

**POLITECHNIKA
OPOLSKA**



**SKRYPT
NR 212**

Jan Kubik

**MECHANIKA
MATERIAŁÓW**



OW
OFICyna
WYDAWNICZA

ISSN 1427-9932

Opole 1998

Spis treści

Wstęp 9

Część I WŁASNOŚCI MATERIAŁÓW 11

Rozdział I Makroskopowe opisy ciał 13

1. Ośrodek ciągły 13
2. Bliskie i dalekie oddziaływanie w ciele 16
3. Ciała krystaliczne 18
4. Ciała bezpostaciowe 20
5. Materiały wielofazowe 22
6. Materiały kapilarno-porowate 24
7. Kompozyty 26
8. Sprężystość i plastyczność 28
9. Pełzanie 29

Część II RACHUNEK TENSOROWY 33

Rozdział II Wprowadzenie do rachunku tensorowego 35

10. Wektory i tensory 35
11. Tensory o dowolnej walencji 39
12. Analiza współrzędnych tensorów 42

Rozdział III Elementy algebry tensorów 45

13. Podstawowe operacje algebry tensorów 45
14. Wartości własne 50
15. Wektor tensora symetrycznego 52
16. Rozkład tensora o walencji dwa na tensor kulisty i tensor dewiacji 54

Rozdział IV Elementy analizy tensorowej 57

17. Różniczkowanie tensorów 58
18. Pochodne tensora o walencji dwa 61
19. Ważniejsze rodzaje operacji różniczkowania pól tensorowych 63
20. Różniczkowanie w ortogonalnych układach krzywoliniowych 66
21. Operacje różniczkowania w układach ortogonalnych 68
22. Twierdzenia całkowe 71
23. Wstępne zastosowanie 73

Część III MECHANIKA OŚRODKA CIĄGŁEGO 79

Rozdział V Kinematyka ośrodka ciągłego 81

- 24. Materialny i przestrzenny opis ruchu 82
- 25. Materialne i przestrzenne pochodne pól tensorowych 84
- 26. Tensory deformacji 86
- 27. Małe deformacje ośrodka 90
- 28. Obrót odcinka przy deformacji 91
- 29. Warunki nierozdzielności 92
- 30. Tensor prędkości deformacji 93

Rozdział VI Bilanse w mechanice ośrodka ciągłego 97

- 31. Pochodna materialna całki 98
- 32. Bilans masy 101
- 33. Bilanse pędu, krętu, energii i entropii 104
- 34. Równania ruchu 108
- 35. Równania ruchu cieczy idealnej 111

Rozdział VII Teoria równań tnących 113

- 36. Opracowania dla równań tworzących 114
- 37. Ciało sprężyste 117
- 38. Liniowa sprężystość 121
- 39. Termosprężystość 125
- 40. Teoria plastycznego płynięcia i teoria naprężeń sprężysto-plastycznych 130
- 41. Równania tworzące teorie plastyczności 134

Rozdział VIII Elementy mechaniki cieczy 137

- 42. Ciecz idealna 137
- 43. Równania cieczy lepkiej 140
- 44. Ciecz nieniutonowska 142

Rozdział IX Liniowa teoria sprężystości 143

- 45. Stan odkształceń 143
- 46. Stan naprężenia 149
- 47. Równania równowagi wewnętrznej 155
- 48. Równania fizyczne 158
- 49. Równania przemieszczeniowe 162
- 50. Równania naprężeniowe 164
- 51. Równania tarczy 166
- 52. Wielomianowe rozwiązania równania tarczy 170
- 53. Płyta cienka 175

Rozdział X Proste przypadki wytrzymałościowe 181

- 54. Proste rozciąganie 181
- 55. Skręcanie swobodne pręta kołowego 187

- 56. Czyste zginanie 191
- 57. Zginanie ukośne 196
- 58. Ściskanie mimośrodowe 199

LITERATURA 205

Spis ważniejszych oznaczeń

x_i, α_i	- współrzędne punktów przestrzeni
V, A	- objętość i powierzchnia ośrodka
e_i, e^j	- wektory bazowe w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej
$g = g^{ij} e_i e_j = g_{ij} e^i e^j = \delta_i^j e_i e^j$	- tensor metryczny
$A = A_{ij} e^i e^j = A_i^j e^i e_j = A^j_i e_j e^i$	- tensor o walencji dwa
I_A, II_A, III_A lub $J_1(A), J_2(A), J_3(A)$	- niezmienniki tensora A
$a \cdot b = a^i b_i$	- iloczyn skalarowy
$a \times b = \epsilon_{ijk} a^j b^k e_i$	- iloczyn wektorowy wektorów a i b
$a \otimes b = a^i b^j e_i e_j$	- iloczyn tensorowy, diada wektorów
$A \circ B = A_{ij} B^{ij}$	- splot tensorów A i B
$\text{grad} \equiv \nabla = e^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k}$	- gradient pola (...)
$\text{div} \equiv \nabla = e^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k}$	- dywergencja pola (...)
$\frac{D}{Dt} A = \frac{\partial}{\partial t} A + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot A$	- pochodna materialna pola A
a^i, x^i	- współrzędne cząstki w konfiguracji odniesienia oraz w chwili aktualnej
X_k, X_\circ	- współrzędne cząstki na początku procesu termomechanicznego
$\mathbf{u} = u^i e_i$	- wektor przemieszczenia cząstki
$\mathbf{v} = \frac{Dx}{Dt}$	- wektor prędkości cząstki
$\epsilon, \epsilon, d\epsilon$	- tensor deformacji Greena, tensor małych deformacji i ich przyrostów
i_ϵ	- intensywność odkształceń
$\epsilon = e^{ij} e_i e_j$	- tensor prędkości odkształceń $2\epsilon = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla$
$\sigma = \sigma^{ij} e_i e_j$	- tensor naprężeń
$I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$	- niezmienniki tensora naprężeń
$p = \frac{1}{3} \sigma^{ii}$	- ciśnienie hydrostatyczne
$D_\sigma = \sigma - pg$	- dewiator tensora naprężeń

i_σ	- intensywność naprężeń
$\rho \mathbf{F}, \mathbf{p}$	- siła masowa i powierzchniowa
ρ_i, ρ	- gęstość parcjalna i sumaryczna
V, A, F	- objętość i powierzchnia ciała
$T, \theta = T - T_0$	- temperatura i jej przyrost
$\rho r, \mathbf{q}$	- źródło i strumień ciepła
ρS	- entropia
$\rho U, \rho A, \rho K$	- energia wewnętrzna, swobodna i kinetyczna
M_1, M_2, M_{12}, K	- momenty zginające i skręcające
T_1, T_2, N	- siły tnące i osiowe
E_{ijkl}, F_{ijkl}	- tensory stałych materiałowych w ciele anizotropowym
$E, G, \mu = G, \lambda, \gamma_T = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)$	- moduł sprężystości, moduł Kirchoffa
$\mu, \gamma, \gamma_T = \alpha_T(3\lambda + 3\mu)$	- stałe Lamego

WSTĘP

Mechanika ośrodka ciągłego (MOC) jest działem teoretycznej fizyki zajmującym się makroskopowym opisem ruchu ciał stałych, cieczy i gazów z jednolitego fenomenologicznego punktu widzenia. Wprowadza się w niej pojęcie kontinuum materialnego, na którym określone są funkcje opisujące wewnętrzny stan ośrodka, ruch i wzajemne oddziaływanie cząstek kontinuum materialnego. Analizuje się także oddziaływanie ośrodka z otoczeniem. Mamy w tym przypadku na uwadze wymianę ciepła, masy, przepływ prądu elektrycznego itp., które wpływają na ruch cząstek w ośrodku. Wynika stąd, że współczesna MOC staje się w coraz większym stopniu nauką interdyscyplinarną dobrze przygotowaną do rozwiązania współczesnych problemów techniki.

Wymienione poprzednio oddziaływania, opisane są określonymi funkcjami polowymi, które powinny w pierwszym rzędzie spełniać równania bilansów. W równaniach tych precyzujemy rodzaj oddziaływań i powiązań poszczególnych pól. Natomiast fizyczne właściwości ciała takie jak sprężystość, plastyczność, przewodność cieplna znajdują swoje odbicie w tzw. równaniach fizycznych, które stanowią drugą podstawową grupę równań między polami występującymi w bilansach. Równania fizyczne mają zwykle formę równań różniczkowo-całkowych, a w najprostszym przypadku są zależnościami algebraicznymi, jak np. w teorii sprężystości czy też w mechanice cieczy idealnej. Oprócz równań wynikających z bilansów i równań fizycznych każdy problem MOC określony musi być przez początkowe i brzegowe wartości pól. W wyniku powyższego każde zagadnienie MOC sprowadza się w najprostszym przypadku do zadania brzegowego dla równań różniczkowych. Wymaga się więc dobrej znajomości aparatu formalnego równań różniczkowych, czy też ekwiwalentnego ujęcia wariacyjnego. To spowodowało, że już na samym początku rozwoju teorii sprężystości, która poprzedzała MOC i była dla niej wzorem rozwijały się uproszczone podejścia, nader często odwołujące się do intuicji czy też założeń upraszczających, dotyczących ruchu i sił w ośrodku.

Typowymi produktami takiego sposobu myślenia jest wytrzymałość materiałów, hydraulika, mechanika budowli itp. Dyscypliny te rozwijały się zresztą przez długi czas niezależnie od siebie, wypracowując właściwe sobie metody rozwiązywania problemów. Obecnie pogłębione ujęcia tych dyscyplin bazują na wynikach MOC.

W mechanice ośrodka ciągłego zaczyna się szeroko stosować metody i wyniki uzyskane w termodynamice ośrodka ciągłego. Takie podejście do MOC zasadniczo rozszerza zakres możliwości dyscypliny, pozwalając jednocześnie na opis złożonych oddziaływań w ośrodku. Nurt ten wykorzystuje się coraz częściej do badania i projektowania właściwości nowych materiałów np.

kompozytów. W ten sposób MOC pozwala efektywnie rozwiązywać problemy stojące przed inżynierią materiałową, stając się dogodną metodą przewidywania przebiegów procesów technologicznych i właściwości produktów tychże technologii. Wymieńmy tu tylko dla przykładu tworzywa sztuczne wzmocnione np. włóknami szklanymi, stopy, betony itp. We wszystkich tych przypadkach uzyskujemy nowe, sztuczne materiały o właściwościach lepszych od wyjściowych składników. Wyjątkiem jest beton, którego podstawowe składniki tj. kruszywo i żel cementowy mają wyższą wytrzymałość niż wyprodukowany z nich beton. Przykład ten świadczy jedynie o tym jak potencjalnie znaczne możliwości związane są z zastosowaniem metod inżynierii materiałowej w technologii betonu. Godzi się przy tym wspomnieć, że charakterystyczną dla współczesności jest tendencja optymalnego wykorzystania właściwości materiałów, które zaczyna się coraz lepiej wykorzystywać i oszczędzać. We współczesnym świecie trwa po prostu szalony wyścig do taniej technologii, do taniego materiału o sprecyzowanych właściwościach mechanicznych, cieplnych, elektrycznych itp., otrzymywanych dodatkowo przy jak najmniejszym zużyciu energii. W wyścigu tym MOC stanowi istotny i skuteczny sposób badania nowych materiałów, czy też projektowania ich właściwości, stąd też stale rośnie znaczenie tej dyscypliny w podstawowym wykształceniu inżyniera.

Przedstawione w opracowaniu ujęcia rachunku tensorowego i mechaniki ośrodka ciągłego przedstawiałem w 1982 i 1983 roku na wykładach prowadzonych dla słuchaczy studium podyplomowego z Mechaniki Konstrukcji na Wydziale Budownictwa ówczesnej Wyższej Szkole Inżynierskiej w Opolu. Inicjator tego studium - nieżyjący już prof. O. Mateja postawił mi wówczas niełatwy warunek, aby z jednej strony przedstawić w miarę nowoczesny wykład mechaniki a z drugiej strony wskazać jego powiązania z uproszczonymi ujęciami mechaniki typowymi dla zastosowań inżynierskich.

Zadanie to wynikało też z rosnącego wówczas znaczenia metod komputerowych w obliczeniach inżynierskich, które pozwalały rozwiązywać złożone, nieliniowe problemy mechaniki. Wymagały jednak szerszej – termomechanicznej znajomości problemów inżynierii.

Autor jest zobowiązany recenzentom opracowania: prof. Ottonowi Dąbrowskiemu i prof. Piotrowi Konderli z Politechniki Wrocławskiej, których uwagi i sugestie miały istotny wpływ na opracowanie. Natomiast przygotowanie materiałów do druku zawdzięczam pracy p. M. Rybak, zaś redakcję techniczną mgr inż. K. Chlondowskiemu.

CZĘŚĆ I

WŁASNOŚCI MATERIAŁÓW

Rozdział I

MAKROSKOPOWE OPISY CIAŁ

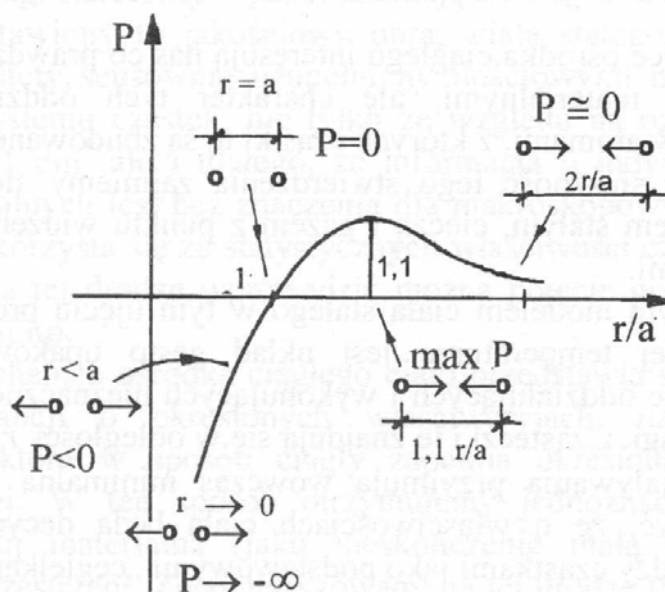
1. OŚRODEK CIĄGŁY

Ciało fizyczne w klasycznej statystycznej mechanice przedstawia się zwykle w postaci systemu dużej ilości wzajemnie oddziaływujących ze sobą cząstek. Następnie do układu tych cząstek stosuje się klasyczne metody mechaniki układów punktów materialnych. Analizuje się przy tym typowe sytuacje, do jakich zaliczyć można wzajemne oddziaływanie pary cząstek materialnych. Ten sposób postępowania pozostaje aktualny również wówczas, gdy obiektem zainteresowania stają się oddziaływania (siły oddziaływania) między cząstkami ciała stałego.

Z badań nad siłami wzajemnego oddziaływania dwóch elektrycznie neutralnych cząstek wynika, że wartość siły tego oddziaływania wynosi

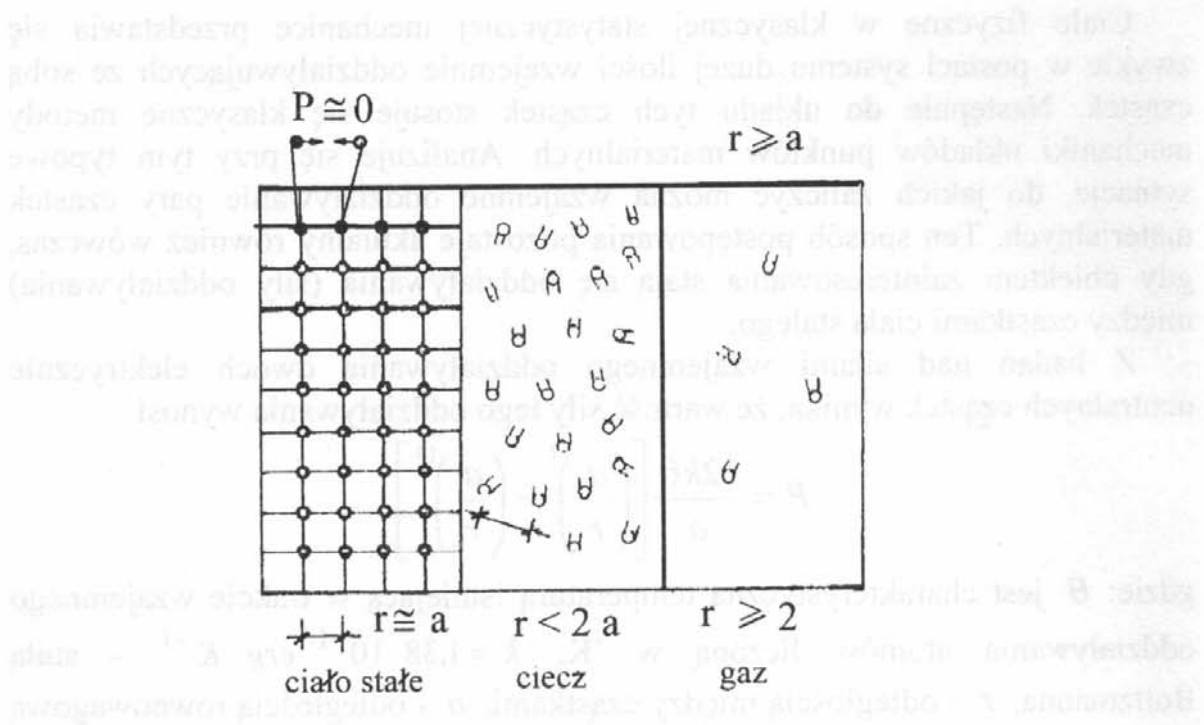
$$P = \frac{12k\theta}{a} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^7 - \left(\frac{a}{r} \right)^{13} \right]$$

gdzie: θ jest charakterystyczną temperaturą istniejącą w trakcie wzajemnego oddziaływania atomów liczoną w °K, $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{K}^{-1}$ - stałą Boltzmann, r - odległością między cząstkami, a - odległością równowagową między cząstkami, kiedy siła oddziaływania $P = 0$.



Rys. 1. Wzajemne oddziaływanie atomów

Zauważmy, że przy $r < a$, P jest siłą odpychającą, a przy $r > a$ przyciągającą. W przypadku granicznym ($r \rightarrow 0$) siła oddziaływania ($P \rightarrow -\infty$). W przedziale $1,11 a > r \geq 2a$ siła przyciągająca P rośnie, a przy dalszym wzroście ($r > 1,11a$) maleje, uzyskując dla $r = 2a$ już tylko 1% wartości siły maksymalnej.



Rys. 2. Modele ciał

W mechanice ośrodka ciągłego interesują nas co prawda oddziaływania między cząstkami materialnymi, ale charakter tych oddziaływań będzie podobny jak między atomami, z których cząstki te są zbudowane.

Przyjmując słuszność tego stwierdzenia zajmiemy się wyjaśnieniem różnic między ciałem stałym, cieczą i gazem z punktu widzenia oddziaływań między cząsteczkami.

Najprostszym modelem ciała stałego w tym ujęciu problematyki przy normalnej i niskiej temperaturze jest układ gęsto upakowanych cząstek wzajemnie na siebie oddziałujących i wykonujących nieznaczne drgania wokół położenia równowagi. Cząsteczki te znajdują się w odległości $r \approx a$ tak, że siły wzajemnego oddziaływania przyjmują wówczas minimalną wartość. Warto przy tym zauważyć, że o właściwościach ciała będą decydowały właśnie oddziaływania między cząstkami jako podstawowymi „cegiełkami” materii.

W miarę podwyższania temperatury ciała stałego amplituda drgań cząstek wokół stanu równowagi wzrasta na tyle, że możliwa staje się zamiana położenia dwóch cząstek lub też takie ich przemieszczenie w siatce w stosunku

do pierwotnych położeń, że powrót ich do stany pierwotnego nie jest możliwy. Wówczas, w wyniku zniszczenia sił dalekiego zasięgu utrzymujących cząsteczki ciała stałego w określonych położeniach w sieci, ciało topi się i przechodzi w stan ciekły. Zniszczenie prawidłowej sieci i wytworzenie bardziej przypadkowego, nieuporządkowanego stanu wiąże się ze wzrostem entropii, co przejawia się jako utajone ciepło topnienia.

Mimo, iż cząsteczki w cieczy nie są uporządkowane jak w ciele stałym, to jednak siły wzajemnego przyciągania między nimi istnieją. Siły te odpowiadają za utrzymanie cząstek cieczy w fazie skondensowanej, a także za napięcie powierzchniowe, które przejawia się przewagą sił skierowanych do wnętrza cieczy wywieranych przez cząstki z wnętrza na cząstki znajdujące się na powierzchni. W przypadku cieczy mamy więc do czynienia z cząstkami znajdującymi się w odległości $r > a$, ale $r < 2a$, w której to odległości ($r \approx 2a$) zanika praktycznie oddziaływanie między cząstkami.

Z gazem mamy do czynienia wówczas, kiedy cząstki substancji mogą poruszać się swobodnie we wszystkich kierunkach, oddziaływując tylko przypadkowo ze swoimi sąsiadami w czasie zderzeń. Odległość między cząstkami jest dowolna i zawsze większa niż w fazie ciekłej. Cząstki przestają wówczas na siebie oddziaływać siłami bliskiego zasięgu i wykonują chaotyczne ruchy. Ochłodzenie układu oznacza zmniejszenie kinetycznej energii chaotycznych ruchów cząstek, a ogrzanie doprowadza do zwiększenia się tej energii. Przy ochładzaniu gazu w rezultacie zderzeń dwóch cząstek z niewielką energią dochodzi do wzajemnego oddziaływania. Powstają powtórnie siły wzajemnego oddziaływania doprowadzające do cieczy, a przy dalszym ochładzaniu do ciała stałego. W stanie tym cząsteczki wykonują małe drgania wokół równowagi statecznej w jakiej znajdują się cząstki ciała stałego.

Przedstawiony tu jakościowy obraz ciała stałego, cieczy i gazu nie może być niestety sensownie uzupełniony ilościowymi metodami mechaniki analitycznej systemu cząstek, nie tylko ze względu na ogromną ilość tychże rzędu 10^{20} w 1 cm^3 ale i dlatego, że informacja o indywidualnych cechach cząstek materialnych jest bez znaczenia dla makroskopowych cech ośrodka. Z tej przyczyny korzysta się ze statystycznych właściwości cząstek jako pewnego uśrednienia. Na tej drodze wprowadzić można pojęcie gęstości ośrodka, jego energii, entropii itp.

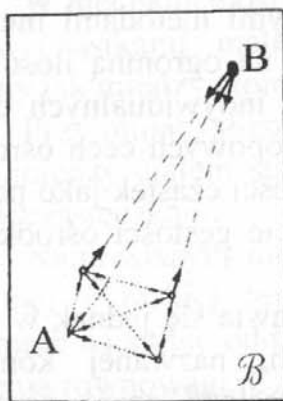
W mechanice ośrodka ciągłego ciało przedstawia się jednak w postaci pewnej substancji o określonych właściwościach, nazwanej kontinuum materialnym, które w sposób ciągły zapełnia określoną część przestrzeni trójwymiarowej. W ten sposób otrzymujemy jednoznaczność odpowiedniość między cząstką materialną (jako nieskończenie małą objętością ciała) a punktem tej przestrzeni. Zgeometryzowany na tej drodze ruch ciała pozwala w dalszej kolejności stosować metody matematyki do ujęć problemów mechaniki. Jak wiadomo, podstawowym dla matematyki jest pojęcie ciągłości, granicy,

które w mechanice ośrodka ciągłego zapewnia wprowadzenie kontinuum materialnego.

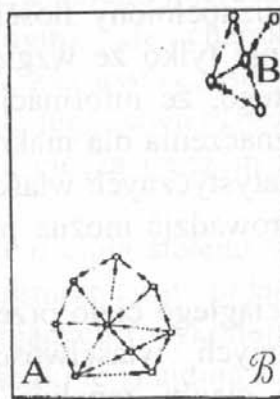
Generalizując wyniki obserwacji możemy powiedzieć, że ciała stałe nie zmieniają swojego kształtu w sposób trwały pod działaniem dostatecznie małych sił, płyny natomiast zmieniają kształt pod działaniem dowolnie małych sił, byleby tylko działanie trwało dostatecznie długo. Płyny łatwo zmieniając kształt na ogół nie zmieniają objętości, co je zasadniczo różni od gazów. Cieczą jest więc płyn, który zachowując prawie niezmienną objętość pod działaniem nawet bardzo znacznych ciśnień hydrostatycznych i przy niezmienniej temperaturze.

2. BLISKIE I DALEKIE ODDZIAŁYWANIA W CIELE

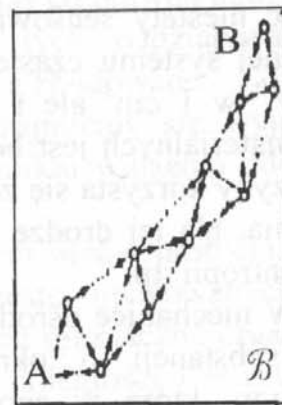
W ogólności przyjmuje się, że między każdą parą cząstek materialnych w ciele stałym występują oddziaływania rozumiane jako siły centralne działające wzdłuż prostej łączącej te cząstki. Z poprzednich rozważań wynika jednak, że oddziaływanie między cząstkami, które znajduje się już w odległości dwukrotnie ($r > 2a$) większej od równowagowej ($r = a$) są równe ok. 1% maksymalnej wartości sił oddziaływania, są więc pomijalnie małe. Oznacza to, że można w zasadzie ograniczyć się tylko do analizy oddziaływań między cząstkami znajdującymi się w bezpośrednim sąsiedztwie, a pominać oddziaływania na dalszą odległość. Przytoczone rozumowanie ma istotne znaczenie przy konstruowaniu modeli ciała stałego w MOC. Pominiemy w nim mianowicie siły dalekiego oddziaływania jako pomijalnie małe w stosunku do bliskich oddziaływań.



Bliskie i dalekie oddziaływania



Bliskie oddziaływania



Pośrednie oddziaływania

Rys. 3. Oddziaływania

Wynika stąd, że dowolne cząstki A i B położone w skończonej odległości nie będą na siebie wzajemnie oddziaływały bezpośrednio. Natomiast omawiana para cząstek oddziałyduje z sobą pośrednio, poprzez ciąg par sąsiadujących z sobą cząstek podlegających bliskiemu oddziaływaniu.

Z podobną sytuacją spotykamy się również w cieczy, gdzie występuje jedynie oddziaływanie bliskiego zasięgu, z tym, że wartość tych oddziaływań między parą sąsiednich cząstek jest znacznie mniejsza niż w ciele stałym.

W mechanice ośrodka ciągłego interesować nas będą nie tyle oddziaływania między cząstkami, co zakłócenia w tych oddziaływaniach wywołane istnieniem pól obciążeń zewnętrznych, temperatury, itp. W tym sensie opisane tu oddziaływania stanowią równowagowy poziom odniesienia, który nazywamy nienaprężonym stanem naturalnym. W stanie tym występują jednak wewnętrzne, samorzównoważone układy sił wzajemnego oddziaływania.

Załóżmy teraz, że wskutek działania obciążeń zewnętrznych wzajemna odległość między cząstkami materialnymi ulegnie zmianie. Zmieniają się wówczas także siły wzajemnego oddziaływania. Zmiany te są jednak tego rodzaju, że ulegną zmianie jedynie siły bliskiego oddziaływania. Wnosimy stąd, że na zmianę sił wzajemnego oddziaływania wpływają jedynie zmiany (przyrosty) odległości cząsteczek z bezpośredniego sąsiedztwa.

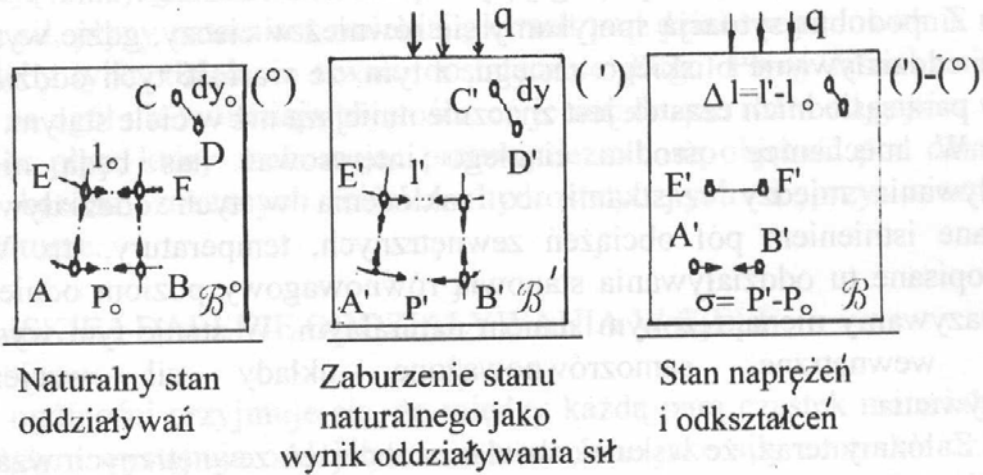
Stwierdzenie to jest w istocie zasadą lokalnego działania wprowadzoną do analizy elementarnych oddziaływań między cząstkami ośrodka. Zasada lokalnego działania bywa sformułowana następująco: na wartość naprężenia działającego w cząstce materialnej mają wpływ jedynie przyrosty przemieszczeń cząstek z najbliższego sąsiedztwa. Aby uzyskać pełną odpowiedniość między obu sformułowaniami wystarczy utożsamić zmianę (przyrost) sił wzajemnego oddziaływania z naprężeniem a przyrosty przemieszczeń ze zmianami odległości między sąsiednimi cząstkami materialnymi.

Warto w tym miejscu podkreślić, że w MOC interesować nas będzie właściwie jedynie przyrost sił wzajemnego oddziaływania liczony w stosunku do równowagowego (naturalnego) stanu oddziaływań. Miarą przyrostu sił wzajemnego oddziaływania będą naprężenia, które w ogólnym przypadku okażą się tensorem o walencji dwa. Natomiast lokalne zmiany położenia cząstek materialnych opisywać będzie iloraz przyrostu odległości Δl do pierwotnej odległości l_0 , którą nazwiemy odkształceniem $\left(\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}\right)$. W przypadku ogólnym analizowany jest przyrost odległości między parą nieskończenie blisko (w sąsiedztwie) położonych cząstek C i D , a więc wyrażenia $(dy - dy_0)$, które doprowadza do tensora odkształcenia. Widzimy więc, że dwie podstawowe dla MOC wielkości, jakimi są naprężenie i



5 68056

odkształcenie wynikają wprost jako logiczna konsekwencja analizy wzajemnych oddziaływań między cząstkami materialnymi.



Rys. 4. Naprężenia i odkształcenia

3. CIAŁA KRYSTALICZNE

W fizyce ciała stałego, podobnie jak i w wielu innych teoriach, przyjmuje się określone założenia upraszczające, które prowadzą do idealizacji procesów. Jednym z takich wyidealizowanych modeli ciał stałych jest ciało krystaliczne będące wygodnym modelem wielu materiałów, m. in. metali. Podstawowym elementem – „cegiełką” takiego ciała jest idealny kryształ, z którego zbudowane jest całe ciało. W modelu idealnego kryształu przyjmuje się, że atomy rozmieszczone są w sposób geometrycznie idealny, zajmując określone i stałe położenie równowagi wewnątrz sieci krystalicznej ciała. Nie występują w takim ciele żadne nieprawidłowości budowy, domieszki obcych kryształów, ziaren itp.

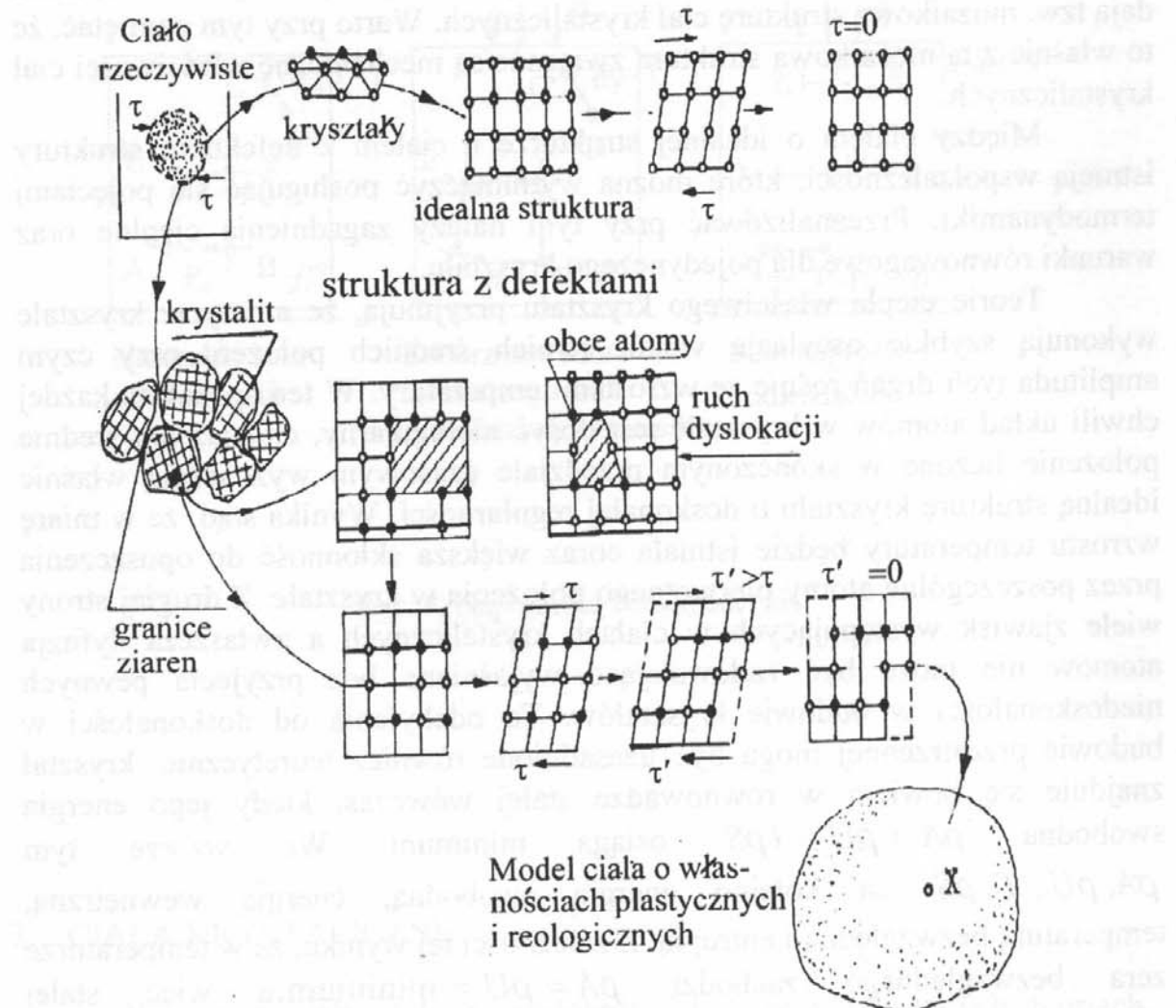
Prezentowany model ciała wyjaśnia wiele zjawisk zachodzących w ciałach krystalicznych jak sprężystość, przewodność cieplną i elektryczną. Nie wyjaśnia jednak takich zjawisk jak: proces pełzania ciał krystalicznych, np. metali, właściwości plastyczne, czy też dyfuzję atomów w metalach. Musimy

więc w tych przypadkach do opisu właściwości ciał wprowadzić modele ciał nieidealnych, w których regułą będą nieprawidłowości budowy, występowanie domieszek obcych atomów w metalach, dyslokacje, pęknięcia itp. Kryształy w ciele stałym są połączone w większe zespoły tworząc krystality i ziarna, które dają tzw. mozaikową strukturę ciał krystalicznych. Warto przy tym pamiętać, że to właśnie z tą mozaikową strukturą związane są mechaniczne właściwości ciał krystalicznych.

Między ciałem o idealnej strukturze a ciałem z defektami struktury istnieją współzależności, które można wytłumaczyć posługując się pojęciami termodynamiki. Przeanalizować przy tym należy zagadnienia cieplne oraz warunki równowagowe dla pojedynczego kryształu.

Teorie ciepła właściwego kryształu przyjmują, że atomy w kryształach wykonują szybkie oscylacje wokół swoich średnich położzeń, przy czym amplituda tych drgań rośnie ze wzrostem temperatury. W ten sposób w każdej chwili układ atomów w kryształach jest dosyć nieregularny, chociaż ich średnie położenie liczone w skończonym przedziale czasowym wyznaczają właśnie idealną strukturę kryształu o doskonałej regularności. Wynika stąd, że w miarę wzrostu temperatury będzie istniała coraz większa skłonność do opuszczenia przez poszczególne atomy pierwotnego położenia w kryształach. Z drugiej strony wiele zjawisk występujących w ciałach krystalicznych a zwłaszcza dyfuzja atomów nie może być zadowalająco wyjaśniana bez przyjęcia pewnych niedoskonałości w budowie kryształów. Te odchylenia od doskonałości w budowie przestrzennej mogą być uzasadnione również teoretycznie; kryształ znajduje się bowiem w równowadze stałej wówczas, kiedy jego energia swobodna $\rho A = \rho U - T\rho S$ osiąga minimum. We wzorze tym ρA , ρU , T , ρS są kolejno energią swobodną, energią wewnętrzną, temperaturą bezwzględną i entropią. Z zależności tej wynika, że w temperaturze zera bezwzględnego zachodzi $\rho A = \rho U = \text{minimum}$; a więc stałej równowadze odpowiada minimum energii swobodnej, która jest wówczas równa energii wewnętrznej osiągającej także minimum. Warunek ten odpowiada sytuacji kiedy struktura atomowa kryształu jest doskonale regularna, co związane jest z tym, że tylko jednej konfiguracji atomów przypisane jest minimum energii wewnętrznej. Przy wyższych temperaturach muszą zatem pojawić się nieregularności związane ze zwiększeniem się energii swobodnej kryształu. Jeżeli więc następuje wzrost entropii ΔS jako naturalny proces w układzie termodynamicznym, to towarzyszy temu zwiększenie energii swobodnej ΔA w stosunku do stanu $T = 0$. Widzimy więc, że tworzeniu się defektów i powstawaniu nieregularnej struktury materiału musi towarzyszyć podwyższanie się jego temperatury. W MOC model ciała o idealnej budowie krystalicznej, w którym nie występują żadne defekty budowy prowadzi wprost do ciała idealnie sprężystego. W ciele tym jak wiadomo, mogą zachodzić

jedynie procesy odwracalne termodynamiczne a z takimi procesami mamy właśnie do czynienia w idealnym ciele krystalicznym. Natomiast rzeczywiste, z defektami budowy ciała prowadzi w MOC do teorii plastyczności, reologii itp.



Rys.5. Idealizacja ciał krystalicznych

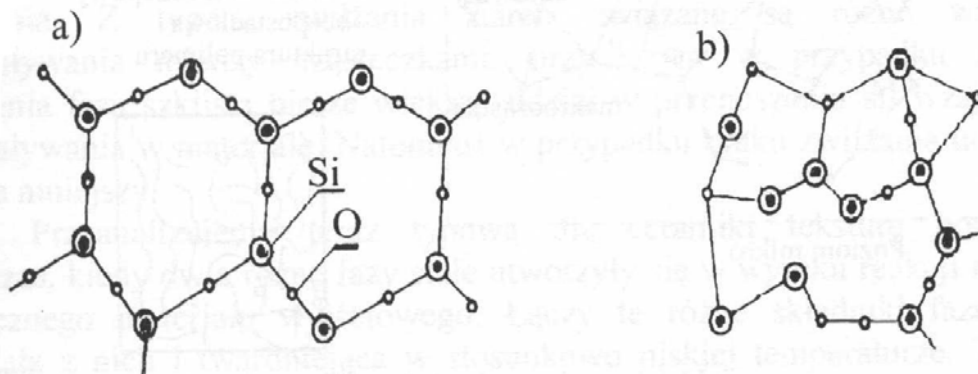
4. CIAŁA BEZPOSTACIOWE

Ciałem bezpostaciowym albo ciałem amorficznym nazywamy grupę ciał w stałym stanie skupienia, które od ciał krystalicznych różni brak uporządkowanej, sieciowej budowy wewnętrznej i wynikającej z nich właściwości jak np. anizotropii cech fizycznych, w tym również mechanicznych, łupliwości itp. W odróżnieniu od ciał krystalicznych nie mają one również stałej temperatury topnienia. Najczęściej spotykane w przyrodzie ciała bezpostaciowe są po prostu przechłodzonymi ciekczkami, które gwałtownie zakrzepły w temperaturze niższej od ich temperatury krzepnięcia. Przykładem

może tutaj być szklivo wulkaniczne, różne rodzaje szkła itp. Materiały te uzyskujemy w wyniku przechłodzenia stopionych surowców mineralnych i materiałów nieorganicznych bez krystalizacji składników.

W wysokiej temperaturze szkło i szklivo są cieczami o lepkich właściwościach, z tym, że ze wzrostem temperatury maleje ich lepkość. Posiadają wówczas właściwości zbliżone do cieczy idealnych. Natomiast obniżenie temperatury prowadzi do wzrostu lepkości, a w dalszej kolejności do zestalania się w postaci przechłodzonej cieczy charakteryzującej się właściwościami zbliżonymi do ciała stałego. Od cieczy właściwych ciała bezpostaciowe różnią się w zasadzie jedynie kilkakrotnie większą lepkością z powodu mniejszej ruchliwości atomów, które wykonują tylko ruchy drgające, oscylujące wokół niezmiennego położenia równowagowego. Oznaczają się więc typową dla stanu stałego niezmiennością kryształu.

Struktura typowego przedstawiciela tych materiałów – szkła kwarcowego składa się analogicznie jak struktura szkieletowa kwarcu, z czworościanów krzemionki, lecz ułożonych nieregularnie, ponieważ kąty między Si – O – Si nie są stałe.

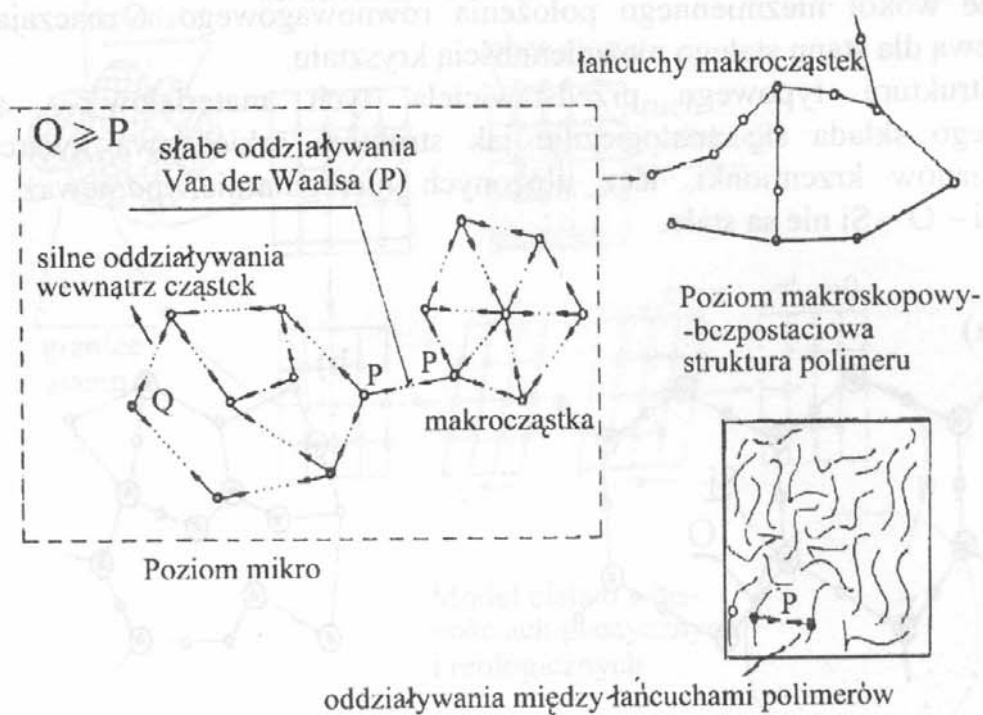


Rys. 6. Struktura: a) krystalicznego kwarcu, b) szkła kwarcowego

Odmienne struktury mają także materiały otrzymane z polimerów wielocząsteczkowych. Polimery są to makrocząstki o ciężarze cząsteczkowym $10^3 \div 10^4$ razy większym od ciężaru typowych cząstek chemicznych. Powstają one przez cykliczne powtórzenie w procesie polimeryzacji tzw. monomeru – prostej cząsteczki chemicznej, dostatecznie reaktywnej. W obrębie makrocząstki działają silne wiązania atomowe, natomiast makrocząstki powiązane są ze sobą słabszymi siłami Van der Waalsa. Ponieważ cząstki podstawowe są ze sobą słabo powiązane, to odznaczają się dosyć dużą ruchliwością. Zmniejsza się ona ze wzrostem makrocząsteczki i jest mniejsza w łańcuchach rozgałęzionych niż w liniowych.

Polimery o łańcuchowym ułożeniu makrocząsteczek o długości mniejszej od 200 atomów tworzą substancje oleiste lub bardzo miękkie –

maziste jak np. parafina. Polimery o długości cząstek większej od 200 atomów mają konsystencję typowych ciał stałych, których twardość i wytrzymałość rośnie a plastyczność maleje ze wzrostem długości łańcucha (ciężaru cząsteczkowego). Struktura makrocząstek polimerów bardziej złożonych tworzy nieuporządkowane sieci przestrzenne. Podstawowe cząstki są w tym przypadku bardzo ruchliwe. Polimery o takiej strukturze makrocząstek np. żywice fenolowe charakteryzuje duża wytrzymałość i twardość a mała plastyczność. Tworzywa zbudowane z makrocząstek łańcuchowych lub rozgałęzionych mają strukturę stanowiącą splot bezładnie rozmieszczonych łańcuchów, całkowicie lub częściowo bezpostaciową.



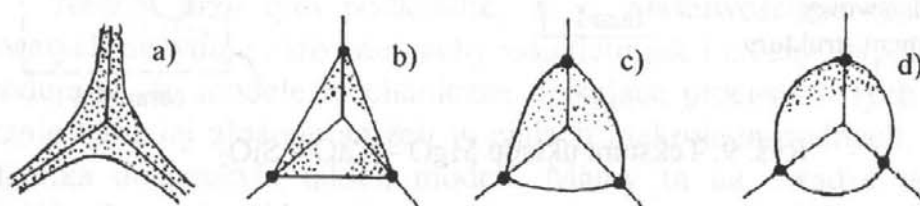
Rys. 7. Oddziaływania w polimerach

O właściwościach mechanicznych tego typu ciał decydować będą oczywiście słabsze oddziaływania jakie zachodzą między makrocząstkami tworzywa. Właśnie te słabsze dalekie oddziaływania powodują, że tworzywa charakteryzują się m. in. znacznym pełzaniem.

5. MATERIAŁY WIELOFAZOWE

Najbardziej złożonymi materiałami są materiały wielofazowe złożone z mnogości faz krystalicznych i bezpostaciowych (amorficznych). Tutaj pojęcie fazy nie posiada znaczenia termodynamicznego, oznacza tylko jednorodną pod mikroskopem część budowy ciała. Przykładami tego typu materiałów są wszystkie materiały ceramiczne, niektóre skały itp. Już w każdym materiale

ceramicznym uzyskanym z niejednorodnego chemicznie surowca w wyniku procesu spiekania, występują oprócz krystalicznych ziaren także pory, w których mogą się znaleźć znaczne ilości fazy szklistej powstałej podczas schładzania się ciekłych, lepkich stopów zawierających SiO_2 . O wypełnieniu przestrzeni między ziarnami decyduje wówczas zarówno procentowy udział fazy ciekłej jak i zwilżalność fazy krystalicznej przez fazę ciekłą. Przedstawimy teraz typowe pod tym względem przypadki, które dotyczą zwilżania trzech ziaren przez ciecz szklistą.



Rys. 8. Rodzaje zwilżania ziaren przez ciecz szklistą

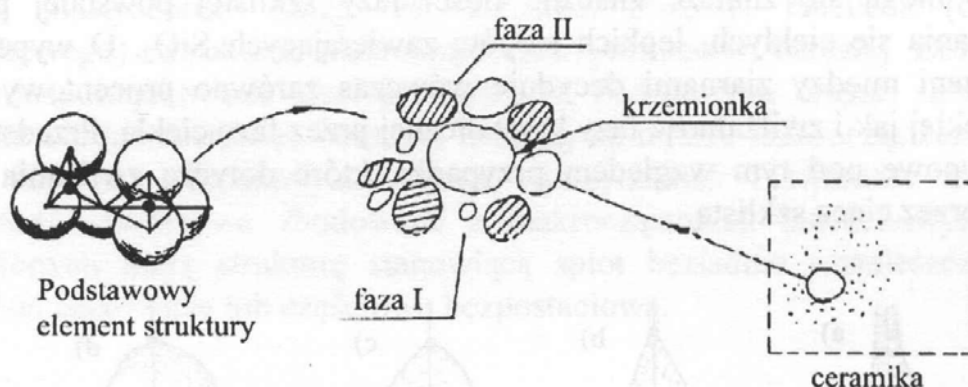
W przypadku a) mamy do czynienia z doskonałą penetracją fazy szklistej w przestrzeni między ziarnami, a przypadek d) dotyczy braku zwilżania. Z typem zwilżania ziaren związane są różne wzajemne oddziaływania między cząsteczkami, przy czym w przypadku dobrego zwilżenia faza szklista bierze większy udział w przenoszeniu sił wzajemnego oddziaływania w materiale. Natomiast w przypadku braku zwilżania udział ten będzie mniejszy.

Przeanalizujemy teraz typową dla ceramiki teksturę powstającą wówczas, kiedy dwie różne fazy stałe utworzyły się w wyniku reakcji rozkładu termicznego materiału wyjściowego. Łączy te różne składniki faza ciekła powstała z nich i twardniejąca w stosunkowo niskiej temperaturze. Tekstura tego typu jest często spotykana w wielu materiałach ceramicznych m. in. w układach $\text{MgO} - \text{CaO} - \text{SiO}_2$. Po ochłodzeniu się faza ciekła bogata w krzemionkę została się bez krystalizacji tworząc tzw. fazę szklistą rozpuszczoną w materiale identycznie jak w pierwotnym etapie tworzenia się struktury.

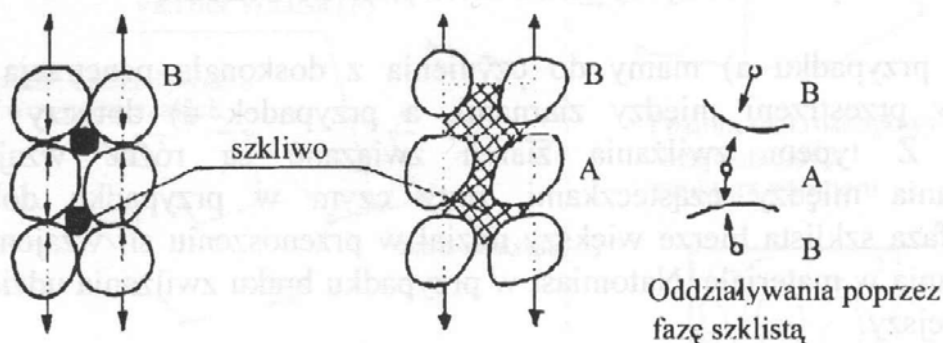
Przenoszenie sił wzajemnego oddziaływania przy braku zwilżania może odbywać się z pominięciem fazy szklistej, gdyż między poszczególnymi ziarnami występują bezpośrednie oddziaływania. Natomiast przy idealnym zwilżeniu w przenoszeniu sił musi brać udział również faza szklista, gdyż otacza ona zupełnie poszczególne ziarna. Powoduje to jakościowo nowy udział tej fazy w pracy materiału.

Osobną grupę materiałów wielofazowych stanowią materiały, w których występują również pory i kanaliki powstałe w trakcie procesów technologicznych, np. przez wytrącanie się gazów w czasie zestalania się szklawa. Właściwości tych ciał są jeszcze bardziej złożone od klasycznych

materiałów wielofazowych, w których występują jedynie ziarna i zwilżające je szkliwo.



Rys. 9. Tekstura układu MgO – CaO – SiO₂



Rys. 10. Przenoszenie oddziaływań przy słabym i mocnym zwilżaniu ziaren

6. MATERIAŁY KAPILARNO – POROWATE

Dotychczas rozpatrywaliśmy materiały, które można było uznać za jednorodne w sensie mikroskopowym. Dopiero powiększenie skali obrazu doprowadziło – na poziomie makroskopowym – do analizy defektów sieci krystalicznej, wiązań oraz rodzajów powiązań występujących np. w materiałach wielofazowych. Natomiast w tym punkcie zajmiemy się materiałami wielofazowymi już na poziomie makroskopowym. Materiały te noszą nazwę kapilarno-porowatych i mają bardzo duże znaczenie we współczesnych technologiach. Typowymi materiałami tego rodzaju są betony, ceramika budowlana, gips itp. mające podstawowe znaczenie w budownictwie.

Każdy z tych materiałów charakteryzuje się stałym składnikiem (szkieletem) wewnątrz którego rozłożone są pustki, mikro- oraz makrokanaliki o różnej orientacji. Wymiar tych kanalików ma bardzo istotne znaczenie dla problematyki, gdyż w otwartej sieci mikrokapilar o średnicy mniejszej od

$1 \cdot 10^{-5}$ cm para wodna z otoczenia jest absorbowana w mikrokapilary. Natomiast z makrokapilar o średnicy większej od $1 \cdot 10^{-5}$ cm wilgoć może wyparować w otoczenie. W makrokapilarach przepływ cieczy może mieć ponadto charakter filtracyjny a w mikrokapilarach – dyfuzyjny. Ze względu na to, że średni wymiar kapilar w świeżym betonie wynosi $8 - 16 \cdot 10^{-4}$ cm, to należy wnosić, że wystąpią w nim oba rodzaje przepływów wilgoci. Podobne stwierdzenie jest prawdziwe również dla gipsu i materiałów z niego wykonanych.

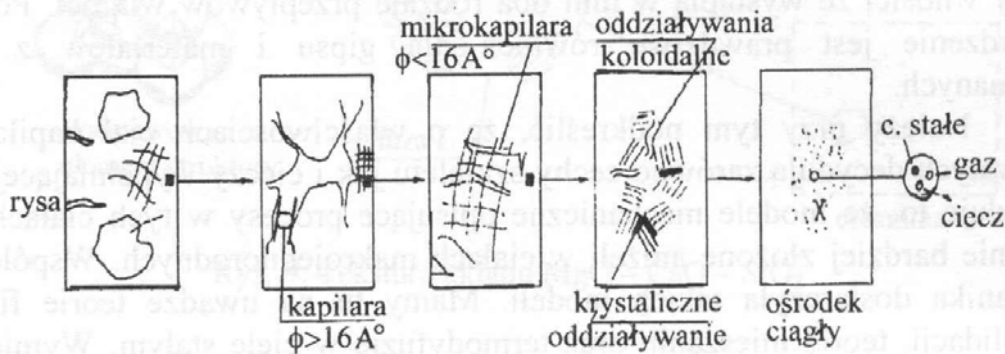
Należy przy tym podkreślić, że o właściwościach ciał kapilarno – porowatych decydują zarówno cechy szkieletu jak i cieczy wypełniającej pory. Powoduje to, że modele mechaniczne opisujące procesy w tych ciałach będą znacznie bardziej złożone aniżeli w ciałach makrojednorodnych. Współczesna mechanika dostarczyła takich modeli. Mamy tu na uwadze teorie filtracji, konsolidacji, teorię mieszanin oraz termodyfuzję w ciele stałym. Wymienione teorie w różny sposób ujmują wzajemne oddziaływanie między szkieletem a cieczą, przyjmując, że szkielet jest ciałem sztywnym (teoria filtracji), czy też wzajemnie oddziałyującym z cząstkami fazy ciekłej zajmującymi to samo miejsce co szkielet (teoria mieszanin).

Zaprezentujemy z kolei rozważania, które prowadzić będą do opisu mechanicznych właściwości betonu, jako typowego ciała kapilarno-porowatego. Beton oprócz faz stałych składających się z kruszywa i żelu cementowego zawiera również pustki, mikro- i makropęknięcia oraz kanaliki. O właściwościach mechanicznych, a także cieplno – wilgotnościowych decydować więc będą zarówno oddziaływania między cząstkami w fazach stałych, jak i przepływy cieczy w postaci pary wodnej i wilgoci. Przepływy te posiadają szczególnie doniosłe znaczenie w trakcie przyspieszonego dojrzewania, np. w wyniku naparzania. Łatwo przy tym można stwierdzić gołym okiem, że w jego strukturze wystąpią makrokapilary, w których należy spodziewać się filtracyjnych przepływów cieczy.

Z doświadczeń wynika jednak, że przepływ wilgoci w betonie ma zdecydowanie charakter dyfuzyjny. Jak wobec tego fakty te pogodzić? Otóż należy przyjąć, że przepływ cieczy między dowolną parą cząstek odbywa się zarówno w wyniku przepływu filtracyjnego jak i dyfuzyjnego. Oznacza to, że system makrokapilar nie jest połączony w całym ciele i posiada jedynie lokalny zasięg. Następnie wykorzystamy fakt, że przepływ dyfuzyjny jest znacznie powolniejszy od filtracji, a więc ten rodzaj przepływu zdominuje przemieszczanie się cząstek cieczy w szkielecie betonu. Przytoczone fakty sugerują, że analizę właściwości cieplno – wilgotnościowo – mechanicznych w świeżym betonie należy oprzeć na równaniach termodyfuzji w ciele stałym.

Wiadomo także, że materiały kapilarno – porowate charakteryzują się również znacznym pęczaniem zachodzącym w normalnych warunkach

(temperatura pokojowa, średnie stany naprężeń). Fakt ten należy tłumaczyć łatwością występowania wzajemnych poślizgów, spowodowaną istnieniem pór i pustek w materiale. Mechanizm tego procesu jest bardzo podobny do dyfuzyjnego pełzania występującego w ciałach krystalicznych w otoczeniu temperatury topnienia.



Rys.11. Model betonu jako ciała kapilarno – porowatego

Na rysunku przedstawiono kolejne powiększenia typowego fragmentu struktury betonu rozpoczynając od stanu dostrzeganego gołym okiem a kończąc na strukturze zespołu ziaren krystalitów, ciał bezpostaciowych oraz pustek. Natomiast modelem betonu będzie tu ośrodek ciągły, którego typowa cząstka składa się z trzech elementów, a mianowicie szkieletu, cieczy i gazu. W ten sposób na terenie MOC zbudowany może być model opisujący większość istotnych procesów zachodzących w dojrzewającym betonie.

Podobne rozważania można przeprowadzić również dla gipsu i innych materiałów kapilarno – porowatych uzyskując poręczne modele procesów zachodzących w tych ciałach.

7. KOMPOZYTY

Jednym z przejawów świadomej ingerencji we właściwości materiałów jest tworzenie kompozytów składających się z kilku składników o odmiennych właściwościach. Kompozytami nazwiemy przy tym materiały sztucznie otrzymywane, zbudowane z różnych chemicznie składników. Jednym z komponentów tegoż materiału jest tzw. matryca, którą wypełnia zbrojenie. Jako matryce stosuje się tworzywa sztuczne, ceramikę i niektóre metale. Materiały te zbroi się włóknami szklanymi, grafitowymi, azbestowymi czy też metalami. Otrzymany w wyniku powiązania tych komponentów nowy materiał posiada właściwości odmienne od składników. Odmienne są zarówno cechy mechaniczne, cieplne i elektryczne.

Można wydzielić trzy odmienne grupy kompozytów różniących się teksturą, a mianowicie kompozyty o wzmocnieniu dyspersyjnym, cząstkami i włóknami. W pierwszym przypadku materiał osnowy wypełniony jest cząstkami o małej średnicy w ilości 15% objętości. Wzmacniające kompozyt cząstki mają również nieduże wymiary i są ułożone chaotycznie. Natomiast włókna w kompozycie są ukierunkowane i zmieniają w istotny sposób jego własności. Występują również kompozyty, w których wzmocnieniu włóknami podlega jedynie powierzchnia. Jest to typowy zabieg przed działaniem naprężeń technologicznych, termicznych, skurczu i korozji powierzchni.

Właściwości kompozytu zależą w zasadniczym stopniu od powiązań istniejących między matrycą a zbrojeniem. Przeanalizujemy pod tym względem mechaniczne i cieplne własności kompozytu.

Można stwierdzić, że przy większej rozszerzalności cieplnej zbrojenia α_t^z od matrycy α_t^m wystąpią w nim naprężenia ściskające, natomiast w matrycy rozciągające. W efekcie kompozyt wydłuży się mniej aniżeli zbrojenie a więcej niż matryca.

Natomiast zastępczy moduł sprężystości kompozytu E^k przy objętości matrycy V^m i objętości zbrojenia V^z wyznaczmy z warunku równowagi sił w składnikach kompozytu

$$P = E^m \varepsilon^m V^m + E^z \varepsilon^z V^z$$

i w pewnym jednorodnym materiale zastępczym

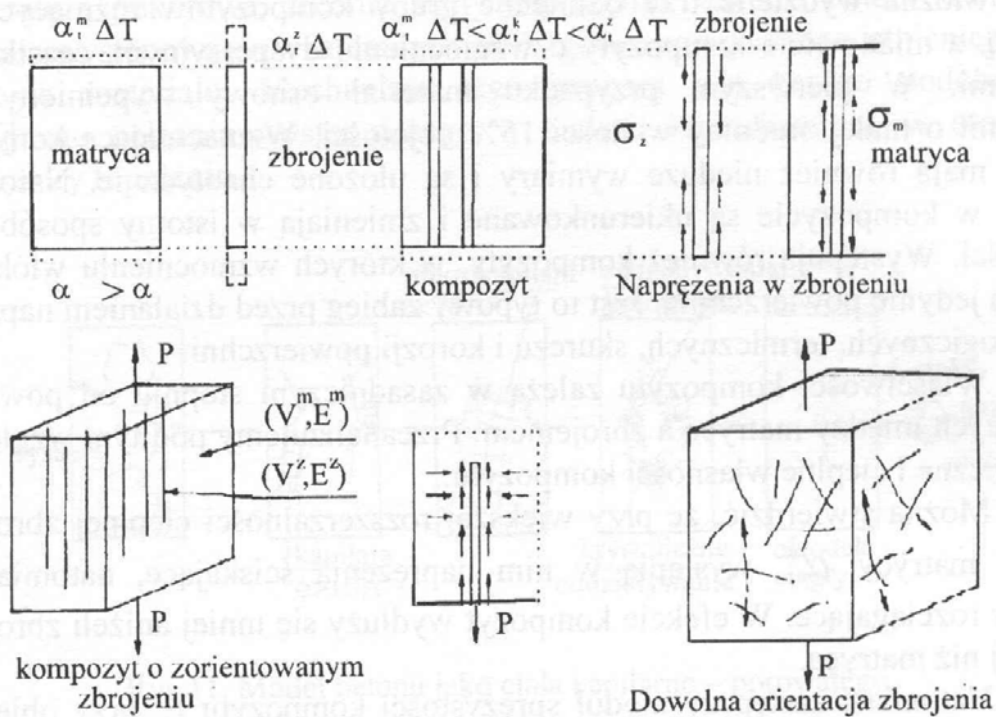
$$P = E^k \varepsilon^k (V^m + V^z)$$

Z warunku równych odkształceń $\varepsilon^k = \varepsilon^z = \varepsilon$ otrzymujemy wówczas, że

$$E^k = E^z \frac{V^z}{V^z + V^m} + E^m \frac{V^m}{V^z + V^m}$$

Rzeczywista wartość modułu sprężystości kompozytu zbudowanego ze składników sprężystych jest jeszcze większa z uwagi na występowanie odkształceń poprzecznych, które zostały tutaj zaniedbane.

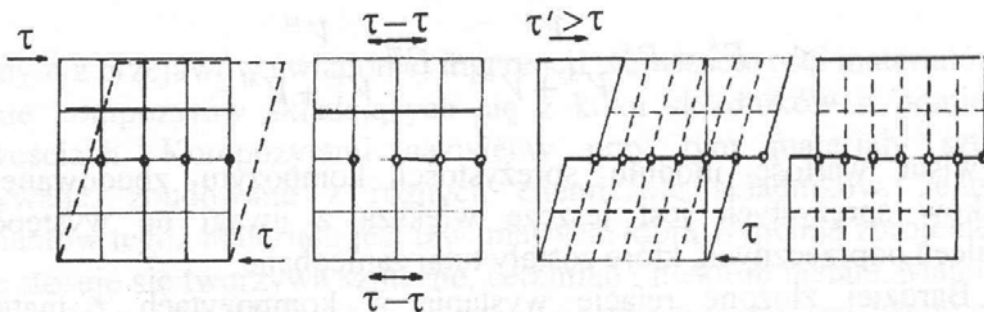
Bardziej złożone relacje wystąpią w kompozytach z materiałów podlegających pełzaniu, np. tworzyw sztucznych. Należy w tych przypadkach przeanalizować analogiczne zadanie lepkosprężyste i na jego podstawie wyznaczyć funkcję relaksacji kompozytu.



Rys.12. Rozszerzalność cieplna oraz naprężenia mechaniczne i termiczne w kompozycie

8. SPRĘŻYSTOŚĆ I PLASTYCZNOŚĆ

Przedstawione w poprzednich punktach różne rodzaje wzajemnych oddziaływań między cząstkami materialnymi, które doprowadzało do analizy ciał krystalicznych, bezpostaciowych i wielofazowych zostanie teraz wykorzystane do umotywowania sprężystych i plastycznych właściwości materiałów.



Rys.13. Odkształcenia sprężyste i plastyczne w ciele krystalicznym

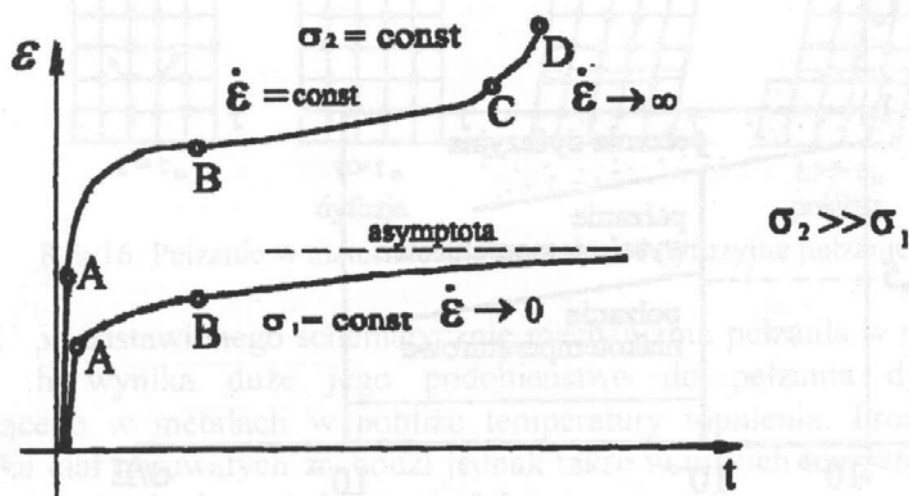
W tym celu przeanalizujemy materiały krystaliczne o idealnej budowie oraz materiały z defektami sieci krystalicznej. Pierwszy z tych materiałów

posłuży do wyjaśnienia sprężystości. Rozważmy więc zespół cząstek materialnych położonych w węzłach idealnej sieci, które poddane są działaniu naprężenia tnącego. Węzły siatki prostokątnej ulegną wówczas przesunięciu bez poślizgu i po zniknięciu naprężeń powrócą do pierwotnej konfiguracji. W sieci krystalicznej nie wystąpią żadne trwałe zmiany.

Natomiast odkształcenia plastyczne w ciele krystalicznym powstają w wyniku dwuetapowego procesu. W pierwszej kolejności pojawiają się odkształcenia sprężyste, a w miarę dalszego wzrostu naprężeń pojawiają się linie poślizgów w miejscach najsłabszych oddziaływań między cząstkami. W wyniku poślizgu jedna część krystalitu przemieszcza się trwale względem drugiej przyjmując nowe położenie równowagowe. Oczywiście po zniknięciu naprężeń pozostają trwałe odkształcenia i krystalit nie powraca do pierwotnej konfiguracji. Możliwy jest również inny rodzaj poślizgu ukośnego przez tzw. bliźniakowanie, które doprowadza także do trwałych odkształceń materiału. W materiałach rzeczywistych zachodzą analogiczne poślizgi w płaszczyznach międzyziarnowych. Zasadniczy wpływ na powstanie i rozwój odkształceń plastycznych mają defekty w strukturze, luki, wakanse. To właśnie z tymi defektami związane są głównie plastyczne właściwości materiałów. W trakcie deformacji plastycznych dochodzi do migracji defektów i obcych cząstek wewnątrz krystalitu. Proces ten jest szybszy w im wyższej temperaturze się odbywa, która aktywizuje samodyfuzję.

9. PEŁZANIE

Pełzanie jest zjawiskiem charakterystycznym dla ciał krystalicznych tworzyw, ciał porowatych i polega na wzroście odkształceń przy stałej wartości naprężeń. Typowe krzywe pełzania jako zmiany w czasie odkształceń ϵ przedstawiono na rys.14



Rys.14. Krzywe pełzania

na którym krzywej 1 odpowiada pełzanie o ograniczonej wartości wydłużeń oraz malejącej i bliskiej zera prędkości odkształceń. Natomiast na krzywej 2 mamy na odcinku OA do czynienia z natychmiastowym odkształceniem sprężystym, a następnie z pełzaniem wstępnym na odcinku AB, stacjonarnym na BC i przyspieszonym na odcinku CD. Krzywe postaci 1, w których spełnione są warunki $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon} < 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon} = 0$ prowadzą do równań liniowej lepkości. Natomiast krzywe typu 2 opisane być mogą tylko jedną z nieliniowych teorii pełzania lub nieliniową lepkością.

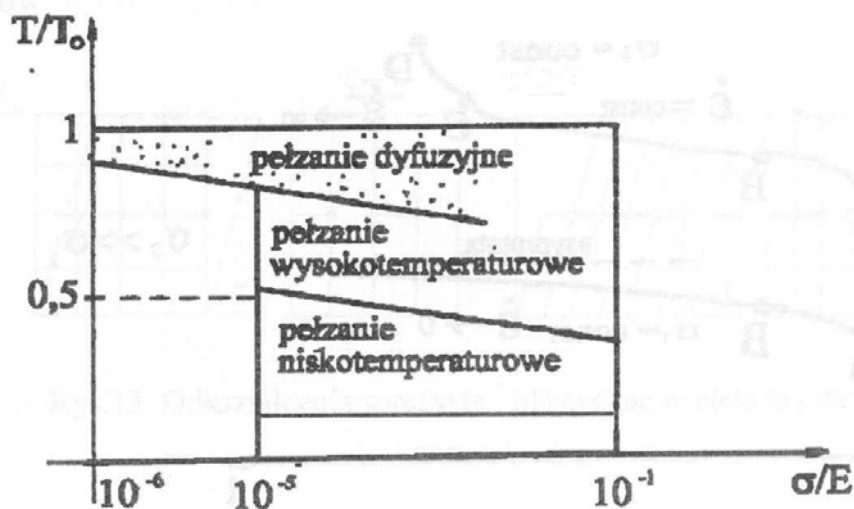
Różne są mechanizmy pełzania w ciałach krystalicznych, przebiegające przy odmiennych temperaturach. Wyróżniamy tu pełzanie niskotemperaturowe zachodzące w temperaturze $T < 0,5 T_0$, gdzie T_0 jest temperaturą topnienia, wysokotemperaturowe przy $T > 0,5 T_0$ oraz pełzanie dyfuzyjne przebiegające w otoczeniu temperatury topnienia $T \approx T_0$.

Pełzanie przebiegające przy niskich temperaturach cechuje mechanizm odkształcenia zbliżony do typowego odkształcenia plastycznego i zachodzi głównie dzięki poślizgom w sieci krystalicznej.

Pełzanie w wysokich temperaturach $T > 0,5 T_0$ ma odmienny mechanizm niż niskotemperaturowe. Zachodzą w czasie jego trwania poślizgi najpierw na granicach ziaren a potem w całej objętości ziaren, które zbliżają ten proces do lepkiego płynięcia tym wyraźniej, im wyższa jest temperatura.

Oba wyszczególnione procesy rozwijają się bardzo wolno w stosunku do odkształceń plastycznych.

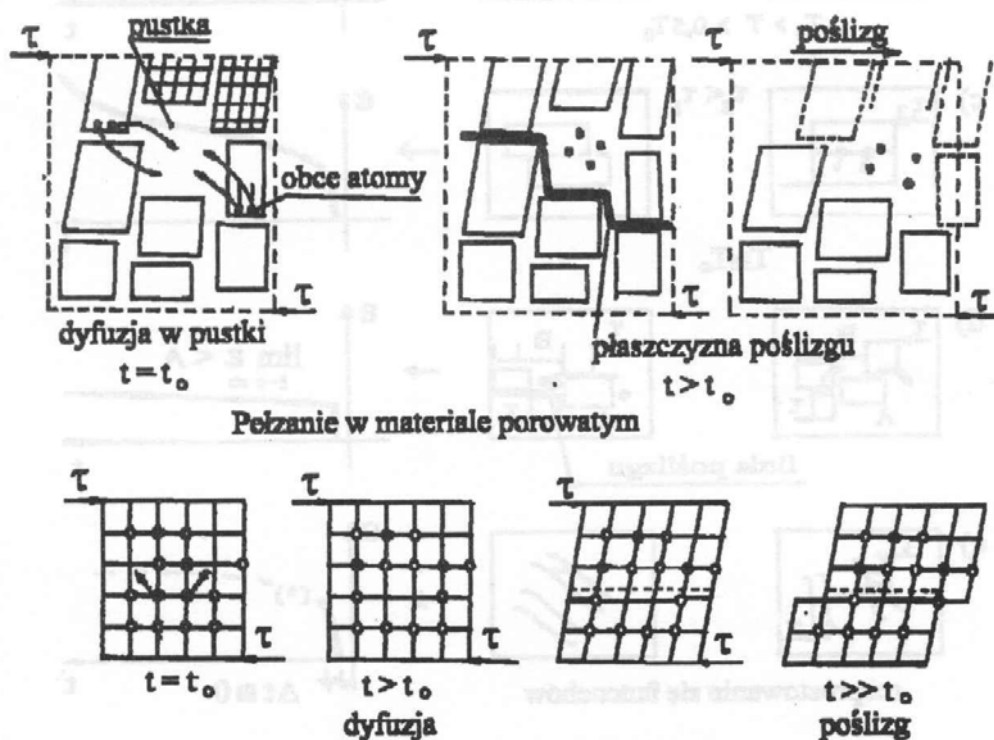
Pełzanie dyfuzyjne wywołane jest migracją atomów w temperaturze zbliżonej do temperatury topnienia. Duży udział ma w tym mechanizmie samodyfuzja przebiegająca pod wpływem i w kierunku działającego naprężenia. Duże stężenie defektów i wad w strukturze materiału zapewnia znaczną szybkość samodyfuzji a w dalszej kolejności i pełzanie.



Rys.15. Rodzaje pełzania

Z przytoczonego wyjaśnienia wynika, że w ciałach o znacznej ilości por wypełnionych cieczą, gdzie zachodzą łatwo procesy wymiany masy, migracji cząstek itp. może dojść również do procesów pełzania nawet w niskich temperaturach. Fakty potwierdzają te rozważania. Właściwości pełzania posiadają bowiem takie materiały jak wszelkie odmiany betonu, gipsu skał i materiały zbudowane na ich podstawie. W każdym z tych materiałów istnieje bardzo duża ilość zarówno pustek, defektów struktury, jak i obcych cząstek w roztworze stałym. Cząstki te w pierwszej fazie mogą utrudniać przemieszczenie się rodzimych atomów w kryształach. Pod wpływem zachodzących procesów samodyfuzji, następuje ich odwyfundowanie, co wymaga oczywiście czasu. W niskich temperaturach ponadto ruchliwość atomów jest mała i dlatego proces ten maleje i wydłuża się w czasie.

W wielofazowych materiałach porowatych, jak wymienione poprzednio betony, skały, ceramika jest także możliwy większy wzajemny poślizg ziaren szczególnie w tzw. kontaktach koagulacyjnych. Ponieważ poślizg ten jest ułatwiony przez istnienie pór, to proces z ich wzrostem się aktywizuje, co dodatkowo tłumaczy pełzanie tych materiałów.



Rys.16. Pełzanie w materiałach porowatych i dyfuzyjne pełzanie

Z przedstawionego schematycznie mechanizmu pełzania w materiałach porowatych wynika duże jego podobieństwo do pełzania dyfuzyjnego zachodzącego w metalach w pobliżu temperatury topnienia. Proces ten, w przypadku ciał porowatych zachodzi jednak także w niskich temperaturach, co jest ułatwione istnieniem pór i fazy ciekłej.

WPROWADZENIE DO RACHUNKU TENSOROWEGO

W niniejszym (czyli przedostatnim) ostatecznym wykładzie rachunku tensorowego ujęciu niejednolitym. Zwrócić się będzie o kierunku tensorów różnych wartości, a także o bardziej algebra tensorów i ich z określeniem kierunków głównych i wartości własnych tensorów oraz analizy pól tensorowych. Ta część skryptu powinna w pełni wprowadzić czytelnika w problematykę rachunku tensorowego i przygotować do pełnego zrozumięcia zagadnień mechaniki ośrodka ciągłego.

CZĘŚĆ II

10. WEKTORY I TENSORY

Wprowadzimy **RACHUNEK TENSOROWY** i wektorów sprzężonych. Niech w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej zostanie określona trojka niezależnych linowo wektorów e_i , która będzie wyznaczała tzw. podstawową bazę.

Z bazą podstawową związane jest bazę sprzężoną, która definiuje się następująco:

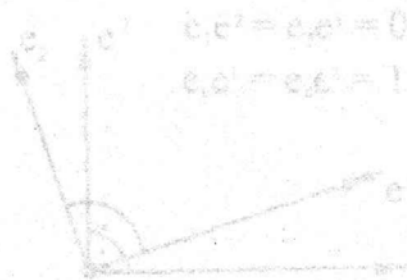
Określenie. Bazę sprzężoną (lub wazijną) do bazy wyznaczonej przez wektory e_i nazywamy trojką wektorów e^i spełniającą zależność:

$$e_i e^j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (10.1)$$

czyli

$$e_i e^j = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases} \quad (10.2)$$

We wzorach tych δ_{ij} jest symbolem Kroneckera, a (\cdot) oznacza iloczyn skalarowy wektorów e_i i e^j .



Rys. 18.

Rozdział II

WPROWADZENIE DO RACHUNKU TENSOROWEGO

W rozdziale tym przedstawiony zostanie wykład rachunku tensorowego ujęciu absolutnym. Zawierał on będzie określenie tensorów różnych walencji, a dalej elementy algebry tensorów łącznie z określeniem kierunków głównych i wartości własnych tensorów oraz analizę pól tensorowych. Ta część skryptu powinna w pełni wprowadzić czytelnika w problematykę rachunku tensorowego i przygotować do pełnego zrozumienia zagadnień mechaniki ośrodka ciągłego.

10. WEKTORY I TENSORY

Wprowadzimy wpierw pojęcie wektorów bazy i wektorów sprzężonych. Niech w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej zostanie określona trójka niezależnych liniowo wektorów e_i , która będzie wyznaczała tzw. podstawową bazę.

Z bazą podstawową związana jest baza sprzężona, którą definiuje się następująco:

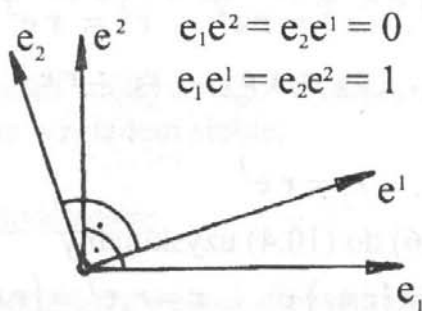
Określenie. Bazę sprzężoną (lub wzajemną) do bazy wyznaczonej przez wektory e_i , nazywamy trójkę wektorów e^j spełniającą zależności

$$e_i e^j = \delta_i^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (10.1)$$

czyli

$$e_i e^j = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases} \quad (10.2)$$

We wzorach tych δ_i^j jest symbolem Kroneckera, a (\cdot) oznacza iloczyn skalarowy wektorów e_i i e^j .



Rys.18.

Rysunek 18 stanowi ilustrację do wzorów (10.1) i (10.2) dla przypadku $(i, j = 1, 2)$. Zauważmy, że wektory w obu bazach nie są prostopadłe. Między wektorami obu baz łatwo ustalić związek, który wynika z własności iloczynu wektorowego i mieszanego.

Zachodzą zależności

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} \quad (10.3)$$

We wzorach tych symbol \times oznacza iloczyn wektorowy, a wyznacznik w mianowniku jest $\neq 0$. Zauważmy, że w mianownikach występuje skalar – iloczyn mieszany postaci $\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$, natomiast w liczniku wektor prostopadły do dwójki wektorów wyznaczających iloczyn wektorowy. Wyznacznik w mianowniku zależności (10.3) jest zawsze różny od zera ze względu na to, że wektory bazy nie mogą być wektorami komplanarnymi, a także i zerowymi. Wynika stąd jednoznaczność wektorów bazy wzajemnej, a co więcej, baza wzajemna do wzajemnej okazuje się bazą pierwotną. Ponadto zostaje zachowany również kierunek, tzn. do układu lewego wzajemnym będzie także układ lewy, a do prawego prawy.

W przypadku bazy ortogonalnej i unormowanej, tzn. $|\mathbf{e}_i| = 1$ baza sprzężona pokrywa się z wyjściową. Należy podkreślić, że ten fakt służy za podstawę do podania uproszczonej wersji rachunku tensorowego powszechnie stosowanego w mechanice.

Absolutne określenie wektora

Wektor \mathbf{r} będziemy rozpatrywali jako element przestrzeni wektorowej, który można przedstawić we współrzędnych bazy \mathbf{e}_i i wzajemnej \mathbf{e}^j następująco

$$\mathbf{r} = r^i \mathbf{e}_i = r_j \mathbf{e}^j \quad (10.4)$$

Współrzędne wektora r^i i r_j łatwo uzyskać z zależności

$$r^1 = \mathbf{r} \mathbf{e}^1, \quad r^2 = \mathbf{r} \mathbf{e}^2, \quad r^3 = \mathbf{r} \mathbf{e}^3 \quad (10.5)$$

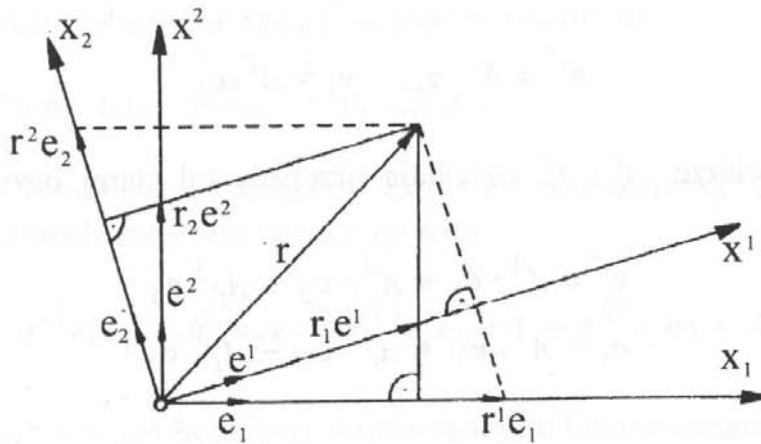
$$r_1 = \mathbf{r} \mathbf{e}_1, \quad r_2 = \mathbf{r} \mathbf{e}_2, \quad r_3 = \mathbf{r} \mathbf{e}_3$$

czyli ogólnie

$$r^i = \mathbf{r} \mathbf{e}_i, \quad r_j = \mathbf{r} \mathbf{e}^j \quad (10.6)$$

Podstawiając wyniki (10.6) do (10.4) uzyskujemy

$$\mathbf{r} = r^i \mathbf{e}_i = (\mathbf{r} \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r} = r_j \mathbf{e}^j = (\mathbf{r} \mathbf{e}^j) \mathbf{e}^j \quad (10.7)$$



Rys.19.

W rachunku tensorowym przyjęto współrzędne wektora (tensora) z indeksem u góry litery rdzeniowej nazywać kontrawariantnymi współrzędnymi (r^i), a z literami u dołu kowariantnymi współrzędnymi (r_i).

Tensor metryczny

Zastosujemy teraz rozłożenie (10.7) dla \mathbf{r} w stosunku do wektorów bazy tzn. $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{e}_i$.

Otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}^j = g_{ij} \mathbf{e}^j \\ \mathbf{e}^i &= (\mathbf{e}^j \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j = g^{ij} \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (10.8)$$

Określenie. Układy liczb g_{ij} i g^{ij} są współrzędnymi tensora metrycznego.

Między współrzędnymi tensora metrycznego występują zależności

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j = g^{ij} g_{jk} \mathbf{e}^k \Rightarrow \mathbf{e}^i = \delta^i_k \mathbf{e}^k \Rightarrow g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \equiv g^i_k \quad (10.9)$$

Z określeń i własności tensora metrycznego wynika, że macierze g_{ij} i g^{ij} są zawsze wzajemne i odwrotne względem siebie.

Określenie wektora przez współrzędne

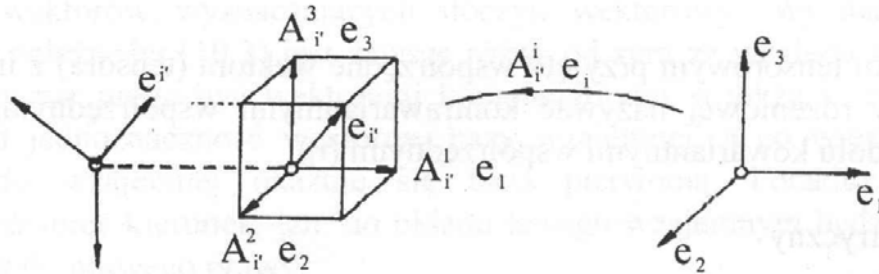
W interpretacji tej będziemy wektor utożsamiali z jego współrzędnymi. W miejsce wektora będziemy analizowali jego współrzędne i prawo transformacji przy obrotach układu współrzędnych.

Przejście od bazy e_i do bazy $e_{i'}$ określone jest zależnościami

$$e^{i'} = A^{i'}_i e_i, \quad e_i = A^i_{i'} e_{i'}$$

przy czym macierze $A^{i'}_i$ i $A^i_{i'}$ określają przejście od starej bazy do nowej i odwrotnie

$$\begin{aligned} e^{i'} &= A^{1'}_i e_1 + A^{2'}_i e_2 + A^{3'}_i e_3 \\ e_i &= A^1_{i'} e_{1'} + A^2_{i'} e_{2'} + A^3_{i'} e_{3'} \end{aligned} \quad (10.10)$$



Rys.20.

Określenie. Wektorem będziemy nazywali układ trzech liczb r_i (kowariantne współrzędne), które przy zamianie bazy z e_i na $e_{i'}$ transformują się następująco

$$r_{i'} = A^{i'}_i r_i \quad (10.11)$$

Określenie tensora o walencji dwa

W pierwszej kolejności określimy iloczyn tensorowy (diadę) dwóch wektorów następująco

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a^i e_i b^j e_j = a^i b^j e_i e_j \quad (10.12)$$

W zależności tej interesować nas będą głównie kombinacje wektorów bazowych $e_i e_j$, które można przedstawić następująco

$$\begin{aligned} e_1 e_1, & \quad e_1 e_2, & \quad e_1 e_3 \\ e_2 e_1, & \quad e_2 e_2, & \quad e_2 e_3 \\ e_3 e_1, & \quad e_3 e_2, & \quad e_3 e_3 \end{aligned} \quad (10.13)$$

Układ dziewięciu wielkości stanowi bazę dla tensora o walencji dwa, przy czym iloczyny wektorów bazy nie są tu iloczynami skalarnymi.

Określmy teraz tensor o walencji dwa.

Określenie. Elementy przestrzeni liniowej wyznaczonej przez bazę $e_i e_j$ będziemy nazywali tensorem o walencji dwa.

$$\mathbf{A} = A^{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + A^{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + A^{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \dots + A^{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (10.14)$$

Liczby A^{ij} nazywać zaś będziemy współrzędnymi kontrawariantnymi tensora \mathbf{A} . Podobnie określimy tensor we współrzędnych kowariantnych i mieszanych

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{11} \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^1 + A_{12} \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^2 + \dots + A_{33} \mathbf{e}^3 \mathbf{e}^3 = A_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \\ \mathbf{A} &= A_1^1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}^1 + A_2^1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}^2 + \dots + A_3^3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}^3 = A_j^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \end{aligned} \quad (10.15)$$

W ten sposób określiliśmy wszystkie trzy postacie zapisu tensora o walencji dwa.

W całym opracowaniu dużymi pogrubionymi literami będziemy oznaczać tensory, a normalnymi z indeksami ich współrzędne np. (\mathbf{A} i A_{ij}).

11. TENSORY O DOWOLNEJ WALENCJI

Określmy teraz tensory o dowolnej walencji postępując analogicznie jak przy określaniu tensora o walencji dwa. Wyróżnimy przy tym współrzędne kowariantne, kontrawariantne i mieszane tychże tensorów.

Określenie. Elementy przestrzeni liniowej wyznaczonej przez bazę postaci $\underbrace{e_i e_j \dots e_s}_n$ będziemy nazywali tensorem o walencji n .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{11, \dots, 1} \mathbf{e}^1 \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^s + A_{21, \dots, 1} \mathbf{e}^2 \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^s, \dots, + \\ &A_{33, \dots, 3} \mathbf{e}^3 \mathbf{e}^3, \dots, \mathbf{e}^3 = A_{ij, \dots, s} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}^s \end{aligned} \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{1, \dots, 1}^1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^s + \dots, A_{1, \dots, 1}^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^s + \dots, + \\ &A_{3, \dots, 3}^3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}^3, \dots, \mathbf{e}^3 = A_{j, \dots, s}^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}^s \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^{11,\dots,1} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1 + \dots, A^{21,\dots,1} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_1 + \dots, + \\ &A^{33,\dots,3} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_3 = A^{ij,\dots,s} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (11.3)$$

W wyrażeniach (11.1) + (11.3) $A_{ij,\dots,s}$, $A^i_{j,\dots,s}$, $A^{ij,\dots,s}$ są odpowiednio współrzędnymi kowariantnymi, mieszanymi i kontrawariantnymi tensora \mathbf{A} o walencji n .

Podane tutaj określenia tensorów o dowolnej walencji (rzędzie) są oczywiście sformułowane w ujęciu absolutnym a nie wg współrzędnych.

Określimy z kolei pewne specjalne typy tensorów o walencji dwa – tensory metryczne.

Termin tensor metryczny pochodzi z analizy następującego problemu. Analizujemy dwa punkty

$$A(x^1 x^2 x^3) \quad \text{i} \quad A(x^1 + dx^2, \dots, x^3 + dx^3)$$

i odległość między nimi.

Zachodzą wtedy relacje

$$d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i$$

$$ds^2 = d\mathbf{r} d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i dx^j \mathbf{e}_j = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j = g^i_j dx_i dx^j$$

Tensor metryczny określa zależność

$$\mathbf{g} = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g^{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + g^{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \dots + g^{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad (11.4)$$

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \quad \mathbf{g} = g^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j$$

Oczywiście współrzędne tensora \mathbf{g} określone są zależnościami

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij}, \quad \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = g^{ij}, \quad \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = \delta^i_j, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta_i^j$$

Należy podkreślić, że tensor metryczny jest odpowiednikiem tensora jednostkowego, który występuje w ortonormalnej wersji rachunku tensorowego.

Przedstawimy z kolei skrótowo określenie tensora o walencji n w wersji „współrzędnych”. Wyniki te są odpowiednikami zależności (11.1), (11.2) i (11.3).

Określenie. Tensorem kowariantnym, mieszanym i kontrawariantnym o walencji n będziemy nazywali odpowiednio układ liczb $A_{ij,\dots,s}$, $A^i_{j,\dots,s}$ i $A^{ij,\dots,s}$, które przy zmianie układu współrzędnych

$$\mathbf{e}_{i'} = 0_{i'}^i \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}^{i'} = 0^{i'}_i \mathbf{e}^i \quad (11.5)$$

transformują się następująco

$$A_{i'j',\dots,s'} = 0_{i'}^i 0_{j'}^j, \dots, 0_{s'}^s A_{ij,\dots,s} \quad (11.6)$$

$$A^{i'j',\dots,s'} = 0^{i'}_i 0^{j'}_j, \dots, 0^{s'}_s A^{ij,\dots,s} \quad (11.7)$$

$$A^{i'j',\dots,s'} = 0^{i'}_i 0^{j'}_j, \dots, 0^{s'}_s A^{ij,\dots,s'} \quad (11.8)$$

Przedstawione powyższymi wzorami transformacje współrzędnych tensorów o walencji n są wykorzystywane w większości podręczników do definiowania tensorów.

Niewątpliwie ciekawym zadaniem byłoby porównanie obu sposobów przedstawienia tensorów. Zadanie to pokrótce przedstawimy, wykazując jednocześnie ekwiwalentność obu sposobów określenia tensorów.

Równoważność obu przedstawień tensorów

Weźmy pod uwagę w pierwszej kolejności tensor o walencji dwa, $\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ i przeanalizujemy „przejście” od pierwotnej bazy \mathbf{e}_i do nowej bazy $\mathbf{e}_{i'}$ określone przez zależności

$$\mathbf{e}_{i'} = 0^i_{i'} \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_i = 0^{i'}_i \mathbf{e}_{i'} \quad (11.9)$$

wtedy zachodzi

$$\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = A^{ij} 0^{i'}_i \mathbf{e}_{i'} 0^{j'}_j \mathbf{e}_{j'} = A^{ij} 0^{i'}_i 0^{j'}_j \mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}_{j'} = A^{i'j'} \mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}_{j'}$$

gdzie $A^{i'j'} = 0^{i'}_i 0^{j'}_j A^{ij}$.

Podobnie

$$\mathbf{A} = A^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = 0^{i'}_i A^i_j \mathbf{e}_{i'} 0^j_{j'} \mathbf{e}^{j'} = A^i_j 0^{i'}_i 0^j_{j'} \mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}^{j'} = A^{i'}_{j'} \mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}^{j'} \quad (11.10)$$

gdzie $A^{i'}_{j'} = 0^{i'}_i 0^j_{j'} A^i_j$.

Ogólniej słuszne jest następujące stwierdzenie:

Jeżeli w tensorze $\mathbf{A} = A_{ij,\dots,s} e^i e^j \dots e^s$ dokonamy zmian wektorów bazy wg zależności

$$\mathbf{e}_{i'} = 0^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}^{i'} = 0^{i'}_i \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{e}^i = 0^i_{i'} \mathbf{e}^{i'} \quad (11.11)$$

to współrzędne $A_{ij,\dots,s}$ tensora \mathbf{A} transformują się wg relacji

$$A_{i'j',\dots,s'} = 0^i_{i'} 0^j_{j'}, \dots, 0^s_{s'} A_{ij,\dots,s} \quad (11.12)$$

Dowód przytoczonego rezultatu polega na wielokrotnym powtórzeniu przekształceń (11.10). Będzie zachodziło

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij,\dots,s} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}^s = A_{ij,\dots,s} 0^i{}_{i'} \mathbf{e}^{i'} 0^j{}_{j'} \mathbf{e}^{j'}, \dots, 0^s{}_{s'} \mathbf{e}^{s'} = \\ &A_{ij,\dots,s} 0^i{}_{i'} 0^j{}_{j'}, \dots, 0^s{}_{s'} \mathbf{e}^{i'} \mathbf{e}^{j'}, \dots, \mathbf{e}^{s'} = A_{i'j',\dots,s'} \mathbf{e}^{i'} \mathbf{e}^{j'}, \dots, \mathbf{e}^{s'} \end{aligned} \quad (11.13)$$

czyli w wyniku zamiany bazy współrzędne transformują się następująco

$$A_{i'j',\dots,s'} = A_{ij,\dots,s} 0^i{}_{i'} 0^j{}_{j'}, \dots, 0^s{}_{s'} \quad (11.14)$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że z zaproponowanego w pracy określenia tensora wynika w szczególności określenie tensora przez jego współrzędne. W tym celu wystarczy porównać wzory (11.6) i (11.14).

12. ANALIZA WSPÓLRZĘDNYCH TENSORÓW

Kolejnym analizowanym w pracy zagadnieniem są zapisy tego samego tensora w różnych układach wskaźników. W pierwszej kolejności przypomnimy niektóre własności tensora metrycznego określone równościami (11.4)

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta^i{}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \quad (11.15)$$

Weźmy pod uwagę tensor $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$. Przyjmując, że $\mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k$ otrzymujemy równoważne zapisy

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = A_{ij} g^{ik} \mathbf{e}_k \mathbf{e}^j = A_{ij} g^{ik} \mathbf{e}_k g^{jl} \mathbf{e}_l = \\ &A_{ij} g^{ik} g^{jl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_j^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^j = A^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (11.16)$$

stąd

$$A_j^k = A_{ij} g^{ik}, \quad A^{kl} = A_{ij} g^{ik} g^{jl} \quad (11.17)$$

Przedstawione wyniki są analogiczne do przedstawienia wektora

$$\mathbf{r} = r^i \mathbf{e}_i = r_j \mathbf{e}^j$$

Dla współrzędnych tensorów o walencji n słuszne są relacje

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{ij,\dots,s} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}^s = A_{ij,\dots,s} g^{ik} \mathbf{e}_k \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}^s = A_{j,\dots,s}^k \mathbf{e}_k \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}_s \\ \mathbf{A} &= A_{ij,\dots,s} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}^s = A_{ij,\dots,s} g^{sr} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}_r = A_{ij,\dots}^r \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \dots, \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (11.18)$$

Dla tensora o walencji dwa możliwe są następujące relacje między współrzędnymi

$$\begin{aligned} A^{ij} g_{jk} &= A^i_k, & A^{ij} g_j^k &= A^{ik}, & A_{ij} g^{jk} &= A_i^k \\ A_{ij} g_k^j &= A_{ik}, & A_i^k g_{jk} &= A_{ij}, & A_k^i g^{jk} &= A^{ij} \\ A^{ij} g_{kj} &= A^{ij} g_{jk} = A^i_k, & A^{ij} &= A_k^j g^{ki}, & A_k^j &= A^{ij} g_{ik} \end{aligned}$$

Przytoczone wyniki wyczerpują w zasadzie wszelkie możliwe kombinacje między współrzędnymi tensorów o walencji dwa. W przypadku tensorów w wyższych walencjach zachodzą np. związki

$$A_{ijkl} g^{in} g^{jm} g^{ks} = A_{\dots l}^{nms}, \quad a_i g^{il} = a^l, \quad \text{itp.}$$

Rozdział III

ELEMENTY ALGEBRY TENSORÓW

Określimy w tym rozdziale podstawowe działania na tensorach jak sumę tensorów tej samej walencji, mnożenie przez liczbę, iloczyn dwóch tensorów, rozkład na części symetryczne i asymetryczne. W dalszej kolejności wyznaczmy iloczyny skalarowe tensorów oraz niezamienniki, a także rozkład na część kulistą i dewiator tensora. W zakończeniu rozdziału przeanalizujemy kryteria poprawności budowy równań tensorowych.

13. PODSTAWOWE OPERACJE ALGEBRY TENSORÓW

13.1. Dodawanie tensorów

Określenie. Sumą dwóch tensorów \mathbf{A} i \mathbf{B} o tej samej walencji nazywamy tensor \mathbf{C} (walencja ta sama) określony w ten sposób, że współrzędne tensora sumy są równe sumie współrzędnych tensorów składowych

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= A^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l + B^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = \\ &= (A^{ijkl} + B^{ijkl}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = C^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (13.1) \\ C^{ijkl} &= A^{ijkl} + B^{ijkl} \end{aligned}$$

Z przytoczonego tutaj określenia wynika, że suma tensorów różnych walencji

$$\mathbf{D} + \mathbf{E} = D^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + E^{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$$

nie istnieje, podobnie jak w sumie tensorów

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = A^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l + B_j^{ikl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$$

(tensory tej samej walencji ale różnych typów) należy dokonać przekształcenia

$$B_j^{ikl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = B_j^{ikl} g^n_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = B_j^{ikl} g^n_j$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A^{ijkl} + B_j^{ikl} g^n_j) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$$

13.2. Mnożenie tensora przez liczbę

Określenie. Iloczynem liczby α i tensora \mathbf{A} nazywamy tensor o walencji równej tensorowi \mathbf{A} , którego współrzędne $\alpha\mathbf{A}$, są α - krotnie zwiększonymi współrzędnymi tensora \mathbf{A} .

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha (A^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l) = (\alpha A^{ijkl}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (13.2)$$

Na podstawie przytoczonych definicji różnicę tensorów określamy jako następującą sumę

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} \quad (13.3)$$

13.3. Iloczyn tensorowy tensorów

Będziemy analizować ogólny przypadek iloczynu tensorowego dwóch tensorów o dowolnych walencjach. Zadanie to jest ujęte przez następującą definicję:

Określenie. Iloczynem tensorowym dwóch tensorów nazywamy tensor o walencji równej sumie walencji czynników określony zależnością

$$\mathbf{A} = A^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{B} = B_p^{nm} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_p \quad (13.4)$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^{ijkl} B_p^{nm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_p$$

w przypadku ogólnym

$$\mathbf{A} = A^{a_1, \dots, a_n} \mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{a_n} \quad \mathbf{B} = B_{b_1, \dots, b_p} \mathbf{e}^{b_1}, \dots, \mathbf{e}^{b_p} \quad (13.5)$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^{a_1, \dots, a_n} B_{b_1, \dots, b_p} \mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{a_n} \mathbf{e}^{b_1}, \dots, \mathbf{e}^{b_p}$$

W szczególnym przypadku, kiedy \mathbf{A} i \mathbf{B} są dwoma wektorami otrzymujemy tensor o walencji dwa – iloczyn tensorowy wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} .

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a^i b^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_i b^j g_i^l \mathbf{e}^l \mathbf{e}_j$$

Przykład. Iloczyn tensora $\mathbf{A} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ i wektora $\mathbf{b} = b^l \mathbf{e}_l$ jest tensor

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{b} = a^{ij} b^l \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_l$$

Kolejna operacja rachunku tensorowego dotyczy operacji symetryzacji i asymetryzacji tensora. Operacja ta często występuje w zadaniach mechaniki ośrodka ciągłego. Poprzedza ją definicja tych tensorów.

13.4. Tensory symetryczne i asymetryczne

Określenie. Tensorem symetrycznym ze względu na parę wskaźników i, j nazywamy tensor \mathbf{A} spełniający równanie

$$A^{a,\dots,i,j,\dots,n} \mathbf{e}_a, \dots, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_n = A^{a,\dots,j,i,\dots,n} \mathbf{e}_a, \dots, \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_n \quad (13.6)$$

Określenie. Tensorem asymetrycznym ze względu na parę wskaźników i, j nazywamy tensor \mathbf{B} spełniający równanie

$$B^{a,\dots,i,j,\dots,n} \mathbf{e}_a, \dots, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_n = -B^{a,\dots,j,i,\dots,n} \mathbf{e}_a, \dots, \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_n \quad (13.7)$$

W przypadku tensora o walencji dwa otrzymujemy zależność

$$\left(\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{a}^T = a^{ji} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \right) \Rightarrow a^{ij} = a^{ji}$$

(\mathbf{a} jest tensorem symetrycznym)

$$\left(\mathbf{b} = b^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{b}^T = b^{ji} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \right) \Rightarrow b^{ij} = -b^{ji}$$

Dla współrzędnych mieszanych powinno zachodzić $a_i^j = a^j_i$ ale nie $a_i^j = a_j^i$, ponieważ zachodzi

$$a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a^{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a^{ij} g_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^k = a^{ji} g_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^k \rightarrow a_k^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^k$$

Z punktu widzenia zastosowań ważne jest twierdzenie o rozkładzie tensora o walencji dwa na część symetryczną i asymetryczną.

Twierdzenie. Dowolny tensor o walencji dwa zawsze i w sposób jednoznaczny można przedstawić w postaci sumy symetrycznego \mathbf{A}_s i asymetrycznego tensora \mathbf{A}_a

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \quad (13.8)$$

określonych następująco

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{2} (A^{ij} + A^{ji}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{A}_a = \frac{1}{2} (A^{ij} - A^{ji}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

Operacje te noszą nazwy symetryzacji i alternacji. Zwrócić należy uwagę na analogię przytoczonego twierdzenia z twierdzeniem z rachunku macierzowego o rozkładzie macierzy kwadratowej na macierz symetryczną i asymetryczną.

13.5. Zwężenie tensorów

Przed podaniem właściwego określenia śladu tensorów przytoczymy odpowiadające mu wyrażenie z rachunku wektorowego – którym jest iloczyn skalarowy wektorów. Mamy w tym przypadku zależności

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i b^j \mathbf{e}_j = a^i b^j g_{ij} = a^i \mathbf{e}_i b_j \mathbf{e}^j = a^i b_i = a_k b^k$$

Wynik ten jest oczywiście skalar. W przypadku tensorów operację taką można przeprowadzić względem dwóch wskaźników, przy czym wynik jest tensorem o walencji mniejszej o dwa.

Określenie. Splotem tensorów $\mathbf{A} = A^{a_1, \dots, i, \dots, j, \dots, n} \mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_n$ i tensora $\mathbf{B} = B^{b_1, \dots, j, \dots, m} \mathbf{e}_{b_1}, \dots, \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_m$ względem wskaźników (i, j) nazywamy tensor \mathbf{C} określony następująco

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^{a_1, \dots, i-1, j, j+1, \dots, n} \mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{i-1} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n \\ \mathbf{B} &= B^{b_1, \dots, j-1, j, j+1, \dots, m} \mathbf{e}_{b_1}, \dots, \mathbf{e}_{j-1} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_m \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A^{a_1, \dots, i-1, j+1, \dots, n} B^{b_1, \dots, j-1, j+1, \dots, m} \mathbf{e}_{a_1}, \dots, \\ &\mathbf{e}_{i-1} \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{b_1}, \dots, \mathbf{e}_{j-1} \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_m = \mathbf{C} \end{aligned} \quad (13.9)$$

przy czym wynik jest tensorem o walencji równej sumie walencji czynników minus dwa.

Operację tę będą ilustrowały poniższe przykłady:

Należy określić splot tensora o walencji dwa i wektora

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot a^k \mathbf{e}_k = A^{ij} a^k g_{jk} \mathbf{e}_i = A^{ij} a_j \mathbf{e}_i$$

oraz splot tensorów $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot B^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A^{ij} B^{kl} g_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l = A^i{}_k B^{kl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l$$

Wynik jest tensorem o walencji dwa.

Przypadkiem szczególnym są potęgi tego samego tensora. Określają je następujące zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot A^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A^{ij} A^{kl} g_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l = A^{ij} A_j{}^l \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot A^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \cdot A^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \\ &= A^{ij} A^{kl} A^{mn} g_{jk} g_{lm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_n = A^{ij} A_j{}^l A_l{}^n \mathbf{e}_i \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (13.10)$$

Przedstawione powyżej zależności znajdują zastosowanie przy formułowaniu równań fizycznych (równań tworzących) określających różnorodne zachowanie się materiałów.

Operacja splotu tensorów i sumy są liniowe i mają następujące własności

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_2 \\ (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{B} &= \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{A}(\alpha \mathbf{B}) &= \alpha \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (13.11)$$

13.6. Ślad tensora o walencji dwa

Kolejną operacją będzie ślad tensora o walencji dwa, który jest jednym z podstawowych inwariantów tensora.

Określenie. Śladem tensora $\mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ nazywamy skalar określony następująco

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{A} &= A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot g^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A^{ij} g^{kl} g_{il} g_{jk} = \\ &= A^{ij} g_j{}^l g_{il} = A_l{}^j g_j{}^l = A_i{}^i = A_j{}^j \end{aligned} \quad (13.12)$$

Operację tę określają zależności

$$\text{tr } \mathbf{A} = A_i^i = A_j^j$$

$$\text{tr } \mathbf{A}^2 = A_i^l A_l^i = A_j^l A_l^j = A^l_i A^i_l$$

$$\text{tr } \mathbf{A}^3 = A^i_j A^k_i A^j_k = A_j^i A_i^k A_k^j$$

Własności przytoczonej operacji są następujące

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) &= \text{tr } \mathbf{A}_1 + \text{tr } \mathbf{A}_2 \\ \text{tr}(\alpha \mathbf{A}) &= \alpha \text{tr } \mathbf{A} \end{aligned} \quad (13.13)$$

14. WARTOŚCI WŁASNE

Wiele zagadnień z zastosowań rachunku tensorowego sprowadza się do znalezienia wartości własnych i określenia kierunków głównych tensorów o walencji dwa. Typowymi pod tym względem są zadania na poszukiwanie kierunków głównych tensorów momentów bezwładności, stanu naprężenia i odkształcenia. Z tych przyczyn zagadnienia poszukiwania wartości własnych posiadają bardzo istotne znaczenie w całej mechanice ośrodka odkształcalnego.

Rozpatrzmy tensor \mathbf{A} o walencji dwa i pewien niezerowy wektor \mathbf{a} . Jeżeli dla niezerowego wektora \mathbf{a} i pewnej liczby A spełniony jest warunek

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = A \cdot \mathbf{a}$$

to wektor \mathbf{a} nazywamy wektorem własnym (głównym) tensora \mathbf{A} a odpowiadającą mu orientację tensora \mathbf{A} kierunkami głównymi tensora \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - Ag) \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{0} \\ (A^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j - Ag^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j) a^j \mathbf{e}_j &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14.1)$$

lub

$$(A^i_j - Ag^i_j) a^j = 0$$

Z powyższych równań otrzymujemy układ jednorodnych równań algebraicznych względem współrzędnych wektora \mathbf{a} , który posiada niezerowe rozwiązanie dla wartości A spełniających równanie

$$\det \|A^i_j - A \delta^i_j\| = 0 \quad (14.2)$$

Obliczając wartość tego wyznacznika, uzyskujemy w efekcie równanie algebraiczne trzeciego stopnia względem poszukiwanej wielkości A .

Będzie zachodziło równanie nazywane równaniem wiekowym

$$A^3 - J_1(\mathbf{A})A^2 + J_2(\mathbf{A})A - J_3(\mathbf{A}) = 0 \quad (14.3)$$

gdzie niezmiennicze wyrażenia $J_1(\mathbf{A})$, $J_2(\mathbf{A})$ i $J_3(\mathbf{A})$ mają postać

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{A}) &= \text{tr } \mathbf{A} \\ J_2(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}) \right] \\ J_3(\mathbf{A}) &= \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A})^3 - \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}) + \frac{1}{6} (\text{tr } \mathbf{A})^3 \end{aligned} \quad (14.4)$$

a ślady wyznaczamy z zależności

$$\text{tr } \mathbf{A} = A_i^i = A^i_i, \quad \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}) = A_i^k A_k^i, \quad \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A}) = A_i^k A_k^l A_l^i$$

W przypadku szczególnym, dla ortokartezjańskiego układu współrzędnych uzyskujemy

$$\text{tr } \mathbf{A} = A_{ii}, \quad \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}) = A_{ik} A_{ki}, \quad \text{tr}(\mathbf{A}^3) = A_{ik} A_{kj} A_{ji}$$

Jeżeli z kolei wielkości A_1 , A_2 i A_3 są pierwiastkami równania wiekowego to zachodzą zależności

$$J_1 = A_1 + A_2 + A_3, \quad J_2 = A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1, \quad J_3 = A_1 A_2 A_3$$

a w dalszej kolejności wartości niezmienników

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{A} &= J_1 = A_1 + A_2 + A_3 \\ \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}) &= J_1^2 - 2J_2 = (A_1)^2 + (A_2)^2 + (A_3)^2 \\ \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A}) &= 3J_3 - 3J_1 J_2 + J_1^3 = (A_1)^3 + (A_2)^3 + (A_3)^3 \end{aligned}$$

Podstawione tutaj funkcje współrzędnych tensora \mathbf{A} , tj. $J_1, J_2, J_3, \text{tr } \mathbf{A}, \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}), \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A})$ posiadają taką samą wartość w każdym dopuszczalnym przez transformację układzie współrzędnych i nazywają się niezmiennikami albo inwariantami tensora \mathbf{A} .

Zwróćmy uwagę na to, że niezmiennikiem jest np. odległość między każdą parą punktów przestrzeni. Istotnie jest to niezmienna wielkość przy transformacjach układu współrzędnych. Okazuje się przy tym, że każdy niezmiennik tensora \mathbf{A} musi być funkcją niezmienników J_1, J_2, J_3 , stąd ogólna postać niezmiennika jest następująca

$$I = f(J_1, J_2, J_3)$$

Inną cechą równania wiekowego, dla symetrycznego tensora są pierwiastki rzeczywiste.

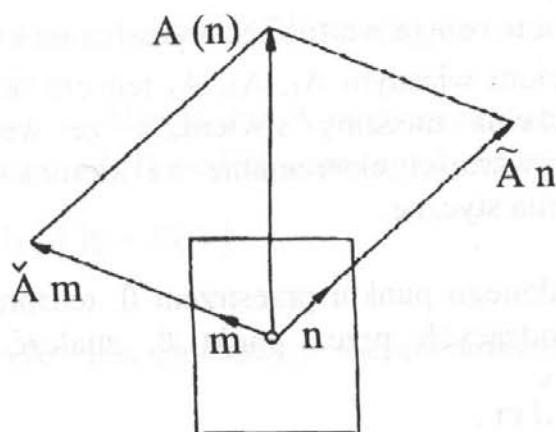
Zwróćmy tutaj uwagę na to, że wartości własne wyznaczone z równania wiekowego pozwalają jednocześnie wyznaczyć kierunki główne tensora \mathbf{A} .

15. WEKTOR TENSORA SYMETRYCZNEGO

Podajemy teraz kolejną operację algebraiczną jaką można wykonać na tensorze symetrycznym o walencji dwa. Będzie ona polegała na określeniu dla danego tensora (symetrycznego) o walencji dwa i danej płaszczyzny π określonej przez wektor normalnej \mathbf{n} – wektora tensora symetrycznego. Operacja ta ma duże znaczenie w mechanice np. przy określaniu związków między wektorem obciążenia a tensorem naprężenia w bezpośrednim sąsiedztwie brzegu ciała. Do jednoznacznego określenia tego wektora potrzebna jest znajomość współrzędnych tensora \mathbf{A} oraz wektora normalnej do płaszczyzny \mathbf{n} . Wprowadzimy teraz następujące

Określenie. Wektorem symetrycznego tensora \mathbf{A} względem płaszczyzny o wektorze normalnym, jednostkowym \mathbf{n} nazywać będziemy wektor $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ określony relacją

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}(\mathbf{n}) \Leftrightarrow (A^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j n_k \mathbf{e}^k = A^{ij} n_j \mathbf{e}_i) \quad (15.1)$$



Rys.21.

Z przedstawionego rysunku wynika, że wektor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ tensora \mathbf{A} w ogólności nie jest prostopadły do płaszczyzny π o wektorze normalnym \mathbf{n} . W zastosowaniach należy wektor $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ rozłożyć na dwie składowe: wektor normalny do płaszczyzny π i styczny, leżący w płaszczyźnie π . Obie składowe tego wektora określone są relacjami:

- składowa normalna wektora $\mathbf{A}(\mathbf{n})$

$$\left(A^{ij} n_j \mathbf{e}_i n_k \mathbf{e}^k \right) \mathbf{n} = \left(A^{ij} n_j n_i \right) \mathbf{n} = \hat{A} \mathbf{n} \quad (15.2)$$

- składowa styczna wektora $\mathbf{A}(\mathbf{n})$

$$A^{ij} n_j \mathbf{e}_i - \left(A^{ij} n_j n_i \right) \mathbf{n} = \check{A} \mathbf{m} \quad (15.3)$$

W obu wzorach wyrażenia w nawiasach są skalarami, natomiast ostatnie wyrażenie wynika z zależności

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \hat{A} \mathbf{n} + \check{A} \mathbf{m}$$

Interesować nas będzie również odpowiedź na następujące zadania:

I. Należy dla ustalonego punktu przestrzeni 0 i dla wszelkich możliwych orientacji płaszczyzn przechodzących przez punkt 0 i dla tensora \mathbf{A} , znaleźć ekstremalne wartości wektora $\hat{A} \mathbf{n}$.

Odpowiedź na postawiony problem jest następująca:

Wektor normalny $\hat{A} \mathbf{n}$ osiąga wartość ekstremalną na kierunkach głównych i są one równe wartościom własnym A_1, A_2, A_3 tensora \mathbf{A} . Interpretując tensor \mathbf{A} jako tensor naprężenia możemy stwierdzić, że wektor normalny z nim skojarzony osiąga wartości ekstremalne na kierunkach głównych i wtedy znikają też naprężenia styczne.

II. Należy dla ustalonego punktu przestrzeni 0 , tensora \mathbf{A} i dla całej rodziny płaszczyzn przechodzących przez punkt 0 , znaleźć ekstremalne wartości

wektora stycznego $\overset{\vee}{A} \mathbf{m}$.

Odpowiedź na to pytanie jest następująca:

Ekstremalne wartości wektor $\overset{\vee}{A} \mathbf{m}$ uzyskuje na płaszczyznach połówiących płaszczyzny prostopadłe do kierunków głównych i wynoszą one odpowiednio

$$\pm \frac{1}{2}(A_2 - A_3), \quad \pm \frac{1}{2}(A_3 - A_1), \quad \pm \frac{1}{2}(A_1 - A_2)$$

Dla tensora naprężenia σ ekstremalne wartości wektora $\hat{\sigma} \mathbf{n}$ uzyskujemy wzdłuż głównych osi tegoż tensora i są one równe naprężeniom głównym $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Wtedy $\overset{\vee}{\sigma} \mathbf{m} = \mathbf{0}$. Z kolei ekstremalne wartości wektora $\overset{\vee}{\sigma} \mathbf{m}$ nazywamy głównymi naprężeniami stycznymi. Naprężenia te wynoszą odpowiednio

$$\pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \quad \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$$

Na tych płaszczyznach naprężenia normalne są w szczególności różne od zera. Podkreślamy, że konstrukcje zadań na wartości własne, łącznie z trygonometrycznym wyznaczeniem pierwiastków równania wielowego podobne są w wielu podręcznikach i dlatego je pomijamy.

16. ROZKŁAD TENSORA O WALENCJI DWA NA TENSOR KULISTY I TENSOR DEWIACJI

W teorii równań dla materiałów izotropowych zachodzi konieczność rozdzielania tensorów naprężeń i odkształceń na tensor opisujący trójosiowe wszechstronne ściskanie względnie rozciąganie oraz tensor opisujący związki między odkształceniami postaci a pozostałymi współrzędnymi tensora naprężenia. Przytoczona sytuacja wynika z analizy danych doświadczalnych, w których różne związki między składowymi tensorów naprężenia i odkształcenia opisujących trójosiowe wszechstronne ściskanie od dewiatorowych związków między odkształceniami postaci a dewiatorem naprężenia. Należy wobec tego

umieć rozdzielać tensor naprężenia i odkształcenia na tensor kulisty dewiacji zwany skrótowo dewiatorem.

Określenie. Każdy tensor o walencji dwa \mathbf{A} można jednoznacznie rozłożyć na tensor kulisty \mathbf{I} i tensor dewiacji \mathbf{D} według następującej relacji

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{D} = \frac{1}{3} J_1(\mathbf{A}) \mathbf{g} + \mathbf{D}(\mathbf{A}) \quad (16.1)$$

gdzie $J_1(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ jest pierwszym niezmiennikiem tensora \mathbf{A} , a \mathbf{g} – tensorem metrycznym.

Zachodzą zależności

$$\mathbf{I} = \frac{1}{3} J_1(\mathbf{A}) \mathbf{g} = tr \mathbf{A} \mathbf{g} \quad (16.2)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \frac{1}{3} J_1(\mathbf{A}) \mathbf{g} \quad (16.3)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(A_{11} + A_{22} + A_{33}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(A_{11} + A_{22} + A_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(A_{11} + A_{22} + A_{33}) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \frac{1}{3} J_1 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \frac{1}{3} J_1 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \frac{1}{3} J_1 \end{bmatrix}$$

Z przytoczonego określenia tensora dewiacji wynika wprost, że

$$tr \mathbf{D}(\mathbf{A}) = A_{11} - \frac{1}{3} J_1 + A_{22} - \frac{1}{3} J_1 + A_{33} - \frac{1}{3} J_1 = 0$$

Należy tutaj podkreślić, że tensor kulisty \mathbf{I} jest szczególną postacią tensora izotropowego, który określony jest relacją

$$\mathbf{A} = a \cdot \mathbf{g}$$

gdzie α jest dowolnym skalarzem, a \mathbf{g} tensorem metrycznym.

W poprzedniej części tensor ten miał postać $A_{ij} = \alpha g_{ij}$. Ponadto, wektory główne tensora \mathbf{A} i jego dewiatora się pokrywają, co wynika z następującego rozumowania:

Niech wektor \mathbf{a} będzie wektorem własnym tensora \mathbf{A} , wtedy zachodzą relacje

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = A \cdot \mathbf{a}) \Rightarrow \left[\left[\frac{1}{3} J_1(\mathbf{A}) \mathbf{g} + \mathbf{D}(\mathbf{A}) \right] \mathbf{a} = A \cdot \mathbf{a} \right] \Rightarrow \quad (16.4)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) \mathbf{a} = \left(A - \frac{1}{3} J_1(\mathbf{A}) \right) \mathbf{a}$$

Wynika stąd, że wartości własne dewiatora $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ są równe $A - 1/3 J_1(\mathbf{A})$, a wektor \mathbf{a} jest wektorem współliniowym do wektora głównego dewiatora.

Rozdział IV

ELEMENTY ANALIZY TENSOROWEJ

W tej części opracowania będziemy określali odpowiedniki pochodnej i całki na tensorach o różnych walencjach. Z punktu widzenia fizyki będziemy mieli tutaj do czynienia głównie z tensorami, które są współrzędnymi punktów przestrzeni i czasu. Podobnie jak w algebrze tensorów istotne będzie rozróżnianie współrzędnych kontrawariantnych, kowariantnych i mieszanych tensorów. Okaże się przy tym, że w przypadku ogólnym wersory układu współrzędnych też są funkcjami współrzędnych, co powoduje, że trzeba rozpatrywać ich pochodne przy różniczkowaniu obiektów. W wyniku otrzymujemy nowe wyrażenie tzw. symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju. Określając pochodne oraz pewne operacje jak gradient itp. podamy ich odpowiedniki dla ortogonalnych układów współrzędnych, które będą stanowiły przedmiot szczególnych rozważań. Wreszcie jako dość daleki przypadek szczególny uzyskamy operacje w prostokątnym układzie kartezjańskim.

Przed przystąpieniem do określenia operacji z zakresu analizy tensorowej musimy wprowadzić pojęcie pola tensorowego. Podstawę do określenia tego pola będzie stanowić otwarty podzbiór B przestrzeni euklidesowej, na którym definiujemy pole. Z reguły ograniczamy się tutaj do trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Określenie. Polem tensorowym A będziemy nazywali jednoznaczne przyporządkowanie punktom otwartego podzbioru B przestrzeni euklidesowej tensorów A .

Z uwagi na to, że w tym rozdziale występują jedynie pola tensorowe będące funkcjami współrzędnych, to stosowany będzie zapis tensorów jak w poprzednich rozdziałach. Utożsamiać będziemy więc zapis pól tensorowych z tensorami.

Pole skalarowe C (przypadek pola tensorowego) nazywać będziemy różniczkowalnym jeżeli zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left| c(x) - c \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = 0 \quad \text{dla } x \rightarrow x_0$$

dla każdego punktu $x_0 \in B$, a pole wektorowe w nazywać będziemy gradientem pola skalarowego c . Oczywiście wektory x , x_0 są funkcjami współrzędnych (α^1 , α^2 , α^3). Podobnie określamy różniczkowalność pól tensorowych.

17. RÓŻNICZKOWANIE TENSORÓW

Będziemy określali po kolei pochodną wektora, symbole Christoffela oraz pochodne tensorów o walencji dwa w dowolnym układzie współrzędnych. Najpierw określimy pochodną wektora.

Niech wektor \mathbf{a} będzie funkcją współrzędnych $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ względnie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, w których wektory bazy (nieunormowanej) i bazy wzajemnej będą \mathbf{e}_i i \mathbf{e}^i . W przyjętych układach współrzędnych wektor \mathbf{a} można przedstawić następująco

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}^i$$

Określimy teraz pochodną wektora \mathbf{a} względem zmiennych α^k . Otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^k} \left[a^j(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \mathbf{e}_j(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \right] = \frac{\partial a^j}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_j + a^j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha^k}$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^k} \left[a_i(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \mathbf{e}^i(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \right] = \frac{\partial a_i}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}^i + a_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \alpha^k}$$

Widzimy, że pochodna wektora składa się z dwóch części otrzymanych w zgodzie z różniczkowaniem iloczynu dwóch funkcji. Ponadto byłoby wskazane drugie składniki iloczynu przedstawić także w tej samej bazie co pierwszy składnik pochodnej. W tym celu wprowadzamy nowe wyrażenie – symbole Christoffela, określone następująco

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha^k} &= \frac{\partial a^j}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_j + a^j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial a^j}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_j + a^j \Gamma_{jk}^i \mathbf{e}_i = \\ &= \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_i + a^m \Gamma_{mk}^i \mathbf{e}_i \right) = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k} + a^m \Gamma_{mk}^i \right) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \alpha^k} = \Gamma_{mk}^j \mathbf{e}_j \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \alpha^k} \equiv \left\{ \begin{matrix} j \\ mk \end{matrix} \right\} \mathbf{e}_j \quad (17.1)$$

Wyrażenie Γ_{mk}^j jest symbolem Christoffela drugiego rodzaju, a jego wartość podaje zależność

$$\Gamma_{mk}^j = \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \alpha^k} \cdot \mathbf{e}^j$$

wynikająca z określenia współrzędnych wektora w bazie \mathbf{e}_j

$$\left(\mathbf{a} = a^k \mathbf{e}_k \Rightarrow a^k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k \right)$$

Wyznamy następnie kowariantną pochodną kontrawariantnego wektora

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k} + a^l \Gamma_{lk}^i \right) \mathbf{e}_i$$

Otrzymane wyrażenie możemy uzyskać również z wzoru określającego kowariantną pochodną kowariantnego wektora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha^k} &= \frac{\partial (a_i \mathbf{e}^i)}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}^i + a_i \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \alpha^k} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial a_i}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}^i + a_l \frac{\partial \mathbf{e}^l}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^i \right) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial \alpha^k} - a_l \Gamma_{ik}^l \right) \mathbf{e}^i \end{aligned}$$

Wykorzystano tutaj zależność $\partial / \partial \alpha^k (\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j) = 0$, prowadząc do równości

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}^j = - \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_i, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{e}^l}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_i \right) \mathbf{e}^i = - \Gamma_{ik}^l \mathbf{e}^i$$

Reasumując, otrzymaliśmy następujące równania określające pochodną kowariantną wektora w zapisie kontra- i kowariantnym

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha^k} &= a_{i;k} \mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial \alpha^k} - a_n \Gamma_{ik}^n \right) \mathbf{e}^i \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha^k} &= a^i{}_{;k} \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k} + a^m \Gamma_{mk}^i \right) \mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{17.2}$$

Podkreślić należy, że pochodna wektora \mathbf{a} uwzględnia nie tylko zależność wektora \mathbf{a} od współrzędnych α_1 , lecz również i zależność wektorów bazy (lokalnej) do współrzędnych. W przypadku szczególnym, kiedy baza nie

będzie zależna od współrzędnych np. w ortogonalnym układzie prostokątnym to symbole Christoffela znikają.

Dotychczasowe wyliczenia dotyczą $\partial a / \partial \alpha^k$ w bazie \mathbf{e}_i . Natomiast przedstawienie tejże pochodnej w sprzężonej bazie \mathbf{e}^i zmusza do wprowadzenia nowych wyrażeń – symboli Christoffela pierwszego rodzaju. Należy podkreślić, że zarówno symbole pierwszego jak i drugiego rodzaju nie są tensorami ponieważ nie stosują się do praw transformacji tensora (o walencji trzy). Otrzymujemy

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_i \right) \mathbf{e}^i = \Gamma_{i,jk} \mathbf{e}^i$$

a dla porównania

$$\frac{\partial \mathbf{e}^l}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}^l}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_i \right) \mathbf{e}^i = \Gamma_{ik}^l \mathbf{e}^i$$

Z obu równań otrzymujemy związek

$$\Gamma_{jk}^i \mathbf{e}_i = \Gamma_{i,jk} \mathbf{e}^i$$

który po obustronnym przemnożeniu skalarnym przez \mathbf{e}^l prowadzi do zależności

$$\Gamma_{jk}^i = g^{il} \Gamma_{i,jk}$$

wiążącej symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju.

Wykażemy z kolei symetrię między wskaźnikami symboli Christoffela wychodząc z określenia wektorów bazy \mathbf{e}^l $\mathbf{e}^l = \partial \mathbf{x} / \partial \alpha_l$ - gdzie \mathbf{x} wektorem – promieniem analizowanego punktu, oraz przemienności różniczkowania

$$\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^j} \right) = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \alpha^j}$$

Otrzymujemy relacje symetrii

$$\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj} \quad \Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$$

Wskazanie symetrii symboli Christoffela pozwoli nam wyrazić te wyrażenia przez współrzędne tensora metrycznego. Należy zwrócić uwagę, że symbol Christoffela jest niezależny od analizowanego pola wektorowego, którego pochodną obliczamy, a zależy jedynie od parametryzacji przestrzeni układem współrzędnych.

Symbol $\Gamma_{i,jk}$ wyraża się przez tensor metryczny następująco

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,jk} &= \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha^k} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \alpha^j} + \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \alpha^k} \right) = \frac{1}{2} (\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{i,kj}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^k} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial}{\partial \alpha^j} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) - \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \alpha^j} \cdot \mathbf{e}_k \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} \right) \quad (17.3)\end{aligned}$$

Podobnie możemy wyrazić symbole II-go rodzaju przez tensor metryczny.

18. POCHODNE TENSORA O WALENCJI DWA

Określmy tutaj pochodne: kowariantną, kontrawariantną i mieszaną pola tensorowego o walencji dwa. Pole tensorowe \mathbf{A} określone jest jako zależne od współrzędnych α^k $\mathbf{A}(\alpha^k) = A^{mn}(\alpha^k) \mathbf{e}_m(\alpha^k) \mathbf{e}_n(\alpha^k)$, a jego pochodną a względem α^k określona jest relacją

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha^k} &= \frac{\partial}{\partial \alpha^k} (A^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) = \frac{\partial A^{mn}}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n + A^{mn} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_m \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha^k} \right) = \\ &= \frac{\partial A^{mn}}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n + A^{mn} (\Gamma_{mk}^l \mathbf{e}_l \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_m \Gamma_{nk}^l \mathbf{e}_l) = \\ &= \frac{\partial A^{mn}}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n + A^{ln} \Gamma_{lk}^m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n + A^{ml} \Gamma_{lk}^n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \left(\frac{\partial A^{mn}}{\partial \alpha^k} + A^{ln} \Gamma_{lk}^m + A^{ml} \Gamma_{lk}^n \right) \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n\end{aligned}$$

Podobnie można określić pochodną kowariantną i mieszaną tensora o walencji dwa. W każdym z tych przypadków otrzymujemy tensor o walencji trzy

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha^k} = A^{mn}{}_{;k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \left(\frac{\partial A^{mn}}{\partial \alpha^k} + A^{ln} \Gamma_{lk}^m + A^{ml} \Gamma_{lk}^n \right) \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$$

- pochodna kontrawariantnego tensora

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha^k} = A_{mn;k} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = \left(\frac{\partial A_{mn}}{\partial \alpha^k} - A_{ln} \Gamma_{mk}^l - A_{ml} \Gamma_{nk}^l \right) \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n$$

- pochodna kowariantnego tensora

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha^k} = A^m{}_{n;k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}^n = \left(\frac{\partial A^m{}_{n}}{\partial \alpha^k} + A^l{}_n \Gamma_{lk}^m - A^m{}_l \Gamma_{nk}^l \right) \mathbf{e}_m \mathbf{e}^n$$

- pochodna mieszanego tensora.

Podaliśmy tutaj bez wyprowadzenia wzory określające wszystkie trzy pochodne tensora, które mogą występować w równaniach mechaniki ośrodka ciągłego.

W zastosowaniach wyszczególnione operacje noszą nazwę gradientu tensora i określone są zależnościami

$$\nabla \mathbf{A} = A^{mn}{}_{;k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = A_{mn;k} \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n = A^m{}_{n;k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}^n$$

Jako zastosowania przedstawionych operacji wykażemy lemat Ricciego odnoszących się do gradientu tensora metrycznego.

Przykład. (Lemat Ricciego). Wykazać, że pochodne $g_{ik;l}$ i $g^{ik}{}_{;l}$ tensora metrycznego są równe zeru.

W celu wykazania $g_{ik;l} = 0$ obliczamy pochodną tensora \mathbf{g} jako szczególny przypadek tensora \mathbf{A} .*

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^l} - g_{im} \Gamma_{kl}^m - g_{mk} \Gamma_{il}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^l} - \Gamma_{i,kl} - \Gamma_{k,il} =$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^l} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial \alpha^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial \alpha^i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial \alpha^k} \right) = 0$$

W udowodnionej zależności wykorzystano wzór na kowariantną pochodną tensora i wzór na symbol Christoffela pierwszego rodzaju określający go w zależności od tensora I-go i II-go rodzaju.

W wyniku otrzymujemy istotny rezultat:

Przy różniczkowaniu iloczynu pewnego tensora A i tensora metrycznego g , tensor metryczny należy traktować jako stały.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^k} [g_{ij} A^{jl}] = g_{ij} A^{jl}; k$$

W zakończeniu tego punktu podajemy tylko, że pozostają prawdziwe klasyczne wzory dotyczące pochodnej sumy i różnicy pól tensorowych, tzn. pochodna sumy (różnicy) pól tensorowych jest równa sumie pochodnych.

Podobnie, wzór dotyczący obliczania pochodnej tensora o walencji dwa można uogólnić na tensory o dowolnej walencji. Struktura tych wzorów jest identyczna jak w przypadku tensora o walencji dwa. W każdym przypadku po zróżniczkowaniu otrzymujemy tensor, którego walencja została podwyższona o jeden.

19. WAŻNIEJSZE TYPY OPERACJI RÓŻNICZKOWANIA PÓL TENSOROWYCH

W punkcie tym skupimy uwagę na najczęściej występujących w równaniach ośrodka ciągłego operacjach różniczkowania. Będzie to głównie operator gradientu (grad), który wprowadzono w poprzednim punkcie, następnie operacje dywergencji (div), rotacji (rot) oraz laplasjanu ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$). Wszystkie te operacje będą dotyczyły pól tensorowych odpowiedniej klasy ciągłości oraz przedstawienia tensorów w zapisie absolutnym. Należy podkreślić, że przytoczony zestaw operacji jest najczęściej stosowany we współczesnych pracach w zakresie mechaniki i termodynamiki ośrodka ciągłego. Jak wiadomo wprowadzenie termodynamiki do mechaniki ośrodka ciągłego spowodowało przyspieszony rozwój tej ostatniej. Nie bez znaczenia przy tym było również przejście do przedstawienia równań mechaniki w zapisie absolutnym. Dlatego też zaprezentowane w tym podrozdziale operacje różniczkowania mają fundamentalne znaczenie w mechanice.

Pierwszą z wprowadzonych operacji będzie:

19.1. Gradient tensora

Określenie. Gradientem tensora będziemy nazywali operator określony przez relację

$$\text{grad} [\dots] = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i} [\dots] = \nabla [\dots] \quad (19.1)$$

który podwyższa walencję tensora o jeden.

Przykładem może tutaj służyć pole wektorowe ∇f będące gradientem pola skalarowego f

$$\nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^k} \mathbf{e}^k$$

lub pole tensorowe \mathbf{T} uzyskane z pola wektorowego \mathbf{r} . Odpowiednie zależności są następujące

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \nabla \mathbf{r} &= \text{grad } \mathbf{r} = \mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^k} = \mathbf{e}^k r_{i;k} \mathbf{e}^i = T_{i;k} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^i = \\ &= \left(\frac{\partial r_i}{\partial \alpha^k} - r_l \Gamma_{ik}^l \right) \mathbf{e}^k \mathbf{e}^i = r^i{}_{;k} \mathbf{e}^k \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial r^i}{\partial \alpha^k} + r^m \Gamma_{mk}^i \right) \mathbf{e}^k \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Z otrzymanych wyników wnosimy, że gradientem pola wektorowego może być zarówno tensor kowariantny jak i mieszany.

W zastosowaniach istotne znaczenie ma również pochodna tensora \mathbf{T} wzdłuż zorientowanego kierunku, określonego przez wektor jednostkowy \mathbf{n} . Pochodną tą określa zależność

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial n} = \nabla \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \left(\mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \alpha^k} \right) n^k \mathbf{e}_k = n^k \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \alpha^k} \quad (19.2)$$

W wyniku tej operacji walencja tensora nie ulegnie zmianie. Operacja grad występuje zarówno w równaniach mechaniki ośrodka ciągłego, jak i zagadnieniach transportu ciepła i masy, czy też w przepływach cieczy w ośrodku porowatym.

19.2. Dywergencja pola tensorowego

Określenie. Dywergencją $\text{div } \mathbf{T}$ pola tensorowego nazywać będziemy skalarny iloczyn operacji gradientu (∇) i tensora \mathbf{T}

$$\text{div } \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

który traci sens dla pola skalarnego.

Jako przykład wyznaczmy dywergencję wektora \mathbf{a}

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}^n \frac{\partial}{\partial \alpha^n} \cdot \mathbf{a}_l \mathbf{e}^l = \mathbf{e}^n \cdot a_{l;n} \mathbf{e}^l = \mathbf{e}^n \cdot a^l{}_{;n} \mathbf{e}^l = a^j{}_{;j} = \frac{\partial a_j}{\partial \alpha^j} - a_l \Gamma_{jj}^l$$

którą jest skalar.

Wyznamy z kolei dywergencję pola tensorowego o walencji dwa

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k} B^{mn}{}_{;k} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^k \left(\frac{\partial B^{mn}}{\partial \alpha^k} + B^{ln} \Gamma_{lk}^m + B^{ml} \Gamma_{lk}^n \right) \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \\ &= e_n \left(\frac{\partial B^{kn}}{\partial \alpha^k} + B^{ln} \Gamma_{lk}^k + B^{kl} \Gamma_{lk}^n \right) \end{aligned} \quad (19.3)$$

Z wyrażeniem tej postaci spotykamy się m.in. w lokalnym zapisie równań ruchu Cauchy'ego wynikającym z zasady zachowania pędu.

19.3. Rotacja pola tensorowego

Określenie. Rotacją pola tensorowego \mathbf{T} (rot \mathbf{T}) nazywać będziemy wektorowy iloczyn operacji gradientu (symbolicznego wektora ∇) i tensora \mathbf{T} .

$$\text{rot } \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{T}$$

Wynik tej operacji jest pseudotensorem.

Przykładowo określimy rotację pola wektorowego \mathbf{r} , wykorzystując określenia pochodnej dla wektora oraz iloczynu wektorowego. Będzie

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k} x \mathbf{r} = \mathbf{e}^k \times r_{j;k} \mathbf{e}^j = r_{j;k} \varepsilon^{ikj} \frac{1}{\sqrt{G}} \mathbf{e}_i = \\ &= \left(\frac{\partial r_j}{\partial \alpha^k} - r_l \Gamma_{jk}^l \right) \varepsilon^{ikj} \frac{1}{\sqrt{G}} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (19.4)$$

Tutaj wykorzystano relację $\mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^j = \varepsilon^{ikj} \mathbf{e}_i$ wynikającą z określenia pseudotensora jednostkowego (symbolu Ricciego), określonego poprzednio w algebrze tensorów. Natomiast G jest wyznacznikiem z macierzy współrzędnych tensora metrycznego ($G = \det(g^{ij})$).

19.4. Laplasjan pola tensorowego

Określenie. Laplasjanem $\Delta \mathbf{T}$ pola tensorowego nazywać będziemy pole tensorowe o tej samej walencji określone przez operator $(\Delta \mathbf{T}) = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}$.

Wyznaczamy pole $\Delta \mathbf{T}$ tensora \mathbf{T} o walencji dwa

$$\Delta \mathbf{T} = \nabla \left(\mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \alpha^k} \right) = \mathbf{e}^l \frac{\partial}{\partial \alpha^l} \left(\mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \alpha^k} \right) = g^{kl} T^{mn};_{kl} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \quad (19.5)$$

We wszystkich przytoczonych tutaj operacjach występuje zawsze operator symboliczny gradientu - ∇ , który jest przemienny względem iloczynu skalarowego i pochodnej cząstkowej $\partial / \partial \alpha^k$.

Warto zwrócić uwagę również na inną możliwość określania podanych poprzednio operacji a mianowicie formę całkową. W tym przypadku tworzy się całki wg relacji

$$\nabla T = \lim \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{T} \mathbf{n} dS \quad \text{dla } |V| \rightarrow 0$$

$$\nabla \cdot T = \lim \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{dla } |V| \rightarrow 0$$

$$\nabla_x T = \lim \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{T} dS \quad \text{dla } |V| \rightarrow 0$$

$$\nabla T = \lim \frac{1}{V} \oint_S \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial n} dS \quad \text{dla } |V| \rightarrow 0$$

gdzie V jest podzbiorem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej ograniczonej powierzchnią S oraz stanowiącej otoczenie punktu, w którym wyznaczmy przytoczone operacje; $|V|$ - objętością podzbioru V a \mathbf{n} - jednostkowym wektorem normalnej zewnętrznej do powierzchni. Forma całkowa określania operacji na polach wektorowych jest ogólniejsza od poprzednio podanych definicji operacji.

20. RÓŻNICZKOWANIE W ORTOGONALNYCH UKŁADACH KRZYWOLINIOWYCH

Bardzo ważnym przypadkiem szczególnym przeprowadzonych tutaj rozważań są operacje różniczkowania w ortogonalnych układach współrzędnych. Oznacza to, że w każdym punkcie przestrzeni wektory styczne do linii współrzędnych stanowią układ trzech wzajemnie prostopadłych wektorów. Przykładami takich układów współrzędnych będzie m.in. układ współrzędnych sferycznych, cylindrycznych czy też prostokątnych

(ortokartezjański). Ten ostatni prowadzi do najprostszych wzorów zarówno w algebrze jak i analizie pól tensorowych. Dość tutaj wspomnieć, że w tym układzie zanika różnica między współrzędnymi kowariantnymi, kontrawariantnymi i mieszanymi tensorów a tensor metryczny przechodzi w δ_{ij} . Prostota rozważań w zakresie tego układu powoduje, że jest on wykładany na wstępnym kursie poznawania rachunku tensorowego i jego zastosowań w mechanice.

Weźmy jako wektory bazowe, wektory styczne do linii współrzędnych określone wyrażeniem

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^i}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

gdzie \mathbf{x} jest wektorem – promieniem punktu, w którym określono bazę. Tensor metryczny określony jest zależnością

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^j}$$

w której ze względu na ortogonalność wektorów bazy, niezerowe są tylko współrzędne po diagonalu ($g_{11} \neq 0$, $g_{22} \neq 0$, $g_{33} \neq 0$).

$$g_{ii} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha^i} \quad (\text{nie sumować po } i !)$$

W dalszym przypadku szczególnym – ortokartezjańskiego układu współrzędnych otrzymujemy

$$g_{ii} = \frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i} \quad (\text{nie sumować po } i !)$$

W konsekwencji dla współrzędnych dowolnego wektora \mathbf{a} zachodzą relacje $a^i = g^{ii} a_i$, $a_i = g_{ii} a^i$ i dlatego $g_{ii} g^{ii} = 1$, tzn.

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}} \quad \text{czyli } g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1.$$

W związku z przytoczonymi własnościami tego układu współrzędnych zanikają różnice między współrzędnymi kontrawariantnymi, kowariantnymi i mieszanymi tensorów.

21. OPERACJE RÓŻNICZKOWANIA W UKŁADACH ORTOGONALNYCH

W tym punkcie podamy analogiczne operacje różniczkowania jak poprzednio, zawężone jednak do ortogonalnych układów współrzędnych. Analizowana więc będzie operacja gradientu, natomiast dalsze operacje jako z niej wynikające nie będą omawiane. Operacje te zresztą są określone identycznie jak w dowolnych układach współrzędnych. W pierwszej kolejności określimy jednak długość łuku ΔS w układzie współrzędnych $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ oraz wprowadzimy nowe wielkości zwane współczynnikami Lamego.

Analizować będziemy dwa, nieskończenie blisko względem siebie położone punkty o współrzędnych $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ $(\alpha^1 + \Delta\alpha^1, \alpha^2 + \Delta\alpha^2, \alpha^3 + \Delta\alpha^3)$. Punkty te łączy wektor $\Delta\mathbf{x}$, którego kwadrat długości wynosi

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= \Delta\mathbf{x} \cdot \Delta\mathbf{x} = g_{11}(\Delta\alpha^1)^2 + g_{22}(\Delta\alpha^2)^2 + g_{33}(\Delta\alpha^3)^2 = \\ &= (H_1)^2 (\Delta\alpha^1)^2 + (H_2)^2 (\Delta\alpha^2)^2 + (H_3)^2 (\Delta\alpha^3)^2 = (H_i)^2 (\Delta\alpha^i)^2 \end{aligned}$$

Wprowadzone tutaj skalary H_1, H_2, H_3 określone zależnością

$$(H_i)^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha^i} \right)^2 = g_{ii} \quad \left(\begin{array}{l} \text{nie sumować po } i - \text{ podkreślonych} \\ \text{indeksach} \end{array} \right)$$

nazywać będziemy współczynnikami Lamego. Z ich określenia wynika, że element łuku linii współrzędnych α^i wynosi

$$\Delta S_i = H_i \Delta\alpha^i \quad (\text{nie sumować po } i)$$

Współczynnik Lamego H_i można określić również jako długość łuku ΔS_i przyporządkowaną jednostkowemu przyrostowi zmiennej $\Delta\alpha^i$.

W dalszej kolejności wprowadzimy operator gradientu (operator Hamiltona) w układzie o ortogonalnej bazie.

Operator ten jest określony relacją

$$\text{grad} [\dots] = \nabla [\dots] = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k} [\dots]$$

identyczną jak poprzednio w układzie dowolnym.

Ortogonalność wektorów bazy powoduje, że wektor bazy wzajemnej do wektora bazy \mathbf{e}^k jest równy $1/(H_k)^2 \mathbf{e}_k$. Wykorzystuje się tutaj zależności $1/(H_k)^2 \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ki}$, gdzie δ_{ki} jest deltą Kroneckera. Uzyskujemy zatem następujące określenie dla wektora gradientu

$$\text{grad}[\dots] = \frac{1}{H_k} \mathfrak{e}_k \frac{\partial}{\partial \alpha^k} [\dots] = \frac{1}{(H_k)^2} e_k \frac{\partial}{\partial \alpha^k} [\dots]$$

gdzie \mathfrak{e}_k jest jednostkowym wektorem bazy unormowanej równoległym do wektora bazy \mathbf{e}_k . Związek między wektorami obu baz wynosi $1/H_k \mathbf{e}_k = \mathfrak{e}_k$. Wprowadziliśmy więc dwie bazy o kolinearnych wektorach: bazę określoną przez wektory \mathbf{e}_k oraz bazę unormowaną \mathfrak{e}_k . Wektory bazy unormowanej \mathfrak{e}_k są więc współliniowe z wektorami bazy \mathbf{e}_k a różnią się jedynie długością wektorów, przy czym długości wektorów bazy unormowanej są równe jedności ($|\mathfrak{e}_1| = |\mathfrak{e}_2| = |\mathfrak{e}_3| = 1$). Noszą one nazwę wersorów układu współrzędnych.

W wyniku otrzymanych zależności podane w poprzednim podrozdziale operacje będziemy realizowali jedynie w bazie \mathbf{e}_k – a w dalszej kolejności w bazie \mathfrak{e}_k . Wprowadzimy w tym celu zróżnicowane oznaczenia dla współrzędnych wektorów i tensorów w zależności od baz \mathbf{e}_k i \mathfrak{e}_k . Współrzędne wektora \mathbf{r} i tensora \mathbf{A} w bazie \mathfrak{e}^k , \mathfrak{e}_k , $\mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_l$ oznaczmy odpowiednio r^k , r^k , A^{kl} a w bazie \mathbf{e}^k , \mathbf{e}_k , $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$ przez \tilde{r}_k , \tilde{r}^k , \tilde{A}^{kl} . Związki między współrzędnymi w obu bazach są następujące

$$r^k = \tilde{r}^k H_k, \quad r_k = \frac{\tilde{r}_k}{H_k}, \quad A^{kl} = \tilde{A}^{kl} H_k H_l$$

i wynikają z zależności $\mathbf{e}^k = \mathfrak{e}_k / H_k$, $\mathbf{e}_k = H_k \mathfrak{e}_k$.

W konsekwencji we wzorach określających operacje: grad, div, rot i Δ w dowolnych układach współrzędnych należy dokonać podstawień współrzędnych

$$r_k \rightarrow \tilde{r}_k, \quad A_{kl} \rightarrow \tilde{A}_{kl}$$

i wprowadzić współrzędne \tilde{r}_k , \tilde{A}^{kl} określone relacjami

$$\tilde{r}_k = H_k r_k, \quad \tilde{r}^k = \frac{r^k}{H_k}, \quad \tilde{A}^{kl} = \frac{A^{kl}}{H_k H_l}$$

w wyniku otrzymujemy operacje określone w unormowanej bazie \mathfrak{e}_k .

W poprzednim podrozdziale określiliśmy symbole Christoffela w zależności od współrzędnych tensora metrycznego. Natomiast w tym punkcie symbole te wyrazimy przez współczynniki Lamego. Podamy tylko ostateczne wyniki bez wyprowadzania proponując Czytelnikowi ich uzasadnienie.

Dla symboli Christoffela I-go rodzaju zachodzi

$$\Gamma_{\underline{i},\underline{i}j} = -\Gamma_{j,\underline{i}\underline{i}} = H_i \frac{\partial H_i}{\partial x^j}, \quad \Gamma_{\underline{i},\underline{i}\underline{i}} = H_i \frac{\partial H_i}{\partial x^i}$$

$$\Gamma_{k,ij} = 0 \quad - \text{wszystkie indeksy są różne.}$$

Dla symboli II-go rodzaju słuszne są relacje

$$\Gamma_{\underline{i}\underline{i}}^j = -\frac{H_i}{(H_j)^2} \frac{\partial H_i}{\partial x^j}, \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{\partial}{\partial x^j} (\ln H_i), \quad \Gamma_{\underline{i}\underline{i}}^i = \frac{\partial (\ln H_i)}{\partial x^i}$$

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad - \text{wszystkie indeksy są różne.}$$

W przytoczonych wzorach dla symboli Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju nie należy sumować po indeksie i (mimo powtarzania się jego).

Zestaw wartości symboli Christoffela oraz poszczególnych operacji wykonywanych w różnych układach podane są w literaturze. Dodatkowo jednak podamy wartości stałych Lamego i symboli Christoffela w układach następujących

I - prostokątnym układzie kartezjańskim

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1$$

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{dla wszystkich indeksów}$$

II - cylindrycznym układzie współrzędnych (r, φ , z)

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\varphi = r, \quad H_3 = H_z = 1$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \text{pozostałe współrzędne } \Gamma_{ij}^k = 0$$

III - sferycznym układzie współrzędnych (r, β , φ)

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\beta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r \sin \beta$$

$$\Gamma_{\beta\beta}^r = -r, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \beta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\beta = -\cos \beta \sin \beta,$$

$$\Gamma_{r\beta}^\beta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\beta\varphi}^\varphi = \operatorname{ctg} \beta$$

W podanych wzorach nie należy sumować po powtarzających się indeksach zarówno łacińskich jak i greckich.

Przykład Wyznamy dywergencję wektora \mathbf{b} w układzie ortogonalnym a dalej w układzie cylindrycznym. Korzystać będziemy z podanych poprzednio wartości stałych Lamego i Christoffela.

W bazie \mathbf{e}_k , $\operatorname{div} \mathbf{b}$ wynosi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \mathbf{b} = \mathbf{e}^k \cdot b^l{}_{;k} \mathbf{e}_l = b^l{}_{;l} = \frac{\partial \tilde{b}^i}{\partial \alpha^i} + \tilde{b}^l \Gamma_{li}^i = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \left(\frac{\tilde{b}_i}{H_i} \right) + \left(\frac{\tilde{b}_l}{H_l} \right) \Gamma_{li}^i \end{aligned}$$

W układzie cylindrycznym będzie

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{\partial b_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{b_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial b_z}{\partial z} + \frac{b_r}{r}$$

Przykład ten ilustruje sposób wykorzystania stałych podanych poprzednio do wyznaczania konkretnych operacji na polach wektorowych. Należy podkreślić jego ogólność, pozwalającą z jednolitego punktu widzenia analizować wszelkie możliwe opisy określonej operacji wektorowej.

22. TWIERDZENIA CAŁKOWE

Analiza pól wektorowych nie ogranicza się do podania wzorów na obliczanie gradientu, dywergencji czy też innych operacji różniczkowych wykonywanych na polach tensorowych, lecz również związana jest z całkami dotyczącymi tych pól. Będziemy tutaj mieli na uwadze głównie związek między całkami powierzchniowymi i objętościowymi pól tensorowych oraz między całką powierzchniową i krzywoliniową.

Jak wiadomo, związek między pierwszymi z wymienionych całek prowadzi do twierdzenia Gaussa, natomiast związek między następną parą całek do twierdzenia Stokesa. W zastosowaniach oba twierdzenia mają fundamentalne znaczenie, wynikające z tego, że wiele praw zachowania

(bilansów) wygodnie jest formułować w postaci globalnej dotyczącej określonej części przestrzeni – głównie trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Przestrzeń ta jest ograniczona skończoną ilością (dokładnie przeliczalną) gładkich płatów powierzchniowych, na których określone są pewne pola wektorowe lub tensorowe np. pole gradientu temperatury, potencjału chemicznego czy pole sił powierzchniowych. Z reguły prawo zachowania jest równością zachodzącą między całkami objętościowymi i powierzchniowymi określonymi na polach wektorowych lub tensorowych. W dalszych zastosowaniach jednak chętnie korzystamy z lokalnych sformułowań praw zachowania, do których musimy znać sposób zamiany całki powierzchniowej na całkę po objętości. Realizacji tego zamierzenia służy właśnie twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Do podobnych celów służy twierdzenie Stokesa, szczególnie w hydromechanice.

Analizować będziemy obszar V będący podzbiorem trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej $E_3(V \subset E_3)$, który ograniczony jest powierzchnią S , składającą się ze skończonej (przeliczalnej) ilości gładkich płatów s_i :
 $S = \bigcup_{(i)} s_i, \quad i \in N_+$ gdzie N_+ jest zbiorem liczb naturalnych.

Każdemu z punktów $x \in V$ przyporządkujemy tensor T otrzymując pole tensorowe T , które jest ciągłą funkcją wraz z pierwszą pochodną w obszarze V i powierzchni S ($V \cup S$).

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Jeżeli obszar V , jego ograniczenie S i pole tensorowe T spełniają będą przytoczone tu postulaty o gładkości funkcji i obszaru, to prawdziwa jest następująca równość całek

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{T} dV$$

gdzie \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnej zewnętrznej do powierzchni S .

Przytoczona postać tego twierdzenia będzie w dalszych częściach wykorzystywana do formułowania ogólnych równań mechaniki i termodynamiki ośrodka ciągłego.

Twierdzenie Stokesa. Jeżeli krzywa K i powierzchnia S są regularne a pole tensorowe T jest różniczkowalne w sposób ciągły na $S \cup K$, to zachodzi równość

$$\int_S \mathbf{n} (\text{rot } \mathbf{T}) ds = \int_K \mathbf{T} \cdot \mathbf{m} dk$$

między całką powierzchniową a całką krzywoliniową.

Oznaczono tutaj przez \mathbf{m} – jednostkowy wektor stycznej do konturu K , \mathbf{n} – zewnętrzny jednostkowy wektor normalnej, a przez dk – różniczkę łuku wzdłuż konturu K .

23. WSTĘPNE ZASTOSOWANIA

Jako pierwsze zastosowanie z przeprowadzonych w p.22 rozważań wyprowadzimy równania geometryczne tzw. związki Cauchy'ego oraz równania statyczne wynikające z zasad zachowania pędu i krętu.

Równania statyczne zapiszemy jako związki lokalne rezygnując z ich globalnego sformułowania. Przedtem jednak musimy wprowadzić pojęcie tensora sprzężonego \mathbf{T}^* do danego tensora \mathbf{T} .

Określenie. Tensorem sprzężonym względem tensora \mathbf{T} nazywać będziemy tensor \mathbf{T} spełniający dla dowolnego wektora \mathbf{r} równość

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{T}^*$$

W przypadku tensora o walencji dwa uzyskujemy tensor \mathbf{T}^*

$$\mathbf{T}^* = T_{ji} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T_j^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = T^{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

który jest sprzężony z tensorem \mathbf{T} określonym relacją

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

W przypadku szczególnym, jeżeli zachodzi równość między tensorami $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$, to o tensorze \mathbf{T} mówimy, że jest samosprężonym. Jest sprawą oczywistą, że współrzędne tensora samosprężonego spełniają zależności $T_{ij} = T_{ji}$, czyli że pojęcie samosprężenia pokrywa się z pojęciem tensora symetrycznego. Zachodzi też analogiczny rozkład każdego tensora \mathbf{T} jak dla rozkładu tensora na część symetryczną i asymetryczną

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \quad (23.1)$$

Strona geometryczna

Znając pojęcie tensora sprzężonego możemy wyprowadzić równania strony geometrycznej zadania mechaniki ośrodka ciągłego w zakresie teorii małych odkształceń. Równania te mają postać

$$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \quad (23.2)$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}$ - jest tensorem małych odkształceń, \mathbf{u} - wektorem przemieszczeń cząstek ośrodka ciągłego, zaś tensor $\mathbf{u} \nabla$ jest sprzężonym w stosunku do tensora $\nabla \mathbf{u}$.

W ortogonalnym układzie współrzędnych tensor gradientu przemieszczenia $\nabla \mathbf{u}$ określony jest przez zależność

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{u} &= \mathbf{e}^k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha^k} = \mathbf{e}^k \tilde{u}_{i;k} \mathbf{e}^i = \tilde{u}_{i;k} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \alpha^k} - \tilde{u}_j \Gamma_{ik}^j \right) \mathbf{e}^k \mathbf{e}^i = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^k} (H_i u_i) - H_j u_j \Gamma_{ik}^i \right] \frac{1}{H_k H_i} \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_i\end{aligned}$$

zapisaną w unormowanej bazie \mathfrak{e}_i . Sprzężony do $\nabla \mathbf{u}$ tensor określimy zależnością

$$\mathbf{u} \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^i} (H_k u_k) - H_j u_j \Gamma_{ki}^j \right] \frac{1}{H_k H_i} \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_i$$

Możemy teraz określić współrzędne tensora odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$, $2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla$ w układach współrzędnych ortogonalnych, np. w układzie cylindrycznym i sferycznym.

W układzie cylindrycznym dla $k = r, \varphi = i$ uzyskujemy wyrażenie na współrzędne tensora $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) - H_j u_j \Gamma_{\varphi r}^j + \frac{\partial}{\partial \varphi} u_r - H_j u_j \Gamma_{r\varphi}^j \right]$$

Następnie wprowadzamy wartości, określonych poprzednio współczynników Lamego i symboli Christoffela. Uzyskujemy zależność

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right]$$

Natomiast pełny układ współrzędnych tensora odkształceń w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z ma postać

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, & 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, & & (23.3) \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Przytoczone wzory uzyskano z zależności $2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla$ po podstawieniu wartości symboli Christoffela i stałych Lamego.

W układzie sferycznym określonym przez zmienne r , β i φ współrzędne tensora odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ po podstawieniach wynoszą

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + u_r \right) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \beta} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_r \sin \beta + u_\beta \cos \beta \right) \\ 2\varepsilon_{r\beta} &= \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \beta} \\ 2\varepsilon_{\beta\varphi} &= \frac{1}{r \sin \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial u_\varphi}{\partial \beta} - u_\varphi \cos \beta + \frac{\partial u_\beta}{\partial \varphi} \right) \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r \sin \beta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right)\end{aligned}\tag{23.4}$$

W podanych wzorach u_r , u_φ , u_β są składowymi wektora przemieszczenia odpowiadającymi zmiennymi r , φ , β .

Strona statyczna

Równania strony statycznej wynikają z bilansu pędu i krętu w ośrodku i w ujęciu lokalnym mają postać

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^*$$

gdzie \mathbf{T} – symetryczny tensor naprężenia, ρ – gęstość ośrodka, \mathbf{F} – właściwa siła masowa (odniesiona do jednostki masy).

Równania strony statycznej czyli równania równowagi w formie tutaj podanej są prawdziwe dla dość dużej klasy zagadnień mechaniki i razem z równaniami strony geometrycznej stanowią podstawowy układ równań teorii sprężystości, plastyczności, reologii itp.

Specyficzne własności poszczególnych ośrodków znajdują swe odbicie w tzw. równaniach konstytutywnych mechaniki. Równania konstytutywne (fizyczne, tworzące) są równaniami łączącymi współrzędne tensorów odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ z współrzędnymi tensorów naprężenia \mathbf{T} . Są to równania algebraiczne, różniczkowe lub całkowite w zależności od cech ośrodka.

Współczesne ujęcie mechaniki ośrodka ciągłego eksponuje ten dział mechaniki. Najczęściej własności fizyczne ośrodka w tym ujęciu opisane są przez tzw. funkcjonal konstytutywny określony z reguły na historii gradientu deformacji. Zagadnienia te będą analizowane w dalszych częściach opracowania.

Powracając do równań równowagi zauważmy, że należy wykonać operację dywergencji na tensorze \mathbf{T} . W ortogonalnym układzie współrzędnych operacja ta prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{T} &= \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \tilde{\mathbf{T}}^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^k \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}^{mn}}{\partial \alpha^k} + \tilde{\mathbf{T}}^{ln} \Gamma_{lk}^m + \tilde{\mathbf{T}}^{ml} \Gamma_{lk}^n \right) \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \\ &= \mathbf{e}_n \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}^{kn}}{\partial \alpha^k} + \tilde{\mathbf{T}}^{ln} \Gamma_{lk}^k + \tilde{\mathbf{T}}^{kl} \Gamma_{lk}^n \right) = H_n \partial_n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^k} \left(\frac{1}{H_k H_n} T^{kn} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{T^{ln}}{H_l H_n} \Gamma_{lk}^k + \frac{T^{kl}}{H_k H_l} \Gamma_{lk}^n \right] \end{aligned} \quad (23.5)$$

Podkreślenie indeksów w stałych Lamego oznacza, że podobnie jak w poprzednich wzorach nie należy względem nich sumować.

W cylindrycznym układzie współrzędnych znajdziemy rzut wektora $\nabla \cdot \mathbf{T}$ na oś r

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{T})_r &= \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \left(\frac{T^{kr}}{H_k} \right) + \frac{T^{lr}}{H_l} \Gamma_{lk}^k + \frac{T^{kl}}{H_k H_l} \Gamma_{lk}^r = \\ &= \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} T^{r\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} T^{rz} + \frac{1}{r} T^{rr} + \frac{1}{r} T^{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

W wyniku operacji $(\nabla \cdot \mathbf{T}) \partial_r$ otrzymano skalar, ponieważ $\nabla \cdot \mathbf{T}$ jest wektorem a iloczyn skalarowy $\nabla \cdot \mathbf{T}$ z wersorem ∂_r daje skalar.

Możemy teraz przytoczyć równania równowagi w konkretnych układach współrzędnych: cylindrycznych i sferycznych. W tym celu w wyrażeniu $\nabla \cdot \mathbf{T}$ podstawiamy wartości stałych Lamego H_i i symboli Christoffela przyporządkowane odpowiedniemu układowi współrzędnych.

Ze względu na tradycje mechaniki, współrzędne tensora \mathbf{T} zastąpimy (zamiana litery rdzeniowej) na współrzędne $\sigma (T^{kr} \leftrightarrow \sigma^{kr})$. W efekcie otrzymujemy następujące układy równań:

- współrzędne cylindryczne (zmiennne r, φ, z)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho F_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \rho F_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho F_z &= 0 \end{aligned} \quad (23.6)$$

- współrzędne sferyczne (zmiennne r, β, φ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\beta}}{\partial \beta} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\beta} \operatorname{ctg} \beta) + \rho F_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \sigma_{\beta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [\operatorname{ctg} \beta (\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\varphi\varphi}) + 3\sigma_{r\beta}] + \rho F_\beta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\beta\varphi}}{\partial \beta} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2 \operatorname{ctg} \beta \sigma_{\beta\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}) + \rho F_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (23.7)$$

W podanych układach równań przez $\rho F_r, \rho F_\beta, \rho F_\varphi, \rho F_z$ oznaczono miary rzutów wektora siły masowej na odpowiedni kierunek.

Podamy również dla uzupełnienia równania równowagi w prostokątnym układzie współrzędnych

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho F_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho F_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 &= 0 \end{aligned} \quad (23.8)$$

ogólnie
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0$$

które wynikają jako dosyć daleki przypadek szczególny z równań poprzednio podanych. Należy zwrócić uwagę, że każde z tych równań trzeba traktować tylko jako jedną ze współrzędnych wektora. Istotnie, równania równowagi

$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0}$ są tylko sumą dwóch pól wektorowych - $\nabla \cdot \mathbf{T}$, $\rho \mathbf{F}$ i jako takie są również polem wektorowym.

W rozdziale tym podano minimum wiadomości z zakresu analizy pól tensorowych w ujęciu absolutnym. Warto zwrócić uwagę na trudności jakie wynikają z przejścia od bardzo zwartej zapisu równań w ujęciu absolutnym do rozpisania ich we współrzędnych. Występująca przy tym przejściu zawila symbolika dodatkowo utrudnia zrozumienie sensu poszczególnych operacji. W każdym przypadku płacimy tutaj cenę dużej ogólności i uniwersalności zapisu absolutnego równań mechaniki i termodynamiki ośrodka ciągłego. Nie bez znaczenia jest też fakt, że równania w tym zapisie znalazły głównie zastosowanie w analizie nieliniowych zadań mechaniki. Rozwój mechaniki z kolei podąża w kierunku zadań nieliniowych, w związku z czym ujęcie absolutne rachunku tensorowego ma duże perspektywy. Drugim z wielu przykładów koniecznego zastosowania równań w ujęciu tensorowym - w dowolnym układzie współrzędnych są równania teorii powłok. Jeżeli nawet w zadaniach teorii powłok nie korzysta się wprost z tensorowego zapisu równań równowagi powłok to jednak korzysta się zawsze pośrednio z wyników rachunku tensorowego.

Rozdział V

KINEMATYKA OŚRODKA CIĄGŁEGO

We współczesnym ujęciu mechanika ośrodka ciągłego jest dyscypliną wiedzy bardzo zaawansowaną w rozwoju, a wśród działów fizyki jest częścią, w której nowoczesna matematyka znalazła pełne zastosowanie. W chwili obecnej znane są jej opracowania, które traktują ją wręcz aksjomatycznie, wymienimy tutaj tylko znany podręcznik C. Truesdella, *A. First Course in Rational Continuum Mechanics*, a jej twierdzenia są równie precyzyjne jak twierdzenia matematyki. W tym ujęciu mechaniki korzysta się z wyników analizy funkcjonalnej, topologii, teorii grup ciągłych, a najczęściej używanymi pojęciami z zakresu matematyki są funkcjonal, operator itp. Można przy tym zauważyć, że wiele problemów występujących w tak ujętej mechanice generowało również rozwój niektórych działów matematyki. Wystarczy tu wymienić tylko rozwój teorii niezmienników zapoczątkowany pracami Spencera w teorii równań konstytutywnych.

Podany w niniejszym opracowaniu skrótowy wykład rachunku tensorowego jest również nastawiony na takie ujęcie mechaniki. Przyjęto przy tym, że rachunek ten zostanie podany w dwóch wersjach: w układzie prostokątnym z zapisem wskaźnikowym i w ujęciu absolutnym dla dowolnego układu współrzędnych. Czytelnikowi pozostawia się zatem możliwość wyboru ujęcia równań mechaniki w obu wersjach.

Z drugiej strony wyniki uzyskane w mechanice ośrodka ciągłego mają bezpośrednie zastosowanie w praktyce inżynierskiej. Wyniki te uzyskane są także przy użyciu metod wytrzymałości materiałów, którą należy uważać obok mechaniki ciała sztywnego za najprostszą wersję mechaniki ośrodka ciągłego, dodajmy wersję w której nadmiar przyjmowanych uproszczeń doprowadza często do wyników krańcowo niezgodnych z doświadczeniem. Niewątpliwym jest jednak udział wytrzymałości materiałów w rozwoju zarówno mechaniki ośrodka ciągłego, jak również w kreowaniu i rozwoju metod obliczeniowych konstrukcji.

W związku z przytoczonymi faktami, mechanikę ośrodka ciągłego należy traktować jako dyscyplinę fizyki będącą syntezą teorii sprężystości łącznie z wytrzymałością materiałów i mechaniką budowli, teorii plastyczności, reologii i hydromechaniki. Do łącznego ujęcia tak szerokiego zakresu zagadnień mechanika ośrodka ciągłego korzysta z koncepcji ośrodka ciągłego pozostając teorią, która opisuje własności mechaniczne ciał na poziomie makroskopowym. Obiektem badań pozostaje więc cząstka materialna będąca punktem przestrzeni euklidesowej. Przy opisie mechanicznych własności ciał korzysta się zarówno ze współczesnej matematyki jak i termodynamiki służącej do uzasadnienia

poszczególnych typów równań fizycznych opisujących zachowanie się ciał. W wyniku takiego zastosowania termodynamiki nastąpił również rozwój termodynamiki procesów nierównowagowych, w których nieodwracalność procesów mechanicznych jest regułą a nie wyjątkiem.

W związku z podanymi faktami autor uważał, że warto podjąć próbę takiego wykładu mechaniki ośrodka ciągłego, aby zagadnienia i metody należące tradycyjnie do wytrzymałości materiałów wynikały z niego jako określony przypadek szczególny, a w każdym razie uświadomił słuchaczowi związek między obu ujęciami mechaniki. Słuchaczowi należy również uzmysłowić dystans i wzajemne relacje jakie zachodzą między aksjomatycznie ujmowaną mechaniką ośrodka ciągłego (mechaniką racjonalną substancji) a klasyczną wytrzymałością materiałów. Podejście takie wymaga daleko idących kompromisów z obu stron. Z jednej strony wykład wytrzymałości musi ulec daleko idącym zmianom zbliżającym go do mechaniki ośrodka ciągłego. Udany przykładem takiego ujęcia wytrzymałości materiałów jest podręcznik S. Piechnika, Wytrzymałość Materiałów, PWN 1978. Natomiast ze strony mechaniki ośrodka ciągłego postanowiono podać wykład w wersji prostszej z wykorzystaniem zapisu wskaźnikowego i ograniczonego do podstawowych zagadnień, oraz w ujęciu absolutnym dla dalszej klasy zagadnień. W efekcie końcowym Czytelnik otrzymuje uproszczoną wersję mechaniki ośrodka ciągłego oraz wstępny zarys zagadnień, którymi zajmuje się współczesna mechanika ośrodka ciągłego.

24. MATERIALNY I PRZESTRZENNY OPIS RUCHU

Podstawowe znaczenie dla właściwego opisu ruchu ośrodka ciągłego ma przyjęcie odpowiedniego układu odniesienia oraz zmiennych niezależnych opisujących ruch ośrodka. Istnieją w tym zakresie dwie możliwości: albo opisujemy ruch ośrodka względem nieruchomego układu współrzędnych (współrzędne przestrzenne) albo „wmrażamy” układ współrzędnych w ośrodek uzyskując tzw. opis materialny ruchu (Lagrange'a). Uzyskujemy w ten sposób ogólny opis ruchu ośrodka, który pozwoli z jednolitego punktu widzenia traktować zarówno ruch cieczy i gazów jak i odkształcalnych ciał stałych.

Z punktu widzenia formalnego za wyjściowy punkt rozważań przyjmujemy trójwymiarową przestrzeń euklidesową E_3 , której punkty będziemy utożsamiali z poszczególnymi położeniami cząstek ośrodka znajdującego się w ruchu. A więc ruch ośrodka ciągłego będziemy traktowali jako ciągle i wzajemnie jednoznaczne przekształcenie trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej w siebie, przy czym rolę parametru w tym przekształceniu odgrywa czas t . Oznaczmy dalej przez V_0 część przestrzeni E_3 , $V_0 \subset E_3$, którą ciało zajmowało w chwili początkowej $t = 0$ i będziemy ją nazywali konfiguracją początkową a przez V podzbiór E_3 zajęty przez ciało w

dowolnej chwili $t > 0$. Układ liczb x^1, x^2, x^3 określa współrzędne cząstki materialnej (punktu materialnego) w chwili t , odnoszone względem pewnego ortokartezjańskiego układu współrzędnych. Jeżeli \mathbf{j}_k ($k = 1, 2, 3$) będą wektorami bazowymi tego układu współrzędnych, to wektor – promień \mathbf{x} interesującego nas punktu określony jest zależnością $\mathbf{x} = x^i \mathbf{j}_i$. Określiliśmy w ten sposób położenie dowolnego punktu materialnego względem nieruchomego układu współrzędnych o wektorach bazowych \mathbf{j}_k . Ujęty w taki sposób ruch ośrodka nazywać będziemy opisem przestrzennym (Eulera), a zmienne x^1, x^2, x^3, t nazywać będziemy zmiennymi przestrzennymi (Eulera).

Podamy teraz drugi możliwy opis ruchu cząstki ośrodka. Przyjmijmy z kolei, że cząstka o współrzędnych x^1, x^2, x^3 w chwili t , w chwili początkowej $t = 0$ określona jest przez wektor $\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \alpha^i \mathbf{j}_i$. Cząstka ta od położenia w chwili początkowej do położenia w chwili t doznała przemieszczenia określonego przez wektor $\mathbf{u}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t)$, zależny od zmiennych $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ i czasu t . Zachodzi zależność

$$\mathbf{x}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t) = \overset{\circ}{\mathbf{X}}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, 0) + \mathbf{u}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t)$$

określająca każde położenie cząstki, względem nieruchomego układu współrzędnych. Jeżeli w tym równaniu zmienne $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ ustalicz a zmieniać t , to otrzymamy trajektorię cząstki, która w chwili $t = 0$ miała współrzędne $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$. Jeżeli natomiast ustalicz czas t , to równanie opisuje przekształcenie obszaru V_0 zajmowanego przez ciało w chwili $t = 0$, w obszar V zajmowany w chwili t .

Można zakładając ciągłość ośrodka, wprowadzić taki zmienny w czasie układ współrzędnych krzywoliniowych, aby w całym procesie ruchu cząstek ośrodka współrzędne $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ opisywały jedną i tą samą cząstkę. Oznacza to, że określone współrzędne opisują zawsze tylko i wyłącznie jedną cząstkę materialną. Układ ten będziemy nazywali materialnym, substancjalnym czy też opisem Lagrange'a ruchu ośrodka. W czasie ruchu ośrodka wzajemne położenia cząstek są zmienne, a więc zmianom podlega również układ współrzędnych. Zmienne Lagrange'a ($\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t$) mówią o jednej i tej samej cząstce, która w chwili $t = 0$ miała współrzędne kartezjańskie $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$. Natomiast współrzędne Eulera (przestrzenne) mówią o różnych cząstkach, które w różnych chwilach pokrywają się z punktem przestrzeni określonym przez wektor \mathbf{x} . Opis w zmiennych przestrzennych wykorzystujemy głównie w opisie cieczy i gazów, natomiast zmienne materialne (Lagrange'a) używamy do opisu deformacji ciał stałych.

Założymy, że funkcje $x^l(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t)$ określające położenie cząstek względem nieruchomego układu współrzędnych są jednoznaczne i mają jednoznacznie określone funkcje odwrotne

$$\alpha^l = \alpha^l(x^1, x^2, x^3, t) \quad l=1,2,3$$

W konsekwencji, każdej cząstce ośrodka przed deformacją odpowiada tylko jedna cząstka po deformacji, a cząstki należące do jej otoczenia przed deformacją, będą również należały do otoczenia po deformacji. Ze względu na poczynione założenia co do ruchu ośrodka przemieszczenie \mathbf{u} można wyrazić również w zmiennych Eulera (przestrzennych) x^1, x^2, x^3, t i wyrazić wektor $\dot{\mathbf{X}}$ w zmiennych przestrzennych. Będzie

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u}(\alpha^1(x^1, t), \alpha^2(x^1, t), \alpha^3(x^1, t))$$

Okazuje się więc, że ruch ośrodka opisany może być zarówno we współrzędnych Lagrange'a jak i Eulera, przy czym przejście od współrzędnych Eulera do Lagrange'a związane jest z rozwiązaniem zadania Cauchy'ego dla układu trzech równań różniczkowych rzędu 1.

W analizowanym dalej procesie termodynamicznym należy wyróżnić współrzędne X^k cząstek na początku procesu narastania deformacji i przepływów ciepła. Względem tych współrzędnych opisywać będziemy zmiany energetyczne układu. W szczególnym przypadku współrzędne X^k i a^k mogą się pokrywać.

25. MATERIALNE I PRZESTRZENNE POCHODNE PÓL TENSOROWYCH

Analizować będziemy pochodne względem czasu pól wektorowych i tensorowych w zapisie materialnym i przestrzennym. Wyniki tego punktu pozwolą obliczyć pola prędkości przyspieszeń w ośrodku.

Pochodną materialną pola tensorowego \mathbf{K} określimy zgodnie z relacjami:

Określenie. Pochodną materialną pola tensorowego \mathbf{K} danego we współrzędnych materialnych (Lagrange'a) $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t)$ nazywamy wyrażenie

$$\mathbf{K}' = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} \quad (25.1)$$

obliczone przy ustalonych współrzędnych $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$.

Nieco inaczej obliczać będziemy pochodną materialną względem współrzędnych przestrzennych – zmiennych w czasie. Wówczas $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t) = \mathbf{K}(x^1(t), x^2(t), x^3(t), t)$.

Określenie. Pochodną materialną pola tensorowego \mathbf{K} danego we współrzędnych przestrzennych (Eulera) nazywamy wyrażenie

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \nabla \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \quad (25.2)$$

w którym $\mathbf{v} = dx^k / dt$ jest prędkością cząstki o trajektorii $x^k(t)$ przy czym cząstka jest ustalona.

Wprowadzając oznaczenie $\mathbf{K}' = D / Dt \mathbf{K}$ dla pełnej pochodnej po czasie uzyskujemy zależność

$$\frac{D\mathbf{K}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} + \nabla \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$$

mówiącą, że pełna pochodna po czasie jest równa sumie zwykłej pochodnej po czasie oraz pochodnej translacyjnej. Przytoczony wzór jest oczywiście słuszny również dla pól wektorowych czy też skalarowych.

Pochodną przestrzenną pola tensorowego \mathbf{N} określimy podobnie, ale w tym przypadku ustalimy punkt przestrzeni, przez który przebiegać będą różne cząstki i przypisane im wartości pola tensorowego \mathbf{N} . Pole to będzie się w czasie zmieniało i wyznaczeniem tych zmian (pochodnej przestrzennej) zajmiemy się teraz.

Określenie. Pochodną przestrzenną pola tensorowego \mathbf{N} danego we współrzędnych przestrzennych x^1, x^2, x^3 (Eulera) nazywać będziemy wyrażenie

$$\overset{\circ}{\mathbf{N}} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t}$$

W przypadku ustalonego ruchu ośrodka, kiedy w każdym punkcie przestrzeni wektory i tensory określające ruch ośrodka będą niezmiennie w czasie, to zachodzić będzie

$$\overset{\circ}{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$$

Tego rodzaju ruch najprościej opisywać zmiennymi przestrzennymi (Eulera).

Jako zastosowanie wprowadzonych pochodnych materialnych i przestrzennych pól tensorowych obliczymy pola wektorów prędkości i przyspieszeń w ośrodku. Wyznaczenie tych pól jest bardzo istotne zarówno w zagadnieniach dynamiki ciała odkształcalnego jak i w hydromechanice.

Określenie. Prędkość cząstki określa wektor materialnej pochodnej przemieszczenia $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ po czasie.

We współrzędnych Lagrange'a (materialnych) wektor \mathbf{u} określony jest zależnością

$$\mathbf{u}(\alpha^1 \alpha^2 \alpha^3 t) = \mathbf{x}(\alpha^1 \alpha^2 \alpha^3, t) - \mathbf{X}(\alpha^1 \alpha^2 \alpha^3, 0)$$

a więc wektor prędkości \mathbf{v} wynosi

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (25.3)$$

Określenie. Przyspieszenie cząstki określa wektor materialnej pochodnej prędkości po czasie.

Natomiast wektor przyspieszenia \mathbf{a} określony we współrzędnych materialnych dany jest relacją

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \quad (25.4)$$

We współrzędnych Eulera (przestrzennych) stosujemy reguły dotyczące obliczania pochodnej materialnej względem pola określonego we współrzędnych przestrzennych. W przypadku prędkości otrzymamy

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (25.5)$$

a dla przyspieszenia \mathbf{a} będzie

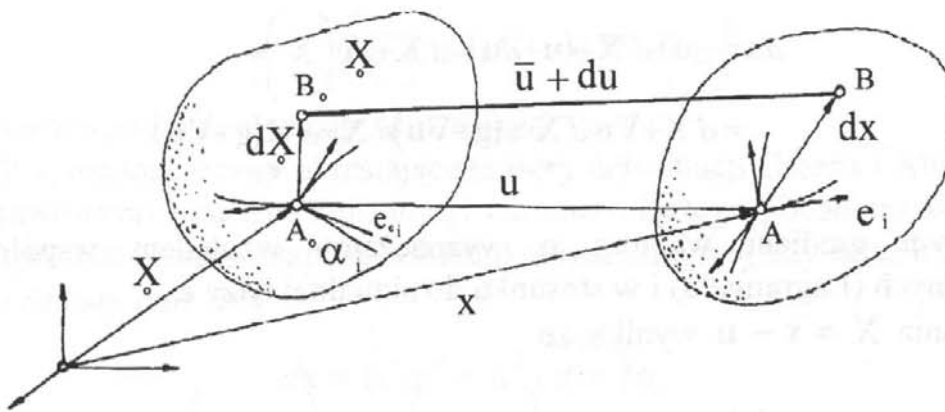
$$\mathbf{a} = \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (25.6)$$

przy czym gradienty $\nabla \mathbf{u}$ i $\nabla \mathbf{v}$ obliczamy względem zmiennych x^1, x^2, x^3 . W obu przypadkach występują składowe translacyjne pochodnych.

26. TENSORY DEFORMACJI

W tym punkcie podamy najważniejszą charakterystykę kinematyczną ośrodka odkształcalnego jaką jest tensor deformacji oraz tensor prędkości deformacji. Wyznaczenie tych wielkości dotyczy podstawowego zagadnienia dla całej kinematyki ośrodka ciągłego polegającego na wydzieleniu z całego ruchu ośrodka tej części, która związana jest bezpośrednio z naprężeniami i oddzielenia jej od sztywnego ruchu.

Wielkością tą jest właśnie tensor deformacji. Postępujemy tutaj w ten sposób, że analizujemy odległość między dwiema nieskończenie blisko siebie położonymi cząstkami $A B$ przed i po deformacji $A B$



Rys.22.

Z porównania odległości odcinków $\left| \begin{smallmatrix} A & B \\ \circ & \circ \end{smallmatrix} \right|$ i $\left| \overline{A B} \right|$ przed i po deformacji (rys.22) wydedukujemy postacie tensorów deformacji.

Przed przystąpieniem do właściwych wyliczeń musimy określić tensor metryczny \mathbf{g} dla ośrodka znajdującego się w konfiguracji początkowej (nie zdeformowanej) i konfiguracji zdeformowanej.

Określimy w tym celu rodzinę zależnych od czasu t wektorów bazowych relacją

$$\mathbf{e}_i(t) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \alpha^i} \quad (26.1)$$

która w chwili $t = 0$ przechodzi w bazę $\mathbf{e}_i(0) = \mathbf{e}_{\circ i} = \mathbf{j}_i$.

Wobec przyjętych wektorów bazowych, tensor metryczny, będzie również zależny od czasu i będzie miał postać

$$\mathbf{g} = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{g}(t) = g^{ij}(t) \mathbf{e}_i(t) \mathbf{e}_j(t)$$

w chwili t , oraz

$$\mathbf{g}_{\circ} = \mathbf{g}_{\circ}^{ij} \mathbf{e}_{\circ i} \mathbf{e}_{\circ j} = (\mathbf{e}_{\circ}^i \cdot \mathbf{e}_{\circ}^j) \mathbf{e}_{\circ i} \mathbf{e}_{\circ j}$$

w chwili $t = 0$ w konfiguracji początkowej – niezdeformowanej.

Z rysunku 22 wynika, że wektor $d\mathbf{x}$ można wyznaczyć z równania

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= -\mathbf{u} + d\mathbf{X} + (\mathbf{u} + d\mathbf{u}) = d\mathbf{X} + d\mathbf{u} \left(\mathbf{X} \right) = \\ &= d\mathbf{X} + \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{g} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X} = d\mathbf{X} (\mathbf{g} + \nabla \mathbf{u}) \end{aligned}$$

w którym gradient wektora \mathbf{u} wyznaczamy względem współrzędnych materialnych (Lagrange'a) i w stosunku do aktualnej bazy \mathbf{e}_i .

Z równania $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ wynika, że

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{x} - d\mathbf{u}(\mathbf{x}) = d\mathbf{x} - \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x} = \left(\mathbf{g} - \nabla \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \left(\mathbf{g} - \mathbf{u} \nabla \right)$$

Określony został tutaj przyrost wektora $d\mathbf{x}$ względem wektora $d\mathbf{x}$, przy czym gradient $\nabla \mathbf{u}$ wyliczamy w zmiennych przestrzennych (Eulera) ale względem bazy \mathbf{j}_i (początkowej).

W następnej kolejności obliczymy jak zmienia się długość ds. odcinka AB w czasie deformacji

$$\begin{aligned} (dS)^2 - \left(dS \right)^2 &= (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}) - d\mathbf{X} g d\mathbf{X} = d\mathbf{X} (\mathbf{g} + \mathbf{u} \nabla) (\mathbf{g} + \mathbf{u} \nabla) d\mathbf{X} - \\ &- d\mathbf{X} g d\mathbf{X} = d\mathbf{X} g d\mathbf{X} + d\mathbf{X} (\mathbf{g} + \mathbf{u} \nabla) d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \mathbf{u} \nabla g d\mathbf{X} + \\ &+ d\mathbf{X} \mathbf{u} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} g d\mathbf{X} = d\mathbf{X} 2\mathfrak{E} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

gdzie tensor

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla + \mathbf{u} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}) \quad (26.2)$$

nazywa się tensorem deformacji Greena. Tensor Greena był wyznaczony względem zmiennych materialnych (Lagrange'a).

Natomiast we współrzędnych przestrzennych (Eulera) uzyskujemy nieco odmienne zależności

$$\begin{aligned} dS^2 - dS^2 &= d\mathbf{x} d\mathbf{x} - d\mathbf{X} d\mathbf{X} = d\mathbf{x} d\mathbf{x} - \left[d\mathbf{x} \left(\mathbf{g} - \mathbf{u} \nabla \right) \right] \left[\left(\mathbf{g} - \nabla \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} \right] = \\ &= d\mathbf{x} d\mathbf{x} - d\mathbf{x} g \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x} + d\mathbf{x} g g d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \mathbf{u} \nabla d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \mathbf{u} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x} = \\ &= d\mathbf{x} 2\mathfrak{E} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

gdzie tensor

$$\mathring{\mathfrak{E}} = \frac{1}{2} \left(\mathring{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathring{\nabla} - \mathbf{u} \mathring{\nabla} \cdot \mathring{\nabla} \mathbf{u} \right) \quad (26.3)$$

nazywa się tensorem deformacji Almansiego.

Przytoczone wzory określające tensory deformacji Greena i Almansiego są podstawowymi miarami deformacji ośrodka ciągłego podanymi w zapisie absolutnym. Natomiast w zapisie wskaźnikowym otrzymujemy zależności

- na przyrosty $d\mathbf{x}$ i $d\mathring{\mathbf{X}}$

$$d\mathbf{x} = (d\alpha^k + u^k_{,j} d\alpha^j) \mathbf{e}_k$$

$$d\mathring{\mathbf{X}} = (dx^k + \mathbf{u}^k_{,j} dx^j) \mathbf{j}_k$$

- na tensor Greena (zmiennie materialne)

$$\begin{aligned} (dS)^2 - (d\mathring{S})^2 &= (u_{i,j} + u_{j,i} + u^l_{,j} u_{l,i}) d\alpha^i d\alpha^j = \\ &= 2 \mathring{\mathfrak{E}}_{ij} d\alpha^i d\alpha^j \end{aligned}$$

gdzie
$$\mathring{\mathfrak{E}}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u^l_{,j} u_{l,i}) \quad (26.4)$$

- na tensor Almansiego (zmiennie przestrzenne)

$$(dS)^2 - (d\mathring{S})^2 = \left(\mathring{u}_{i,j} + \mathring{u}_{j,i} - \mathring{u}^k_{,j} \mathring{u}_{k,i} \right) dx^i dx^j = 2 \mathring{\mathfrak{E}}_{ij} dx^i dx^j$$

gdzie
$$\mathring{\mathfrak{E}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathring{u}_{i,j} + \mathring{u}_{j,i} - \mathring{u}^k_{,j} \mathring{u}_{k,i} \right) \quad (26.5)$$

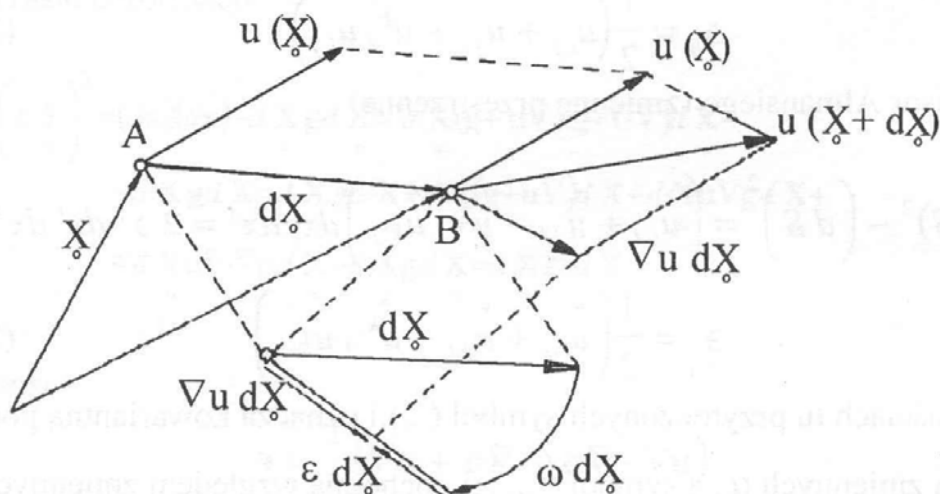
W zależnościach tu przytoczonych symbol $(\dots)_i$ oznacza kowariantną pochodną względem zmiennych α^i , a symbol $\left(\dots \right)_i$ pochodną względem zmiennych x^i .

Przedstawione relacje dotyczą ogólnego przypadku deformacji ośrodka. Natomiast dla ciał stałych proponuje się przyjąć opis we współrzędnych materialnych Lagrange'a. Z kolei korzystanie ze współrzędnych przestrzennych Eulera jest o tyle niekorzystne, że trudno w tym przypadku sformułować zagadnienie brzegowe, ponieważ określona jest w zasadzie tylko początkowa konfiguracja ośrodka.

27. MAŁE DEFORMACJE OŚRODKA

W tym punkcie analizować będziemy szczególny przypadek deformacji ośrodka, który prowadzi do tensora odkształcenia. Takie ujęcie zagadnień kinematyki ośrodka prowadzi do znacznych uproszczeń, szczególnie chętnie wykorzystywanych w teorii sprężystości, plastyczności, lepkosprężystości itp. Aby uzyskać odpowiednie formuły określające tensor małych deformacji rozpatrzmy znów nieskończenie blisko siebie położone punkty A i B z wektorami wodzącymi \underline{x} dla punktu A i $\underline{X} + d\underline{X}$ dla punktu B. W następnej kolejności zbadamy przyrost wektora przemieszczenia \underline{u} , ograniczając się jedynie do liniowego składnika - pierwszego wyrazu rozwinięcia. W wyniku takiego postępowania uzyskujemy zależność

$$\underline{u}(\underline{X} + d\underline{X}) = \underline{u}(\underline{X}) + \nabla \underline{u} \cdot d\underline{X}$$



Rys.23.

W której pierwszy wyraz po prawej stronie oznacza przemieszczenie punktu A, natomiast drugi jest iloczynem skalarnym gradientu przemieszczenia i przyrostu wektora \underline{x} . Z kolei przyrost wektora $\nabla \underline{u} \cdot d\underline{X}$ rozłożymy na część symetryczną i asymetryczną wprowadzając dwa nowe tensory

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla) \quad \underline{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} - \underline{u} \nabla)$$

Uzyskujemy więc zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\left(\underset{\circ}{\mathbf{X}}+d\underset{\circ}{\mathbf{X}}\right) &= \mathbf{u}\left(\underset{\circ}{\mathbf{X}}\right) + \left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}-\mathbf{u}\nabla) \right] d\underset{\circ}{\mathbf{X}} = \\ &= \mathbf{u}\left(\underset{\circ}{\mathbf{X}}\right) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)d\underset{\circ}{\mathbf{X}} + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}-\mathbf{u}\nabla)d\underset{\circ}{\mathbf{X}} = \\ &= \mathbf{u}\left(\underset{\circ}{\mathbf{X}}\right) + \omega d\underset{\circ}{\mathbf{X}} + \varepsilon d\underset{\circ}{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

W uzyskanych zależnościach wektor $\mathbf{u}\left(\underset{\circ}{\mathbf{X}}\right)$ należy traktować jako sztywne przesunięcie dla nieskończenie małego otoczenia cząstki A. Drugi składnik $\omega d\underset{\circ}{\mathbf{X}}$ jest sztywnym obrotem otoczenia względem cząstki A. Istotnie, z antysymetrycznym tensorem ω związany jest pseudowektor obrotu π określony zależnością $\pi = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$. Wreszcie ostatni składnik $\varepsilon d\underset{\circ}{\mathbf{X}}$ związany jest z małymi deformacjami otoczenia cząstki A. Nadmienić tu warto, że analizowane zagadnienie ma interpretację fizyczną, częściowo już zresztą przedstawioną. Zauważmy, że między cząstkami A i B napięcie może wystąpić jedynie wówczas, jeżeli cząstka B względem cząstki A wykona ruch różny od sztywnego obrotu i sztywnego przesunięcia.

Właśnie różnica między ruchem sztywnym a ruchem cząstki B musi generować stan naprężenia interesujący nas w zagadnieniach mechaniki. W przypadku tensora małych deformacji ε znika różnica między opisem materialnym i przestrzennym ruchu ośrodka. Własność tą wykażemy badając obrót wektora wywołany deformacją.

28. OBRÓT ODCINKA PRZY DEFORMACJI

Analizować będziemy obrót wektora $C \mathbf{n}$, gdzie: C jest dowolnym skalarom a \mathbf{n} jednostkowym, zorientowanym wektorem. Ogólność podejścia jest zagwarantowana tutaj dowolnością orientacji wektora \mathbf{n} .

W wyniku deformacji wektor $C \mathbf{n}$ przed deformacją doznał przyrostu $(\mathbf{g} + \nabla\mathbf{u}) C \mathbf{n}$ wynikającego z wzorów na przyrost $d\mathbf{x}$ wektora \mathbf{x} , analizowanych w punktach (A, B). Następnie obliczymy cosinus kąta zawartego między wektorami $C \mathbf{n}$ i $(\mathbf{g} + \nabla\mathbf{u}) C \mathbf{n}$, który wynosi

$$\frac{1 + \mathbf{n} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \omega \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{1 + \mathbf{n} \cdot 2\varepsilon \cdot \mathbf{n}}} = \cos(C \mathbf{n}, (\mathbf{g} + \nabla\mathbf{u}) C \mathbf{n})$$

Jeżeli teraz będziemy wymagali aby kąt ten był mały ($\cos 0^0 = 1$), to musimy narzucić dodatkowe warunki

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \ll 1, \quad |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}| \leq 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$$

W tym przypadku kąt obrotu jest dowolnie mały i zachodzi równość tensorów $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$. Jeżeli dodatkowo $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest tego samego rzędu co tensor sztywnych obrotów $\boldsymbol{\omega}$, to wartość cosinusa dąży do jedności a kąt obrotu do zera. Uzyskaliśmy w ten sposób przejście od ogólnego opisu do tensorów małych deformacji.

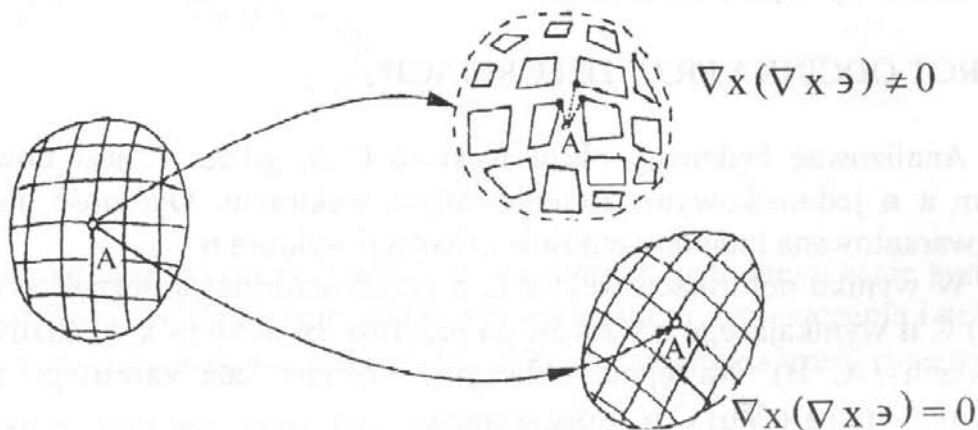
29. WARUNKI NIEROZDZIELNOŚCI

Przy różnych sformułowaniach zadań mechaniki ośrodka ciągłego może zajść praktyczna potrzeba ograniczenia rozważań tylko do tensorów deformacji lub innych charakterystyk deformacji bez analizy stanu przemieszczeń ośrodka. Sytuacja ta często wynika ze znacznych trudności jakie występują przy rozwiązywaniu zadań z wykorzystaniem przemieszczeń.

W związku z tym, że deformacja nie jest niezależna a wynika z określonych operacji wykonywanych na polu przemieszczeń powstaje pytanie: jakie ograniczenia należy nałożyć na deformacje, aby odpowiadały im rzeczywiste pola przemieszczeń.

W klasycznej teorii małych deformacji ograniczenia te noszą nazwę warunków nierozdzielności de Saint – Venanta i mogą być zapisane następująco

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$$



Rys.24.

Warunki te są matematycznym zapisem rozumowania przedstawionego na rysunku 24, w którym zmiana deformacji przebiegająca między dwiema konfiguracjami ośrodka (1) \rightarrow (2) jest tego rodzaju, że myślowy podział ośrodka w konfiguracji 1 na części, które poddajemy następnie działaniom sił wzajemnego oddziaływania i odkształceniom pozwala „zlepić” z tych części konfigurację 2 tegoż samego ośrodka. Aby „zlepienie” to było możliwe, tensor deformacji ϵ musi właśnie spełniać warunki nierozdzielności. Warto pamiętać, że w teorii małych deformacji tensor odkształceń ϵ jest wprost całą warunków nierozdzielności, traktowanych jako układ równań różniczkowych. Podamy teraz warunki nierozdzielności w jawnej postaci i w zapisie wskaźnikowym

$$\epsilon_{inr} \epsilon_{jms} \frac{\partial^2 \epsilon_{rs}}{\partial x_m \partial x_n} = 0$$

Po rozpisaniu otrzymujemy

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2\epsilon_{12,12}$$

$$\epsilon_{33,11} + \epsilon_{11,33} = 2\epsilon_{13,13}$$

$$\epsilon_{33,22} + \epsilon_{22,33} = 2\epsilon_{23,23}$$

$$\epsilon_{11,23} = -\epsilon_{23,11} + \epsilon_{12,13} + \epsilon_{13,12}$$

$$\epsilon_{22,13} = -\epsilon_{31,22} + \epsilon_{21,23} + \epsilon_{23,12}$$

$$\epsilon_{33,12} = -\epsilon_{12,33} + \epsilon_{32,13} + \epsilon_{31,23}$$

gdzie ϵ_{inr} jest symbolem permutacyjnym Ricciego, natomiast przecinek oznacza pochodną, np.

$$\epsilon_{12,23} \equiv \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3}$$

30. TENSOR PRĘDKOŚCI DEFORMACJI

W zadaniach hydromechaniki, przy opisie kinematyki we współrzędnych Eulera wygodnie jest korzystać z tensora prędkości deformacji. Mając na względzie ten cel określimy tensor prędkości deformacji. Ograniczymy się przy tym do tensora małych deformacji i rozpatrzmy wektor prędkości \mathbf{V} w punkcie określonym wektorem – promieniem \mathbf{x} oraz jego przyrostem $\mathbf{V}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ w punkcie, wyznaczonym przez wektor – promień $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. Ograniczając się do pierwszego wyrazu rozwinięcia - gradientu prędkości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \left[\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla) \right] d\mathbf{x} = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

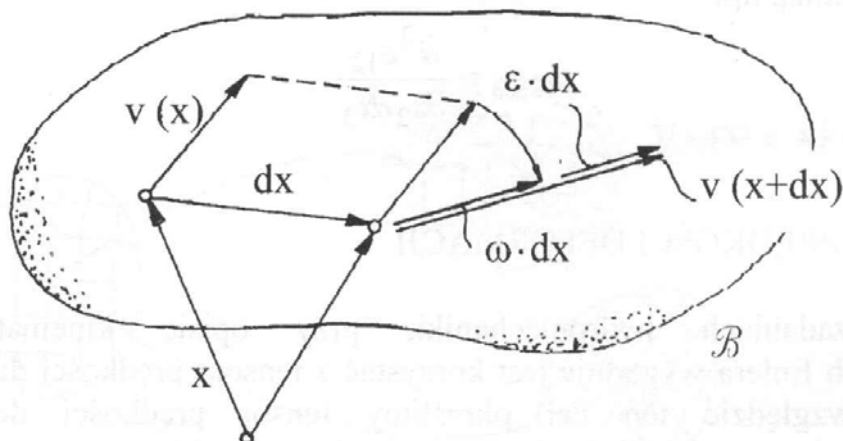
Jeżeli teraz wprowadzimy tensor prędkości deformacji ε i tensor prędkości sztywnego obrotu ω według relacji

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \quad \omega = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla) \quad (30.1)$$

to dla wektora prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ w punkcie określonym wektorem – promieniem $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ otrzymujemy wyrażenie

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \omega \cdot d\mathbf{x} + \varepsilon \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \pi \times d\mathbf{x} + \varepsilon \cdot d\mathbf{x}$$

W przytoczonym wzorze prędkość cząstki κ , $\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$ znajdującej się w nieskończenie małym otoczeniu cząstki κ określonej wektorem \mathbf{x} jest równa prędkości cząstki κ powiększonej o prędkość sztywnego obrotu z prędkością kątową π i o prędkość deformacji ε . W podanym wzorze warunek $\varepsilon = \mathbf{0}$ prowadzi wprost do sztywnych ruchów ośrodka, natomiast tensor $\varepsilon \neq \mathbf{0}$ określa prędkość zmian objętości i postaci nieskończenie małego otoczenia cząstki κ ,



Rys.25.

przy czym prędkości zmian objętości i postaci związane są z symetryczną częścią tensora ε oraz dewiatorem \mathbf{D} tensora prędkości deformacji.

Rozkład tensora prędkości na te dwie składowe jest następujący

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{D} \quad (30.2)$$

gdzie $\mathbf{I} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ jest pierwszym niezmiennikiem tensora prędkości deformacji, \mathbf{g} – tensorem metrycznym, a tensor dewiacji obliczamy z zależności

$$\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \quad (30.3)$$

Interesujący jest związek między tensorem deformacji a tensorami prędkości deformacji i tensorem przyrostu deformacji, który występuje w zadaniach teorii plastyczności. W pierwszej kolejności podamy formuły łączące tensory deformacji i prędkości deformacji.

Wektor przemieszczeń \mathbf{u} możemy przyjąć jako równy $\mathbf{v} dt$ w ramach teorii liniowej przy przyjęciu nieskończenie małego przyrostu czasu. Tak określoną wartość wektora przemieszczenia podstawimy do wzoru na tensor małych deformacji. Uzyskujemy tutaj zależność

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) = \frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{v} dt) + (\mathbf{v} dt) \nabla]$$

Natomiast tensor prędkości $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ obliczamy pamiętając, że

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

czyli

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\frac{1}{2} [\nabla (\mathbf{v} dt) + (\mathbf{v} dt) \nabla]}{dt} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla)$$

Zwróćmy uwagę, że w przypadku ogólnym zachodzi $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq D\boldsymbol{\varepsilon}/Dt$, ponieważ operator D/Dt jest nieprzemienny z operatorem gradientu ∇ . Przemienność natomiast zachodzi w przypadku wyznaczania tensora małych deformacji, wtedy bowiem składnik konwekcyjny w gradiencie znika i uzyskujemy

$$\frac{D}{Dt} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla \frac{\partial}{\partial t} [\dots] = \frac{\partial}{\partial t} \nabla [\dots]$$

Zachodzą więc w tym przypadku relacje

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}$$

które są prawdziwe w teorii małych deformacji.

Pośrednio z tensorem prędkości deformacji związany jest tensor przyrostów deformacji, przy wyznaczaniu którego korzystamy z wektora prędkości \mathbf{v} zgodnie z relacją

$$\tilde{d}\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$$

Następnie określamy tensor przyrostu deformacji $\tilde{d}\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\tilde{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}[\nabla(\tilde{d}\mathbf{u}) + (\tilde{d}\mathbf{u})\nabla] = \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{v} dt) + (\mathbf{v} dt)\nabla]$$

który wyznaczamy w stosunku do ciągu stanów chwilowych konfiguracji ośrodka i deformacji. Stosujemy w tych obliczeniach opis materialny.

Określimy teraz związek między tensorem przyrostu deformacji a tensorem prędkości.

Związek ten ma postać następującą

$$\tilde{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} dt$$

Natomiast tensor przyrostu $\tilde{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ oraz różniczka tensora deformacji pokrywają się jedynie w przypadku teorii małych deformacji.

Zachodzi wtedy relacja

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \tilde{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon} dt$$

Podane w tym podrozdziale tensory w pełni charakteryzują deformację ośrodka ciągłego. Warto zwrócić uwagę, że w przytoczonych określeniach szczególne miejsce zajmuje tensor małych deformacji. W tym przypadku opis deformacji ośrodka zarówno we współrzędnych materialnych jak i przestrzennych prowadzi do tych samych wyników. Ponadto prostota wyznaczania dalszych charakterystyk deformacji ośrodka jak np. tensora prędkości deformacji czy też tensora przyrostów powodują, że w wielu zagadnieniach technicznych zadowolamy się teorią małych deformacji. Teoria ta wraz z liniowymi związkami fizycznymi np. liniowa sprężystość, lepkość itp. prowadzi do najprostszych zagadnień analizowanych w mechanice ośrodka ciągłego. Zagadnienia te charakteryzują się najprostszymi, bo liniowymi operatorami zadań początkowo - brzegowych.

Rozdział VI

BILANSE W MECHANICE OŚRODKA CIĄGŁEGO

We współczesnym ujęciu mechaniki ośrodka ciągłego postuluje się prawdziwość równań bilansów zapisanych w postaci sumy całek po objętości całego układu. Równania te noszą nazwę praw zachowania i przyjmowane są a priori w mechanice ośrodka ciągłego. Słuszności tych równań nie wykazuje się, uznaje się natomiast, że są one prawdziwe dla każdego procesu deformacji i temperatury w ramach określonej klasy zjawisk.

W większości zadań mechaniki można ograniczyć się do postulowania słuszności zasad zachowania masy, pędu, krętu (momentu pędu), energii i nierówności entropii. Warto przy tym zwrócić uwagę, że każdorazowa forma bilansów w jakich zapisane są prawa zachowania, określa tylko ustaloną klasę zagadnień. Dla przykładu zasada zachowania energii dla klasycznych zadań mechaniki zawiera tylko pracę mechaniczną, natomiast już dla termosprężystości ta sama zasada, a dokładniej bilans energii, musi być uzupełniony przez źródła i strumienie energii wynikające z przepływu ciepła w ośrodku. Przykład ten jest tylko ilustracją ogólniejszej zasady głoszącej, że postulowane w opisie różnych zjawisk zasady zachowania powinny być indywidualnie przyjmowane w każdym przypadku. Po prostu trudno podać ogólną postać zasad zachowania, która objęłaby wszystkie możliwe warianty powiązania różnych pól występujących w mechanice ośrodka ciągłego.

Ogólne ujęcie różnorodnych zagadnień występujących w mechanice wymaga użycia do ich opisu równań termodynamiki ośrodka ciągłego. To właśnie na terenie termodynamiki możliwa jest prawidłowa analiza złożonych procesów występujących w mechanice ośrodka ciągłego. Warto podkreślić, że na użytek występujących w mechanice zagadnień dokonano dosyć gruntownej przebudowy samej termodynamiki. W pierwszej kolejności sformułowano podstawy ogólnej, nierównowagowej termodynamiki.

W tak ujętej termodynamice musiano znaleźć wspólne miejsce dla nierównowagowych procesów mechanicznych, cieplnych, dyfuzyjnych itp. W klasycznej termodynamice wprowadza się pojęcie parametrów stanu. Stan termodynamiczny układu określony jest wtedy, kiedy znamy zbiór jednoczesnych wartości funkcji zdolnych do zmiany wielkości fizycznych zwanych parametrami stanu. Parametrami tymi są np. temperatura, objętość itp. Między parametrami stanu występują zależności funkcyjne, które w klasycznej termodynamice noszą nazwę równań stanu.

Przykładem równania stanu są równania Clapeyrona dla gazu doskonałego lub prawo Hooke'a w liniowej teorii sprężystości. W efekcie, w równowagowej termodynamice do analizy zachowania się układów wprowadza

się aparat formalny równań różniczkowych. Typowym przykładem może być służyć równanie określające zmianę energii wewnętrznej ρV w układzie

$$d\rho U = \rho T dS - \sigma_{\circ} d\varepsilon + Y \cdot dx$$

w którym T jest temperaturą, ρS – entropią. W tym ujęciu termodynamiki wprowadza się uogólnione siły (temperaturę, naprężenia, Y) oraz uogólnione współrzędne (entropię, tensor odkształceń, x). Właśnie na tej drodze zostały uzasadnione równania teorii sprężystości. Natomiast analiza procesów nierównowagowych zmusza do odejścia od klasycznego ujęcia zagadnień termodynamicznych. Wprowadza się w miejsce funkcyjnych postaci równań stanu, zależności funkcjonalne określone na historiach procesu, a równania różniczkowe zostają zastąpione złożonymi zależnościami operatorowymi. Podobną ewolucję przeszły również zasady termodynamiki, szczególnie zasada zachowania energii i nierówność entropii.

Współczesne ujęcie tych zasad ma charakter globalnych zależności i jest na tyle ogólne, aby ująć znacznie bardziej złożone procesy aniżeli analizowane w równowagowej termodynamice. Takiemu ujęciu (ogólnemu i jednolitemu) zasad zachowania w postaci bilansów poświęćmy kolejny podrozdział.

31. POCHODNA MATERIALNA CAŁKI

Formułując zasady zachowania w postaci całkowej musimy umieć wyznaczać pochodne całek oznaczonych dotyczących zmieniających się w czasie ruchu pól i objętości. Sytuację tutaj komplikuje fakt, że przy pełnym uwzględnieniu kinematyki ośrodka jego konfiguracja ulegnie zmianie, a więc zmienne będą również granice całkowania. Tym samym pierwotna objętość ośrodka $V(t=0) = V_0$ przejdzie z upływem czasu i w zmienionej konfiguracji w objętość $V(t) = V$. Jedynie w przybliżonym zapisie ruchu ośrodka w zakresie teorii małych deformacji można przyjąć, że obszar zajęty przez ośrodek jest stały w czasie ruchu. Podejście takie stosowane jest w liniowych geometrycznie teoriach ośrodka ciągłego.

Przed przystąpieniem do analizy właściwego zadania tj. obliczania materialnej pochodnej całki oznaczonej, określimy tensor metryczny w konfiguracji pierwotnej ($t = 0$) i aktualnej w czasie ruchu ośrodka. Po określeniu tych uzupełniających wykład wielkości, obliczymy jakobian przekształcenia. Znajomość jakobianu przekształcenia oraz jego pochodnej pozwala obliczyć pochodną całki (materialną), którą wykorzystamy przy ogólnym formułowaniu zasad zachowania dla ośrodka ciągłego.

Niech \mathbf{X} będzie wektorem określającym pierwotne położenie cząstki w ośrodku, \mathbf{x} – położenie aktualne, a \mathbf{u} – będzie wektorem przemieszczenia określonym relacją $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$.

Wprowadzimy lokalne bazy układu współrzędnych odnoszące się do pierwotnej $\mathbf{j}_k = \partial \mathbf{X} / \partial \alpha^k$ i aktualnej $\mathbf{e}_k = \partial \mathbf{x} / \partial \alpha^k$ konfiguracji ośrodka.

Tensory metryczne w obu konfiguracjach wynoszą odpowiednio

$$\mathbf{g}_0 = g_{ij}^0 \mathbf{j}_i \mathbf{j}_j = g_{ij}^0 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \left(\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^0 \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \left(\mathbf{j}_i^0 \cdot \mathbf{j}_j^0 \right) \mathbf{j}_i \mathbf{j}_j$$

w chwili $t = 0$, oraz

$$\mathbf{g} = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \left(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

w chwili t .

Zwróćmy uwagę, że zmiana tensora metrycznego charakteryzuje ruch ośrodka ciągłego.

Określmy teraz jacobian przekształcenia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha^i, t)$ zależnością

$$J = \det \left[\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^k} \right]$$

Jacobian J przekształcimy następnie przy wykorzystaniu algebraicznego dopełnienia A^i_l wyznacznika określającego jacobian J – tak, aby uzyskać wyrażenie $J \delta^i_r$

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^l} \right) A^l_r = J \delta^i_r$$

Wyznamy z kolei pochodną jacobianu dJ/dt , przyjmując, że zachodzi

$$\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^l} A^l_r = J \delta^i_r \Rightarrow J = \frac{\partial x^r}{\partial \alpha^l} A^l_r$$

Uzyskujemy

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x^r}{\partial \alpha^l} \right) A^l{}_r = \frac{\partial v^r}{\partial \alpha^l} A^l{}_r = \frac{\partial v^r}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \alpha^l} A^l{}_r = \frac{\partial v^r}{\partial \alpha^l} \delta^l{}_r J = \frac{\partial v^r}{\partial \alpha^r} J$$

czyli

$$\frac{DJ}{Dt} = J \nabla \mathbf{v} \quad (31.1)$$

Określona została tutaj zmiana nieskończenie małego przyrostu objętości w czasie ruchu ośrodka z prędkością \mathbf{v} .

Niech \mathbf{A} oznacza pole tensorowe zapisane w zmiennych przestrzennych (Eulera) x^1, x^2, x^3, t . Obliczymy teraz całkę oznaczoną $\int_V \mathbf{A} dV(t)$, pola \mathbf{A} .

Zauważmy, że całka ta ze względu na zmienność pola \mathbf{A} względem czasu jest także funkcją czasu. Całkę tę wyznaczymy w sposób analogiczny jak w klasycznej analizie całkę Riemanna, pamiętając jednak, że zmianom w czasie podlega nie tylko pole \mathbf{A} , lecz także objętość $V(t)$.

Określając pochodną całki $\int_V \mathbf{A} dV$ przejdziemy do zmiennych $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ które

łączy ze zmiennymi x^i zależność $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$. Natomiast objętość $V(t)$ przejdzie w objętość V_0 związaną ze zmiennymi $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$.

Uzyskujemy związek między obu całkami w obu zapisach

$$\int_{V(t)} \mathbf{A} dV(t) = \int_{V_0} \mathbf{A} \left(x^1(\alpha^i, t), x^2(\alpha^i, t), x^3(\alpha^i, t), t \right) J dV_0$$

który jest o tyle istotny, że w prawej stronie tej równości tylko pole tensorowe \mathbf{A} i jacobian J są funkcjami czasu, natomiast objętość V_0 jest ustalona. W związku z tym, aby obliczyć pochodną całki $D/Dt \int_V \mathbf{A} dV$, wystarczy obliczyć

pochodną całki w ustalonych granicach oraz pochodną jacobianu zgodnie z wzorem. Uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \mathbf{A}(x^i, t) dV(t) &= \int_{V_0} \frac{D}{Dt} [\mathbf{A}(x^i, t) J(t)] dV_0 = \int_{V_0} \left(J(t) \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} \frac{DJ}{Dt} \right) dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \left(J \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} J \nabla \mathbf{v} \right) dV_0 \end{aligned} \quad (31.2)$$

Wykorzystaliśmy tutaj wzór na pochodną jacobianu przekształcenia.

Powrócimy teraz na powrót do zmiennych x^i wykorzystując znajomość jacobianu przekształcenia. Zachodzi

$$\int_{V_0} \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \right) J dV_0 = \int_{V(t)} \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \right) J dV(t)$$

Otrzymany wzór jest obowiązujący przy obliczaniu pochodnych materialnych z całek po polach skalarowych, wektorowych i tensorowych. Weźmy teraz pod uwagę wzór określający pełną pochodną pola \mathbf{A} , to wówczas dla funkcji podcałkowej w ostatnim równaniu będzie prawdziwa relacja

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

z której po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa – Ostrogradskiego otrzymujemy

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{A} dV = \int_V \left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \mathbf{A} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{A} dV + \int_A (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA$$

Ostatecznie pełna pochodna określona jest wzorem

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{A} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{A} dV + \int_A (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA \quad (31.3)$$

gdzie V jest zmienną objętościową, \mathbf{n} – wektorem normalnej zewnętrznej do powierzchni A (zmiennej), która ogranicza objętość V , $\partial/\partial t$ - oznacza różniczkowanie po czasie przy ustalonej objętości.

Zapisana w tej postaci pochodna całki stanowić będzie formalną podstawę w trakcie ogólnego formułowania bilansów w ośrodku ciągłym.

32. BILANS MASY

Wykorzystując zależności z poprzedniego podrozdziału, a w szczególności wzór pozwalający na obliczenie całki z pola tensorowego, przy zmieniającej się w czasie ruchu konfiguracji ciała, sformułujemy zasady zachowania masy. Nadmieniamy, że analizować będziemy przypadek braku wymiany masy między układem (ciałem) a otoczeniem. Punktem wyjściowym rozważań będzie więc stwierdzenie, że całka z gęstości masy ρ przy zmieniającej się w czasie ruchu konfiguracji ciała będzie wielkością stałą. Oznacza to, że słuszna jest zależność

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho(x^i, t) dV = 0 \quad (32.1)$$

Posiłkując się wzorem na obliczenie pochodnej z całki pola tensorowego uzyskujemy w szczególności

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho(x^i, t) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV(t) = 0$$

Ostatnia z równości, wobec dowolnego wyboru objętości prowadzi do równania

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Uzyskana równość nosi nazwę lokalnej postaci bilansu masy lub równania ciągłości. Po przekształceniu można ją przedstawić następująco

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (32.2)$$

gdzie \mathbf{v} jest wektorem prędkości deformacji czyli materialną pochodną po czasie wektora przemieszczenia \mathbf{u} cząstek ośrodka.

Z równania powyższego wynikają dwa istotne przypadki szczególne, a mianowicie: przepływ nieściśliwy określa warunek $\rho = \text{const.}$, czyli $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$, a przepływ stacjonarny warunek $\partial \rho / \partial t = 0$.

Przeanalizujemy teraz bardziej złożony przypadek bilansu masy, w wieloskładnikowej mieszaninie ciał. Składnikami tymi mogą być zarówno cząstki ciała stałego, jak cieczy czy też gazu. Zgodnie z postulatem ciągłości ośrodka przyjmujemy, że każda z jego cząstek będzie się składała z elementów w ilości równej składnikom mieszaniny. Przykładem szczególnym mieszaniny mogą być zjawiska filtracji cieczy w odkształcalnym ośrodku porowatym. Zagadnienia te są podstawowe m.in. w mechanice gruntów i są ujmowane tam terminem konsolidacji. Innym przykładem szczególnym mieszaniny mogą być zjawiska dyfuzji cieczy lub gazu w ciele stałym. We wszystkich podanych tu przykładach cechą wspólną jest występowanie kilku wzajemnie między sobą przemieszczających się składników. Sytuacja jest więc bardziej złożona niż w jednorodnym ośrodku.

Gęstość ośrodka ρ będzie sumą gęstości składników zgodnie z relacją

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_m \quad (32.3)$$

Oprócz tego wprowadzimy pojęcie prędkości centrum masy $\rho \mathbf{v}$

$$\rho \mathbf{v} = \rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \rho_m \mathbf{v}_m \quad (32.4)$$

gdzie \mathbf{v}_m i ρ_m oznaczają gęstość i prędkość m -tego składnika mieszaniny.

Przyjmując postulat o braku wymiany masy między układem a otoczeniem możemy wymagać, aby całość mieszaniny oraz każdy z jego składników spełniał równania ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

oraz

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (\text{nie sumować!}) \quad (i=1,2,3,\dots,n)$$

Wprowadzimy teraz pojęcie udziału i -tego składnika mieszaniny c_i w całej mieszaninie, zgodnie z relacją

$$c_i = \frac{\rho_i}{\rho}$$

Otrzymamy wówczas dla i -tego składnika zależność

$$\rho \frac{Dc_i}{Dt} + \nabla[\rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v})] = 0 \quad (32.5)$$

Wektor $\rho_i(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i)$ nazywany bywa również strumieniem masy i -tego składnika mieszaniny

$$\mathbf{j}_i = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \quad (32.6)$$

Rozważmy przypadek szczególny dwuskładnikowy mieszaniny, której cząstki przesuwają się względem siebie bardzo wolno. Będą wówczas prawdziwe upraszczające przyjęcia

$$(\rho \mathbf{v} \cong \rho_1 \mathbf{v}_1, \quad \rho_2 \mathbf{v}_2 = \rho \mathbf{v} + \rho_2 \Delta \mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{j}_2 = \rho_2 \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{j}_1 = 0$$

Przyjeliśmy upraszczająco, że drugi składnik mieszaniny dosyć wolno przemieszcza się względem szkieletu, traktowanego jako pierwszy składnik mieszaniny. Zauważmy ważny jakościowo fakt, a mianowicie strumień masy \mathbf{j}_2 , dyfundującego składnika jest zależny od prędkości przemieszczającego się składnika.

Uzyskujemy w efekcie równanie bilansu postaci

$$\rho \frac{Dc_2}{Dt} + \nabla \mathbf{j}_2 = r_2 \quad (32.7)$$

gdzie c_i – koncentracja i – tego (drugiego) składnika mieszaniny ($i = 2$), \mathbf{j}_2 – strumień masy tegoż składnika, r_2 – źródło masy.

Strumień masy \mathbf{j}_i określamy jako ilość masy i – tego składnika przepływającego przez powierzchnię jednostkową w jednostce czasu. Natomiast źródło masy r_i jest to ilość masy i – tego składnika wyprodukowana w jednostce czasu i objętości mieszaniny.

Globalny bilans masy dla przepływu dyfuzyjnego i – tego składnika ma postać następującą

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho c_i dV = \int_V r_i dV \quad (32.8)$$

Bilans ten jest słuszny dla każdego ze składników oraz dla ich sumy.

33. BILANSE PĘDU, KRĘTU, ENERGII I ENTROPII

Podamy w tym punkcie w postaci globalnej bilanse pędu, krętu, energii i entropii, które staną się podstawą konsystentnej teorii ośrodka ciągłego dla różnych powiązań występujących w nim pól i rodzajów ciał.

W szczególności, po uzupełnieniu równań bilansów przez równania tworzące, zależne od fizycznej natury ciał, uzyskamy podstawę do opisu zachowania się materiałów sprężystych, plastycznych czy też różnych rodzajów cieczy. Takie postępowanie typowe dla mechaniki ośrodka ciągłego odniosło wiele sukcesów i przyczyniło się do znacznego rozwoju samej teorii jak również jej zastosowań.

Na tej właśnie drodze bada się powiązania przepływów pędu, krętu z przepływami cieplnymi, dyfuzyjnymi itp., czy też polami magnetycznymi towarzyszącymi różnym zjawiskom.

W pierwszej kolejności jednak obliczymy całkę

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{A} dV$$

w której ρ jest gęstością ośrodka (sumą gęstości) a \mathbf{A} dowolnym polem tensorowym. Będzie zachodziło

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{A} dV &= \int_V \left[\frac{D(\rho \mathbf{A})}{Dt} + (\rho \mathbf{A}) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \\ &= \int_V \left[\frac{D\rho}{Dt} \mathbf{A} + \rho \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \rho \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_V \left\{ \mathbf{A} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right] + \rho \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right\} dV \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym znika, ponieważ z równań ciągłości wynika, że $D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Uzyskujemy więc istotny dla naszych rozważań wynik

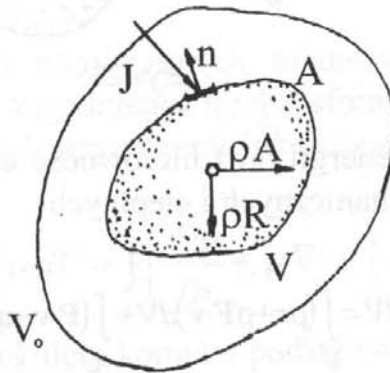
$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{A} dV = \int_V \rho \frac{D\mathbf{A}}{Dt} dV \quad (33.1)$$

który dalej wykorzystamy przy omawianiu bilansów.

W postaci ogólnej wymienione tutaj bilanse mają identyczną budowę wynikającą z tego, że zmiana określonej wielkości fizycznej np. pędu, energii czy też entropii może nastąpić tylko na skutek dopływu, czyli w wyniku istnienia strumienia lub też w efekcie produkcji źródeł. W ogólnym przypadku będzie więc zachodziło (rys.26.)

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{A} dV = \int_V \rho \mathbf{R} dV - \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \quad (33.2)$$

gdzie $\rho \mathbf{R}$ – intensywność produkcji źródła (na jednostkę objętości), \mathbf{J} – strumień dopływającej wielkości, obliczony na jednostkę powierzchni i czasu, \mathbf{n} – wektor normalnej zewnętrznej do powierzchni A .



Rys.26. Bilans – przypadek ogólny

Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt dowolnego wyboru objętości V zawartej w objętości ośrodka V .

W dalszym ciągu podamy kilka różnych możliwych sformułowań bilansów w MOC. Rzecz jasna każda szczególna postać tych bilansów określa konkretną klasę powiązań pól występujących w mechanice.

W pierwszej kolejności podamy ogólną postać bilansów, w której wystąpią już powiązania przepływów cieplnych z przepływami pędu w ośrodku ciągłym. Powiązania tego rodzaju leżą u podstaw termosprężystości, termoplastyczności itp.

Wzmiankowane bilanse mają postać

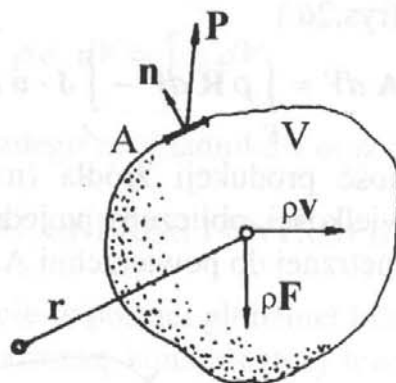
- bilans pędu

$$(I) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_A \mathbf{P} dA$$

- bilans krętu (moment pędu)

$$(II) \quad \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) dV + \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{P} dA$$

Przedstawione bilanse mają podobną budowę i stanowią podstawę wszystkich (niepolarnych) czysto mechanicznych teorii ośrodka ciągłego. Źródłem pędu i krętu jest tu siła masowa $\rho \mathbf{F}$ a strumieniem siła powierzchniowa \mathbf{P} działająca na brzegu A ciała (rys.27.).



Rys.27.

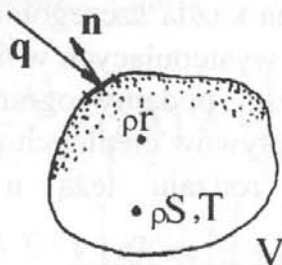
Podamy teraz bilanse energii oraz nierówność entropii w postaci pozwalającej na powiązanie pól mechanicznych i cieplnych

- bilans energii

$$(III) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_V (\rho r + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dV + \int_A (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA$$

- nierówność entropii

$$(IV) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho S dV \geq \int_V \frac{\rho r}{T} dV - \int_A \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dA$$



Rys.28.

W przytoczonych bilansach U jest gęstością energii wewnętrznej, $1/2 \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ - energią kinematyczną, r - źródłem ciepła na jednostkę masy i

czasu, \mathbf{q} – strumieniem ciepła, S – entropią jednostki masy a T – temperaturą absolutną (Kelvina).

W pierwszym bilansie źródło i strumienie energii zostały wzbogacone o składniki mechaniczne – odpowiednio $(\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ i $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v})$. Znak minus przy składniku $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ strumieni oznacza, że za dodatni będziemy uważali dopływ ciepła do ośrodka (zwiększającego jego energię). Natomiast nierówność entropii oznacza tylko tyle, że przyrost entropii (globalny) musi być większy od produkcji źródeł entropii $\rho r / T$ oraz strumienia dopływającej entropii $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} / T$. Przyjmujemy przy tym, że źródło i strumień entropii zależą tylko od przepływów cieplnych. W tej postaci nierówność entropii została sformułowana przez Truesdella i Toupiną w 1960r.

W przypadku procesów odwracalnych nierówność entropii przechodzi w równość, natomiast dla nieodwracalnych słuszna jest nierówność. Bardziej złożone procesy przepływów cieplno – dyfuzyjnych w ośrodku powodują, że zarówno źródła jak i strumienie energii i entropii zostają odpowiednio wzbogacone.

Oprócz przytoczonych tutaj czterech bilansów dotyczących strony mechanicznej i energetycznej zagadnienia trzeba sformułować jeszcze bilans masy w ośrodku. Bilans ten był przytoczony już w poprzednim punkcie i ma postać

$$(\varepsilon_0) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0$$

Uzyskaliśmy w ten sposób zamknięty komplet podstawowych równań bilansów w ośrodku ciągłym.

Podamy jeszcze szczególną postać bilansu energii dotyczącą tylko przepływów cieplnych. Bilans ten ma wtedy postać następującą

$$\frac{D}{Dt} u dV = \int_V \rho r dV - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA$$

natomiast bilans entropii nie ulegnie w tym przypadku żadnej zmianie.

W tradycyjnym ujęciu podstaw mechaniki ośrodka ciągłego w miejsce bilansów analizuje się i mówi o prawach zachowania a więc prawie zachowania masy, pędu, energii i entropii. Proponowane tutaj ujęcie praw zachowania w postaci globalnych bilansów daje możliwość jednoznacznego i jasnego określenia występujących w bilansie pól. Ponadto jego forma uświadamia nam ważny fakt, że przy każdorazowym badaniu związków różnych pól występujących w mechanice należy zbadać ich wzajemne powiązania również na etapie bilansów.

34. RÓWNANIA RUCHU

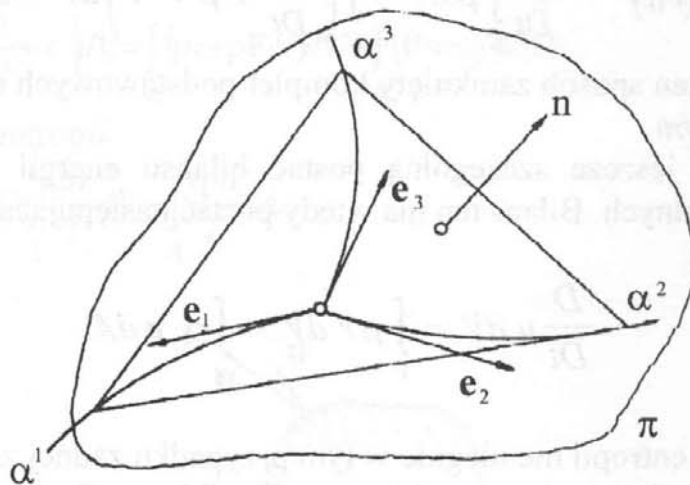
Przeanalizujemy równania ruchu w ośrodku ciągłym, które będą wynikały z zasady zachowania pędu i krętu. Analizować więc będziemy mechaniczną część ogólnych problemów mechaniki ośrodka ciągłego. W trakcie tej analizy korzystać będziemy z lokalnej postaci bilansu masy, natomiast nie będziemy się posilkować bilansami energii i entropii. Sytuacja ta jest typowym przykładem czysto mechanicznego ujęcia zadań mechaniki ośrodka ciągłego. W trakcie wyprowadzania równań ruchu będziemy musieli określić lokalną postać strumienia pędu i krętu, a w konsekwencji wprowadzić wektor i tensor naprężenia.

Rozpatrzmy w tym celu równowagę nieskończenie małego czworościanu wydzielonego z ośrodka w ustalonej chwili czasowej. Następnie nasze rozważania będą takie jak przeprowadzone wcześniej w p.14, a polegające na przyporządkowaniu każdemu symetrycznemu tensorowi o walencji dwa oraz określonej wektorem normalnym \mathbf{n} , płaszczyzny π , wektora \mathbf{b} .

W wyniku otrzymaliśmy relację

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b}$$

gdzie \mathbf{A} – symetryczny tensor, \mathbf{n} – wektor normalnej płaszczyzny π , \mathbf{b} – poszukiwany wektor.



Rys.29.

Interpretując wektor \mathbf{b} jako wektor intensywności obciążeń zewnętrznych \mathbf{P} (strumień pędu) a wektor \mathbf{n} jako normalnej do brzegu, otrzymujemy zależność

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \quad (34.1)$$

nazywaną w mechanice związkami Cauchy'ego. W zależności tej σ jest tensorem naprężenia, określonym następująco

$$\sigma = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \sigma_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$$

Tensor ten jest symetryczny wobec czego zachodzi

$$\sigma^* = \sigma \quad (\sigma^{ij} = \sigma^{ji})$$

Słuszność związków Cauchy'ego ($\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}$) wykażemy w ten sposób, że znajdziemy współrzędne wektora naprężenia związane z układem wersorów \mathbf{e}_i , czyli

$$\sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \rightarrow (\sigma^{ij} \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j$$

Następnie znajdujemy rzut tegoż wektora na oś współliniową z wektorem $\mathbf{n}(n_j)$. Będzie zachodziła relacja

$$\mathbf{s}_{(n)} = \mathbf{P} = n_j (\sigma^{ij} \mathbf{e}_i) = (\sigma^{ij} n_j) \mathbf{e}_i = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

potwierdzająca związek między wektorem strumienia \mathbf{P} i tensorem naprężenia σ . Należy podkreślić, że istnieją przypadki ośrodków np. niektóre dielektryki, w których tensor naprężenia nie jest symetryczny. Zagadnienia te prowadzą do tzw. momentowych (mikropolarnych) teorii ośrodka ciągłego. Teoria tych ośrodków została zapoczątkowana pracami braci Cosseratów z 1909 roku.

Wykorzystując wzór Cauchy'ego możemy równania bilansu pędu w ośrodku przedstawić następująco

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_A \mathbf{P} dA = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_A \sigma \cdot \mathbf{n} dA$$

a następnie do ostatniej z całek zastosować twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Będzie wówczas prawdziwa zależność

$$\int_V \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \sigma \right) dV = 0$$

która prowadzi wprost do równań ruchu (I prawo Cauchy'ego)

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (34.2)$$

mających podstawowe znaczenie w mechanice ośrodka ciągłego.

Natomiast z zasady zachowania krętu otrzymujemy zależność

$$\sigma^* = \sigma$$

która nosi nazwę II prawa ruchu Cauchy'ego.

Tensor naprężenia w ustalonym układzie współrzędnych przedstawimy w postaci macierzy zawierającej jego współrzędne

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ \sigma^{31} & \sigma^{32} & \sigma^{33} \end{bmatrix} \quad (34.3)$$

np. współzrędną σ_{22} tensora σ określa związek

$$\sigma_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \sigma \cdot \mathbf{e}_2$$

Podobnie określimy inne współzrędnę tensora naprężeń.

Wektor naprężeń \mathbf{P} względem płaszczyzny określonej przez normalną \mathbf{n} można rozłożyć na składową normalną do płaszczyzny π oraz składową styczną

$$\mathbf{P} = \overset{\circ}{\sigma} \mathbf{n} + \overset{\circ}{\hat{\sigma}} \boldsymbol{\tau} \quad (34.4)$$

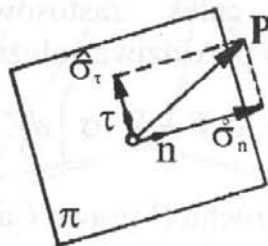
gdzie $\overset{\circ}{\sigma}$ i $\overset{\circ}{\hat{\sigma}}$ są rzutami wektora \mathbf{P} na osie wyznaczone przez wektory \mathbf{n} i $\boldsymbol{\tau}$ - normalny i styczny do płaszczyzny π .

Miary rzutów $\overset{\circ}{\sigma}$ i $\overset{\circ}{\hat{\sigma}}$ wektora naprężeń \mathbf{P} określimy zgodnie ze wzorami (rys.30.)

$$\overset{\circ}{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n} = \sigma^{ij} n_i n_j,$$

$$\overset{\circ}{\hat{\sigma}} = \sqrt{(P)^2 - \left(\overset{\circ}{\sigma}\right)^2}$$

gdzie P jest miarą wektora naprężeń \mathbf{P} .



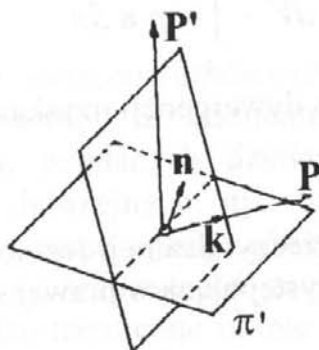
Rys.30.

Wśród wielu orientacji płaszczyzn π istnieje pewna szczególna orientacja określona przez wektor \mathbf{k} , w której wektor naprężenia \mathbf{P} i wektor normalnej \mathbf{k} są współliniowe (rys.31.). Wówczas tensor naprężenia σ ma tylko

trzy niezerowe współzrędnę $\left(\overset{\circ}{\sigma}_1, \overset{\circ}{\sigma}_2, \overset{\circ}{\sigma}_3\right)$ nazywane naprężeniami głównymi.

W bazie określonej współzrędnymi wektorów $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ wzajemnie prostopadłych, tensor σ ma postać

$$\sigma = \overset{\circ}{\sigma}_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1 + \overset{\circ}{\sigma}_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2 + \overset{\circ}{\sigma}_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3 \quad (34.5)$$



Rys.31.

Wśród wszystkich możliwych wartości naprężeń normalnych, określonych przez różne położenia płaszczyzn π , wartości naprężeń głównych są ekstremalne. Podobnie naprężenia tnące uzyskują wartości ekstremalne

$$\hat{\sigma}_1 = \pm \frac{\overset{\circ}{\sigma}_2 - \overset{\circ}{\sigma}_3}{2}, \quad \hat{\sigma}_2 = \pm \frac{\overset{\circ}{\sigma}_3 - \overset{\circ}{\sigma}_1}{2}, \quad \hat{\sigma}_3 = \pm \frac{\overset{\circ}{\sigma}_1 - \overset{\circ}{\sigma}_2}{2}$$

na płaszczyznach wyznaczonych przez wektory $a\mathbf{k}_i + b\mathbf{k}_j$ ($i \neq j$) określające kierunki główne tensora σ .

Z tensora naprężenia σ można wydzielić symetryczną część oraz dewiator naprężenia. Otrzymujemy w tym przypadku zależność

$$\sigma = \frac{1}{3} I_\sigma \mathbf{g} + \mathbf{D}_\sigma \quad (34.6)$$

gdzie $I_\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ – pierwszy niezmiennik tensora naprężenia, \mathbf{g} – tensor metryczny, \mathbf{D} – tensor dewiacji $\mathbf{D}_\sigma = \sigma - 1/3 I_\sigma \mathbf{g}$

35. RÓWNANIA RUCHU CIECZY IDEALNEJ

Będziemy analizowali równania ruchu cieczy idealnej z pozycji mechaniki ośrodka ciągłego. Zasadniczą różnicę między zachowaniem się cieczy idealnej a ciałem stałym będziemy upatrywali w wyłącznym występowaniu ciśnienia hydrostatycznego w cieczy. Ciecz zatem w spoczynku nie może przenosić naprężeń tnących. W tym przypadku strumień pędu \mathbf{P} , w bilansie pędu musi mieć postać następującą

$$\mathbf{P} = -p \mathbf{n}$$

gdzie p – jest ciśnieniem hydrostatycznym niezależnym od \mathbf{n} .

Będzie zatem

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV - \int_A -p \mathbf{n} dA \quad (35.1)$$

Wykorzystując twierdzenie o dywergencji uzyskamy

$$-\nabla p + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

równania Eulera przepływu cieczy idealnej. Jest to nieliniowe równanie z uwagi na pochodną konwekcyjną występującą w prawej stronie równań Eulera.

Istotnie zachodzi

$$-\nabla p + \rho \mathbf{F} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \quad (35.2)$$

Oczywiście we wnętrzu cieczy idealnej tensor naprężenia określony jest zależnością

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{g} \quad (35.3)$$

Komplet równań ruchu cieczy idealnej należy uzupełnić o dodatkowe równania, tj. równania tworzące postaci

$$F(p, \rho, T) = 0 \quad (35.4)$$

podające związek między gęstością ρ cieczy, ciśnieniem hydrostatycznym p oraz temperaturą T . Typowymi równaniami tworzącymi dla cieczy są np.. równania Clapeyrona dla cieczy i gazów.

Oprócz równań tworzących będziemy korzystać z równań ciągłości

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Przypadkiem szczególnym może być równanie dla cieczy nieściśliwej określonej przez warunek

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{oraz} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

lub równanie dla stacjonarnych ($D\mathbf{v} / Dt = \mathbf{0}$) przepływów cieczy idealnej

$$-\nabla p + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Równania przepływów cieczy będą jeszcze omawiane w dalszych punktach opracowania. Tutaj ograniczono się tylko do omówienia wniosków wynikających z zasad zachowania masy i pędu dla cieczy idealnej.

Rozdział VII

TEORIA RÓWNAŃ TWORZĄCYCH

Rozdział ten będzie poświęcony omówieniu najważniejszych własności fizycznych materiału. Zauważmy, iż odmienność reakcji dwóch ciał o identycznych konfiguracjach, poddanych działaniu identycznych wpływów mechanicznych, cieplnych, dyfuzyjnych itp. wynika z odmiennych cech materiałów. Właśnie tę odmienność opisują równania tworzące. Równania te muszą ujmować złożoność i różnorodność zachowań się materiałów oraz spełniać warunki ograniczające narzucone na nie przez podane w poprzednim podrozdziale zasady zachowania. Istotne jest tu także stwierdzenie czy materiał ma pamięć tzn. czy przeszłe stany naprężeń, przepływów cieplnych itp. mają wpływ na aktualne wartości tensora naprężeń, czy też strumieni ciepła i entropii. Zagadnienia te będą w tym rozdziale analizowane.

Badając ograniczenia nakładane na równania tworzące należy stwierdzić, że największe ograniczenia narzuca nierówność wzrostu entropii (Clausiusa–Duhema). To właśnie nierówność wzrostu entropii daje podstawę do określenia równań tworzących charakteryzujących różne materiały.

Postępujemy tu w ten sposób, że wykorzystując wszystkie bilanse, otrzymujemy w wyniku przekształceń pewną finalną nierówność, która ma być prawdziwa dla każdego procesu zmiany deformacji oraz przepływu ciepła. Z warunku tego otrzymamy właśnie poszukiwane równania tworzące. Ograniczymy się przy tym do równań konstytutywnych dla ciał sprężystych liniowych i nieliniowych oraz równań sprzężonej termosprężystości, a następnie podamy równania dla cieczy lepkiej. Naszkicujemy również wywód równań dla liniowej lepkosprężystości. Podkreślić należy uniwersalność zawartą w tym postępowaniu, która pozwala z jednolitego punktu widzenia omawiać tak różne problemy. Istotnie, otrzymujemy z jednej strony równania cieczy lepkiej, z drugiej natomiast rozszerzone równania przewodnictwa cieplnego.

Właśnie uniwersalność w podejściu do tak odległych problemów jest dowodem dojrzałości mechaniki ośrodka ciągłego, do rozwiązywania trudnych problemów interdyscyplinarnych jakie wyrastają na obrzeżach mechaniki i innych działach fizyki fenomenologicznej.

36. OGRANICZENIA DLA RÓWNAŃ TWORZĄCYCH

Równania tworzące muszą spełniać ograniczenia wynikające z zasad zachowania oraz zasad obiektywności. Wśród zasad zachowania najistotniejsze ograniczenia narzucane są przez nierówność entropii. Ogólne postępowanie polega tutaj na sprowadzeniu wszystkich równań bilansów praw zachowania do jednej nierówności, która musi być prawdziwa dla każdego procesu. Z warunków spełnienia tej nierówności wyznaczmy równania tworzące określające procesy deformacji i przepływy ciepła w ośrodku. Najczęściej wyprowadza się równania tworzące – postulując postać energii wewnętrznej, lub energii swobodnej.

Przytoczmy tutaj komplet równań bilansów podanych w poprzednim punkcie pracy

- bilans masy ośrodka jednoskładnikowego

$$(I) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0$$

- bilans masy tego składnika i – układu wieloskładnikowego

$$(I') \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho c^{(i)} dV = \int_V r^{(i)} dV \quad (\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}^{(i)})$$

- bilans pędu

$$(II) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_A \mathbf{P} dA$$

- bilans krętu

$$(III) \quad \frac{D}{Dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) dV + \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{P} dA$$

- bilans energii

$$(IV) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(U + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_V (\rho r + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dV + \int_A (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA$$

- nierówność entropii

$$(V) \quad \frac{D}{Dt} \int_V \rho S dV \geq \int_V \frac{\rho r}{T} dV - \int_A \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dA$$

Właściwości podanych tutaj bilansów dla procesów termomechanicznych były omawiane w poprzednim podrozdziale. Będziemy więc badali ograniczenia jakie narzucają bilanse na postaci równań tworzących poszczególnych procesów. W tym celu przedstawimy bilanse w postaci lokalnej a następnie dokonamy algebraicznych przekształceń na otrzymanych równaniach uzyskując finalną nierówność procesu, tzw. nierówność rezydualną.

Lokalne postacie bilansów są następujące

- bilans masy

$$(I') \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- bilans pędu

$$\int_V \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{F} \right) dV = \int_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA \Rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} - \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) dV = 0$$

w zapisie lokalnym

$$(II') \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

- bilans krętu

$$(III') \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}$$

- bilans energii

$$\int_V \left(\rho \frac{DU}{Dt} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} - \rho r - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\epsilon} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right) dV = 0$$

czyli

$$(IV') \quad \rho \frac{DU}{Dt} = \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{F} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\epsilon} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r$$

Wyrażenie zawarte w nawiasie jest równe jest zeru na podstawie zasady zachowania pędu. Otrzymujemy więc w efekcie końcowym zależność

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\epsilon} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad 2\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla$$

która jest lokalną postacią zasady zachowania energii

- nierówność wzrostu entropii

$$\int_V \left(\rho \frac{DS}{Dt} - \frac{\rho r}{T} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right) dV \geq 0$$

czyli

$$(V') \quad \rho \frac{DS}{Dt} - \frac{\rho r}{T} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{q} T - (\nabla T) \cdot \mathbf{q}}{T^2} \geq 0$$

Należy zauważyć, że bilans masy wykorzystaliśmy już w każdym z pozostałych równań bilansów wprowadzając operator D/Dt pod znak całki.

Podobnie wykorzystaliśmy równania bilansu pędu i krętu przy sformułowaniu ostatecznej postaci równania zachowania energii. Połączymy teraz równania energii i bilansu entropii, eliminując źródło i strumień ciepła $\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}$ z obu wyrażeń

$$\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho \frac{DU}{Dt} - \sigma \circ \epsilon$$

$$T \rho \frac{DS}{Dt} - \rho \frac{DU}{Dt} + \sigma \circ \epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

Otrzymaliśmy więc finalną postać nierówności rezydualnej

$$-\rho \frac{DU}{Dt} + T \rho \frac{DS}{Dt} + \sigma \circ \epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (36.1)$$

która musi być spełniona przez każdy rzeczywisty proces deformacji i przepływ cieplny w ośrodku. Nierówność ta jest jednocześnie jednym z najistotniejszych ograniczeń nakładanych przez termodynamikę procesu na postać równań tworzących.

Otrzymaną nierówność przekształcimy nieco otrzymując zależność

$$-\rho dV + \rho T dS + \sigma \circ d\epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

którą wykorzystamy do wywodu równań tworzących w różnych teoriach ośrodka ciągłego.

Ostatecznie uzyskujemy następujące lokalne równania bilansu energii i finalnej nierówności

$$\rho \frac{DU}{Dt} - \sigma \circ \epsilon + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r = 0$$

$$(\rho DU - \sigma \circ d\epsilon + \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho r)$$

$$-\rho \frac{DU}{Dt} + T \rho \frac{DS}{Dt} + \sigma \circ \epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

$$\rho dU + T \rho dS + \sigma \circ d\epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (36.2)$$

gdzie

$$d\epsilon = \epsilon dt, \quad \epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla), \quad dS = \frac{DS}{Dt} dt, \quad dU = \frac{DU}{Dt} dt$$

z których wynikają ograniczenia dla równań tworzących mechaniki. Warto podkreślić, że z pierwszego równania otrzymamy również równania przepływu ciepła w sprzężonej termosprężystości.

Nadmienić również należy, że równania tworzące powinny być niezmiennicze względem sztywnych przesunięć, sztywnych obrotów i przesunięć skali czasowej. Problemy te nie będą jednak omawiane. Sygnalizujemy je jednak ze względu na to, że wyznaczają one istotne ograniczenia. Zauważmy tylko, że inaczej przy sztywnych przesunięciach i obrotach będzie się transformowała funkcja wektorowa, np. pole gradientu temperatury w stosunku do transformacji pola tensorowego czy też skalarowego przy tych samych ruchach sztywnych.

37. CIAŁO SPRĘŻYSTE

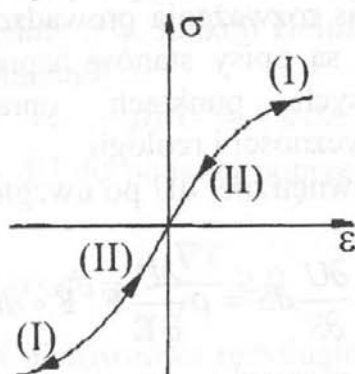
Równania ruchu wynikające z zasad zachowania pędu i krętu są równaniami ważnymi dla ośrodków wykonywanych z różnych materiałów, podobnie jak i pozostałe równania mechaniki wynikające tylko i wyłącznie z zasad zachowania. Natomiast równania określające wartości współrzędnych tensora naprężenia σ w zależności od pozostałych kinematycznych i termodynamicznych zmiennych określają typ ośrodka ciągłego. Najprostszym tego rodzaju równaniem są związki fizyczne dla ciała sprężystego. Związki te wyprowadzimy w tym punkcie przyjmując, że analizowany ośrodek sprężysty jest jednorodny.

Podstawowymi zmiennymi występującymi przy analizie ciał sprężystych będą pola tensorów naprężenia σ , odkształcenia ϵ oraz pola skalarowe temperatury T , entropii ρS i gęstości ρ . Przyjmujemy upraszczająco, że temperatura w czasie procesu pozostaje niezmienną i będziemy badali zmiany naprężenia σ wywołane tylko zmianami odkształceń ϵ .

Zmiany naprężeń (przyrost) przy zmianach deformacji noszą nazwę procesu obciążenia. Natomiast ciąg odkształceń przy malejącym naprężeniu będziemy nazywali procesem odciażenia.

Jeżeli ciało posiada tę własność, że droga obciążenia i odciażenia w czasie procesu się pokrywają to mówimy, że ciało jest sprężyste, niezależnie od tego, czy zależność ta jest liniowa czy też nieliniowa. W pierwszym przypadku mówimy o ciele liniowo sprężystym (ciele Hooke'a), natomiast w drugim przypadku o ciele nieliniowo sprężystym.

Wymienione tu przypadki ciał sprężystych przeanalizujemy wspólnie na podstawie przytoczonych poprzednio rozważań.



Rys.32. Procesy obciążenia (I) i odciażenia (II) w ciele sprężystym

Punktem wyjścia analizy będzie nierówność rezydualna

$$-\rho dU + \rho T dS + \sigma \circ d\epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (37.1)$$

Występująca w tej nierówności energia wewnętrzna ρU jest funkcją tensora odkształcenia Greena \mathbf{E} i entropii S , $\rho U = \rho U(\mathbf{E}, S)$. Tensory odkształceń \mathbf{E} i $\boldsymbol{\varepsilon}$ odpowiadające materialnemu \mathbf{E} i przestrzennemu opisowi ruchu związane są zależnością

$$d\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{lub} \quad dE_{KL} = X_{k;K} X_{l;L} d\varepsilon_{kl} \quad (37.2)$$

Związek między tensorami $d\varepsilon_{kl}$ a dE_{KL} $\left(2E_{KL} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial x_k}{\partial X_L} - \delta_{KL} \right)$ wynika z relacji

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial x_k}{\partial X_L} - \delta_{KL} \right) &= \frac{\partial v_k}{\partial X_K} \frac{\partial x_k}{\partial X_L} + \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial v_k}{\partial X_L} = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial x_i}{\partial X_L} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial x_i}{\partial X_L} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (37.3)$$

stąd

$$dE_{KL} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \frac{\partial x_i}{\partial X_L} d\varepsilon_{kl}$$

W przypadku szczególnym, kiedy $\frac{\partial x_k}{\partial X_L} \rightarrow \delta_{kl}$ tensory E_{kl} i ε_{kl} są takie same. Uproszczą się wówczas rozważania prowadzone w tym punkcie. W tej uproszczonej formie podane są opisy stanów naprężeń i przepływów ciepła prezentowane w następnych punktach opracowania a dotyczące termosprężystości teorii plastyczności i reologii.

Różniczka energii wewnętrznej dU po uwzględnieniu zależności ρU od \mathbf{E} wynosi

$$\rho dU = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} d\mathbf{E} + \rho \frac{\partial U}{\partial S} dS = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} + \rho \frac{\partial U}{\partial S} dS$$

Podstawiając wyrażenie na różniczkę energii wewnętrznej do nierówności resydualnej otrzymamy

$$-\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho \frac{\partial U}{\partial S} dS + \rho T dS - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

stąd

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \right) \circ d\boldsymbol{\varepsilon} + \left(T - \frac{\partial U}{\partial S} \right) \rho dS - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (37.4)$$

Jeżeli będziemy wymagać, aby otrzymana nierówność była prawdziwa dla każdego procesu odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ oraz zmian entropii S to wyrażenie znajdujące się w obu nawiasach powinno być równe zero. Istotnie, tylko w tym przypadku nierówność ta będzie spełniona niezależnie od wyboru $\boldsymbol{\varepsilon}$ i T .

Wykorzystując ten warunek otrzymamy równania tworzące ciała sprężystego

$$\sigma = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad (37.5)$$

Jeżeli ponadto analizować będziemy przypadek procesu izentropowego, kiedy $dS = 0$ to podane poprzednio warunki pozwalają określić równania tworzące materiału sprężystego w procesie izentropowym.

$$\sigma = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

W przytoczonych zależnościach $\mathbf{F}(X_{i,j})$ jest materialnym gradientem deformacji, \mathbf{E} – tensorem odkształceń Greena a $\boldsymbol{\varepsilon}$ – tensorem odkształceń Almansięgo.

Z nierówności rezydualnej pozostaje składnik

$$-\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{q} \cdot \nabla T \leq 0 \quad (37.6)$$

który dla procesu odwracalnego, a takimi są właśnie deformacje i naprężenia w ciele sprężystym musi zniknąć.

Otrzymamy stąd warunek, że $\nabla T = 0$.

Przedstawimy z kolei inny, równoważny opis ośrodka sprężystego, bazujący na energii swobodnej tzw. funkcji Helmholtza ρA . Energię tą łączy z energią wewnętrzną ρU zależność

$$\rho U = \rho A + \rho T S \quad \Rightarrow \quad -\rho dU = -\rho dA - \rho S dT - \rho T dS$$

Podstawiając różniczkę $-\rho dU$ do podanej poprzednio nierówności rezydualnej uzyskamy

$$-\rho dA - \rho S dT + \sigma \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (37.7)$$

Występująca w tej postaci nierówności rezydualnej energia swobodna ρA jest funkcją deformacji \mathbf{E} i temperatury T . Różniczką $\rho A(\mathbf{E}, T)$ ma postać

$$-\rho dA = -\rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \circ d\mathbf{E} - \rho \frac{\partial A}{\partial T} dT = -\rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho \frac{\partial A}{\partial T} dT$$

Podstawiając różniczkę ρdA do nierówności rezydualnej otrzymamy

$$-\rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} + \sigma \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho \frac{\partial A}{\partial T} dT - \rho S dT - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

stąd

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \right) \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \left(\rho S + \rho \frac{\partial A}{\partial T} \right) dT - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

W wyniku podobnego rozumowania jak przytoczono poprzednio w odniesieniu do energii wewnętrznej i wymagania aby nierówność rezydualna była spełniona dla każdego wyboru odkształceń i temperatur uzyskujemy

$$\sigma - \rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \left(\sigma_{kl} = \rho \frac{\partial A}{\partial E_{kl}} X_{K,k} X_{L,l} \right), \quad S = - \frac{\partial A}{\partial T} \quad (37.8)$$

Podobnie jak poprzednio bez zmian pozostaje warunek $\nabla T = 0$.

Przytoczyliśmy tu dwa różne warianty równań tworzących dotyczących ciała sprężystego. W pierwszym z nich jako zmienne niezależne w procesie termomechanicznym występują entropia i tensor odkształceń, zaś w drugim temperatura i tensor odkształceń. Pierwszy z nich dotyczy materiału sprężystego związanego z procesem izentropowym, zaś w drugim analizowany jest przypadek izotermiczny.

Naszkuje jeszcze postępowanie w przypadku ciała sprężystego podlegającego procesom starzenia, np. wskutek oddziaływania otoczenia. Założymy dalej że zmiany te opisuje pewien tensorowy parametr Λ . Oczywiście przypadkiem szczególnym parametru Λ może być pole wektorowe lub skalarowe. Równania fizyczne będą w tym przypadku miały postać

$$\rho A = \rho A(\mathbf{E}, T; \Lambda), \quad \sigma = \sigma(\mathbf{E}, T; \Lambda), \quad \rho S = \rho S(\mathbf{E}, T; \Lambda)$$

Obliczając różniczkę dA

$$\begin{aligned} \rho \cdot dA &= \rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \circ d\mathbf{E} + \rho \frac{\partial A}{\partial T} dT + \frac{\partial A}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda = \\ &= \rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} + \rho \frac{\partial A}{\partial T} dT + \frac{\partial A}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda \end{aligned}$$

po podstawieniu jej do nierówności rezydualnej otrzymamy

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \right) \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho \left(S + \frac{\partial A}{\partial T} \right) dT - \frac{\partial A}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

Nierówność ta powinna być spełniona dla każdego rzeczywistego wyboru deformacji w warunkach izotermicznych $dT = 0$. Otrzymamy stąd równanie tworzące określające tensor naprężeń

$$\sigma = \frac{\partial A(\mathbf{E}, T; \Lambda)}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad dT = 0 \quad (37.9)$$

oraz nierówność

$$- \frac{\partial A}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

spełnienie warunku $\nabla T = 0$ prowadzi do relacji

$$-\frac{\partial A}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda \geq 0 \quad (37.10)$$

z którego wynika, że iloczyn skalarowy pochodnej energii swobodnej podług parametru Λ i przyrost tegoż parametru musi być niedodatni.

Przytoczyliśmy tu podstawowe ograniczenia termodynamiczne nakładane na ciało sprężyste podlegające procesom starzenia się. Podane w tym punkcie rozważania dotyczą ogólnego przypadku oddziaływań naprężeń i przepływów ciepła w ciele sprężystym. Uwzględniliśmy w nim całą złożoność opisu procesu termomechanicznego. Natomiast w następnych punktach omawiać będziemy szczególne ujęcia kinematyki ośrodka w których zaniknie różnica między materialnym a przestrzennym opisem ruchu.

38. LINIOWA SPRĘŻYSTOŚĆ

Przykładem szczególnym analizowanego w punkcie poprzednim ciała sprężystego jest ciało liniowo – sprężyste, zwane również ciałem Hooke'a. Równania fizyczne tego ciała stanowią podstawę teorii sprężystości, a w wersji mocno uproszczonej także wytrzymałości materiałów i klasycznej mechaniki budowli. Ze względu na zastosowania równań ciała Hooke'a omówimy je nieco szerzej, traktując je jako najprostszą wersję mechaniki ciała odkształcalnego.

Rozważania rozpoczniemy od podania postaci energii swobodnej i entalpii odpowiadającej ciału liniowo – sprężystemu. Będziemy przy tym zakładać, że pole temperatur w ośrodku jest stałe zarówno w czasie jak i przestrzeni, a rozważania ograniczymy do izotropowego i jednorodnego ośrodka.

Wobec uczynionych założeń energia swobodna w tym szczególnym przypadku ma postać formy kwadratowej

$$\rho U = a I_{(\epsilon)}^2 + b II_{(\epsilon)} \quad (38.1)$$

zależnej od niezmienników tensora odkształcenia czyli wielkości niezależnych od przyjętego układu współrzędnych. Niezmiennik II_{ϵ} wyraża się przez pierwszy niezmiennik I_{ϵ} następująco

$$2 II_{\epsilon} = I_{(\epsilon)}^2 - tr(\epsilon \circ \epsilon) = (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})^2 - \epsilon^{ij} \epsilon_{ij}$$

uzyskujemy zatem

$$\rho U = a (\epsilon^i_i)^2 + \frac{b}{2} \left[(\epsilon^i_i)^2 - \epsilon^i_j \epsilon_i^j \right] = \frac{1}{2} \lambda (\epsilon^i_i)^2 + \mu \epsilon^i_j \epsilon_i^j$$

W ostatnim wyrażeniu wprowadzono, tzw. stałe Lamego λ , μ określone wzorami

$$\lambda = 2a + b, \quad 2\mu = -b$$

Następnie wyznaczmy tensor naprężenia σ ograniczając się przy tym do teorii małych odkształceń. Będzie

$$\sigma = \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \Rightarrow \sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda I_\varepsilon \mathbf{g}$$

lub w zapisie wskaźnikowym, w układzie współrzędnych prostokątnych

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (38.2)$$

Składowe tensora σ_{ij} mają następujące wartości

$$\sigma_{11} = 2\mu \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{kk} \Rightarrow \sigma_{11} = (2\mu + \lambda) \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{22} = 2\mu \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{kk} \Rightarrow \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_{11} + (2\mu + \lambda) \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{33} = 2\mu \varepsilon_{33} + \lambda \varepsilon_{kk} \Rightarrow \sigma_{33} = \lambda \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + (2\mu + \lambda) \varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu \varepsilon_{12} = 2\mu \varepsilon_{21}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2\mu \varepsilon_{13} = 2\mu \varepsilon_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu \varepsilon_{23} = 2\mu \varepsilon_{32}$$

Natomiast w teorii sprężystości równania fizyczne podawane są w jednej z trzech wersji, a mianowicie

$$(i) \quad \sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda I_\varepsilon \mathbf{g}, \quad (I_\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

związki odwrotne

$$(ii) \quad \varepsilon = 2\mu' \sigma + \lambda' I_\sigma \mathbf{g}, \quad (I_\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

gdzie

$$\mu' = \frac{1}{\mu}, \quad (2\mu' + 3\lambda') = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}$$

lub

$$(iii) \quad I_\varepsilon = 3K I_\sigma, \quad \mathbf{D}_\varepsilon = \frac{1}{2G} \mathbf{D}_\sigma$$

Pierwsze z równań będziemy wykorzystywali przy wyprowadzeniu równań przemieszczeniowych teorii sprężystości, natomiast drugie mogą być użyte do wywodu równań naprężeniowych. Ostatnia wersja równań fizycznych zawiera osobno równania łączące części symetryczne obu tensorów oraz zależności łączące dewiatory. Równania tej postaci będą dla nas łącznikiem między równaniami liniowymi i nieliniowymi w zakresie sprężystym oraz sprężysto-plastycznym.

Nadmienić należy, że z elementarnych rozważań nad stanem odkształcenia przeprowadzanych w wytrzymałości materiałów wynikają równania fizyczne

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})], & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2G} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G} \sigma_{23}\end{aligned}$$

które w sposób zwarty zapisane są w układzie współrzędnych prostokątnych zależnością

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (38.3)$$

a w dowolnym układzie będzie

$$\varepsilon = \frac{1}{2G} \sigma + \left(K - \frac{1}{2G} \right) I_{\sigma} \mathbf{g}$$

Warto zwrócić uwagę, że w przypadku liniowej teorii sprężystości cechy materiału określone są przez dwie stałe materiałowe, przy czym najczęściej korzysta się ze stałych: modułu sprężystości (Younga) E oraz współczynnika Poissona ν .

Pozostałe stałe, takie jak moduł odkształcenia objętościowego K , moduł odkształcenia poprzecznego G wyrażają się przez E i ν zależnościami

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad K = \frac{1-2\nu}{E} \quad (38.4)$$

Nadmieniamy, iż z warunku dodatności potencjału ρU wynika, że

$$E > 0 \quad i \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

Podamy teraz wywód równań przemieszczeniowych teorii sprężystości w postaci ogólnej, słusznej przy parametryzacji przestrzeni E_3 i ciała dowolnym układem współrzędnych.

Podstawowy układ równań zagadnienia w tym przypadku zawiera

- równania ruchu

$$\nabla \sigma + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \quad \sigma^* = \sigma, \quad \mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad (38.5)$$

- równania geometryczne

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \quad (38.6)$$

- równania fizyczne

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda I_{\varepsilon} \mathbf{g} \quad (38.7)$$

W wyniku podstawienia równań geometrycznych do fizycznych i po wyliczeniu dywergencji tensora naprężenia otrzymujemy zależności

$$\begin{aligned} \nabla [\mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) + \lambda \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) \mathbf{g}] + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \\ \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{F} &= \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \end{aligned} \quad (38.8)$$

a w układzie współrzędnych krzywoliniowych w zapisie wskaźnikowym uzyskamy

$$\mu g^{ij} g^{kl} u_{j;kl} + (\lambda + \mu) g^{ik} g^{lj} u_{j;kl} + \rho F^i = \rho \frac{Dv^i}{Dt}$$

lub

$$\mu g^{kl} u^i{}_{;kl} + (\lambda + \mu) g^{ik} u^j{}_{;kl} + \rho F^i = \rho \frac{Dv^i}{Dt}$$

Do otrzymanych równań dołączymy warunki brzegowe, określające przemieszczenia w konfiguracji odniesienia oraz siły działające na brzegu ciała. Oprócz tego poprawnie postawione zadanie musi zawierać również informacje o ruchu w ustalonej chwili w postaci warunków początkowych. Zadania tak postawione stanowią podstawowe zagadnienia początkowo – brzegowe analizowane w teorii sprężystości. Przyjmowane w ramach tej teorii założenia upraszczające odnośnie kinematyki doprowadzają do zależności

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

czyli

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Ostatecznie należy znaleźć całość układu trzech równań różniczkowych – cząstkowych

$$\mu \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (38.9)$$

określających pole przemieszczeń $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, u_3]$ w ośrodku i spełniające warunki początkowo – brzegowe zadania. W następnej kolejności wyznacza się współrzędne tensora odkształcenia ϵ oraz naprężenia σ . W obu przypadkach wykonujemy jedynie operacje algebraiczne i różniczkowanie na współrzędnych wektora przemieszczenia \mathbf{u} . Końcowym etapem rozwiązywania zadań teorii sprężystości jest bowiem określenie współrzędnych tensora naprężenia w ośrodku.

Na tym zakończymy rozważania dotyczące izotermicznej teorii sprężystości i przeanalizujemy wzajemne powiązania przepływów ciepła i pędu w liniowym ciele sprężystym. W zagadnieniach tych należy wyprowadzić równanie przewodnictwa cieplnego wzbogacone o człon zawierający wpływ

pola mechanicznego (tensora odkształceń) na przepływ ciepła. Podobnie, w równaniach fizycznych liniowego ciała sprężystego pojawi się składnik związany z polem temperatur. Zadania powiązanych pól cieplnych i mechanicznych prowadzą do termosprężystości i będą omawiane w następnym podrozdziale.

39. TERMOSPŘĘŻYSTOŚĆ

Analizować będziemy z punktu widzenia termodynamiki ośrodka ciągłego wzajemne powiązanie przepływu ciepła z polem tensora odkształceń w liniowym ciele sprężystym.

Przyjmujemy, że ośrodek jest jednorodny i izotropowy zarówno ze względu na własności cieplne jak i mechaniczne. W trakcie wywodów korzystać będziemy z wyników zawartych w poprzednich dwóch podrozdziałach. Założymy, że w chwili t_0 w konfiguracji początkowej przy temperaturze T_0 w ciele nie występowały naprężenia i stan ten uważać będziemy za stan odniesienia.

Wyjściowymi równaniami będą: lokalne zapisy bilansu energii

$$\rho dU = \sigma \circ d\epsilon - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r$$

(który posłuży do wyprowadzenia sprzężonego równania przewodnictwa cieplnego) oraz finalna nierówność procesu

$$-\rho dU + \rho T dS + \sigma \circ d\epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (39.1)$$

do której wprowadzimy energię swobodną ρA

$$\rho A = \rho U + \rho TS \Rightarrow -\rho dU = -\rho dA - \rho T dS - \rho S dT$$

otrzymując

$$-\rho dA - \rho S dT + \sigma \circ d\epsilon - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0 \quad (39.2)$$

Przyjmujemy teraz następującą postać równań konstytutywnych

$$\rho A = \rho A(\epsilon, T), \quad \sigma = \sigma(\epsilon, T), \quad \rho S = \rho S(\epsilon, T)$$

z których wynika, że

$$\rho dA = \rho \frac{\partial A}{\partial \epsilon} \circ d\epsilon + \rho \frac{\partial A}{\partial T} dT$$

Wprowadzając otrzymane wyrażenie na energię swobodną do finalnej nierówności

$$-\left(\rho \frac{\partial A}{\partial \epsilon} - \sigma\right) \circ d\epsilon - \left(\rho \frac{\partial A}{\partial T} + \rho S\right) dT - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

uzyskujemy następujące równania tworzące

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad S = -\frac{\partial A}{\partial T} \quad (39.3)$$

oraz zależność $\mathbf{q} \cdot \nabla T \leq 0$, z której wynika, że dla spełnienia finalnej nierówności znaki strumienia ciepła \mathbf{q} i gradientu temperatury ∇T muszą być przeciwne.

Otrzymane równanie konstytutywne wykorzystamy do wyprowadzenia sprzężonego równania przewodnictwa ciełnego. Powrócimy teraz do lokalnego zapisu bilansu energii w ośrodku

$$(-\rho dA - \rho T dS - \rho S dT) + \boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r = 0$$

$$\left(-\rho \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho \frac{\partial A}{\partial T} dT - \rho T dS - \rho S dT \right) + \boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r = 0$$

Wykorzystując równania konstytutywne otrzymamy

$$-\rho T dS - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r = 0$$

Z kolei różniczka entropii ma postać

$$-\rho dS = -\rho \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho \frac{\partial S}{\partial T} dT = +\rho \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} + \rho \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} dT$$

Występująca w ostatnim wyrażeniu pochodna $\partial^2 A / \partial T^2$ jest równa pojemności cieplnej c obliczonej przy stałej deformacji. Bilans energii zapiszemy w postaci różniczkowej

$$\rho T \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \circ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho c \dot{T} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r = 0 \quad (39.4)$$

w którym sprecyzowania wymaga wyrażenie $\partial^2 A / \partial T^2 \partial \boldsymbol{\varepsilon}$.

Określając pochodną $\partial^2 A / \partial T^2 \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ ograniczymy się do liniowego ośrodka sprężystego z udziałem pola temperatury.

Dla przypadku izotermicznego $T = T_0$ uzyskujemy

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{g}$$

natomiast udział temperatury ujmijmy następująco

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}_T = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) I_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{g} + \alpha_T (T - T_0) \mathbf{g}$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ – tensor odkształcenia wywołany przez przyrost temperatury $\boldsymbol{\varepsilon}_T = \alpha_T (T - T_0) \mathbf{g}$, T – temperatura w ośrodku, α_T – liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej.

Odwracając ostatnie z równań tworzących otrzymamy wzór określający tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ w zależności od przyrostu temperatury $(T - T_0)$ i tensora odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda I_\varepsilon \mathbf{g} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \mathbf{g} \quad (39.5)$$

Wyznamy teraz pochodną

$$\rho \frac{\partial^2 A}{\partial T \partial \varepsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} = - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \mathbf{g}$$

z której wyniknie składnik wiążący pole cieplne z polem mechanicznym. Do bilansu energii wprowadzimy również drugie równanie tworzące, które będzie wiązać gradient temperatury ze strumieniem ciepła

$$\mathbf{q} = - \lambda \nabla T$$

nosi ono nazwę prawa Fouriera przewodnictwa cieplnego.

Ostatecznie równanie przewodnictwa cieplnego przyjmie postać

$$- \nabla(-\lambda \nabla T) + \rho r + \rho c \dot{T} - \rho T \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \mathbf{g} \circ \dot{\varepsilon} = 0 \quad (39.6)$$

a po uproszczeniu

$$\rho T \alpha_T \approx \rho T_0 \alpha_T$$

$$\nabla \nabla T + \frac{\rho c}{\lambda} \dot{T} - \frac{\rho T_0 \alpha_T}{\lambda} (3\lambda + 2\mu) \mathbf{g} \circ \dot{\varepsilon} = - \frac{\rho r}{\lambda}$$

W równaniu tym występuje pole przemieszczeń ε w ośrodku oraz pole temperatury.

Natomiast równania mechanicznej strony zagadnienia otrzymamy w wyniku identycznego postępowania jak w punkcie poprzednim, przy wyprowadzeniu równań przemieszczeniowych teorii sprężystości.

Otrzymujemy je z równań pędu

$$\nabla \sigma + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

po wprowadzeniu równań tworzących

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda I_\varepsilon \mathbf{g} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \mathbf{g}$$

i równań geometrycznych $2\varepsilon = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla$. Równanie przemieszczeniowe termosprężystości ma ostatecznie postać

$$\mu \nabla \nabla \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} - \gamma_T \nabla \Theta = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (39.7)$$

W równaniu tym wprowadzono oznaczenia

$$\gamma_T = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T, \quad \Theta = T - T_0$$

W zadaniach wzajemnie oddziałujących na siebie przepływów ciepła i pędu w ośrodku występują oba równania jednocześnie. Otrzymujemy wówczas układ równań sprzężonej termosprężystości

$$\mu \nabla \nabla \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} - \gamma_T \nabla \Theta = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (39.8)$$

$$\nabla \nabla T + \frac{\rho c}{\lambda} \dot{T} - \frac{\rho T_0 \alpha_T}{\lambda} (3\lambda + 2\mu) \mathbf{g} \circ \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\rho r}{\lambda}$$

do którego należy dołączyć komplet warunków początkowo – brzegowych dotyczących zarówno równania przemieszczeniowego, jak i równania przepływu ciepła. Zadań brzegowych nie będziemy tutaj formułować odsyłając czytelnika do opracowań tematyki zawartych np. w monografii: W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości* PWN Warszawa, 1968.

W trakcie rozwiązania powyższego układu równań wyznaczamy jednocześnie trzy współrzędne wektora przemieszczenia oraz pole przyrostu temperatury $\Theta = T - T_0$, a w następnej kolejności wyznaczamy pole tensora odkształcenia i naprężenia.

W zastosowaniach praktycznych korzysta się na ogół ze szczególnych ujęć termosprężystości, takich jak teoria naprężeń cieplnych i teorii przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem wpływu odkształceń. W pierwszej teorii przyjmuje się, że pole temperatury jest znaną funkcją w zadaniu mechanicznym i zostało wyznaczone z równania przepływu ciepłego bez uwzględnienia pola mechanicznego. Równanie to ma postać

$$\nabla \nabla T + \frac{\rho c}{\lambda} \dot{T} = -\frac{\rho r}{\lambda}$$

klasycznego równania Fouriera przewodnictwa cieplnego. Wyznaczone na jego podstawie pole temperatur $\Theta = T - T_0$ wprowadzimy jako znane w równania przemieszczeniowe

$$\mu \nabla \nabla \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} - \gamma_T \nabla \Theta = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

które następnie rozwiązujemy jak klasyczne zadanie sprężyste ze zmodyfikowaną siłą masową $\rho \mathbf{F}'$, wg relacji

$$\rho \mathbf{F}' = \rho \mathbf{F} - \gamma_T \nabla \Theta$$

Natomiast w drugim przypadku postępujemy odwrotnie i wyznaczamy najpierw pole tensora odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ na podstawie pola przemieszczeń, jako całki równania przemieszczeniowego klasycznej teorii sprężystości. W następnej kolejności pole tensora odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ wprowadzamy jako znaną funkcję do równania przepływu ciepłego

$$\nabla \nabla T + \frac{\rho c}{\lambda} \dot{T} = \frac{\rho T_0 \alpha_T}{\lambda} (3\lambda + 2\mu) \mathbf{g} \circ \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\rho r}{\lambda}$$

Dalej wyznaczamy pole temperatur w ośrodku.

Pierwszy typ zadań w ramach teorii naprężeń cieplnych w ciele sprężystym znalazł szerokie zastosowanie w tych przypadkach, w których

interesuje nas głównie stan naprężenia w ośrodku. Natomiast drugi szczególny typ zadań termosprężystości ma istotne znaczenie przy wyznaczaniu pola temperatury z dodatkowym uwzględnieniem wpływu pola naprężeń. Oczywiście dalszymi przypadkami szczególnymi są równania klasycznej, izotermicznej sprężystości oraz klasyczne równania przewodnictwa cieplnego.

Równania nieliniowej termosprężystości, dla nieliniowego równania tworzącego określającego tensor naprężenia, mają postać

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \rho \mathbf{F} - \gamma_T \nabla (T - T_0) = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \quad \left(\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)$$

$$\rho T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} \circ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho c \dot{T} + \nabla (\lambda \nabla T) + \rho r = 0$$

gdzie

$$\rho A(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \rho A^e(e) + \gamma_T (T - T_0) \boldsymbol{\varepsilon} + \rho A^T(T)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial A^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \gamma_T (T - T_0), \quad -S = \frac{\partial A^T}{\partial T} + \gamma_T \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad c = \frac{\partial^2 A^T}{\partial T^2}$$

w których ostatnie trzy równania są równaniami tworzącymi zagadnienia.

W opracowaniach tematyki wprowadza się często w miejsce temperatury T jej przyrost $\Theta = T - T_0$ określony w stosunku do temperatury stanu naturalnego (beznaprężeniowego) T_0 .

Równania liniowej termosprężystości mają wówczas postać

$$\mu \nabla \nabla \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} - \gamma_T \nabla \Theta = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (39.9)$$

$$\nabla \nabla \Theta + \frac{\rho c}{k} \dot{\Theta} - \frac{\rho T_0 \alpha_T}{2k} \gamma_T \mathbf{g} \circ (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) = -\frac{\rho r}{k}$$

Wyprowadzenie tych równań jest $\gamma_T = \alpha_T (3\lambda + 2\mu)$ stosunkowo proste i poleca się je czytelnikom jako kształcące ćwiczenie. W tych przypadkach założenia konstytutywne są następujące

$$\rho A = \rho A(\boldsymbol{\varepsilon}, \Theta), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \Theta), \quad \mathbf{q} = -k \nabla \Theta, \quad \rho S = \rho S(\boldsymbol{\varepsilon}, \Theta)$$

$$\rho A = a I^2 \boldsymbol{\varepsilon} + b \Pi \boldsymbol{\varepsilon} - \gamma_T \Theta \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{2\mu + \lambda}{2} I^2 \boldsymbol{\varepsilon} - 2\mu \Pi \boldsymbol{\varepsilon} - \gamma_T \Theta \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\lambda}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^i_i)^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}^i_j \boldsymbol{\varepsilon}^j_i - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \Theta \boldsymbol{\varepsilon}^i_i$$

40. TEORIA PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA I TEORIA NAPRĘŻEŃ SPRĘŻYSTO – PLASTYCZNYCH

Równania konstytutywne określające materiał o właściwościach plastycznych otrzymamy w wyniku podobnego postępowania jak przy analizie materiałów sprężystych. Jedną z istotnych różnic w tym opisie materiału jest występowanie odkształceń plastycznych w czasie deformacji ciała, z którymi związana jest oczywiście nieodwracalność procesu. Istotnie, odkształcenia plastyczne w procesie deformacji będą źródłem mocy dysypowanej z ciała, a więc zagadnienie w tym przypadku będzie zupełnie inaczej rozpatrywane na terenie termodynamiki.

Omawiać będziemy skrótowo dwie podstawowe teorie służące do opisu plastycznych własności materiałów. Będzie to teoria plastycznego płynięcia i teoria naprężeń sprężysto – plastycznych, którą należy uważać za rozwinięcie nieliniowej teorii sprężystości ciał nieściśliwych. Analizujemy tylko równania konstytutywne obu teorii, natomiast dalsze wiadomości w tym zakresie Czytelnik może znaleźć w monografii: W.Olszak [i in.], Teoria plastyczności, PWN Warszawa 1966.

W zakresie plastyczności przyjmie się zwykle hipotezy – częściowo poparte badaniami doświadczalnymi – które dotyczą przejścia z czysto sprężystego zakresu pracy materiału w zakres sprężysto – plastyczny, w czasie którego zaczynają się pojawiać odkształcenia nieodwracalne w ośrodku. Najpowszechniejszą, aczkolwiek nie jedyną, jest tutaj hipoteza Hubera – Misesa – Hencky'ego, która przejście z zakresu sprężystego w plastyczny uzależnia od uzyskania przez intensywność naprężeń (posiadającą niezmienniczy charakter) pewnej określonej doświadczalnie wartości naprężenia, która nazywa się granicą plastyczności. Wszystkie te postulaty wynikające z doświadczeń, równania konstytutywne teorii plastyczności muszą ujmować.

Wywód równań teorii plastyczności na podstawie ogólnych równań mechaniki ośrodka ciągłego poprzedzi uzasadnienie podawane w czysto mechanicznym ujęciu tych zagadnień.

Podstawowym dla tej teorii jest rozkład tensora odkształcenia ε na część odwracalną ε^e związaną ze sprężystym zakresem pracy materiału i część nieodwracalną ε^p , wywołaną procesami plastycznymi

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e$$

Podobny rozkład będzie zachodził również dla tensora przyrostu deformacji $d\varepsilon$ występującego w teorii plastycznego płynięcia

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (40.1)$$

Podamy teraz równania fizyczne teorii naprężeń sprężysto – plastycznych. W tej teorii przyjmie się liniową zależność tensora odkształceń sprężystych ε^e od tensora naprężenia σ , czyli

$$\varepsilon^e = \mathbf{E} \circ \boldsymbol{\sigma} \quad (40.2)$$

gdzie tensor \mathbf{E} jest tensorem stałych sprężystych o walencji cztery w ciele anizotropowym, zaś w ciele izotropowym będzie $\varepsilon^e = 2\mu'\boldsymbol{\sigma} + \lambda'I_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{g}$.

Natomiast dla nieodwracalnej części odkształcenia plastycznego ε^p należy uwzględnić tylko dewiator odkształceń $\mathbf{D}(\varepsilon^p)$ w związkach fizycznych i łączyć go z dewiatorem naprężeń $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}}$. Zależność ta jest nieliniowa i ma postać następującą

$$d\varepsilon^p = \mathbf{D}(\varepsilon^p) = a_1 \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} + a_2 (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{g}) \quad (40.3)$$

gdzie

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{g}, \quad \mathbf{D}_{\varepsilon^p} = \varepsilon^p - \frac{1}{3} \text{tr} \varepsilon^p \mathbf{g}$$

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} = D^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n D^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = D^{mn} D^{kl} g_{nk} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l = D^{mn} D_n^l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \frac{1}{3} \text{tr} (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{3} D^{ln} D_n^l$$

Odształcenia sprężyste wynoszą

$$\varepsilon^e = \mathbf{E} \circ \boldsymbol{\sigma} = E^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \circ \boldsymbol{\sigma}^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = E^{ijkl} \boldsymbol{\sigma}^{mn} g_{km} g_{ln} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j =$$

$$E^{ijkl} \boldsymbol{\sigma}_k^n g_{ln} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = E^{ijkl} \boldsymbol{\sigma}_{kl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

Końcowa postać równań fizycznych plastyczności przyjmie formę

$$d\varepsilon = \mathbf{E} \circ d\boldsymbol{\sigma} + a_1 \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} + a_2 (\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{g}) \quad (40.4)$$

W ostatniej zależności a_1 i a_2 są pewnymi skalarami, natomiast forma tej zależności wynika z twierdzenia Hamiltona dotyczącego ogólnej postaci nieliniowej równości wielomianowej zachodzącej między dwoma symetrycznymi tensorami o walencji dwa.

W wielu przypadkach możemy ograniczyć się do stosunkowo prostej wersji tej teorii tzw. deformacyjnej teorii plastyczności.

W tym przypadku sprężystą (odwracalną) deformację określa prawo Hooke'a

$$I_{\varepsilon^e} = 3K I_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (40.5)$$

$$\mathbf{D}(\varepsilon^e) = \frac{1}{2G} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

zapisane dla części symetrycznych i dewiatorów obu tensorów.

Natomiast tensor plastycznej deformacji jest proporcjonalny do dewiatora naprężeń

$$\varepsilon^p = \frac{\varphi}{2} \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

co oznacza, że tensory ϵ^p ($\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$), $2\epsilon = (\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)$ i \mathbf{D}_σ są współliniowymi, a w konsekwencji tensor ϵ^p musi być równy dewiatorowi. Ponadto względna zmiana objętości $\epsilon = \epsilon^e = 3K\sigma$ jest czysto sprężystą deformacją.

Z porównania związków dewiatorów dla części sprężystej i plastycznej uzyskujemy zależność

$$\left(\mathbf{D}(\epsilon^e) = \frac{1}{2G}\mathbf{D}_\sigma, \quad \mathbf{D}(\epsilon^p) = \epsilon^p = \frac{\varphi}{2}\mathbf{D}_\sigma \right) \Rightarrow$$

$$\left(\mathbf{D}(\epsilon^e + \epsilon^p) = \mathbf{D}(\epsilon) = \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2G} \right) \mathbf{D}_\sigma \right)$$

Z ostatniej równości wynika, że między intensywnościami obu tensorów zachodzi zależność

$$i_\epsilon = \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2G} \right) i_\sigma \quad (40.6)$$

gdzie

$$i_\epsilon = \sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{D}_\epsilon \circ \mathbf{D}_\epsilon}, \quad i_\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{D}_\sigma \circ \mathbf{D}_\sigma}$$

Otrzymany układ równań fizycznych należy uzupełnić warunkiem określającym φ .

Omawiane równania deformacyjnej teorii plastyczności zawierają kilka przypadków szczególnych zależnych od określenia parametru φ . Pierwszy dotyczy teorii ciała idealnie plastycznego; wówczas parametr φ ma postać

$$\varphi = 2 \left(\frac{i_\epsilon}{\tau_s} - \frac{1}{2G} \right)$$

gdzie τ_s – granica plastyczności przy czystym ścinaniu, G – moduł odkształcenia postaciowego.

Zachodzi także równość $i_\sigma = \tau_s$ (warunek płynięcia).

Równania tworzące po przyjęciu $\varphi = 2 \left(\frac{i_\epsilon}{\tau_s} - \frac{1}{2G} \right)$ mają postać

$$\sigma = \frac{1}{3K}\epsilon \quad \text{lub} \quad I_\sigma = \frac{1}{3K}I_\epsilon,$$

$$\mathbf{D}_\sigma = \frac{\tau_s}{i_\epsilon}\mathbf{D}_\epsilon \quad (40.7)$$

odpowiadającą idealnej plastyczności.

Kolejnym przypadkiem szczególnym będą równania teorii wzmocnienia. W tej teorii parametr φ będzie miał postać

$$\varphi + \frac{1}{G} = \frac{1}{G(i_\sigma)} = \frac{1}{G(i_\varepsilon)}$$

W tym przypadku moduły $G(i_\sigma) = G(i_\varepsilon)$ są równe i zależą od stanu naprężenia w ośrodku, natomiast intensywności tensorów σ i ε powiązane są relacją

$$i_\varepsilon = \frac{1}{2G_\varepsilon} i_\sigma \quad G_\varepsilon = G(i_\varepsilon)$$

W efekcie końcowym równania tej teorii zapiszemy podobnie jak równanie teorii sprężystości ze zmiennym modułem G_ε

$$\varepsilon = 3K\sigma \quad \text{lub} \quad I_\varepsilon = 3KI_\sigma, \quad (40.8)$$

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \frac{1}{2G_\varepsilon} \mathbf{D}_\sigma$$

Oczywiście warunek $\varphi = 0$ określa równania sprężystego ciała Hooke'a.

Przedstawimy z kolei równania tworzące teorii plastycznego płynięcia. Również w tym przypadku tensor przyrostów deformacji przedstawimy jako sumę części odwracalnej $\Delta\varepsilon^e$ i nieodwracalnej $\Delta\varepsilon^p$

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \quad (40.9)$$

przy czym część sprężysta przyrostu deformacji $\Delta\varepsilon^e$ powiązana jest liniowo z przyrostem naprężeń $\Delta\sigma$

$$I(\Delta\varepsilon^e) = K I(\Delta\sigma)$$

lub

$$\Delta\varepsilon = 3K \Delta\sigma$$

gdzie $I(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22} + \Delta\varepsilon_{33}$, $I(\Delta\sigma) = \Delta\sigma_{11} + \Delta\sigma_{22} + \Delta\sigma_{33}$ są pierwszymi niezmiennikami tensorów przyrostów odkształceń i naprężeń.

Podobna liniowa zależność łączy dewiatory

$$\mathbf{D}(\Delta\varepsilon^e) = \frac{1}{2G} \mathbf{D}(\Delta\sigma)$$

gdzie

$$\mathbf{D}(\Delta\varepsilon^e) = \Delta\varepsilon^e - \frac{1}{3} I_{\Delta\varepsilon^e} \mathbf{g}, \quad \mathbf{D}(\Delta\sigma) = \Delta\sigma - \frac{1}{3} I_{\Delta\sigma} \mathbf{g}$$

są dewiatorami przyrostu odkształcenia i naprężenia. Natomiast plastyczna część przyrostu deformacji $\Delta\varepsilon^p$ jest proporcjonalna do dewiatora tensora naprężeń

$$\Delta\varepsilon^p = \lambda \mathbf{D}_\sigma \quad (40.10)$$

przy czym „współczynnik proporcjonalności” λ jest zmienny i zależy każdorazowo od przyrostu odkształcenia plastycznego i naprężenia

$$\lambda = \frac{i(\Delta \epsilon^P)}{i_\sigma}$$

gdzie $i(\Delta \epsilon^P)$ i i_σ są odpowiednio intensywnościami tensora przyrostów odkształceń i naprężeń.

Widzimy więc, że ostatnie z równań tworzących określające przyrost odkształceń plastycznych jest w istocie równaniem nieliniowym. Również równanie teorii płynięcia zawierają jako przypadki szczególne równania idealnej plastyczności, które można uzyskać przyjmując $i_\sigma = \tau_s$, gdzie τ_s jest granicą plastyczności przy ścinaniu. W tym przypadku warunek $i_\sigma = \tau_s$ pokrywa się z warunkiem plastyczności Hubera – Miesesa – Hencky'ego. Dalszym przypadkiem szczególnym są równania liniowej sprężystości – wtedy $\lambda = 0$. Nadmieniamy tutaj, że równania tworzące teorii plastycznego płynięcia uzupełnione równaniami geometrycznymi

$$2\mathbf{e} = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla, \quad \left(\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right)$$

określającymi tensor prędkości deformacji, oraz równaniami ruchu

$$\nabla \sigma + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \quad (\sigma = \sigma^*)$$

stanowią zamknięty układ równań. Oczywiście wśród tych równań znajduje się również równanie określające wartość parametru λ . Ponadto przypominamy, że tensory przyrostu deformacji $\Delta \epsilon$ i prędkości ϵ powiązane są zależnościami

$$d\epsilon = \epsilon dt$$

41. RÓWNANIA TWORZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

Przeprowadzimy z kolei częściową analizę ograniczeń jakie na równania tworzące teorii plastyczności nakłada termodynamika procesu. Będziemy zatem badali finalną nierówność w odniesieniu do częściowo nieodwracalnego mechanicznie procesu. Właściwość ta odróżnia deformacje plastyczne ośrodka od sprężystych, które są w pełni odwracalne. Podstawowym dla omawianych zagadnień plastycznych deformacji ośrodka jest rozkład tensora deformacji ϵ na część odwracalną ϵ^e i nieodwracalną ϵ^P , wynikającą z dysypacji energii w układzie

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^P \quad (41.1)$$

Podobny rozkład zachodzi dla przyrostu deformacji

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^P$$

oraz dla energii swobodnej ρA

$$\rho A = \rho A^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T) + \rho A^P(\Lambda, t) \quad (41.2)$$

gdzie Λ jest pewnym dodatkowym tensorem opisującym zmiany w strukturze materiału, które powstały w wyniku niesprężystych deformacji.

Finalna nierówność jest tutaj identycznej postaci jak poprzednio, czyli

$$-\rho dA + \boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho S dT - \nabla \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (41.3)$$

Do zależności tej wprowadzimy przyrost energii swobodnej uzyskując

$$\left(-\rho \frac{\partial A^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \circ d\boldsymbol{\varepsilon}^e - \rho \frac{\partial A^e}{\partial T} dT - \rho \frac{\partial A^P}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda - \rho \frac{\partial A^P}{\partial T} dT \right) +$$

$$\boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon}^P - \rho S dT - \nabla \cdot \mathbf{q} \geq 0$$

stąd

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial A^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) \circ d\boldsymbol{\varepsilon}^e - \rho \left(S + \frac{\partial A^e}{\partial T} + \frac{\partial A^P}{\partial T} \right) dT -$$

$$\rho \frac{\partial A^P}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda + \boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon}^P - \nabla \cdot \mathbf{q} \geq 0$$

Wobec wymagania, aby nierówność ta zachodziła dla każdego procesu zmian deformacji, musi zachodzić

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial A^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad -S = \frac{\partial (A^e + A^P)}{\partial T} = \frac{\partial A}{\partial T} \quad (41.4)$$

oraz

$$-\rho \frac{\partial A^P}{\partial \Lambda} \circ d\Lambda + \boldsymbol{\sigma} \circ d\boldsymbol{\varepsilon}^P - \nabla \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (41.5)$$

W efekcie uzyskaliśmy równanie określające tensor naprężenia oraz entropię. Natomiast z okrojonej nierówności z pozostałych składników wynika m.in., że sprężyste własności ośrodka są niezależne od tensora Λ .

Rozdział VIII

ELEMENTY MECHANIKI CIECZY

W rozdziale tym przedstawimy niezbędne wiadomości z zakresu mechaniki cieczy. Rozpatrywać będziemy zachowanie się cieczy idealnej oraz cieczy lepkiej. Omawiane typy cieczy analizowane będą z pozycji mechaniki ośrodka ciągłego jako szczególne zagadnienia. Skupimy przy tym uwagę na równaniach tworzących oraz tych zagadnieniach, które wyznaczają specyficzne miejsce mechaniki cieczy w ogólnej teorii ośrodka ciągłego.

Popularnie rzecz traktując, cieciami nazywać będziemy ośrodki, w których opór przed zmianami postaciowymi jest znacznie mniejszy niż przed zmianami objętości. Oczywiście w wyidealizowanym przypadku szczególnym w cieczy może w ogóle zaniknąć opór przed zmianami postaci. Ciecz o tych własnościach nazywamy idealną cieczą. W cieczy tego rodzaju może występować tylko naprężenie normalne zwane też ciśnieniem hydrostatycznym, natomiast pozostałe składowe tensora naprężenia znikną. W związku z tym tensor naprężenia σ ma postać

$$\sigma = -p\mathbf{g}$$

gdzie: p – wartość ciśnienia hydrostatycznego, \mathbf{g} – tensor metryczny ośrodka.

Warto podkreślić, że w stanie równowagi w cieczy tensor naprężeń określony jest również przez zależność: $\sigma = -p\mathbf{g}$, identyczną jak dla cieczy idealnej. Przypomnijmy tu, że w stanie równowagi ciała stałego tensor naprężeń σ posiada również niezerowe „współrzędne styczne”. Fakt ten zasadniczo odróżnia ciecze od ciał stałych.

42. CIECZ IDEALNA

W przypadku cieczy idealnej, wektor naprężenia na płaszczyźnie określonej przez jednostkowy wektor normalnej \mathbf{n} ma postać:

$$\mathbf{p} = -p\mathbf{n}$$

Zależność ta przedstawia znane prawo Pascala dotyczące rozkładu ciśnienia w cieczy idealnej.

Komplet równań dla cieczy idealnej zawiera:

- równania ciągłości, czyli lokalnie zapisany bilans masy

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (42.1)$$

gdzie: ρ – gęstość cieczy, \mathbf{v} – wektor prędkości,

- równania ruchu

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (42.2)$$

gdzie: \mathbf{F} – właściwa siła masowa, p – ciśnienie hydrostatyczne,
- równania bilansu energii

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{q} \quad (42.3)$$

gdzie: U - właściwa energia wewnętrzna, $\sigma \circ \varepsilon = -p \nabla \mathbf{v}$ - moc mechaniczna, \mathbf{q} - strumień ciepła.

Do przytoczonych równań dodać należy równanie tworzące. Pierwsze z nich ma postać: $\sigma = -p \mathbf{g}$.

Natomiast dla strumienia ciepła \mathbf{q} mamy równanie tworzące postaci

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (42.4)$$

czyli prawo Fouriera gdzie λ jest współczynnikiem przewodności cieplnej. Oczywiście w przypadku braku przepływu ciepła będzie $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Oprócz tego do równań tych dołączymy równania określające tensor prędkości deformacji

$$2\epsilon = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \quad (42.5)$$

Podany układ równań uzupełnia związek między ciśnieniem hydrostatycznym – p , gęstością – ρ i temperaturą – T .

$$\pi(p, \rho, T) = 0$$

W zadaniach mechaniki cieczy idealnej występują więc współrzędne wektora prędkości \mathbf{v} , ciśnienie p , temperatura T i gęstość ρ .

Podamy jeszcze kilka uwag odnośnie równania stanu $\pi(p, \rho, T) = 0$. Równanie to dla idealnego gazu nosi nazwę równania Clapeyrona i ma postać:

$$pV = RT$$

gdzie: V – objętość gazu, R – stała gazowa.

Oczywiście równania dla gazu są traktowane jako szczególny przypadek równań cieczy. Ostatnie z równań można przedstawić następująco:

$$p = \frac{R}{m} \rho T, \quad V = \frac{m}{\rho}$$

gdzie m jest molarnym ciężarem gazu. W przypadku znacznego ciśnienia korzystamy z równania Van der Waalsa

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

w którym a i b są stałymi wyznaczonymi doświadczalnie.

Po przekształceniach uzyskujemy

$$p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2$$

Ogólnie, równanie tworzące postaci $p = p(\rho, T)$ zawiera jako przypadek szczególny równania dla cieczy barotropowej określonej równaniem

tworzącym:

$$p = p(\rho)$$

Przyjęty związek konstytutywny dla cieczy barotropowej czyni układ równań mechaniki cieczy układem zamkniętym.

Układ ten ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \quad (42.6)$$

$$p = p(\rho).$$

Uzyskane równania zapiszemy w postaci jawnej w układzie współrzędnych prostokątnych (x_1, x_2, x_3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

$$p = p(\rho)$$

Równania powyższe w zapisie wskaźnikowym przyjmą zwartą postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (42.7)$$

$$p = p(\rho)$$

Oczywiście przypadkiem szczególnym równań cieczy barotropowej są równania cieczy nieściśliwej, którą określimy relacjami:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (42.8)$$

Jeżeli ciecz jest jednorodna i nieściśliwa to gęstość ρ jest stała w całym ośrodku. W tym przypadku ρ przestaje być parametrem zadania i układ równań cieczy zawiera tylko równania mechaniczne postaci:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

lub w zapisie wskaźnikowym dla dowolnego układu współrzędnych:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p, \quad \nabla_i v^i = 0$$

43. RÓWNANIA CIECZY LEPKIEJ

Przedstawimy z kolei równania dla cieczy lepkiej, która jest bardziej złożonym modelem cieczy niż rozpatrywana poprzednio ciecz idealna. Równania określające tensor naprężeń w cieczy lepkiej mają postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{g} + \boldsymbol{\tau}$$

gdzie tensor $\boldsymbol{\tau}$ określa lepkie składowe tensora naprężeń w cieczy.

Lepkie składowe tensora naprężeń w najprostszym przypadku izotropowym i jednorodnym zależą liniowo od składowych tensora prędkości $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{g}$$

W efekcie równania tworzące dla liniowej cieczy lepkiej spełniającej prawo Newtona mają postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{g} + 2\mu\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (43.1)$$

Rozdzielając uzyskane zależności na dwa równania dotyczące części symetrycznych i dewiatorów otrzymujemy:

$$\sigma = -p + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \sigma = I_\sigma$$

$$\mathbf{D}_\sigma = 2\mu\mathbf{D}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

W zależnościach tych μ nazywamy współczynnikiem lepkości postaciowej a λ - współczynnikiem lepkości objętościowej. Podane równanie tworzące nazywane też bywa równaniem Naviera-Stokesa. Zwróćmy tutaj uwagę na to, że ciśnienie hydrostatyczne p pokrywa się z I_σ (pierwszym niezmiennikiem tensora $\boldsymbol{\sigma}$) tylko wtedy, kiedy $(2\mu + 3\lambda)\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Współliniowość p i σ jest prawdziwa oczywiście dla nieściśliwej cieczy, ponieważ dla niej zachodzi:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (43.2)$$

W cieczy lepkiej wystąpią więc w ogólności zarówno składowe normalne jak i styczne tensora naprężenia. Natomiast lepkość cieczy przejawia się w trakcie wzajemnego przenikania się cząstek cieczy w ośrodku oraz w trakcie przenoszenia impulsu z jednej warstwy cieczy do sąsiednich warstw. W cieczy lepkiej występuje więc tarcie wewnętrzne. Oczywiście uwagi te dotyczą przepływów laminarnych, bowiem intensywny przekaz impulsu w cieczy prowadzi do turbulentnych przepływów, których opis jest znacznie bardziej złożony.

Oprócz równań fizycznych komplet równań cieczy lepkiej zawiera:

- równania ruchu cieczy (lokalna postać bilansu pędu)

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} \quad (43.3)$$

- równania lokalnego bilansu energii wewnętrznej ρU

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\epsilon} - \nabla \mathbf{q} \quad (43.4)$$

- równania tworzące

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (\text{prawo Fouriera})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda \nabla \mathbf{v}) \mathbf{g} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} \quad (43.5)$$

- równania geometryczne, określające tensor prędkości odkształceń $\boldsymbol{\epsilon}$

$$2\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \quad (43.6)$$

W przytoczonych równaniach \mathbf{q} jest strumieniem ciepła, T – temperaturą, ρU – energią wewnętrzną, \mathbf{v} – wektorem prędkości, $\rho \mathbf{F}$ – siłą masową, λ – współczynnikiem przewodności cieplnej w cieczy równym strumieniowi ciepła wywołanemu przez jednostkowy gradient temperatury.

Następnie przyjmując postać energii wewnętrznej dla cieczy (jako równanie konstytutywne) uzyskujemy zamknięty układ 12 równań o 12 niewiadomych: $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{v} , p , ρ i T t.j. sześciu składowych tensora naprężenia, trzech składowych wektora prędkości i trzech równań skalarowych określających ciśnienie hydrostatyczne p , gęstość ρ i temperaturę T . Z reguły dążymy do wyrażenia wszystkich nieznanymi funkcji zadania przez trzy składowe wektora prędkości, ciśnienie hydrostatyczne p i temperaturę T , uzyskując układ pięciu nieliniowych równań różniczkowych.

Podamy teraz układ czterech równań różniczkowych ujmujących izotermiczne przepływy cieczy. Równanie to uzyskujemy po podstawieniu do równań ruchu, związków fizycznych i geometrycznych. Otrzymujemy w tym przypadku równania

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \text{grad div } \mathbf{v} - \text{grad } p + \rho \mathbf{F} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \quad (43.7)$$

$$p = p(\rho) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

dla przepływu cieczy niutonowskiej. Jest to układ czterech nieliniowych równań różniczkowych, w których jako niewiadome występują prędkości \mathbf{v}, p, ρ .

Do podanych równań należy dołączyć warunki początkowe i brzegowe zadania, które będą omówione na końcu niniejszego rozdziału.

44. CIECZ NIENIUTONOWSKA

Równania fizyczne cieczy niutonowskiej określające tensor naprężeń σ w zależności od tensora prędkości odkształceń ϵ są przykładem liniowych równań fizycznych. Należy się jednak spodziewać, że wystąpią przypadki nieliniowych zależności między tensorem naprężeń σ i tensorem prędkości ϵ . Ogólna postać takiej zależności dla cieczy izotropowej jest następująca

$$\sigma = a_0 \mathbf{g} + \tau(\epsilon)$$

gdzie a_0 jest skalarom zależnym od niezmienników tensora prędkości odkształceń ϵ i może mieć w szczególności postać $a_0 = -p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}$ identyczną jak w liniowej cieczy lepkiej.

Jeżeli ograniczymy się do wielomianowej postaci zależności nieliniowych, to na podstawie twierdzenia Hamiltona uzyskujemy następujące równanie konstytutywne:

$$\sigma = a_0 \mathbf{g} + a_1 \epsilon + a_2 (\epsilon)^2$$

gdzie: a_0, a_1, a_2 są funkcjami inwariantów tensora prędkości deformacji.

Uzyskane w ten sposób równanie jest ogólną postacią równania fizycznego dla nieliniowej cieczy lepkiej.

Wyznamy teraz związek między dewiatorami tensora naprężeń σ oraz tensora prędkości deformacji ϵ , uzyskując:

$$\mathbf{D}_\sigma = 2\mu \mathbf{D}_\epsilon + \hat{\mu} \left(\mathbf{D}_\epsilon - \frac{1}{3} I(\mathbf{D}_\epsilon^2) \mathbf{g} \right) \quad (44.1)$$

gdzie μ i $\hat{\mu}$ są uogólnionymi współczynnikami lepkości postaciowej, zależnymi w ogólności od niezmienników tensora prędkości deformacji,

$I(\mathbf{D}_\epsilon^2)$ jest pierwszym niezmiennikiem dewiatora \mathbf{D}_ϵ^2 „prędkości” deformacji (ϵ). Równania te dla $a_0 = a_0(p, \epsilon)$, $a_1 = 2\mu$, $a_2 = 0$ przechodzą w równania dla cieczy liniowej.

Rozdział IX

LINIOWA TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI

Przedstawiona w poprzednich rozdziałach mechanika ośrodka ciągłego zawierała również w sobie teorię ciała sprężystego. Teoria ta wynika z niej jako jeden z prostszych przypadków szczególnych, a możliwe ogólne ujęcie mechaniki ośrodka ciągłego podane poprzednio, zawężymy teraz do przypadku liniowych zadań teorii sprężystości. Zagadnieniom tym poświęcimy nieco więcej miejsca ze względu na jej liczne zastosowania w naukach inżynierskich oraz powiązania teorii sprężystości z wytrzymałością materiałów. Uzyskamy w ten sposób w miarę ciągły przegląd zagadnień mechaniki ośrodka ciągłego od najbardziej ogólnego ujęcia do bardzo szczególnego, znanego czytelnikowi z wytrzymałości materiałów.

W rozdziale tym do opisu ruchu i stanu naprężenia w liniowym ciele sprężystym przyjmijmy prostokątny układ współrzędnych a występujące w tych zagadnieniach pola będziemy opisywali tensorami kartezjańskimi w ujęciu wskaźnikowym. Podane w tej postaci równania mechaniki ciała sprężystego są stosunkowo łatwo przyjmowane przez studentów. Ważne jest również wskazanie i uwypuklenie podobieństw i związków między wytrzymałością materiałów a teorią sprężystości. Zabieg ten należy niewątpliwie do najbardziej kształcących dla przyszłych inżynierów, tym bardziej, iż rozwój techniki komputerowej pozwala skutecznie rozwiązywać problemy teorii sprężystości na użytek techniki.

Przedstawimy kolejno związki geometryczne, fizyczne oraz równania ruchu dla ciała sprężystego. Podamy następnie równania przemieszczeniowe dla tego ciała w przypadku przestrzennego i płaskiego stanu przemieszczenia. Następnie omówimy dwa podstawowe sposoby postępowania w liniowej teorii sprężystości doprowadzające do równań przemieszczeniowych i naprężeniowych. W końcu przedstawimy równania teorii płyt oraz równania tarczy, które często występują w praktyce inżynierskiej.

45. STAN ODKSZTAŁCENÍ

Analizować będziemy stan odkształceń w ośrodku ciągłym, w którym współrzędne punktu materialnego określone są przez trójkę liczb (x_1, x_2, x_3) , natomiast t - jest czasem.

Skupimy uwagę na parze blisko siebie położonych punktów A i B w ośrodku. W trakcie ruchu ośrodka odległość między tymi punktami będzie ulegała zmianom. Właśnie analiza tych zmian doprowadzi do określenia tensora odkształceń. Ograniczając się do ortokartezjańskiego układu współrzędnych i

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{x} \quad \text{czyli} \quad y_i = u_i(x_1, x_2, x_3) + x_i$$

Wyznamy teraz pochodn\$\$ \frac{\partial y_i}{\partial x_k}

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{\partial (u_i + x_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta_{ik}$$

Ostatni sk\$\$adnik - δ_{ik} wynika z zale\$\$no\$\$ci

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = k \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1 \right) \\ 0 & \text{dla } i \neq k \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = 0, i \neq k \right) \end{cases}$$

Przyrost kwadratu odleglo\$\$ci $(\rho')^2 - (\rho)^2$ wyrazi si\$\$ relacjami

$$\begin{aligned} (\rho')^2 - (\rho)^2 &= dy_i dy_i - dx_i dx_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta_{ik} \right) dx_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \right) dx_j - dx_i dx_i = \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ik} + \delta_{ik} \delta_{ij} \right) dx_k dx_j - dx_i dx_i = \\ &= \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{kj} \right) dx_k dx_j - \delta_{kj} dx_k dx_j = \\ &= \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_k dx_j \end{aligned}$$

Ze wzgldu na fakt, że stan odkształcenia musi być niezaleźny od przyjętych punktów A i B wnosimy, że wyrażenie znajdujące się w nawiasie może służyć za miarę odkształcenia.

Wyrażenie to jest tensorem o walencji dwa i nosi nazwę tensora odkształcenia Greena

$$2\tilde{\varepsilon}_{jk} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (45.3)$$

W wyrażeniu tym występuje człon nieliniowy $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, który w liniowej

geometrycznej teorii zostaje pominięty. Uzyskujemy wówczas

$$2\varepsilon_{jk} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

Pochodne $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ zapisujemy często w postaci skróconej, np. $\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \equiv u_{j,k}$.

Otrzymamy wówczas klasyczny wzór na tensor odkształcenia ε_{jk}

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}) \quad (45.4)$$

który będzie podstawową miarą stanu odkształcenia we wszystkich liniowych geometrycznie teoriach ośrodka ciągłego.

Współrzędne tensora odkształceń ε_{jk} mają po rozpisaniu postać:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{1,2}) & \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,2} + u_{2,3}) & \frac{1}{2}(u_{3,3} + u_{3,3}) \end{bmatrix}$$

i wyznaczają tensor symetryczny.

W przypadku szczególnym – płaskiego stanu odkształcenia – uzyskujemy

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{1,2}) & \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2}) \end{bmatrix}$$

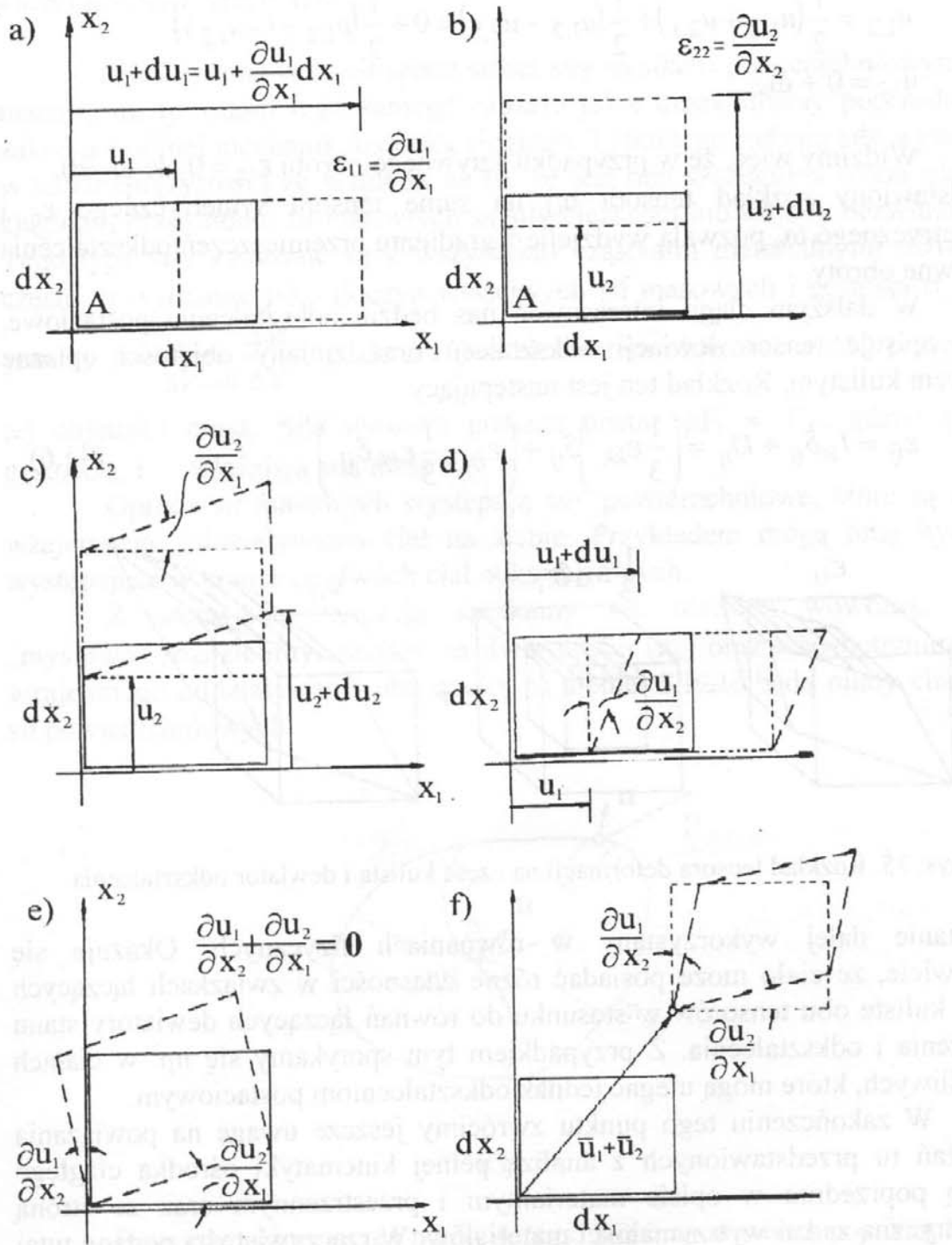
Następnie dla płaskiego stanu odkształcenia podamy interpretację geometryczną współrzędnych tego tensora łącznie z niesymetrycznym tensorem sztywnych obrotów.

Z rysunku 34. wnosimy, że zmiany postaciowe $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ prowadzą do

sztywnych obrotów elementu $dx_1 dx_2$. Wynika stąd również, że wyrażenie postaci $u_{i,j}$ nie może opisywać stanu odkształceń ośrodka, gdyż zawiera ono również sztywne obroty. Istotnie, zachodzi rozkład tensora $u_{i,j}$ wg relacji

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (45.5)$$

na część symetryczną: ε_{ij} – tensor odkształceń oraz ω_{ij} – tensor sztywnych obrotów. Dla sztywnego obrotu opisanego zależnością $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ zachodzi



Rys. 34.

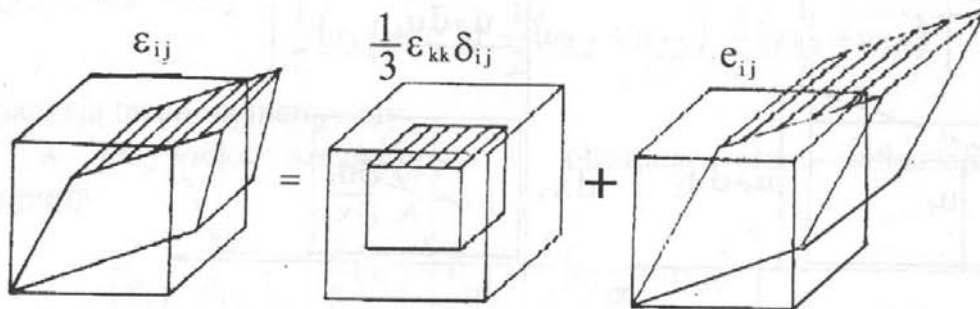
$$u_{1,2} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) = 0 + \frac{1}{2}(u_{1,2} - (-u_{1,2}))$$

czyli $u_{1,2} = 0 + \omega_{12}$

Widzimy więc, że w przypadku sztywnego obrotu $\varepsilon_{12} = 0$ ale $\omega_{12} \neq 0$. Przedstawiony rozkład tensora u_{ij} na sumę tensora symetrycznego ε_{ij} i asymetrycznego ω_{ij} pozwala wydzielić z gradientu przemieszczeń odkształcenia i sztywne obroty.

W dalszym ciągu interesować nas będzie odkształcenie postaciowe, które opisuje tensor dewiacji odkształceń oraz zmiany objętości opisane tensorem kulistym. Rozkład ten jest następujący

$$\varepsilon_{ij} = I_\varepsilon \delta_{ij} + D_{ij} = \left(\frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (45.6)$$



Rys. 35. Rozkład tensora deformacji na część kulistą i dewiator odkształcenia

i zostanie dalej wykorzystany w równaniach fizycznych. Okazuje się mianowicie, że ciało może posiadać różne własności w związkach łączących części kuliste obu tensorów w stosunku do równań łączących dewiatory stanu naprężenia i odkształcenia. Z przypadkiem tym spotykamy się np. w ciałach nieściśliwych, które mogą ulegać jednak odkształceniom postaciowym.

W zakończeniu tego punktu zwrócimy jeszcze uwagę na powiązania rozważań tu przedstawionych z analizą pełnej kinematyki ośrodka ciągłego podaną poprzednio w opisie materialnym i przestrzennym oraz ze stroną geometryczną zadań wytrzymałości materiałów. W rzeczywistości podany tutaj opis kinematyki ośrodka odkształcalnego można uważać za łącznik między podejściem do geometrii ruchu reprezentowanym w wytrzymałości materiałów i w mechanice ośrodka ciągłego. Ujęcie to wystarczy jednak w zupełności do analizy stosunkowo dużej liczby zagadnień liniowej teorii sprężystości itp.

Natomiast znajdowanie kierunków głównych i wartości głównych odkształceń jest identyczne jak podane w poprzednich punktach, gdzie poszukiwano tych wielkości dla symetrycznego tensora o walencji dwa.

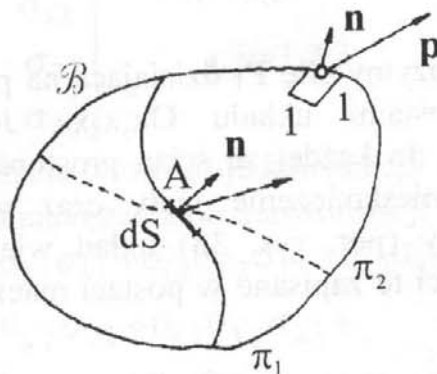
46. STAN NAPRĘŻENIA

Analizowane w teorii sprężystości siły są siłami powierzchniowymi lub masowymi, tj. siłami tego samego rodzaju jakie omawialiśmy poprzednio w zakresie ogólnej mechaniki ośrodka ciągłego. Tylko tego rodzaju siły występują w teorii sprężystości ze względu na to, że jest ona szczególną teorią ośrodka ciągłego. Przykładem sił masowych są siły ciężkości lub też siły bezwładności. Tego typu siły związane są z wszystkimi cząstkami materialnymi ośrodka i często są wyrażone jako iloczyn właściwych sił masowych i gęstości σ , czyli granicy $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$, gdzie ΔV jest elementem objętości, a ΔM przypisaną

tej objętości masą. Siła masowa posiada postać $\rho F_i = \bar{F}_i$, gdzie: ρ jest gęstością, F_i – właściwą siłą masową.

Oprócz sił masowych występują siły powierzchniowe, które są siłami wzajemnego oddziaływania ciał na siebie. Przykładem mogą tutaj być siły występujące w kontakcie dwóch ciał odkształcalnych.

Z identyczną sytuacją spotkamy się również wówczas, kiedy „myślowo” rozdzielimy ośrodek na dwie części (π_1) oraz uzewnętrznimy siły wzajemnego oddziaływania obu części na siebie. Siły te będą miały charakter sił powierzchniowych.

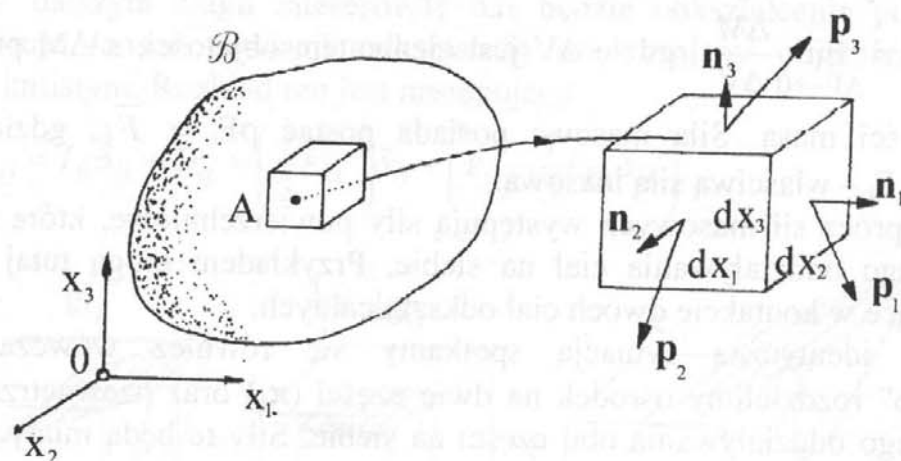


Rys. 36.

Przeprowadźmy przez punkt A (rys. 36) inną dowolną powierzchnię π_2 dzielącą ośrodek również na dwie części. W tym przypadku siła oddziaływania będzie miała inną wartość. Wnosimy stąd, że wartość siły wzajemnego oddziaływania w dowolnym punkcie ośrodka zależeć będzie nie tylko od jego położenia, lecz również od wektora normalnej do płaszczyzny zawierającej punkt A . Mamy więc do czynienia z wielkością zależną od dwóch wektorów: wektora siły wzajemnego oddziaływania oraz wektora normalnej. Warto

zauważyć, że w przypadku ogólnym wielkością zależną od pary wektorów jest tensor o walencji dwa, który okaże się następnie tensorem naprężenia.

Wydzielimy teraz z ośrodka elementarny prostopadłościan o krawędziach dx_1 , dx_2 , dx_3 zawierający również punkt A. Zgodnie z zasadami mechaniki na każdą z płaszczyzn tego prostopadłościanu będzie działała siła równa oddziaływaniu reszty ośrodka na ściany prostopadłościanu, np. \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 . Siły te na ogół nie będą pokrywały się z wektorem normalnej do płaszczyzny, na którą działają.



Rys. 37.

W dalszej kolejności rozłożymy siłę \mathbf{P}_1 działającą na prostokąt $dx_2 dx_3$ na trzy składowe, zgodnie z osiami układu $Ox_1 x_2 x_3$. Jeżeli powtórzmy to postępowanie w stosunku do każdej ze ścian prostopadłościanu $dx_1 dx_2 dx_3$, zakładając, że jest on nieskończenie mały oraz wykorzystamy warunki równowagi, to otrzymamy (por. rys. 38) układ wielkości działających na prostopadłościan. Wielkości te zapisane w postaci macierzy są współrzędnymi tensora naprężenia σ_{ij} .

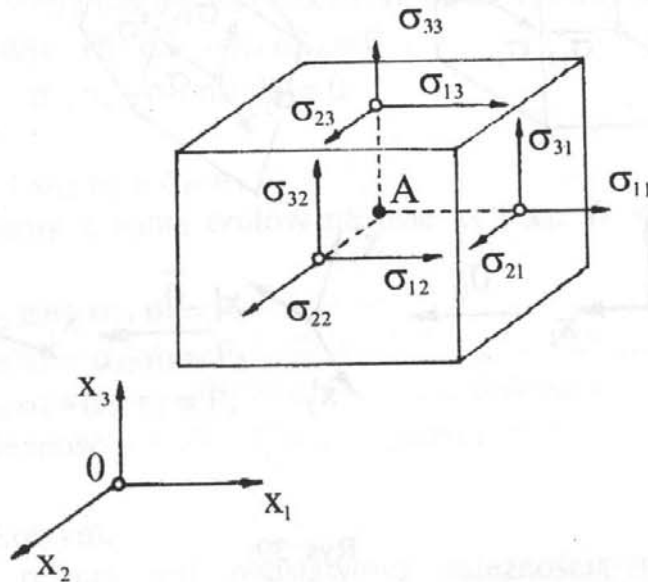
Zauważmy przy tym, że z warunków momentów ułożonych względem osi równoległych do osi układu i przechodzących przez punkt A wynika, że $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ (rys. 38.). W konsekwencji macierz przedstawiająca stan naprężenia w punkcie A będzie symetryczna.

Macierz określająca stan naprężenia przy zmianie układu współrzędnych $x_i \rightarrow x'_i$ będzie się transformowała jak tensor o walencji dwa, czyli

$$x'_i = O_{ij} x_j$$

$$\sigma_{k'l'} = O_{ki} O_{l'j} \sigma_{ij}$$

gdzie O_{ij} jest macierzą transformacji (obrotu układu), której współrzędne są równe cosinusom kątów między osią x_j układu pierwotnego i x_i' układu po transformacji.



Rys. 38.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (46.1)$$

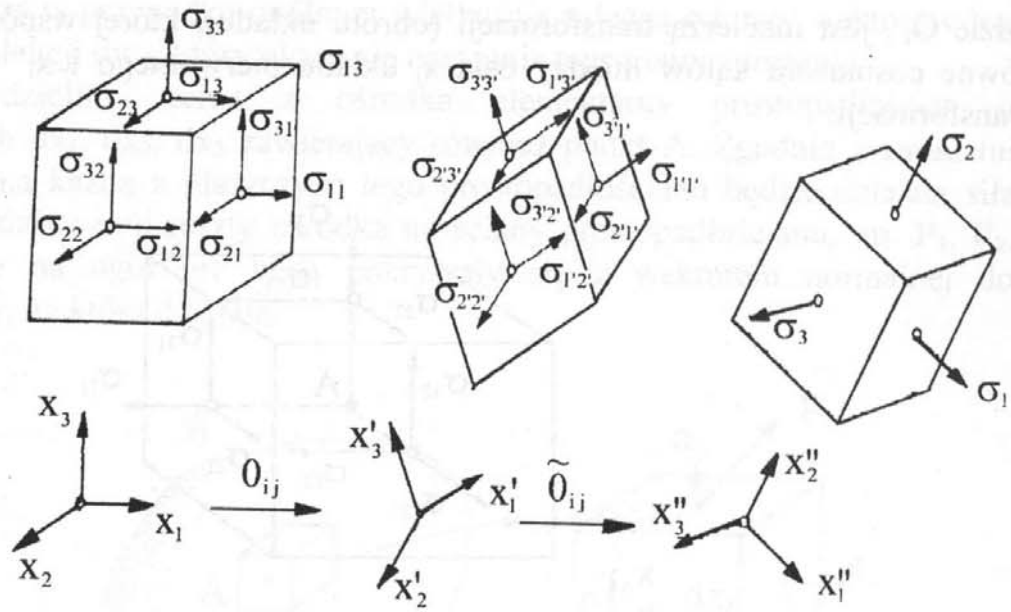
We wzorach tych oczywiście obowiązuje konwencja sumacyjna. Dla przykładu współrzędna $\sigma_{1'3'}$ tensora naprężenia po transformacji wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \sigma_{1'3'} = & O_{1'i} O_{3'j} \sigma_{ij} = O_{1'1} O_{3'1} \sigma_{11} + O_{1'1} O_{3'2} \sigma_{12} + O_{1'1} O_{3'3} \sigma_{13} + \\ & + O_{1'2} O_{3'1} \sigma_{21} + O_{1'2} O_{3'2} \sigma_{22} + O_{1'2} O_{3'3} \sigma_{23} + \\ & + O_{1'3} O_{3'1} \sigma_{31} + O_{1'3} O_{3'2} \sigma_{32} + O_{1'3} O_{3'3} \sigma_{33} \end{aligned}$$

Wśród możliwych obrotów układu współrzędnych istnieje jeden szczególny układ współrzędnych, w którym współrzędne tensora naprężenia mają postać

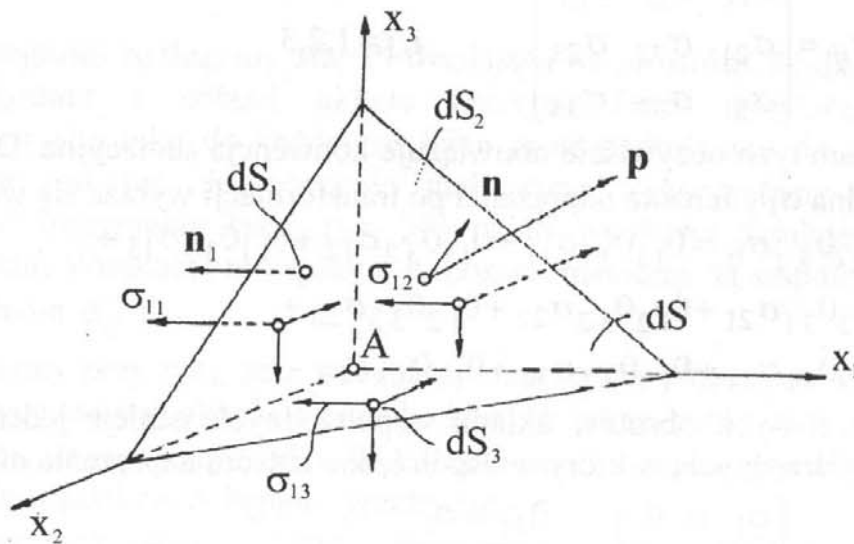
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \sigma_1 \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \sigma_2 \\ \tilde{\sigma}_{33} &= \sigma_3 \end{aligned}$$

tzn. znikają w tej konfiguracji współrzędne tensora naprężenia leżące poza główną przekątną macierzy $[\sigma_{ij}]$.



Rys. 39.

Wartości naprężeń σ_1 , σ_2 i σ_3 nazywamy naprężeniami głównymi, a wyznaczające je osie kierunkami głównymi.



Rys. 40.

Przeanalizujemy z kolei równowagę czworościanu zawierającego punkt A (rys. 40). Z otrzymanych w tym zadaniu równań równowagi wyznaczmy związek między współrzędnymi tensora σ_{ij} a współrzędnymi wektora naprężenia p_i . Będą zachodziły relacje

$$dS_1 = dS n_1$$

$$dS_2 = dS n_2$$

$$dS_3 = dS n_3$$

gdzie n_1, n_2, n_3 są współrzędnymi normalnej \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$).

Z warunku sumy rzutów wszystkich sił na oś x_1 otrzymamy równanie

$$P_1 dS - \sigma_{11} dS_1 - \sigma_{12} dS_2 - \sigma_{13} dS_3 = 0$$

$$(P_1 - \sigma_{11} n_1 - \sigma_{12} n_2 - \sigma_{13} n_3) dS = 0$$

czyli

$$P_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$

Podobnie postępujemy z sumą rzutów na osie x_2 i x_3 . W wyniku uzyskamy układ równań

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = P_1$$

$$\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 = P_2$$

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 = P_3$$

lub następującą zależność

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (46.2)$$

w zapisie wskaźnikowym.

Uzyskana relacja jest podstawową zależnością między tensorem naprężenia σ_{ij} w punkcie A a wektorem naprężenia \mathbf{P}_i występującym w płaszczyźnie określonej przez wektor normalnej \mathbf{n} i zawierającej punkt A. Z zależności tej korzystać będziemy w trakcie określania warunków brzegowych mechaniki na brzegu ciała.

Zwróćmy uwagę, że uzyskany związek między tensorem naprężenia a wektorem naprężenia może służyć do określenia zależności, z której wyznaczymy kierunki główne i wartości naprężeń głównych.

Istotnie w tym przypadku wektory: normalnej \mathbf{n} i naprężenia \mathbf{P} są współliniowe, co zapiszemy następująco:

$$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{n}, \quad \sigma_{ij} n_j = \lambda n_i$$

czyli

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_i = 0 \quad (46.3)$$

Po rozpisaniu tegoż równania uzyskujemy zadanie na wartości własne

$$(\sigma_{11} - \lambda) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0$$

$$\sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \lambda) n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0$$

$$\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \lambda) n_3 = 0$$

Otrzymany układ równań ma niezerowe rozwiązanie, kiedy wyznacznik główny tego układu jest równy zero

$$\det || \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} || = 0$$

Po przekształceniach otrzymamy stąd tzw. równanie wiekowe

$$\lambda^3 - I_\sigma \lambda^2 + II_\sigma \lambda - III_\sigma = 0 \quad (46.4)$$

gdzie $I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$ są trzema niezmiennikami tensora stanu naprężenia σ_{ij} i wynoszą odpowiednio

$$I_{\sigma} = \sigma_{ii} \quad , \quad \Pi_{\sigma} = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji})$$

$$III_{\sigma} = \det || \sigma_{ij} ||$$

Pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ równania wielowego są jednocześnie wartościami naprężeń głównych

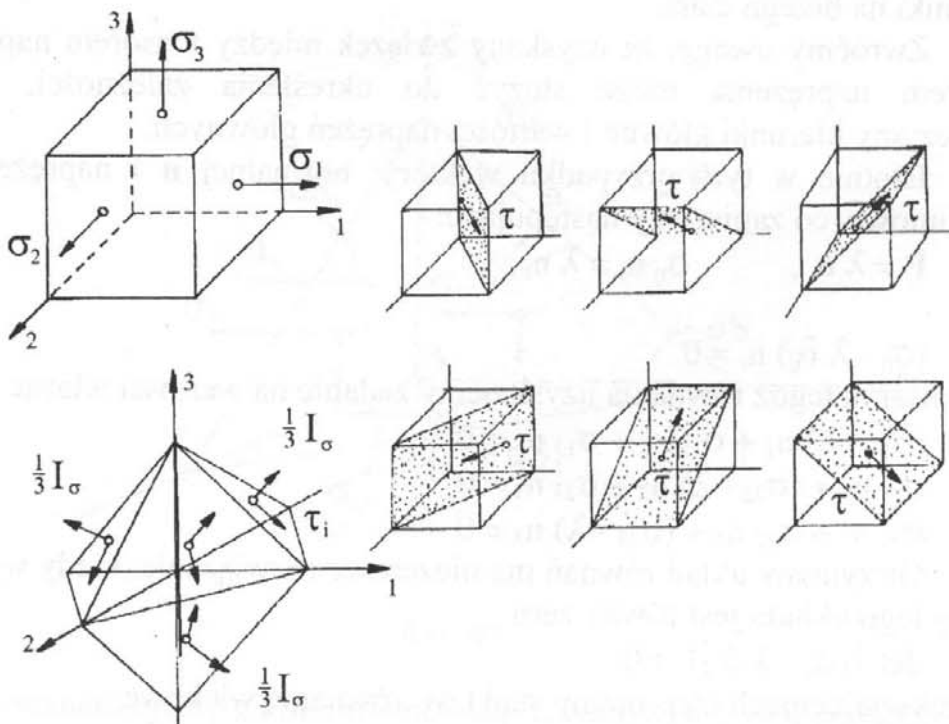
$$\sigma_{i'j'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 = \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 = \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Sposób wyznaczania kierunków głównych i naprężeń głównych jest analogiczny jak przy wyznaczaniu odkształceń głównych. W obu przypadkach mamy do czynienia z poszukiwaniem kierunków głównych i wartości własnych symetrycznego tensora o walencji dwa

Określimy jeszcze główne naprężenia tnące oraz naprężenie oktaedryczne, występujące w płaszczyznach równo nachylonych do kierunków głównych

$$\tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad , \quad \tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$\tau_{(i)} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \sigma_{(i)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{(i)}$$



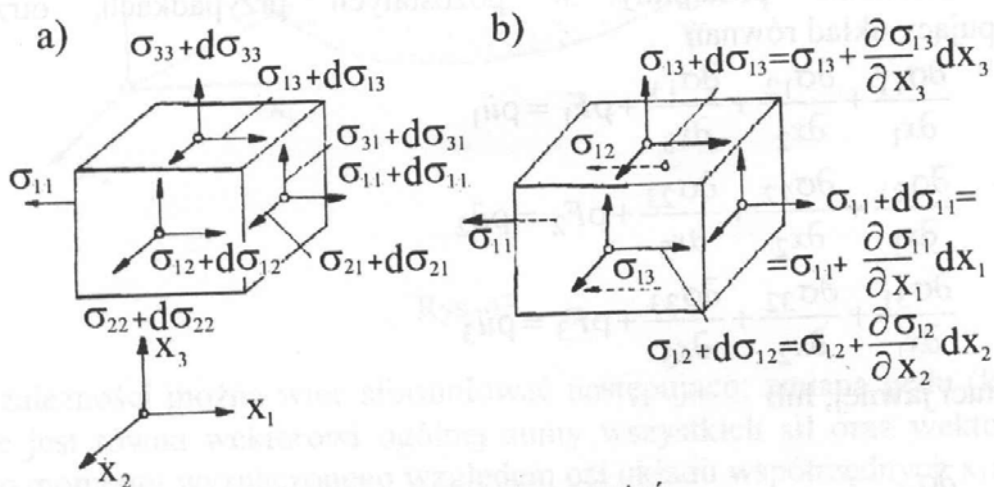
Rys. 41. Główne naprężenia tnące i naprężenia oktaedryczne

Symbole $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \sigma_{(i)}, \tau_{(i)}$ oznaczają odpowiednio naprężenia tnące, intensywność naprężeń ($\sigma_{(i)}$) oraz oktaedryczne naprężenia styczne ($\tau_{(i)}$). Wszystkie wymienione naprężenia związane są z kierunkami głównymi oraz naprężeniami głównymi.

47. RÓWNANIA RÓWNOWAGI WEWNĘTRZNEJ

Przedstawione w poprzednim punkcie współrzędne tensora naprężenia odnoszą się w zasadzie do jednorodnego stanu naprężenia. W rzeczywistości naprężenia w ośrodku będą się zmieniały od punktu do punktu i wzdłuż krawędzi dx_1, dx_2, dx_3 elementarnego prostopadłościanu wydzielonego z ciała wystąpią ich przyrosty. Będziemy więc współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} traktowali jako ciągłe funkcje położenia. Na równoległych ściankach prostopadłościanu (rys. 42.) wystąpią przyrosty współrzędnych tensora σ_{ij} . Na przykład współrzędna σ_{11} doznała przyrostu przy przyroście zmiennej x_1 o $d\sigma_{11}$ a więc

$$d\sigma_{11} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$$



Rys. 42. Przyrosty naprężeń

W podobny sposób wyznaczmy przyrosty wszystkich współrzędnych tensora naprężenia. Dla przykładu przyrosty współrzędnych $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ przedstawiono na rysunku 42 b.

Po wyznaczeniu wszystkich przyrostów współrzędnych tensora naprężenia, ułożymy warunki równowagi dla prostopadłościanu. Z uwagi na dowolny przestrzenny układ sił jaki tutaj wystąpi, trzeba ułożyć sześć warunków równowagi:

$$\begin{aligned} \sum P_1 &= 0, & \sum P_2 &= 0, & \sum P_3 &= 0 \\ \sum M_1 &= 0, & \sum M_2 &= 0, & \sum M_3 &= 0 \end{aligned} \quad (47.1)$$

Bliżej przeanalizujemy równanie wynikające z pierwszego warunku równowagi ($\Sigma \mathbf{P}_1 = 0$). Otrzymujemy w tym przypadku zależności

$$\begin{aligned} & -\sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \\ & -\sigma_{12} dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \\ & -\sigma_{13} dx_1 dx_2 + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \rho F_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \ddot{u}_1 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

w których: ρF_1 – rzut siły $\rho \mathbf{F}$ na oś x_1 , ρ – gęstość, $\rho \ddot{u}_1$ – rzut siły bezwładności na oś x_1 . Korzystaliśmy tutaj z zasady d'Alemberta, dołączając siłę bezwładności do równania statyki.

Wobec dowolnie małych wymiarów prostopadłościanu $dx_1 dx_2 dx_3$ możemy po przekształceniach napisać

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho F_1 - \rho \ddot{u}_1 \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

Podobnie postąpimy w pozostałych przypadkach, otrzymując następujący układ równań

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho F_1 &= \rho \ddot{u}_1 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho F_2 &= \rho \ddot{u}_2 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 &= \rho \ddot{u}_3 \end{aligned}$$

w postaci jawnej, lub

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (47.2)$$

w zapisie wskaźnikowym. Natomiast z warunków momentów wynikają równości

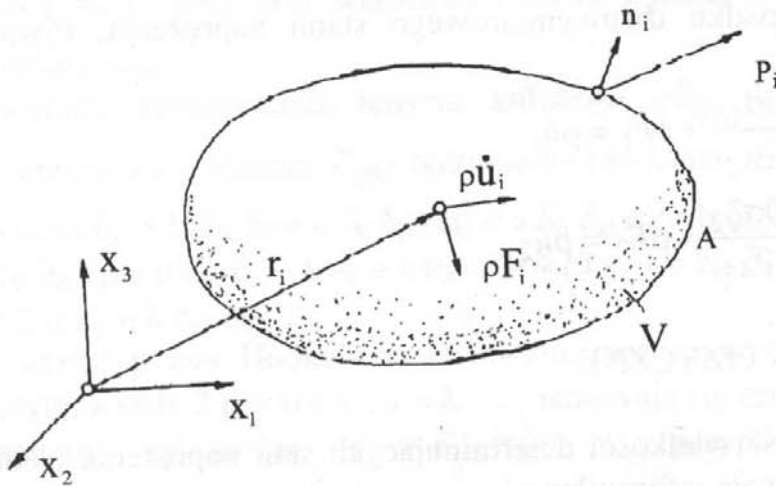
$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \text{które zapewniają symetrię tensora naprężenia, czyli} \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{aligned}$$

Do podanych tutaj równań ruchu w przypadku dynamiki, lub równań równowagi w statyce możemy dojść również z zasady zachowania pędu i krętu. Zasady te zapiszemy następująco

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho F_i dV + \int_A P_i dA \quad (47.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} r_j \rho v_k dV = \int_V \epsilon_{ijk} r_j \rho F_k dV + \int_A \epsilon_{ijk} r_j P_k dA \quad (47.4)$$

gdzie $\int_V \rho v_i dV$ jest pędem ciała, a całka $\int_V \epsilon_{ijk} r_j \rho v_k dV$ jest jego krętem.



Rys. 43.

Podane zależności można więc sformułować następująco: zmiana pędu (krętu) w czasie jest równa wektorowi ogólnej sumy wszystkich sił oraz wektorowi ogólnego momentu wyznaczonego względem osi układu współrzędnych $x_1 x_2 x_3$.

Następnie, w pierwszej równości czyli bilansie pędu, w miejsce siły powierzchniowej P_i podstawimy związek między wektorem naprężenia P_i i tensorem naprężenia σ_{ij} , a dalej skorzystamy z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego o zamianie całki powierzchniowej na całkę po objętości. Uzyskujemy zależności

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho F_i dV + \int_A \sigma_{ij} n_j dA$$

$$\int_V \rho \dot{v}_i dV = \int_V \rho F_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i - \rho \ddot{u}_i \right] dV = 0$$

W efekcie otrzymujemy identyczne jak poprzednio równanie ruchu

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (\sigma_{ij,j} \equiv \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j})$$

Natomiast z bilansu krętu wynika symetria tensora naprężenia

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Ostatnia para równań ruchu w mechanice ośrodka ciągłego nosi nazwę pierwszego i drugiego prawa ruchu Cauchy'ego i zawiera w sobie jako przypadek szczególny warunki równowagi wewnętrznej

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \quad i \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

W przypadku dwuwymiarowego stanu naprężenia, równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho F_1 &= \rho \ddot{u}_1 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho F_2 &= \rho \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (47.5)$$

48. RÓWNANIA FIZYCZNE

Znajomość wielkości determinujących stan naprężenia i odkształcenia w ośrodku pozwala sformułować równania konstytutywne, które razem z równaniami geometrycznymi, równaniami ruchu i warunkami brzegowo-początkowymi określają w pełni zagadnienie brzegowe w mechanice ośrodka ciągłego. Najprostszym równaniem tego typu są równania dla ciała liniowo-sprężystego.

Równania fizyczne powinny spełniać następujące ograniczenia

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \mathfrak{S}_{ij}(\epsilon_{kl}) &\Rightarrow \epsilon_{ij} = \mathfrak{S}^{-1}_{ij}(\sigma_{kl}) \\ \sigma_{ij} = \mathfrak{S}_{ij}(\mathfrak{S}^{-1}_{kl}(\sigma_{ij})), &\quad \mathfrak{S}_{ij}(0) = 0, \quad \mathfrak{S}^{-1}_{ij}(0) = 0 \end{aligned} \quad (48.1)$$

Zależności te są tensorowymi równaniami łączącymi tensory naprężenia i odkształcenia.

Zwróćmy uwagę, iż ogólną postać równań fizycznych ciała sprężystego możemy aproksymować liniowymi równaniami przyrostowymi postaci

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (48.2)$$

w którym tensor E_{ijkl} zależeć będzie od stanu odkształcenia.

w którym tensor E_{ijkl} zależeć będzie od stanu odkształcenia.

Natomiast ogólna, liniowa zależność łącząca parę tensorów $(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij})$ ma postać

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \epsilon_{ij} = F_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad E_{ijkl} F_{klmn} = \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (48.3)$$

gdzie tensor stałych materiałowych E_{ijkl} charakteryzuje się następującymi symetriami

$$E_{ijkl} = E_{jikl}, \quad E_{ijkl} = E_{ijlk}, \quad E_{ijkl} = E_{klij}$$

wynikającymi z symetrii tensorów naprężenia i odkształcenia, podobnie jak i tensor F_{ijkl} .

W przypadku ciała izotropowego należy w miejsce tensora E_{ijkl} , reprezentującego właściwości ośrodka, podstawić jego odpowiednik izotropowy

$$E_{ijkl} = a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{jk}$$

Wykorzystano przy tym własności tensora kulistego: $c\delta_{ij}$ do opisu materiału izotropowego.

W wyniku zastosowania tensora kulistego $c\delta_{ij}$ do poszukiwania izotropowej reprezentacji tensora E_{ijkl} otrzymamy równania

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (a \delta_{ij} \delta_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} + c \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon_{kl} = a \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} + b \delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{kl} + \\ &+ c \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon_{kl} = a \epsilon_{kk} \delta_{ij} + b \epsilon_{ij} + c \epsilon_{ji} = (b + c) \epsilon_{ij} + a \epsilon_{kk} \delta_{ij} \\ \sigma_{ij} &= 2 \mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (48.4)$$

które noszą nazwę prawa Hooke'a w liniowym, izotropowym i jednorodnym ciele sprężystym, a stałe $2 \mu = b + c$, $a = \lambda$ nazywają się stałymi Lamego.

Odwrotne zależności $\epsilon_{ij} = F_{ijkl} \sigma_{kl}$ w przypadku materiału izotropowego prowadzą do wzajemnych równań fizycznych

$$\epsilon_{ij} = 2 \mu' \sigma_{ij} + \lambda' \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Równania te uzyskano w wyniku podobnego postępowania jak poprzednio.

Związki między stałymi (μ, λ) i (μ', λ') wyznaczamy po uprzednim wydzieleniu części symetrycznych i dewiatorów obu tensorów. Będzie:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2 \mu \epsilon_{ii} + \lambda \delta_{ii} \epsilon_{kk} \Rightarrow \sigma_{ii} = (2 \mu + 3 \lambda) \epsilon_{kk} \\ \epsilon_{ii} &= 2 \mu' \sigma_{ii} + \lambda' \delta_{ii} \sigma_{kk} \Rightarrow \epsilon_{ii} = (2 \mu' + 3 \lambda') \sigma_{kk} \\ (\sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}) &= 2 \mu (\epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon_{kk} \delta_{ij}) \\ (\epsilon_{ij} - 1/3 \epsilon_{kk} \delta_{ij}) &= 2 \mu' (\sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}) \end{aligned}$$

stąd

$$(2\mu + 3\lambda) = \frac{1}{2\mu' + 3\lambda'}, \quad 2\mu = \frac{1}{2\mu'}$$

Z ostatniego układu równań wyznaczmy stałe μ' i λ' , które wynoszą

$$\mu' = \frac{1}{4\mu}, \quad (2\mu + 3\lambda)(2\mu' + 3\lambda') = 1, \quad \lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}$$

Wyprowadzimy teraz równania fizyczne wykorzystując analizę stanu naprężenia i odkształcenia przeprowadzoną w sposób typowy dla wytrzymałości materiałów.

Punktem wyjścia będzie doświadczalnie stwierdzony fakt przewężenia poprzecznego przekroju na kierunkach prostopadłych do kierunku działania naprężenia rozciągającego. Jeżeli wówczas na kierunku x_1 wystąpi naprężenie rozciągające i wydłużenie, to na kierunkach x_2 i x_3 wystąpi skrócenie. Współczynnik określający stosunek wydłużenia w kierunku występowania przewężenia do wydłużenia nosi nazwę współczynnika Poissona ν .

W efekcie otrzymujemy następujący układ równań fizycznych

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{kk}]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \rightarrow \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{kk}]$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{33} - \nu\sigma_{kk}]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G}\sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G}\sigma_{23}$$

stąd

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right], \quad \frac{1}{2G} = \frac{1+\nu}{E} \quad (48.6)$$

W równaniach tych E jest modułem sprężystości podłużnej a G modułem Kirchhoffa. Natomiast z porównania tych równań fizycznych z równaniami

$$\varepsilon_{ij} = 2\mu'\sigma_{ij} + \lambda'\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

uzyskamy zależności między stałymi materiałowymi

$$2\mu' = \frac{\nu+1}{E}, \quad \lambda' = -\frac{\nu}{E}, \quad 2\mu' = \frac{1}{2G}$$

$$\frac{1}{4\mu} = \frac{\nu+1}{2E}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(\nu+1)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \mu = G$$

Podamy jeszcze czwartą postać równań fizycznych dla liniowego ciała sprężystego:

$$\sigma_{11} = 2G \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right], \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{22} = 2G \left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right], \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23}$$

$$\sigma_{33} = 2G \left[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \right], \quad \sigma_{13} = 2G \varepsilon_{13}$$

Ogólnie

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (48.7)$$

Innym, stosunkowo prostym przypadkiem równań fizycznych są równania liniowej lepkosprężystości. Równania te wymagają jednak wprowadzenia dwóch nowych pojęć, a mianowicie pełzania i relaksacji materiału. Pełzaniem materiału będziemy nazywali zmianę (przyrost) odkształceń występujących przy stałym naprężeniu. Odwrotnie, relaksacją nazywać będziemy zmianę (ubytek) naprężeń przy stałej wartości odkształcenia.

W materiale lepkosprężystym stan naprężeń zależy więc nie tylko od aktualnej wartości odkształceń, ale również od odkształceń występujących w przeszłości. W przypadku materiału lepkosprężystego równania fizyczne mają postać:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} \equiv \int_{-\infty}^t E_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) \quad (48.8)$$

$$\varepsilon_{ij} = F_{ijkl} * d\sigma_{kl} \equiv \int_{-\infty}^t F_{ijkl}(t-\tau) d\sigma_{kl}(\tau), \quad \tau \in [0, t]$$

gdzie t jest czasem, tensory $E_{ijkl}(t)$ i $F_{ijkl}(t)$ są odpowiednio tensorami funkcji relaksacji i pełzania a symbol $*$ oznacza iloczyn splotowy uwzględniający wpływ przeszłych stanów naprężenia czy odkształcenia na stany aktualne.

Zwróćmy uwagę na podobieństwo formalne równań teorii sprężystości i lepkosprężystości. Istotnie, występujące w lepkosprężystości iloczyny splotowe Stieltjesa odpowiadają zwykłym iloczynom tensorów E_{ijkl} i F_{ijkl} stałych materiałowych w równaniach fizycznych sprężystości.

W przypadku izotropowego ciała lepkosprężystego tensory funkcji relaksacji i pełzania E_{ijkl} i F_{ijkl} mają postać:

$$E_{ijkl}(t) = a(t) \delta_{ij} \delta_{kl} + b(t) \delta_{ik} \delta_{jl} + c(t) \delta_{il} \delta_{jk}$$

$$F_{ijkl}(t) = a'(t) \delta_{ij} \delta_{kl} + b'(t) \delta_{ik} \delta_{jl} + c'(t) \delta_{il} \delta_{jk}$$

Równania fizyczne dla izotropowego ciała lepkosprężystego mają formę

$$\sigma_{ij}(t) = 2\mu * d\varepsilon_{ij} + \lambda * d\varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}(t) = 2\mu' * d\sigma_{ij} + \lambda' * d\sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (48.9)$$

w których $2\mu = 2G$ i $K = 2\mu + 3\lambda$ są funkcjami relaksacji związanymi odpowiednio ze zmianami postaciowymi i objętościowymi, natomiast $2\mu'$ i $2\mu' + 3\lambda'$ są funkcjami pełzania dla zmian postaciowych i objętościowych.

Przytoczone formy równań fizycznych dla ciała sprężystego i lepkosprężystego zostaną dalej wykorzystane przy wyprowadzaniu zadań brzegowych teorii sprężystości czy też wytrzymałości materiałów. Będą to w pierwszej kolejności równania przemieszczeniowe teorii sprężystości lub lepkosprężystości oraz równania teorii płyt cienkich i równania tarczy.

49. RÓWNANIA PRZEMIESZCZENIOWE

Przekształcenia równań fizycznych, geometrycznych i równań ruchu prowadzą do równań przemieszczeniowych teorii sprężystości i lepkosprężystości. Równania te stanowią podstawowy układ równań zagadnień teorii sprężystości czy też lepkosprężystości i łącznie z warunkami początkowo-brzegowymi pozwalają określać pola przemieszczeń i naprężeń w ośrodku.

Wyjściowy komplet równań zagadnienia zawiera w tym przypadku:

- równania ruchu

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (49.1)$$

- równania geometryczne

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (49.2)$$

- równania fizyczne

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (49.3)$$

oraz warunki brzegowe

- w naprężeniach

$$\sigma_{ij}n_j \Big|_{x \in S_1} = P_i, \quad [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij}]n_j \Big|_{x \in S_1} = P_i$$

- w przemieszczeniach

$$u_i \Big|_{x \in S_2} = u_i \quad (49.4)$$

i początkowe

$$u_i(x, 0_+) = u_{i0}, \quad v_i(x, 0_+) = v_{i0} \quad (49.5)$$

Równania przemieszczeniowe uzyskamy przez wprowadzenie równań geometrycznych i fizycznych do równań ruchu. Najpierw wyznaczamy $\sigma_{ij,j}$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \left[\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda(u_{k,k}) \delta_{ij} \right]_{,j} = \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + \lambda u_{k,ki} = \\ &= \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji}\end{aligned}$$

Uzyskany rezultat podstawiamy do równań ruchu.

W wyniku otrzymujemy układ równań przemieszczeniowych

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (49.6)$$

który w postaci macierzowej ma postać następującą

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \rho\mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

lub

$$\mu u_{1,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,j1} + \rho F_1 = \rho \ddot{u}_1$$

$$\mu u_{2,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,j2} + \rho F_2 = \rho \ddot{u}_2$$

$$\mu u_{3,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,j3} + \rho F_3 = \rho \ddot{u}_3$$

W przypadku lepkosprężystym dywergencja tensora naprężeń wynosi

$$\sigma_{ij,j} = \left[\mu * (du_{i,j} + du_{j,i}) + \lambda * du_{k,k} \delta_{ij} \right]_{,j} = \mu * du_{i,jj} + (\lambda + \mu) * du_{j,ji}$$

a równania przemieszczeniowe mają postać

$$\mu * du_{i,jj} + (\lambda + \mu) * du_{j,ji} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (49.7)$$

natomiast warunki początkowe i brzegowe stawiane są w obu zadaniach identycznie.

Sytuacja w tym przypadku jest następująca: w zadaniu sprężystym należy scałkować układ trzech równań różniczkowych – cząstkowych z uwzględnieniem warunków początkowych i brzegowych. Znajomość współrzędnych pola przemieszczeń u_i w ośrodku pozwala następnie określić przez różniczkowanie współrzędne tensora odkształcenia ϵ_{ij} , a na podstawie znajomości tegoż tensora z równań fizycznych wyznaczamy stan naprężenia w materiale. A więc znajomość pola przemieszczeń w ośrodku wystarcza do określenia stanu odkształcenia i naprężenia. Natomiast znajomość stanu odkształcenia i naprężenia w zupełności wystarcza przy projektowaniu konstrukcji inżynierskich. Mamy więc pierwszy ogólny sposób rozwiązywania przestrzennych zadań teorii sprężystości czy też lepkosprężystości. Do zasadniczych niedomagań tego sposobu rozwiązywania zaliczyć należy trudności matematyczne jakie wyłaniają się przy całkowaniu równań przemieszczeniowych. Trudności te powodują, że w MOC w szerokim zakresie rozwinęły się przybliżone metody rozwiązywania zadań brzegowych teorii sprężystości czy też lepkosprężystości.

50. RÓWNANIA NAPRĘŻENIOWE

Analizowane w poprzednim podrozdziale równania przemieszczeniowe Lamego otrzymaliśmy z równań ruchu oraz równań fizycznych i geometrycznych. Poszukiwanymi funkcjami były współrzędne wektora przemieszczeń w ośrodku. Odmienne podejście do zagadnienia przedstawimy w tym punkcie. Będziemy również korzystali z równań strony fizycznej, geometrycznej i równań ruchu z tym, że poszukiwanymi funkcjami w zadaniu będą współrzędne tensora naprężenia. W trakcie wyprowadzeń wykorzystamy równania przemieszczeniowe oraz warunki nierozdzielności, które nieco szerzej obecnie omówimy.

Jeżeli przyjmiemy, że przemieszczenia ośrodka u_i są funkcjami ciągłymi klasy C_1 względem współrzędnych przestrzennych, to powstaje naturalne pytanie, czy współrzędne tensora odkształceń ε_{ij} mogą być wybrane dowolnie? Odpowiedź jest przecząca ze względu na to, że wyznaczenie współrzędnych przemieszczeń u_i wymaga scałkowania układu sześciu równań różniczkowych, wyznaczających tensor odkształcenia:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Z równań tych nie uzyskamy jednoznacznego rozwiązania, czyli pola przemieszczeń w ośrodku. Należy tutaj oczekiwać dodatkowych warunków ograniczających, którymi są właśnie warunki nierozdzielności.

Warunki te zapisane w postaci zwartej są następujące:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{kn,mj} = 0 \quad (50.1)$$

gdzie ε_{ijk} , ε_{lmn} są symbolami permutacyjnymi Ricci'ego a

$\varepsilon_{kn,mj} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{kn}}{\partial^2 x_m \partial x_j}$ jest pochodną tensora odkształcenia. Warto zwrócić uwagę

na to, że równania geometryczne są całkami warunków nierozdzielności.

W wyniku przekształceń równania nierozdzielności przyjmą postać następującą:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

Przedstawiona zależność stanowi układ 81 równań, z których tylko 6 jest niezależnych. Układ tych niezależnych równań przedstawia równość

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{jk,ik} = 0$$

z której będziemy korzystać dalej.

Przy wyprowadzaniu równań naprężeniowych teorii sprężystości punktem wyjściowym są równania:

- równowagi wewnętrznej

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \quad (50.2)$$

- równania fizyczne

$$\varepsilon_{ij} = 2\mu' \sigma_{ij} + \lambda' \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad \text{gdzie: } 2\mu' = \frac{1}{2\mu},$$

$$\lambda' = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (50.3)$$

- warunki nierozdzielności

$$\varepsilon_{ij,kk} - \varepsilon_{kk,ij} - \varepsilon_{ik,jk} - \varepsilon_{jk,ik} = 0 \quad (50.4)$$

oraz naprężeniowe warunki brzegowe na brzegu A_σ

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (50.5)$$

Równania naprężeniowe wyprowadza się w ten sposób, że równania fizyczne podstawiane są do warunków nierozdzielności z wykorzystaniem równań równowagi.

Równania te wyprowadzimy jednak w nieco inny sposób wykorzystując do tego celu podane w poprzednim punkcie równania przemieszczeniowe.

Będziemy w tym celu różniczkowali równania przemieszczeniowe względem x_k

$$[\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho F_i]_{,k} = 0$$

$$\mu u_{i,jjk} + (\lambda + \mu) u_{j,jik} + \rho F_{i,k} = 0$$

Zamiana wskaźników $i \leftrightarrow k$ daje równanie

$$\mu u_{k,jji} + (\lambda + \mu) u_{j,jik} + \rho F_{k,i} = 0$$

które dodamy stronami do równania poprzedniego uzyskując kolejno

$$\mu(u_{i,kjj} + u_{k,ijj}) + (\lambda + \mu)(u_{j,jki} + u_{j,jik}) + \rho F_{i,k} + \rho F_{k,i} = 0$$

$$\mu(u_{i,k} + u_{k,i})_{,jj} + (\lambda + \mu)(e_{,ki} + e_{,ik}) + \rho F_{i,k} + \rho F_{k,i} = 0$$

$$2\mu \varepsilon_{ik,jj} + 2(\lambda + \mu) e_{,ki} + \rho F_{i,k} + \rho F_{k,i} = 0$$

$$\varepsilon_{ik,jj} + k e_{,ki} + \frac{\rho}{2\mu} (F_{i,k} + F_{k,i}) = 0$$

$$\text{gdzie } k = \frac{\lambda + \mu}{\mu}, \quad e = u_{j,j}$$

Jeżeli do równań tych podstawimy równania fizyczne to otrzymamy:

$$(2\mu'\sigma_{ik} + \lambda'\sigma_{ll}\delta_{ik}),_{jj} + k(2\mu' + 3\lambda')\sigma_{ll,ki} + \frac{\rho}{2\mu}(F_{i,k} + F_{k,i}) = 0$$

Wyrażając μ' i λ' przez stałe Lamego μ , λ uzyskujemy po przekształceniach równanie naprężeniowe

$$\sigma_{ij,ll} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{ll,ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\sigma_{ll,kk} + \rho F_{i,j} + \rho F_{j,i} = 0 \quad (50.6)$$

teorii sprężystości, czyli równania Beltramiiego-Michella.

Zwracamy tutaj uwagę na pominięcie w tych wyprowadzeniach równań nierozdzielności. Okazuje się jednak, że można tak postąpić, gdyż w równaniach przemieszczeniowych tożsamościowo są spełnione warunki nierozdzielności. Istotnie przy ich wyprowadzeniu korzysta się z równań geometrycznych, które są całkami równań nierozdzielności (warunków nierozdzielności).

Do równań naprężeniowych dołączamy warunki brzegowe w naprężeniach na części brzegu A_σ

$$\sigma_{ij}n_j = P_i$$

które łącznie z równaniami naprężeniowymi pozwalają na wyznaczenie współrzędnych stanu naprężenia a dalej stanu odkształcenia w ciele.

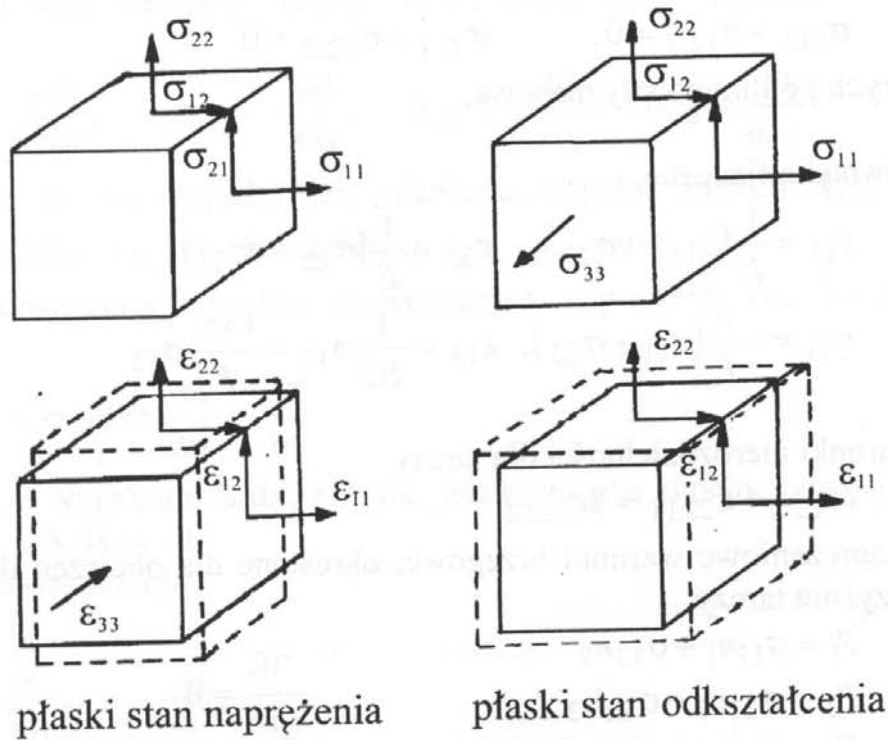
Równania naprężeniowe i przemieszczeniowe stanowią podstawowe układy równań rozwiązujących teorii sprężystości. W pierwszym przypadku poszukujemy współrzędnych tensora stanu naprężenia, natomiast w drugim przypadku wektora przemieszczenia. Przez analogię z parą podstawowych metod rozwiązywania zadań mechaniki budowli, pierwsze podejście bywa nazywane metodą sił, natomiast drugie metodą przemieszczeń. Metody te znajdują odzwierciedlenie również w rozwiązywaniu zadań wytrzymałości materiałów.

51 RÓWNANIA TARCZY

Szczególnym przypadkiem przestrzennym zadań teorii sprężystości są zadania dwuwymiarowe. W zakresie tych zadań można mówić o płaskim stanie naprężenia oraz o płaskim stanie odkształcenia. Jak wiadomo, z płaskim stanem naprężenia związany jest przestrzenny stan naprężenia i odwrotnie z płaskim stanem naprężenia, przestrzenny stan odkształcenia.

W niniejszym punkcie analizować będziemy płaski stan naprężenia, który odpowiada często występującym w konstrukcjach inżynierskich tarczom. Tarczą nazywać będziemy płaski element konstrukcyjny, w którym grubość jest wielkością znacznie mniejszą w porównaniu do dwóch pozostałych wymiarów tarczy. Zakładać przy tym będziemy, że rozkład naprężeń wzdłuż grubości tarczy można przyjąć jako równomierny. W konsekwencji zaistniałą sytuację

możemy opisać płaskim stanem naprężenia i przypisanym mu przestrzennym stanem odkształcenia, wynikającym z równań tworzących.



Rys. 44. Płaskie zadanie

Stany naprężeń i odkształceń opisywać będą tensory σ_{ij} i ϵ_{ij}

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51.1)$$

Ze względu na równanie tworzące dla współrzędnej ϵ_{33} tensora ϵ_{ij}

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]$$

uzyskamy po uwzględnieniu przyjętej postaci tensora naprężenia związek

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

stąd, z uwagi na niezależność stanu naprężenia od zmiennej x_3 będzie:

$$u_3 = \epsilon_{33} x_3 = -\frac{\nu x_3}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Otrzymany związek pozwoli nam na wyznaczenie przemieszczeń normalnych w tarczy.

Punktem wyjściowym przy wyprowadzaniu równania tarczy będą równania:

- równowagi

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 \quad (51.2)$$

w których pominięto siły masowe,

- równania fizyczne

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \quad (51.3)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}$$

- warunki nierozdzielności dla tarczy

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12} \quad (51.4)$$

oraz naprężeniowe warunki brzegowe, określone dla obciążeń działających w płaszczyźnie tarczy.

$$P_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2$$

$$P_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2$$

$$P_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}n_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (51.5)$$

Przytoczony warunek nierozdzielności (51.4) uzyskujemy z równań geometrycznych

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) = u_{1,1} \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2}) = u_{2,2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

po dwukrotnym zróżniczkowaniu, wg relacji

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}$$

W dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy funkcją naprężeń Airy'ego, która rozwiązanie zadań brzegowych płaskiego stanu naprężenia

sprowadzi do rozwiązania jednego równania różniczkowego. Posłużymy się tutaj równaniami równowagi z pominięciem sił masowych:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \quad (\sigma_{12} = \sigma_{21})$$

Jeżeli wprowadzimy funkcje $A(x_1, x_2)$ i $B(x_1, x_2)$ tak, że będzie zachodzić

$$\sigma_{11} = \frac{\partial B}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad \sigma_{21} = -\frac{\partial B}{\partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial A}{\partial x_2}$$

to wyrażenie $\sigma_{11}dx_2 - \sigma_{12}dx_1$ jest różniczką zupełną funkcji $A(x_1, x_2)$, a wyrażenie $\sigma_{22}dx_1 - \sigma_{12}dx_2$ funkcji $B(x_1, x_2)$.

Z porównania wyrażen określających naprężenia σ_{12} uzyskujemy zależności

$$(\sigma_{12} = \sigma_{21}) \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\partial B}{\partial x_2}$$

wskazujące, że wyrażenie $B dx_1 + A dx_2$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji F , tzn. $B dx_1 + A dx_2 = dF$.

Zachodzą relacje

$$A = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad B = \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

wynikające z tego, że dF jest różniczką zupełną.

Współrzędne tensora naprężeń wyrażają się poprzez funkcję naprężeń F następująco

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (51.6)$$

Podstawmy wprowadzone tutaj relacje do równań fizycznych. Będzie

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \Rightarrow \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} \right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \Rightarrow \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

Uzyskane zależności wprowadzimy następnie do warunku nierozdzielności

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} - \nu \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} - \nu \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} \right) = \frac{2(1+\nu)}{E} \left(-\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right)$$

uzyskując końcową postać równania tarczy

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0 \quad (51.7)$$

które z matematycznego punktu widzenia jest równaniem biharmonicznym

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

52. WIELOMIANOWE ROZWIĄZANIA RÓWNANIA TARCZY

Uzyskane w poprzednim podrozdziale równanie tarczy posłuży nam do analizy kilku rozkładów płaskich stanów naprężeń. Najprostsze niewątpliwie rozwiązanie uzyskamy dla funkcji naprężeń w postaci wielomianu z nieokreślonymi współczynnikami, które w trakcie rozwiązywania tak dobierzemy, aby spełnić określone warunki brzegowe. Rozwiązania wielomianowe są szczególnie korzystne w przypadku tarcz prostokątnych, a ich praktyczne wykorzystanie jest efektywne po wykorzystaniu zasady superpozycji, obowiązującej w liniowej teorii sprężystości. Prześledzimy te rozwiązania po przyjęciu, że funkcja naprężeń będzie wielomianem drugiego lub trzeciego rzędu.

a) wielomian drugiego rzędu

$$F = a_2 \frac{x^2}{2} + b_2 xy + c_2 \frac{y^2}{2} \quad (x_1 = x, \quad x_2 = y)$$

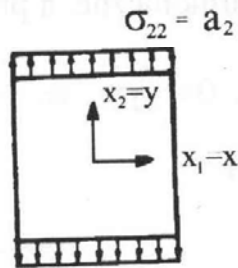
spełnia równanie biharmoniczne we wnętrzu tarczy, natomiast na brzegu powinien spełniać warunki brzegowe.

Naprężenia określone są zależnościami

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = a_2, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -b_2$$

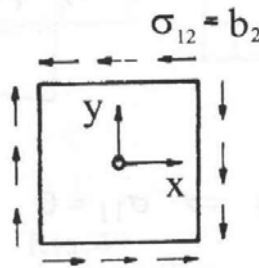
Przypadki szczególne tego wielomianu dają rozwiązania

$$(a_2 \neq 0, \quad b_2 = c_2 = 0) \Rightarrow \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = a_2, \quad \sigma_{12} = 0$$



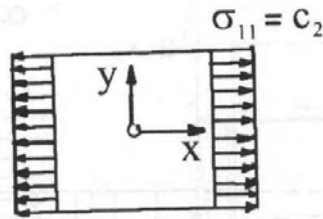
Rys. 45

$$(a_2 = 0, \quad b_2 \neq 0, \quad c_2 = 0) \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -b_2$$



Rys. 46

$$(a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_2 \neq 0) \Rightarrow \sigma_{11} = c_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0$$



Rys. 47.

Stosując zasadę superpozycji możemy z tych trzech przypadków szczególnych zbudować całą dalszą rodzinę rozwiązań.

b) wielomian trzeciego rzędu

$$F = \frac{a_3 x^3}{6} + \frac{b_3 x^2 y}{2} + \frac{c_3 x y^2}{2} + \frac{d_3 y^3}{6}$$

spełnia również równanie biharmoniczne, a przypisane mu współrzędne tensora naprężenia wynoszą

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y$$

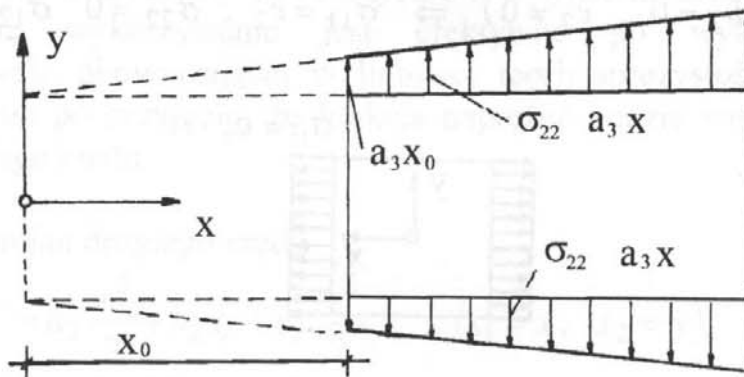
$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y$$

Wystąpią tutaj również cztery przypadki szczególne określone zależnościami:

- pierwszy przypadek

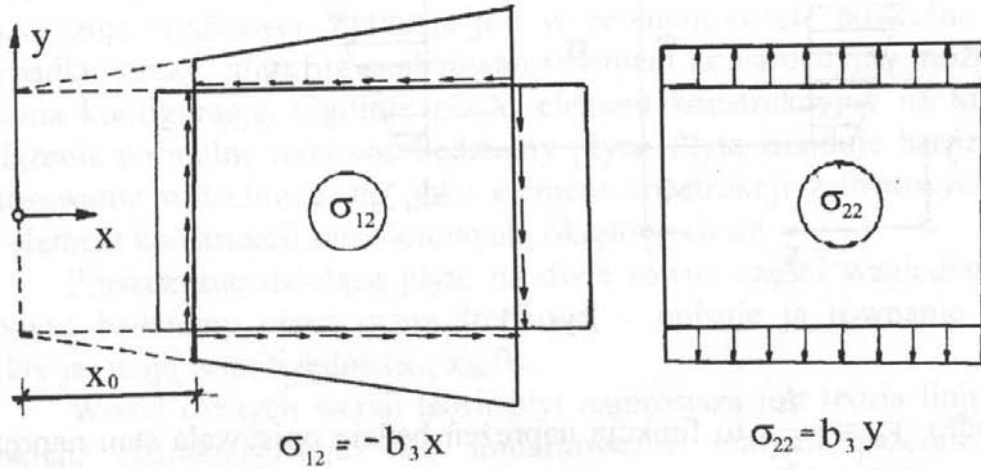
$$(a_3 \neq 0, \quad b_3 = c_3 = d_3 = 0) \Rightarrow \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = a_3 x, \quad \sigma_{12} = 0$$



Rys. 48.

- drugi przypadek

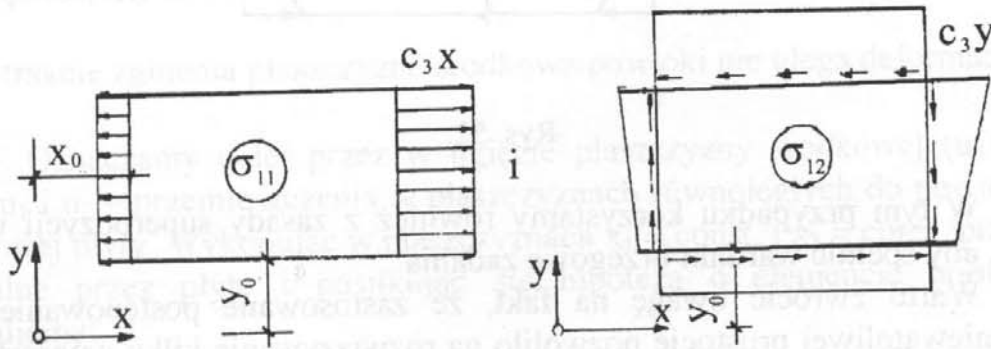
$$(a_3 = 0, \quad b_3 \neq 0, \quad c_3 = d_3 = 0) \Rightarrow \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = b_3 y, \quad \sigma_{12} = -b_3 x$$



Rys. 49.

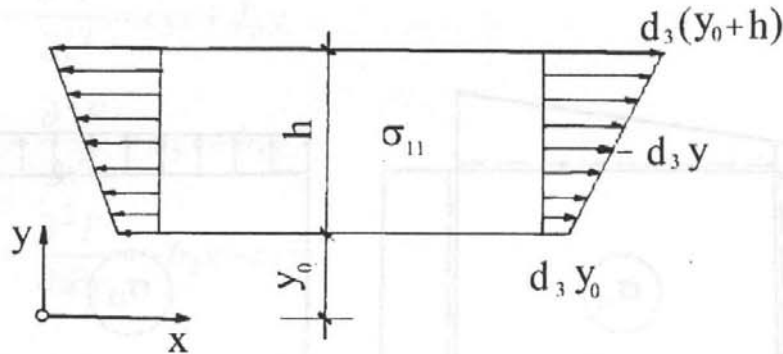
- trzeci przypadek

$$(a_3 = b_3 = 0, \quad c_3 \neq 0, \quad d_3 = 0) \Rightarrow (\sigma_{11} = c_3 x, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -c_3 y)$$



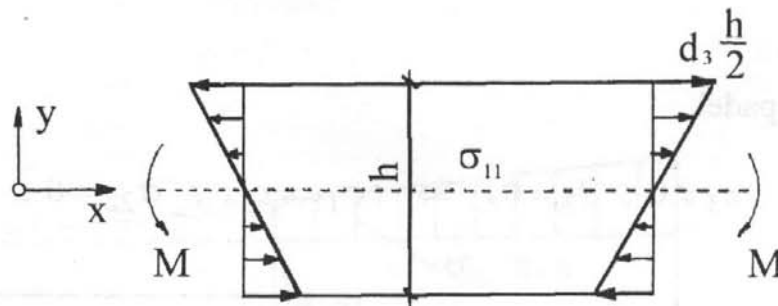
Rys. 50.

- czwarty przypadek szczególny
 ($a_3 = b_3 = c_3 = 0$, $d_3 \neq 0$) \Rightarrow ($\sigma_{11} = d_3 y$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{12} = 0$)



Rys. 51.

jeżeli ponadto $y_0 = -\frac{h}{2}$, to funkcja naprężeń będzie opisywała stan naprężeń przy czystym zginaniu.



Rys. 52.

W tym przypadku korzystamy również z zasady superpozycji w taki sposób, aby spełnić warunki brzegowe zadania.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że zastosowane postępowanie przy swojej niewątpliwiej prostocie pozwoliło na rozwiązywanie kilku najprostszyc zadań brzegowych. Ogólnie, przy posilkowaniu się wielomianami przyjmujemy ich ogólną postać, a wartości współczynników dobieramy tak, aby spełnić warunki brzegowe. Sposób ten nazywa się półodwrotnym i stosuje się go do wielomianów dowolnego rzędu, z tym, że przy wielomianach wyższych rzędów należy uczynić zadość dodatkowym ograniczeniom wynikającym z równania biharmonicznego. Inne sposoby rozwiązywania zadań brzegowych tarcz polegają na wykorzystaniu transformacji całkowych Fouriera, szeregów trygonometrycznych, metody różnic skończonych itp.

53. PŁYTA CIENKA

Jeżeli na element konstrukcyjny, który w p. 52 nazywaliśmy tarczą, działa obciążenie normalne do płaszczyzny środkowej, to w wyniku działania tego obciążenia wystąpią przemieszczenia normalne, prostopadłe do tarczy. Przemieszczenia te są oczywiście znacznie większe aniżeli przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej. Sytuacja jest w pewnym sensie odwrotna aniżeli w przypadku tarczy, mimo iż analizowany element konstrukcyjny może posiadać tę samą konfigurację. Ogólnie płaski element konstrukcyjny na który działa obciążenie normalne nazywać będziemy płytą. Płyta znajduje bardzo szerokie zastosowanie w technice, np. jako element konstrukcji żelbetowych (stropy); czy element konstrukcji samolotowych, okrętowych itd.

Płaszczyznę dzielącą płytę na dwie równe części względem grubości nazywać będziemy płaszczyzną środkową – opisuje ją równanie $x_3 = 0$, a punkty jej mają współrzędne $(x_1, x_2, 0)$.

Wśród różnych wersji teorii płyt najprostszą jest teoria liniowych płyt cienkich, charakteryzująca się umiarkowanie małymi przemieszczeniami normalnymi powierzchni środkowej w stosunku do grubości płyty.

W przypadku tej teorii należy przyjąć następujące założenia:

- normalna do powierzchni środkowej płyty przed zginaniem pozostaje normalną do powierzchni środkowej w czasie zginania;
- współrzędna σ_{33} tensora naprężeń σ_{ij} jest mała w porównaniu z pozostałymi współrzędnymi i zostanie w obliczeniach pominięta;
- w trakcie zginania płaszczyzna środkowa powłoki nie ulega deformacjom.

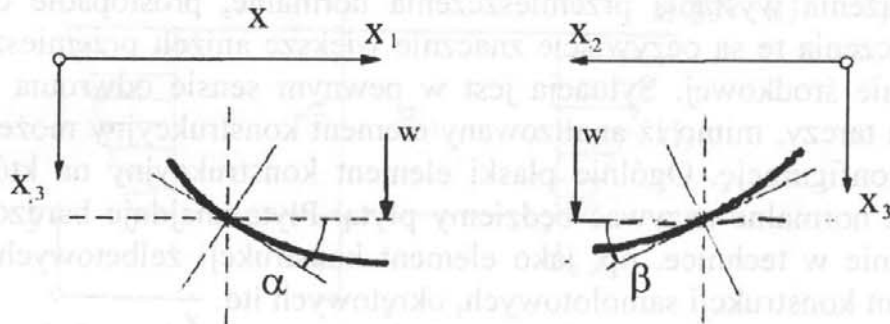
Oznaczamy dalej przez w ugięcie płaszczyzny środkowej ($u_3 \equiv w$) a przez u_1 i u_2 – przemieszczenia w płaszczyznach równoległych do powierzchni środkowej płyty. Wykonując w płaszczyznach $x_1 = \text{const.}$ i $x_2 = \text{const.}$ przekroje normalne przez płytę i posiłkując się hipotezą o elemencie normalnym uzyskujemy:

$$u_1 = -x_3 \operatorname{tg} \alpha$$

$$u_2 = -x_3 \operatorname{tg} \beta$$

$$\alpha \equiv \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

$$\beta \equiv \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial w}{\partial x_2}$$



Rys. 53. Przekroje normalne w płycie – stan przemieszczeń

Na podstawie przyjętych uproszczeń dotyczących kinematyki ośrodka wyrażamy przemieszczenia u_1 i u_2 przez przemieszczenie normalne w :

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (53.1)$$

Uzyskaliśmy tutaj bardzo znaczne uproszczenie zadania, gdyż w dalszym ciągu należy wyznaczyć tylko przemieszczenie normalne płyty, aby określić pozostałe dwie współrzędne wektora przemieszczeń a w dalszej kolejności tensora odkształceń i naprężeń. Sprowadziliśmy więc trójwymiarowe –przestrzenne zadanie teorii sprężystości do zadania jednowymiarowego.

Dalsze postępowanie w przypadku poszukiwania równania różniczkowego ugięć płyty jest analogiczne jak przy wyprowadzaniu równań przemieszczeniowych, a więc określamy współrzędne tensora odkształcenia i naprężenia poprzez współrzędne wektora przemieszczenia. Równania zagadnienia otrzymuje się po wprowadzeniu tensora naprężenia wyrażonego przez przemieszczenia do równań równowagi. Postępowanie to jest słuszne również w teorii płyt, z tym, że wprowadzamy tu w miejsce naprężeń pewne ekwiwalentne funkcje, które pozwalają sprowadzić zadanie trójwymiarowe do dwuwymiarowego.

Współrzędne tensora odkształcenia mają w przypadku zagadnień płyty postać

$$\varepsilon_{11} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \varepsilon_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} = 0 \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{32} = 0 \end{aligned} \quad (53.2)$$

Natomiast współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} obliczone na podstawie równań fizycznych i dla $\sigma_{33} = 0$ są następujące:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= +\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \\ \sigma_{22} &= +\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \\ \sigma_{12} &= +\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{12}) = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (53.3)$$

Wykorzystaliśmy tutaj już założenia o możliwości pominięcia naprężenia σ_{33} w stosunku do pozostałych naprężeń.

Wprowadzimy z kolei momenty zginające M_1 i M_2 , momenty skręcające M_{12} , M_{21} ($M_{12} = M_{21}$) oraz siły poprzeczne Q_1 i Q_2 . Wyszczególnione wielkości wewnętrzne wyrażają się przez współrzędne tensora naprężenia wg relacji

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, & M_2 &\equiv \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 \\ M_{12} &\equiv \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{21} x_3 dx_3, & M_{12} &= M_{21} \\ Q_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{31} dx_3, & Q_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{32} dx_3 \end{aligned} \quad (53.4)$$

W przytoczonych wzorach h jest grubością płyty.

Zdefiniowane tutaj wielkości pozwalają na sprowadzenie trójwymiarowego zadania teorii płyt do zadania dwuwymiarowego, analogicznie jak wprowadzenie wielkości wewnętrznych w statyce układów prętowych pozwala przestrzenne stany naprężenia panujące ogólnie w przecie sprowadzić do zadań jednowymiarowych statyki.

Momenty wyrażają się przez ugięcie płyty następująco

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)$$

$$M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)$$

$$M_{12} = M_{21} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$D = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E x_3}{1-\nu^2} dx_3 = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (53.5)$$

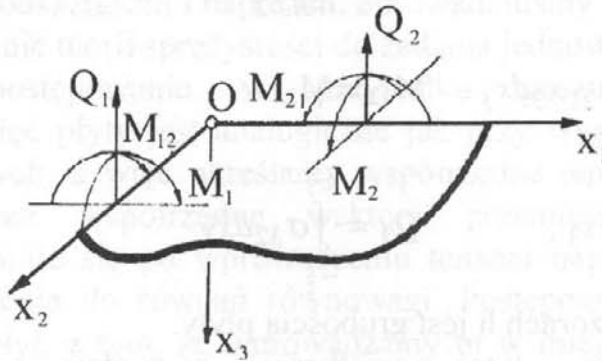
W następnej kolejności podamy równania równowagi elementu płyty wykorzystując do tego celu już momenty zginające i siły poprzeczne a nie same naprężenia (rys. 54.). Równania te mają postać:

$$\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + p dx_1 dx_2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 - \left(\frac{\partial M_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + Q_2 dx_1 dx_2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - \left(\frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + Q_1 dx_1 dx_2 = 0$$

która jest prawdziwa dla dowolnie małych przyrostów dx_1 i dx_2 .



Rys. 54.

W efekcie równania równowagi przyjmą formę

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + p = 0$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + Q_1 = 0 \quad (53.6)$$

Z równań tych wyznaczmy siły poprzeczne Q_1 i Q_2

$$Q_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}, \quad Q_2 = \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}$$

i dalej

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)$$

Otrzymane wyrażenia, które określają siły poprzeczne w zależności od ugięcia płyty, podstawimy do pierwszego z równań równowagi. Będzie

$$-D \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) - D \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + p = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{p}{D}, \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad (53.7)$$

Równanie biharmoniczne $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D}$ nosi nazwę równania płyty i służy do wyznaczania stanu przemieszczeń i naprężeń w płycie cienkiej. Postępowanie w tym przypadku polega na poszukiwaniu ugięć płyty, a następnie na określeniu stanu naprężeń w płycie.

Do równania płyty należy dołączyć warunki brzegowe, które pozwalają na rozwiązywanie zadania brzegowego, a w konsekwencji do wyznaczania ugięć płyty.

Podamy teraz kilka wariantów warunków brzegowych:

- sztywne utwierdzenie wzdłuż brzegu $x_1 = 0$ płyty powoduje, że ugięcie w oraz kąt obrotu na tej części brzegu są równe zero, czyli

$$w|_{x_1=0} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0$$

- podparcie przegubowe występujące wzdłuż linii $x_1 = 0$ prowadzi do warunków brzegowych:

$$w|_{x_1=0} = 0, \quad M_1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=0} = 0$$

Zwróćmy tutaj uwagę, że wzdłuż linii $x_1 = 0$ zachodzi $w = 0$, czyli warunki brzegowe przyjmą tutaj postać

$$w|_{x_1=0} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0$$

- brzeg swobodny zlokalizowany zależnością $x_1 = a$ prowadzi do następujących warunków

$$M_1|_{x_1=a} = 0, \quad M_{12}|_{x_1=a} = 0, \quad Q_1|_{x_1=a} = 0$$

Mamy tutaj trzy niezależne warunki brzegowe w odróżnieniu od dwóch warunków, które występowały w poprzednich wariantach podparć.

Okazuje się jednak, że między występującymi w tych warunkach wielkościami wewnętrznymi istnieją dalsze związki, które prowadzą w efekcie do następujących warunków brzegowych dla swobodnego brzegu płyty:

$$M_1|_{x_1=a} = 0, \quad \left(Q_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1=a} = 0$$

W równaniu płyty poszukujemy ugięć powierzchni środkowej płyty, a więc i warunki brzegowe należy wyrazić przez ugięcie płyty. W tym celu do ostatnich równań wprowadzimy współrzędne wektora ugięć. Będzie

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \Big|_{x_1=a} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=a} = 0$$

Przedstawione warunki brzegowe łącznie z równaniami płyty pozwalają na formułowanie zadań brzegowych w zakresie teorii płyt cienkich. Należy tutaj podkreślić, iż w zakresie teorii płyt uzyskano wiele rozwiązań brzegowych posiłkując się głównie szeregami trygonometrycznymi, transformacjami całkowymi, metodą różnic skończonych a ostatnio metodą elementu skończonego.

Rozdział X

PROSTE PRZYPADKI WYTRZYMAŁOŚCIOWE

Duże znaczenie poznawcze ma analiza tzw. prostych przypadków wytrzymałościowych przeprowadzona na podstawie liniowej teorii sprężystości. Będziemy tutaj mieli na uwadze przypadki prostego rozciągania, swobodnego skręcania i zginania. Analiza tych zagadnień pozwala lepiej wniknąć we wzajemne powiązania obu podejść do rozwiązywania tych samych zadań mechaniki ośrodka ciągłego. Szczególnie kształcąca jest analiza tych uproszczeń, które stosujemy w teorii sprężystości aby uzyskać rozwiązanie typowe dla wytrzymałości materiałów. Należy podkreślić, że jedna z zasadniczych różnic w obu podejściach polega na powiązaniu jednoosiowego stanu naprężenia z trójosiowym stanem odkształcenia i odwrotnie. Tak postępujemy w mechanice ośrodka ciągłego. W odróżnieniu od tego podejścia w zagadnieniach wytrzymałości materiałów przyjmuje się najczęściej upraszczająco, że z jednoosiowym stanem naprężenia związany jest jednoosiowy stan odkształcenia. Konsekwencją przyjętego założenia już w przypadku prostego rozciągania jest brak odkształceń poprzecznych (przewężeń) występujących w trakcie rozciągania pręta. Ponadto ze względu na powszechność stosowania rozwiązań wytrzymałościowych w praktyce projektowej konieczne jest zorientowanie się w uproszczeniach i ograniczeniach jakie te rozwiązania niosą.

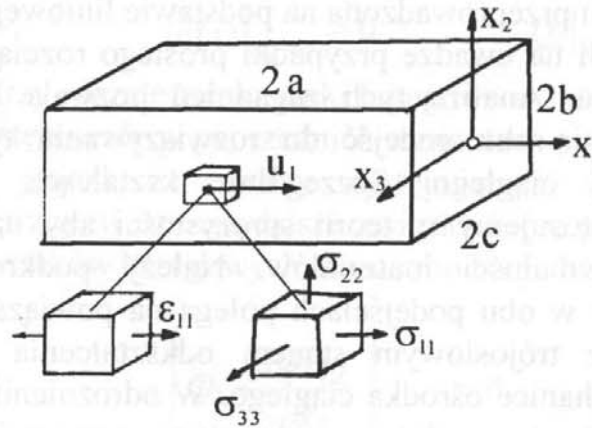
54. PROSTE ROZCIĄGANIE

Pierwszym przypadkiem wytrzymałościowym, który przeanalizujemy z punktu widzenia mechaniki ośrodka ciągłego, będzie stan jednoosiowego rozciągania.

Analizować będziemy w tym przypadku jednorodny i izotropowy pręt o przekroju prostokątnym, w którym występuje jednoosiowy stan odkształcenia. Zauważmy, że taki sam stan odkształcenia występuje w analogicznym zadaniu wytrzymałościowym. Analizować będziemy po kolei stronę geometryczną, fizyczną i statyczną zadania przyjmując postać funkcji przemieszczeń w ośrodku. Oczywiście pole przemieszczeń, określone przez trzy współrzędne wektora przemieszczeń musi spełniać równania geometryczne, fizyczne, statyczne oraz warunki brzegowe.

Pole przemieszczeń w ośrodku określa w tym przypadku układ funkcji

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha x_1 \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (54.1)$$



Rys.55.

Równania strony geometrycznej określone są przez równanie Cauchy'ego

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (54.2)$$

W wyniku różniczkowania wektora przemieszczeń uzyskujemy współrzędne tensora odkształceń

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{kk} = \alpha$$

W następnej kolejności wyznaczamy współrzędne tensora naprężeń na podstawie równań fizycznych, w tym przypadku prawa Hooke'a

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (54.3)$$

Współrzędne tensora naprężenia wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu \varepsilon_{11} + 3\lambda \varepsilon_{11}, & \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{22} &= 3\lambda \varepsilon_{11}, & \sigma_{13} &= \sigma_{31} = 0 \\ \sigma_{33} &= 3\lambda \varepsilon_{11}, & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = 0\end{aligned}$$

$$\sigma_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} 2\mu + 3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda \end{bmatrix}$$

Przejdziemy teraz do równań równowagi wewnętrznej, czyli równań Naviera

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0$$

Które przy pominięciu sił masowych ρF_i przyjmie postać

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (54.4)$$

Biorąc pod uwagę wyliczone współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} łatwo zauważyć, że równania równowagi są w tym przypadku spełnione, tożsamościowo, ponieważ, współrzędne tensora σ_{ij} są niezależne od współrzędnych przestrzennych x_i .

Możemy więc stwierdzić, że przyjęta postać wektora przemieszczeń spełnia wszystkie równania determinujące proces deformacji we wnętrzu ośrodka.

Z kolei przeanalizujemy warunki brzegowe. Zauważmy, że na brzegach pręta muszą wystąpić następujące naprężenia, które będą w równowadze z obciążeniem zewnętrznym.

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (2\mu + 3\lambda)\alpha \text{ dla } x_1 = \pm a, & \sigma_{22} &= 3\lambda\alpha \text{ dla } x_2 = \pm b \\ \sigma_{33} &= 3\lambda\alpha \text{ dla } x_3 = \pm c\end{aligned}$$

Globalne warunki równowagi prowadzą tu do zależności

$$\int_F \sigma_{11} dF = P \Rightarrow (2\mu + 3\lambda)\alpha \int_F dF = P \Rightarrow \alpha = \frac{1}{(2\mu + 3\lambda)F} P, \quad (54.5)$$

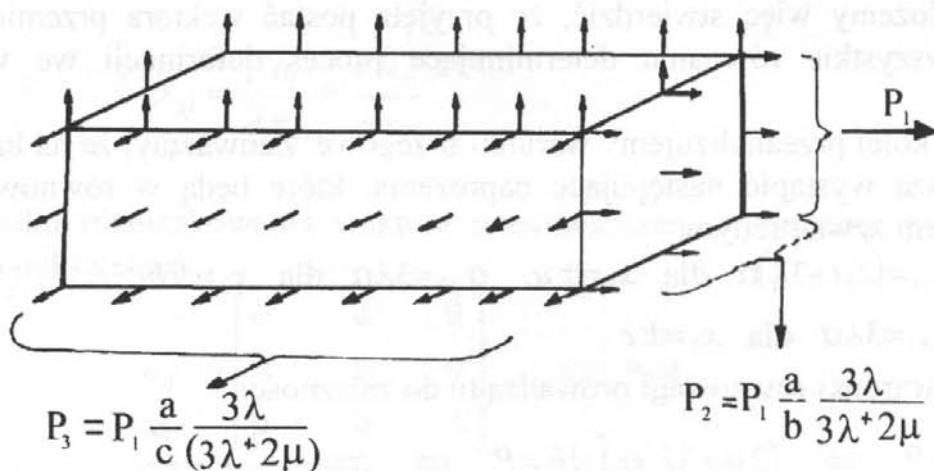
$$\int_{F'} \sigma_{22} dF' = P_2, \quad \int_{F'} \sigma_{33} dF' = P_3$$

Z pierwszego równania, które jest po prostu sumą rzutów na oś x_1 wyznaczyliśmy stałą α występującą w zadaniu. W związku z tym tensor odkształcenia i naprężenia wyraża się następującymi relacjami

$$\varepsilon_{ij} = \frac{P}{F} \begin{bmatrix} (2\mu + 3\lambda)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda}{(3\lambda+2\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda}{(3\lambda+2\mu)} \end{bmatrix} \frac{P}{F}$$

Z postaci tensorów naprężenia i odkształcenia wnosimy, iż jednoosiowy stan odkształcenia w rozciągającym pręcie możemy uzyskać jedynie przez przyłożenie do pozostałych dwu par pobocznic pręta dodatkowego sił o intensywności $\frac{3\lambda}{2\mu + 3\lambda} \frac{P}{F}$.



Rys.56.

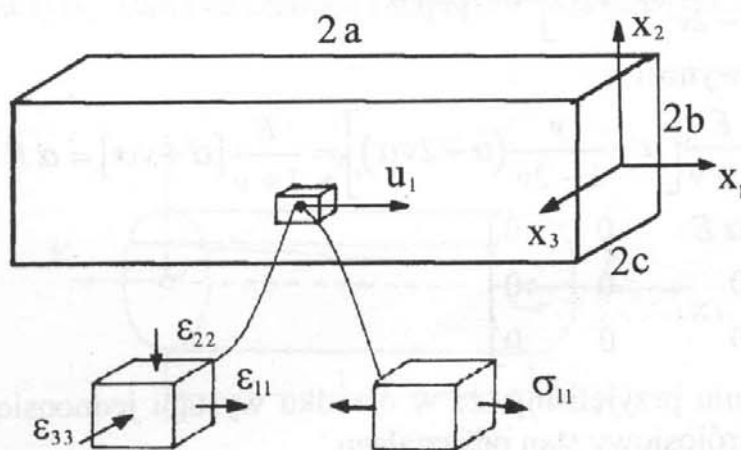
Uzyskany wynik jest więc różny od analizy prostego rozciągania, rozpatrywanego w klasycznej wytrzymałości, gdzie również przyjmowano, że w rozciągającym pręcie panuje jednoosiowy stan odkształcenia.

Zbadamy teraz przypadek jednoosiowego stanu naprężenia, który prowadzi do innych wyników, aniżeli analiza jednoosiowego stanu odkształcenia. Widzimy więc, że mamy dwa różne podejścia do klasycznego zadania rozciągania pręta prostego. Będziemy postępowali tutaj podobnie jak w

poprzednim przypadku, w którym stosowaliśmy półodwrotną metodę rozwiązań polegającą na przyjęciu funkcji przemieszczeń zależnej od kilku stałych, które dobieramy spełniając równania określające zagadnienie i warunki brzegowe.

Funkcję przemieszczeń ze względu na symetrię zadania przyjmujemy następująco

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha x_1 \\ u_2 &= -\beta x_2 \\ u_3 &= -\beta x_3 \end{aligned} \quad (54.6)$$



Rys.57.

Równania strony geometrycznej doprowadzają do tensora deformacji o współrzędnych

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_{1,1} = \alpha, \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0, \\ \epsilon_{22} &= u_{2,2} = -\beta, \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0, \\ \epsilon_{33} &= u_{3,3} = -\beta, \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = 0 \end{aligned}$$

stąd

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad \epsilon_{kk} = \alpha - 2\beta \quad (54.7)$$

Natomiast równania tworzące

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right]$$

pozwalają określić współrzędne tensora naprężenia na podstawie współrzędnych tensora odkształcenia. Otrzymujemy

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left[\alpha + \frac{\nu}{1-2\nu} (\alpha - 2\beta) \right], \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0$$

$$\text{dla } \sigma_{22} = 0 \quad \text{zachodzi } \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left[-\beta + \frac{\nu}{1-2\nu} (\alpha - 2\beta) \right]$$

$$\left[-\beta + \frac{\nu}{1-2\nu} (\alpha - 2\beta) \right] = 0 \rightarrow \beta = \nu\alpha$$

Naprężenie σ_{11} wynosi

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left[\alpha + \frac{\nu}{1-2\nu} (\alpha - 2\nu\alpha) \right] = \frac{E}{1+\nu} [\alpha + \nu\alpha] = \alpha E$$

$$\sigma_{11} = \begin{bmatrix} \alpha E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54.8)$$

W zadaniu przyjęliśmy, że w ośrodku wystąpi jednoosiowy (σ_{11}) stan naprężenia, ale trójosiowy stan odkształceń.

Wyznaczona współrzędna tensora naprężenia spełnia równanie równowagi, gdyż nie jest funkcją współrzędnej x_1 .

Natomiast na brzegu spełnione są następujące warunki w naprężeniach

$\sigma_{11} = \alpha E$ dla $x_1 = \pm a$, $\sigma_{22} = 0$ dla $x_2 = \pm b$, $\sigma_{33} = 0$ dla $x_3 = \pm c$
oraz zależność globalna

$$\int_F \sigma_{11} n_1 = P_1 \rightarrow \alpha E \int_F dF = P_1 \rightarrow \alpha = \frac{P_1}{EF} \quad (54.9)$$

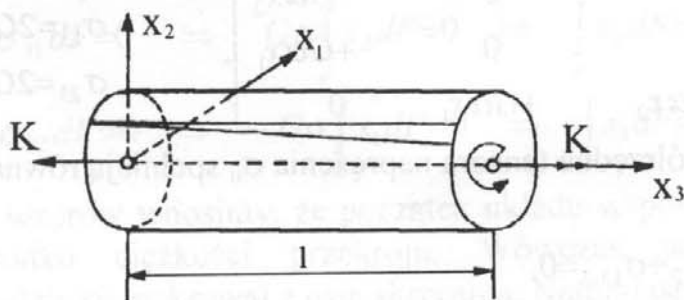
W efekcie uzyskujemy wzory, które określają stan przemieszczenia w ośrodku

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{P x_1}{EF} \\ u_2 &= -\frac{\nu P}{EF} x_2 \\ u_3 &= -\frac{\nu P}{EF} x_3 \end{aligned} \quad (54.10)$$

Z powyższych równań można wyznaczyć stan odkształcenia i stan naprężenia w liniowym pręcie sprężystym. Spostrzegamy i w tym podejściu wyniki odmienne niż uzyskane w wytrzymałości materiałów. Mianowicie, w rozciągającym pręcie w wytrzymałości występuje tylko jednowymiarowy stan przemieszczenia (współrzędne u_2 i u_3 znikają).

55. SKRĘCANIE SWOBODNE PRĘTA KOŁOWEGO

Kolejny prosty przypadek wytrzymałościowy to analiza swobodnego skręcania pręta kołowego. Sposób postępowania będzie tutaj podobny jak przy rozciąganiu pręta, tzn. będziemy postulowali pole przemieszczeń w ośrodku z którego wyznaczymy stan odkształceń i naprężeń w pręcie (rys.58.).



Rys.58.

Pole przemieszczeń w pręcie określają zależności:

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3, \quad u_3 = 0 \quad (55.1)$$

gdzie stałą α wyznaczymy w trakcie analizy problemu.

Stronę geometryczną problemu określa tensor odkształceń ϵ_{ij}

$$2\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

o współrzędnych

$$\epsilon_{11} = u_{1,1} = 0, \quad \epsilon_{22} = u_{2,2} = 0, \quad \epsilon_{33} = u_{3,3} = 0$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = -\alpha x_3 + \alpha x_3 = 0, \quad \epsilon_{21} = \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{1,2}) = 0$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = -\frac{\alpha}{2}x_2, \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = +\frac{\alpha}{2}x_1$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha x_2 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{2}\alpha x_1 \\ -\frac{1}{2}\alpha x_2 & +\frac{1}{2}\alpha x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{kk} = 0 \quad (55.2)$$

Z równań fizycznych

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}, \quad \mu \equiv G \quad (55.3)$$

wyznaczamy współrzędne tensora naprężenia posługując się modułem odkształcenia postaciowego G zamiast stałej Lamego μ

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\alpha x_2 \\ 0 & 0 & +G\alpha x_1 \\ -G\alpha x_2 & +G\alpha x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{13} &= 2G\varepsilon_{12} = -G\alpha x_2 \\ \sigma_{23} &= 2G\varepsilon_{23} = +G\alpha x_1 \end{aligned}$$

Wyznaczone współrzędne tensora naprężenia σ_{ij} spełniają równania równowagi

$$\sigma_{ij,j} = 0,$$

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0,$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0,$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0$$

Istotnie zachodzi $\sigma_{13,3} = 0$, $\sigma_{23,3} = 0$, $\sigma_{31,1} = 0$, $\sigma_{32,2} = 0$.

Okazuje się więc, że przyjęta postać pola przemieszczeń spełnia równania geometryczne, fizyczne i statystyczne.

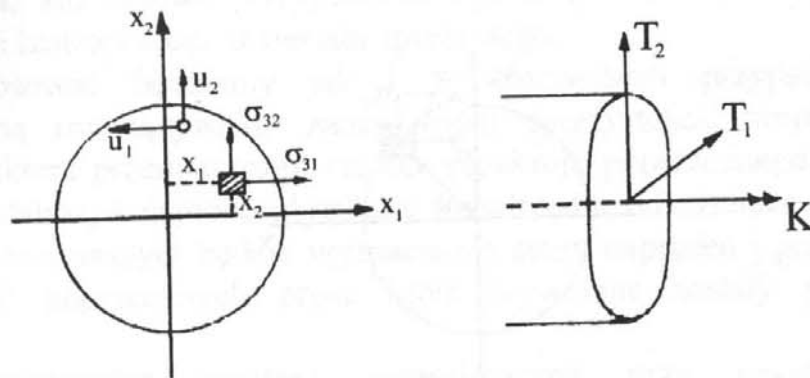
Natomiast warunki brzegowe będziemy analizowali w postaci globalnej. Na brzegach określonych zależnością $x_3 = 0$ i $x_3 = l$, pojawią się naprężenia styczne. W efekcie na brzegu $x_3 = b$ i $x_3 = 0$ mogą wystąpić wielkości wewnętrzne T_1 , T_2 i K zdefiniowane przez całki

$$\int_F \sigma_{31} dF = T_1$$

$$\int_F \sigma_{32} dF = T_2$$

$$\int_F (\sigma_{32} x_1 + \sigma_{31} x_2) dF = K$$

(55.4)



Rys.59.

Ze względu na to, że naprężenia tnące przy skręcaniu pręta swobodnego mogą być sprowadzone tylko do momentu skręcającego K uzyskujemy dodatkowe równania $T_1 = 0$, $T_2 = 0$

$$T_1 = 0 \quad \int_F \sigma_{31} dF = 0 \Rightarrow G\alpha \int_F x_2 dF = 0 \Rightarrow \int_F x_2 dF = 0$$

$$T_2 = 0 \quad \int_F \sigma_{32} dF = 0 \Rightarrow -G\alpha \int_F x_1 dF = 0 \Rightarrow \int_F x_1 dF = 0$$

Z przytoczonych wzorów wnosimy, że początek układu współrzędnych należy umieścić w środku ciężkości przekroju. Wówczas początek układu współrzędnych będzie się pokrywał z osią skręcania. Natomiast z równania

$$\int_F (\sigma_{32} x_1 + \sigma_{31} x_2) dF = K$$

otrzymamy poszukiwaną wartość stałej α

$$G\alpha \int_F [(x_1)^2 + (x_2)^2] dF = K \Rightarrow \alpha = \frac{k}{GJ_0} \quad (55.5)$$

gdzie

$$J_0 \equiv \int_F [(x_1)^2 + (x_2)^2] dF = \int_F r^2 dF$$

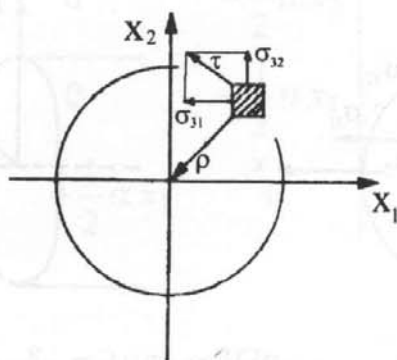
jest biegunowym momentem bezwładności.

Znajomość stałej α pozwala określić współrzędne przemieszczeń, odkształceń i tensora naprężenia

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = -\frac{Gx_2}{GJ_0} K = -\frac{Kx_2}{J_0}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = -\frac{Gx_1}{GJ_0} K = -\frac{Kx_1}{J_0}$$

Wyznamy również naprężenie tnące τ określone zależnością

$$\tau^2 = \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 = \left(\frac{K}{J_0}\right)^2 (x_2)^2 + \left(\frac{K}{J_0}\right)^2 (x_1)^2 \quad (55.6)$$



Rys.60.

Z otrzymanego wzoru wynika, że naprężenie tnące w przekroju jest wprost proporcjonalne do momentu skręcającego i odległości od środka skręcania, jest natomiast odwrotnie proporcjonalne względem biegunowego momentu bezwładności I_0 . W zadaniu tym α oznacza geometrycznie wzajemny obrót przekrojów kołowych odległych od siebie o jednostkę długości.

Z analizy prostego rozciągania oraz skręcania swobodnego prętów kołowych wynikają – po uproszczeniach – zależności znane z klasycznej wytrzymałości materiałów. Okazuje się przy tym, iż nieco pogłębiona analiza prostych przypadków wytrzymałościowych prowadzi do interesujących spostrzeżeń ustalających m.in. miejsce klasycznej wytrzymałości materiałów w mechanice ośrodka ciągłego. Istotną zaletą takiego postępowania, szczególnie widoczną w trakcie analizy naprężeń przy skręcaniu swobodnym jest duża konsekwencja w postępowaniu. Przyjmujemy tu postać funkcji przemieszczeń a następnie sprawdzamy czy spełnione są równania zagadnienia. Natomiast występujące w funkcji przemieszczeń stałe wyznaczymy w trakcie spełnienia warunków brzegowych zadania. Można zauważyć, iż bardzo chętnie przy tym korzystaliśmy z globalnego sformułowania warunków brzegowych, które prowadzą wprost do wyników. W efekcie postępowanie tutaj zaprezentowane pozwala stosunkowo prosto prześledzić konsekwencje różnych i często niepotrzebnie przyjmowanych uproszczeń w wytrzymałości materiałów. Postępowanie to możemy oczywiście rozszerzyć na przypadki zginania bez udziału siły poprzecznej itp.

56. CZYSTE ZGINANIE

Z czystym zginaniem mamy do czynienia wówczas kiedy jedyną siłą przekrojową jest wektor momentu zginającego, współliniowy z x_2 - jedną z głównych, centralnych osi bezwładności przekroju. W przekrojach poprzecznych pręta w czasie czystego zginania nie występuje więc siła

poprzeczna, ani osiowa. Przyjmować będziemy, że pręt wykonany jest z liniowego i izotropowego materiału sprężystego.

Stosować będziemy jak i w poprzednich przypadkach metodę półodwrotną rozwiązywania zadań teorii sprężystości, proponując postać funkcji wektora przemieszczeń cząstek przekroju poprzecznego, na podstawie których w dalszej kolejności określimy współrzędne odkształceń i naprężeń.

Celem naszym będzie wyznaczenie stanu naprężeń i przemieszczeń w przekrojach poprzecznych pręta, które wywołane zostały przez moment zginający.

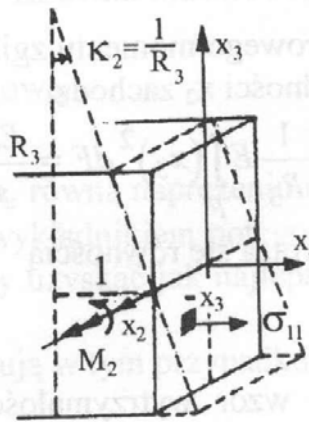
Współrzędne wektora przemieszczeń przy czystym zginaniu przyjmijmy w formie zależności

$$u_1 = -\frac{x_1 x_3}{R_3}, \quad u_2 = \frac{\nu}{R_3} x_2 x_3, \quad u_3 = \frac{1}{2R_3} \left[(x_1)^2 + \nu(x_3)^2 - (x_2)^2 \right] \quad (56.1)$$

w której nieznaną wielkością jest R_3 – promień krzywizny zginanego pręta lub też krzywizna $\kappa = 1/R_3$.

Z równań tych wyznaczmy współrzędne tensora odkształceń ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{-x_3}{R_3} & 0 & \frac{1}{2} \left(-\frac{x_1}{R_3} + \frac{x_1}{R_3} \right) \\ \frac{\nu x_3}{R_3} & \frac{1}{2} \left(-\frac{x_1}{R_3} + \frac{x_1}{R_3} \right) & \\ & \frac{\nu x_3}{R_3} & \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{kk} = \frac{x_3}{R_3} (2\nu - 1) \quad (56.2)$$



Rys.61. Naprężenie i odkształcenie przy czystym zginaniu

Natomiast współrzędne tensora naprężeń σ_{ij} wyrażają się relacjami wynikającymi z równań fizycznych

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}\delta_{ij} \right)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{Ex_3}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56.3)$$

Zauważmy, że przyjętemu polu przemieszczeń i odkształceń odpowiada jednoosiowy stan naprężeń, liniowo zmieniający się wzdłuż wysokości przekroju. Liniowa jest też zależność naprężenia σ_{ij} od krzywizny pręta κ . Z podobną sytuacją spotykamy się w klasycznej wytrzymałości materiałów, gdzie z jednoosiowym stanem naprężeń związany jest jednoosiowy stan odkształceń.

Tensorowi naprężeń σ_{ij} towarzyszą siły przekrojowe

$$N_1 = \int_F \sigma_{11} dF, \quad M_2 = \int_F \sigma_{11} x_3 dF, \quad M_3 = \int_F \sigma_{11} x_2 dF$$

z których po przyjęciu $N_1 = 0$ i $M_3 = 0$ wynika

$$N_1 = 0 \rightarrow \int_F -\frac{Ex_3}{R_3} dF = 0 \rightarrow S_2 \equiv \int_F x_3 dF = 0$$

$$M_3 = 0 \rightarrow \int_F -\frac{Ex_3}{R_3} x_2 x_3 dF = 0 \rightarrow J_{23} \equiv \int_F x_2 x_3 dF = 0$$

że oś obojętna musi przechodzić przez środek ciężkości ($S_2 = 0$) oraz pokrywa się z jedną z głównych osi bezwładności, ponieważ moment dewiacji J_{23} powinien zniknąć ($J_{23} = 0$).

Natomiast dla niezerowego momentu zginającego M_2 współliniowego z drugą centralną osią bezwładności x_2 zachodzi

$$M_2 = \int_F \sigma_{11} x_3 dF = \frac{1}{R_3} E \int_F (x_3)^2 dF = \frac{EJ_{22}}{R_3}$$

Krzywizna pręta $\kappa = 1/R_3$ wyraża się równością

$$\kappa = \frac{M_2}{EJ_{22}} \quad (56.4)$$

Otrzymujemy tu klasyczny wzór wytrzymałościowy. Ponadto w zginanym przekroju pojawią się jeszcze dwie dodatkowe krzywizny $\nu\kappa$ w płaszczyznach x_2x_3 i x_2x_1 .

Liniowe rozkłady naprężeń po wysokości przekroju otrzymamy z równań fizycznych

$$\sigma_{11} = -E \frac{x_3}{R_3} = -Ex_3 \kappa = -Ex_3 \frac{M_2}{EJ_{22}} = -\frac{M_2 x_3}{J_{22}}$$

Jeżeli z kolei wprowadzimy tzw. wskaźnik wytrzymałości W_2 określony jako stosunek momentu bezwładności J_{22} do $\max x_3$, to otrzymamy przydatną w projektowaniu przekrojów zginanych zależność

$$\max \sigma_{11} = -\frac{M_2}{W_2} \leq k_g$$

gdzie W_2 jest wskaźnikiem zginania, a k_g dopuszczalną wartością naprężeń przy zginaniu.

Analogiczne zależności otrzymamy, kiedy moment zginający jest współliniowy z osią x_3 . Należy wówczas we wzorach na współrzędne wektora przemieszczeń dokonać zamiany zmiennych $x_2 \leftrightarrow x_3$.

Pole przemieszczeń określa wtedy układ równań

$$u_1 = -\frac{x_1 x_2}{R_2}, \quad u_2 = \frac{1}{2R_2} \left[(x_1)^2 + \nu \left((x_2)^2 - (x_3)^2 \right) \right], \quad u_3 = \frac{\nu}{R_2} x_2 x_3$$

w którym dodatkowo uwzględniono zamianę postaci funkcji wektora przemieszczeń $u_2 \leftrightarrow u_3$.

Przedstawimy z kolei rozważania prowadzące do tzw. technicznej teorii zginania prętów przyrównanych typowej dla wytrzymałości materiałów. Ujęcie to jest szczególne w stosunku do rozważań poprzednio przedstawionych i polega na dodatkowym przyjęciu, że z jednoosiowym stanem naprężeń związany jest jednoosiowy stan odkształceń. Założenie to jest oczywiście sprzeczne z ogólną teorią, gdzie jednoosiowemu naprężeniu towarzyszy zawsze trójosiowy stan odkształceń.

Analizować będziemy zarówno liniowe równania fizyczne

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$$

jak i nieliniowe, postaci potęgowej

$$\sigma_{11} = A(\varepsilon_{11})^{1/n} \quad (56.5)$$

gdzie A jest stałą materiałową, równą naprężeniu normalnemu towarzyszącemu odkształceniu $\varepsilon_{11} = 1$, a n – wykładnikiem potęgowym w równaniu fizycznym. Stałe A i n dobieramy tak aby uzyskać jak najlepszą zgodność eksperymentu z równaniem fizycznym.

Równania zagadnienia obejmują w tym przypadku

- równania geometryczne

$$\varepsilon_{11} = \kappa_2 x_3 = \frac{1}{R_3} x_3$$

łączące współrzędne odkształceń ε_{11} ze zmianą krzywizny κ .

- równania fizyczne dla liniowego

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$$

lub nieliniowego fizycznie (potęgowego)

$$\sigma_{11} = A(\varepsilon_{11})^{\frac{1}{n}}$$

ciała sprężystego.

- zależności określające siły przekrojowe

$$N_1 = \int_F \sigma_{11} dF = 0, \quad M_2 = \int_F \sigma_{11} x_3 dF, \quad M_3 = \int_F \sigma_{11} x_2 dF = 0$$

Z porównania obu ujęć zagadnienia wynika, że punktem wyjściowym są tutaj związki łączące zmianę krzywizny κ_2 z odkształceniem ε_{11} . Natomiast pozostałe współrzędne tensora ε_{ij} są równe zeru. Ponadto przyjmuje się uproszczone postacie równań fizycznych.

Wzory określające krzywiznę i rozkłady naprężeń uzyskuje się podstawiając związki geometryczne do równań fizycznych a te ostatnie do wzorów na siły przekrojowe. Uzyskujemy wówczas relacje

$$\begin{aligned} N_1 = 0 &\rightarrow \int_F E \kappa_2 x_3 dF = 0 \rightarrow E \kappa_2 \int_F x_3 dF = 0 \rightarrow & S_2 \equiv \int_F x_3 dF = 0 \\ M_3 = 0 &\rightarrow \int_F E \kappa_2 x_2 x_3 dF = 0 \rightarrow E \kappa_2 \int_F x_2 x_3 dF = 0 \rightarrow & J_{23} \equiv \int_F x_2 x_3 dF = 0 \\ M_2 = \int_F E \kappa_2 (x_3)^2 dF &\rightarrow M_2 = E \kappa_2 \int_F (x_3)^2 dF = E \kappa_2 J_{22} \rightarrow & \end{aligned} \quad (56.6)$$

$$\kappa_2 = \frac{M_2}{E J_{22}} \quad \text{gdzie} \quad J_{22} \equiv \int_F (x_3)^2 dF$$

zaś naprężenie σ_{11} w zginanym przekroju wyliczymy z zależności

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = E \kappa_2 x_3 \rightarrow \frac{\sigma_{11}}{E x_3} = \frac{M_2}{E J_{22}} \rightarrow \sigma_{11} = \frac{M_2 x_3}{J_{22}}$$

W zadaniu nieliniowym otrzymamy analogiczne relacje a więc

$$N_1 = 0 \rightarrow \int_F A(\kappa_2 x_3)^{1/n} dF = 0 \rightarrow A \kappa_2^{1/n} \int_F (x_3)^{1/n} dF = 0 \rightarrow$$

$$S_2(N) \equiv \int_F x_3^{1/n} dF = 0, \quad N = 1/n$$

$$\begin{aligned}
 M_3 = 0 &\rightarrow \int_F A(\kappa_2 x_3)^{1/n} dF = 0 \rightarrow A\kappa_2^{1/n} \int_F (x_3)^{1/n} x_2 dF = 0 \rightarrow \\
 J_{23}(N) &\equiv \int_F x_3^{1/n} x_2 dF = 0 \\
 M_2 &= \int_F A(\kappa_2 x_3)^{1/n} x_3 dF = A\kappa_2^{1/n+1} \int_F x_3^{1/n+1} dF = A\kappa_2^{1/n} J\left(\frac{1}{n} + 1\right) \rightarrow \\
 \kappa_2 &= \frac{M_2}{AJ(N+1)} \quad N = \frac{1}{n}
 \end{aligned} \tag{56.7}$$

W równaniach na siły przekrojowe $N_1 = 0$, $M_3 = 0$ i M_2 pojawiły się momenty statyczne $S_2(N)$ i momenty bezwładności $J_{23}^{(N)}$ i $J(N+1)$ wyższych rzędów. Wielkości te charakteryzują wpływ rozkładu masy w przekroju poprzecznym na zginanie pręta w zakresie nieliniowym.

Naprężenia w zginanym pręcie są określone wzorami

$$\sigma_{11} = A(\kappa_2 x_3)^{1/n} \rightarrow \frac{\sigma_{11}}{A(x_3)^{1/n}} = \kappa_2^{1/n} \equiv \frac{M_2}{AJ(1+N)} \rightarrow \sigma_{11} = \frac{M_2}{J(1+N)} (x_3)^{1/n}$$

Z przytoczonych zależności wnosimy, że położenie osi obojętnej w liniowej i nieliniowej sprężystości określają podobne warunki, a więc znikanie momentów statycznych i momentu dewiacji względem osi x_2 i x_3 . Warunki te są z kolei konsekwencją wymagań, aby $N_1 = 0$ i $M_3 = 0$.

Odmienny jest natomiast rozkład naprężeń normalnych σ_{11} w zginanym pręcie. W zadaniu liniowym będzie on liniowy, zaś w nieliniowym rozkład naprężeń ma identyczny charakter jak równania fizyczne. Znając z kolei rozkłady naprężeń normalnych w przekroju możemy przystąpić do projektowania zginanych prętów. W szczególności możemy wprowadzić wskaźniki wytrzymałości

$$W = \frac{J_{22}}{x_3}, \quad W(N+1) = \frac{J(N+1)}{\left(x_3\right)^{1/n}}$$

gdzie x_3 jest maksymalną odległością skrajnego włókna w zginanym przekroju od osi obojętnej.

Warunki projektowe są w obu przypadkach tj. liniowym i nieliniowym analogiczne i sprowadzają się do relacji $\sigma_{11} \leq k_g$.

W szczególności nierówności

$$\frac{M}{W} \leq k_g, \quad \frac{M}{W(N+1)} \leq k_g$$

są warunkami na sprawdzenie naprężeń, relacje

$$M \leq k_g W, \quad M \leq k_g W(N+1)$$

określają nośność przekroju, zaś zależności

$$W \leq \frac{M}{k_g}, \quad W(N+1) \leq \frac{M}{k_g}$$

pozwalają na wymiarowanie przekroju.

Innym, ważnym problemem szczególnym wynikającym z zależności określających odkształcenie w zginanym przekroju jest równanie osi odkształconej pręta. Równanie to otrzymamy przyjmując upraszczająco, że

$$\kappa_2 \approx \frac{d^2 u_3}{dx_1^2}.$$

W efekcie uzyskujemy następujące równania

$$\frac{d^2 u_3}{dx_1^2} = \frac{M_2}{EJ_{22}}, \quad \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} = \frac{M_2^n}{A^n J(N+1)^n} \quad (56.8)$$

osi odkształconej dla zadania liniowego i nieliniowego fizycznie. Do równań tych należy dołączyć warunki brzegowe, dotyczące więzów związanych z rodzajem podpór itp.

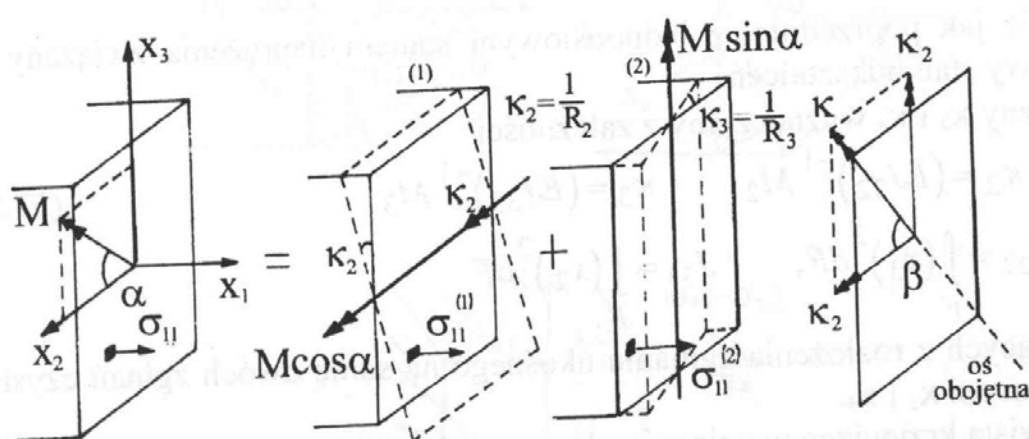
Łącznie, równanie osi odkształconej pręta wraz z warunkami brzegowymi określają problem brzegowy, z którego dla znanych obciążeń możemy wyznaczyć linię ugięcia belki.

Przytoczone postępowanie komplikuje się jeżeli funkcja momentu zginającego nie jest funkcją ciągłą. Należy wówczas zadanie podzielić na taką ilość podprzedziałów, aby wewnątrz każdego z nich funkcja momentu była ciągła. Oczywiście na zetknięciu się poszczególnych podobszarów należy dodatkowo wprowadzić warunki ciągłości, sprowadzające się do równości przemieszczeń i kątów obrotu w obu przyległych do siebie podprzedziałów. Zadanie się wówczas komplikuje, stąd też stosuje się w tej problematyce inne podejścia do wyznaczania naprężeń np. całka Mohra itp.

57. ZGINANIE UKOŚNE

Podane w poprzednim podrozdziale rozważania dotyczyły przypadku, kiedy wektor momentu zginającego jest współliniowy z jedną z głównych centralnych osi bezwładności przekroju (osie x_2 i x_3). W przypadku ogólnym,

kiedy wektor momentu zginającego jest dowolnie zorientowany względem osi x_2 i x_3 , mamy do czynienia z tzw. zginaniem ukośnym. Ze względu na liniowość zagadnienia przypadek zginania ukośnego możemy uzyskać w wyniku superpozycji dwóch przypadków zginania czystego a mianowicie zginanie względem osi x_2 i x_3 .



Rys.62. Zginanie ukośne

Pole przemieszczeń w pierwszym stanie składowym określają równania

$$u_1 = -\frac{x_1 x_3}{R_3}, \quad u_2 = \frac{\nu}{R_3} x_2 x_3, \quad u_3 = \frac{1}{2R_3} \left[(x_1)^2 + \nu \left((x_3)^2 - (x_2)^2 \right) \right]$$

zaś w drugim po zamianie zmiennych $x_2 \rightarrow x_3$, $u_2 \rightarrow u_3$ będzie

$$u_1 = -\frac{x_1 x_2}{R_2}, \quad u_2 = \frac{1}{2R_2} \left[(x_1)^2 + \nu \left((x_2)^2 - (x_3)^2 \right) \right], \quad u_3 = \frac{\nu}{R_2} x_2 x_3$$

Stan przemieszczeń w zginaniu ukośnym ma więc postać

$$u_1 = -\left(\frac{x_1 x_3}{R_3} + \frac{x_1 x_2}{R_2} \right), \quad u_2 = \frac{1}{2R_2} \left[(x_1)^2 + \nu \left((x_2)^2 - (x_3)^2 \right) \right] + \frac{\nu}{R_3} x_2 x_3$$

$$u_3 = \frac{1}{2R_3} \left[(x_1)^2 + \nu \left((x_3)^2 - (x_2)^2 \right) \right] + \frac{\nu}{R_2} x_2 x_3 \quad (57.1)$$

Po wyznaczeniu współrzędnych tensora odkształceń ϵ_{ij} możemy określić współrzędne tensora naprężeń. Otrzymamy

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -E \left(\frac{x_3}{R_3} + \frac{x_2}{R_2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57.2)$$

Podobnie jak poprzednio, z jednoosiowym stanem naprężenia związany jest trójosiowy stan odkształceń.

Krzywizny κ_2 i κ_3 wyznaczmy z zależności

$$\kappa_2 = (EJ_{22})^{-1} M_2, \quad \kappa_3 = (EJ_{33})^{-1} M_3 \quad (57.3)$$

$$\text{gdzie } J_{22} = \int_F (x_3)^2 dF, \quad J_{33} = \int_F (x_2)^2 dF$$

wynikających z rozłożenia zginania ukośnego na sumę dwóch zginających czystych względem osi x_2 i x_3 .

Rzeczywistą krzywiznę w zginaniu ukośnym określają wzory

$$\kappa = \sqrt{(\kappa_2)^2 + (\kappa_3)^2}, \quad \text{tg } \beta = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} = \frac{M_3 J_{22}}{M_2 J_{33}}$$

Natomiast stany naprężeń w obu przypadkach szczególnych wynikają z zależności

$$\sigma_{11}^{(1)} = -E \frac{x_3}{R_3}, \quad \sigma_{11}^{(2)} = E \frac{x_2}{R_2}$$

stąd

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(2)} = -\frac{M_2 x_3}{J_{22}} + \frac{M_3 x_2}{J_{33}}$$

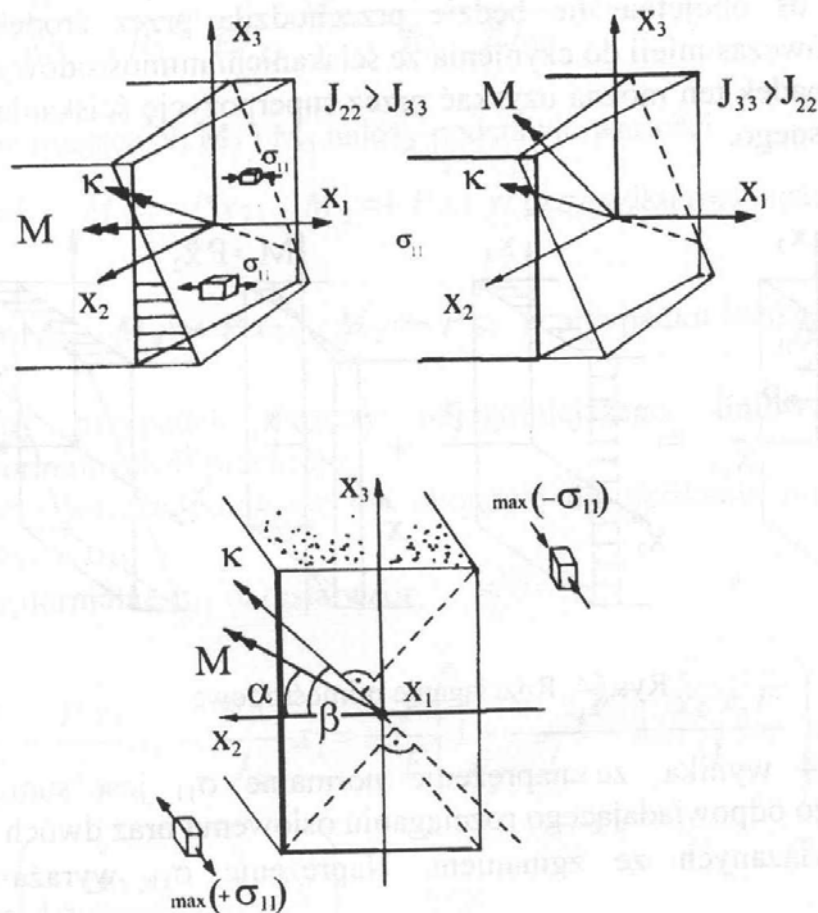
Równanie osi obojętnej określonej przez wymaganie aby $\sigma_{11} = 0$, ma postać

$$-\frac{M_2 x_3}{J_{22}} + \frac{M_3 x_2}{J_{33}} = 0 \rightarrow x_3 = \frac{J_{22} M_3}{J_{33} M_2} x_2 = \text{tg } \beta x_2$$

Ostatecznie równanie osi obojętnej po wprowadzeniu zależności $\text{tg } \alpha = M_3 / M_2$ przyjmie formę

$$x_3 = \text{tg } \alpha \frac{J_{22}}{J_{33}} x_2 \quad (57.4)$$

z której wynika, że oś obojętnej jest współliniowa z wektorem momentu jedynie w przypadku kiedy $J_{22} = J_{33}$. W pozostałych przypadkach jest odchylona od linii działania momentu w kierunku osi J min. Istotnie, jeżeli $J_{22} > J_{33}$, to $\text{tg } \alpha > 1$, a oś obojętnej jest odchylona o kąt $\beta > \alpha$ od osi x_2 w kierunku osi x_3 .



Rys. 63.

Największe naprężenie σ_{11} w zginaniu ukośnym wystąpi w najdalej oddalonym od osi obojętnej narożu przekroju. Stąd też projektowanie przekrojów powinno polegać na określeniu naprężenia w tym odległym od osi k narożu i porównaniu go z naprężeniem dopuszczalnym.

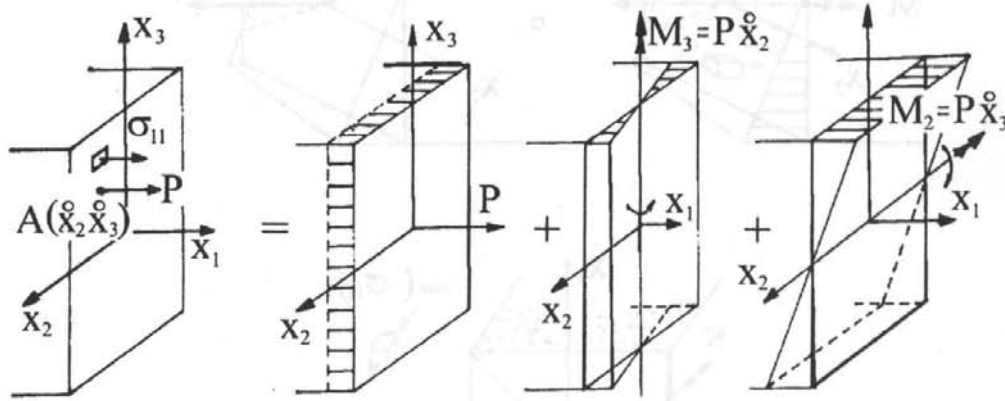
Biorąc pod uwagę przytoczone rozważania można z góry określić włókno, w którym wystąpi $\max \sigma_{11}$. Wystarczy w tym celu określić kąt odchylenia osi obojętnej od linii działania momentu, a następnie ustalić najbardziej odległe naroże od tej linii.

58. ŚCISKANIE MIMOŚRODOWE

Rozpatrywane poprzednio zginanie ukośne można było złożyć z dwóch przypadków zginania czystego. Otrzymaliśmy wówczas rozkład naprężeń normalnych a oś obojętna przechodziła przez środek ciężkości przekroju i była odchylna od głównych, centralnych osi bezwładności przekroju. W przypadku

ogólnym z jednoosiowego stanu naprężeń σ_{11} można uzyskać taki ich liniowy rozkład, że oś obojętna nie będzie przechodziła przez środek ciężkości. Będziemy wówczas mieli do czynienia ze ściskaniem mimośrodowym.

Przypadek ten można uzyskać przez superpozycję ściskania osiowego i zginania ukośnego.



Rys.64. Rozciąganie mimośrodowe

Z rysunku 64 wynika, że naprężenie normalne σ_{11} jest sumą rozkładu równomiernego odpowiadającego rozciąganiu osiowemu oraz dwóch rozkładów liniowych związanych ze zginaniem. Naprężenie σ_{11} wyraża się więc zależnością

$$\sigma_{11} = A + Bx_2 + Cx_3 = \frac{P}{F} + \frac{M_3}{J_{33}}x_2 + \frac{M_2}{J_{22}}x_3 \quad (58.1)$$

w której stała A odpowiada sile osiowej P , Bx_2 momentowi M_3 , a Cx_3 momentowi M_2 .

Pole przemieszczeń odpowiadające temu przypadkowi jest superpozycją trzech pól składowych odpowiadających rozciąganiu osiowemu i zginaniu.

Po zsumowaniu tych pól otrzymujemy relacje

$$u_1 = \varepsilon x_1 + \frac{x_1 x_2}{R_2} - \frac{x_1 x_3}{R_3} \quad (58.2)$$

$$u_2 = -\nu \varepsilon x_2 - \frac{1}{2R_2} \left[(x_1)^2 + \nu \left((x_3)^2 - (x_2)^2 \right) \right] + \frac{\nu}{R_3} x_2 x_3$$

$$u_3 = -\nu \varepsilon x_3 - \frac{\nu}{R_2} x_2 x_3 + \frac{1}{2R_3} \left[(x_1)^2 + \nu \left((x_3)^2 - (x_2)^2 \right) \right]$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\nu}{EJ_{33}} M_3, \quad \frac{1}{R_3} = \frac{\nu}{EJ_{22}} M_2$$

Natomiast w miejsce N , M_2 i M_3 należy podstawić wartości

$N=P$, $M_2=-P \overset{\circ}{x}_2$, $M_3=+P \overset{\circ}{x}_3$ w przypadku rozciągania
oraz

$N=-P$, $M_2=+P \overset{\circ}{x}_2$, $M_3=-P \overset{\circ}{x}_3$ w przypadku ściskania

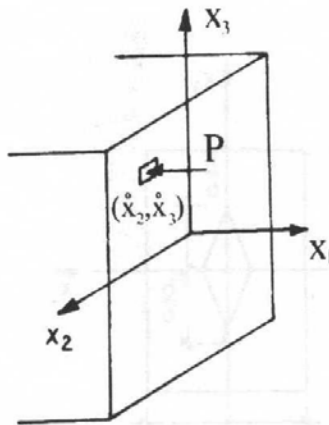
Analizowany przypadek dotyczy najogólniejszego, liniowego rozkładu naprężeń normalnych w przekroju.

Wyznamy jeszcze położenie osi obojętnej dla ściskania mimośrodowego oraz naprężenia σ_{11} .

Naprężenie normalne σ_{11} określa wzór

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{P}{F} - \frac{P \overset{\circ}{x}_3}{J_{22}} x_3 - \frac{P \overset{\circ}{x}_2}{J_{33}} x_2 = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{x}_3 x_3 F}{J_{22}} + \frac{\overset{\circ}{x}_2 x_2 F}{J_{33}} \right) \\ &= -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{\overset{\circ}{x}_3 x_3}{(i_2)^2} + \frac{\overset{\circ}{x}_2 x_2}{(i_3)^2} \right) \end{aligned} \quad (58.3)$$

gdzie $i_2 = \sqrt{\frac{J_{22}}{F}}$ $i_3 = \sqrt{\frac{J_{33}}{F}}$ są promieniami bezwładności przekroju.



Rys.65.

Przyjmując, że $\sigma_{11} = 0$, otrzymamy równanie osi obojętnej

$$1 + \frac{x_3 x_3}{(i_2)^2} + \frac{x_2 x_2}{(i_3)^2} = 0 \quad (58.4)$$

które jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty $x_2 = 0, x_3 = -\frac{(i_2)^2}{x_3}$ i $x_2 = -\frac{(i_3)^2}{x_2}, x_3 = 0$, których współrzędne

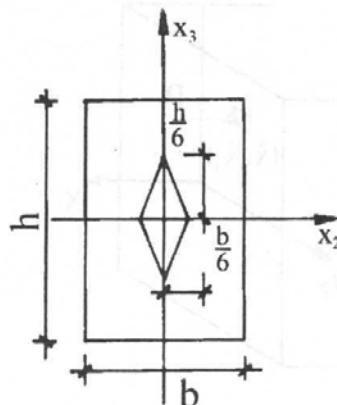
otrzymamy przyrównując do zera jedną z nich, a drugą otrzymamy z równania osi obojętnej.

Prześledzimy z kolei przypadek kiedy w przekroju nie mogą się pojawić naprężenia rozciągające, np. wskutek niskiej wytrzymałości na rozciąganie. Należy wówczas znaleźć taki obszar w pobliżu środka ciężkości przekroju, aby siła osiowa P przyłożona w tym obszarze wywołała jedynie ściskanie w całym przekroju. Obszar ten nazywamy jądrem przekroju. W celu określenia jądra przekroju należy założyć, że oś obojętna jest styczna do konturu przekroju poprzecznego a dokładniej do najmniejszego wielokąta wypukłego opisanego na konturze przekroju.

W przypadku przekroju prostokątnego zachodzi

$$x_2 = \frac{h}{2} \frac{x_2}{(i_3)^2} + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{h}{6}$$

$$x_2 = -\frac{h}{2} - \frac{x_2}{(i_3)^2} + 1 = 0 \rightarrow x_2 = +\frac{h}{6}$$



Rys.66.

$$x_3 = \frac{b}{2} \frac{\overset{\circ}{x}_3}{(i_2)^2} \frac{b}{2} + 1 = 0 \rightarrow \overset{\circ}{x}_3 = -\frac{b}{6}$$

$$x_3 = -\frac{b}{2} - \frac{\overset{\circ}{x}_3}{(i_2)^2} \frac{b}{2} + 1 = 0 \rightarrow \overset{\circ}{x}_3 = +\frac{b}{6}$$

gdzie $(i_2)^2 = \frac{bh^3}{12bh}$, $(i_3)^2 = \frac{bh^3}{12bh}$.

LITERATURA

- [1] FUNG Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN Warszawa 1969
- [2] ERINGEN A.C.: Nonlinear Theory of Continuous Media, New York 1962, Mc.Graw-Hill
- [3] GREEN A. E., ZERNA W.: Theoretical Elasticity, Oxford University Press, London 1954
- [4] NOLL W., TRUSDELL C.A.: The Non-linear Field Theories of Mechanics, w pracy: Handbuch der Physik, Springer Verlag, Berlin 1964
- [5] NOWACKI W.: Dynamiczne zagadnienia termosprężystości, PWN Warszawa 1968
- [6] OLSZAK W., [i in.]: Teoria plastyczności, PWN Warszawa 1966
- [7] PIECHNIK S.: Wytrzymałość materiałów, PWN Warszawa 1978
- [8] TRUSDELL C.A.: First Course in Rational Continuum Mechanics J. John Hopkins University Baltimor, Maryland 1972
- [9] WOŹNIAK CZ.: Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych, PWN Warszawa 1969
- [10] WILMAŃSKI K.: Podstawy termodynamiki fenomenologicznej, PWN Warszawa 1974

