$

d) $tg\varphi = 0{,}577, \quad \cos\varphi = 0{,}866, \quad \sin\varphi = 0{,}5, \quad \varphi = 30^{\circ},$

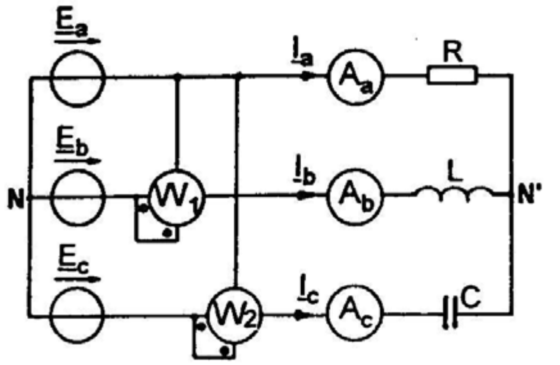
$$I = 11{,}77\text{A}, \qquad Z = 18{,}65\Omega,$$

$$\underline{Z} = 18{,}65\left(\cos 30^{\circ} + j\sin 30^{\circ}\right) = \left(16{,}15 + j9{,}33\right)\Omega\,.$$

Odpowiedź: a) $\underline{Z} = \left(9{,}33 + j16{,}15\right)\Omega$, b) $\underline{Z} = \left(9{,}33 - j16{,}15\right)\Omega$,
c) $\underline{Z} = 18{,}65\Omega$, d) $\underline{Z} = \left(16{,}15 + j9{,}33\right)\Omega$.

Zadanie 7.17

W układzie przedstawionym na rysunku 7.13 obliczyć wskazania przyrządów.



Rys.7.13

Dane: $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 10\Omega\,,$

$$\underline{E}_a = 220\text{V} = 220e^{j0}\text{V}\,,$$

$$\underline{E}_b = \left(-110 - j190\right)\text{V} = 220e^{-j120^{\circ}}\text{V}\,,$$

$$\underline{E}_c = \left(-110 + j190\right)\text{V} = 220e^{j120^{\circ}}\text{V}\,.$$

Rozwiązanie: $\underline{Y}_a = 0{,}1\text{S}\,, \quad \underline{Y}_b = -j0{,}1\text{S}\,, \quad \underline{Y}_c = j0{,}1\text{S}\,,$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{0{,}1\left[220 + \left(-110 - j190\right)\left(-j\right) + \left(-110 + j190\right)j\right]}{0{,}1} =$$

$$= 220 - 190 - 190 + j110 - j110 = -160\text{V},$$

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N} = 220 + 160 = 380\,\text{V},$$

$$\underline{U}_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N} = -110 - j190 + 160 = \left(50 - j190\right)\text{V},$$

$$\underline{U}_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} = -110 + j190 + 160 = (50 + j190)\,\mathrm{V},$$

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_a\,\underline{U}_a = 0{,}1 \cdot 380 = 38\,\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_b = \underline{Y}_b\,\underline{U}_b = -j0{,}1(50 - j190) = (-19 - j5)\,\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_c = \underline{Y}_c\,\underline{U}_c = j0{,}1(50 + j190) = (-19 + j5)\,\mathrm{A},$$

$$I_b = I_c = \sqrt{19^2 + 5^2} = \sqrt{386} = 19{,}65\,\mathrm{A},$$

$$P_1 = \mathrm{Re}\{(-330 - j190)(-19 + j5)\} = 6270 + 950 = 7220\,\mathrm{W},$$

$$P_2 = \mathrm{Re}\{(-330 + j190)(-19 - j5)\} = 6270 + 950 = 7220\,\mathrm{W}.$$

Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości amperomierze: $I_a = 38\,\mathrm{A}$, $I_b = I_c = 19{,}65\,\mathrm{A}$, watomierze: $P_1 = 7220\,\mathrm{W}$, $P_2 = 7220\,\mathrm{W}$.

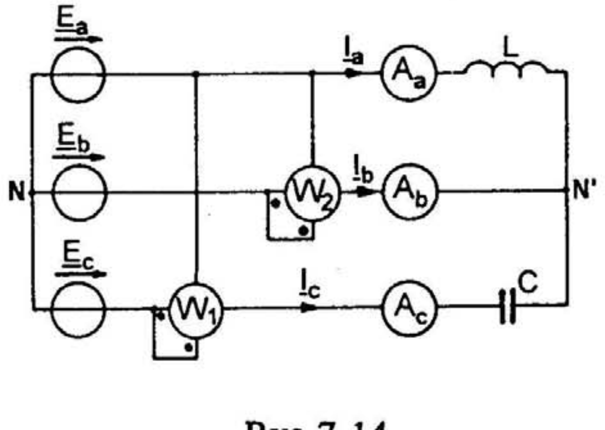
Zadanie 7.18

W układzie przedstawionym na rysunku 7.14 obliczyć wskazania przyrządów.

Dane: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 10\Omega$, $\underline{E}_a = j220 = 220e^{j90^\circ}\,\mathrm{V}$,

$\underline{E}_b = (190 - j110) = 220e^{-j30^\circ}\,\mathrm{V}$,

$\underline{E}_c = (-190 - j110)\mathrm{V} = 220e^{-j150^\circ}$.



Rys.7.14

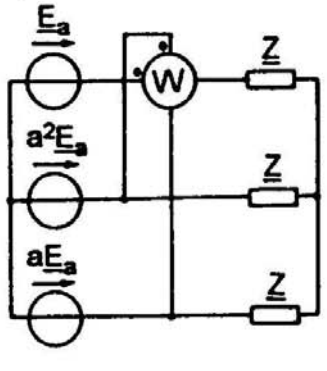
Odpowiedź: Amperomierze wskazują następujące wartości: $I_a = I_b = I_c = 38\,\mathrm{A}$, watomierze $P_1 = -P_2 = 12540\,\mathrm{W}$.

Zadanie 7.19

W obwodzie z rysunku 7.15 wyznaczyć wskazanie watomierza.

Dane: $\underline{E}_a = j220\,\mathrm{V}$. Zasilanie jest symetryczne.

$\underline{Z} = R + jX_L = 40 + j30$.



Rys.7.15

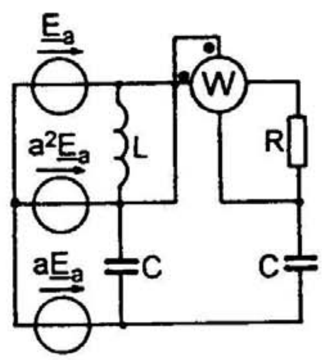
Odpowiedź: $P = 1003{,}2\mathrm{W}$, Moc ta pomnożona przez $\sqrt{3}$ równa jest mocy biernej układu.

Zadanie 7.20

W obwodzie z rysunku 7.16 wyznaczyć wskazanie watomierza.

Dane: $\underline{E}_a = 220\,\mathrm{V}$,

$R = X_L = X_C = 40\Omega$.



Rys.7.16

Odpowiedź: $P = -663{,}8\mathrm{W}$.

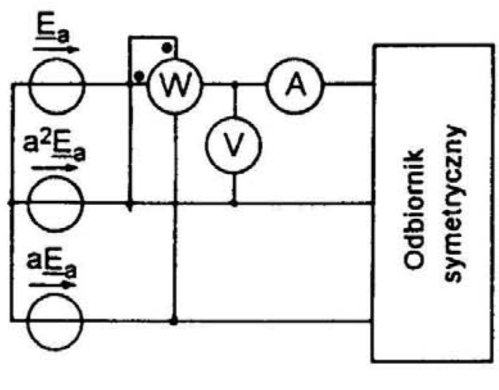
Zadanie 7.21

Na podstawie wskazań przyrządów wyznaczyć moc czynna, bierną i pozorną pobieraną przez odbiornik symetryczny jak na rysunku 7.17.

Dane: $P_W = 3353{,}25\,\mathrm{W}$,

$U_V = 380\mathrm{V}$, $I_a = 11\mathrm{A}$.

Zasilanie symetryczne o zgodnej kolejności faz.

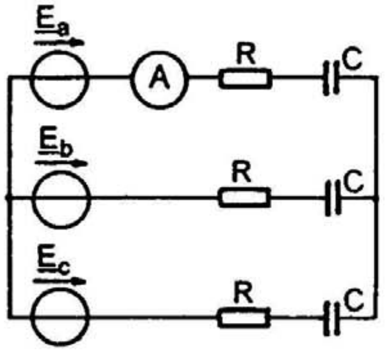


Rys.7.17

Odpowiedź: $P = 4356\mathrm{W}$, $Q = 5808\mathrm{var}$, $S = 7260\mathrm{VA}$.

Zadanie 7.22

W układzie jak na rysunku 7.18 wyznaczyć takie ψ dla którego wskazanie amperomierza jest największe.



$$\underline{E}_a = \underline{E}_f e^{j\psi}, \quad \underline{E}_b = \underline{E}_f e^{-j120^o},$$

$$\underline{E}_c = \underline{E}_f e^{j120^o}, \quad R = X_c.$$

Rys.7.18

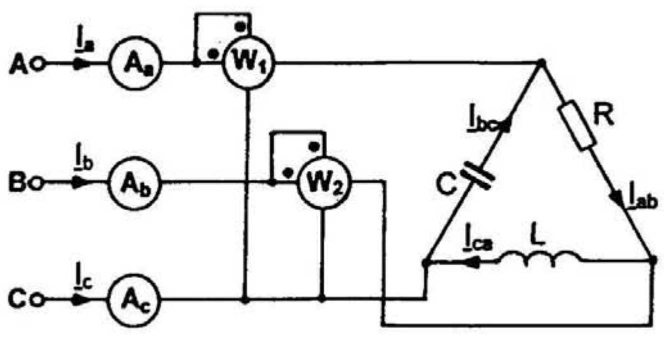
Odpowiedź: Wskazanie amperomierza nie zależy w tym przypadku od kąta ψ (odpowiedź uzasadnij).

Zadanie 7.23

W układzie zasilającym trójfazowym symetrycznym napięcie międzyfazowe $u_{ab} = 380\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 30^o\right)$. Obciążenie jest niesymetryczne, jak pokazano na rysunku 7.19 przy czym

$$R = X_L = X_C = 10\Omega .$$

Wyznaczyć wartości zespolone prądów i wskazania przyrządów.



Rys.7.19

Rozwiązanie: $\underline{U}_{ab} = 380e^{j120^o} = \left(-190 + j330\right)\mathrm{V},$

$$\underline{U}_{bc} = 380e^{j0^o} = 380\,\mathrm{V},$$

$$\underline{U}_{ca} = 380e^{-j120^{\circ}} = (-190 - j330)\,\text{V},$$

$$\underline{I}_{ab} = \frac{380e^{j120^{\circ}}}{10} = 38e^{j120^{\circ}} = (-19 + j33)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{380e^{j0^{\circ}}}{10e^{j90^{\circ}}} = 38e^{-j90^{\circ}} = -j38\,\text{A},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{380e^{-j120^{\circ}}}{10e^{-j90^{\circ}}} = 38e^{-j30^{\circ}} = (33 - j19)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_{a} = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = -19 + j33 - 33 + j19 = (-52 + j52)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_{a} = 73{,}54e^{j135^{\circ}},$$

$$\underline{I}_{b} = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -j38 + 19 - j33 = (19 - j71)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_{b} = 68{,}68e^{-j75^{\circ}},$$

$$\underline{I}_{c} = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 33 - j19 + j38 = (33 + j19)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_{c} = 38e^{j30^{\circ}},$$

$$P_1 = \text{Re}\left\{\underline{U}_{ac}\underline{I}_{a}^{*}\right\} = \text{Re}\left\{380e^{j60^{\circ}} \cdot 73{,}54e^{-j135^{\circ}}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{27945e^{-j75^{\circ}}\right\} = 7{,}23\text{kW},$$

$$P_2 = \text{Re}\left\{\underline{U}_{bc}\underline{I}_{b}^{*}\right\} = \text{Re}\left\{380e^{j0^{\circ}} \cdot 68{,}68e^{j75^{\circ}}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{27945e^{j75^{\circ}}\right\} = 7{,}23\text{kW}.$$

Odpowiedź: $\underline{I}_{ab} = (-19 + j33)\,\text{A}$, $\underline{I}_{bc} = -j38\,\text{A}$, $\underline{I}_{ca} = (33 - j19)\,\text{A}$,

$\underline{I}_{a} = (-52 + j52)\text{A} = 73{,}54e^{j135^{\circ}}\,\text{A}$,

$$\underline{I}_b = (19 - j71)\text{A} = 68{,}68e^{-j75^\circ}\,\text{A},$$

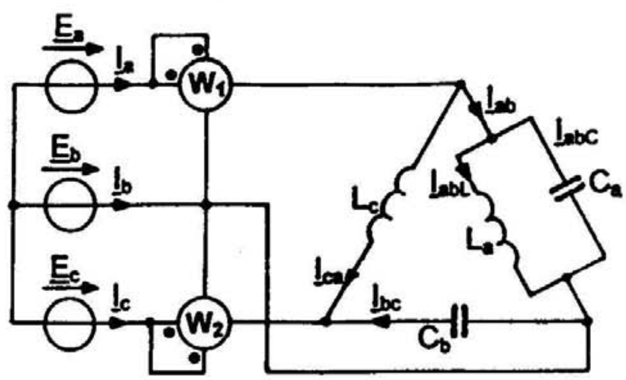
$$\underline{I}_c = (33 + j19)\text{A} = 38e^{j30^\circ}\,\text{A}.$$

Amperomierze wskazują odpowiednio $I_a = 73{,}54\,\text{A}$, $I_b = 68{,}68\,\text{A}$, $I_c = 38\,\text{A}$. Watomierze $P_1 = 7{,}23\,\text{kW}$ i $P_2 = 7{,}23\,\text{kW}$.

Zadanie 7.24

W obwodzie przedstawionym na rysunku 7.20 obliczyć rozpływ prądów, wskazania watomierzy oraz narysować wykres topograficzny wszystkich prądów i napięć. $\underline{E}_a = j220\,\text{V}$ układ zasilający symetryczny o zgodnej kolejności faz.

$$\omega L_a = \frac{1}{\omega C_a} = \frac{1}{\omega C_b} = \omega L_c = 10\Omega$$



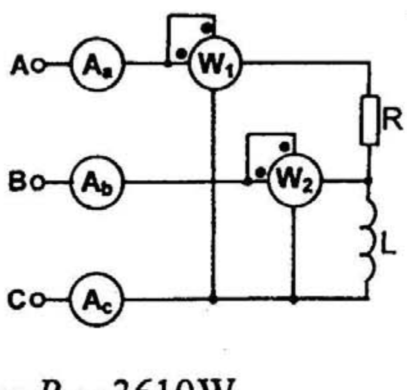
Rys.7.20

Odpowiedź: $I_a = I_b = I_c = I_{abL} = I_{abC} = 38\,\text{A}$, $I_{ab} = 0\,\text{A}$, $I_{bc} = I_{ca} = 38\,\text{A}$, $P_1 = -12{,}5\,\text{kW}$, $P_2 = 12{,}5\,\text{kW}$.

Zadanie 7.25

W układzie jak na rysunku 7.21 wyznaczyć wskazania amperomierzy i watomierzy.

Dane: $U = 380\text{V}$ - napięcie międzyfazowe w układzie zasilającym symetrycznym, $R = 20\Omega$, $X_L = 20\Omega$. Wykonać wykresy wskazowe.



Rys.7.21

Odpowiedź: $I_a = I_c = 19\text{A}$, $I_b = 37{,}12\text{A}$, $P_1 = P_2 = 3610\text{W}$.

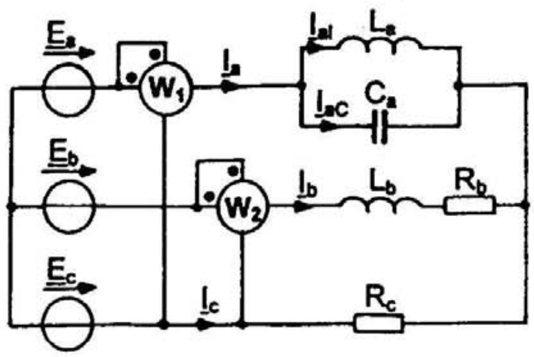
Zadanie 7.26

Jak zmienią się wskazania przyrządów w poprzednim zadaniu jeżeli cewka i opornik zamienione zostaną ze sobą miejscami.
Wykonać wykresy wskazowe.

Odpowiedź: $I_a = I_c = 19\,\text{A}$, $I_b = 11{,}29\,\text{A}$, $P_1 = 6252{,}5\,\text{W}$, $P_2 = 967{,}5\,\text{W}$.

Zadanie 7.27

W obwodzie przedstawionym na rysunku 7.22 obliczyć rozpływ prądów i wskazania watomierzy. $\underline{E}_a = E_f = 220\,\text{V}$, $\omega L_a = \dfrac{1}{\omega C_a} = 10\Omega$, $R_b = 11\Omega$, $\omega L_b = 12\Omega$, $R_c = 5\Omega$.



Rys.7.22

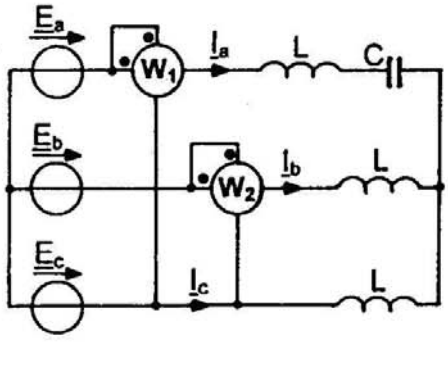
Odpowiedź: $I_a = 0\,\text{A}$, $I_b = I_c = 19\,\text{A}$, $P_1 = 0\,\text{W}$, $P_2 = 5776\,\text{W}$.

Zadanie 7.28

W obwodzie przedstawionym na rysunku 7.23 obliczyć rozpływ prądów i wskazania watomierzy.

$$\underline{E}_a = E_f = 220\text{V},$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 38\Omega.$$

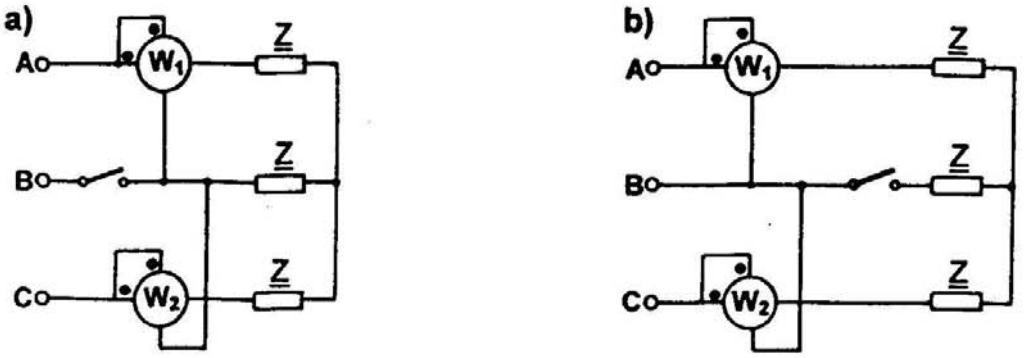


Rys.7.23

Odpowiedź: $\underline{I}_a = 17{,}32\text{A} = I_a$, $\underline{I}_b = (-8{,}66 - j5)\text{A}$, $I_b = 10\,\text{A}$,
$\underline{I}_c = (-8{,}66 + j5)\,\text{A}$, $I_c = 10\,\text{A}$, $P_1 = 3291\,\text{W}$,
$P_2 = -3291\,\text{W}$, $P = P_1 + P_2 = 0\,\text{W}$.

Zadanie 7.29

W układach pokazanych na rysunku 7.24a i b wyznaczyć wskazania watomierzy w przypadku przerwy przewodu fazy B. Dane: układ zasilający symetryczny o napięciu międzyfazowym $U=380\text{V}$, $\underline{Z}=20+j15$.



Rys.7.24

Odpowiedź: a) $P_1=P_2=1155{,}2\text{W}$, b) $P_1=-348\,\text{W}$, $P_2=2658{,}4\,\text{W}$.

Zadanie 7.30

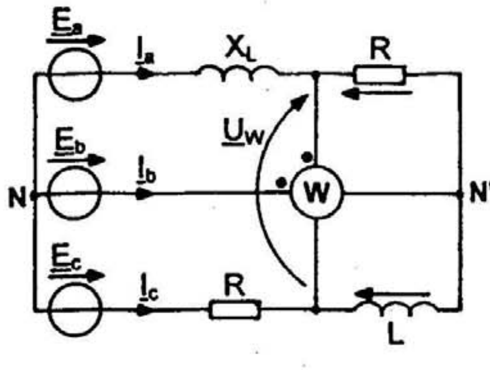
W układzie pokazanym na rysunku 7.25 obliczyć wskazanie watomierza.

Dane: $\underline{E}_a=j220\,\text{V}$,

$\underline{E}_b=(190-j110)\,\text{V}$,

$\underline{E}_c=(-190-j110)\,\text{V}$,

$R=X_L=10\Omega$.



Rys.7.25

Rozwiązanie: $\underline{U}_{N'N}=\underline{E}_b=(190-j110)\,\text{V}$,

$$\underline{I}_a=\frac{\underline{E}_a-\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_a}=\frac{380e^{j120^o}}{10\sqrt{2}\,e^{j45^o}}=\frac{38}{\sqrt{2}}e^{j75^o}=(6{,}95+j25{,}95)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_c=\frac{\underline{E}_c-\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_c}=\frac{380e^{j180^o}}{10\sqrt{2}\,e^{j45^o}}=\frac{38}{\sqrt{2}}e^{j135^o}=(-19+j19)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_b = 12{,}05 - j44{,}95 = 46{,}54e^{-j75^o},$$

$$\underline{U}_w = R\underline{I}_a - jX_L\underline{I}_c = \frac{380}{\sqrt{2}}e^{j75^o} - \frac{380}{\sqrt{2}}e^{j225^o} =$$

$$= 69{,}54 + j259{,}54 + 190 + j190 = (259{,}54 + j449{,}54)\mathrm{V} =$$

$$= 519{,}1e^{j60^o},$$

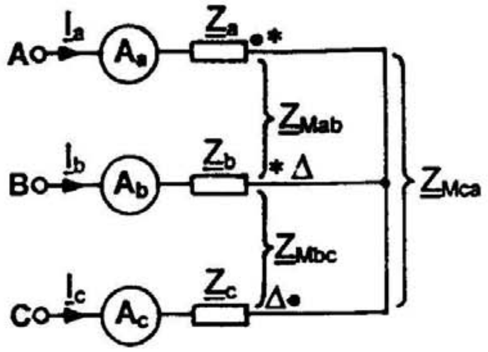
$$P = \mathrm{Re}\left\{519{,}1e^{j60^o} \cdot 46{,}54e^{j75^o}\right\} = -17083\,\mathrm{W} \approx -17\,\mathrm{kW}.$$

Odpowiedź: Watomierz wskazuje moc ujemną o wartości P=-17kW.

Zadanie 7.31

W układzie pokazanym na rysunku 7.26a wyznaczyć wskazania amperomierzy.

Dane: Układ zasilający symetryczny $\underline{E}_a = 200\,\mathrm{V}$, $\underline{Z}_a = j45\Omega$, $\underline{Z}_b = (15 + j30)\Omega$, $\underline{Z}_b = (15 + j30)\Omega$, impedancje sprzęgające $\underline{Z}_{Mab} = j15\Omega$, $\underline{Z}_{Mbc} = j10\Omega$, $\underline{Z}_{Mca} = j15\Omega$.



Rys.7.26a

Rozwiązanie: Po eliminacji sprzężeń magnetycznych impedancje w poszczególnych gałęziach mają wartości jak na rysunku 7.26b

Rys.7.26b

Poszczególne napięcia międzyfazowe można zapisać w następujący sposób:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_a\underline{I}_a + \underline{Z}_{Mab}\underline{I}_b + \underline{Z}_{Mca}\underline{I}_c - \underline{Z}_b\underline{I}_b - \underline{Z}_{Mbc}\underline{I}_c - \underline{Z}_{Mab}\underline{I}_a,$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{Z}_b\underline{I}_b + \underline{Z}_{Mbc}\underline{I}_c + \underline{Z}_{Mab}\underline{I}_a - \underline{Z}_c\underline{I}_c - \underline{Z}_{Mca}\underline{I}_a - \underline{Z}_{Mbc}\underline{I}_b,$$

$$\underline{U}_{N'N}=\frac{\underline{E}_a\underline{Y}_a+\underline{E}_b\underline{Y}_b+\underline{E}_c\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a+\underline{Y}_b+\underline{Y}_c}=\frac{\dfrac{200}{j25}+\dfrac{(-100-j173)}{15+j20}+\dfrac{(-100+j173)}{15+j20}}{\dfrac{1}{j25}+\dfrac{1}{15+j20}+\dfrac{1}{15+j20}}=$$

$$=\frac{-j5000+(-100-j173)(15-j20)+(-100+j173)(15-j20)}{30-j65}=$$

$$=\frac{(-3000-j1000)(30+j65)}{5125}=\frac{-25000-j225000}{5125}=$$

$$=(-4{,}88-j43{,}9)\text{V},$$

$$\underline{I}_a=\frac{\underline{E}_a-\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_a'}=\frac{200+4{,}88+j43{,}9}{j25}=(1{,}76-j8{,}20)\,\text{A},$$

$$\underline{I}_b=\frac{\underline{E}_b-\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_b'}=\frac{-100-j173+4{,}88+j43{,}9}{15+j20}=\frac{-95{,}12-j129{,}1}{15+j20}=$$

$$=\frac{-4008{,}8-j34{,}1}{625}=(-6{,}43-j0{,}06)\text{A},$$

$$\underline{I}_c=\frac{\underline{E}_c-\underline{U}_{N'N}}{\underline{Z}_c'}=\frac{-100+j173+4{,}88+j43{,}9}{15+j20}=\frac{-95{,}12+j216{,}9}{15+j20}=$$

$$=\frac{2911{,}2+j5155{,}9}{625}=(4{,}66+j8{,}26)\text{A},$$

$$I_a=\sqrt{1{,}76^2+(-8{,}2)^2}=8{,}39\text{ A},$$

$$I_b=\sqrt{(-6{,}43)^2+(-0{,}06)^2}=6{,}43\text{ A},$$

$$I_c=\sqrt{4{,}66^2+8{,}26^2}=9{,}48\text{ A}.$$

Odpowiedź: Amperomierze wskazują odpowiednio $I_a=8{,}39\text{A}$, $I_b=6{,}43\text{A}$, $I_c=9{,}48\text{A}$.

Zadanie 7.32

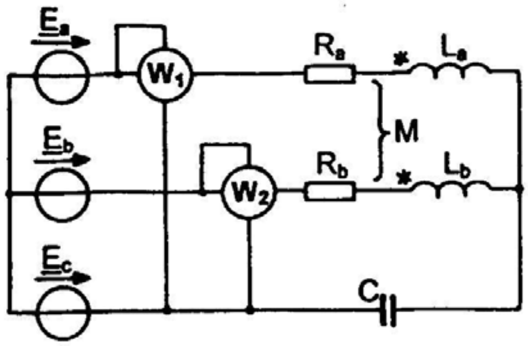
W obwodzie przedstawionym na rysunku 7.27 obliczyć wskazania watomierzy oraz moc czynną.

$\underline{E}_a = 220\,\mathrm{V}$, $R_a = 60\Omega$,

$R_b = 10\Omega$, $\omega L_a = 90\Omega$,

$\omega L_b = 40\Omega$, $\dfrac{1}{\omega C} = 30\Omega$,

$k=0{,}5$.



Rys.7.27

Odpowiedź: $P_1 = 1200\mathrm{W}$, $P_2 = 7220\mathrm{W}$, $P = 8420\mathrm{W}$.

Zadanie 7.33

Silnik trójfazowy wysokonapięciowy o mocy $P=200\mathrm{kW}$, współczynniku mocy $\cos\varphi = 0{,}9$ i sprawności $\eta = 0{,}9$ jest zasilany z układu symetrycznego o napięciu międzyfazowym $U=6\mathrm{kV}$. Obliczyć prąd silnika a następnie dobrać moc bierną kondensatora tak, aby wypadkowy współczynnik mocy $\cos\varphi_w = 0{,}96$, Jaka jest pojemność jednej fazy kondensatora połączonego w gwiazdę? Obliczyć spadek napięcia w kablu miedzianym zasilającym ten silnik. Długość kabla $l=250\mathrm{m}$, przekrój żyły $S = 10\mathrm{mm}^2$, $\gamma_{Cu} = 57\dfrac{\mathrm{Sm}}{\mathrm{mm}^2}$. Reaktancję kabla pominąć.

Rozwiązanie: $I = \dfrac{P_e}{\sqrt{3}U\cos\varphi} = \dfrac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi\eta} = \dfrac{200}{\sqrt{3}\cdot 6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9} = 23{,}76\,\mathrm{A}$,

Przy wypadkowym współczynniku mocy $\cos\varphi_w = 0{,}96$ moduł prądu spadnie do wartości

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U\cos\varphi_w\eta} = \frac{200}{\sqrt{3}\cdot 6\cdot 0{,}96\cdot 0{,}9} = 22{,}27\,\mathrm{A}.$$

W obydwu wypadkach składowa czynna prądu wynosi

$$I_{cz} = 23{,}76\cdot 0{,}9 = 22{,}27\cdot 0{,}96 = 21{,}38\,\mathrm{A},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-0{,}9^2} = 0{,}44,$$

$$I_b = 23{,}76 \cdot 0{,}44 = 10{,}45\,\text{A},$$

I_{bw} - prąd bierny wypadkowy po dołączeniu baterii kondensatorów,

$$I_{bw} = \sqrt{22{,}27^2 - 21{,}38^2} = 6{,}23\,\text{A},$$

I_c - prąd jednej fazy baterii kondensatorów,

$$I_c = I_b - I_{bw} = 10{,}45 - 6{,}23 = 4{,}22\,\text{A},$$

Q_k - moc bierna baterii kondensatorów, potrzebna do poprawienia współczynnika mocy z wartości $\cos\varphi$ do wartości wypadkowej $\cos\varphi_w$ przy danej mocy czynnej P

$$Q_k = P\left(tg\varphi - tg\varphi_w\right),$$

$$\cos\varphi = 0{,}9 \quad \text{to} \quad tg\varphi = 0{,}49\,,$$

$$\cos\varphi_w = 0{,}96 \quad \text{to} \quad tg\varphi_w = 0{,}29,$$

$$Q_k = 222{,}22(0{,}49 - 0{,}29) = 44{,}44\,\text{kvar},$$

$$C = \frac{Q_k}{U^2\omega} = \frac{44{,}44 \cdot 10^3}{36 \cdot 10^6 \cdot 314} = 3{,}93\,\mu\text{F}$$ - pojemność jednej fazy kondensatora połączonego w gwiazdę,

$$\Delta U = \sqrt{3}R_p I \cos\varphi_w, \quad \text{gdyż} \quad X_p = 0\,,$$

$$\Delta U = \sqrt{3}\frac{250}{57 \cdot 10} \cdot 22{,}27 \cdot 0{,}96 = 16{,}29\,\text{V},$$

ΔU - międzyfazowy spadek napięcia 16,29V=0,27%.

Odpowiedź: I=23,76A, Q_k=44,44kvar, C=3,93μF, ΔU=16,29V(≈0,27%). Istnieje drugie rozwiązanie Q_k=173,33kvar odpowiadające przekompensowaniu.

Zadanie 7.34

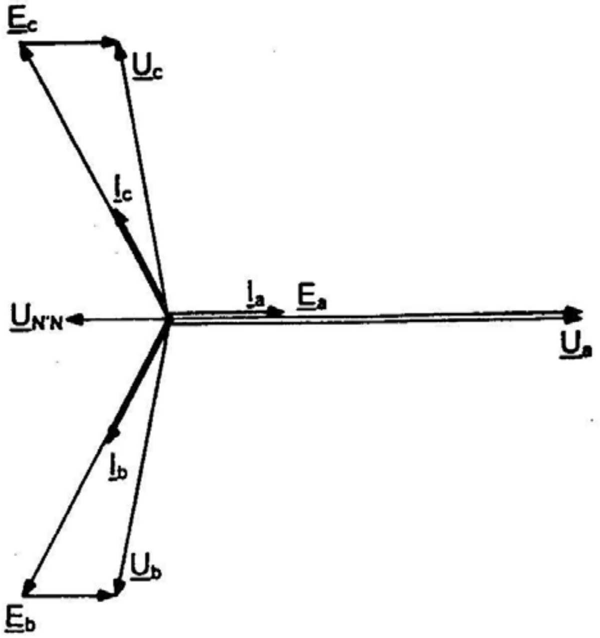
Obwód przedstawiony na rysunku 7.28a jest zasilany symetrycznym źródłem trójfazowym o napięciu fazowym $\underline{E}_a$=220V. Impedancje poszczególnych faz wynoszą: $\underline{Z}_a = 5\Omega$, $\underline{Z}_b = (3 + j)\Omega$, $\underline{Z}_c = (3 - j)\Omega$, $\underline{Z}_N = 0{,}149\Omega$. Wyznaczyć prądy i napięcia fazowe odbiornika dla dwóch przypadków: a) przy otwartym wyłączniku, b) przy zamkniętym wyłączniku. Wykonać wykres wskazowy dla przypadku a).

$$\underline{I}_c = \underline{Y}_c \underline{U}_c = (0{,}3 + j0{,}1)(-35 + j190) =$$

$$= (-29{,}5 + j53{,}5)A = 61{,}2e^{j118{,}5^o}.$$

Rysunek 7.28b przedstawia wykres wskazowy dla przypadku a).

Rys.7.28b



Dla przypadku b)

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{E}_a\underline{Y}_a + \underline{E}_b\underline{Y}_b + \underline{E}_c\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N} =$$

$$= \frac{220 \cdot 0{,}2 + (-110 - j190)(0{,}3 - j0{,}1) + (-110 + j190)(0{,}3 + j0{,}1)}{0{,}2 + 0{,}3 - j0{,}1 + 0{,}3 + j0{,}1 + 6{,}7},$$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{-60}{7{,}5} = -8\text{V},$$

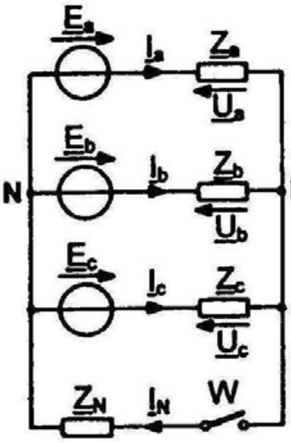
$$\underline{U}_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N} = 220 + 8 = 228\text{V} = 228e^{j0^o},$$

$$\underline{U}_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N} = -110 - j190 + 8 =$$

$$= (-102 - j190)V = 215{,}65e^{-j118{,}5^o},$$

$$\underline{U}_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} = -110 + j190 + 8 =$$

$$= (-102 + j190)\text{V} = 215{,}65e^{j118{,}5^o},$$



Rys.7.28a

Rozwiązanie: $\underline{E}_a = 220V = 220e^{j0^o}$,

$\underline{E}_b = (-110 - j190)V = 220e^{-j120^o}$,

$\underline{E}_c = (-110 + j190)V = 220e^{j120^o}$,

$\underline{Y}_a = \dfrac{1}{\underline{Z}_a} = 0{,}2\text{S}$,

$\underline{Y}_b = \dfrac{1}{\underline{Z}_b} = \dfrac{1}{3+j} = \dfrac{3-j}{10} = (0{,}3 - j0{,}1)\text{S}$,

$\underline{Y}_b = 0{,}32e^{-j18^o}$,

$\underline{Y}_c = (0{,}3 + j0{,}1)S = 0{,}32e^{j18^o}$, $\quad \underline{Y}_N = \dfrac{1}{\underline{Z}_N} = \dfrac{1}{0{,}149} = 6{,}71\text{S}$.

Dla przypadku a)

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{E}_a\underline{Y}_a + \underline{E}_b\underline{Y}_b + \underline{E}_c\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} =$$

$$= \frac{220 \cdot 0{,}2 + (-110 - j190)(0{,}3 - j0{,}1) + (-110 + j190)(0{,}3 + j0{,}1)}{0{,}2 + 0{,}3 - j0{,}1 + 0{,}3 + j0{,}1},$$

$$\underline{U}_{N'N} = \frac{44 - 52 - 52 - j46 + j46}{0{,}8} = \frac{-60}{0{,}8} = -75\text{V},$$

$$\underline{U}_a = \underline{E}_a - \underline{U}_{N'N} = 220 + 75 = 295V = 295e^{j0^o},$$

$$\underline{U}_b = \underline{E}_b - \underline{U}_{N'N} = -110 - j190 + 75 = (-35 - j190)\text{V} = 193e^{-j100^o},$$

$$\underline{U}_c = \underline{E}_c - \underline{U}_{N'N} = -110 + j190 + 75 = (-35 + j190)V = 193e^{j100^o},$$

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_a\underline{U}_a = 0{,}2 \cdot 295 = 59\,\text{A},$$

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_a \underline{U}_a = 0{,}2 \cdot 228 = 45{,}6\,\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_b = \underline{Y}_b \underline{U}_b = (0{,}3 - j0{,}1)(-102 - j190) =$$
$$= (-49{,}6 - j46{,}8)\mathrm{A} = 68{,}2e^{-j137^o},$$

$$\underline{I}_c = \underline{Y}_c \underline{U}_c = (0{,}3 + j0{,}1)(-102 + j190) =$$
$$= (-49{,}6 + j46{,}8)\mathrm{A} = 68{,}2e^{j137^o},$$

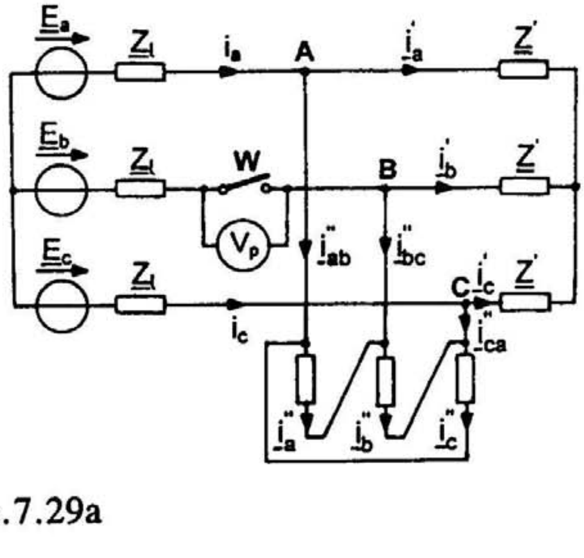
$$\underline{I}_N = \underline{Y}_N \underline{U}_{N'N} = 6{,}71 \cdot (-8) = -53{,}68\,\mathrm{A},$$

Odpowiedź: a) $U_a = 295\mathrm{V}$, $I_a = 59\mathrm{A}$, $U_b = U_c = 193\mathrm{V}$, $I_b = I_c = 61{,}2\mathrm{A}$,
b) $U_a = 228\mathrm{V}$, $I_a = 45{,}6\mathrm{A}$, $U_b = U_c = 215{,}65\mathrm{V}$,
$I_b = I_c = 68{,}2\mathrm{A}$, $I_N = 53{,}68\mathrm{A}$.

Zadanie 7.35

Prądnica trójfazowa symetryczna o napięciu fazowym $\underline{E}_a = 229\mathrm{V}$ zasila dwa odbiorniki symetryczne, jeden połączony w gwiazdę, drugi w trójkąt. Wyznaczyć prądy liniowe I_a, I_b, I_c, prądy fazowe odbiorników $I_a', I_b', I_c', I_{ab}'', I_{bc}'', I_{ca}''$, w przypadku przerwy w fazie B w miejscu zaznaczonym na rysunku 7.29a (otwarcie wyłącznika W). Obliczyć napięcia międzyfazowe odbiorników i napięcie między stykami wyłącznika.

Dane: $\underline{Z}' = 5\Omega$, $\underline{Z}'' = (9 + j12)\Omega$, $\underline{Z}_c = (0{,}1 + j0{,}25)\Omega$.



Rys.7.29a

Rozwiązanie: Rysunek 7.29b przedstawia wykres wskazowy napięć zasilających, zaznaczono na nim również prądy liniowe $\underline{I}_a$ oraz $\underline{I}_c$.

$\underline{E}_a = 229\text{V}$.

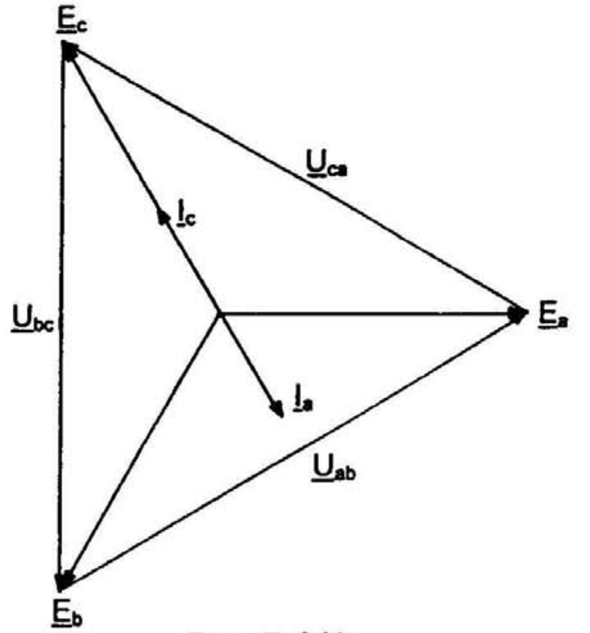
$\underline{E}_b = (-114{,}5 - j198)\text{V} = 229e^{-j120^o}$,

$\underline{E}_c = (-114{,}5 + j198)\text{V} = 229e^{j120^o}$,

$\underline{U}_{ab} = (343{,}5 + j198)\text{V} = 396e^{j30^o}$,

$\underline{U}_{bc} = -j396\text{V} = 396e^{-j90^o}$,

$\underline{U}_{ca} = (-343{,}5 + j198)\text{V} = 396e^{j150^o}$.



Rys.7.29b

W pierwszym kroku układ symetryczny impedancji $\underline{Z}'$ zostanie zamieniony z gwiazdy na trójkąt

$$\underline{Z}_t' = 3\underline{Z}_g' = 3\underline{Z}' = 15\Omega.$$

Następnie obydwa trójkąty zostaną zamienione na jeden trójkąt zastępczy. Dla pojedynczego boku trójkąta impedancji zastępczej

$$\underline{Z}_{tz} = \frac{\underline{Z}_t'\underline{Z}''}{\underline{Z}_t' + \underline{Z}''} = \frac{15(9 + j12)}{24 + j12} = \frac{(135 + j180)(24 - j12)}{720} =$$

$$= \frac{5400 + j2700}{720} = (7{,}5 + j3{,}75)\Omega.$$

Po ponownej zamianie trójkąta na gwiazdę

$$\underline{Z}_{gz} = \frac{1}{3}\underline{Z}_{tz} = (2{,}5 + j1{,}25)\Omega.$$

Ponieważ w przewodzie liniowym fazy B jest przerwa, to prądy płyną tylko w fazach A i C.

$$\underline{Z}_{ac} = 2\underline{Z}_l + 2\underline{Z}_{gz} = 2(0{,}1 + j0{,}25) + 2(2{,}5 + j1{,}25),$$

$$\underline{Z}_{ac} = (5{,}2 + j3)\Omega = 6e^{j30^o},$$

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_{ac}}{\underline{Z}_{ac}} = \frac{396e^{-j30^o}}{6e^{j30^o}} = 66e^{-j60^o} = \left(33 - j57{,}2\right)\text{A},$$

$$\underline{I}_c = 66e^{j120^o} = \left(-33 + j57{,}2\right)\text{A},$$

$$I_a = 66\,\text{A}, \quad I_b = 0\,\text{A}, \quad I_c = 66\,\text{A},$$

$$\Delta\underline{U}_{la} = \underline{Z}_l\underline{I}_a = 0{,}27e^{j68^o}66e^{-j60^o} = 17{,}82e^{j8^o} = \left(17{,}65 + j2{,}48\right)\text{V},$$

$$\Delta\underline{U}_{lc} = \underline{Z}_l\underline{I}_c = 0{,}27e^{j68^o}66e^{j120^o} = 17{,}82e^{j188^o} = \left(-17{,}65 - j2{,}48\right)\text{V}.$$

Z koła napięć wynika, że

$$\underline{E}_a - \Delta\underline{U}_{la} - 2\underline{Z}'\underline{I}'_a + \Delta\underline{U}_{lc} - \underline{E}_c = 0,$$

$$\underline{I}'_a = \frac{\underline{E}_a - \Delta\underline{U}_{la} + \Delta\underline{U}_{lc} - \underline{E}_c}{2\underline{Z}'} = \frac{229 - 35{,}3 - j4{,}96 + 114{,}5 - j198}{10} =$$

$$= \frac{308{,}2 - j202{,}96}{10} = 30{,}82 - j20{,}30 = 36{,}9e^{-j33^o},$$

$$I'_a = I'_c = \sqrt{30{,}82^2 + 20{,}30^2} = \sqrt{1361{,}96} = 36{,}9\,\text{A},$$

$$U'_{ca} = \sqrt{308{,}2^2 + 202{,}96^2} = \sqrt{136180} = 369\,\text{V},$$

ponieważ $\underline{U}'_{ac} = \left(308{,}2 - j202{,}96\right)\text{V}$ patrz wyrażenie na prąd $\underline{I}'_a$

$$\underline{U}'_{ab} = \underline{U}'_{bc} = \frac{1}{2}\underline{U}'_{ac} = \left(154{,}1 - j101{,}48\right)\text{V},$$

$$U'_{ab} = U'_{bc} = \sqrt{154{,}1^2 + 101{,}48^2} = \sqrt{34045} = 184{,}5\,\text{V}.$$

Napięcie na wyłączniku W

$$\underline{E}_a - \Delta\underline{U}_{la} - \underline{U}'_{ab} - \underline{U}_p - \underline{E}_b = 0,$$

$$\underline{U}_p = \underline{E}_a - \Delta\underline{U}_{la} - \underline{U}'_{ab} - \underline{E}_b,$$

$$\underline{U}_p = 229 - 17{,}65 - j2{,}48 - 154{,}1 + j101{,}48 + 114{,}5 + j198 =$$
$$= 171{,}75 + j297,$$

$$U_p = \sqrt{171{,}75^2 + 297^2} = \sqrt{117707{,}06} = 343{,}1\,\mathrm{V},$$

$$\underline{U}''_{ab} = \underline{U}'_{ab}, \quad \underline{U}''_{bc} = \underline{U}'_{bc}, \quad \underline{U}''_{ca} = \underline{U}'_{ca},$$

$$\underline{I}''_a = \frac{\underline{U}''_{ab}}{\underline{Z}''} = \frac{154{,}1 - j101{,}48}{9 + j12} = \frac{(154{,}1 - j101{,}48)(9 - j12)}{81 + 144} =$$
$$= \frac{169{,}12 - j2762{,}52}{225} = (0{,}75 - j12{,}28)\mathrm{A} = 12{,}3e^{-j87^o},$$

$$\underline{I}''_b = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}''} = \underline{I}_a, \quad \text{ponieważ} \quad \underline{U}''_{ab} = \underline{U}''_{bc},$$

$$\underline{I}''_c = \frac{\underline{U}''_{ca}}{\underline{Z}''} = \frac{-308{,}2 + j202{,}96}{9 + j12} = (-1{,}5 + j24{,}56)A = 24{,}6e^{j93^o},$$

$$\underline{I}''_{ab} = \underline{I}''_a - \underline{I}''_c = 0{,}75 - j12{,}28 + 1{,}5 - j24{,}56 = (2{,}25 - j36{,}84)\,\mathrm{A},$$

$$\underline{I}''_{ab} = 36{,}9e^{-j87^o},$$

$$\underline{I}''_{bc} = \underline{I}''_b - \underline{I}''_a = 0{,}75 - j12{,}28 - 0{,}75 + j12{,}28 = 0\,\mathrm{A},$$

$$\underline{I}''_{ca} = \underline{I}''_c - \underline{I}''_b = -1{,}5 + j24{,}56 - 0{,}75 + j12{,}28 = (-2{,}25 + j36{,}84)\,\mathrm{A},$$

$$\underline{I}''_{ca} = 36{,}9e^{j93^o}.$$

Odpowiedź: $I_a = I_c = 66\,\mathrm{A}$, $I'_a = I'_c = 36{,}9\,\mathrm{A}$, $I_b = I'_b = 0\,\mathrm{A}$,
$I''_{ab} = I''_{ca} = 36{,}9\mathrm{A}$, $\underline{I}''_{bc} = 0$,
$U'_{ab} = U'_{bc} = U''_{ab} = U''_{bc} = 184{,}5\,\mathrm{V}$, $U'_{ca} = U''_{ca} = 369\,\mathrm{V}$,
$U_p = 343\,\mathrm{V}$. Po przekształceniu gwiazda trójkąt i wyznaczeniu impedancji zastępczej, można się posługiwać tylko modułami (przeanalizuj wykres wskazowy na rysunku 7.29b).

8. METODA SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH

Zadanie 8.1

Wyznaczyć składowe symetryczne układów napięć niesymetrycznych podanych na rysunkach 8.1 a do f.

Odpowiedź:

a) $\underline{U}_0 = j100\text{V}$, $\underline{U}_1 = j100\left(1+\sqrt{3}\right)\text{V}$,

$\underline{U}_2 = j100\left(1-\sqrt{3}\right)\text{V}$,

b) $\underline{U}_0 = 100(1+j)\text{V}$,

$\underline{U}_1 = (-50+j13{,}4)\text{V}$,

$\underline{U}_2 = (-50+j186{,}6)\text{V}$,

c) $\underline{U}_0 = (50+j86{,}6)\text{V}$, $\underline{U}_1 = 200\text{V}$,

$\underline{U}_2 = (50-j86{,}6)\text{V}$,

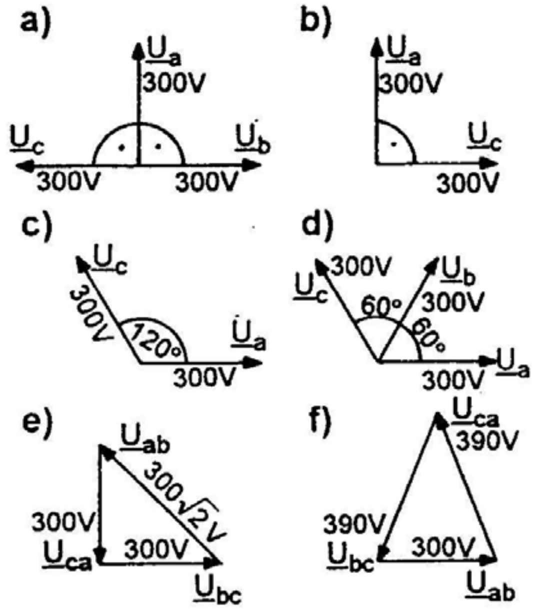
d) $\underline{U}_0 = (100+j173{,}2)\text{V}$, $\underline{U}_1 = 100\text{V}$,

$\underline{U}_2 = (100-j173{,}2)\text{V}$,

e) $\underline{U}_0 = 0\text{V}$, $\underline{U}_1 = (-236{,}6+j236{,}6)\text{V}$,

$\underline{U}_2 = (-63{,}4+j63{,}4)\text{V}$,

f) $\underline{U}_0 = 0\text{V}$, $\underline{U}_1 = 358\text{V}$, $\underline{U}_2 = -58\text{V}$.



Rys. 8.1

Zadanie 8.2

Wyznaczyć napięcia $\underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c$ mając dane składowe symetryczne dla następujących przypadków:

a) $\underline{U}_0 = 100\text{V}$, $\underline{U}_1 = 100\left(1+\sqrt{3}\right)\text{V}$, $\underline{U}_2 = 100\left(1-\sqrt{3}\right)\text{V}$,

b) $\underline{U}_0 = 100(1-j)\text{V}$, $\underline{U}_1 = (186{,}6+j50)\text{V}$, $\underline{U}_2 = (13{,}4+j50)\text{V}$,

c) $\underline{U}_0 = (50-j86{,}6)\text{V}$, $\underline{U}_1 = 200\text{V}$, $\underline{U}_2 = (50+j86{,}6)\text{V}$,

d) $\underline{U}_0 = (100-j173{,}2)\text{V}$, $\underline{U}_1 = 100\text{V}$, $\underline{U}_2 = (100+j173{,}2)\text{V}$,

e) $\underline{U}_0 = 0\text{V}$, $\underline{U}_1 = (86{,}6+j323{,}2)\text{V}$, $\underline{U}_2 = (86{,}6-j23{,}2)\text{V}$,

f) $\underline{U}_0 = 0\text{V}$, $\underline{U}_1 = 358\text{V}$, $\underline{U}_2 = -58\text{V}$,

Odpowiedź: a) $\underline{U}_a = 300\text{V}$, $\underline{U}_b = -j300\text{V}$, $\underline{U}_c = j300\text{V}$,

b) $\underline{U}_a = 300\text{V}$, $\underline{U}_b = -j300\text{V}$, $\underline{U}_c = 0\text{V}$,

c) $\underline{U}_a = 300\text{V}$, $\underline{U}_b = (-150 - j259{,}8)\text{V}$, $\underline{U}_c = 0\text{V}$,

d) $\underline{U}_a = 300\text{V}$, $\underline{U}_b = (-150 - j259{,}8)\text{V}$, $\underline{U}_c = (150 - j259{,}8)\text{V}$,

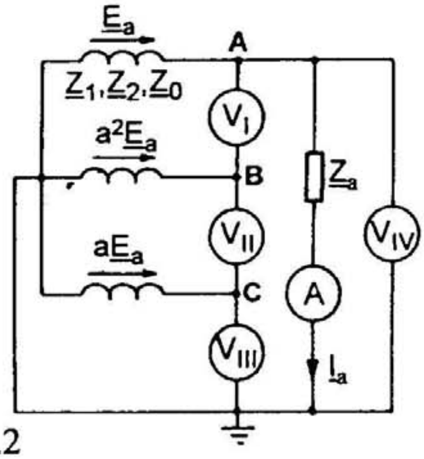
e) $\underline{U}_a = j300\text{V}$, $\underline{U}_b = 300\text{V}$, $\underline{U}_c = (-300 - j300)\text{V}$,

f) $\underline{U}_a = 300\text{V}$, $\underline{U}_b = (-150 - j360)\text{V}$, $\underline{U}_c = (-150 + j360)\text{V}$,

Zadanie 8.3

Faza A prądnicy o uziemionym punkcie neutralnym została zwarta z ziemią przez impedancję $\underline{Z}_a$ jak pokazano na rysunku 8.2. Wyznaczyć wskazania amperomierza i woltomierzy V_{I}, V_{II}, V_{III}, V_{IV}.

Dane: E_f=220V ; $\underline{Z}_1 = j3{,}6\Omega$;
$\underline{Z}_2 = j1{,}8\Omega$; $\underline{Z}_0 = j0{,}6\Omega$;
$\underline{Z}_a = j0{,}2\Omega$.



Rys. 8.2

Rozwiązanie: Rozszerzone prawo Ohma dla składowych symetrycznych

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{U}_1, \quad 0 = \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{U}_2, \quad 0 = \underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{U}_0.$$

Dodatkowe warunki w miejscu zwarcia

$$\underline{U}_a = \underline{Z}_a\underline{I}_a, \quad \underline{U}_a = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = \underline{Z}_a\left(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0\right),$$

$$\underline{I}_b = 0, \quad \underline{I}_b = \underline{I}_0 + a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 = 0,$$

$$\underline{I}_c = 0, \quad \underline{I}_c = \underline{I}_0 + a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2 = 0.$$

Z odjęcia stronami dwóch ostatnich równań wynika, że

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2, \quad \underline{I}_b = \underline{I}_0 + \left(a^2 + a\right)\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \underline{I}_1 = 0, \quad \text{czyli} \quad \underline{I}_0 = \underline{I}_1 = \underline{I}_2.$$

Po zsumowaniu trzech pierwszych równań (rozszerzonych praw Ohma dla składowych symetrycznych) otrzymuje się

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0,$$

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{Z}_a\left(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0\right),$$

$$\underline{E}_1 = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_a\right)\underline{I}_0,$$

a prąd zwarcia doziemnego

$$\underline{I}_a = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 3\underline{I}_0 = \frac{3\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_a},$$

$$\underline{E}_1 = E_f,$$

$$\underline{I}_a = \frac{660}{j6{,}6} = -j100\text{A}, \qquad I_a = 100\text{A}, \qquad \underline{I}_0 = \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = -j33{,}33\text{A},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 - \underline{Z}_1\underline{I}_1 = 220 - j3{,}6(-j33{,}33) = 220 - 120 = 100\text{V},$$

$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_2\underline{I}_2 = -j1{,}8(-j33{,}33) = -60\text{V},$$

$$\underline{U}_a = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 100 - 60 - 20 = 20\text{V},$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_b &= a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + \underline{U}_0 = \\ &= \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)100 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-60) - 20 = \\ &= -50 + 30 - 20 - j50\sqrt{3} - j30\sqrt{3} = \left(-40 - j80\sqrt{3}\right)\text{V},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_c &= a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + \underline{U}_0 = \\ &= \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)100 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-60) - 20 = \\ &= -50 + 30 - 20 + j50\sqrt{3} + j30\sqrt{3} = \left(-40 + j80\sqrt{3}\right)\text{V},\end{aligned}$$

V_{I} $\quad \underline{U}_{ab} = (60 + j138{,}56)\text{V}$, $\quad U_{ab} = 151\text{V}$,

V_{II} $\quad \underline{U}_{bc} = -j160\sqrt{3}\text{V}$, $\quad U_{bc} = 277{,}13\text{V}$,

V_{III} $\quad \underline{U}_c = \left(-40 + j80\sqrt{3}\right)\text{V}$, $\quad U_c = 144{,}22\text{V}$,

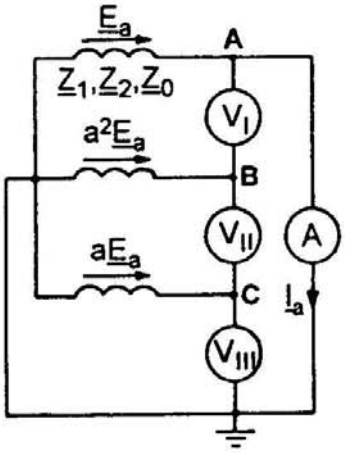
V_{IV} $\quad \underline{U}_a = 20\text{V}$, $\quad U_a = 20\text{V}$.

Odpowiedź : I_a=100A; V_I=U_{ab}=151V; V_{II}=U_{bc}=277,13V, V_{III}=U_c=144,22V; V_{IV}=U_a=20V.

Zadanie 8.4

Faza A prądnicy z uziemionym punktem neutralnym została zwarta z ziemią jak pokazano na rysunku 8.3. Wyznaczyć wskazania amperomierza i woltomierzy V_{I}, V_{II}, V_{III}.

Dane: E_f=220V, $\underline{Z}_1 = j8\Omega$, $\underline{Z}_2 = j2\Omega$, $\underline{Z}_0 = j1\Omega$.



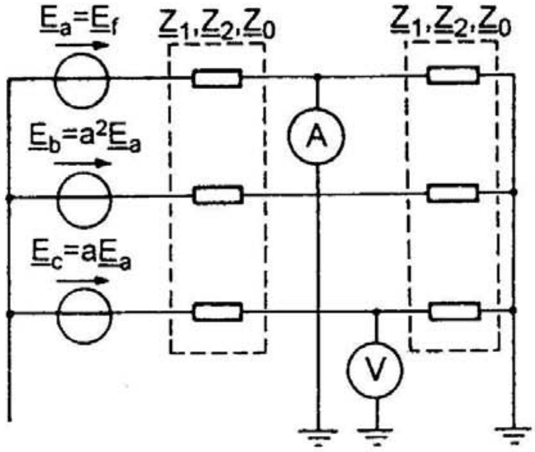
Rys. 8.3

Odpowiedź: I_a=I=60A, V_{I}=U_{ab}=91,65V, V_{II}=U_{bc}=173,2V, V_{III}=U_c=91,65V.

Zadanie 8.5

W układzie trójfazowym jak na rysunku 8.4 nastąpiło zwarcie fazy A z ziemią. Wyznaczyć wskazania przyrządów.

Dane: E_f=240V, $\underline{Z}_1 = j9\Omega$, $\underline{Z}_2 = j2\Omega$, $\underline{Z}_0 = j1\Omega$,



Rys. 8.4

Odpowiedź: I=60A, U_c=U=91,65V.

Zadanie 8.6

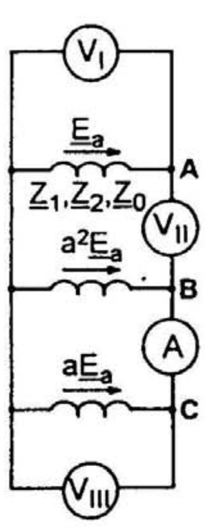
Na zaciskach prądnicy trójfazowej symetrycznej nastąpiło zwarcie faz B i C jak pokazano na rysunku 8.5. Obliczyć wskazania przyrządów.

Dane: E_f=220V, $\underline{Z}_1 = j8\Omega$, $\underline{Z}_2 = j3\Omega$.

Rozwiązanie: Rozszerzone prawo Ohma dla składowych symetrycznych:

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_1, \quad 0 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2,$$

$$0 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \underline{U}_0.$$



Rys.8.5

Dodatkowe warunki w miejscu zwarcia:

$$\underline{I}_a = 0, \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0,$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c = 0.$$

Po rozwinięciu powyższych warunków

$$\underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0,$$

$$\underline{I}_0 + a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 + \underline{I}_0 + a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2 = 0,$$

$$a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + \underline{U}_0 - a\underline{U}_1 - a^2\underline{U}_2 - \underline{U}_0 = 0.$$

Z dwóch pierwszych warunków wynika, że

$$2\underline{I}_0 - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 \quad \text{i} \quad \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0 \quad \text{czyli} \quad \underline{I}_0 = 0 \quad \text{i} \quad \underline{I}_1 = -\underline{I}_2.$$

Z ostatniego równania napięciowego

$$\left(a^2 - a\right)\underline{U}_1 + \left(a - a^2\right)\underline{U}_2 = 0, \text{ czyli } \underline{U}_1 = \underline{U}_2,$$

$$\underline{E}_1 = -\underline{Z}_1\underline{I}_2 + \underline{U}_2,$$

$$0 = \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{U}_2, \text{ czyli } \underline{E}_1 = -\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_1}{-\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)} = \frac{220}{-j11} = j20,$$

$$\underline{I}_1 = -j20\text{A}, \ \underline{I}_0 = 0\text{A},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 - \underline{Z}_1\underline{I}_1 = 220 - j8(-j20) = 220 - 160 = 60\text{V},$$

$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_2\underline{I}_2 = -j3j20 = 60\text{V} = \underline{U}_1,$$

$$\underline{U}_0 = -\underline{Z}_0\underline{I}_0 = 0\text{V},$$

$$\underline{U}_a = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 0 + 60 + 60 = 120\text{V}, \quad U_a = 120\text{V},$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)60 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)60 =$$

$$= -30 - j30\sqrt{3} - 30 + j30\sqrt{3} = -60\text{V}, \quad U_b = 60\text{V},$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_0 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 = \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)60 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)60 =$$

$$= -30 + j30\sqrt{3} - 30 - j30\sqrt{3} = -60\text{V}, \qquad U_c = 60\text{V},$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b = 120 - (-60) = 180\text{V}, \qquad U_{ab} = 180\text{V},$$

$$\underline{I}_a = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0 - j20 + j20 = 0\text{A}, \qquad I_a = 0\text{A},$$

$$\underline{I}_b = -\underline{I}_c = \underline{I}_0 + a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-j20) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)j20 =$$

$$= j10 - 10\sqrt{3} - j10 - 10\sqrt{3} = -20\sqrt{3} = -34{,}6\text{A},$$

$$I_b = I_c = 34{,}6\text{A}.$$

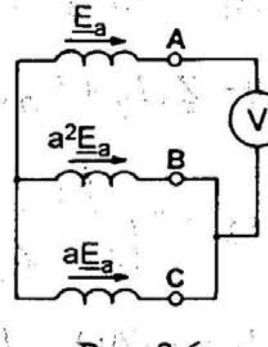
Odpowiedź: $I_b = I_c = I = 34{,}6$A, $V_\text{I} = U_a = 120$V, $V_\text{II} = U_{ab} = 180$V, $V_\text{III} = U_c = 60$V.

Zadanie 8.7

Na zaciskach generatora trójfazowego nastąpiło zwarcie faz B i C. Wyznaczyć wskazanie woltomierza. Schemat obwodu przedstawiono na rysunku 8.6.

Dane: $E_f = 240$V, $\underline{Z}_1 = j4\Omega$, $\underline{Z}_2 = j2\Omega$, $\underline{Z}_0 = j1\Omega$.

Odpowiedź: $U = V = 240$V.



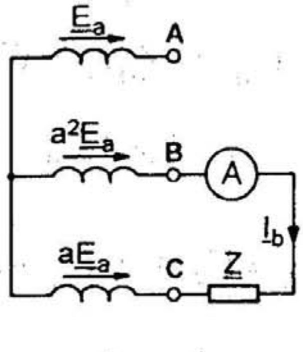
Rys. 8.6

Zadanie 8.8

W układzie przedstawionym na rysunku 8.7 zasilanym napięciami symetrycznymi, występuje niesymetria obciążenia polegająca na zwarciu faz B i C. Wyznaczyć prąd zwarcia.

Dane: $E_f = 240$V, $\underline{Z}_1 = j1{,}2\Omega$, $\underline{Z}_2 = j0{,}4\Omega$, $\underline{Z} = 2{,}4\Omega$.

Odpowiedź: $I_b = I = 103{,}92\text{A} \approx 104\text{A}$.



Rys. 8.7

Zadanie 8.9

Na zaciskach prądnicy trójfazowej symetrycznej nastąpiło zwarcie dwóch faz B i C ze sobą i do ziemi. Obliczyć wskazania przyrządów włączonych jak na rysunku 8.8.

Dane: E_f=240V, $\underline{Z}_1 = j1{,}2\Omega$, $\underline{Z}_2 = j0{,}4\Omega$, $\underline{Z}_0 = j0{,}2\Omega$.

Rozwiązanie :

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{U}_1,$$

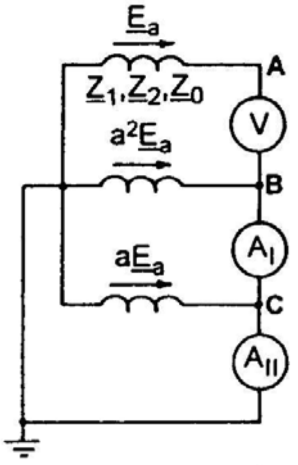
$$0 = \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{U}_2, \quad 0 = \underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{U}_0,$$

$$\underline{I}_a = 0, \quad \underline{U}_b = 0, \quad \underline{U}_c = 0,$$

$$\underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0,$$

$$\underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 = 0,$$

$$\underline{U}_0 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 = 0.$$



Rys. 8.8

Po odjęciu stronami dwóch ostatnich równań opisujących warunki w miejscu zwarcia otrzymuje się

$$(a^2 - a)\underline{U}_1 + (a - a^2)\underline{U}_2 = 0, \qquad \text{czyli} \qquad \underline{U}_1 = \underline{U}_2,$$

Po wstawieniu ostatniej równości do równania na $\underline{U}_b$ lub $\underline{U}_c$.

$$\underline{U}_b = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_1 = 0 \text{ czyli } \underline{U}_1 = \underline{U}_0,$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ a z równania prądowego } \underline{I}_0 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2),$$

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 & \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j1{,}4 & j0{,}2 \\ j0{,}2 & j0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{W} = -0{,}8, \ \underline{W}_1 = j144, \ \underline{W}_2 = -j48,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{W}_1}{\underline{W}} = \frac{j144}{-0{,}8} = -j180, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{W}_2}{\underline{W}} = \frac{-j48}{-0{,}8} = j60\text{A},$$

$$\underline{I}_0 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = j180 - j60 = j120\text{A},$$

$$\underline{I}_a = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = j120 - j180 + j60 = 0\text{A},$$

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 - \underline{Z}_1\underline{I}_1 = 240 - j1{,}2(-j180) = 240 - 216 = 24\text{V},$$

$$\underline{U}_2 = 24\text{V}, \quad \underline{U}_0 = 24\text{V},$$

$$\underline{U}_a = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 24 + 24 + 24 = 72\text{V}, \qquad U_a = 72\text{V},$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 = 24 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)24 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)24 =$$

$$= 24 - 12 - j12\sqrt{3} - 12 + j12\sqrt{3} = 0, \qquad U_b = 0\text{V},$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_0 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 = 24 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)24 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)24 =$$

$$= 24 - 12 + j12\sqrt{3} - 12 - j12\sqrt{3} = 0\text{V}, \qquad U_c = 0\text{V},$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b = 72 - 0 = 72\text{V}, \qquad U_{ab} = 72\text{V},$$

$$\underline{I}_b = \underline{I}_0 + a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 =$$

$$= j120 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-j180) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)j60 =$$

$$= j120 + j90 - 90\sqrt{3} - j30 - 30\sqrt{3} = \left(-120\sqrt{3} + j180\right)\text{A},$$

$$I_b = \sqrt{180^2 + \left(120\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{32400 + 43200} = \sqrt{75600} = 275\text{A},$$

$$\underline{I}_c = \underline{I}_0 + a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2 =$$

$$= j120 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-j180) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)j60 =$$

$$= j120 + j90 + 90\sqrt{3} - j30 + 30\sqrt{3} = \left(120\sqrt{3} + j180\right)\text{A},$$

$$I_c = 275\text{A},$$

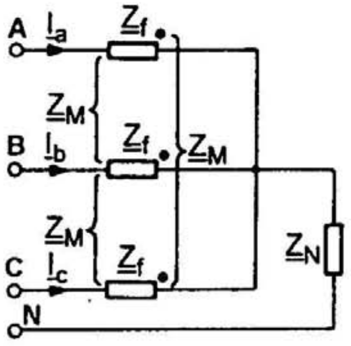
$$\underline{I}_{II} = \underline{I}_b + \underline{I}_c = -120\sqrt{3} + j180 + 120\sqrt{3} + j180 = j360\text{A}.$$

Odpowiedź: $V = U_{ab} = U_a = 72\text{V}$, $A_{\text{I}} = I_b = 275\text{A}$, $A_{\text{II}} = I_{\text{II}} = 360\text{A}$.

Zadanie 8.10

Wyznaczyć impedancje dla składowych symetrycznych w układzie symetrycznym z uwzględnieniem sprzężeń magnetycznych, jak pokazano na rysunku 8.9a.

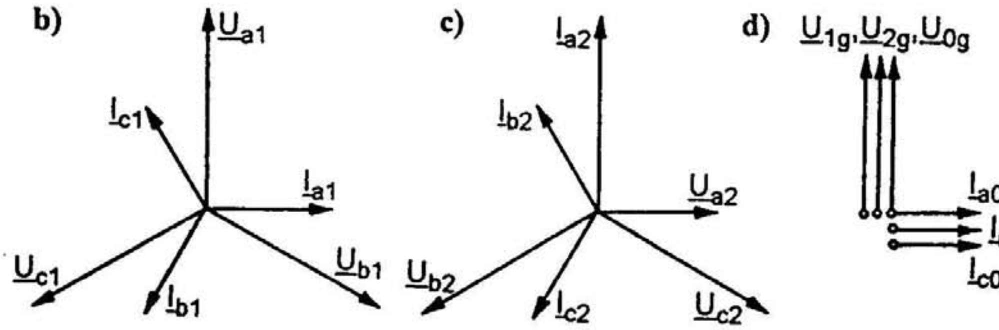
Dane: $\underline{Z}_f = j10\Omega$, $\underline{Z}_M = j5\Omega$, $\underline{Z}_N = j20\Omega$.



Rys. 8.9a

Rozwiązanie:

Rysunki 8.9b, c, d przedstawiają wykresy wskazowe odpowiednio dla składowych symetrycznych zgodnej, przeciwnej i zerowej.



Rys. 8.9b, c, d

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{I}_{a1}} = \frac{\underline{U}_{b1}}{\underline{I}_{b1}} = \frac{\underline{U}_{c1}}{\underline{I}_{c1}},$$

$$\underline{U}_{a1} = \underline{Z}_f \underline{I}_{a1} + \underline{Z}_M \underline{I}_{b1} + \underline{Z}_M \underline{I}_{c1} = \underline{Z}_f \underline{I}_{a1} + \underline{Z}_M \left(\underline{I}_{b1} + \underline{I}_{c1}\right),$$

$$\underline{I}_{a1} + \underline{I}_{b1} + \underline{I}_{c1} = 0, \quad \text{to} \quad \underline{I}_{b1} + \underline{I}_{c1} = -\underline{I}_{a1},$$

$$\underline{U}_{a1} = \underline{Z}_f \underline{I}_{a1} - \underline{Z}_M \underline{I}_{a1},$$

$$\underline{Z}_1=\frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{I}_{a1}}=\frac{\underline{Z}_f\underline{I}_{a1}-\underline{Z}_M\underline{I}_{a1}}{\underline{I}_{a1}}=\underline{Z}_f-\underline{Z}_M,$$

$$\underline{Z}_1=j10-j5=j5\Omega,$$

$$\underline{Z}_2=\frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{I}_{a2}}=\frac{\underline{U}_{b2}}{\underline{I}_{b2}}=\frac{\underline{U}_{c2}}{\underline{I}_{c2}},$$

$$\underline{U}_{a2}=\underline{Z}_f\underline{I}_{a2}+\underline{Z}_M\underline{I}_{b2}+\underline{Z}_M\underline{I}_{c2}=\underline{Z}_f\underline{I}_{a2}+\underline{Z}_M\left(\underline{I}_{b2}+\underline{I}_{c2}\right),$$

$$\underline{I}_{a2}+\underline{I}_{b2}+\underline{I}_{c2}=0 \qquad \text{to} \qquad \underline{I}_{b2}+\underline{I}_{c2}=-\underline{I}_{a2},$$

$$\underline{U}_{a2}=\underline{Z}_f\underline{I}_{a2}-\underline{Z}_M\underline{I}_{a2},$$

$$\underline{Z}_2=\frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{I}_{a2}}=\frac{\underline{Z}_f\underline{I}_{a2}-\underline{Z}_M\underline{I}_{a2}}{\underline{I}_{a2}}=\underline{Z}_f-\underline{Z}_M,$$

$$\underline{Z}_2=j10-j5=j5\Omega,$$

$$\underline{Z}_0=\frac{\underline{U}_{a0}}{\underline{I}_{a0}}=\frac{\underline{U}_{b0}}{\underline{I}_{b0}}=\frac{\underline{U}_{c0}}{\underline{I}_{c0}}, \qquad \underline{U}_{a0}=\underline{U}_{b0}=\underline{U}_{c0}, \qquad \underline{I}_{a0}=\underline{I}_{b0}=\underline{I}_{c0},$$

$$\underline{U}_{a0}=\underline{Z}_f\underline{I}_{a0}+\underline{Z}_M\underline{I}_{b0}+\underline{Z}_M\underline{I}_{c0}+\underline{Z}_N\left(\underline{I}_{a0}+\underline{I}_{b0}+\underline{I}_{c0}\right),$$

$$\underline{U}_{a0}=\underline{Z}_f\underline{I}_{a0}+\underline{Z}_M\underline{I}_{a0}+\underline{Z}_M\underline{I}_{a0}+\underline{Z}_N3\underline{I}_{a0},$$

$$\underline{Z}_0=\frac{\underline{U}_{a0}}{\underline{I}_{a0}}=\underline{Z}_f+2\underline{Z}_M+3\underline{Z}_N,$$

$$\underline{Z}_0=j10+j10+j60=j80\Omega.$$

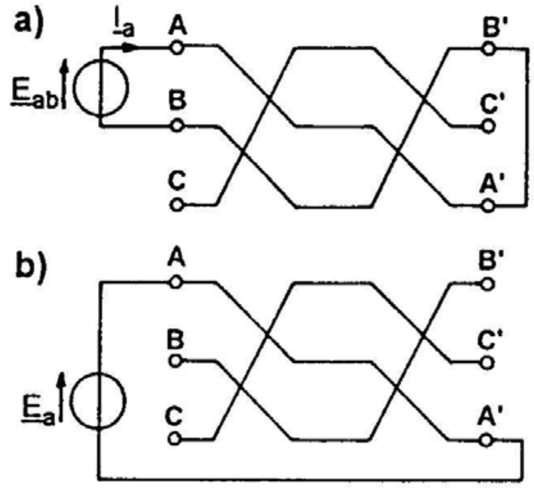
Odpowiedź: $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_f-\underline{Z}_M=j5\Omega,$

$\underline{Z}_0=\underline{Z}_f+2\underline{Z}_M+3\underline{Z}_N=j80\Omega.$

Zadanie 8.11

W celu wyznaczenia impedancji linii trójfazowej dla składowych symetrycznych wykonano pomiary w dwóch stanach zwarcia jak pokazano na rysunkach 8.10a i b i otrzymano następujące wyniki:

a) $\dfrac{\underline{E}_{ab}}{\underline{I}_a} = j4\Omega$, b) $\dfrac{\underline{E}_a}{\underline{I}_a} = j3\Omega$. Obliczyć impedancję $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_0$.



Rys. 8.10

Rozwiązanie: $\dfrac{\underline{E}_{ab}}{\underline{I}_a} = j4\Omega = 2\underline{Z}_f$, to $\underline{Z}_f = j2\Omega$,

$$\frac{\underline{E}_a}{\underline{I}_a} = j3\Omega = \underline{Z}_f + \underline{Z}_N, \quad \text{to} \quad \underline{Z}_N = j3 - j2 = j1\Omega,$$

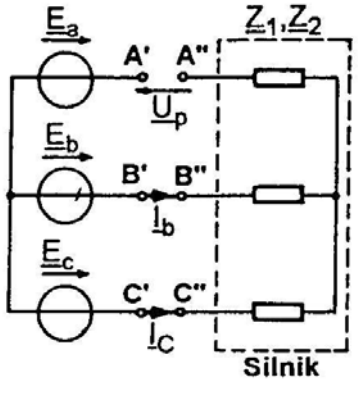
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_f = j2\Omega, \quad \underline{Z}_0 = \underline{Z}_f + 3\underline{Z}_N = j2 + j3 = j5\Omega.$$

Uwzględniono tu wyprowadzenia z poprzedniego zadania.

Odpowiedź: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = j2\Omega$, $\underline{Z}_0 = j5\Omega$.

Zadanie 8.12

W zasilaniu silnika trójfazowego napięciem 380/220V nastąpiła przerwa w fazie A. Obliczyć prądy w fazach B i C jeżeli impedancje silnika $\underline{Z}_1 = (4 + j3)\Omega$, $\underline{Z}_2 = (0{,}14 + j0{,}36)\Omega$. Prądnica i silnik połączone są w gwiazdę. Jakie jest napięcie na przerwie U_p?



Rys. 8.11

$$\underline{E}_b = a^2 \underline{E}_a, \quad \underline{E}_c = a \underline{E}_a$$

Rozwiązanie :

Rozszerzone prawo Ohma dla składowych symetrycznych i dodatkowe warunki w miejscu powstania niesymetrii mają następującą postać.

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_1, \quad \underline{I}_a = 0, \quad \underline{I}_a = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0,$$

$$0 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2, \quad \underline{U}_{B'B''} = 0 \quad \underline{U}_{B'B''} = \underline{U}_0 + a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 = 0,$$

$$0 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \underline{U}_0, \quad \underline{U}_{c'c''} = 0, \quad \underline{U}_{c'c''} = \underline{U}_0 + a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 = 0.$$

dodatkowo $\underline{I}_b + \underline{I}_c = 0, \quad \underline{I}_0 + a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0 + a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 = 0,$

czyli $2\underline{I}_0 - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0$, po dodaniu tego równania do warunku

$\underline{I}_a = 0$ otrzymuje się $3\underline{I}_0 = 0, \ \underline{I}_0 = 0 \left(\underline{Z}_0 = \infty \right), \ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0, \ \underline{I}_2 = -\underline{I}_1.$

Z dodatkowych warunków w miejscu niesymetrii wynika, że $\underline{U}_0 = \underline{U}_1 = \underline{U}_2$,

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_1, \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{220}{4 + j3 + 0{,}14 + j0{,}36} = \frac{220}{4{,}14 + j3{,}36} = \frac{220(4{,}14 - j3{,}36)}{28{,}43} =$$
$$= (32 - j26) A$$

$$\underline{I}_2 = (-32 + j26) \mathrm{A},$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_1 = (0{,}14 + j0{,}36)(32 - j26) =$$
$$= 4{,}48 + 9{,}36 + j(11{,}52 - 3{,}64) = (13{,}84 + j7{,}88) \mathrm{V},$$

$$\underline{U}_p = \underline{U}_{A'A''} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 41{,}52 + j23{,}64,$$

$$U_p = \sqrt{41{,}52^2 + 23{,}64^2} = \sqrt{1723{,}91 + 558{,}85} = \sqrt{2282{,}76} = 47{,}48 \mathrm{V},$$

$$\underline{I}_b = a^2 \underline{I}_1 + a\underline{I}_2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(32 - j26) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-32 + j26) =$$
$$= -16 + j13 - j27{,}71 - 22{,}52 + 16 - j13 - j27{,}71 - 22{,}52 =$$
$$= (-45{,}04 - j55{,}42)\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_c = -\underline{I}_b = (45{,}04 + j55{,}42)\mathrm{A},$$

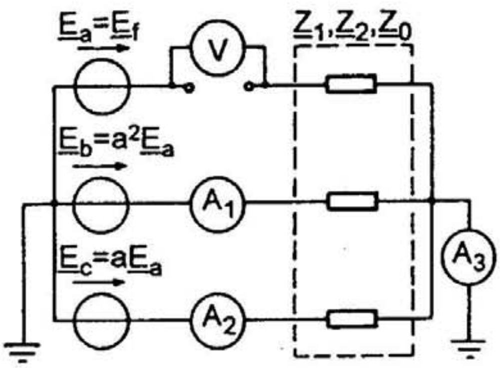
$$I_b = I_c = \sqrt{45{,}04^2 + 55{,}42^2} =$$
$$= \sqrt{2028{,}60 + 3071{,}38} = \sqrt{5099{,}98} = 71{,}41\mathrm{A},$$

Odpowiedź: I_b=I_c=71,41A, U_p=47,48V.

Zadanie 8.13

W układzie trójfazowym jak na rysunku 8.12 przerwana została faza A. Wyznaczyć wskazania przyrządów.

Dane: E_f = 220V, $\underline{Z}_1 = j8\Omega$, $\underline{Z}_2 = j2\Omega$, $\underline{Z}_0 = j1\Omega$.

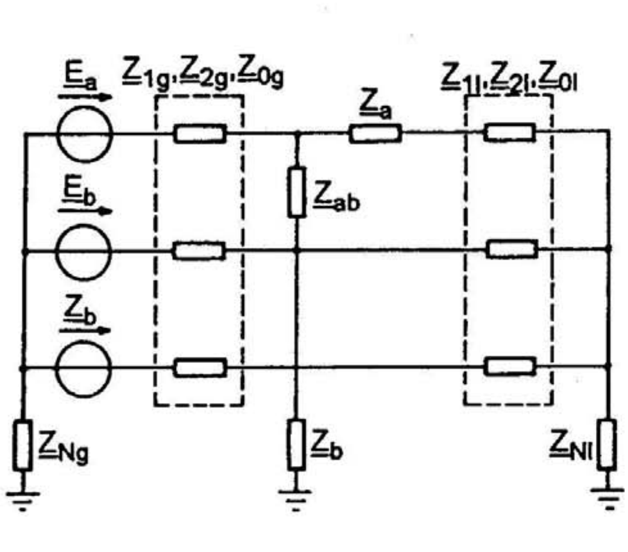


Rys. 8.12

Odpowiedź: U=50,76V. I_1=I_b=38,77A, I_2=I_c=38,77A, I_3=I_N=50,76A.

Zadanie 8.14

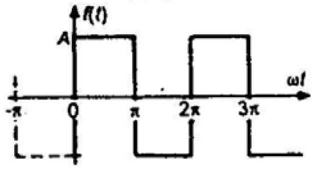
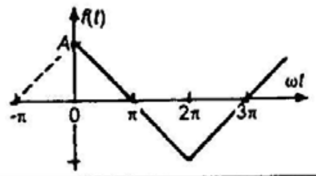
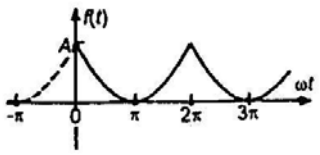
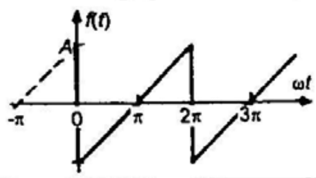
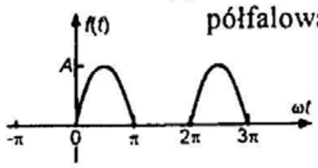
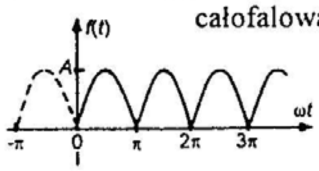
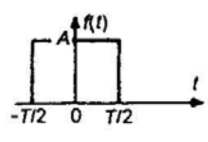
Podać pełny zestaw równań opisujących awarię przedstawioną na rysunku 8.13. Dane są wartości wszystkich elementów zaznaczonych na schemacie.



Rys. 8.13

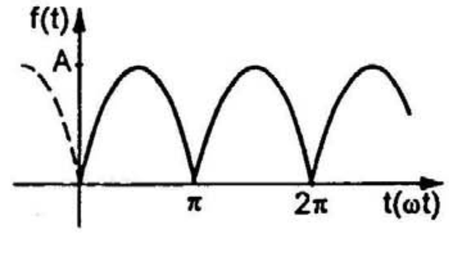
9. PRĄDY OKRESOWE NIESINUSOIDALNE

Tabela 9.1

Nr	Funkcja czasu	Postać szeregu FOURIERA (A-amplituda)
1.	Przebieg prostokątny 	$f(t)=\frac{4A}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t)+\ldots\right]$
2.	Przebieg trójkątny 	$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left[\cos(\omega_1 t)+\frac{1}{9}\cos(3\omega_1 t)+\frac{1}{25}\cos(5\omega_1 t)+\ldots\right]$
3.	Przebieg paraboliczny 	$f(t)=\frac{A}{3}+\frac{4A}{\pi^2}\left[\cos(\omega_1 t)+\frac{1}{4}\cos(2\omega_1 t)+\right.$ $\left.+\frac{1}{9}\cos(3\omega_1 t)+\ldots\right]$
4.	Przebieg piłokształtny 	$f(t)=-\frac{2A}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)+\frac{1}{2}\sin(2\omega_1 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t)+\ldots\right]$
5.	Sinusoida wyprostowana półfalowa 	$f(t)=\frac{A}{\pi}\left[1+\frac{\pi}{2}\sin(\omega_1 t)-\frac{2}{3}\cos(2\omega_1 t)-\right.$ $\left.-\frac{2}{15}\cos(4\omega_1 t)-\ldots\right]$
6.	Sinusoida wyprostowana całofalowa 	$f(t)=\frac{2A}{\pi}\left[1-\frac{2}{3}\cos(2\omega_1 t)-\frac{2}{15}\cos(4\omega_1 t)-\right.$ $\left.-\frac{2}{35}\cos(6\omega_1 t)+\ldots\right]$
7.	Impuls prostokątny 	Funkcja spektralna $F(\omega)=AT\frac{\sin\pi\frac{f}{f'}}{\pi\frac{f}{f'}};\qquad f'=\frac{1}{T}=const.$

Zadanie 9.1

Przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego przebieg sinusoidalny wyprostowany całofalowo rysunek 9.1.



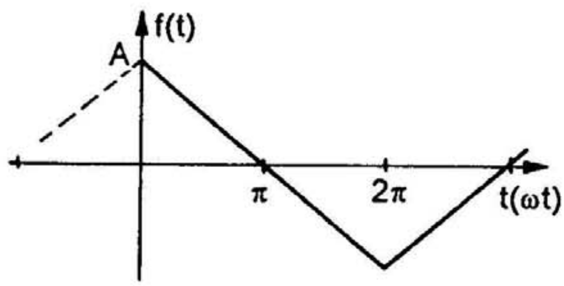
Rys. 9.1

Odpowiedź: $f(t)=\dfrac{2A}{\pi}\left[1-\dfrac{2}{3}\cos 2\omega t-\dfrac{2}{15}\cos 4\omega t-\dfrac{2}{35}\cos 6\omega t-\ldots\right].$

Porównaj tabelę 9.1

Zadanie 9.2

Przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego przebieg podany na rysunku 9.2.



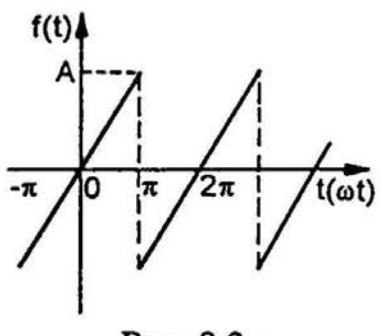
Rys. 9.2

Odpowiedź: $f(t)=\dfrac{8A}{\pi^2}\left[\cos\omega t+\dfrac{1}{9}\cos 3\omega t+\dfrac{1}{25}\cos 5\omega t+\ldots\right].$

Porównaj z tabelą 9.1

Zadanie 9.3

Rozwinąć w szereg trygonometryczny funkcje przedstawione na rysunkach 9.3a i b.



Rys. 9.3a

Rys.9.3b

Odpowiedź:

$$a)\ f(t)=\frac{2A}{\pi}\left[\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\frac{1}{4}\sin 4\omega t+\ldots\right],$$

$$b)\ f(t)=\frac{A}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t-\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\frac{1}{4}\sin 4\omega t-\ldots\right].$$

Zadanie 9.4

Gałąź szeregową R, L o parametrach R=10Ω, L=31,8mH włączono na napięcie $u=(120+195\sin\omega t-60\sin 3\omega t)$V przy częstotliwości f=50Hz. Wyznaczyć wartość skuteczną prądu I oraz napięcie U, U_R, U_L, moce: czynną, bierną, i pozorną jak również współczynnik mocy φ. Napisać przebiegi czasowe prądu i napięcia na oporniku i cewce.

Rozwiązanie :

$$X_{L1}=\omega L=314\cdot 0{,}0318=10\Omega,\qquad 3\omega L=30\Omega,$$

$$Z_0=R=10\Omega,\quad Z_1=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}=14{,}14\Omega,$$

$$Z_3=\sqrt{R^2+(3\omega L)^2}=\sqrt{10^2+30^2}=\sqrt{1000}=31{,}62\Omega,$$

$$\varphi_0=0^o,\quad \varphi_1=arctg\frac{X_{L1}}{R}=arctg\frac{10}{10}=45^o,$$

$$\varphi_3=arctg\frac{X_{L3}}{R}=arctg\frac{30}{10}=72^o,$$

$$I_0=\frac{U_0}{R}=\frac{120}{10}=12\text{A},\quad I_1=\frac{U_1}{Z_1}=\frac{195}{14{,}14}=13{,}79\text{A},$$

$$I_3=\frac{U_3}{Z_3}=\frac{60}{31{,}62}=1{,}90\text{A},$$

$$U_{R0}=U_0=120\text{V},\qquad U_{L0}=0\text{V},$$

$$U_{R1}=RI_1=10\cdot 13{,}79=137{,}9\text{V},\quad U_{L1}=\omega LI_1=10\cdot 13{,}79=137{,}9\text{V},$$

$$U_{R3}=RI_3=10\cdot 1{,}90=19\text{V},\quad U_{L3}=3\omega LI_3=30\cdot 1{,}90=57\text{V},$$

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_3^2}=\sqrt{120^2+195^2+60^2}=\sqrt{56025}=236{,}7\text{V},$$

$$U_R=\sqrt{U_{R0}^2+U_{R1}^2+U_{R2}^2}=\sqrt{120^2+137{,}9^2+19^2}=$$
$$=\sqrt{33777{,}41}=183{,}79\text{V}$$

$$U_L=\sqrt{U_{L0}^2+U_{L1}^2+U_{L3}^2}=\sqrt{137{,}9^2+57^2}=\sqrt{22265{,}41}=149{,}22\text{V}$$

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_3^2}=\sqrt{12^2+13{,}79^2+1{,}90^2}=\sqrt{337{,}77}=18{,}38\text{A}$$

$$P=RI^2=10\cdot 18{,}38^2=3378{,}24\text{W},$$

$$Q=\sum_{k=1}^{n}U_kI_k\sin\varphi_k=195\cdot 13{,}79\cdot\sin 45^o+60\cdot 1{,}9\cdot\sin 72^o=$$
$$=1901{,}45+108{,}42=2009{,}87\approx 2010\text{VAr},$$

$$S=UI=236{,}7\cdot 18{,}38=4350{,}55\text{VA},$$

$$\cos\varphi=\frac{P}{S}=\frac{3378{,}24}{4350{,}55}=0{,}78,$$

$$i=\left[12+13{,}79\sqrt{2}\sin\left(\omega t-45^o\right)-1{,}9\sqrt{2}\sin\left(3\omega t-72^o\right)\right]\text{A},$$

$$u_R=\left[120+137{,}9\sqrt{2}\sin\left(\omega t-45^o\right)-19\sqrt{2}\sin\left(3\omega t-72^o\right)\right]\text{V},$$

$$u_L=\left[137{,}9\sqrt{2}\sin\left(\omega t+45^o\right)-57\sqrt{2}\sin\left(3\omega t+18^o\right)\right]\text{V}.$$

Odpowiedź: I=18,38A, U=236,7V, U_R=183,79V, U_L=149,22V, P=3378,24W, Q=2010Var, S=4350,55VA, $\cos\varphi$=0,78. Przebiegi czasowe i, u_R, u_L zapisano powyżej

Zadanie 9.5

Gałąź szeregową R, C o parametrach R=10Ω, C=318μF włączono na napięcie $u=(120+195\sqrt{2}\sin\omega t-60\sqrt{2}\sin 3\omega t)$V przy częstotliwości f=50Hz. Wyznaczyć wartość skuteczną prądu I oraz napięcie U, U_R, U_C, moce: czynną, bierną i pozorną jak również współczynnik mocy φ. Napisać przebiegi czasowe prądu i napięcia na oporniku i kondensatorze.

Odpowiedź: I=14,92A, U=236,7V, U_R=149,18V, U_C=183,78V,
P=2226,06 ≈ 2226W, Q = -2009,32VAr, S = 3531,56VA,
$\cos\varphi = 0,63$,

$$i = \left[13,79\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right) - 5,69\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 18,4^o\right)\right]\text{A},$$

$$u_c = \left[120 + 137,9\sin\left(\omega t - 45^o\right) - 18,95\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 71,6^o\right)\right]\text{V}.$$

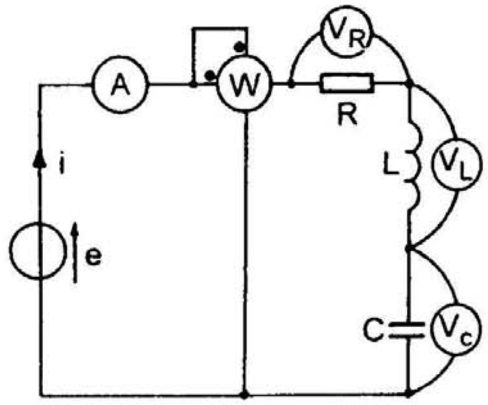
Zadanie 9.6

W układzie jak na rysunku 9.4, obliczyć wskazania przyrządów oraz moc pozorną i bierną jak również współczynnik mocy.

Dane: $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 10\Omega$, $e = \left(15 - 100\sqrt{2}\sin\omega t - 50\sqrt{2}\sin 2\omega t\right)\text{V}$.

Rozwiązanie: Dla składowej stałej otrzymuje się:

I_0=0A, U_{R0}=0V, U_{L0}=0V,
U_{c0}=E_0=15V.



Rys.9.4

Dla pierwszej harmonicznej występuje rezonans szeregowy

$$Z_1 = R = 10\Omega,$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R} = \frac{100}{10} = 10\text{A},$$

$$U_{R1} = RI_1 = 10\cdot 10 = 100\text{V},$$

$$U_{L1} = \omega L I_1 = 10\cdot 10 = 100\text{V},$$

$$U_{c1} = \frac{1}{\omega C}I_1 = 10\cdot 10 = 100\text{V}.$$

Dla drugiej harmonicznej

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)^2} = \sqrt{10^2 + (20-5)^2} =$$

$$= \sqrt{325} = 18,03\Omega \approx 18\Omega,$$

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{50}{18} = 2,78\text{A},$$

$$U_{R2}=RI_2=10\cdot 2{,}78=27{,}8\text{V}, \quad U_{L2}=2\omega LI_2=20\cdot 2{,}78=55{,}6\text{V},$$

$$U_{c2}=\frac{1}{2\omega C}\cdot I_2=5\cdot 2{,}78=13{,}9\text{V}.$$

Przyrządy wskazują następujące wartości:

Amperomierz A,

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=\sqrt{10^2+2{,}78^2}=\sqrt{107{,}73}=10{,}38\text{A}.$$

Woltomierz V_R,

$$U_R=\sqrt{U_{R1}^2+U_{R2}^2}=\sqrt{100^2+27{,}8^2}=\sqrt{10772{,}84}=103{,}79\text{V}.$$

Woltomierz V_L,

$$U_L=\sqrt{U_{L1}^2+U_{L2}^2}=\sqrt{100^2+55{,}6^2}=\sqrt{13091{,}36}=114{,}42\text{V}.$$

Woltomierz V_c,

$$U_c=\sqrt{U_{c0}^2+U_{c1}^2+U_{c2}^2}=\sqrt{15^2+100^2+13{,}9^2}=102{,}07\text{V}.$$

Watomierz W, $P=RI^2=10\cdot 10{,}38^2=10\cdot 107{,}74=1077{,}4\text{W}$.

Wartość skuteczna źródła napięcia wynosi:

$$E=U=\sqrt{E_0^2+E_1^2+E_2^2}=\sqrt{15^2+100^2+50^2}=\sqrt{12725}=112{,}81\text{V}.$$

Moc pozorna $S=UI=112{,}81\cdot 10{,}38=1170{,}97\approx 1171\text{VA}$.

Moc bierna $Q=U_2\, I_2 \sin\varphi_2=50\cdot 2{,}78\cdot 0{,}83=115{,}66\text{VAr}$,

gdzie $$\varphi_2=ar\,\mathrm{ctg}\frac{2\omega L-\frac{1}{2\omega C}}{R}=ar\,\mathrm{ctg}\frac{15}{10}=56^o31'.$$

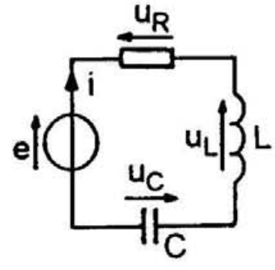
Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości : amperomierz $I=10{,}38$A, woltomierze $U_R=103{,}79$V, $U_L=114{,}42$V, $U_c=102{,}07$V, watomierz $P=1077{,}4$W, moc pozorna układu $S=1171$VA, moc bierna $Q=115{,}66$VAr, współczynnik mocy $\varphi=0{,}92$.

Zadanie 9.7

Gałąź szeregowa R, L, C jak na rysunku 9.5 zasilana jest napięciem

$$e = \left(100 + 240\sqrt{2}\sin\omega t + 40\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\mathrm{V}.$$

Wyznaczyć przebiegi i wartości skuteczne prądu oraz napięć na elementach u_R, u_L, u_C oraz moce czynną, bierną, pozorną i współczynnik mocy $\cos\varphi$.



Rys. 9.5

Dane: R=300Ω, X_L=150Ω, X_C=450Ω.

Odpowiedź: $i = \left[0{,}57\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right) + 0{,}09\sqrt{2}\sin\left(3\omega t - 45^o\right)\right]\mathrm{A}$,

$$u_R = \left[171\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right) + 27\sqrt{2}\sin\left(3\omega t - 45^o\right)\right]\mathrm{V},$$

$$u_L = \left[85{,}5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 135^o\right) + 40{,}5\sqrt{2}\sin\left(3\omega t + 45^o\right)\right]\mathrm{V},$$

$$u_L = \left[85{,}5\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 45^o\right) + 40{,}5\sqrt{2}\cos\left(3\omega t - 45^o\right)\right]\mathrm{V},$$

$$u_c = \left[100 + 256{,}5\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 45^o\right) + 13{,}5\sqrt{2}\sin\left(3\omega t - 135^o\right)\right]\mathrm{V},$$

$$u_c = \left[100 - 256{,}5\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 45^o\right) - 13{,}5\sqrt{2}\cos\left(3\omega t - 45^o\right)\right]\mathrm{V},$$

I=0,58A, U_R=173,1V, U_L=94,6V, U_C=275,6V,

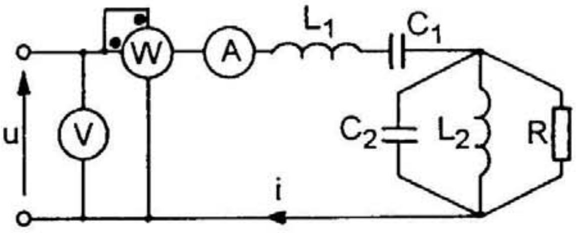
P=99,28W≈100W, Q=-94,19VAr, S=152,57VA, $\cos\varphi$=0,65.

Zadanie 9.8

W układzie jak na rysunku 9.6 obliczyć wskazania przyrządów oraz moce: pozorną, bierną i współczynnik mocy $\cos\varphi$.

Dane: R=20Ω, ωL_1=5Ω, $\dfrac{1}{\omega C_1} = 45\Omega$, $\omega L_2 = 30\Omega$, $\dfrac{1}{\omega C_2} = 30\Omega$,

$$u(t) = \left(50 + 280\sqrt{2}\sin\omega t + 93\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\mathrm{V}.$$



Rys. 9.6

Rozwiązanie :

Od składowej stałej prąd nie płynie, gdyż w obwodzie występuje pojemność C_1

$$I_0 = 0\text{A}.$$

Dla pierwszej harmonicznej występuje rezonans równoległy $\omega L_2 = \dfrac{1}{\omega C_2}$,

$$\underline{Z}_1 = R + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = \sqrt{2000} = 44{,}72\Omega,$$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{280}{44{,}72} = 6{,}26\text{A}.$$

Dla trzeciej harmonicznej występuje rezonans szeregowy, ponieważ

$$3\omega L_1 = \frac{1}{3\omega C_1} = 15\Omega,$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{R} + j\left(3\omega C_2 - \frac{1}{3\omega L_2}\right) = \frac{1}{20} + j\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{90}\right) = (50 + j88{,}9)\text{mS},$$

$$Y_3 = \sqrt{50^2 + 88{,}9^2} = \sqrt{10403{,}21} = 102\text{mS},$$

$$I_3 = Y_3 U_3 = 0{,}102 \cdot 93 = 9{,}49\text{A}.$$

Przyrządy wskazują więc:

Woltomierz V,

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{50^2 + 280^2 + 93^2} =$$
$$= \sqrt{89549} = 299{,}25 \approx 300\text{V}.$$

Amperomierz A, $\quad I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{6{,}26^2 + 9{,}49^2} = \sqrt{129{,}25} = 11{,}37\text{A}.$

Watomierz W,

$$P = RI_1^2 + \frac{U_3^2}{R} = 20 \cdot 6{,}26^2 + \frac{93^2}{20} =$$
$$= 20 \cdot 39{,}19 + \frac{8649}{20} = 1216{,}25\text{W}.$$

Moc pozorna układu $S = UI = 300 \cdot 11{,}37 = 3411\,\mathrm{VA}$,

Współczynnik mocy $\cos\varphi = \dfrac{P}{S} = \dfrac{1216{,}25}{3411} = 0{,}357$,

Moc bierna $Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k$,

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + \left(3\omega C_2 - \frac{1}{3\omega L_2}\right) U_3^2 =$$

$$= 280 \cdot 6{,}26 \cdot \sin\left(-63{,}44^o\right) + \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{10}\right) 93^2 =$$

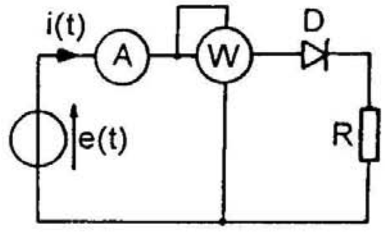
$$= -1567{,}82 = -2336{,}62\,\mathrm{var}.$$

Odpowiedź: Przyrzady wskazują następujące wartości woltomierz U=300V, amperomierz I =11,37A, watomierz P =1216,25W, moc pozorna układu S=3411VA, moc bierna Q=-2336,62var, współczynnik mocy $\cos\varphi$= 0,357.

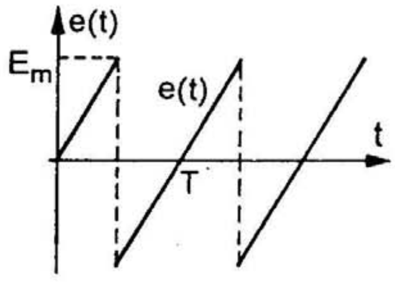
Zadanie 9.9

W układzie jak na rysunku 9.7a obliczyć wskazania przyrządów. Obwód zasilany jest napięciem o przebiegu pokazanym na rysunku 9.7b.

Dane: E_m=100V, R=50Ω.



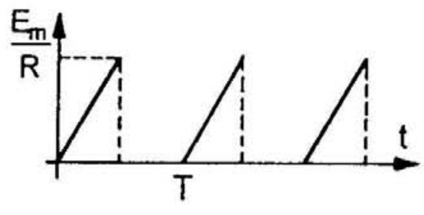
Rys. 9.7a



Rys. 9.7b

Obliczyć również współczynnik mocy układu.

Rozwiązanie: Ze względu na zainstalowany w obwodzie prostownik prąd płynący przez opornik ma przebieg taki jak pokazano na rysunku 9.7c



Rys. 9.7c

Wartość skuteczna tego przebiegu:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\frac{2E_m}{TR}t\right)^2 dt} = \frac{E_m}{R}\sqrt{\frac{4}{T^3}\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}} = \frac{E_m}{R}\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$I = \frac{100}{50}\frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}82\text{A}.$$

Wskazanie watomierza:

$$P = RI^2 = 50 \cdot 0{,}82^2 = 33{,}62\text{W}.$$

Wartość skuteczna napięcia:

$$E = E_m\frac{1}{\sqrt{3}} = 100\frac{1}{1{,}73} = 57{,}74\text{V},$$

$$S = E \cdot I = 57{,}74 \cdot 0{,}82 = 47{,}35\text{VA}$$

i współczynnik mocy $\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{33{,}62}{47{,}35} = 0{,}71$.

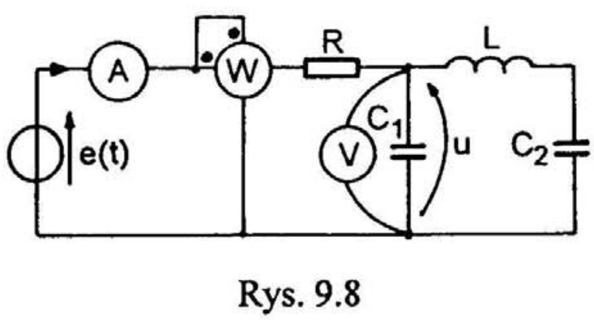
Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości: amperomierz A, $I = 0{,}82$A; watomierz W, $P = 33{,}62$W; współczynnik mocy układu $\cos\varphi = 0{,}71$.

Zadanie 9.10

W układzie jak na rysunku 9.8 obliczyć wskazania przyrządów oraz napisać przebiegi czasowe $i(t)$ oraz napięcia $u(t)$.

Dane: $R = \omega L = 100\Omega$, $\frac{1}{\omega C_1} = 200\Omega$, $\frac{1}{\omega C_2} = 300\Omega$,

$$e(t) = \left(100 + 220\sqrt{2}\sin\omega t + 110\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\text{V}.$$



Rys. 9.8

Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości: amperomierz A, I=1,74A; watomierz W, P=303,35W; woltomierz V, U=201V. Przebieg prądu można zapisać następująco:

$$i(t)=\left[1{,}56\sqrt{2}\sin\left(\omega t+45^{o}\right)+0{,}78\sqrt{2}\sin\left(3\omega t+45^{o}\right)\right]\mathrm{A}.$$

Przebieg napięcia

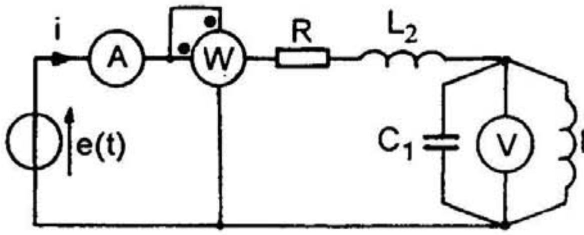
$$u(t)=\left[100+156\sqrt{2}\sin\left(\omega t-45^{o}\right)+78\sqrt{2}\sin\left(3\omega t-45^{o}\right)\right]\mathrm{V}.$$

Zadanie 9.11

W układzie jak na rysunku 9.9 obliczyć wskazania przyrządów.

Dane: $R=100\Omega,\quad \omega L_1=\dfrac{1}{\omega C_1}=120\Omega,\quad \omega L_2=15\Omega.$

$$e(t)=\left[100+50\sqrt{2}\sin\omega t-20\sqrt{2}\sin\left(3\omega t+90^{o}\right)\right]\mathrm{V}$$



Rys. 9..9

Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości: amperomierz A, I=1,02A; watomierz W, P. = 104W; natomiast woltomierz V, U= 50,8V.

Zadanie 9.12

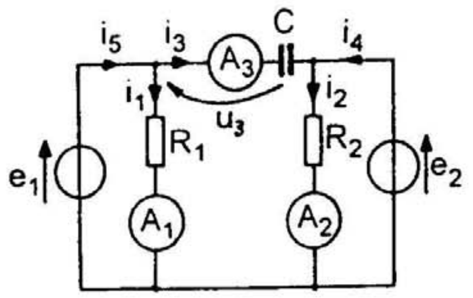
W układzie jak na rysunku 9.10 dane są wartości idealnych sił elektromotorycznych:

$$e_1=\left(120+220\sqrt{2}\sin\omega t+110\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\mathrm{V},$$

$$e_2=\left(100+220\sqrt{2}\cos\omega t+110\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\mathrm{V},$$

oraz $$R_1=\frac{1}{\omega C}=100\Omega,\quad R_2=220\Omega.$$

Obliczyć: a) przebiegi czasowe prądów i_1, i_2, i_3 oraz napięcia u_3,
b) wartości skuteczne I_1, I_2, I_3, U_3,
c) moc czynną pobieraną przez układ,
d) moce czynne oddawane przez obie SEM.



Rys.9.10

Rozwiązanie: Wartości składowych stałych wynoszą odpowiednio:

$$I_{10} = \frac{120}{100} = 1{,}2\text{A}, \qquad I_{20} = \frac{100}{220} = 0{,}45\text{A}, \qquad I_{30} = 0\text{A},$$

$$U_{30} = E_{10} - E_{20} = 120 - 100 = 20\text{V}.$$

Dla 1 harmonicznej

$$\underline{I}_{11} = \frac{220}{100} = 2{,}2\text{A}, \qquad \underline{I}_{21} = \frac{220e^{j90^o}}{220} = 1e^{j90^o}\,\text{A},$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{E}_{11} - \underline{E}_{21}}{-jXc} = \frac{220 - j220}{-j100} = (2{,}2 + j2{,}2)\text{A} =$$

$$= 2{,}2\sqrt{2}e^{j45^o}\,\text{A} = 3{,}11e^{j45^o}\,\text{A},$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{E}_{11} - \underline{E}_{21} = 220 - j220 = 220\sqrt{2}e^{-j45^o} = 311e^{-j45^o}\,\text{V}.$$

Dla 3 harmonicznej

$$\underline{I}_{13} = \frac{110}{100} = 1{,}1\text{A}, \qquad \underline{I}_{23} = \frac{110}{220} = 0{,}5\text{A}, \qquad \underline{I}_{33} = 0\text{A}, \qquad \underline{U}_{33} = 0\text{V}.$$

a) Przebiegi czasowe prądów i_1, i_2, i_3 oraz napięcia u_3 określone są funkcjami:

$$i_1 = \left(1{,}2 + 2{,}2\sqrt{2}\sin\omega t + 1{,}1\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\text{A},$$

$$i_2 = \left(0{,}45 + \sqrt{2}\cos\omega t + 0{,}5\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\text{A},$$

$$i_3 = \left[3{,}11\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right)\right]\text{A},$$

$$u_3 = \left[20 + 311\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 45^o\right)\right]\text{V}.$$

b) Wartości skuteczne:

$$I_1 = \sqrt{I_{10}^2 + I_{11}^2 + I_{13}^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 2{,}2^2 + 1{,}1^2} = \sqrt{7{,}49} = 2{,}74\text{A},$$

$$I_2 = \sqrt{I_{20}^2 + I_{21}^2 + I_{23}^2} = \sqrt{0{,}45^2 + 1^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}45} = 1{,}21\text{A},$$

$$I_3 = 3{,}11\text{A},$$

$$U_3 = \sqrt{U_{30}^2 + U_{31}^2} = \sqrt{20^2 + 311^2} = \sqrt{97121} = 311{,}64\text{V}.$$

c) Moc czynna pobierana przez układ:

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 100 \cdot 2{,}74^2 + 220 \cdot 1{,}21^2 =$$
$$= 750{,}76 + 322{,}1 \approx 1073\text{W}.$$

d) Moce czynne oddawane przez obydwie SEM:

$$i_5 = i_1 + i_3 =$$
$$= \left[1{,}2 + 2{,}2\sqrt{2}\sin\omega t + 1{,}1\sqrt{2}\sin 3\omega t + 3{,}11\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right)\right]\text{A} =$$
$$= \left[1{,}2 + 4{,}92\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 26{,}6^o\right) + 1{,}1\sqrt{2}\sin 3\omega t\right]\text{A},$$

$$i_4 = i_2 - i_3 =$$
$$= \left[0{,}45 + \sqrt{2}\cos\omega t + 0{,}5\sqrt{2}\sin 3\omega t - 3{,}11\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 45^o\right)\right]\text{A} =$$
$$= \left[0{,}45 + 2{,}51\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 208{,}6^o\right) + 0{,}5\sqrt{2}\sin 3\omega t\right]\text{A}.$$

Moc czynna oddawana przez SEM e_1

$$P_1 = 120 \cdot 1{,}2 + 220 \cdot 4{,}92 \cdot \cos 26{,}5^o + 110 \cdot 1{,}1 =$$
$$= 144 + 968{,}68 + 121 \approx 1234\text{W},$$

$$P_2 = 100 \cdot 0{,}45 + 220 \cdot 2{,}51 \cdot \cos 118{,}6^o + 110 \cdot 0{,}5 =$$
$$= 45 - 264{,}3 + 55 \approx -164\text{W}.$$

Całkowita moc czynna oddawana przez obydwie SEM:

$$P_1 + P_2 = 1234 - 164 = 1070\text{W}.$$

Jest ona w przybliżeniu równa wynikowi z punktu c.

Odpowiedź: a) odpowiednie przebiegi zapisano powyżej,

b) I_1=2,74A, I_2=1,21A, I_3=3,11A, U_3=311,64V,

c) P=1073W, d) P=1070W,

Uwaga! Na brak równości mocy z punktów c i d miały wpływ dokonane zaokrąglenia wartości liczbowych prądów.

Zadanie 9.13

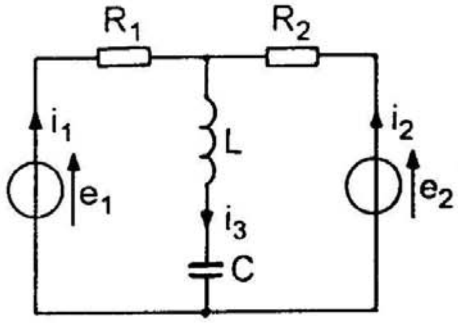
W obwodzie podanym na rysunku 9.11 obliczyć rozpływ prądów. Rozwiązanie podać w formie przebiegów czasowych.

Dane: $e_1 = 220\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$,

$e_2 = 220\sqrt{2}\sin 2\omega t\text{V}$,

R_1=15Ω, R_2=2,5Ω,

$\omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 10\Omega$.



Rys.9.11

Odpowiedź: $i_1 = \left[14{,}67\sqrt{2}\sin\omega t - 12{,}45\sin\left(2\omega t + 8^o\right)\right]\text{A}$,

$i_2 = \left[17{,}6\sin\left(2\omega t - 37^o\right)\right]\text{A}$,

$i_3 = \left[14{,}67\sqrt{2}\sin\omega t + 12{,}45\sin\left(2\omega t - 82^o\right)\right]\text{A}$.

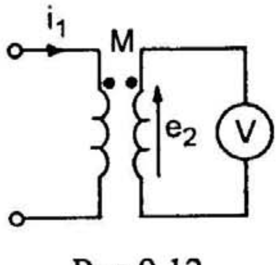
Wskazówka: Zastosować zasadę superpozycji.

Zadanie 9.14

W uzwojeniu pierwotnym transformatora bezrdzeniowego nie obciążonego po stronie wtórnej, prąd zmienia się według funkcji

$i_1\left(2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 60^o\right) - 0{,}6\sqrt{2}\cos 3\omega t\right)\text{A}$.

Wyznaczyć przebieg i wartość skuteczną napięcia wtórnego, jeżeli L_1=40mH, L_2=62,5mH, k=0,6, f=50Hz. Schemat obwodu przedstawiono na rysunku 9.12.



Rys.9.12

Rozwiązanie:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}6\sqrt{40 \cdot 62{,}5} = 0{,}6\sqrt{2500} = 30\text{mH},$$

$$\omega M = 314 \cdot 0{,}03 = 9{,}42\Omega, \quad 3\omega M = 28{,}26\Omega, \quad \varphi_1 = \varphi_3 = 90^o,$$

$$e_2 = u_2 = \left[18{,}84\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^o\right) + 16{,}96\sqrt{2}\sin 3\omega t\right]\text{V},$$

$$U_2 = \sqrt{U_{21}^2 + U_{22}^2} = \sqrt{18{,}84^2 + 16{,}96^2} = \sqrt{642{,}59} = 25{,}35\text{V}.$$

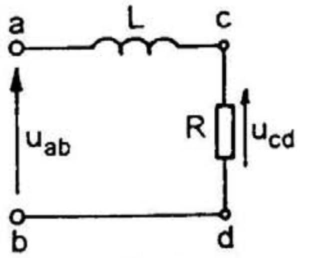
Odpowiedź: U_2=25,35V, przebieg czasowy napięcia u_2 opisano powyżej.

Zadanie 9.15

Odbiornik o rezystancji $R = 500\Omega$ ma być zasilany w sposób pokazany na rysunku 9.13 napięcicm sinusoidalnym wyprostowanym całofalowo

$$u_{ab} = 300 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{600\cos 2k\omega t}{(2k-1)(2k+1)}.$$

W celu wygładzenia krzywej napięcia na odbiorniku włączono w szereg z odbiornikiem cewkę indukcyjną o reaktancji ωL=2000Ω.



Rys.9.13

Wyznaczyć przebieg napięcia u_{cd} na odbiorniku i porównać go z przebiegiem napięcia zasilającego u_{ab}.

Rozwiązanie:

$$u_{ab} = 300 - \frac{600}{(2-1)(2+1)}\cos 2\omega t - \frac{600}{(4-1)(4+1)}\cos 4\omega t - \frac{600}{(6-1)(6+1)}\cos 6\omega t ...$$

$$u_{ab} = 300 - 200\cos 2\omega t - 40\cos 4\omega t - 17\cos 6\omega t ...,$$

$$Z_{ab0} = Z_{cd0} = R = 500\Omega, \qquad Z_{cd2} = Z_{cd4} = Z_{cd6} = Z_{cd0} = 500\Omega,$$

$$Z_{ab2} = \sqrt{R^2 + (2\omega L)^2} = \sqrt{500^2 + 4000^2} = \sqrt{16250000} = 4031{,}13\Omega,$$

$$Z_{ab4} = \sqrt{R^2 + (4\omega L)^2} = \sqrt{500^2 + 8000^2} = \sqrt{64250000} = 8015{,}61\Omega,$$

$$Z_{ab6} = \sqrt{R^2 + (6\omega L)^2} = \sqrt{500^2 + 12000^2} = \sqrt{144250000} = 12010{,}41\Omega,$$

$$\frac{U_{cd0}}{U_{ab0}} = \frac{Z_{cd0}}{Z_{ab0}}, \quad U_{cd0} = U_{ab0}\frac{Z_{cd0}}{Z_{ab0}} = 300\frac{500}{500} = 300\text{V},$$

$$U_{cd2} = U_{ab2}\frac{Z_{cd2}}{Z_{ab2}} = 200\frac{500}{4031{,}13} = 24{,}81\text{V},$$

$$U_{cd4} = U_{ab4}\frac{Z_{cd4}}{Z_{ab4}} = 40\frac{500}{8015{,}61} = 2{,}5\text{V},$$

$$U_{cd6} = U_{ab6}\frac{Z_{cd6}}{Z_{ab6}} = 17\frac{500}{12010{,}41} = 0{,}71\text{V},$$

$$\varphi_2 = arctg\frac{2\omega L}{R} = arctg\frac{4000}{500} = 83^o,$$

$$\varphi_4 = arctg\frac{4\omega L}{R} = arctg\frac{8000}{500} = 86^o,$$

$$\varphi_6 = arctg\frac{6\omega L}{R} arctg\frac{12000}{500} = 88^o,$$

$$u_{cd.} \approx [300 - 25\cos(2\omega t\text{-}83^o) - 2{,}5\cos(4\omega t\text{-}86^o) + \text{-}0{,}7\cos(6\omega t\text{-}88^o)]\text{V},$$

lub

$$u_{cd.} \approx [300 - 25\sin(2\omega t\text{+}7^o) - 2{,}5\sin(4\omega t\text{+}4^o) + \text{-}0{,}7\sin(6\omega t\text{+}2^o) - ...]\text{V}.$$

Odpowiedź: Przebiegi napięcia u_{cd} zapisano powyżej.

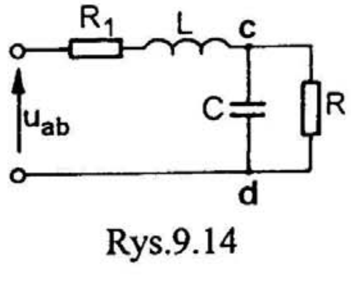
Uwaga: U_{cd2} oznaczają tu wartości maksymalne podobnie jak i dla następnych harmonicznych. Zrezygnowano tu z indeksu „m” celem uproszczenia zapisu.

Zadanie 9.16

Odbiornik o rezystancji $R = 500\Omega$ ma być zasilany napięciem sinusoidalnym wyprostowanym całofalowo:

$$u_{ab} = 300 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{600\cos 2k\omega t}{(2k-1)(2k+1)}.$$

W celu wygładzenia krzywej napięcia na odbiorniku zastosowano układ filtrujący przedstawiony na rysunku. Wyznaczyć przebieg napięcia u_{cd} na odbiorniku.



Rys.9.14

Dane: R_1=100Ω, R=500Ω, ωL=2000, $\dfrac{1}{\omega C}=50\Omega$.

Rozwiązanie: $2\omega L$=4000Ω, $4\omega L$=8000Ω, $6\omega L$=2000Ω.

$$\frac{1}{2\omega C}=25\Omega,\quad \frac{1}{4\omega C}=12{,}5\Omega,\quad \frac{1}{6\omega C}=8{,}33\Omega,$$

$$Z_{cd0}=500\Omega,\quad Z_{ab0}=100+500=600\Omega,$$

$$\underline{Z}_{cd2}=\frac{R\left(-j\dfrac{1}{2\omega C}\right)}{R-j\dfrac{1}{2\omega C}}=\frac{500(-j25)}{500-j25}=\frac{-j12500(500+j25)}{250000+625}=$$
$$=\frac{312500-j6250000}{250625}=(1{,}25-j24{,}94)\Omega,$$

$$Z_{cd2}=\sqrt{1{,}25^2+24{,}94^2}=\sqrt{623{,}56}=24{,}97\Omega,$$

$$Z_{ab2}=R_1+j2\omega L+\underline{Z}_{cd2}=100+j4000+1{,}25-j25=$$
$$=(101{,}25+j3975)\Omega,$$

$$Z_{ab2}=\sqrt{101{,}25^2+3975^2}=3976{,}3\Omega,$$

$$\underline{Z}_{cd4}=\frac{R\left(-j\dfrac{1}{4\omega C}\right)}{R-j\dfrac{1}{4\omega C}}=\frac{500(-j12{,}5)}{500-j12{,}5}=\frac{-j6250(500+j12{,}5)}{250000+156{,}25}=$$
$$=\frac{78125-j3125000}{250156{,}25}=(0{,}31-j12{,}49)\Omega,$$

$$Z_{cd4}=\sqrt{0{,}31^2+12{,}49^2}=\sqrt{156{,}097}=12{,}49\Omega,$$

$$\underline{Z}_{ab4}=R_1+j4\omega L+\underline{Z}_{cd4}=100+j8000+0{,}31-j12{,}5=$$
$$=(100{,}3+j7987{,}5)\Omega,$$

$$Z_{ab4}\sqrt{100{,}3^2+7987{,}5^2}=\sqrt{63810216{,}34}=7988{,}13\Omega,$$

$$\underline{Z}_{cd6}=\frac{R\left(-j\frac{1}{6\omega C}\right)}{R-j\frac{1}{6\omega C}}=\frac{500(-j8{,}33)}{500-j8{,}33}=\frac{-j4165(500+j8{,}33)}{250000+69{,}39}=$$

$$=\frac{34694{,}45-j2082500}{250069{,}39}=(0{,}14-j8{,}33)\Omega,$$

$$Z_{cd6}=\sqrt{0{,}14^2+8{,}33^2}=\sqrt{69{,}41}=8{,}33\Omega,$$

$$\underline{Z}_{ab6}=R_1+j6\omega L+\underline{Z}_{cd6}=100+j12000+0{,}14-j8{,}33=$$
$$=(100{,}14+j11991{,}67)\Omega,$$

$$Z_{ab6}=\sqrt{100{,}14^2+11991{,}67^2}=\sqrt{143810177{,}4}=11992{,}1\Omega,$$

$$U_{cd0}=U_{ab0}\frac{Z_{cd0}}{Z_{ab0}}=300\frac{500}{600}=250\text{V},$$

$$U_{cd2}=U_{ab2}\frac{Z_{cd2}}{Z_{ab2}}=200\frac{24{,}97}{3976{,}3}=1{,}26\text{V},$$

$$U_{cd4}=U_{ab4}\frac{Z_{cd4}}{Z_{ab4}}=40\frac{12{,}49}{7988{,}13}=0{,}06\text{V},$$

$$U_{cd6}=U_{ab6}\frac{Z_{cd6}}{Z_{ab6}}=17\frac{8{,}33}{11992{,}1}=0{,}01\text{V},$$

$$u_{cd.}\approx 250-1{,}25\sin(2\omega t+\psi_2)-0{,}06\sin(4\omega t+\psi_4)+-0{,}01\sin(6\omega t+\psi_6)-\ldots..$$

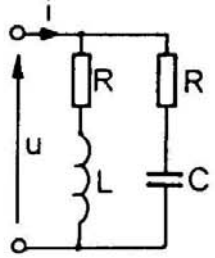
Odpowiedź: Przebieg napięcia u_{cd} zapisano powyżej. Ze względu na bardziej skomplikowane obliczenia kąta przesunięcia fazowego wyrażenie na przebieg czasowy tego napięcia zapisano w sposób ogólny eksponując tylko wartości maksymalne poszczególnych harmonicznych. Działanie filtrujące jest tu znacznie skuteczniejsze niż w poprzednim zadaniu. Harmoniczna druga zmalała aż 160 krotnie.

Zadanie 9.17

W obwodzie podanym na rysunku 9.15

$$R = 10\Omega, \qquad \omega L = \frac{1}{\omega C} = 30\Omega,$$

a napięcie zasilające ma przebieg $u = \left(200\sqrt{2}\sin\omega t + 100\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)$V. Wyznaczyć przebieg i wartość skuteczną prądu zasilającego oraz moce: czynną, bierną i pozorną, pobrane przez układ.



Rys.9.15

Rozwiązanie:

$$3\omega L = 3\cdot 30 = 90\Omega, \qquad \frac{1}{3\omega C} = \frac{1}{3}\cdot 30 = 10\Omega,$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{(R + j\omega L)\left(R - j\dfrac{1}{\omega C}\right)}{R + j\omega L + R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{(10 + j30)(10 - j30)}{10 + j30 + 10 - j30} =$$

$$= \frac{100 + 900}{20} = 50\Omega,$$

$$Z_1 = 50\Omega, \qquad \varphi_1 = 0^\circ,$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{(R + j3\omega L)\left(R - j\dfrac{1}{3\omega C}\right)}{R + j3\omega L = R - j\dfrac{1}{3\omega C}} = \frac{(10 + j90)(10 - j10)}{10 + j90 + 10 - j10} =$$

$$= \frac{100 + 900 - j100 + j900}{20 + j80} = \frac{(1000 + j800)(20 - j80)}{400 + 6400} =$$

$$= \frac{(10 + j8)(20 - j80)}{68} = \frac{200 + 640 - j800 + j160}{68} =$$

$$= \frac{840 - j640}{68} = (12{,}35 - j9{,}41)\Omega,$$

$$\varphi_3 = arctg\left(-\frac{9{,}41}{12{,}35}\right) = -37^o, \qquad \cos\varphi_3 = 0{,}8, \qquad \sin\varphi_3 = -0{,}6,$$

$$Z_3 = \sqrt{12{,}35^2 + 9{,}41^2} = \sqrt{241{,}07} = 15{,}53\Omega,$$

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = \frac{200}{50} = 4\text{A}, \qquad I_3 = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{100}{15{,}53} = 6{,}44\text{A},$$

$$i = \left[4\sqrt{2}\sin\omega t + 6{,}44\sqrt{2}\sin\left(3\omega t + 37^o\right)\right]\text{A},$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{4^2 + 6{,}44^2} = \sqrt{57{,}47} = 7{,}58\text{A},$$

$$P = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \cos\varphi_k = 200 \cdot 4 \cdot 1 + 100 \cdot 6{,}44 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 800 + 515{,}2 = 1315{,}2\text{W},$$

$$Q = \sum_{k=1}^{n} U_k I_k \sin\varphi_k = 200 \cdot 4 \cdot 0 + 100 \cdot 6{,}44 \cdot (-0{,}6) = -366{,}4\text{VAr},$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{200^2 + 100^2} = \sqrt{50000} = 223{,}61\text{V},$$

$$S = UI = 223{,}61 \cdot 7{,}58 = 1694{,}94\text{VA}.$$

Odpowiedź: $i = \left[4\sqrt{2}\sin\omega t + 6{,}44\sqrt{2}\sin\left(3\omega t + 37^o\right)\right]\text{A}$, I=7,58A, P=1315,2W, Q=-386,4VAr, S=1694,94VA.

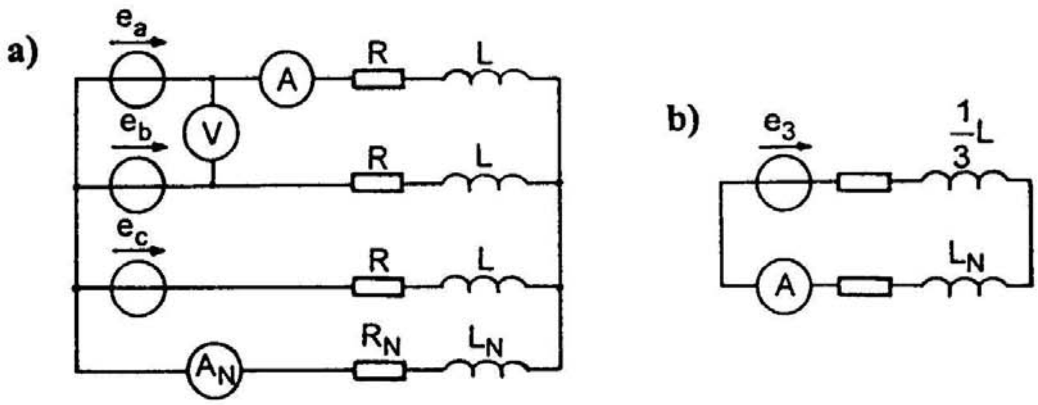
Zadanie 9.18

Odbiornik symetryczny w układzie gwiazdowym czteroprzewodowym zasilany jest napięciem trójfazowym symetrycznym o przebiegu

$$e_a = \left(120\sqrt{2}\sin\omega t - 60\sqrt{2}\sin 3\omega t + 20\sqrt{2}\sin 5\omega t\right)\text{V}.$$

Dane: R=4,8Ω, ωL=3,6Ω, R_N=0,4Ω, ωL_N=0,8Ω.

Układ przedstawiony jest na rysunku 9.16a. Obliczyć wskazania przyrządów.



Rys.9.16

Rozwiązanie: Woltomierz wskazuje wartość skuteczną napięcia międzyfazowego

$$u_{ab} = u_a - u_b = 120\sqrt{2}\sin\omega t - 60\sqrt{2}\sin 3\omega t + 20\sqrt{2}\sin 5\omega t +$$
$$-120\sqrt{2}\sin\left(\omega t - 120^o\right) + 60\sqrt{2}\sin\left(3\omega t - 360^o\right) +$$
$$-20\sqrt{2}\sin\left(5\omega t - 600^o\right),$$

$$u_{ab} = \sqrt{3}U_{1m}\sin\left(\omega t + 30^o\right) + \sqrt{3}U_{5m}\sin\left(5\omega t - 30^o\right),$$

$$\sqrt{3}U_1 = \sqrt{3}\cdot 120 = 207{,}85\text{V}, \quad \sqrt{3}U_5 = \sqrt{3}\cdot 20 = 34{,}64\text{V},$$

$$U_{ab} = \sqrt{\left(U_1\sqrt{3}\right)^2 + \left(U_5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{207{,}85^2 + 34{,}64^2} = 210{,}72\text{V},$$

$$Z_1 = \sqrt{4{,}8^2 + 3{,}6^2} = \sqrt{23{,}04 + 12{,}96} = \sqrt{36} = 6\Omega,$$

$$I_1 = \frac{120}{6} = 20\text{A}.$$

Rysunek 9.16b przedstawia schemat do obliczenia prądu I_N

$$I_N = \frac{E_3}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}R + R_N\right)^2 + \left[3\omega\left(\frac{L}{3} + L_N\right)\right]^2}},$$

$$I_N = \frac{60}{\sqrt{(1{,}6 + 0{,}4)^2 + (3{,}6 + 2{,}4)^2}} = \frac{60}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{60}{\sqrt{40}} = \frac{60}{6{,}32} = 9{,}49\text{A},$$

$$I_3 = \frac{1}{3} I_N = \frac{9{,}49}{3} = 3{,}16\text{A},$$

$$Z_5 = \sqrt{R^2 + (5\omega L)^2} = \sqrt{4{,}8^2 + 18^2} = \sqrt{23{,}04 + 324} = \sqrt{347{,}04} = 18{,}63\Omega,$$

$$I_5 = \frac{20}{18{,}63} = 1{,}07\text{A},$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{20^2 + 3{,}16^2 + 1{,}07^2} =$$

$$= \sqrt{400 + 9{,}99 + 1{,}15} = \sqrt{411{,}13} = 20{,}28\text{A}.$$

Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości: woltomierz V, $U = 210{,}72$V, amperomierz A_N, $I_N = 9{,}49$A, amperomierz A, $I = 20{,}28$A.

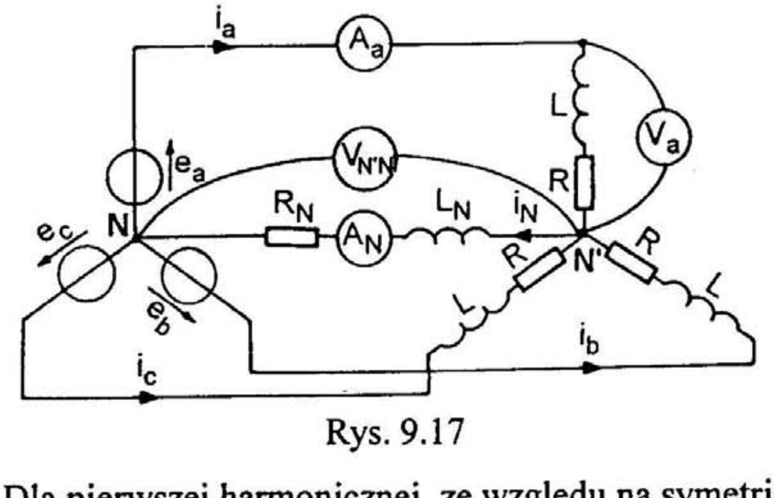
Zadanie 9.19

W układzie na rysunku 9.17 obliczyć wskazania amperomierzy i woltomierzy.

Dane: $R = 15\Omega$, $R_N = 30\Omega$, $\omega L = 5\Omega$, $\omega L_N = 10\Omega$,

$$e_a = \left[220\sqrt{2}\cos\omega t + 70\sqrt{2}\cos 3\omega t\right]\text{V}.$$

Zasilanie jest symetryczne o zgodnej kolejności faz.



Rys. 9.17

Rozwiązanie: Dla pierwszej harmonicznej, ze względu na symetrię układu

$$U_{N'N1} = 0\text{V} \quad \text{i} \quad I_{N1} = 0\text{A},$$

$$I_{a1} = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{220}{\sqrt{15^2 + 5^2}} \frac{220}{15{,}81} = 13{,}91\text{A},$$

$$U_{a1}=E_1=220\text{V}.$$

Dla trzeciej harmonicznej

$$\underline{Z}_{f3}=R+j3\omega L=(15+j15)\Omega,$$

$$\underline{Z}_{N3}=R_N+j3\omega L_N=30+j30=2\underline{Z}_{f3},$$

$$\underline{U}_{N'N3}\frac{3\underline{E}_3\underline{Y}_{f3}}{3\underline{Y}_{f3}+\underline{Y}_{N3}}=\underline{E}_3\frac{3\underline{Y}_{f3}}{3\underline{Y}_{f3}+\frac{1}{2}\underline{Y}_{f3}}=\underline{E}_3\frac{3}{\frac{7}{2}}=\frac{6}{7}\underline{E}_3,$$

$$U_{N'N3}=\frac{6}{7}E_3=\frac{6}{7}\cdot 70=60\text{V},$$

$$I_{N3}=\frac{U_{N'N3}}{Z_{N3}}=\frac{60}{30\sqrt{2}}=\sqrt{2}\text{A}=1{,}41\text{A},$$

$$I_{a3}=\frac{1}{3}I_{N3}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0{,}47\text{A},\qquad \underline{U}_{a3}=\underline{E}_3-\underline{U}_{N'N3}=j70-j60=j10\text{V},$$

$$U_{a3}=10\text{V}.$$

Wartości skuteczne prądów i napięć wynoszą więc:

$$I_a=\sqrt{I_{a1}^2+I_{a3}^2}=\sqrt{13{,}91^2+0{,}47^2}=\sqrt{193{,}71}=13{,}92\text{A},$$

$$I_N=1{,}41\text{A},$$

$$U_a=\sqrt{U_{a1}^2+U_{a3}^2}=\sqrt{220^2+10^2}=\sqrt{48500}=220{,}23\text{V},$$

$$U_{N'N}=60\text{V}.$$

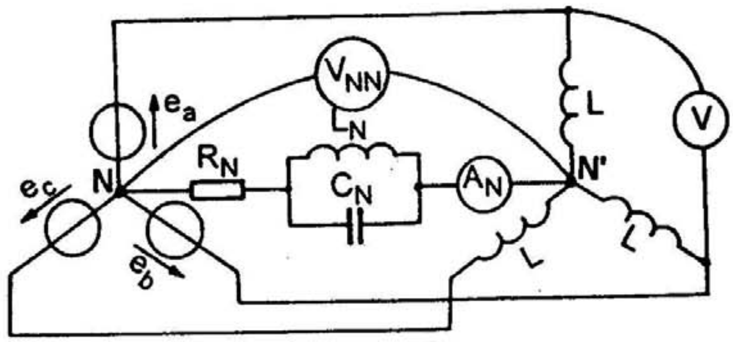
Odpowiedź: Amperomierz fazy A wskazuje prąd $I_a=13{,}92$A, amperomierz przewodu zerowego wskazuje prąd $I_N=1{,}41$A, na woltomierzach odczytać można odpowiednio $U_a=220{,}23$V, $U_{N'N}=60$V.

Zadanie 9.20

W układzie podanym na rysunku 9.18 obliczyć wskazania przyrządów.

Dane: $R_N=3\omega L_N=\dfrac{1}{3\omega C_N}=10\Omega$, generator jest symetryczny o dodatniej kolejności faz i przebiegu SEM:

$$e_a = \left[50 + 220\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^o\right) + 70\sqrt{2}\sin\left(3\omega t + 30^o\right)\right]V.$$



Rys. 9.18

Odpowiedź: $I_N = 5A$, $U_{N'N} = 86V$, $U = 380V$.

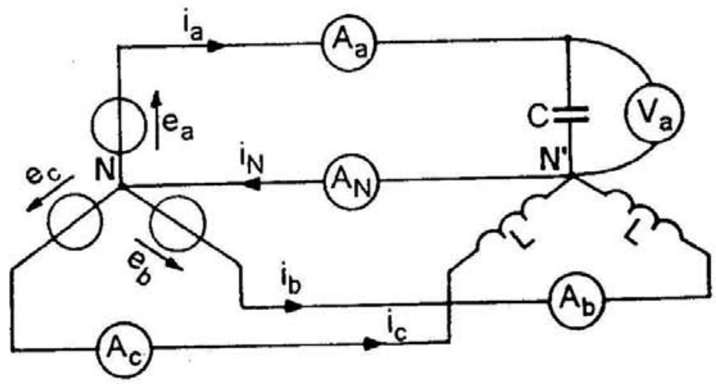
Zadanie 9.21

W układzie podanym na rysunku 9.19a obliczyć wskazania przyrządów.

Dane: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 30\Omega$,

generator jest symetryczny o dodatniej kolejności faz i przebiegu SEM:

$$e_a = \left[150\sqrt{2}\sin\omega t + 120\sqrt{2}\sin 3\omega t\right]V,$$

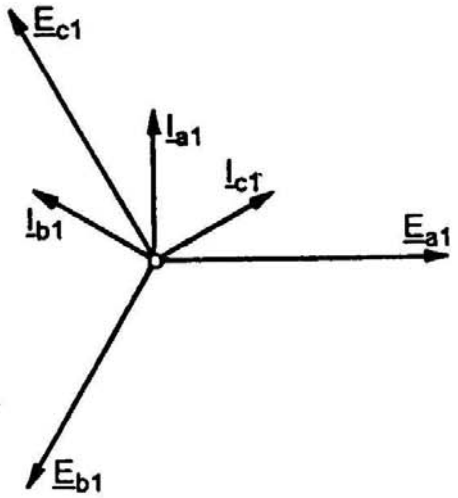


Rys. 9.19a

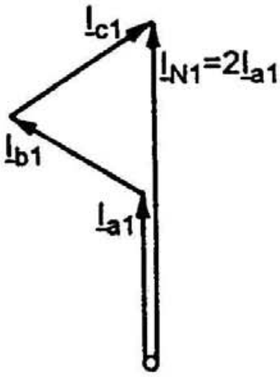
Rozwiązanie: Prądy poszczególnych amperomierzy obliczyć można najszybciej stosując metodę wykreślną (układ z przewodem zerowym). Przedstawiają to rysunki 9.19b, c, d, e

$$I_{a1} = I_{b1} = I_{c1} = \frac{150}{30} = 5A,$$

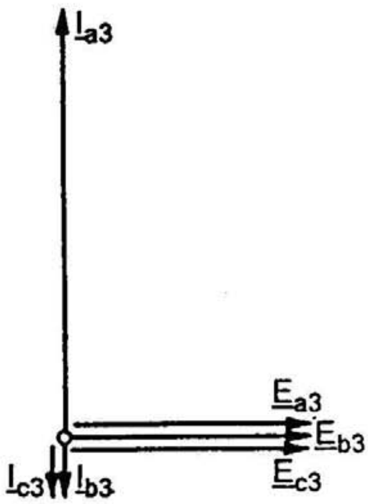
$$I_{N1} = 2I_{a1} = 2I_{b1} = 2I_{c1} = 10A,$$



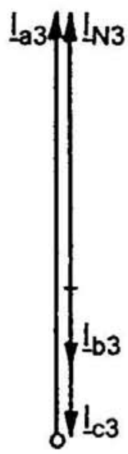
Rys. 9.19b



Rys. 9,19c



Rys. 9.19d



Rys. 9.19e

$$\underline{I}_{a3} = E_3 \cdot 3\omega C = \frac{120}{10} = 12\text{A},$$

$$\underline{I}_{b3} = \underline{I}_{c3} = \frac{E_3}{3\omega L} = \frac{120}{90} = 1{,}33\text{A},$$

$$I_{N3} = I_{a3} - I_{b3} - I_{c3} = 12 - 1{,}33 - 1{,}33 = 9{,}34\text{A},$$

$$I_a = \sqrt{I_{a1}^2 + I_{a3}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13\text{A},$$

$$I_b = I_c = \sqrt{I_{b1}^2 + I_{b3}^2} = \sqrt{I_{c1}^2 + I_{c3}^2} = \sqrt{5^2 + 1{,}33^2} = \sqrt{26{,}77} = 5{,}17\text{A},$$

$$I_N = \sqrt{I_{N1}^2 + I_{N3}^2} = \sqrt{10^2 + 9{,}34^2} = \sqrt{187{,}24} = 13{,}68\text{A},$$

$$U_a = \sqrt{U_{a1}^2 + U_{a3}^2} = \sqrt{150^2 + 120^2} = \sqrt{36900} = 192{,}1\text{V}.$$

Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości amperomierze: $I_a = 13\text{A}$, $I_b = I_c = 5{,}17\text{A}$, $I_N = 13{,}68\text{A}$, woltomierz: $U_a = 192{,}1\text{V}$.

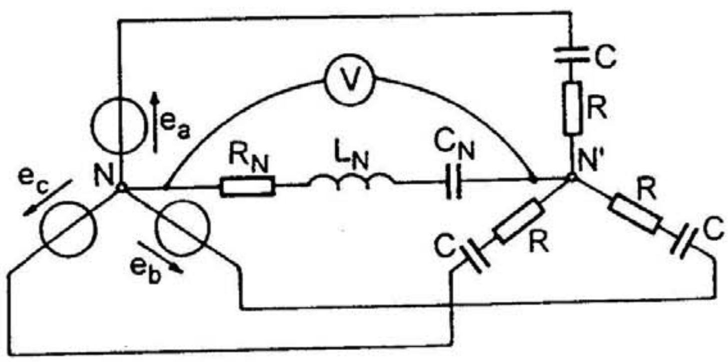
Zadanie 9.22

W układzie przedstawionym na rysunku 9.20a obliczyć wskazanie woltomierza.

Dane: $R = R_N = 3\omega L_N = \dfrac{1}{3\omega C} = 10\Omega$, $\dfrac{1}{\omega C_N} = 60\Omega$,

generator jest symetryczny o przebiegu SEM:

$$e_a = \left[70 + 220\sqrt{2}\sin\omega t + 80\sqrt{2}\sin 3\omega t\right]\text{V},$$



Rys. 9.20a

Rozwiązanie: Dla pierwszej harmonicznej $U_{N'N1} = 0$ (symetria odbiornika i generatora). Dla trzeciej harmonicznej

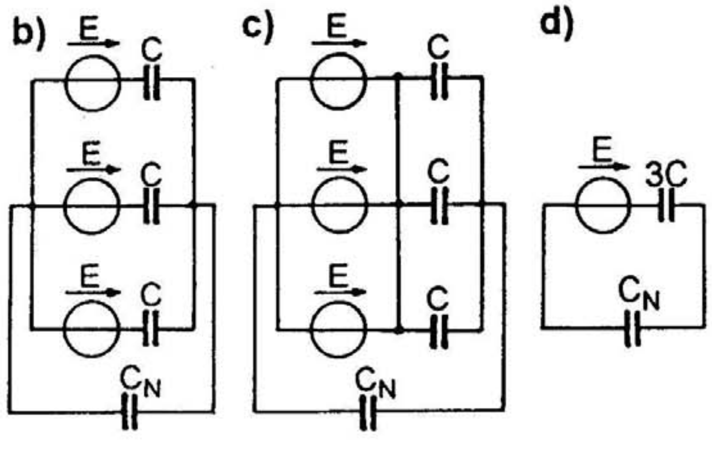
$$\underline{Z}_{f3} = R - j\frac{1}{3\omega C} = (10 - j10)\Omega,$$

$$\underline{Z}_{N3} = R_N + j\left(3\omega L_N - \frac{1}{3\omega C_N}\right) = 10 + j(10 - 20) = (10 - j10)\Omega,$$

$$\underline{U}_{N\copyright N3} = \frac{3\underline{E}_3\underline{Y}_{f3}}{3\underline{Y}_{f3} + \underline{Y}_{N3}} = \frac{3\underline{E}_3\underline{Y}_{f3}}{4\underline{Y}_{f3}} = \frac{3}{4}\underline{E}_3,$$

$$U_{N'N3} = \frac{3}{4}E_3 = \frac{3}{4}80 = 60\text{V}.$$

Dla składowej stałej prąd nie płynie (pojemności w odbiornikach fazowych i przewodzie neutralnym). Rozkład napięć następuje zgodnie z regułami pojemnościowego dzielnika napięcia. Układ można więc uprościć co obrazują rysunki 9.20b, c, d



Rys. 9.20b, c, d

Z porównania danych $\dfrac{1}{3\omega C} = 10\Omega$ i $\dfrac{1}{\omega C_N} = 60\Omega$ wynika, że

$$C_N = \frac{1}{2}C,$$

$$U_{N'N-} = E\frac{3C}{3C + C_N} = E\frac{3}{3+0,5} = \frac{6}{7}E = 60\text{V},$$

$$U_{N'N} = \sqrt{U_{N'N-}^2 + U_{N'N3}^2} = \sqrt{60^2 + 60^2} = \sqrt{7200} = 84,85\text{V}.$$

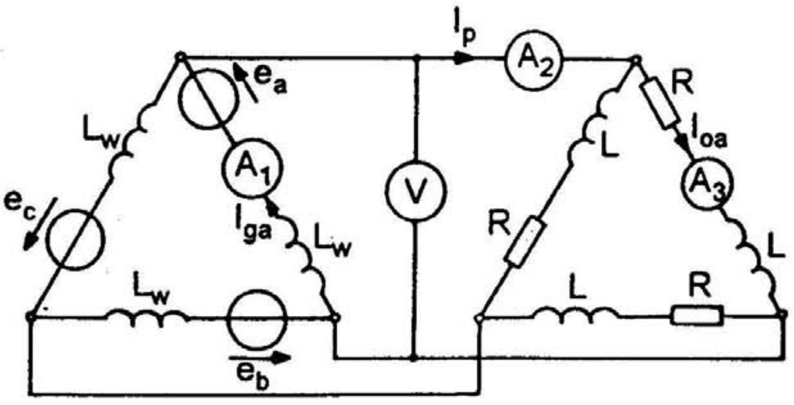
Odpowiedź: $U_{N'N} = 84,85\text{V}$ (wskazanie woltomierza).

Zadanie 9.23

W układzie jak na rysunku 9.21 obliczyć wskazania przyrządów.

Dane: $e_a = \left(225\sqrt{2}\sin\omega t + 75\sqrt{2}\sin 3\omega t + 45\sin 5\omega t\right)\text{V}$,

R=100Ω, ωL=70Ω, ωL_w=5Ω.



Rys.9.21

Rozwiązanie: Ze względu na pełną symetrię układu można dokonać następujących obliczeń :

$$\underline{I}_{0a1} = \frac{\underline{E}_{a1}}{R + j\omega(L + L_w)} = \frac{225}{100 + j75} = \frac{225}{125} e^{-j37^o} = 1{,}8 e^{-j37^o}\,\mathrm{A},$$

$$I_{p1} = \sqrt{3} I_{01} = \sqrt{3} \cdot 1{,}8 = 3{,}12\mathrm{A}, \qquad I_{g1} = 1{,}8\mathrm{A}.$$

Prąd fazowy 3 harmonicznej płynie tylko w generatorze

$$I_{g3} = \frac{E_3}{Z_{w3}} = \frac{75}{15} = 5\mathrm{A},$$

$$\underline{I}_{0a5} = \frac{\underline{E}_{a3}}{R + j5\omega(L + L_w)} = \frac{45}{100 + j375} = \frac{45}{388} e^{-j75^o} = 0{,}12 e^{-j75^o}\,\mathrm{A},$$

$$I_{g5} = 0{,}12\mathrm{A}, \qquad I_{p5} = \sqrt{3} I_{05} = \sqrt{3} \cdot 0{,}12 = 0{,}21\mathrm{A},$$

$$I_g = I_1 = \sqrt{I_{g1}^2 + I_{g3}^2 + I_{g5}^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 5^2 + 0{,}12^2} = \sqrt{28{,}25} = 5{,}32\mathrm{A},$$

$$I_p = I_2 = \sqrt{I_{p1}^2 + I_{p5}^2} = \sqrt{3{,}12^2 + 0{,}21^2} = \sqrt{9{,}78} = 3{,}13\mathrm{A},$$

$$I_0 = I_3 = \sqrt{I_{01}^2 + I_{05}^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 0{,}12^2} = \sqrt{3{,}25} = 1{,}8\mathrm{A},$$

$$U_{01} = I_{01}\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 1{,}8 \cdot \sqrt{100^2 + 70^2} = 219{,}72\mathrm{V},$$

$$U_{05} = I_{05}\sqrt{R^2 + (5\omega L)^2} = 0{,}12 \cdot \sqrt{100^2 + 350^2} = 43{,}68\mathrm{V},$$

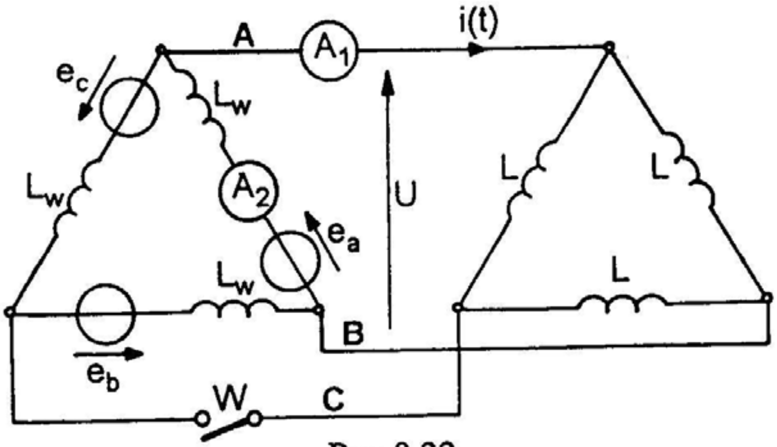
$$U_0 = U = \sqrt{U_{01}^2 + U_{05}^2} = \sqrt{219{,}72^2 + 43{,}68^2} = 224\mathrm{V}.$$

Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości: amperomierz A_1, $I_1 = 5{,}32\text{A}$; amperomierz A_2, $I_2 = 3{,}13\text{A}$; amperomierz A_3, $I_3 = 1{,}8\text{A}$; woltomierz V, $U = 224\text{V}$.

Zadanie 9.24

W układzie jak na rysunku 9.22 przy otwartym wyłączniku amperomierz A_1 wskazuje 2,4A. Obliczyć wskazania A_2 i wskazania A_1 i A_2, gdy wyłącznik W zostanie zamknięty.

Dane: $\omega L = 75\Omega$, $e_a = \left(225\sqrt{2}\sin\omega t + 75\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\text{V}$,



Rys.9.22

Rozwiązanie: Dla otwartego wyłącznika prąd płynie tylko w przewodach A i B. Wartość skuteczna prądu generatora w fazie A (1 harmoniczna)

$$I_{21} = \frac{2}{3}I = \frac{2}{3}\cdot 2{,}4 = 1{,}6\text{A}.$$

Należy teraz znaleźć ωL_w aby obliczyć prąd trzeciej harmonicznej

$$\underline{U} = \underline{I}\,\frac{j\omega L \cdot j2\omega L}{j3\omega L} = \underline{I}\,\frac{2}{3}\,j\omega L = 2{,}4\cdot\frac{2}{3}\cdot j75 = j120\text{V},$$

$$U = 120\text{V}.$$

Z uwagi na to, że w obwodzie występują tylko indukcyjności można zapisać, że napięcie U jest w fazie z SEM e_{a1}

$$U = E_{a1} - \omega L_w I_{21},$$

$$\omega L_w = \frac{E_{a1} - U}{I_{21}} = \frac{225 - 120}{1{,}6} = \frac{105}{1{,}6} = 65{,}6\Omega,$$

$$I_{23} = \frac{E_3}{3\omega L_w} = \frac{75}{196{,}8} = 0{,}38\text{A}.$$

Wskazania amperomierza A_2

$$I_2 = \sqrt{I_{21}^2 + I_{23}^2} = \sqrt{1{,}6^2 + 0{,}38^2} = \sqrt{2{,}70} = 1{,}64\text{A}.$$

Dla zamkniętego wyłącznika pierwsza harmoniczna prądu fazowego generatora

$$I_{21} = \frac{E_1}{\omega L + \omega L_w} = \frac{225}{140{,}6} = 1{,}6\text{A}.$$

Trzecia harmoniczna jak poprzednio $I_{23} = 0{,}38A$,

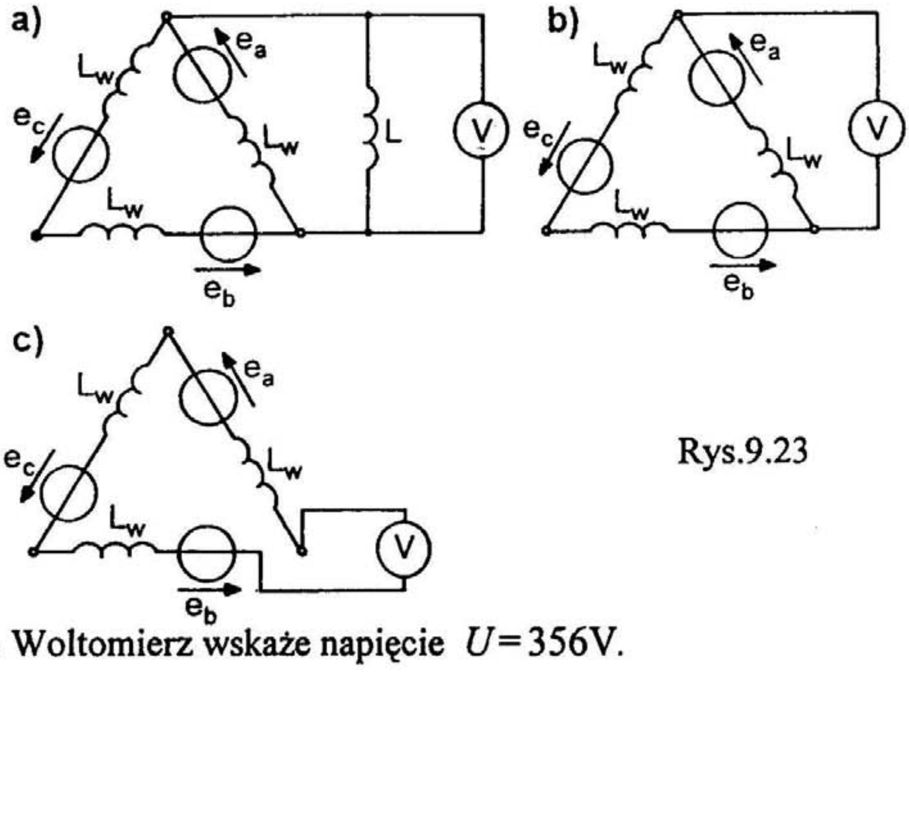
$$I_2 = \sqrt{I_{21}^2 + I_{23}^2} = \sqrt{1{,}6^2 + 0{,}38^2} = 1{,}64\text{A},$$

a amperomierz A_1, $I_1 = \sqrt{3} I_{21} = \sqrt{3} \cdot 1{,}6 = 2{,}77\text{A}$.

Odpowiedź: Przyrządy wskazują następujące wartości a) przy otwartym wyłączniku W amperomierz A_2, $I_2 = 1{,}64$A, b) przy zamkniętym wyłączniku W amperomierz A_1, $I_1 = 2{,}77$A, A_2, $I_2 = 1{,}64$A

Zadanie 9.25

Woltomierz V włączony jak na rysunku 9.23b wskazywał 380V, a włączony jak na rysunku 9.23c wskazywał 90V. Obliczyć jakie będą wskazania woltomierza w układzie na rysunku 9.23a, gdy $L = 318$mH i $\omega L_w = 10\Omega$.



Rys.9.23

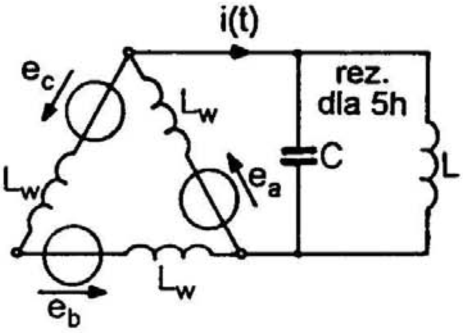
Odpowiedź: Woltomierz wskaże napięcie $U = 356$V.

Zadanie 9.26

W układzie jak na rysunku 9.24 wyznaczyć przebieg prądu $i(t)$. Generator jest symetryczny a przebieg SEM w fazie A dany jest następującym wzorem:

$$e_a = \left[220\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 30^o\right) + 100\sqrt{2}\cos 3\omega t + 30\sqrt{2}\sin 5\omega t\right]\mathrm{V},$$

$$\omega L = 10\omega L_w = 100\Omega,$$



Rys.9.24

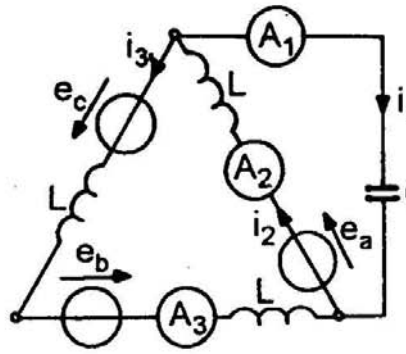
Odpowiedź: $i = \left[1{,}99\sqrt{2}\sin\left(\omega t + 30^o\right)\right]\mathrm{A}$.

Zadanie 9.27

W układzie na rysunku 9.25 obliczyć wskazania przyrządów. Generator jest symetryczny o przebiegu SEM e_a danej wzorem:

$$e_a = \left(225\sqrt{2}\sin\omega t + 75\sqrt{2}\sin 3\omega t\right)\mathrm{V},$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 10\Omega,$$



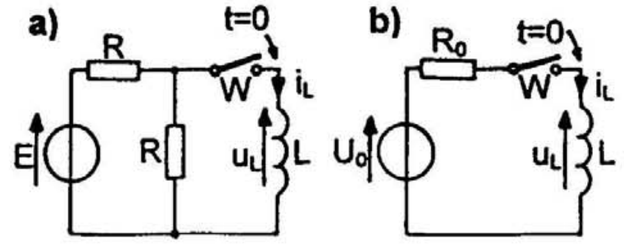
Rys.9.25

Odpowiedź: Amperomierze wskazują następujące wartości: A_1 - $I_1 = 67{,}5$A, A_2 - $I_2 = 45{,}07$A, A_3 - $I_3 = 22{,}64$A.

10. STANY NIEUSTALONE – - METODA OPERATOROWA

Zadanie 10.1

W pokazanym na rysunku 10.1a obwodzie, wyznaczyć przebieg prądu w cewce i napięcia na cewce od chwili zamknięcia wyłącznika.



Rys. 10.1

Rozwiązanie:

Do wyznaczenia prądu w cewce i jej napięcia wykorzystane zostanie twierdzenie Thevenina. Rysunek 10.1b przedstawia cewkę przyłączoną do zastępczego dwójnika aktywnego.

$$U_0 = E\frac{R}{2R} = \frac{E}{2}; \qquad R_0 = \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R}{2};$$

$$I_L(s) = \frac{U_0(s)}{R_0 + sL} = \frac{E}{2s}\frac{1}{\frac{R}{2} + sL} = \frac{E}{s(R+2sL)}.$$

Funkcji $F(s) = \dfrac{L(s)}{sM(s)}$ odpowiada w dziedzinie czasu wyrażenie:

$$f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^{m}\frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)}, \quad \text{przy czym:} \quad M'(s_k) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m}(s_k - s_i).$$

$L(0)$ - wartość wielomianu $L(s)$ dla $s = 0$;
$M(0)$ - wartość wielomianu $M(s)$ dla $s = 0$;
m - stopień wielomianu $M(s)$ (liczba pierwiastków tego wielomianu).

$$\frac{L(0)}{M(0)} = \frac{E}{R}, \qquad M' = 2L, \qquad M'(s_1) = M'\left(-\frac{R}{2L}\right) = 2L,$$

$$i_L = \frac{E}{R} + \frac{E}{-\frac{R}{2L}\cdot 2L}e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t}\right),$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{E}{R}\left(0 + \frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\right) = \frac{E}{2}e^{-\frac{R}{2L}t},$$

lub $U_L(s) = sLI_L(s) = \dfrac{sLE}{s(R+2sL)} = E\dfrac{L}{R+2sL}$.

Funkcji $F(s) = \dfrac{L(s)}{N(s)}$ odpowiada w dziedzinie czasu wyrażenie

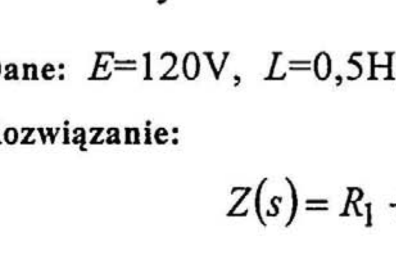
$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{L(s_k)}{N'(s_k)} e^{s_k t} \qquad \text{przy czym} \qquad N'(s_k) = \prod_{\substack{i=1 \\ l \neq k}}^{n} (s_k - s_i),$$

n - stopień wielomianu $N(s)$ (liczba pierwiastków tego wielomianu)

$$L(s_1) = EL; \qquad N'(s_1) = 2L; \qquad u_L = \frac{E}{2}e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Odpowiedź: $i_L = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$; $u_L = \dfrac{E}{2}e^{-\frac{R}{2L}t}$.

Zadanie 10.2



Rys. 10.2

W pokazanym na rysunku 10.2 układzie wyznaczyć przebiegi prądów i napięć zastrzałkowanych w układzie. Obliczyć po jakim czasie dowolny prąd lub napięcie będzie się różnić o 5% od wartości ustalonej. Obliczyć energię pobraną przez cewkę indukcyjną.

Dane: E=120V, L=0,5H, R_1=40Ω, R_2=60Ω.

Rozwiązanie:

$$Z(s) = R_1 + \frac{R_2 sL}{R_2 + sL} = \frac{R_1 R_2 + sL(R_1 + R_2)}{R_2 + sL}.$$

$$I_1(s) = \frac{E}{s}\frac{R_2 + sL}{R_1 R_2 + sL(R_1 + R_2)} = E\frac{R_2 + sL}{s[R_1 R_2 + sL(R_1 + R_2)]},$$

$$s_1 = -\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} = -\alpha\ , \qquad \alpha = \frac{\mathrm{R}_1R_2}{L(R_1+R_2)},$$

$$L(0) = ER_2\ , \quad M(0) = R_1R_2\ , \quad L(s_1) = E\frac{R_2^2}{R_1+R_2}\ ,$$

$$M'(s) = L(R_1+R_2),\ \ \mathrm{s}_1M'(s_1) = -R_1R_2,$$

$$i_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{ER_2}{R_1(R_1+R_2)}e^{-\alpha t} = \frac{E}{R_1}\left(1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}e^{-\alpha t}\right),$$

$$u_1 = Ri_1 = E\left(1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}e^{-\alpha t}\right),$$

$$U_L(s) = \frac{R_2sL}{R_2+sL}I(s) = \frac{ER_2L}{R_1R_2+sL(R_1+R_2)},$$

$$s_1 = -\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)} = -\alpha\ , \qquad N'(s) = L(R_1+R_2),$$

$$u_L = \frac{ER_2L}{(R_1+R_2)L}e^{-\alpha t} = \frac{ER_2}{R_1+R_2}e^{-\alpha t}.$$

Takie samo wyrażenie na u_L otrzymuje się z różnicy E-u_1

$$u_L = E - E + \frac{ER_2}{R_1+R_2}e^{-\alpha t}, \qquad i_2 = \frac{u_L}{R_2} = \frac{E}{R_1+R_2}e^{-\alpha t},$$

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{sL} = \frac{ER_2}{s[R_1R_2+sL(R_1+R_2)]}\ , \qquad \mathrm{s}_1 = -\frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)},$$

$$L(0) = ER_2\ , \qquad M(0) = \mathrm{R}_1R_2, \qquad L(\mathrm{s}_1) = ER_2,$$

$$M'(\mathrm{s}) = L(\mathrm{R}_1+R_2), \qquad s_1M'(s_1) = -R_1R_2,$$

$$i_L = \frac{E}{R_1} - \frac{ER_2}{R_1R_2}e^{-\alpha t} = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

Po wstawieniu danych otrzymuje się:

$$i_1 = \left(3 - 1{,}8e^{-48t}\right)\mathrm{A}, \quad i_2 = 3\left(1 - e^{-48t}\right)\mathrm{A}, \quad i_3 = 1{,}2e^{-48t}\mathrm{A},$$

$$u_1 = \left(120 - 72e^{-48t}\right)\mathrm{V}, \quad u_L = 72e^{-48t}\mathrm{V}.$$

Po jakim czasie napięcie u_L zmaleje do wartości $0{,}05u_L(0)$?

$$0{,}05u_L(0) = 3{,}6\mathrm{V},$$

$$3{,}6 = 72e^{-\alpha t_1} \quad \text{to} \quad t_1 = \frac{1}{\alpha} ln 20,$$

$\frac{1}{\alpha} = \tau$ - stała czasowa,

$t_1 = \tau \ln 20 \approx 3\tau$, można więc przyjąć zaistnienie stanu ustalonego w układzie po czasie równym kilku stałym czasowym. Energia pobrana przez cewkę:

$$W_m = \int_0^\infty u_L \cdot i_L dt,$$

$$W_m = \int_0^\infty \frac{ER_2}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t} \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)dt =$$

$$= \frac{E^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)}\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt - \int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt\right) =$$

$$= \frac{E^2 R_z}{R_1^2}\left(\tau - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{E^2 R_z \tau}{2R_1^2} = \frac{1}{2} L i_{LU}^2 = \frac{0{,}5 \cdot 3^2}{2} = 2{,}25J,$$

gdzie $\quad R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad$ a $\quad \tau = \frac{1}{\alpha}.$

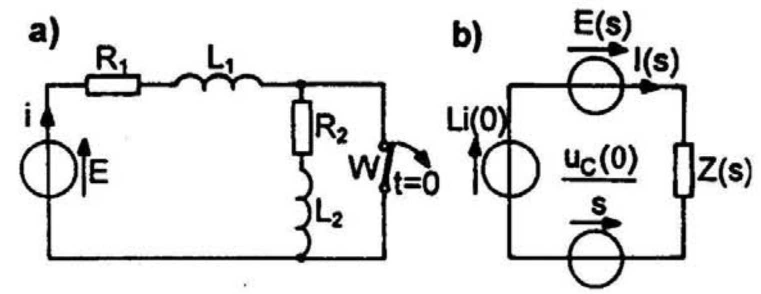
Odpowiedź: $i_1 = \frac{E}{R_1}\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t}\right)^{-\alpha t}, \quad i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t},$

$$i_L = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\right), \quad u_1 = E\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t}\right), \quad u_L = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t},$$

napięcie u_L różni się o 5% od wartości ustalonej po czasie $t_1 \approx 3\tau$. Energia pobrana przez cewkę indukcyjną W_m=2,25J.

Zadanie 10.3

W obwodzie przedstawionym na rysunku 10.3a istniał stan ustalony przy zamkniętym wyłączniku. Wyznaczyć przebieg prądu po otwarciu wyłącznika.



Rys. 10.3

Rysunek 10.3b przedstawia schemat operatorowy (jednooczkowy) obwodu o impedancji operatorowej $Z(s)$, przy niezerowych warunkach początkowych.

W powyższym przypadku $u_C(0)/s$ nie występuje $i(0)=\dfrac{E}{R_1}$, natomiast

$$Z(s)=R_1+R_2+s(L_1+L_2),$$

$$I(s)=\frac{\dfrac{E}{s}+\dfrac{EL_1}{R_1}}{R_1+R_2+s(L_1+L_2)}=\frac{E}{R_1}\frac{R_1+sL_1}{s[R_1+R_2+s(L_1+L_2)]}$$

$$s_1=-\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2},\quad \alpha=\frac{R_1+R_2}{L_1+L_2},\quad L(0)=ER_1,\quad M(0)=R_1(R_1+R_2),$$

$$L(s_1)=E\left[R_1-\frac{(R_1+R_2)L_1}{L_1+L_2}\right]=E\left(\frac{R_1L_2-R_2L_1}{L_1+L_2}\right),$$

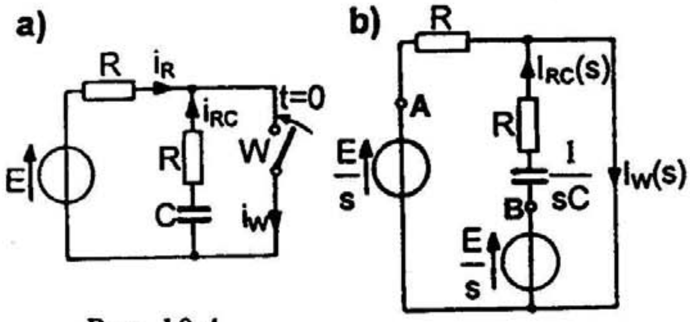
$$M'(s)=L_1+L_2,\ s_1M'(s_1)=-R_1(R_1+R_2),$$

$$i=\frac{E}{R_1+R_2}+\frac{E(R_2L_1-R_1L_2)}{R_1(L_1+L_2)(R_1+R_2)}e^{-\alpha t}.$$

Odpowiedź: $i=\dfrac{E}{R_1+R_2}+\dfrac{E(R_2L_1-R_1L_2)}{R_1(L_1+L_2)(R_1+R_2)}e^{-\alpha t}.$

Zadanie 10.4

W obwodzie przedstawionym na rysunku 10.4a wyznaczyć przebieg czasowy prądu wyłącznika po jego zamknięciu. Przed chwilą czasu $t = 0$ w obwodzie panował stan ustalony.



Rys. 10.4

Rysunek 10.4b przedstawia operatorowy schemat obwodu po zamknięciu wyłącznika. $u_C(0) = E$

Rozwiązanie: Punkty A i B są jednakowego potencjału. Można je więc zewrzeć.

$$Z_1(s) = R,\ Z_2(s) = \frac{sRC+1}{sC}, \qquad Z(s) = \frac{Z_1(s)Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)} = \frac{R(sRC+1)}{2sRC+1},$$

$$I_w(s) = \frac{E(2sRC+1)}{sR(1+sRC)}, \qquad s_1 = -\frac{1}{RC},$$

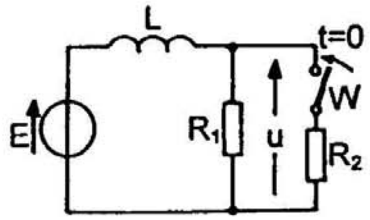
$$L(0) = E,\quad M(0)=R,\quad M'(s)=R^2C,\quad L(s_1)=-E,\quad s_1M'(s_1) = -R,$$

$$i_w = \frac{E}{R} + \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{R}\left(1+e^{-\alpha t}\right), \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{1}{\mathrm{RC}}.$$

Odpowiedź: $i_w = \dfrac{E}{R}\left(1 + e^{-\alpha t}\right)$.

Zadanie 10.5

W pokazanym na rysunku 10.5 obwodzie wyznaczyć przebieg napięcia u po zamknięciu wyłącznika.



Rys. 10.5

Odpowiedź: $u = E\left(1 - \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}e^{-\alpha t}\right)$, gdzie $\alpha = \dfrac{\mathrm{R}_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}$.

Zadanie 10.6

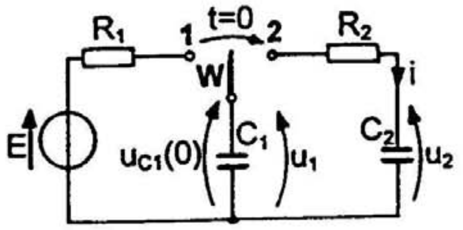
W układzie jak na rysunku 10.6 przerzucono przełącznik P z pozycji 1 na pozycję 2 w chwili t=0. Kondensator C_2 nie był poprzednio naładowany. Obliczyć czasowe przebiegi napięć na kondensatorach C_1 i C_2 oraz prąd i. Jak zmieniałyby się przebiegi, gdyby pojemności obu kondensatorów były jednakowe.

Dane: E=constans=400V,

$R_1=R_2=100\Omega$,

$C_1=10\mu F$,

$C_2=30\mu F$.



Rys. 10.6

Odpowiedź: $u_1 = E - E\dfrac{C_2}{C_1+C_2}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$, $u_2 = E\dfrac{C_1}{C_1+C_2}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$,

$i = \dfrac{E}{R_2}e^{-\alpha t}$, gdzie $\alpha = \dfrac{1}{\tau}$, a $\tau = R_2\dfrac{C_1 C_2}{C_1+C_2}$.

Dla danych szczegółowych: $\tau = 0{,}75\text{ms}$,

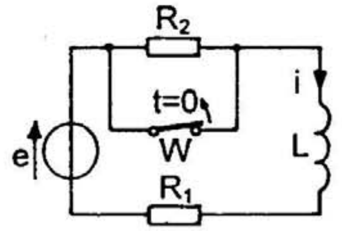
$u_1 = \left(100+300e^{-\alpha t}\right)\text{V}$, $u_2 = 100\left(1-e^{-\alpha t}\right)\text{V}$, $i = 4e^{-\alpha t}\text{A}$,

gdy kondensatory są jednakowe przebiegi określone są wzorami: $u_1 = \left(200+200e^{-\alpha t}\right)\text{V}$, $u_2 = 200\left(1-e^{-\alpha t}\right)\text{V}$,

$i = 4e^{-\alpha t}\text{A}$.

Zadanie 10.7

W pokazanym na rysunku 10.7 wyznaczyć prąd płynący przez cewkę po otwarciu wyłącznika, jeżeli przedtem istniał stan ustalony. Napięcie zasilające $e = E_{m.}\sin\omega t$.



Rys. 10.7

Rozwiązanie: $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}$; $Z_2 = \sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega L)^2}$,

$$\varphi_1 = ar\,ctg\frac{\omega L}{R_1};\quad \varphi_2 = ar\,ctg\frac{\omega L}{R_1+R_2},$$

$$i = i_U + i_P, \quad \mathrm{i}(0) = \mathrm{i_U}(0) + i_P(0), \quad \text{to} \quad \mathrm{i_P}(0) = i(0) - i_U(0),$$

$$i_P(0) = \frac{E_m}{Z_1} sin(-\varphi_1) - \frac{E_m}{Z_2} sin(-\varphi_2) = \frac{E_m}{Z_2} sin\,\varphi_2 - \frac{E_m}{Z_1} sin\,\varphi_1,$$

$$i_U = \frac{E_m}{Z_2} sin(\omega t - \varphi_2).$$

Dla składowej przejściowej ważne jest równanie

$$(R_1 + R_2) i_P + L\frac{di_P}{dt} = 0.$$

Po dokonaniu przekształcenia Laplace'a

$$(R_1 + R_2) I_P(s) + sLI_P(s) - Li_P(0) = 0,$$

$$I_P(s) = \frac{Li_P(0)}{R_1 + R_2 + sL} = \frac{L\left(\frac{E_m}{Z_2} sin\,\varphi_2 - \frac{E_m}{Z_1} sin\,\varphi_1\right)}{R_1 + R_2 + sL},$$

$$s_1 = -\frac{R_1 + R_2}{L}, \qquad L(s_1) = L\left(\frac{E_m}{Z_2}\sin\varphi_2 - \frac{E_m}{Z_1}\sin\varphi_1\right), \qquad N'(s_1) = L,$$

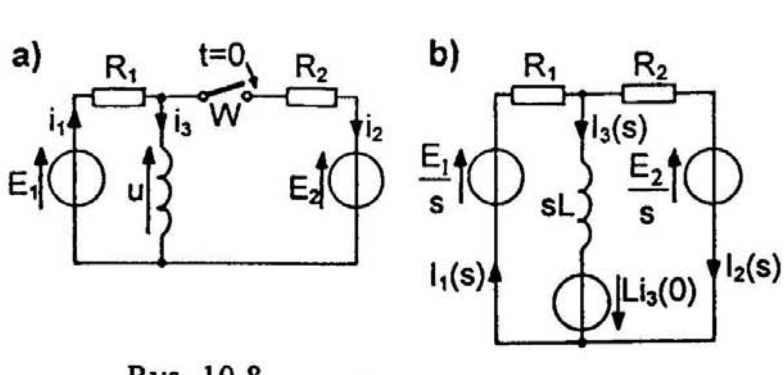
$$i = \frac{E_m}{Z_2}\sin(\omega t - \varphi_2) + \left(\frac{E_m}{Z_2}\sin\varphi_2 - \frac{E_m}{Z_1}\sin\varphi_1\right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t}.$$

Odpowiedź: $i = \frac{E_m}{Z_2}\sin(\omega t - \varphi_2) + \left(\frac{E_m}{Z_2}\sin\varphi_2 - \frac{E_m}{Z_1}\sin\varphi_1\right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t}.$

Zadanie 10.8

W układzie pokazanym na rysunku 10.8a w chwili t=0 zamknięto wyłącznik W. Obliczyć zastrzałkowane prądy i napięcie u.

Dane: E_1=120V, E_2=80V, R_1=200Ω, R_2=600Ω, L=2H.



Rys. 10.8

Rysunek 10.8b przedstawia schemat operatorowy obwodu z rysunku 10.8a po zamknięciu wyłącznika W.

Rozwiązanie: Układ równań oczkowych (Maxwella) opisujących układ po zamknięciu wyłącznika W przedstawiono poniżej

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL & -sL \\ -sL & R_2 + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1(s) + Li_3(0) \\ -E_2(s) - Li_3(0) \end{bmatrix},$$

$$W(s) = R_1 R_2 + sL(R_1 + R_2),$$
$$W_1(s) = E_1(s)(R_2 + sL) - E_2(s)sL + i_3(0)R_2 L,$$
$$W_2(s) = -E_2(s)(R_1 + sL) + E_1(s)sL - i_3(0)R_1 L,$$

gdzie $i_3(0) = \dfrac{E_1}{R_1}$,

$$I_1(s) = \frac{E_1(R_2 + sL) - E_2 sL + i_3(0)sR_2 L}{s[R_1 R_2 + s(R_1 + R_2)L]},$$

$$I_2(s) = \frac{-E_2(R_1 + sL) + E_1 sL + i_3(0)sR_1 L}{s[R_1 R_2 + s(R_1 + R_2)L]},$$

$$s_1 = \frac{-R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} = -\frac{R_z}{L}, \quad \text{gdzie } \mathrm{R_z} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \alpha = \frac{\mathrm{R_z}}{\mathrm{L}},$$

$$L_1(0) = E_1 R_2, \quad L_2(0) = -E_2 R_1, \quad M(0) = R_1 R_2, \quad M'(s) = L(R_1 + R_2),$$

$$s_1 M'(s_1) = -\frac{R_z}{L}(R_1 + R_2)L = -R_1 R_2,$$

$$L_1(s_1) = E_1 R_2 - E_1 R_z + E_2 R_z - E_1 \frac{R_2 R_z}{R_1} = E_1 R_2 - E_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} +$$
$$+ E_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_2^2}{R_1 + R_2} =$$
$$= \frac{E_1 R_1 R_2 + E_1 R_2^2 - E_1 R_1 R_2 + E_2 R_1 R_2 - E_1 R_2^2}{R_1 + R_2} = \frac{E_2 R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

$$L_2(s_1) = -E_2R_1 + E_2R_z - E_1R_z + E_1R_z =$$

$$= \frac{-E_2R_1^2 - E_2R_1R_2 + E_2R_1R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{E_2R_1^2}{R_1 + R_2},$$

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_1 + R_2}e^{-\alpha t}, \quad i_2 = -\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_2R_1}{R_2(R_1 + R_2)}e^{-\alpha t},$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_2(R_1 + R_2)}{R_2(R_1 + R_2)}e^{-\alpha t} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right),$$

$$u = L\frac{di_3}{dt} = \frac{E_2}{R_2}\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}e^{-\alpha t} = E_2\frac{R_1}{R_1 + R_2}e^{-\alpha t}.$$

Po podstawieniu wartości szczegółowych otrzymuje się:

$$i_1 = \left(0{,}6 - 0{,}1e^{-75t}\right)\text{A}, \quad i_2 = \left(-0{,}133 + 0{,}033e^{-75t}\right)\text{A},$$

$$i_3 = \left(0{,}733 - 0{,}133e^{-75t}\right)\text{A}, \quad u = 20e^{-75t}\text{V}.$$

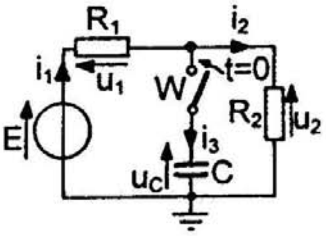
Odpowiedź: $i_1 = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_1 + R_2}e^{-\alpha t}$, $i_2 = -\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_2R_1}{R_2(R_1 + R_2)}e^{-\alpha t}$,

$\mathrm{i}_3 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$, $\mathrm{u} = \frac{\mathrm{E}_2R_1}{R_1 + R_2}e^{-\alpha t}$.

Zadanie 10.9

W układzie pokazanym na rysunku 10.9 w chwili $t = 0$ zamknięto wyłącznik W. Obliczyć przebiegi zaznaczonych na schemacie prądów i napięć.

Dane: E=60V, $u_C(0)$ =100V, R_1=2kΩ, R_2=8kΩ, C=5μF.



Rys. 10.9

Rozwiązanie: Do obliczenia napięcia u_2 zastosowana zostanie metoda potencjałów węzłowych.

$$U_2(s)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC\right) = \frac{E}{sR_1} + \frac{u_C(0)}{s}sC$$

i wprowadzając $R_z = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $\quad \tau = R_z C$, $\quad \alpha = 1/\tau$,

$$U_2(s) = \frac{ER_z + sR_1 R_z C u_C(0)}{s(R_1 + sR_1 R_z C)},$$

$$s = 0 \quad \text{lub} \quad s_1 = -\frac{1}{R_z C},$$

$$L(0) = ER_z, \quad M(0) = R_1, \quad L(s_1) = ER_z - R_1 u_C(0), \quad M'(s) = R_1 R_z C,$$

$$s_1 M'(s_1) = -R_1,$$

$$u_1 = E - u_2 = E - \frac{ER_z}{R_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - u_C(0) e^{-\alpha t} =$$

$$= \frac{ER_1(R_1 + R_2) - ER_1 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} - \left[u_C(0) - \frac{ER_z}{R_1}\right] e^{-\alpha t} =$$

$$= \frac{ER_1}{R_1 + R_2} - \left[u_C(0) - \frac{ER_z}{R_1}\right] e^{-\alpha t},$$

$$u_2 = \frac{ER_z}{R_1} - \frac{ER_z}{R_1} e^{-\alpha t} + u_C(0) e^{-\alpha t} = \frac{ER_z}{R_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + u_C(0) e^{-\alpha t},$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \frac{u_C(0)}{R_2} e^{-\alpha t}.$$

Prąd i_3 = postaci operatorowej

$$I_3(s) = sCU_2(s) - sC\frac{u_C(0)}{s},$$

a po przejściu na formę czasową

$$i_3 = \left[\frac{E}{R_1} - \frac{u_C(0)}{R_z}\right] e^{-\alpha t}, \quad i_1 = i_2 + i_3 = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \frac{u_C(0)}{R_1} e^{-\alpha t}.$$

Po podstawieniu wartości szczegółowych otrzymuje się:

$$\tau = R_z C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 8 \cdot 10^{-3} s = 8ms, \qquad \alpha = \frac{1}{\tau} = 125 s^{-1},$$

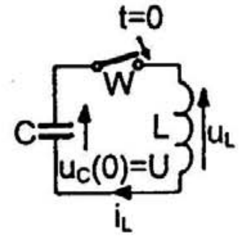
$$u_2=\left(48+52e^{-125t}\right)\mathrm{V},\quad u_1=\left(12-52e^{-125t}\right)\mathrm{V},$$

$$i_1=\left(6-26e^{-125t}\right)\mathrm{mA},\quad i_2=\left(6+6{,}5e^{-125t}\right)\mathrm{mA},\quad i_3=\left(-32{,}5e^{-125t}\right)\mathrm{mA}.$$

Odpowiedź: Patrz wyprowadzenia powyżej

Zadanie 10.10

Przed zamknięciem wyłącznika W w chwili $t = 0$, napięcie na kondensatorze w układzie jak na rysunku 10.10 wynosiło $u_C(0) = U$. Obliczyć prąd i napięcie na indukcyjności po zamknięciu wyłącznika.

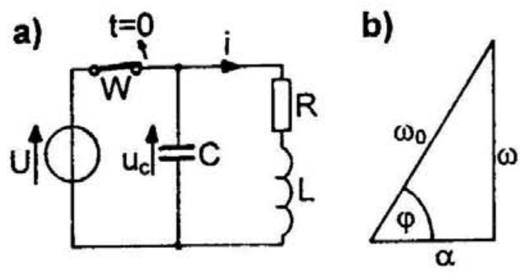


Rys. 10.10

Odpowiedź: $i_L = \dfrac{U}{\omega_0 L} \sin\omega_0 t$, $\quad u_L = L\dfrac{di_L}{dt} = U\cos\omega_0 t$,

gdzie $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Zadanie 11.11



Rys. 10.11

W obwodzie przedstawionym na rysunku 10.11a wyznaczyć przebieg prądu i oraz napięcia na kondensatorze po otwarciu wyłącznika. Przyjąć

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

Rozwiązanie: $u_C(0) = U$, $\quad i(0) = \dfrac{U}{R}$

Wprowadzając oznaczenia, patrz rys. 10.11b

$\alpha = \dfrac{R}{2L}$, $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{LC}} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$ można przejść do obliczania prądu

$$I(s)=\frac{U}{s}\frac{1}{R+sL+\dfrac{1}{sC}}+\frac{UL}{R}\frac{1}{R+sL+\dfrac{1}{sC}}=$$

$$=\frac{U}{L}\frac{1}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}}+\frac{U}{R}\frac{s}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}},$$

$$s_{1,2}=-\alpha\pm j\omega,\qquad N(s)=(s-s_1)(s-s_2),$$

$$N'(s)=(s-s_2)(s-s_1)=2s-s_1-s_2,$$

$$N'(s_1)=-2\alpha+2j\omega+\alpha-j\omega+\alpha+j\omega=j2\omega,$$

$$N'(s_2)=-2\alpha-2j\omega+\alpha-j\omega+\alpha+j\omega=-j2\omega.$$

Rysunek 10.11b przedstawia zależności między wielkościami α, ω i ω_0.

$$i=\frac{U}{L}\left(\frac{1}{j2\omega}e^{s_1t}-\frac{1}{j2\omega}e^{s_2t}\right)+\frac{U}{R}\left(\frac{s_1}{j2\omega}e^{s_1t}-\frac{s_2}{j2\omega}e^{s_2t}\right)=$$

$$=\left[\frac{U}{L}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2\omega}+\frac{U}{R}\frac{(-\alpha+j\omega)e^{j\omega t}+(\alpha+j\omega)e^{-j\omega t}}{j2\omega}\right]e^{-\alpha t}=$$

$$=\left[\frac{U}{\omega L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\frac{(-\alpha+j\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)+(\alpha+j\omega)(\cos\omega t-j\sin\omega t)}{j2\omega}\right]e^{-\alpha t}=$$

$$=\left[\frac{U}{\omega L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\left(\frac{-\alpha\cos\omega-j\alpha\sin\omega t+j\omega\cos\omega t-\omega\sin\omega}{j2\omega}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha\cos\omega t-j\alpha\sin\omega t+j\omega\cos\omega t+\omega\sin\omega}{j2\omega}\right)\right]e^{-\alpha t}=$$

$$=\left[\frac{U}{\omega L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\frac{j2\omega\cos\omega t-j2\alpha\sin\omega t}{j2\omega}\right]e^{-\alpha t}=$$

$$=\left[\frac{U}{\omega L}\sin\omega t-\frac{U}{\omega R}\frac{R}{2L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\cos\omega t\right]e^{-\alpha t}=\left[\frac{U}{2\omega L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\cos\omega t\right]e^{-\alpha t}$$

$$U_C(s)=\frac{u_C(0)}{s}-\frac{1}{sC}I(s)=\frac{U}{s}-\frac{U}{LC}\frac{1}{s\left(s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}\right)}+\frac{U}{RC}\frac{1}{s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}},$$

$$L(s)=1,\quad L(0)=1,\quad M(s)=(s\text{-}s_1)(s\text{-}s_2),\quad M(0)=s_1s_2=\frac{1}{LC},$$

$$u_C=U-U-\frac{U}{LC}\left(\frac{1}{s_1j2\omega}e^{s_1t}-\frac{1}{s_2j2\omega}e^{s_2t}\right)-\frac{U}{RC}\left(\frac{1}{j2\omega}e^{s_1t}-\frac{1}{j2\omega}e^{s_2t}\right)=$$

$$\left[-U\frac{(-\alpha-j\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)+(\alpha-j\omega)(\cos\omega t-j\sin\omega t)}{j2\omega}-\right.$$

$$\left.-\frac{U}{\omega RC}\sin\omega t\right]e^{-\alpha t}=$$

$$\left[-U\left(\frac{-\alpha\cos\omega t-j\alpha\sin\omega t-j\omega\cos\omega t+\omega\sin\omega t+\alpha\cos\omega t}{j2\omega}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{-j\alpha\sin\omega t-j\omega\cos\omega t-\omega\sin\omega}{j2\omega}\right)-\frac{U}{\omega RC}\sin\omega t\right]e^{-\alpha t}=$$

$$=\left[-U\frac{-2j\omega\cos\omega t-2j\alpha\sin\omega t}{j2\omega}-\frac{U}{\omega RC}\sin\omega t\right]e^{-\alpha t}=$$

$$=\left[U\cos\omega t+U\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t-U\frac{1}{\omega RC}\sin\omega t\right]e^{-\alpha t}=$$

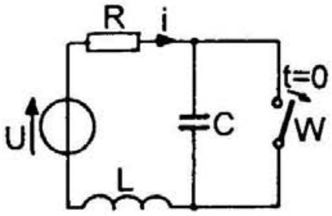
$$=U\left[\left(\frac{R}{2\omega L}-\frac{1}{\omega RC}\right)\sin\omega t+\cos\omega t\right]e^{-\alpha t}.$$

Odpowiedź: $i=\left[\frac{U}{2\omega L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\cos\omega t\right]e^{-\alpha t},$

$$u_C=U\left[\left(\frac{R}{2\omega L}-\frac{1}{\omega RC}\right)\sin\omega t+\cos\omega t\right]e^{-\alpha t}.$$

Zadanie 10.12

W obwodzie przedstawionym na rysunku 10.12 płynął prąd ustalony przy zamkniętym wyłączniku. Wyznaczyć przebieg prądu po otwarciu wyłącznika, gdy $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$.



Rys. 10.12

Rozwiązanie: Operatorowy zapis prądu dla $t>0$ przyjmuje postać

$$I(s)=\frac{U}{L}\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}+\frac{U}{R}\frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{U}{RL}\frac{R+sL}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}.$$

Widać tu, że jest to zależność identyczna jak w zadaniu 10.11. Tak więc

$$i=\left[\frac{U}{2\omega L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\cos\omega t\right]e^{-\alpha t},$$

gdzie, $\alpha=\frac{R}{2L}$, $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$,

lub stosując inną metodę

$$i=2\operatorname{Re}A_1e^{s_1t},\qquad A_1=\frac{L(s_1)}{N'(s_1)},$$

$$A_1=\frac{U}{RL}\frac{R+(-\alpha+j\omega)L}{j2\omega}=\frac{U}{R}\frac{\frac{R}{L}+(-\alpha+j\omega)}{j2\omega}=\frac{U}{R}\frac{\alpha+j\omega}{j2\omega},$$

$$i=2\operatorname{Re}A_1e^{s_1t}=\operatorname{Re}\frac{U}{R}\frac{\alpha+j\omega}{j\omega}e^{s_1t}=\operatorname{Re}\frac{U}{R}e^{-\alpha t}\frac{\alpha+j\omega}{j\omega}e^{j\omega t}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{U}{R}e^{-\alpha t}\left(1-j\frac{\alpha}{\omega}\right)e^{j\omega t}=\operatorname{Re}\frac{U}{R}e^{-\alpha t}\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}e^{-j\varphi}e^{j\omega t}=$$

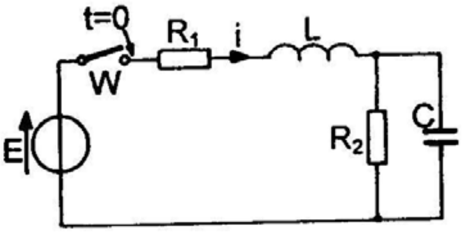
$$=\frac{U}{R}e^{-\alpha t}\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t-\varphi).$$

Odpowiedź: $i=\left[\frac{U}{2\omega L}\sin\omega t+\frac{U}{R}\cos\omega t\right]e^{-\alpha t}$ lub podstawiając

$$\varphi=ar\,ctg\frac{\alpha}{\omega},\qquad i=\frac{U}{R}e^{-\alpha t}\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t-\varphi).$$

Zadanie 10.13

W obwodzie przedstawionym na rysunku 10.13 napięcie zasilające E=120V, a parametry obwodu: R_1=20Ω, R_2=100Ω, L=0,2H, C=100μF. Wyznaczyć prąd i po zamknięciu wyłącznika.



Rys. 10.13

Rozwiązanie:

$$Z(s) = R_1 + sL + \frac{R_2}{sR_2C+1} = \frac{s^2R_2LC + s(R_1R_2C + L) + R_1 + R_2}{sR_2C+1},$$

$$Y(s) = \frac{sR_2C+1}{s^2R_2LC + s(R_1R_2C+L) + R_1 + R_2} = \frac{1}{L}\,\frac{s + \dfrac{1}{R_2C}}{s^2 + s\left(\dfrac{R_1}{L} + \dfrac{1}{R_2C}\right) + \dfrac{R_1+R_2}{R_2LC}},$$

$$I(s) = \frac{E}{L}\,\frac{s + \dfrac{1}{R_2C}}{s^2 + s\left(\dfrac{R_1}{L} + \dfrac{1}{R_2C}\right) + \dfrac{R_1+R_2}{R_2LC}}.$$

Prąd operatorowy ma postać funkcji $F(s) = \dfrac{L(s)}{sM(s)}$, której odpowiada postać czasowa $f(t) = \dfrac{L(0)}{M(0)} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}$.

Porównaj zadania 10.11 i 10.12.

Po podstawieniu danych otrzymuje się:

$$I(s) = 600\frac{s+100}{s\left(s^2 + 200s + 60000\right)},$$

$$\Delta = 200^2 - 4\cdot 60000 = -200000, \qquad \sqrt{\Delta} = j447{,}2, \qquad s_0 = 0,$$

$$s_1 = \frac{-200 + j447{,}2}{2} \approx -100 + j224,$$

$$s_2 = \frac{-200 - j447{,}2}{2} \approx -100 - j224,$$

$$i(t)=\frac{60000}{60000}+600\frac{(-100+j224+100)}{(-100+j224)(-200+j448+200)}e^{(-100+j224)t}+$$

$$+600\frac{(-100-j224+100)}{(-100-j224)(-200-j448+200)}e^{(-100-j224)t}=$$

$$=1+\frac{300(-100-j224)}{60000}e^{(-100+j224)t}+\frac{300(-100+j224)}{60000}e^{(-100-j224)t}=$$

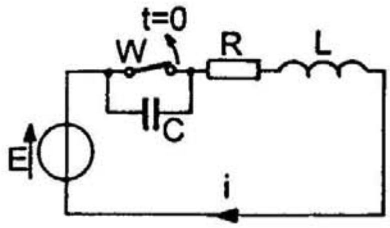
$$=1+\frac{(-30000-j60000)}{60000}e^{(-100+j224)t}+\frac{(-30000+j60000)}{60000}e^{(-100-j224)t}$$

$$i(t)=1-e^{-100t}(\cos 224t-2{,}24\sin 224t).$$

Odpowiedź: $i(t)=1-e^{-100t}(\cos 224t-2{,}24\sin 224t).$

Zadanie 10.14

W obwodzie przedstawionym na rysunku 10.14 wyznaczyć przebieg prądu po otwarciu wyłącznika.



Dane: E, R, L i C. $\quad R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Rys. 10.14

Odpowiedź: $i=\dfrac{E}{\omega\sqrt{LC}R}e^{-\alpha t}\cos(\omega t-\varphi)$,

gdzie $\alpha=\dfrac{R}{2L}$, $\quad \omega=\sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{LC}}-\dfrac{R^2}{4L^2}}$, $\quad \varphi=\mathrm{arctg}\dfrac{\alpha}{\omega}$,

lub $\quad i=\dfrac{E}{R}e^{-\alpha t}\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha}{\omega}\right)^2}\cos(\omega t-\varphi)$, $\quad$ ponieważ

$$\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}=\sqrt{\frac{\omega^2+\alpha^2}{\omega^2}}=\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}=\frac{1}{\omega\sqrt{LC}},\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},$$

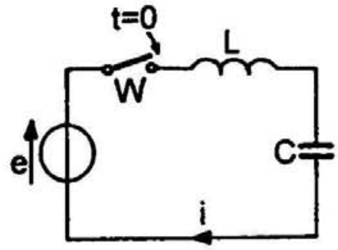
lub $\quad i=\left[\dfrac{U}{2\omega L}\sin\omega t+\dfrac{U}{R}\cos\omega t\right]e^{-\alpha t}$,

porównaj zadanie 10.12.

Zadanie 10.15

W bezrezystancyjnej gałęzi L, C wyznaczyć przebieg prądu od chwili włączenia napięcia. Schemat obwodu przedstawia rysunek 10.15.

$$e = E_m \sin \omega_0 t, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



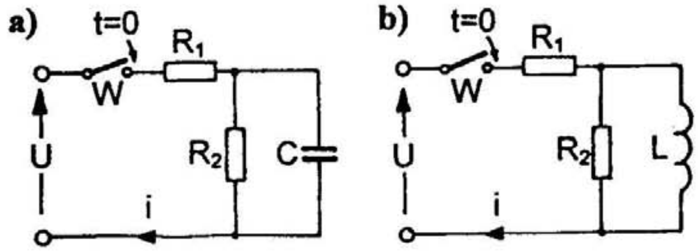
Rys. 10.15

Odpowiedź: $i = \dfrac{E_m}{2L} t \sin \omega_0 t$, wynik porównać z odpowiedzią zadania 10.??

Jaka jest istotna różnica pomiędzy przebiegami prądów w obydwu przypadkach?

Zadanie 10.16

W obwodach pokazanych na rysunkach 10.16a i 10.16b wyznaczyć prądy po zamknięciu wyłącznika. Kondensator przed załączeniem był „pusty".



Rys. 10.16

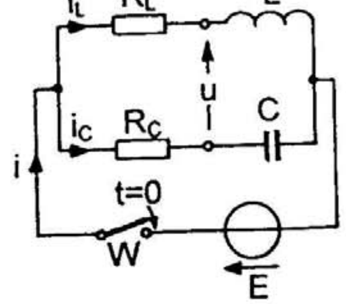
Odpowiedź: a) $$i = \frac{U}{R_1 + R_2}\left[1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\alpha t}\right], \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C},$$

b) $$i = \frac{U}{R_1}\left[1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t}\right], \quad \alpha = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}.$$

Odpowiedź dla przypadku b): porównaj z odpowiedzią zadania 10.2.

Zadanie 10.17

W obwodzie na rysunku 10.17 w chwili t=0 zamknieto wyłącznik W. Obliczyć wartość pojemności C, dla której i=const. Dla wyznaczonej pojemności C obliczyć u.



Rys. 10.17

Dane: E=120V, R_L=R_C=100Ω, L=0,1H=100mH.

Rozwiązanie: Prądy i_L i i_C określone są wzorami

$$i_L = \frac{E}{R_L}\left(1 - e^{-\frac{R_L}{L}t}\right), \qquad i_C = \frac{E}{R_C} e^{-\frac{t}{R_C C}}, \qquad i = i_L + i_C,$$

ponieważ $R_L = R_C = R$ to wyrażenie na prąd i można zapisać w następujący

sposób:
$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

aby i=constans, stałe obydwu gałęzi muszą być jednakowe

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{RC}, \qquad C = \frac{L}{R^2} = \frac{10^{-1}}{10^4} = 10\mu\text{F},$$

$$u = Ri_C - Ri_L = E\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E\left(2e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right),$$

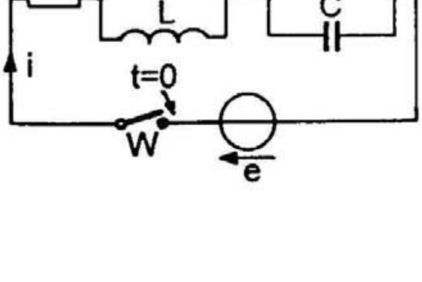
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}1}{100} = 1\text{ms.}, \quad u = 120\left(2e^{-1000t} - 1\right)\text{V}, \quad i_L = 1{,}2\left(1 - e^{-1000t}\right)\text{A},$$

$$i_C = 1{,}2e^{-1000t}\text{A}, \quad i = 1{,}2\text{A}.$$

Odpowiedź: $C = 10\mu\text{F}, \quad u = 120\left(2e^{-1000t} - 1\right)\text{V}.$

Zadanie 10.18

Jakie warunki muszą spełniać parametry R_C i C w obwodzie przedstawionym na rysunku 10.18 aby prąd i był proporcjonalny do e w stanie nieustalonym.

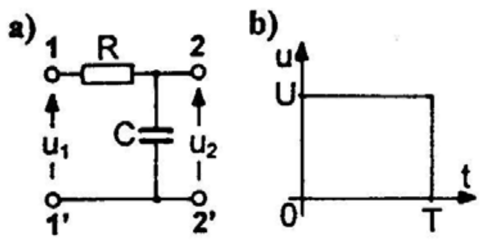


Rys. 10.18

Odpowiedź: $\dfrac{R_L}{L} = \dfrac{1}{R_C C}$ równość stałych czasowych lub w innej formie,

$R_C = R_L = \dfrac{L}{C}$ - kwadrat impedancji falowej.

Zadanie 10.19



Rys. 10.19

Na zaciski 1, 1' czwórnika przedstawionego na rysunku 10.19 podany zostaje impuls prostokątny o napięciu U przez czas $0 \le t \le T$. Dla czasu $t > T$ impuls znika tak, że zaciski 1, 1' można uważać za zwarte. Wyznaczyć przebieg napięcia u_2 na kondensatorze. Rysunek 10.19b przedstawia impuls napięcia.

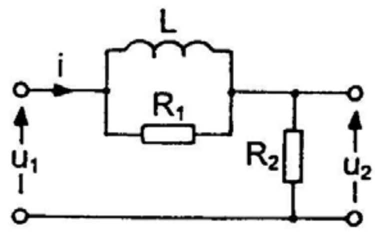
Odpowiedź: $u_2 = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$, dla $0 < t < T$,

$u_2 = U\left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right)e^{-\frac{t-T}{RC}}$, dla $t > T$.

Zadanie 10.20

Wyznaczyć przebieg napięcia wyjściowego u_2 czwórnika nie obciążonego przedstawionego na rysunku 10.20 przy włączeniu do zacisków wejściowych napięcia stałego $u_1 = U$.

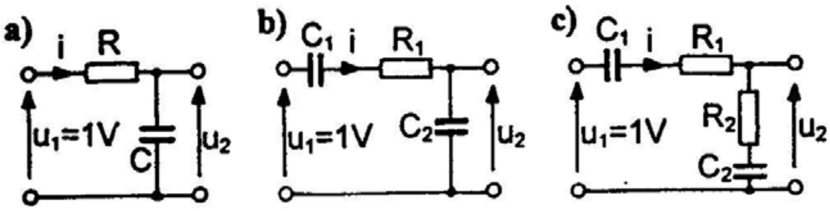
Rys. 10.20



Odpowiedź: $u_2 = U\left(1 - \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\alpha t}\right)$, gdzie $\alpha = \dfrac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}$.

Zadanie 10.21

Wyznaczyć przebiegi napięcia wyjściowego u_2 czwórników nie obciążonych, przedstawionych na rysunkach 10.21a, b, c przy włączeniu zacisków wejściowych na napięcie stałe jednostkowe $u_1 = U = 1\text{V}$.



Rys. 10.21

Rozwiązanie:

a) Dla czwórnika z rysunku 10.21a wyznacza się transmitancję napięciową $H(s)$,

$$I(s) = U\frac{C}{sRC+1}, \qquad U_2(s) = \frac{1}{sC}U\frac{C}{sRC+1} = U\frac{1}{s(sRC+1)},$$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{sRC+1},$$

$$U_2(s) = U\frac{1}{s(sRC+1)}, \qquad \text{czyli} \qquad F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)},$$

$$u_2 = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \text{pamiętając, że} \quad u_1 = U = 1\text{V}.$$

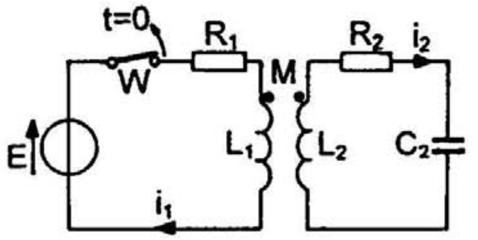
Podobnie postępujemy dla czwórników z rysunków 10.21b i c

Odpowiedź: a) $u_2 = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$, b) $u_2 = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}\left(1 - e^{-\frac{C_1+C_2}{R_1C_1C_2}t}\right)$,

c) $u_2 = \dfrac{C}{C_2}\left[1 + \left(\dfrac{R_2C_2}{RC} - 1\right)e^{-\frac{t}{RC}}\right]$,

gdzie $R = R_1 + R_2$, $C = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$.

Zadanie 10.22



W przedstawionym na rysunku 10.22 obwodzie istnieje stan ustalony (zamkniety wyłącznik W). Wyznaczyć przebieg prądu i_2 po otwarciu wyłącznika.

Rys. 10.22

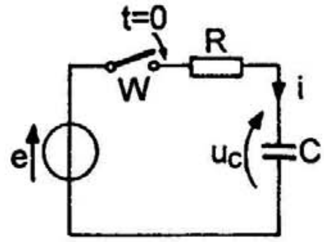
Odpowiedź: $i_2 = \dfrac{ME}{\omega L_2 R_1}(\omega\cos\omega t - \alpha\sin\omega t) = \dfrac{ME}{\omega L_2 R_1\sqrt{L_2 C_2}}\cos(\omega t + \varphi),$

gdzie $\alpha = \dfrac{R}{2L_2},\quad \omega = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{L_2}C} - \alpha^2},\quad \varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\alpha}{\omega}.$

Zadanie 10.23

W układzie jak na rysunku 10. obliczyć przebieg napięcia na kondensatorze po zamknięciu wyłącznika W,

$e(t)$=$E_m\sin(\omega t+\psi)$.



Rys. 10.23

Rozwiązanie: Wymuszenie sinusoidalne zmienne zastępujemy funkcją zespoloną $\underline{E}(t)$=$E_m e^{j\psi}e^{j\omega t}$, która posiada składową sinusoidalną i cosinusoidalną. Obrazem jej w dziedzinie operatorowej jest

$$E(s) = E_m e^{j\psi}\frac{1}{s - j\omega}.$$

Dla funkcji o postaci $F(s) = \dfrac{L(s)}{(s - j\omega)M(s)}$ otrzymuje się funkcję zespoloną

$$\underline{F}(t) = \frac{L(j\omega)}{M(j\omega)}e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^{m}\frac{L(s_k)}{(s_k - j\omega)M'(s_k)}e^{s_k t}$$

i ostatecznie

$$f(t) = Im\,\underline{F}(t).$$

Dla obwodu z rysunku 10.23 równanie operatorowe ma postać:

$$RCsU_C(s)+U_C(s)=E_m e^{j\psi}\frac{1}{s-j\omega}.$$

Założono tu, że w momencie zamknięcia wyłącznika kondensator C był „pusty"

$$U_C(s)=E_m e^{j\psi}\frac{1}{(s-j\omega)(sRC+1)}.$$

Wzór Heaviside'a przytoczony powyżej ważny jest dla pierwiastków pojedynczych:

$$L(s)=1,\quad L(j\omega)=1,\quad M(s)=sRC+1,\quad M(j\omega)=j\omega RC+1,$$

$$L(s_1)=1,\quad M'(s)=RC,\quad M'(s_1)=RC,$$

$$\underline{U}_C(t)=E_m e^{j\psi}\left[\frac{1}{1+j\omega RC}e^{j\omega t}+\frac{1}{\left(-\frac{1}{RC}-j\omega\right)RC}e^{-\frac{1}{RC}t}\right],$$

$$1+j\omega RC=j\omega C\left(R-j\frac{1}{\omega C}\right)=\omega CZe^{j\varphi}e^{j\frac{\pi}{2}},$$

$Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ - moduł impedancji zespolonej obwodu,

$\varphi=ar\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$ - argument impedancji zespolonej obwodu,

$$\underline{U}_C(t)=E_m\left[\frac{1}{\omega CZ}e^{j\left(\omega t+\psi-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{1}{\omega CZ}e^{-\frac{1}{RC}t}e^{j\left(\psi-\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\right],$$

$$u_C(t)=u_C=Im[\underline{U}(t)],$$

$$u_C=-\frac{E_m}{\omega CZ}\cos(\omega t+\psi-\varphi)+\frac{E_m}{\omega CZ}\cos(\psi-\varphi)\,e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Prąd ładowania kondensatora

$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{E_m}{Z}\left[\sin(\omega t+\psi-\varphi)-\frac{1}{\omega RC}\cos(\psi-\varphi)\,e^{-\frac{t}{RC}}\right].$$

Dla obydwu przebiegów - napięcia i prądu możliwe są dwa przypadki graniczne:

a) $\psi-\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ - brak składowej przejściowej,

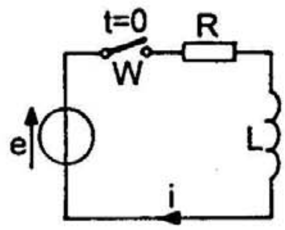
b) $\psi-\varphi=0$ - przypadek najbardziej niekorzystny (przepięcia).

Przeprowadź dyskusję wyników.

Odpowiedź: Patrz wyprowadzenia powyżej.

Zadanie 10.24

Dla dwójnika RL jak na rysunku 10.24 obliczyć przebieg pradu po zamknięciu wyłącznika, $e=E_m.\sin(\omega t+\psi)$.



Rys.10.24

Odpowiedź: $i=\frac{E_m}{Z}\left[\sin(\omega t+\psi-\varphi)-\sin(\psi-\varphi)e^{-\frac{R}{L}t}\right]$,

gdzie $Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$, $\varphi=\text{arctg}\frac{\omega L}{R}$.

LITERATURA

[1] Cichowska Z., Pasko M.: Zadania z elektrotechniki teoretycznej. Część II, Politechnika Śląska. Skrypt uczelniany nr 1826, Gliwice 1994.

[2] Grafe u a.: Grundlagen der Elektrotechnik, Band 2, 10., durchgesehene Auflage VEB Verlag Technik Berlin 1986.

[3] Kurdziel R.: Podstawy elektrotechniki. Wydanie II całkowicie zmienione. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972

[4] Mattes H.: Übungskurs Elektrotechnik 2. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1994.

[5] Mikołajuk K., Trzaska Z.: Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1973

[6] Paul R., Paul.: Arbeitsbuch zur Elektrotechnik 2. Springer-Verlag Barlin, Heidelberg 1996.

[7] Philippow E.: Grundlagen der Elektrotechnik. 8 berarbeitete Auflage VEB Verlag Technik, Berlin 1988.

[8] Poradnik Inżyniera Elektryka. Tom 1. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994

Politechnika Opolska
BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
w Opolu