

**Wojciech ANIGACZ**

**GEODEZJA INŻYNIERYJNA**  
**Wybrane zagadnienia**

**Wyznaczenie odchylenia osi komina od pionu**



**Opole 2008**

**seria: MONOGRAFIE z. 226**

**Wojciech ANIGACZ**

**SURVEY ENGINEERING  
Selected problems.**

**Determining deviation of chimney axis  
from the plumb**

**Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej  
Opole 2008**

Spis treści

	Przedmowa .....	5
1.	Wstęp .....	7
2.	Wymagania techniczne .....	11
3.	Wprowadzenie teoretyczne .....	19
4.	Dzienniki pomiarowe .....	27
5.	Poziom pierwszy .....	37
6.	Poziom drugi .....	61
7.	Poziom trzeci .....	79
8.	Poziom czwarty .....	97
9.	Zestawienie współrzędnych osi komina dla poszczególnych poziomów .....	115
9.1.	Graficzne przedstawienie wyników pomiarów .....	115
10.	Uwagi końcowe .....	117
11.	Literatura .....	119
	Streszczenia.....	125

## **Przedmowa**

Niniejsza monografia zawiera przykład pomiaru i opracowania wyników pomiaru odchylenia od pionu osi komina metodą wielokrotnego wcięcia kąтового w przód z trzech stanowisk. Zaprezentowany przykład przeliczony jest programem Mathcad 14 w rachunku macierzowym, którego podstawowa znajomość jest u czytelnika wskazana oraz w języku programowania Fortran. Literatura zawiera pozycje z zakresu geodezji i budownictwa dotyczące budowy, eksploatacji i geodezyjnej obsługi budowli wieżowych. W tekście nie podano odsyłaczy do wszystkich pozycji literatury, ponieważ przedstawione podejście i algorytm nie były wcześniej publikowane. Nowość prezentowanego podejścia polega na kompleksowym i bardzo szczegółowym potraktowaniu problemu, wręcz dydaktycznym. Na uwagę zasługuje zwłaszcza szeroko potraktowane wyprowadzenie równań poprawek i analiza dokładności. Zaprezentowany algorytm bez modyfikacji można wykorzystać do własnych obliczeń. Spośród wielu metod obliczeniowych wybrano metodę opartą na odniesieniu pomiarów kątowych do kierunków zorientowanych. Przedstawiony algorytm można wykorzystać do wykonania obliczeń odchylenia od pionu osi komina niezależnie od sposobu nawiązania kąтового na poszczególnych stanowiskach.

W tym miejscu chciałbym podziękować za pomoc pracownikom Katedry Geotechniki i Geodezji Wydziału Budownictwa Politechniki Opolskiej, a w szczególności Panu Danielowi OKOSOWI, technikowi geodecie za pomoc w przygotowaniu redakcyjnym niniejszej monografii.

Uwagi na temat monografii proszę kierować na adres Wydawcy lub autora [w.anigacz@po.opole.pl](mailto:w.anigacz@po.opole.pl).

*Autor*

## 1. WSTĘP

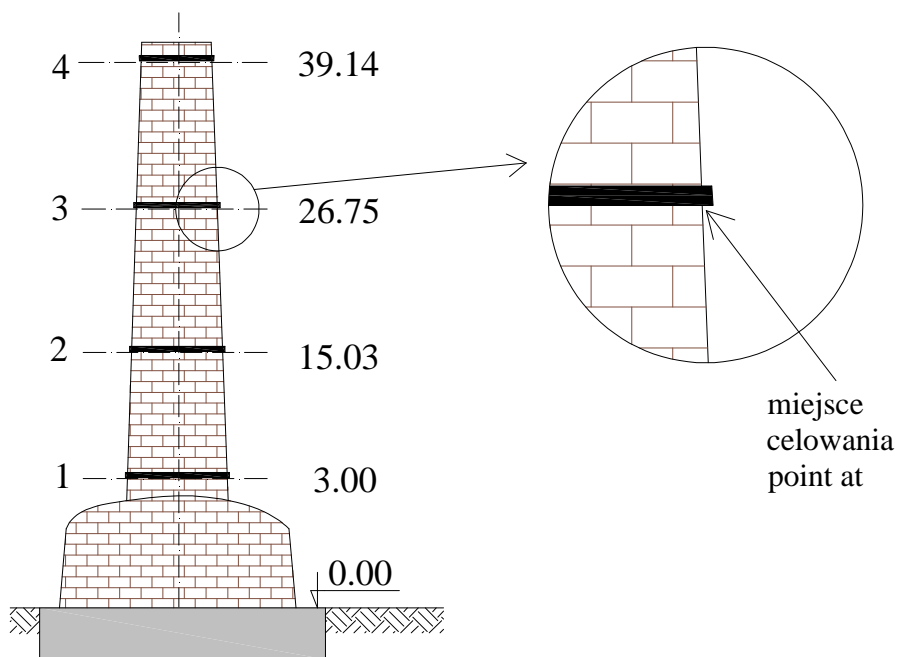
Pomiary parametrów geometrycznych obiektów budowlanych służą m.in. do określania ich stanu technicznego. Prof. R. Ciesielski pisze: „**Głównymi dobrze mierzalnymi objawami wyężenia konstrukcji są zmiany ich geometrii**” [2]. Trudno o lepszą rekomendację do wykonywania okresowych pomiarów obiektów budowlanych. Natomiast w załączniku nr 13 do instrukcji geodezyjnej resortu przemysłu ciężkiego „Wytoczne wykonania geodezyjnych pomiarów masywnych budowli wieżowych” [7] stwierdza się „**Celem okresowych pomiarów przemieszczeń jest rejestracja postępujących odkształceń trwałych obiektu i zasygnalizowanie ewentualnej konieczności stosowania środków prewencyjnych**”, rys.1.



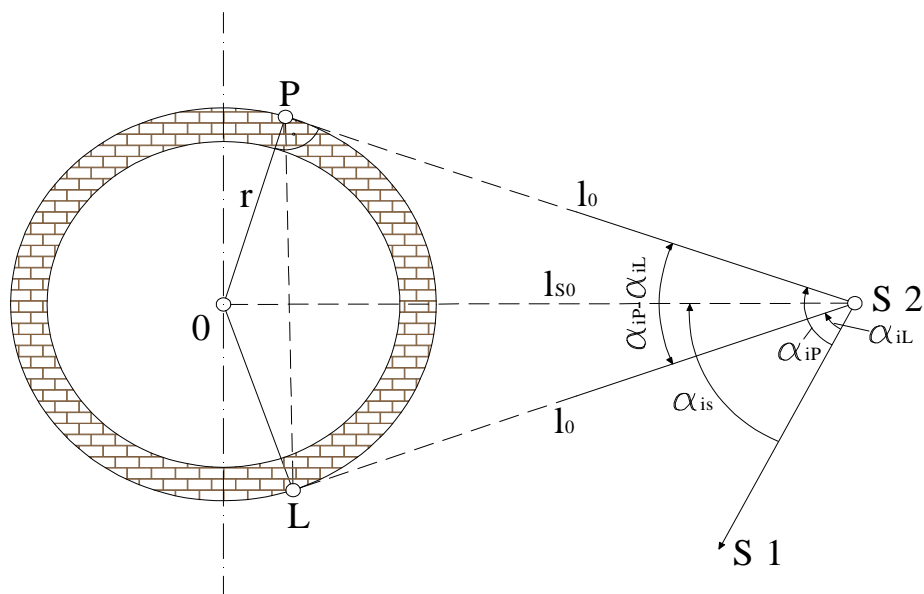
**Rys. 1.** Przykład katastrofy budowlanej komina  
**Fig. 1.** An example of chimney crash

W dalszej części przedstawiono wprowadzenie teoretyczne, wymagania techniczne, materiały z pomiarów polowych (dzienniki pomiarowe) pionowości

osi komina wykonanych z trzech stanowisk oraz analityczne i graficzne opracowanie wyników pomiaru. Przy trzech stanowiskach pomiarowych występują już obserwacje nadliczbowe. Obserwacji podlegały tworzące komina na czterech poziomach metodą trygonometryczną (rys. 2), sposobem dwusiecznych (rys. 3). Obliczenia wykonano algorytmem opracowanym przez autora w środowisku informatycznym Mathcad 14 i Fortran. W części teoretycznej podano wyprowadzenie równań poprawek i algorytm obliczeniowy wykorzystany w dalszej części monografii. W części praktycznej podano szczegółowo rozpisane obliczenia ze wskazówkami do korzystania z programu Mathcad. Bardzo istotną częścią opracowania wyników pomiarów terenowych jest ich wyrównanie. Dobrze ułożone równania obserwacyjne i współczynniki wagowe pozwalają na poprawne przeprowadzenie procesu wyrównania.



**Rys. 2.** Schemat komina z mierzonymi poziomami  
**Fig. 2.** A scheme of a chimney with measured height levels



**Rys. 3.** Schemat pomiaru metodą dwusiecznych jednego poziomu z jednego stanowiska  
**Fig. 3.** The scheme of measurement of one level from one position by the bisector method

$$r_i = l_{S0} \cdot \sin \frac{\alpha_{iP} - \alpha_{iL}}{2} \quad (1)$$

$$l_{S0} = \frac{l_0}{\cos \frac{\alpha_{iP} - \alpha_{iL}}{2}} \quad (2)$$

gdzie:

$l_{S0}$  – odległość od stanowiska pomiarowego do osi komina; obliczana jest ze współrzędnych wyrównanych,

$l_0$  – odległość od stanowiska pomiarowego do punktu styczności osi celowej instrumentu do tworzącej komina,

$\alpha_{iP}, \alpha_{iL}$  – kąty od boku osnowy pomiarowej do prawej i lewej tworzącej przekroju i-tego,

$r_i$  – promień komina na i-tym poziomie.

Przyjęto następujące założenia: współczynniki wagowe obserwacji kątowych odpowiadają rzeczywistej dokładności pomiaru wyznaczonej z dwukrotnego obliczenia kierunku na oś komina z czterech celowań na tworzące z jednego stanowiska dla jednego przekroju. Natomiast współrzędne stanowisk pomiarowych przyjęto za bezbłędne.

W końcowej analizie dokładności przeliczono i zestawiono wpływ błędów pomiarów kierunków dla:  $1^{\text{cc}}$ ,  $5^{\text{cc}}$ ,  $10^{\text{cc}}$ ,  $15^{\text{cc}}$ ,  $20^{\text{cc}}$ ,  $50^{\text{cc}}$  i  $100^{\text{cc}}$  na dokładność wyniku końcowego dla poziomu pierwszego. Przedstawiony algorytm można wykorzystać do pomiarów pionowości wysmukłych budowli wieżowych, jak: kominy, maszty i wieże, tam gdzie wykorzystuje się metodę wielokrotnego wcięcia kąтового w przód. W niniejszym opracowaniu dla pierwszego poziomu podano szczegółowy algorytm z komentarzami i wskazówkami, natomiast dla pozostałych trzech poziomów opis algorytmu ograniczono do niezbędnego minimum, aby użytkownik mógł się zorientować, które dane są niezbędne do wykonania obliczeń. Czytelnik bardziej obeznany z Mathcadem może na podstawie algorytmu podanego dla pierwszego poziomu samodzielnie zaprogramować pętlę obliczeniową dla dowolnej liczby mierzonych przekrojów. W niniejszej monografii skoncentrowano się na analitycznym i graficznym opracowaniu wyników pomiaru. W niniejszej monografii posłużono się algorytmami zawartymi w pracach [1, 4]. Natomiast same pomiary obszernie przedstawione są m.in. na przykład w załączniku nr 13 do instrukcji geodezyjnej resortu przemysłu ciężkiego „Wytyczne wykonania geodezyjnych pomiarów masywnych budowli wieżowych” MPC opracowanych przez zespół: Ciesielski R., Żak M., Kawecki J., Bogusz J., Pieronek M. [7] i w rozdziale 7.6 Hohe Türme und Industrieschornsteine książki Ingenieurgeodäsie, Anwendung im Bauwesen und Anlagenbau autorów Hennecke F. i Werner H. [3].



## 2. WYMAGANIA TECHNICZNE

W literaturze technicznej problematyka projektowania, budowy i eksploatacji kominów zajmuje dużo miejsca. Wynika to ze znaczenia, jakie ma poprawna praca konstrukcji komina. Awaria komina na ogół przerywa gwałtownie proces produkcyjny, który ten komin obsługuje (rys.1). Stąd tak ważna jest współpraca inżynierów budownictwa i geodetów od etapu wznoszenia komina poprzez cały okres jego eksploatacji. Normy techniczne i inne akty prawne podają wybrane parametry geometryczne komina, które powinny podlegać obserwacjom geodezyjnym, a ich wyniki powinny być ocenione przez specjalistów z zakresu mechaniki budowli. Poniżej podano niektóre wymagania techniczne:

Polska Norma PN-N-02211, sierpień 2000. **Geodezja. Geodezyjne wyznaczenie przemieszczeń. Terminologia podstawowa** [8].

**2.1.1 przemieszczenie punktu** – zmiana położenia punktu względem przyjętego układu odniesienia zaistniała w określonym interwale czasowym.

**2.1.11 przemieszczenie poziome punktu** – pozioma składowa wektora przemieszczenia punktu.

**2.1.14 przemieszczenie wyznaczone** – wielkość przemieszczenia uzyskana na podstawie pomiarów i opracowania ich wyników.

**2.1.20 odkształcenie obiektu, deformacja obiektu** – zmiana uformowania niezdylatowanej bryły obiektu nie naruszająca jej ciągłości materialnej, wyrażająca się w zmianach wzajemnych odległości pomiędzy punktami tej bryły lub\i w zmianach wartości kątów pomiędzy liniami łączącymi te punkty.

**2.1.28 monitorowanie stanu geometrycznego obiektu** – okresowe bądź ciągłe wyznaczanie przemieszczeń i\lub deformacji elementów obiektu.

**2.1.29 wyznaczanie przemieszczeń punktów** – wykonywanie powtarzanych okresowo pomiarów i obliczeń w sieci kontrolnej służących ocenie stabilności punktów odniesienia i uzyskiwaniu wektorów przemieszczeń punktów kontrolowanych obiektu wraz z charakterystyką dokładności.

**2.2.9 metoda trygonometryczna** – metoda wyznaczania poziomych przemieszczeń punktów za pomocą okresowych pomiarów kątów lub kierunków w sieci kontrolnej.

Główny Urząd Geodezji i Kartografii. Instrukcja techniczna G-3. **Geodezyjna obsługa inwestycji**. Wyd. II Warszawa 1980 [6].

§ 24.

1. Należy stosować następującą ogólną zasadę ustalenia dokładności tyczenia (autor: pomiaru) określonej granicznym błędem wytyczania (pomiaru)  $M_t$

$$M_t = r \cdot m_t \leq K \cdot dL \quad (3)$$

gdzie:

$r$  – współczynnik, którego wartość zależy od wymaganego prawdopodobieństwa poprawności wytyczenia (wyniku) oraz od stopnia przypadkowości błędów tyczenia (pomiarów służących do wyznaczenia przemieszczenia).

$m_t$  – błąd średni tyczenia (pomiaru),

$K$  – parametr określający, jaką częścią granicznej odchyłki  $dL$  może być graniczny błąd wytyczenia (pomiaru),

$dL$  – graniczna odchyłka usytuowania tyczonego elementu obiektu.

2. Wartość parametru  $K$  zależy od stopnia ważności wyniku tyczenia (pomiaru) dla możliwości prawidłowego wykonania robót montażowych, wytrzymałości obiektu, prawidłowości działania obiektu oraz zachowania przez obiekt walorów architektonicznych.

- 1) Wartość parametru  $K$  przyjmuje się od 0,4 (przy wysokim stopniu ważności przedmiotu tyczenia) do 1,0 przy niskim stopniu ważności.

(...)

- 3) Pożądaną wartość średniego błędu tyczenia określa się na podstawie wzoru:

$$m_t = M_t/r \quad (4)$$

- przy normalnym rozkładzie błędów tyczenia, gdy należy uzyskać prawdopodobieństwo poprawności wyniku tyczenia (pomiaru)

**Tabela 1.** Zestawienie wartości współczynnika  $r$

**Table 1.** A specification of value of coefficient  $r$

Prawdopodobieństwo P	Wartość współczynnika $r$
(1)	(2)
0,9973	3,0
0,9876	2,5
0,9545	2,0

- w przypadku występowania warunków pomiarów wskazujących na możliwość odbiegania rozkładu błędów tyczenia (pomiaru) od rozkładu normalnego, należy przyjmować  $r = 4$ .

**§ 34.**

1. Należy uznać za poprawne stosowanie następującej ogólnej zasady ustalenia dokładności wyznaczania przemieszczeń, określonej granicznym błędem wyznaczenia przemieszczeń  $M_p$ :

$$M_p = r \cdot m_p \leq R \cdot P \quad (5)$$

gdzie:

- $r$  – współczynnik, którego wartość zależy od wymaganego prawdopodobieństwa poprawności wyniku oraz od stopnia przypadkowości błędów pomiarów służących do wyznaczania przemieszczenia,
  - $m_p$  – błąd średni wyznaczenia przemieszczenia,
  - $R$  – parametr określający, jaką częśćią granicznego przemieszczenia może być graniczny błąd jego wyznaczenia,
  - $P$  – graniczne przemieszczenie określone dla danego obiektu.
2. Dla  $R$  należy przyjmować następujące wartości:
    - $R = 0,5$  – przy automatycznej sygnalizacji niebezpiecznych stanów obiektu,
    - $R = 0,3$  – przy pomiarach mających na celu stwierdzenie, czy graniczna wartość przemieszczenia nie została osiągnięta lub przekroczona,
    - $0,01 \leq R \leq 0,1$  – przy pomiarach służących do jakościowego i ilościowego badania zależności między wielkościami przemieszczeń a ich przyczynami i skutkami.

**§ 35.**

1. Należy uznać za poprawną następującą ogólną zasadę ustalenia częstotliwości pomiarów okresowych i szybkości (rozciągłości w czasie) wykonywania jednego pomiaru okresowego.
  - a) odstęp czasu pomiędzy dwoma kolejnymi pomiarami okresowymi powinien być taki, aby przewidywane przemieszczenia były nie większe od  $2 M_p$  i nie mniejsze od  $0,5 M_p$ ,
  - b) w czasie trwania jednego pomiaru okresowego zmienność (przyrost) przemieszczeń nie powinna przekraczać  $0,3 M_p$ .

**PN-93/B-03201. Konstrukcje stalowe. Kominy.** Obliczenia i projektowanie.  
**pkt 5.8;** s.14. Umowne ugięcie montażowe jest określone wzorem [10]:

$$u_m = H/300 \quad (6)$$

gdzie:

$H$  – wysokość komina nad fundamentem.

Przemieszczenie całkowite wierzchołka komina określone powyższym wzorem powinno spełniać warunek:

- w kominach jednopowłokowych  $u \leq H/75$ ,
- w kominach dwupowłokowych  $u \leq H/100$ ,
- w kominach z wykładziną ceramiczną  $u \leq H/150$ .

**PN-88/b-03004. Kominny murowane i żelbetowe.** Obliczenia statyczne i projektowanie [9].

- **pkt 8.5.** s.17. Urządzenia kontrolno-pomiarowe. W celu umożliwienia sprawdzenia osiadania i pionowości komina należy osadzić w cokole fundamentu lub dolnej części trzonu komina na wysokości 0,5 m nad terenem, cztery repery stalowe rozmieszczone symetrycznie na obwodzie.
- **pkt 9.1.** s.17. Oddanie komina do eksploatacji. Przed oddaniem komina do eksploatacji należy wykonać pomiar odbiorczy, w wyniku którego otrzymuje się wyjściowy kształt komina oraz usytuowanie fundamentu.
- **pkt 9.2.** s. 17. Kontrola komina w czasie eksploatacji. Po pierwszym roku eksploatacji komina należy wykonać kontrolę stanu zewnętrznego komina oraz pomiary kontrolne osiadania i wychylenia od pionu. Jeżeli w wyniku pierwszej kontroli okaże się, że wystąpiło nierównomierne osiadanie podstawy komina prowadzące do wartości wychylenia z pionu równej  $70 \pm 100\%$  wartości wykazanej w obliczeniach, należy powyższe badanie powtórzyć nie później niż po roku i na tej podstawie określić warunki dalszej eksploatacji komina. Przegląd zewnętrzny i wewnętrzny stanu zachowania komina należy przeprowadzać co 5 lat.

**PN-B-03204:2002.** Konstrukcje stalowe. Wieże i maszty. Projektowanie i wykonanie [11].

**pkt 51.3**

- przemieszczenia wierzchołka wieży lub masztu – nie większe niż 1/100 całkowitej wysokości:
- przemieszczenia węzłów masztu – nie większe niż 1/100 odległości węzła od podstawy masztu;
- obrót wierzchołka oraz dowolnego przekroju wieży lub masztu nie więcej niż jeden stopień w poziomie i pionie – dla wież i masztów telekomunikacyjnych.

**Tabela 2.**

**Załącznik 7. Metryka komina. PN-88/b-03004 [9].**

**Tablica Z7-1. Zestawienie niezbędnych informacji zawartych w metryce.**

Lp.	Treść informacji	Opracowanie informacji		Uwagi
		faza obiektu	odpowie dzialny	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1.	Wykaz kierunków do celowników lub znaków naturalnych	w trakcie wykonywania komina	wykona- wca	Wykaz stanowi podstawę do okresowego sprawdzania pionowości
2.	Szkic niwelacyjnej sieci kontrolnej z wynikami pomiaru wyjściowego różnic wysokości	w trakcie wykonywania komina	wykona- wca	Wyniki są podstawą do okresowego (p.9.2.normy) wyznaczania przechyłu
3.	Pomiarowa weryfikacja linii ugięcia komina	po wykonaniu komina	wykona- wca	
4.	Wyniki pomiaru przechyłu	okresowo zgodnie z p.9.2. normy	użytko- wnik	
5.	Wykresy kształtu osi komina w wyniku pomiaru odbiorczego	po wykonaniu komina	wyko- nawca	
6.	Jak w Lp. 12 w wyniku pomiaru po każdym remoncie	po wykonaniu remontu	użytko- wnik	

**Prawo geodezyjne i kartograficzne.** DzU z dnia 21 listopada 2000 r. nr 100. Poz. 1086. Obwieszczenie Ministra Rozwoju Regionalnego i Budownictwa z dnia 24 października 2000 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu ustawy – Prawo geodezyjne i kartograficzne [13].

**Prawo budowlane.** DzU 1994, nr 89, poz. 414 (z późniejszymi zmianami) [12].

Art. 73.

1. Katastrofą budowlaną jest niezamierzone, gwałtowne zniszczenie obiektu budowlanego lub jego części (rys.1), ....

**Rozporządzenie** Ministra Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa z dnia 21 lutego 1995 r. **w sprawie rodzaju i zakresu opracowań geodezyjno-kartograficznych oraz czynności geodezyjnych obowiązujących w budownictwie.** DzU nr 25 z dnia 13 marca 1995 r. poz. 133 [14].

Rozdział 4. Czynności geodezyjne w toku budowy

**§ 12.**

**pkt 2)** pomiary przemieszczeń obiektu i jego podłoża oraz pomiary odkształceń obiektu,

**pkt 3)** geodezyjną inwentaryzację powykonawczą obiektów lub elementów obiektów, o których mowa w art. 43 ust. 3 ustawy – Prawo budowlane.

**§ 13.** Geodezyjna obsługa budowy i montażu obiektu budowlanego obejmuje tyczenie i pomiary kontrolne tych elementów obiektu, których dokładność usytuowania bez pomiarów geodezyjnych nie zapewni poprawnego wykonania obiektu.

**§ 14.** W celu zapewnienia bezpieczeństwa budowy obiektu budowlanego oraz bezpieczeństwa jego utrzymania wykonuje się czynności geodezyjne związane z geodezyjnym wyznaczeniem przemieszczeń obiektu i jego podłoża oraz pomiary odkształceń obiektu.

Rozdział 5. Czynności geodezyjne po zakończeniu budowy

**§ 18.**

**pkt 1.** Po zakończeniu prac budowlanych, a przed oddaniem obiektu do użytkowania, należy wykonać pomiar stanu wyjściowego obiektów wymagających w trakcie użytkowania okresowego badania przemieszczeń i odkształceń.

**pkt 2.** Okresowe pomiary geodezyjne przemieszczeń i odkształceń wykonuje się, jeżeli pomiary takie przewiduje projekt budowlany lub na wniosek zainteresowanego podmiotu.

Ministerstwo Przemysłu Ciężkiego. Wytyczne wykonania geodezyjnych pomiarów masywnych budowli wieżowych. **Załącznik nr 13 do instrukcji geodezyjnej resortu przemysłu ciężkiego.** Wyd. Przemysłu Maszynowego WEMA. Warszawa 1976 r. [7].

**3.1.1.** Celem okresowych pomiarów przemieszczeń jest rejestracja postępujących odkształceń trwałych obiektu i zasygnalizowanie ewentualnej konieczności stosowania środków prewencyjnych.

**3.1.10.** Okresowe badania przemieszczeń należy prowadzić z następującą częstotliwością:

pierwszy rok eksploatacji	1
drugi rok eksploatacji	1
trzeci i następne lata eksploatacji	co trzy lata

**2.3.** Geodezyjna obsługa trzonu, s. 27:

Pomiar ten (autor: powykonawczy) wykonać należy w warunkach pochmurnej i bezwietrznej pogody, we wczesnych godzinach rannych, prowadząc obserwacje kierunków jednocześnie z wszystkich stanowisk obserwacyjnych. (...) Pomiar wykonać należy w dwóch seriach z średnim błędem kierunku  $m = \pm 30''$ .

**s. 29.** (...) aktualny kształt budowli jest wypadkową odkształceń trwałych i dobowych.

**s. 31.** Pomiar pionowości przeprowadzać należy w taki sposób, by średni błąd wyznaczania przemieszczeń wyniósł:  $m_{dmax} = \pm 5 \text{ cm}$ .

**3.4.** Metryka odkształceń.

Obliczenie wpływu parcia wiatru przeprowadzić należy opierając się na zależności:

$$y = \frac{\overline{M_r}}{EJ} \quad (7)$$

gdzie:

$y$  – strzałka ugięcia na wysokości  $x(h_i)$ ,

$\overline{M_r}$  – tzw. moment wtórny zginający na wysokości  $x(h_i)$ ,

$J$  – moment bezwładności przekroju budowli,

$E$  – moduł Younga, który przyjmować należy (jeśli brak danych szczegółowych),

dla żelbetu:  $E = 2\,000\,000 \text{ t/m}^2$ ,

dla cegły:  $E = 1\,000\,000 \text{ t/m}^2$ .

Obliczenie wpływu nasłonecznienia prowadzić należy wg zależności:

$$f_j = \alpha_t \left[ \sum_{i=1}^j \Delta t_i \frac{h_i}{d_i} \left( \frac{h_i}{2} + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \right) \right] \quad (8)$$

gdzie:

$f_j$  – strzałka ugięcia na wysokości  $j$ ,

$\Delta t_i$  – różnica temperatury na wysokości  $i$ ,

$h_i$  – wysokość jednostkowa,

$d_i$  – średnica przekroju,

$\alpha_t$  – współczynnik rozszerzalności cieplnej, który można przyjmować,  
gdy brak danych szczegółowych,

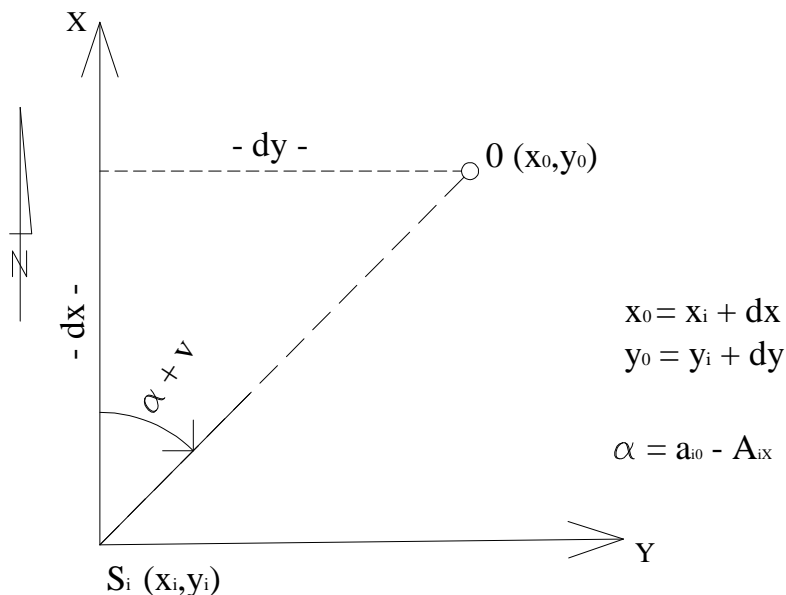
dla żelbetu:  $\alpha_t = 0,00001/^\circ\text{C}$ ,

dla cegły:  $\alpha_t = 0,000005/^\circ\text{C}$ .



### 3. WPROWADZENIE TEORETYCZNE

Wielokrotne wcięcie kątowe w przód oparte na kierunkach zorientowanych (azymutach) dla jednego stanowiska można opisać jak na rys. 4. Szukanymi niewiadomymi są: przyrosty  $dx$ ,  $dy$  do współrzędnych przybliżonych osi komina oraz poprawki do azymutów ( $v$ ).



**Rys. 4.** Schemat pomiaru metodą biegunową w oparciu o kierunki zorientowane

**Fig. 4.** A scheme of survey by the polar method in the support about azimuth directions

gdzie:

$\alpha$  – azymut,

$v$  – poprawka do azymutu,

$O(x_0, y_0)$  – przybliżone współrzędne osi komina,

$S_i(x_i, y_i)$  – współrzędne  $i$ -tego stanowiska pomiarowego,

$a_{i0}$  – odczyt kąta poziomego na oś komina,

$A_{iX}$  – odczyt kąta poziomego na kierunek północy (oś X),

$dx, dy$  – przyrosty do współrzędnych przybliżonych osi komina.

$$\alpha = \arctg \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} - \arctg \frac{y_N - y_i}{x_N - x_i} \quad (9)$$

gdzie:  $Y_N - Y_i = 0$

stąd różniczka zupełna:

$$d\alpha = \frac{\delta\alpha}{\delta x_0} \cdot dx_0 + \frac{\delta\alpha}{\delta y_0} \cdot dy_0 \quad (10)$$

**Pochodna po  $x_0$**

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x_0} = (-1) \frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)^2} \cdot \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)' \quad (11)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$	pochodna z $\arctg(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}$	pochodna wewnętrzna dla $\arctg\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)$ według wzoru różniczkowego $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
------------------------------	---	---

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x_0} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)^2} \cdot \underbrace{(-1) \cdot (y_i - y_0)}_{\text{stała}} \cdot \frac{1}{(x_i - x_0)^2} \quad (12)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x_0} = \frac{1}{\frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{(x_i - x_0)^2}} \cdot \frac{y_i - y_0}{(x_i - x_0)^2} \quad (13)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x_0} = \frac{(x_i - x_0)^2}{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \cdot \frac{y_i - y_0}{(x_i - x_0)^2} \quad (14)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)^2} \cdot \frac{y_i - y_0}{(x_i - x_0)^2} \quad (15)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta x_0} = \frac{y_i - y_0}{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} = \frac{\Delta y_{0i}}{l_{0i}^2} \quad (16)$$

w wyniku otrzymujemy:

$$\boxed{\frac{\delta\alpha}{\delta x_0} = \frac{\Delta y_{0i}}{l_{0i}^2}} \quad (17)$$

**Pochodna po  $y_0$**

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y_0} = - \frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)^2} \cdot \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)' \quad (18)$$

pochodna dla  $\arctg x$       pochodna wewnętrzna według wzoru różniczkowego:  
 $(A \cdot x)' = A$ , gdzie  $A$  – stała

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y_0} = - \frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}\right)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{x_i - x_0}}_{\text{stała}} \cdot \underbrace{1}_{\text{pochodna po } y_0} \quad (19)$$

gdych  $A = \frac{1}{x_i - x_0}$  oraz  $x = (y_i - y_0)$ ,

czyli  $x' = (y_i - y_0)' = 1 - 0 = 1$ ;

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y_0} = \frac{1}{\frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{(x_i - x_0)^2}} \cdot \frac{1}{(x_i - x_0)} \quad (20)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y_0} = \frac{(x_i - x_0)^2}{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \cdot \frac{1}{(x_i - x_0)} \quad (21)$$

$$\frac{\delta\alpha}{\delta y_0} = - \frac{x_i - x_0}{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} = - \frac{\Delta x_{0i}}{l_{0i}^2} \quad (22)$$

w wyniku otrzymujemy:

$$\boxed{\frac{\delta\alpha}{\delta y_0} = - \frac{\Delta x_{0i}}{l_{0i}^2}} \quad (23)$$

stąd wzór (10) przyjmuje postać:

$$\boxed{d\alpha = \frac{\Delta y_{0i}}{l_{0i}^2} \cdot \rho \cdot dx_0 - \frac{\Delta x_{0i}}{l_{0i}^2} \cdot \rho \cdot dy_0} \quad (24)$$

gdzie:  $\rho$  - współczynnik zamiany miary liniowej na łukową, ponieważ  $\alpha$  wyrażone jest w gradach lub stopniach.

Stąd równanie poprawek w postaci macierzowej ogólnej przedstawia się następująco:

$$v = A \cdot dx - L \quad (25)$$

gdzie:

L – macierz wyrazów wolnych,

A – macierz współczynników przy niewiadomych,

x – niewiadome, przyrosty współrzędnych.

Przyrosty współrzędnych dx i dy oblicza się z układu równań:

$$\begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \end{bmatrix} = (A^T P A)^{-1} \cdot A^T P L \quad (26)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\rho \cdot \Delta y_{01}}{(l_{01})^2} & -\frac{\rho \cdot \Delta x_{01}}{(l_{01})^2} \\ \frac{\rho \cdot \Delta y_{02}}{(l_{02})^2} & -\frac{\rho \cdot \Delta x_{02}}{(l_{02})^2} \\ \frac{\rho \cdot \Delta y_{03}}{(l_{03})^2} & -\frac{\rho \cdot \Delta x_{03}}{(l_{03})^2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$L = \begin{bmatrix} \text{azym. pom.} - \text{azym. obl. z 1 stan.} \\ \text{azym. pom.} - \text{azym. obl. z 2 stan.} \\ \text{azym. pom.} - \text{azym. obl. z 3 stan.} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{Az_1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{Az_2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_{Az_3}^2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

gdzie:

$m_{Azi}$  – błąd wyznaczenia azymutu z i-tego stanowiska w gradach.

Współrzędne wyrównane  $w_i$ :

$$w_i = w_0 - dp \quad (30)$$

gdzie:

$w_i$  – współrzędne wyrównane dla i-tego poziomu,

$dp$  – przyrosty współrzędnych dla i-tego poziomu,

$w_0$  – współrzędne przybliżone i-tego poziomu.

### Analiza dokładności.

Wartości poprawek dla azymutów oblicza się ze wzoru:

$$v = A \cdot \Delta p - L \quad (31)$$

Sprawdzenie poprawności obliczeń ze wzoru:

$$A^T P v = 0 \quad \text{warunek konieczny.} \quad (32)$$

Wartość błędu  $m_0$  oblicza się ze wzoru:

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{n - k}} \quad (33)$$

gdzie:

$n$  – liczba równań obserwacyjnych,

$k$  – liczba wyznaczanych niewiadomych.

Macierz błędów współrzędnych:

$$C_x = m_0(A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

gdzie:

$m_x$  – błąd współrzędnej  $x$ ,

$m_y$  – błąd współrzędnej  $y$ ,

$m_{xy}$  – kowariancja między  $x$  i  $y$ .

Błąd położenia punktu:

$$m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad (35)$$

Błąd położenia punktu w zadanym kierunku:

$$m(\alpha) = \sqrt{m_x^2 \cdot \cos^2 \alpha + m_{xy} \cdot \sin 2\alpha + m_y^2 \cdot \sin^2 \alpha} \quad (36)$$

Kąt skręcenia elipsy dla ekstremalnych wartości błędu położenia punktu:

$$\alpha_A = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2m_{xy}}{m_x^2 - m_y^2} \right) \cdot \rho \quad (37)$$

$$\alpha_B = \alpha_A + 100^\circ \quad (38)$$

W przykładzie podanym poniżej przedstawiono pomiar inwentaryzacyjny pionowości osi komina ceramicznego o przekroju kołowym. Pomiar wykonano z trzech stanowisk, aby uzyskać obserwacje nadliczbowe umożliwiające przeprowadzenie pełnej analizy dokładności pomiarów. Schemat osnowy pomiarowej, dane liczbowe i graficzne z pomiaru podano w kolejnych rozdziałach. W części obliczeniowej wykorzystano algorytm podany w tym rozdziale.

Dziennik pomiaru kierunków ze stanowiska nr 1

Stano- wisko	Cel	I położenie lunety				II położenie lunety				Kierunki zredukowane				Średnia wartość kąta	Obliczenia kontrolne						Data:		
		A B		średnia		A B		średnia		z położenia I		II			średnia		Sumy śr. Odcz. I + II dla poszcz. kier.			Różnice obliczonych kierunków z kol. 10 ½ różnicy = kąt			Str. 1/1
		o	/'	"/	''	o	/'	"/	''	o	/'	"/	''		o	/'	"/	o	/'	"/			
		g	c	cc	c	cc	g	c	cc	c	cc	g	c		cc	c	cc	g	c	cc	g	c	
1	2	3		4		5		6		7		8		9			10			11			12
S1	S2	152	71	20	71	20	352	70	90	70	80	152	71	20	71	00							
			71	20					70		70					70							80
	1L	100	00	30	00	15	299	99	90	00	85	100	00	15	00	00							
			00	00					99		80					99							85
	1P	105	39	80	39	90	305	41	10	41	10	105	39	90	40	00							
			40	00					41		10					41							10
	2L	100	15	60	15	60	300	15	50	15	40	100	15	60	15	50							
			15	60					15		30					15							40
	2P	105	30	00	29	90	305	30	15	30	10	105	29	90	30	00							
			29	80					30		05					30							10
	3L	100	25	80	25	85	300	25	70	25	75	100	25	85	25	80							
			25	90					25		80					25							75
	3P	105	21	90	22	00	305	22	00	22	00	105	22	00	22	00							
			22	10					22		00					22							00
	4L	100	37	95	37	85	300	37	90	37	75	100	37	85	37	80							
			37	75					37		60					37							75
	4P	105	08	95	08	95	305	09	00	09	05	105	08	95	09	00							
			08	95					09		10					09							05
	S2	152	71	00	71	00	352	71	10	71	00	152	71	00	71	00							
			71	00					70		90					71	00						

Pomiar wykonano instrumentem: **Leica TPS800**

Stan na dzień:  
Pomiar wykonał:



Dziennik pomiaru kierunków ze stanowiska nr 2

strona 1

Stano- wisko	Cel	I położenie lunety					II położenie lunety					Kierunki zredukowane					Średnia wartość kąta	Obliczenia kontrolne						Data:  Str. 1/2																																																																																																																															
		A B			średnia		A B			średnia		z położenia		I II- 200				średnia			Sumy śr. Odcz. I + II dla poszcz. kier.				Różnice obliczonych kierunków z kol. 10 ½ różnicy = kąt																																																																																																																														
		°	'	''	'	''	°	'	''	'	''	°	'	''	'	''		°	'	''	'	''	°		'	''	'	''																																																																																																																											
g	c	cc	c	cc	g	c	cc	c	cc	g	c	cc	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc																																																																																																																													
1	2	3			4		5			6		7					8			9			10			11			12																																																																																																																										
S2	S1	88	40	10	40	10	288	39	90	39	90	88	40	10	40	00		40	10	40	10	188	40	10	40	15	188	40	15	40	00	135	70	00	70	00	335	70	10	70	00	135	70	00	69	80	141	09	90	09	85	341	10	20	10	15	141	09	85	10	00	135	85	10	85	05	335	84	90	84	95	135	85	05	85	00	140	99	10	98	95	340	99	10	99	05	140	98	95	99	00	135	91	40	91	40	335	91	65	91	60	135	91	40	91	50	140	87	25	87	30	340	87	20	87	30	140	87	30	87	30	136	03	80	03	75	336	03	85	03	85	136	03	75	03	80	140	75	40	75	40	340	75	30	75	40	140	75	40	75	40
			40	10				39	90				40	10									40	10				40	10				40	15				70	00				70	00				10	20				10	15				85	10				85	05				99	10				98	95				91	40				91	60				87	30				87	30				03	80				03	75				75	40				75	40																																					
		S3	188	40	10	40	15	388	39	80	39	85	188	40	15	40		00	135	70	00	70	00	335	69	90	70	00	141	09	80	09	85	341	10	10	10	15	141	10	15	10	00	135	84	90	84	95	135	84	95	85	00	140	99	00	99	05	140	99	05	99	00	135	91	40	91	40	335	91	75	91	60	135	91	60	91	50	140	87	35	87	30	340	87	40	87	30	140	87	30	87	30	136	03	70	03	75	336	03	85	03	85	136	03	85	03	80	140	75	40	75	40	340	75	50	75	40	140	75	40	75	40																												
	40			10	39				90	40				15	70					00	70				00	10				15	10				15	85				05	99				05	98				95	91				40	91				60	87				30	87				30	03				75	75				40	75				40																																																																		

Pomiar wykonano instrumentem: **Leica TPS800**

Stan na dzień:  
Pomiar wykonał:

# Dziennik pomiaru kierunków ze stanowiska nr 2

strona 2

Stano- wisko	Cel	I położenie lunety				II położenie lunety				Kierunki zredukowane				Średnia wartość kąta	Obliczenia kontrolne						Data:  Str. 2/2							
		A B		średnia		A B		średnia		z położenia		I II- 200			średnia		Sumy śr. Odcz. I + II dla poszcz. kier.			Różnice obliczonych kierunków z kol. 10 ½ różnicy = kąt								
		°	'	''	°	'	''	°	'	''	°	'	''		°	'	''	°	'	''		°	'	''	°	'	''	
g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc					
1	2	3			4		5			6		7				8			9			10			11			12
S2	S1	88	40	20	40	20	288	39	90	39	80	88	40	20	40	00												
	S3	188	40	10	40	05	388	40	00	39	95	188	40	05	40	00												

Pomiar wykonano instrumentem: **Leica TPS800**

Stan na dzień:  
Pomiar wykonał:

Dziennik pomiaru kierunków ze stanowiska nr 3

strona 1

Stano- wisko	Cel	I położenie lunety					II położenie lunety					Kierunki zredukowane					Średnia wartość kąta	Obliczenia kontrolne						Data:				
		A B			średnia		A B			średnia		z położenia		I II- 200				średnia		Sumy śr. Odcz. I + II dla poszcz. kier.			Różnice obliczonych kierunków z kol. 10 ½ różnicy = kąt			Str. 1/1		
		°	'	''	'	''	°	'	''	'	''	°	'	''	'	''		°	'	''	°	'	''	°	'		''	
g	c	cc	c	cc	g	c	cc	c	cc	g	c	cc	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc	12	
1	2	3			4		5			6		7					8		9			10			11			12
S3	S2	303	93	00	92	90	103	93	15	93	10	303	92	90	93	00	<p>Pomiar wykonano instrumentem: <b>Leica TPS800</b></p> <p>Stan na dzień: Pomiar wykonał:</p>											
	1L	351	23	40	23	50	151	23	75	23	70	351	23	50	23	60												
	1P	356	63	90	63	85	156	63	80	63	95	356	63	85	63	90												
	2L	351	34	50	34	40	151	34	35	34	40	351	34	40	34	40												
	2P	356	48	35	48	35	156	48	50	48	45	356	48	35	48	40												
	3L	351	41	85	41	80	151	41	70	41	60	351	41	80	41	70												
	3P	356	38	90	38	80	156	38	85	38	80	356	38	80	38	80												
	4L	351	55	25	55	25	151	55	20	55	15	351	55	25	55	20												
	4P	356	26	40	26	40	156	26	30	26	20	356	26	40	26	30												
	S2	303	93	00	93	05	103	93	00	92	95	303	93	05	93	00												
			93	10				92	90				92	95														





### 5. POZIOM PIERWSZY

Rzeczywistą dokładnością pomiaru (celowania) na tworzącą komina jest błąd średniej arytmetycznej z 4 nacełowań.

Pomierzone kierunki ze stanowiska pierwszego na lewą tworzącą komina, poziomu pierwszego (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S1_{L1} := \begin{pmatrix} 100.0030 \\ 100.0000 \\ 99.9990 \\ 99.9980 \end{pmatrix} \quad \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane ( - 200g).}$$

Kierunki pomierzone zostały z tego samego stanowiska z tą samą dokładnością, dlatego do wagowania przyjmujemy dla każdego pomiaru kierunku

$$m_1 := 1 \qquad m_2 := m_1 \qquad m_3 := m_1 \qquad m_4 := m_1$$

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_4^2} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1_{L1sr} := \frac{\sum S1_{L1}}{4} \quad S1_{L1sr} = 100.0000 \text{ g}$$
$$v := S1_{L1} - S1_{L1sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0030 \\ 0.0000 \\ -0.0010 \\ -0.0020 \end{pmatrix}$$

$n := 4$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem:

$$m_{S1L1} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1L1} = 0.0022$$

Pomierzone kierunki ze stanowiska pierwszego na prawą tworzącą komina, poziomu pierwszego (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S1_{P1} := \begin{pmatrix} 105.3980 \\ 105.4000 \\ 105.4010 \\ 105.4010 \end{pmatrix} \quad \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane (- 200g).}$$

$$S1_{P1sr} := \frac{\sum S1_{P1}}{4} \quad S1_{P1sr} = 105.4000 \text{ g}$$
$$v := S1_{P1} - S1_{P1sr} \quad v = \begin{pmatrix} -0.0020 \\ 0.0000 \\ 0.0010 \\ 0.0010 \end{pmatrix}$$

$n := 4$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem:

$$m_{S1P1} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1P1} = 0.0014$$





$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1_{S2sr} := \frac{\sum S1_{S2}}{8} \quad S1_{S2sr} = 152.7100 \text{ g}$$

$$v := S1_{S2} - S1_{S2sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0020 \\ 0.0020 \\ -0.0010 \\ -0.0030 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0010 \\ -0.0010 \end{pmatrix}$$

$n := 8$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem wyznaczenia kierunku na stanowisko 2 ze stanowiska 1:

$$m_{S1S2} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1S2} = 0.0017$$

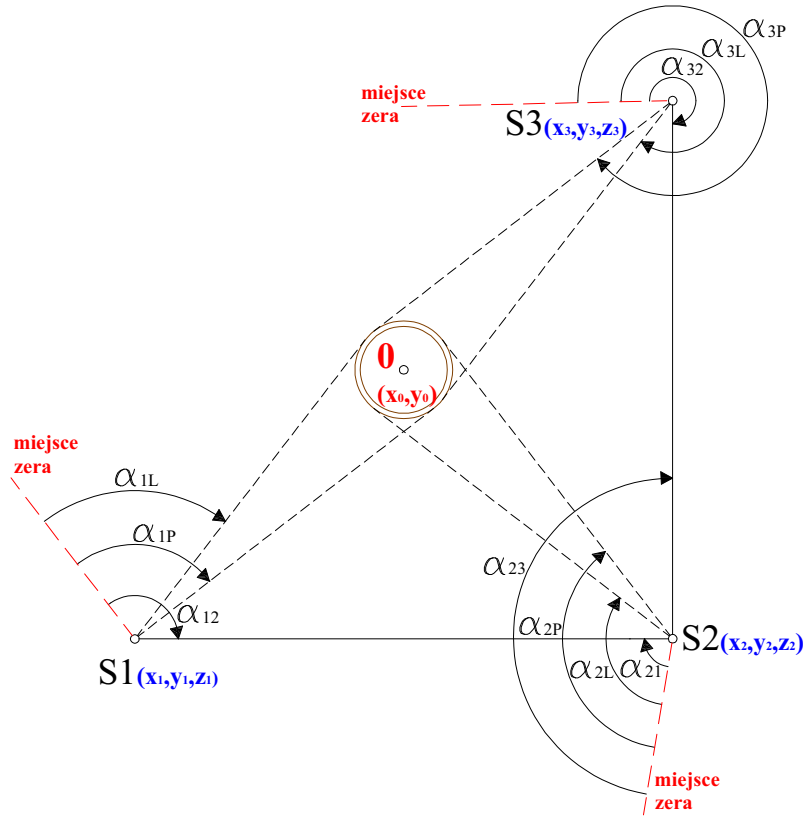
Obliczenie rzeczywistego błędu wyznaczenia azymutu z pomiaru terenowego:

$$m_{S1} := \sqrt{\frac{(m_{S1L1})^2 + (m_{S1P1})^2}{4} + (m_{S1S2})^2} \quad m_{S1} = 0.0021$$

$$m_{S2} = 0.0020$$

$$m_{S3} = 0.0015$$

Obliczenie współrzędnych płaskich (x, y) osi komina o przekroju kołowym. Pomiar z trzech stanowisk o znanych współrzędnych (x, y) metodą dwusiecznych. Przykład dla poziomu pierwszego najniższego.



Rys. 5. Schemat pomiaru

Fig. 5. A survey scheme

Odczyty wykonane podczas pomiaru komina:

1) ze stanowiska S1:

wysokość instrumentu  $i_{h1} := 1.54$

	Hz	V
na stanowisko S2	- $\alpha_{12} := 152.7100 \text{ g}$	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{1L} := 100.0000 \text{ g}$	$V_{1L} := 100.4100 \text{ g}$
prawa tworząca komina	- $\alpha_{1P} := 105.4000 \text{ g}$	$V_{1P} := 100.4150 \text{ g}$

2) ze stanowiska S2:

wysokość instrumentu  $i_{h2} := 1.58$

na stanowisko S1	- $\alpha_{21} := 88.4000 \text{ g}$	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{2L} := 135.6700 \text{ g}$	$V_{2L} := 100.9050 \text{ g}$
prawa tworząca komina	- $\alpha_{2P} := 141.1000 \text{ g}$	$V_{2P} := 100.9100 \text{ g}$

3) ze stanowiska S3:

wysokość instrumentu  $i_{h3} := 1.63$

na stanowisko S2	- $\alpha_{32} := 303.9300 \text{ g}$	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{3L} := 351.2360 \text{ g}$	$V_{3L} := 101.2050 \text{ g}$
prawa tworząca komina	- $\alpha_{3P} := 356.6390 \text{ g}$	$V_{3P} := 101.2050 \text{ g}$

gdzie :

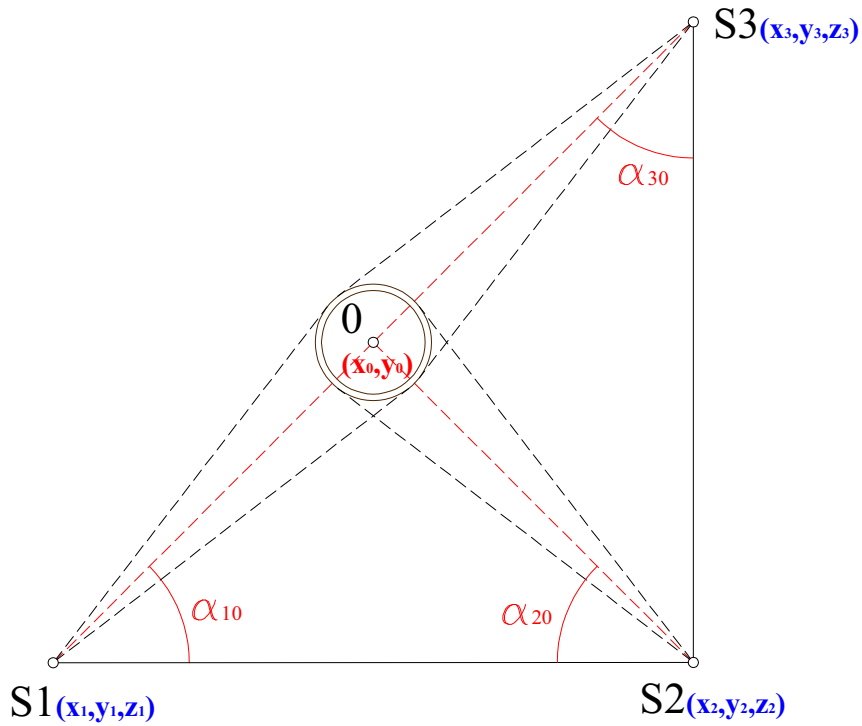
$H_{z_{iL}}$  - odczyt koła poziomego z i-tego stanowiska na lewą tworzącą komina,

$H_{z_{iP}}$  - odczyt koła poziomego z i-tego stanowiska na prawą tworzącą komina,

$V_{iL}$  - odczyt koła pionowego z i-tego stanowiska na lewą tworzącą komina,

$V_{iP}$  - odczyt koła pionowego z i-tego stanowiska na prawą tworzącą komina.

Obliczenie wartości kierunków od bazy na oś komina:



Rys. 6. Schemat obliczenia wartości kierunków na oś komina

Fig. 6. The calculation scheme of the value of directions on the axis of the chimney

$$\alpha_{10} := \alpha_{12} - \frac{\alpha_{1L} + \alpha_{1P}}{2} \quad \alpha_{10} = 50.0100 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{20} := \frac{\alpha_{2L} + \alpha_{2P}}{2} - \alpha_{21} \quad \alpha_{20} = 49.9850 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{30} := \frac{\alpha_{3L} + \alpha_{3P}}{2} - \alpha_{32} \quad \alpha_{30} = 50.0075 \text{ } ^\circ$$

gdzie:

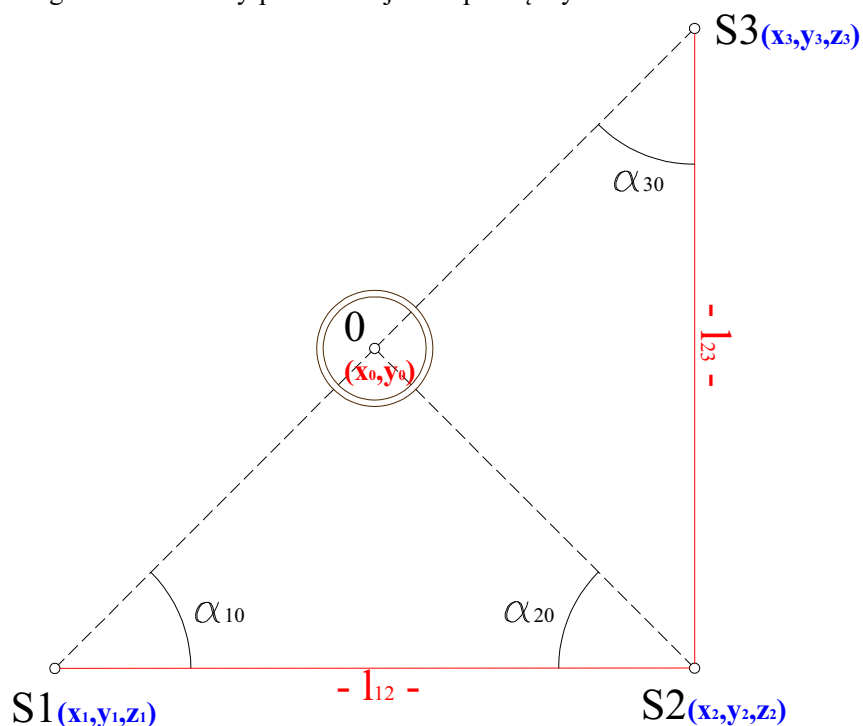
pierwsza cyfra w indeksie przedstawia numer stanowiska, a druga odpowiednio:

L - lewa tworząca komina,

P - prawa tworząca komina,

S - środek komina (oś).

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi i długości boków bazy pomiarowej ze współrzędnych



Rys. 7. Schemat bazy pomiarowej

Fig. 7. The survey base scheme

Współrzędne stanowisk:

$$\text{grad} := \frac{\pi}{200}$$

$$x_1 := 100.01 \text{ m}$$

$$x_2 := 100.00 \text{ m}$$

$$x_3 := 200.00 \text{ m}$$

$$y_1 := 1000.00 \text{ m}$$

$$y_2 := 1100.00 \text{ m}$$

$$y_3 := 1100.00 \text{ m}$$

$$z_1 := 118.45 \text{ m}$$

$$z_2 := 118.98 \text{ m}$$

$$z_3 := 119.26 \text{ m}$$

$$\alpha_{10} := \alpha_{10} \text{ grad}$$

$$\alpha_{20} := \alpha_{20} \text{ grad}$$

$$\Delta x_{12} := x_2 - x_1 \quad \Delta x_{12} = -0.010 \text{ m}$$

$$\Delta y_{12} := y_2 - y_1 \quad \Delta y_{12} = 100.000 \text{ m}$$

$$\Delta x_{21} := x_1 - x_2 \quad \Delta x_{21} = 0.010 \text{ m}$$

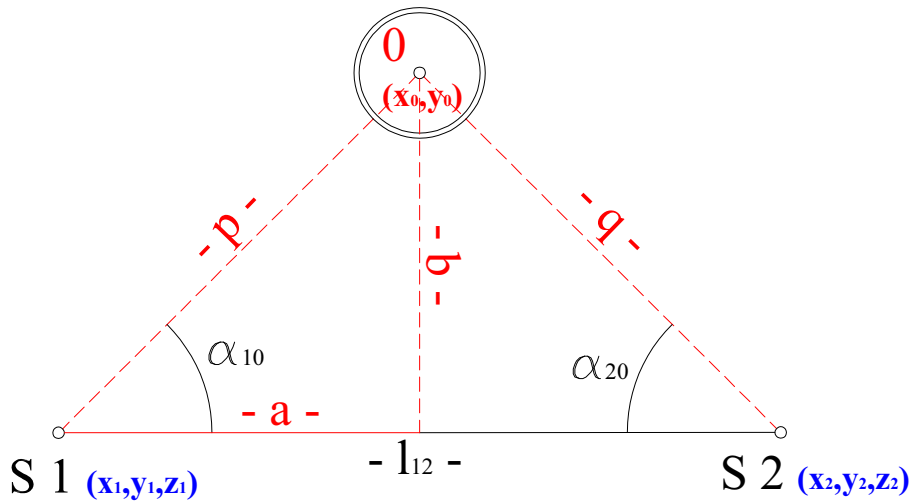
$$\Delta y_{21} := y_1 - y_2 \quad \Delta y_{21} = -100.000 \text{ m}$$

$$l_{12} := \sqrt{(\Delta x_{12})^2 + (\Delta y_{12})^2} \quad l_{12} = 100.000 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{23} &:= x_3 - x_2 & \Delta x_{23} &= 100.000 \text{ m} \\ \Delta y_{23} &:= y_3 - y_2 & \Delta y_{23} &= 0.000 \text{ m} \\ \Delta x_{32} &:= x_2 - x_3 & \Delta x_{32} &= -100.000 \text{ m} \\ \Delta y_{32} &:= y_2 - y_3 & \Delta y_{32} &= 0.000 \text{ m} \end{aligned}$$

$$l_{23} := \sqrt{(\Delta x_{23})^2 + (\Delta y_{23})^2} \quad l_{23} = 100.00000 \text{ m}$$

Obliczenie przybliżonych współrzędnych osi komina ze stanowisk S1 i S2:



**Rys. 8.** Schemat bazy pomiarowej do obliczenia współrzędnych przybliżonych osi komina

**Fig. 8.** The survey base scheme to calculate the approximate co-ordinates of the chimney axes

$$p := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad p = 70.694 \text{ m}$$

$$q := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad q = 70.722 \text{ m}$$

$$a := \frac{p^2 - q^2 + (l_{12})^2}{2 \cdot l_{12}} \quad a = 49.980 \text{ m}$$

$$b := \sqrt{p^2 - a^2} \quad b = 49.996 \text{ m}$$

$$x_0 := x_1 + a \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} + b \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} \quad x_0 = 150.001 \text{ m}$$

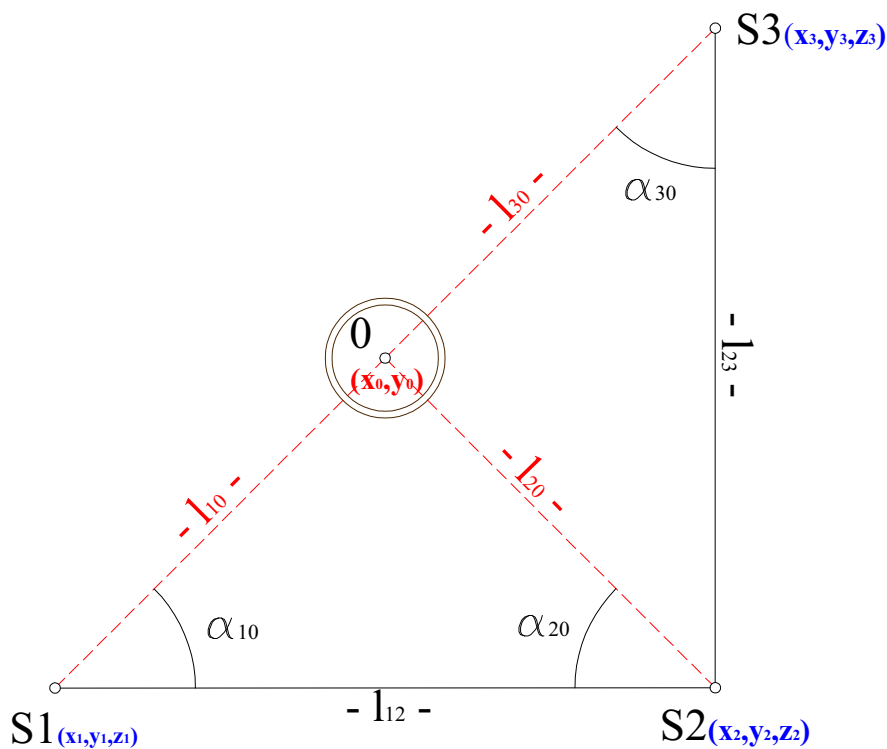
$$y_0 := y_1 + a \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} - b \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} \quad y_0 = 1049.985 \text{ m}$$

Przybliżone współrzędne osi komina obliczone ze stanowisk S1 i S2:

$$w_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 150.001 \\ 1049.985 \end{pmatrix}$$

gdzie :  $x_0, y_0$  - przybliżone współrzędne osi komina.

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_{i0}, \Delta y_{i0}$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi a przybliżonymi współrzędnymi osi komina i długości boków od stanowiska do środka komina (przybliżonego).



Rys. 9. Schemat pełnej bazy pomiarowej

Fig. 9. A scheme of the complete survey base

$$\rho := \frac{200}{\pi}$$

Współrzędne stanowisk i kąty pomierzone od baz pomiarowych:

$$x_1 = 100.01 \text{ m} \quad \alpha_{10} := \alpha_{10} \rho \quad \alpha_{10} = 50.0100 \text{ g}$$

$$y_1 = 1000.00 \text{ m} \quad \alpha_{20} := \alpha_{20} \rho \quad \alpha_{20} = 49.9850 \text{ g}$$

$$x_2 = 100.00 \text{ m} \quad \alpha_{30} = 50.0075 \text{ g}$$

$$y_2 = 1100.00 \text{ m}$$

$$x_3 = 200.00 \text{ m}$$

$$y_3 = 1100.00 \text{ m}$$

$$\Delta x_{10} := x_0 - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.991 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_0 - y_1 \quad \Delta y_{10} = 49.985 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_0 \quad \Delta x_{01} = -49.991 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_0 \quad \Delta y_{01} = -49.985 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.694 \text{ m} \quad \begin{array}{l} \text{- odległość od stanowiska} \\ \text{S1 do osi komina} \\ \text{(przybliżona)} \end{array}$$

$$\Delta x_{20} := x_0 - x_2 \quad \Delta x_{20} = 50.001 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_0 - y_2 \quad \Delta y_{20} = -50.015 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_0 \quad \Delta x_{02} = -50.001 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_0 \quad \Delta y_{02} = 50.015 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.722 \text{ m} \quad \begin{array}{l} \text{- odległość od} \\ \text{stanowiska S2 do osi} \\ \text{komina (przybliżona)} \end{array}$$

$$\Delta x_{30} := x_0 - x_3 \quad \Delta x_{30} = -49.999 \text{ m}$$

$$\Delta y_{30} := y_0 - y_3 \quad \Delta y_{30} = -50.015 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_0 \quad \Delta x_{03} = 49.999 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_0 \quad \Delta y_{03} = 50.015 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.720 \text{ m} \quad \begin{array}{l} \text{- odległość od} \\ \text{stanowiska S3 do osi} \\ \text{komina (przybliżona)} \end{array}$$



Obliczenie promienia komina dla poziomu pierwszego (1):

$$r_{11} := l_{10} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{1P} - \alpha_{1L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{11} = 2.997 \text{ m}$$

$$r_{21} := l_{20} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{2P} - \alpha_{2L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{21} = 3.015 \text{ m}$$

$$r_{31} := l_{30} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{3P} - \alpha_{3L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{31} = 3.000 \text{ m}$$

Obliczenie średniego promienia z trzech stanowisk:

$$r_{1sr} := \frac{r_{11} + r_{21} + r_{31}}{3} \quad r_{1sr} = 3.004 \text{ m}$$

Obliczenie wysokości dla poziomu pierwszego:

$$Z_{11} := z_1 + l_{10} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{1L} + V_{1P}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] + i_{h1} \quad Z_{11} = 119.532 \text{ m}$$

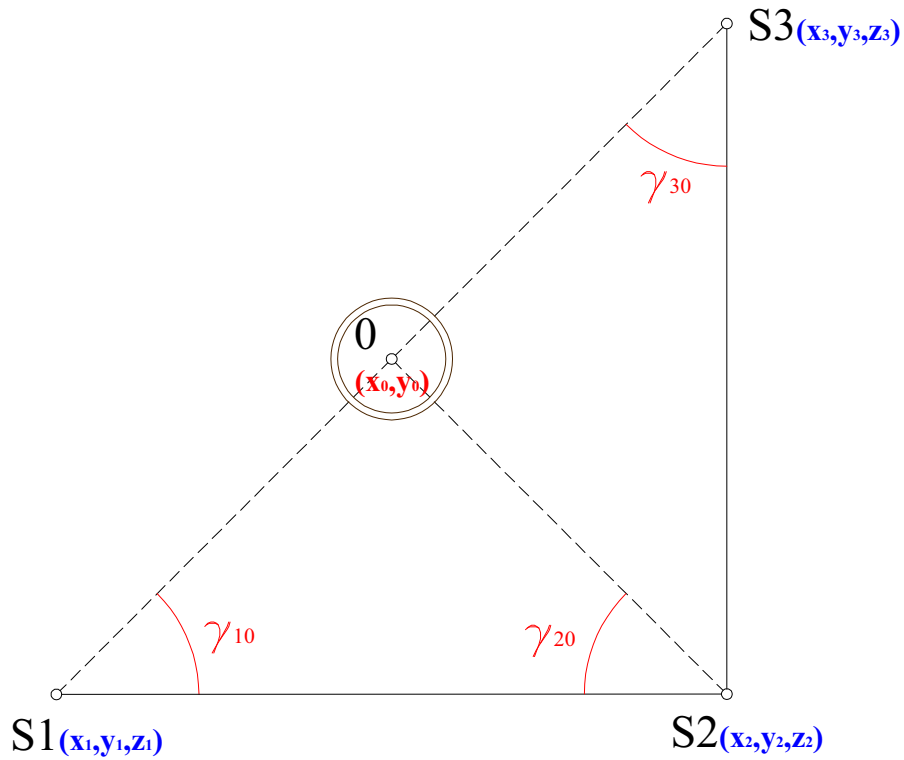
$$Z_{21} := z_2 + l_{20} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{2L} + V_{2P}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] + i_{h2} \quad Z_{21} = 119.552 \text{ m}$$

$$Z_{31} := z_3 + l_{30} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{3L} + V_{3P}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] + i_{h3} \quad Z_{31} = 119.551 \text{ m}$$

$$Z_{01} := \frac{Z_{11} + Z_{21} + Z_{31}}{3} \quad Z_{01} = 119.545 \text{ m}$$

Średnią wysokość poziomu pierwszego przyjęto jako poziom zerowy w układzie lokalnym komina i w odniesieniu do niego będą obliczane wysokości dla następujących poziomów.

$$Z_{01} := 3.000 \text{ m}$$



Rys. 10. Schemat do obliczenia kątów od bazy

Fig. 10. A scheme to the calculate angles from the survey base

gdzie:

$\gamma_{i0}$  - kąt z i-tego stanowiska na oś komina obliczony ze współrzędnych przybliżonych.

$$\gamma_{10} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{10} = 50.0100 \text{ g}$$

$$\gamma_{20} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{20} = 49.9850 \text{ g}$$

$$\gamma_{30} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{30} = 50.0100 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów (kierunków zorientowanych) dla baz pomiarowych:

$$Az_{21} := 400 - \left( \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{21}|}{|\Delta x_{21}|} \right) \rho \right) \quad Az_{21} = 300.0064 \text{ g}$$

$$Az_{12} := 200 - \left( \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{12}|}{|\Delta x_{12}|} \right) \rho \right) \quad Az_{12} = 100.0064 \text{ g}$$

$$Az_{32} := 200 + \left( \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{32}|}{|\Delta x_{32}|} \right) \rho \right) \quad Az_{32} = 200.0000 \text{ g}$$

$$Az_{23} := \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{23}|}{|\Delta x_{23}|} \right) \rho \quad Az_{23} = 0.0000 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów na oś komina z kątów obliczonych ze współrzędnych przybliżonych:

$$Az_{o10} := \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{10}|}{|\Delta x_{10}|} \right) \rho \quad Az_{o10} = 49.9964 \text{ g}$$

$$Az_{o20} := 400 - \left( \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|} \right) \rho \right) \quad Az_{o20} = 349.9914 \text{ g}$$

$$Az_{o30} := 200 + \left( \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|} \right) \rho \right) \quad Az_{o30} = 250.0100 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów z kątów pomierzonych:

$$Az_{p10} := Az_{12} - \alpha_{10} \quad Az_{p10} = 49.9964 \text{ g}$$

$$Az_{p20} := Az_{21} + \alpha_{20} \quad Az_{p20} = 349.9914 \text{ g}$$

$$Az_{p30} := Az_{32} + \alpha_{30} \quad Az_{p30} = 250.0075 \text{ g}$$

Równanie poprawek w postaci ogólnej według wzoru (24) s. 23:

$$v := \left[ \frac{\rho \cdot \Delta y_{0S}}{(l_{S0})^2} \cdot \Delta x_0 - \frac{(\rho \cdot \Delta x_{0S})}{(l_{S0})^2} \cdot \Delta y_0 + (Az_{oS0} - Az_{pS0}) \right]^{\blacksquare}$$

gdzie:

$\Delta x_{0S}, \Delta y_{0S}$  - różnica między współrzędną stanowiska S a współrzędną przybliżoną komina 0 (np.  $\Delta x_{10} = x_0 - x_1$ ),

$l_{S0}$  - odległość od danego stanowiska S do osi komina 0 obliczona ze współrzędnych przybliżonych,

$Az_{oS0}$  - azymut z danego stanowiska S na oś komina 0 obliczony ze współrzędnych przybliżonych,

$Az_{pS0}$  - azymut z danego stanowiska S na oś komina obliczony z kątów pomierzonych ( np.  $Az_{p10}$ ).

Zestawienie równań poprawek (wzory 27, 28, 29):

$$v_1 := \frac{\rho \cdot \Delta y_{01}}{(l_{10})^2} \cdot \Delta x_0 - \frac{\rho \cdot \Delta x_{01}}{(l_{10})^2} \cdot \Delta y_0 + (Az_{o10} - Az_{p10}) \quad \blacksquare$$

$$v_2 := \frac{\rho \cdot \Delta y_{02}}{(l_{20})^2} \cdot \Delta x_0 - \frac{\rho \cdot \Delta x_{02}}{(l_{20})^2} \cdot \Delta y_0 + (Az_{o20} - Az_{p20}) \quad \blacksquare$$

$$v_3 := \frac{\rho \cdot \Delta y_{03}}{(l_{30})^2} \cdot \Delta x_0 - \frac{\rho \cdot \Delta x_{03}}{(l_{30})^2} \cdot \Delta y_0 + (Az_{o30} - Az_{p30}) \quad \blacksquare$$

Macierz współczynników (A) przy niewiadomych ( $\Delta x, \Delta y$ ):

$$A := \begin{bmatrix} \frac{\rho \cdot \Delta y_{01}}{(l_{10})^2} & -\frac{\rho \cdot \Delta x_{01}}{(l_{10})^2} \\ \frac{\rho \cdot \Delta y_{02}}{(l_{20})^2} & -\frac{\rho \cdot \Delta x_{02}}{(l_{20})^2} \\ \frac{\rho \cdot \Delta y_{03}}{(l_{30})^2} & -\frac{\rho \cdot \Delta x_{03}}{(l_{30})^2} \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -0.636733 & 0.636806 \\ 0.636606 & 0.636433 \\ 0.636633 & -0.636433 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -0.636733 & 0.636606 & 0.636633 \\ 0.636806 & 0.636433 & -0.636433 \end{pmatrix}$$

Macierz wyrazów wolnych L (28):

$$L := \begin{pmatrix} Az_{o10} - Az_{p10} \\ Az_{o20} - Az_{p20} \\ Az_{o30} - Az_{p30} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0025 \end{pmatrix}$$

Macierz wag P:

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{S1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{S2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_{S3}^2} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 221052.632 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 241379.310 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 443271.768 \end{pmatrix}$$

gdzie  $m_{Si}$  - patrz s. 40

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} := (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot L$$

$$A^T \cdot P \cdot A = \begin{pmatrix} 367103.37341348 & -171437.41341001 \\ -171437.41341001 & 366957.96280593 \end{pmatrix}$$

$$(A^T \cdot P \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.00000348 & 0.00000163 \\ 0.00000163 & 0.00000349 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot P \cdot L = \begin{pmatrix} 704.87965764 \\ -704.65829692 \end{pmatrix}$$

otrzymuje się:

$$\Delta p := \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} \quad \Delta p = \begin{pmatrix} 0.0013 \\ -0.0013 \end{pmatrix}$$

gdzie:

$\Delta p$  - przyrosty współrzędnych pomiędzy współrzędnymi wyrównanymi a przybliżonymi.

Wyrównane współrzędne osi komina:

$$w_1 := w_0 - \Delta p \quad w_1 = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 1049.987 \end{pmatrix}$$

gdzie:

$w_0$  - współrzędne przybliżone osi komina,

$\Delta p$  - przyrosty współrzędnych pomiędzy współrzędnymi wyrównanymi a przybliżonymi,

$w_1$  - współrzędne osi komina dla pierwszego poziomu wyrównane.

$$\begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix} := w_1 \quad \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 1049.987 \end{pmatrix}$$

gdzie:

$x_{01}, y_{01}$  - współrzędne osi komina wyrównane dla pierwszego poziomu.

Ocena dokładności:

$$v := A \cdot \Delta p - L$$

$$v = \begin{pmatrix} -0.0017 \\ 0.0000 \\ -0.0008 \end{pmatrix}$$

Warunek konieczny  $A^T P v = 0$

$$A^T P \cdot v = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ -0.0000 \end{pmatrix} \quad - \text{warunek spełniony}$$

Obliczenie wartości błędu  $m_0$

$n := 3$  - liczba równań obserwacyjnych.

$k := 2$  - liczba wyznaczanych niewiadomych.

$$m_0 := \sqrt{\frac{v^T P \cdot v}{n - k}} \quad m_0 = 0.9595$$

Wyrównanie azymutów obliczonych z kątów pomierzonych:

$$Az_p := \begin{pmatrix} Az_{p10} \\ Az_{p20} \\ Az_{p30} \end{pmatrix} \quad Az_p = \begin{pmatrix} 49.9964 \\ 349.9914 \\ 250.0075 \end{pmatrix}$$

Azymuty po wyrównaniu:

$$\begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} := Az_p - v \quad \begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49.9980 \\ 349.9914 \\ 250.0083 \end{pmatrix}$$

gdzie:

v - obliczone poprawki dla azymutów.

Obliczenie przyrostów i odległości z wyrównanych współrzędnych osi komina:

$$\Delta x_{10} := x_{01} - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.990 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_{01} - y_1 \quad \Delta y_{10} = 49.987 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_{01} \quad \Delta x_{01} = -49.990 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_{01} \quad \Delta y_{01} = -49.987 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.694 \text{ m}$$

$$\Delta x_{20} := x_{01} - x_2 \quad \Delta x_{20} = 50.000 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_{01} - y_2 \quad \Delta y_{20} = -50.013 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_{01} \quad \Delta x_{02} = -50.000 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_{01} \quad \Delta y_{02} = 50.013 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.720 \text{ m}$$

$$\Delta x_{30} := x_{01} - x_3 \quad \Delta x_{30} = -50.000 \text{ m}$$

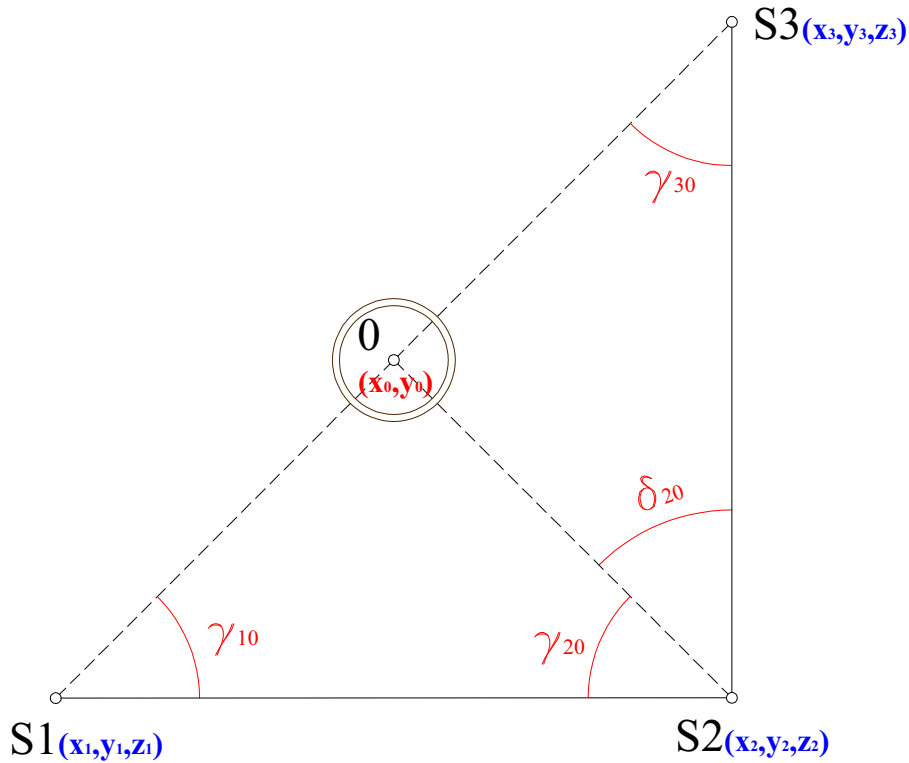
$$\Delta y_{30} := y_{01} - y_3 \quad \Delta y_{30} = -50.013 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_{01} \quad \Delta x_{03} = 50.000 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_{01} \quad \Delta y_{03} = 50.013 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.720 \text{ m}$$

Kąty od bazy obliczone ze współrzędnych wyrównanych osi komina:



**Rys. 11.** Schemat bazy pomiarowej po wyrównaniu współrzędnych osi komina

**Fig. 11.** A scheme of the survey base after settlement of the co-ordinate of the chimney

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &:= \operatorname{atan} \left( \frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}} \right) \cdot \rho & \gamma_{10} &= 50.0083 \text{ } ^{\circ} \\ \gamma_{20} &:= \operatorname{atan} \left( \frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}} \right) \cdot \rho & \gamma_{20} &= 49.9850 \text{ } ^{\circ} \\ \delta_{20} &:= \operatorname{atan} \left( \frac{\Delta x_{20} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{20}}{\Delta x_{20} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{23} \cdot \Delta y_{20}} \right) \cdot \rho & \delta_{20} &= 50.0086 \text{ } ^{\circ} \\ \gamma_{30} &:= \operatorname{atan} \left( \frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}} \right) \cdot \rho & \gamma_{30} &= 50.0083 \text{ } ^{\circ} \end{aligned}$$



Obliczenie ze współrzędnych kąta S1-S2-S3:

$$\gamma_{13} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{21} \cdot \Delta y_{23}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ } ^\circ$$

Suma kątów  $\gamma_{20}$  i  $\delta_{20}$  obliczonych ze współrzędnych wyrównanych powinna się równać kątowi S1-S2-S3 po wyrównaniu.

$$\gamma_{20} + \delta_{20} = 99.9936 \text{ } ^\circ \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ } ^\circ \quad - \text{warunek spełniony}$$

Obliczenie azymutów z kątów obliczonych ze współrzędnych wyrównanych:

$$Az_{o10W} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta y_{10}}{\Delta x_{10}}\right) \rho \quad Az_{o10W} = 49.9980 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o20W} := 400 - \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o20W} = 349.9914 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o30W} := 200 + \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o30W} = 250.0083 \text{ } ^\circ$$

Azymuty po wyrównaniu kątów:

$$Az_{p10W} = 49.9980 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p20W} = 349.9914 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p30W} = 250.0083 \text{ } ^\circ$$

gdzie :

$a_{iW}$  - azymut ze stanowiska i-tego na oś komina obliczony z kątów pomierzonych po wyrównaniu.

Azymuty obliczone ze współrzędnych wyrównanych oraz azymuty wyrównane z poprawek są sobie równe, zatem obliczenia wykonano prawidłowo.

Podstawiamy wyrównane dane (x,y - osi komina) do równań poprawek:

$$v_1 := \frac{\rho \cdot \Delta y_{01}}{(l_{10})^2} \cdot \Delta x_0 - \frac{\rho \cdot \Delta x_{01}}{(l_{10})^2} \cdot \Delta y_0 + (Az_{o10W} - Az_{p10W}) \quad v_1 = -0.0017 \text{ } ^\circ$$

$$v_2 := \frac{\rho \cdot \Delta y_{02}}{(l_{20})^2} \cdot \Delta x_0 - \frac{\rho \cdot \Delta x_{02}}{(l_{20})^2} \cdot \Delta y_0 + (Az_{o20W} - Az_{p20W}) \quad v_2 = 0.0000 \text{ } ^\circ$$

$$v_3 := \frac{\rho \cdot \Delta y_{03}}{(l_{30})^2} \cdot \Delta x_0 - \frac{\rho \cdot \Delta x_{03}}{(l_{30})^2} \cdot \Delta y_0 + (Az_{o30W} - Az_{p30W}) \quad v_3 = 0.0017 \text{ } ^\circ$$

- macierz błędów współrzędnych  $C_X := m_0^2 (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}$

$$C_X = m_0^2 (A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} m_x^2 & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y^2 \end{bmatrix}$$

$$C_X = \begin{pmatrix} 0.00000321 & 0.00000150 \\ 0.00000150 & 0.00000321 \end{pmatrix}$$

- błędy wyrównanych azymutów

$$i := 1 .. \text{rows}(A), a_i := \text{submatrix}(A, i, i, 1, \text{cols}(A))$$

$$m_{AZ,i} := \sqrt{|a_i C_X a_i^T|}$$

$$m_{AZ} = \begin{pmatrix} 0.0012 \\ 0.0020 \\ 0.0012 \end{pmatrix}$$

- błędy poprawek

$$m_V := \begin{bmatrix} \sqrt{m_{S1}^2 - [m_{AZ,(1,1)}]^2} \\ \sqrt{m_{S2}^2 - [m_{AZ,(2,1)}]^2} \\ \sqrt{m_{S3}^2 - [m_{AZ,(3,1)}]^2} \end{bmatrix}$$

$$m_V = \begin{pmatrix} 0.0018 \\ 0.0006 \\ 0.0009 \end{pmatrix} \quad K := \frac{v}{m_V} \quad K = \begin{pmatrix} -0.9411 \\ 0.0006 \\ 1.7860 \end{pmatrix}$$

Błąd wyrównanego azymutu  $m_{v_i}$  musi być mniejszy od dokładności jego pomiaru  $m_{kat}$ , tj.  $m_{v_i} < m_{kat}$ .

- błędy współrzędnych

$$m_x := \sqrt{C_{x_{1,1}}} \quad m_x = 0.0018 \text{ m}$$

$$m_y := \sqrt{C_{x_{2,2}}} \quad m_y = 0.0018 \text{ m}$$

$$m_{xy} := C_{x_{1,2}} \quad m_{xy} = 0.00000150 \text{ m}$$

- błąd położenia punktu:

$$m_p := \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad m_p = 0.003 \text{ m}$$

- błąd położenia punktu w zadanym kierunku  $\alpha$

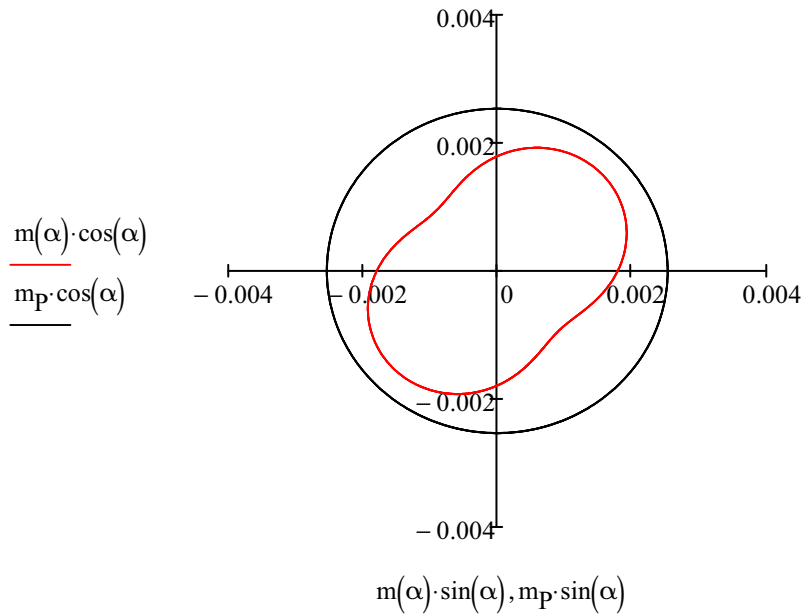
$$m(\alpha) := \sqrt{m_x^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + m_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + m_y^2 \cdot \sin(\alpha)^2}$$

gdzie:

$$\cos(\alpha)^2 = (\cos \alpha)^2$$

forma zapisu wynika z wymagań programu Mahcad

Aby program Mathcad wykresili elipsę błędów, należy z menu wybrać - insert - graph, następnie "X-Y plot" i opisać w sposób jak niżej.



**Rys. 12.** Elipsa błędów dla poziomu pierwszego

**Fig. 12.** The errors ellipse for first height level

- kąt skręcenia elipsy dla ekstremalnych wartości błędu położenia punktu:

$$\alpha_C := \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot m_{xy}}{m_x^2 - m_y^2}\right) \cdot \rho + 400 \quad \alpha_C = 350.0135 \text{ }^\circ$$

$$\alpha_D := (\alpha_C + 100) - 400 \quad \alpha_D = 50.0135 \text{ }^\circ$$

obliczenie maksymalnych wartości błędu położenia punktu:

$$C := m(\alpha_C) \quad C = 0.0020 \text{ m}$$

$$D := m(\alpha_D) \quad D = 0.0016 \text{ m}$$



## 6. POZIOM DRUGI

Rzeczywistą dokładnością pomiaru (celowania) na tworzącą komina jest błąd średniej arytmetycznej z 4 nacełowań.

Pomierzone kierunki ze stanowiska pierwszego na lewą tworzącą komina, poziomu drugiego (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S_{1L2} := \begin{pmatrix} 100.1560 \\ 100.1560 \\ 100.1550 \\ 100.1530 \end{pmatrix} \text{ - odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane} \\ \text{(- 200g).}$$

Kierunki pomierzone zostały z tego samego stanowiska z tą samą dokładnością, dlatego do wagowania przyjmujemy dla każdego pomiaru kierunku

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{1L2sr} := \frac{\sum S_{1L2}}{4} \quad S_{1L2sr} = 100.1550 \text{ g}$$

$$v := S_{1L2} - S_{1L2sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0010 \\ 0.0010 \\ 0.0000 \\ -0.0020 \end{pmatrix}$$

$n := 4$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem:

$$m_{S1L2} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1L2} = 0.0014$$



$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1_{S2sr} := \frac{\sum S1_{S2}}{8} \quad S1_{S2sr} = 152.7100 \text{ g}$$

$$v := S1_{S2} - S1_{S2sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0020 \\ 0.0020 \\ -0.0010 \\ -0.0030 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0010 \\ -0.0010 \end{pmatrix}$$

n := 8 - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem wyznaczenia kierunku na stanowisko 2 ze stanowiska 1:

$$m_{S1S2} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1S2} = 0.0017$$

Obliczenie rzeczywistego błędu wyznaczenia azymutu z pomiaru terenowego:

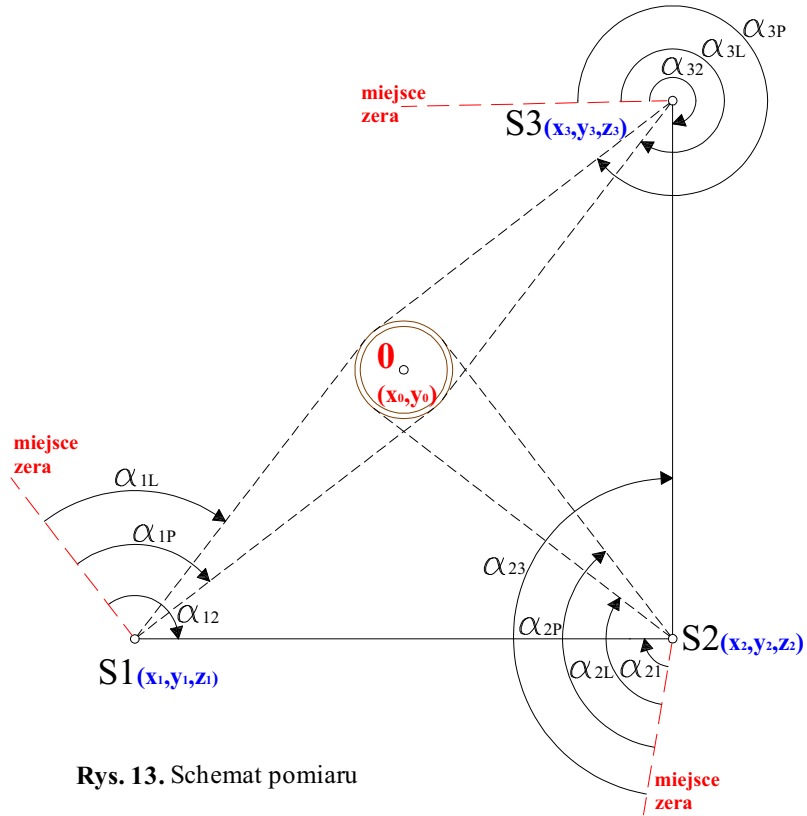
$$m_{S1} := \sqrt{\frac{(m_{S1L2})^2 + (m_{S1P2})^2}{4} + (m_{S1S2})^2} \quad m_{S1} = 0.0020$$

$$m_{S2} = 0.0020$$

$$m_{S3} = 0.0012$$



Obliczenie współrzędnych płaskich (x, y) osi komina o przekroju kołowym. Pomiar z trzech stanowisk o znanych współrzędnych (x, y) metodą dwusiecznych. Przykład dla poziomu drugiego.



Rys. 13. Schemat pomiaru

Fig. 13. A survey scheme

Odczyty wykonane podczas pomiaru komina:

1) ze stanowiska S1:

wysokość instrumentu  $i_{h1} := 1.54$

	Hz	V
na stanowisko S2	- $\alpha_{12} := 152.7100$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{1L} := 100.1550$ g	$V_{1L} := 89.5140$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{1P} := 105.3000$ g	$V_{1P} := 89.5160$ g

2) ze stanowiska S2:

wysokość instrumentu  $i_{h2} := 1.58$

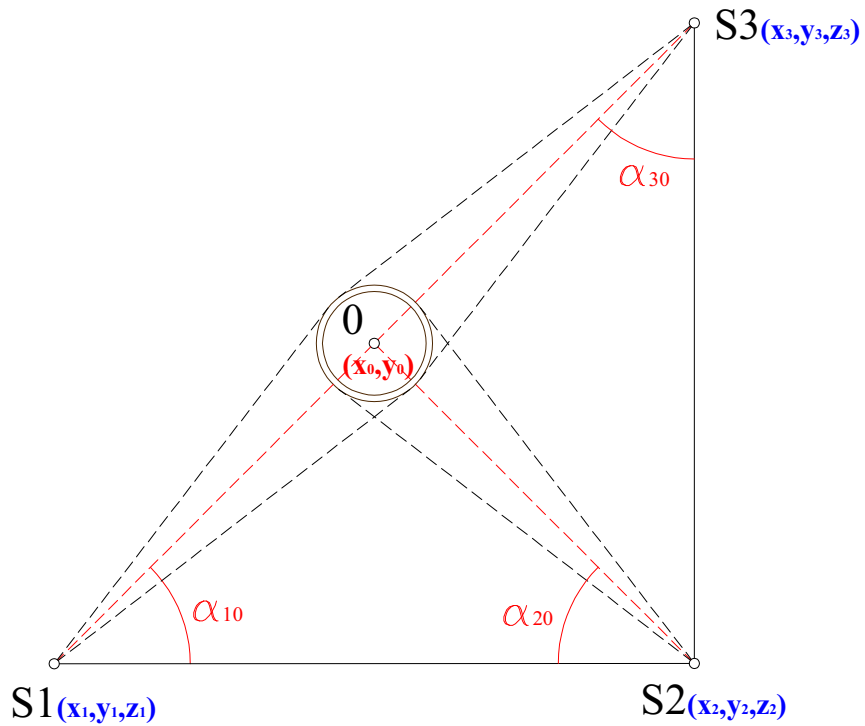
na stanowisko S1	- $\alpha_{21} := 88.4000$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{2L} := 135.8500$ g	$V_{2L} := 90.0500$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{2P} := 140.9900$ g	$V_{2P} := 90.0550$ g

3) ze stanowiska S3:

wysokość instrumentu  $i_{h3} := 1.63$

na stanowisko S2	- $\alpha_{32} := 303.9300$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{3L} := 351.3440$ g	$V_{3L} := 90.3380$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{3P} := 356.4840$ g	$V_{3P} := 90.3370$ g

Obliczenie wartości kierunków od bazy na oś komina:



Rys. 14. Schemat obliczenia wartości kierunków na oś komina

Fig. 14. The calculation scheme of the value of directions on the axis of the chimney

$$\alpha_{10} := \alpha_{12} - \frac{\alpha_{1L} + \alpha_{1P}}{2} \quad \alpha_{10} = 49.9825 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{20} := \frac{\alpha_{2L} + \alpha_{2P}}{2} - \alpha_{21} \quad \alpha_{20} = 50.0200 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{30} := \frac{\alpha_{3L} + \alpha_{3P}}{2} - \alpha_{32} \quad \alpha_{30} = 49.9840 \text{ } ^\circ$$

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi i długości boków bazy pomiarowej ze współrzędnych.

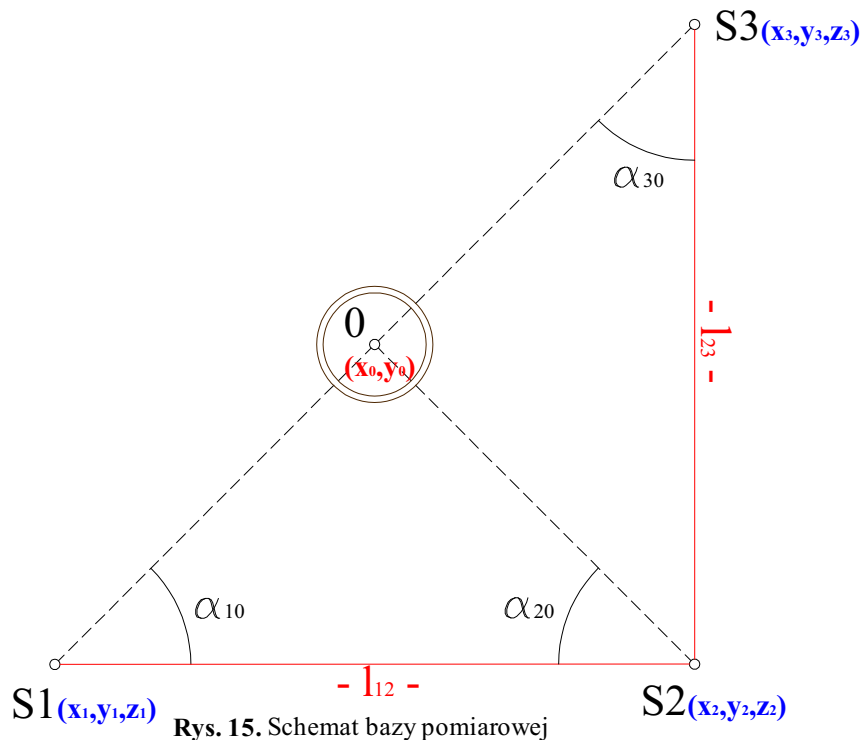


Fig. 15. The survey base scheme

Współrzędne stanowisk:

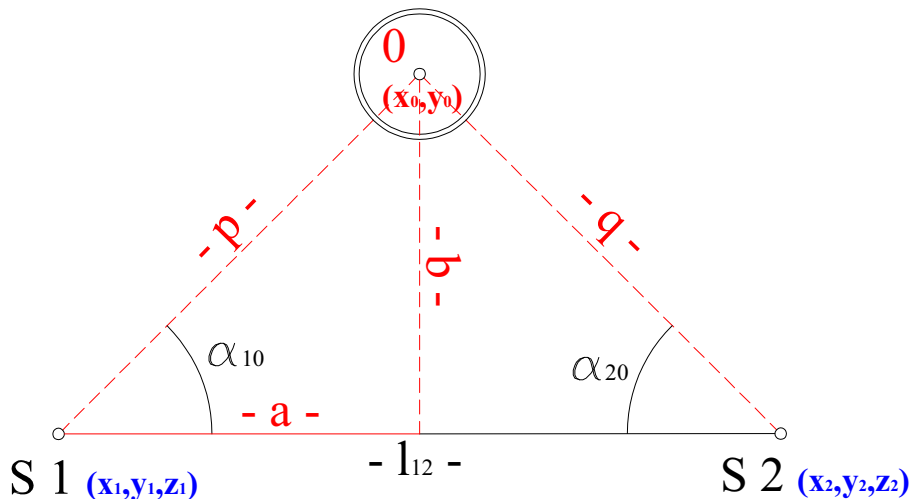
$$\begin{aligned} \Delta x_{12} &:= x_2 - x_1 & \Delta x_{12} &= -0.010 \text{ m} \\ \Delta y_{12} &:= y_2 - y_1 & \Delta y_{12} &= 100.000 \text{ m} \\ \Delta x_{21} &:= x_1 - x_2 & \Delta x_{21} &= 0.010 \text{ m} \\ \Delta y_{21} &:= y_1 - y_2 & \Delta y_{21} &= -100.000 \text{ m} \\ l_{12} &:= \sqrt{(\Delta x_{12})^2 + (\Delta y_{12})^2} & l_{12} &= 100.000 \text{ m} \\ \Delta x_{23} &:= x_3 - x_2 & \Delta x_{23} &= 100.000 \text{ m} \\ \Delta y_{23} &:= y_3 - y_2 & \Delta y_{23} &= 0.000 \text{ m} \\ \Delta x_{32} &:= x_2 - x_3 & \Delta x_{32} &= -100.000 \text{ m} \\ \Delta y_{32} &:= y_2 - y_3 & \Delta y_{32} &= 0.000 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{grad} := \frac{\pi}{200}$$

$$l_{23} := \sqrt{(\Delta x_{23})^2 + (\Delta y_{23})^2}$$

$$l_{23} = 100.000 \text{ m}$$

Obliczenie przybliżonych współrzędnych osi komina ze stanowisk S1 i S2:



**Rys. 16.** Schemat bazy pomiarowej do obliczenia współrzędnych przybliżonych osi komina

**Fig. 16.** The survey base scheme to calculate the approximate co-ordinates of the chimney axes

$$p := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad p = 70.733 \text{ m}$$

$$q := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad q = 70.691 \text{ m}$$

$$a := \frac{p^2 - q^2 + (l_{12})^2}{2 \cdot l_{12}} \quad a = 50.029 \text{ m}$$

$$b := \sqrt{p^2 - a^2} \quad b = 50.002 \text{ m}$$

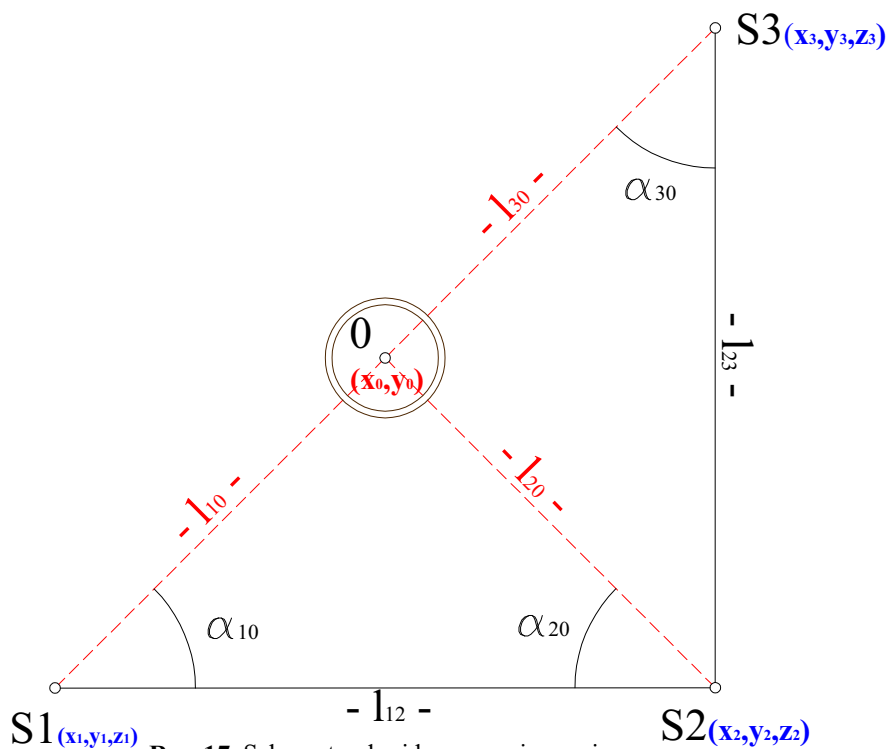
$$x_0 := x_1 + a \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} + b \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} \quad x_0 = 150.007 \text{ m}$$

$$y_0 := y_1 + a \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} - b \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} \quad y_0 = 1050.034 \text{ m}$$

Przybliżone współrzędne osi komina obliczone ze stanowisk S1 i S2:

$$w_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 150.007 \\ 1050.034 \end{pmatrix}$$

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_{i_0}$ ,  $\Delta y_{i_0}$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi a przybliżonymi współrzędnymi osi komina i długości boków od stanowiska do środka komina (przybliżonego).



Rys. 17. Schemat pełnej bazy pomiarowej

Fig. 17. A scheme of the complete survey base

Współrzędne stanowisk i kąty pomierzone od baz pomiarowych:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &:= \alpha_{10} \rho & \alpha_{10} &= 49.9825 \text{ } ^\circ \\ \alpha_{20} &:= \alpha_{20} \rho & \alpha_{20} &= 50.0200 \text{ } ^\circ \\ & & \alpha_{30} &= 49.9840 \text{ } ^\circ \end{aligned}$$

Obliczenie przyrostów współrzędnych i długości boków:

$$\Delta x_{10} := x_0 - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.997 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_0 - y_1 \quad \Delta y_{10} = 50.034 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_0 \quad \Delta x_{01} = -49.997 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_0 \quad \Delta y_{01} = -50.034 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.733 \text{ m}$$

$$\Delta x_{20} := x_0 - x_2 \quad \Delta x_{20} = 50.007 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_0 - y_2 \quad \Delta y_{20} = -49.966 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_0 \quad \Delta x_{02} = -50.007 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_0 \quad \Delta y_{02} = 49.966 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.691 \text{ m}$$

$$\Delta x_{30} := x_0 - x_3 \quad \Delta x_{30} = -49.993 \text{ m}$$

$$\Delta y_{30} := y_0 - y_3 \quad \Delta y_{30} = -49.966 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_0 \quad \Delta x_{03} = 49.993 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_0 \quad \Delta y_{03} = 49.966 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.681 \text{ m}$$

Obliczenie promienia komina dla poziomu drugiego (2):

$$r_{12} := l_{10} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{1P} - \alpha_{1L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{12} = 2.857 \text{ m}$$

$$r_{22} := l_{20} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{2P} - \alpha_{2L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{22} = 2.853 \text{ m}$$

$$r_{32} := l_{30} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{3P} - \alpha_{3L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{32} = 2.853 \text{ m}$$

Obliczenie średniego promienia z trzech stanowisk:

$$r_{2sr} := \frac{r_{11} + r_{21} + r_{31}}{3} \quad r_{2sr} = 3.004 \text{ m}$$

Obliczenie wysokości poziomu drugiego:

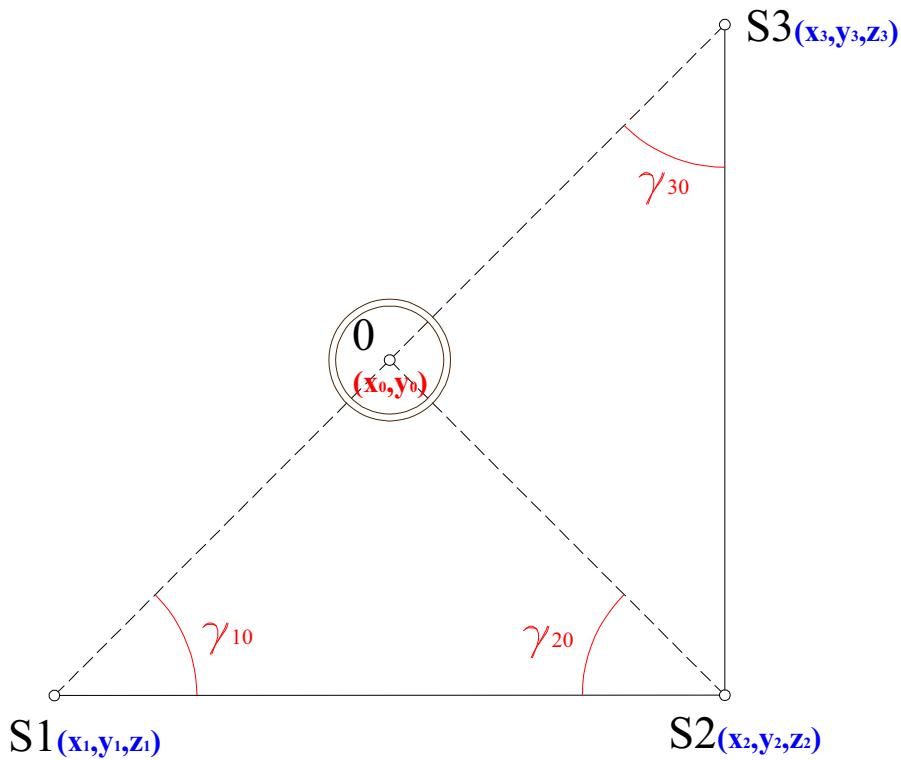
$$Z_{12} := z_1 + l_{10} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{1L} + V_{1P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h1} \quad Z_{12} = 131.587 \text{ m}$$

$$Z_{22} := z_2 + l_{20} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{2L} + V_{2P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h2} \quad Z_{22} = 131.561 \text{ m}$$

$$Z_{32} := z_3 + l_{30} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{3L} + V_{3P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h3} \quad Z_{32} = 131.577 \text{ m}$$

$$Z_{02} := \frac{Z_{12} + Z_{22} + Z_{32}}{3} - \left( \frac{Z_{11} + Z_{21} + Z_{31}}{3} \right) + Z_{01}$$

$$Z_{02} = 15.030 \text{ m}$$



Rys. 18. Schemat do obliczenia kątów od bazy

Fig. 18. A scheme to the calculate angles from the survey base



$$\gamma_{10} := \text{atan}\left(\frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{10} = 49.9825 \text{ g}$$

$$\gamma_{20} := \text{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{20} = 50.0200 \text{ g}$$

$$\gamma_{30} := \text{atan}\left(\frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{30} = 49.9825 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów (kierunków zorientowanych) dla baz pomiarowych:

$$Az_{21} := 400 - \left( \text{atan}\left(\frac{|\Delta y_{21}|}{|\Delta x_{21}|}\right) \rho \right) \quad Az_{21} = 300.0064 \text{ g}$$

$$Az_{12} := 200 - \left( \text{atan}\left(\frac{|\Delta y_{12}|}{|\Delta x_{12}|}\right) \rho \right) \quad Az_{12} = 100.0064 \text{ g}$$

$$Az_{32} := 200 + \left( \text{atan}\left(\frac{|\Delta y_{32}|}{|\Delta x_{32}|}\right) \rho \right) \quad Az_{32} = 200.0000 \text{ g}$$

$$Az_{23} := \text{atan}\left(\frac{|\Delta y_{23}|}{|\Delta x_{23}|}\right) \rho \quad Az_{23} = 0.0000 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów na oś komina z kątów obliczonych ze współrzędnych przybliżonych:

$$Az_{o10} := \text{atan}\left(\frac{|\Delta y_{10}|}{|\Delta x_{10}|}\right) \rho \quad Az_{o10} = 50.0239 \text{ g}$$

$$Az_{o20} := 400 - \left( \text{atan}\left(\frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o20} = 350.0264 \text{ g}$$

$$Az_{o30} := 200 + \left( \operatorname{atan} \left( \frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|} \right) \rho \right) \quad Az_{o30} = 249.9825 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów z kątów pomierzonych:

$$\begin{aligned} Az_{p10} &:= Az_{12} - \alpha_{10} & Az_{p10} &= 50.0239 \text{ g} \\ Az_{p20} &:= Az_{21} + \alpha_{20} & Az_{p20} &= 350.0264 \text{ g} \\ Az_{p30} &:= Az_{32} + \alpha_{30} & Az_{p30} &= 249.9840 \text{ g} \end{aligned}$$

Macierz współczynników (A) przy niewiadomych ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ):

$$A = \begin{pmatrix} -0.636658 & 0.636181 \\ 0.636531 & 0.637059 \\ 0.636708 & -0.637059 \end{pmatrix}$$

Macierz wyrazów wolnych L (wzór 28):

$$L = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ -0.0000 \\ -0.0015 \end{pmatrix}$$

Macierz wag P:

$$P = \begin{pmatrix} 256488.55 & 0 & 0 \\ 0 & 262500 & 0 \\ 0 & 0 & 646153.846 \end{pmatrix}$$

Rozwiązując układ równań (26), otrzymuje się:

$$\Delta p := \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} \quad \Delta p = \begin{pmatrix} -0.0009 \\ 0.0009 \end{pmatrix}$$

Wyrównane współrzędne osi komina:

$$w_2 := w_0 - \Delta p \quad w_2 = \begin{pmatrix} 150.008 \\ 1050.034 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{pmatrix} := w_2 \quad \begin{pmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150.008 \\ 1050.034 \end{pmatrix}$$

Ocena dokładności:

$$v := A \cdot \Delta p - L \quad v = \begin{pmatrix} 0.0011 \\ 0.0000 \\ 0.0004 \end{pmatrix}$$

Warunek konieczny  $A^T P v = 0$

$$A^T P \cdot v = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix} \quad - \text{warunek spełniony}$$

Obliczenie wartości błędu  $m_0$

$n := 3$  - liczba równań obserwacyjnych

$k := 2$  - liczba wyznaczanych niewiadomych

$$m_0 := \sqrt{\frac{v^T P \cdot v}{n - k}} \quad m_0 = 0.6487$$

Wyrównanie azymutów obliczonych z kątów pomierzonych:

$$Az_p := \begin{pmatrix} Az_{p10} \\ Az_{p20} \\ Az_{p30} \end{pmatrix} \quad Az_p = \begin{pmatrix} 50.0239 \\ 350.0264 \\ 249.9840 \end{pmatrix}$$

Azymuty po wyrównaniu:

$$\begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} := Az_p - v \quad \begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.0228 \\ 350.0264 \\ 249.9836 \end{pmatrix}$$

Obliczenie przyrostów i odległości z wyrównanych współrzędnych osi komina:

$$\Delta x_{10} := x_{02} - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.998 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_{02} - y_1 \quad \Delta y_{10} = 50.034 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_{02} \quad \Delta x_{01} = -49.998 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_{02} \quad \Delta y_{01} = -50.034 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.733 \text{ m}$$

$$\Delta x_{20} := x_{02} - x_2 \quad \Delta x_{20} = 50.008 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_{02} - y_2 \quad \Delta y_{20} = -49.966 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_{02} \quad \Delta x_{02} = -50.008 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_{02} \quad \Delta y_{02} = 49.966 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.692 \text{ m}$$

$$\Delta x_{30} := x_{02} - x_3 \quad \Delta x_{30} = -49.992 \text{ m}$$

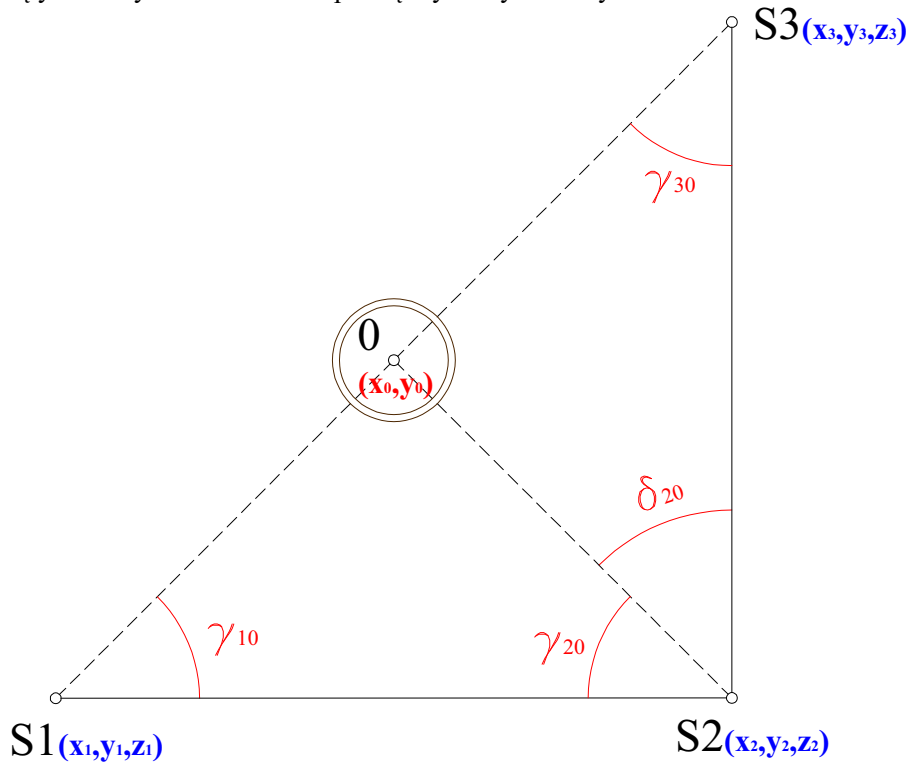
$$\Delta y_{30} := y_{02} - y_3 \quad \Delta y_{30} = -49.966 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_{02} \quad \Delta x_{03} = 49.992 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_{02} \quad \Delta y_{03} = 49.966 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.681 \text{ m}$$

Kąty od bazy obliczone ze współrzędnych wyrównanych osi komina:



Rys. 19. Schemat bazy pomiarowej po wyrównaniu współrzędnych osi komina

Fig. 19. A scheme of the survey base after settlement of the co-ordinate of the chimney

$$\gamma_{10} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{10} = 49.9836 \text{ } ^\circ$$

$$\gamma_{20} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{20} = 50.0200 \text{ } ^\circ$$

$$\delta_{20} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{20} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{20}}{\Delta x_{20} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{23} \cdot \Delta y_{20}}\right) \cdot \rho \quad \delta_{20} = 49.9736 \text{ } ^\circ$$

$$\gamma_{30} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{30} = 49.9836 \text{ } ^\circ$$

Obliczenie ze współrzędnych kąta S1-S2-S3:

$$\gamma_{13} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{21} \cdot \Delta y_{23}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ } ^\circ$$

Suma kątów  $\gamma_{20}$  i  $\delta_{20}$  obliczonych ze współrzędnych wyrównanych powinna się równać kątowi S1-S2-S3 po wyrównaniu.

$$\gamma_{20} + \delta_{20} = 99.9936 \text{ } ^\circ \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ } ^\circ \quad \text{- warunek spełniony}$$

Obliczenie azymutów z kątów obliczonych ze współrzędnych wyrównanych:

$$Az_{o10W} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta y_{10}}{\Delta x_{10}}\right) \rho \quad Az_{o10W} = 50.0228 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o20W} := 400 - \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o20W} = 350.0264 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o30W} := 200 + \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o30W} = 249.9836 \text{ } ^\circ$$

Azymuty po wyrównaniu kątów:

$$Az_{p10W} = 50.0228 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p20W} = 350.0264 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p30W} = 249.9836 \text{ } ^\circ$$

Azymuty obliczone ze współrzędnych wyrównanych oraz azymuty wyrównane z poprawek są sobie równe, zatem obliczenia wykonano prawidłowo.

Podstawiamy wyrównane dane (x, y - osi komina) do równań poprawek (25):

$$v_1 = 0.0011$$

$$v_2 = 0.0000 \text{ g}$$

$$v_3 = -0.0011 \text{ g}$$

- macierz błędów współrzędnych  $C_X := m_0^2 (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}$

$$C_X = \begin{pmatrix} 0.00000128 & 0.00000070 \\ 0.00000070 & 0.00000128 \end{pmatrix}$$

- błędy wyrównanych azymutów

$$i := 1 \dots \text{rows}(A), a_i := \text{submatrix}(A, i, i, 1, \text{cols}(A))$$

$$m_{AZ,i} := \sqrt{|a_i C_X a_i^T|}$$

$$m_{AZ} = \begin{pmatrix} 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0007 \end{pmatrix}$$

- błędy poprawek

$$m_v := \begin{bmatrix} \sqrt{m_{S1}^2 - [m_{AZ,(1,1)}]^2} \\ \sqrt{m_{S2}^2 - [m_{AZ,(2,1)}]^2} \\ \sqrt{m_{S3}^2 - [m_{AZ,(3,1)}]^2} \end{bmatrix}$$

$$m_v = \begin{pmatrix} 0.0019 \\ 0.0015 \\ 0.0010 \end{pmatrix} \quad K := \frac{v}{m_v} \quad K = \begin{pmatrix} 0.5850 \\ 0.0005 \\ -1.0432 \end{pmatrix}$$

Błąd wyrównanego azymutu  $m_{vi}$  musi być mniejszy od dokładności jego pomiaru  $m_{kat}$ , tj.  $m_{vi} < m_{kat}$ .

- błędy współrzędnych

$$m_x := \sqrt{C_{X1,1}} \quad m_x = 0.0011 \text{ m}$$

$$m_y := \sqrt{C_{X2,2}} \quad m_y = 0.0011 \text{ m}$$

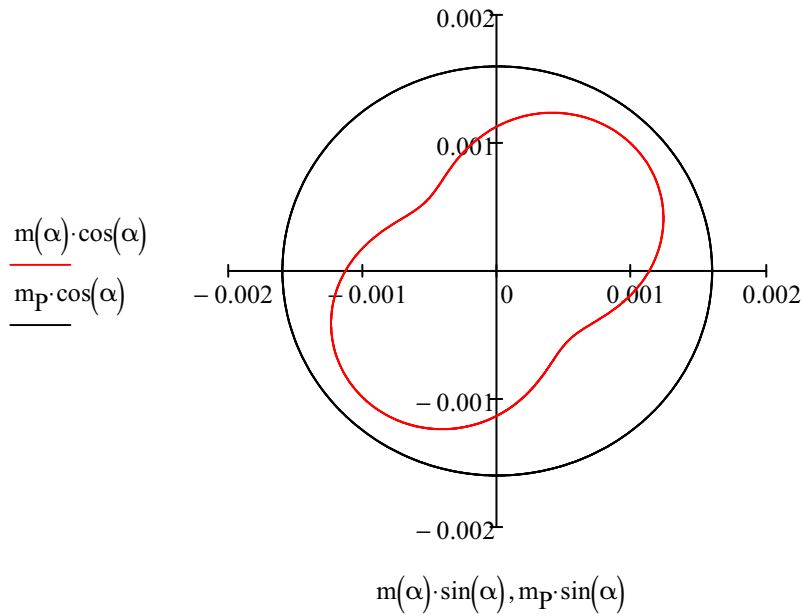
$$m_{xy} := C_{X1,2} \quad m_{xy} = 0.00000070 \text{ m}$$

- błąd położenia punktu:

$$m_P := \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad m_P = 0.002 \text{ m}$$

- błąd położenia punktu w zadanym kierunku  $\alpha$

$$m(\alpha) := \sqrt{m_x^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + m_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + m_y^2 \cdot \sin(\alpha)^2}$$



**Rys. 20.** Elipsa błędów dla poziomu drugiego

**Fig. 20.** The errors ellipse for second height level

- kąt skręcenia elipsy dla ekstremalnych wartości błędu położenia punktu:

$$\alpha_C = 49.9811 \text{ }^\circ$$

$$\alpha_D = 149.9811 \text{ }^\circ$$

obliczenie maksymalnych wartości błędu położenia punktu:

$$C := m(\alpha_C) \quad C = 0.0009 \text{ m}$$

$$D := m(\alpha_D) \quad D = 0.0008 \text{ m}$$

## 7. POZIOM TRZECI

Rzeczywistą dokładnością pomiaru (celowania) na tworzącą komina jest błąd średniej arytmetycznej z 4 nacełowań.

Pomierzone kierunki ze stanowiska pierwszego na lewą tworzącą komina, poziomu trzeciego (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S_{1L3} := \begin{pmatrix} 100.2580 \\ 100.2590 \\ 100.2570 \\ 100.2580 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane} \\ \text{(- 200g).} \end{array}$$

Kierunki pomierzone zostały z tego samego stanowiska z tą samą dokładnością dlatego do wagowania przyjmujemy dla każdego pomiaru kierunku

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{1L3sr} := \frac{\sum S_{1L3}}{4} \quad S_{1L3sr} = 100.2580 \text{ g}$$

$$v := S_{1L3} - S_{1L3sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0010 \\ -0.0010 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

$n := 4$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem:

$$m_{S_{1L3}} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S_{1L3}} = 0.0008$$



Pomierzone kierunki ze stanowiska pierwszego na prawą tworzącą komina, poziomu trzeciego (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S_{1P3} := \begin{pmatrix} 105.2190 \\ 105.2210 \\ 105.2200 \\ 105.2200 \end{pmatrix} \quad \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane (- 200g).}$$

$$S_{1P3sr} := \frac{\sum S_{1P3}}{4} \quad S_{1P3sr} = 105.2200 \text{ g}$$

$$v := S_{1P3} - S_{1P3sr} \quad v = \begin{pmatrix} -0.0010 \\ 0.0010 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$$

$n := 4$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem:

$$m_{S1P3} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1P3} = 0.0008$$

Rzeczywistą dokładnością pomiaru (celowania) na tworzącą komina jest błąd średniej arytmetycznej z 8 nacełowań.

Obliczenie kierunku średniego oraz błędu wyznaczenia kierunku na stanowisko 2 ze stanowiska 1 (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S_{1S2} := \begin{pmatrix} 152.7120 \\ 152.7120 \\ 152.7090 \\ 152.7070 \\ 152.7100 \\ 152.7100 \\ 152.7110 \\ 152.7090 \end{pmatrix} \quad \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane (- 200g).}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1_{S2sr} := \frac{\sum S1_{S2}}{8} \quad S1_{S2sr} = 152.7100 \text{ g}$$

$$v := S1_{S2} - S1_{S2sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0020 \\ 0.0020 \\ -0.0010 \\ -0.0030 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0010 \\ -0.0010 \end{pmatrix}$$

n := 8 - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem wyznaczenia kierunku na stanowisko 2 ze stanowiska 1:

$$m_{S1S2} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1S2} = 0.0017$$

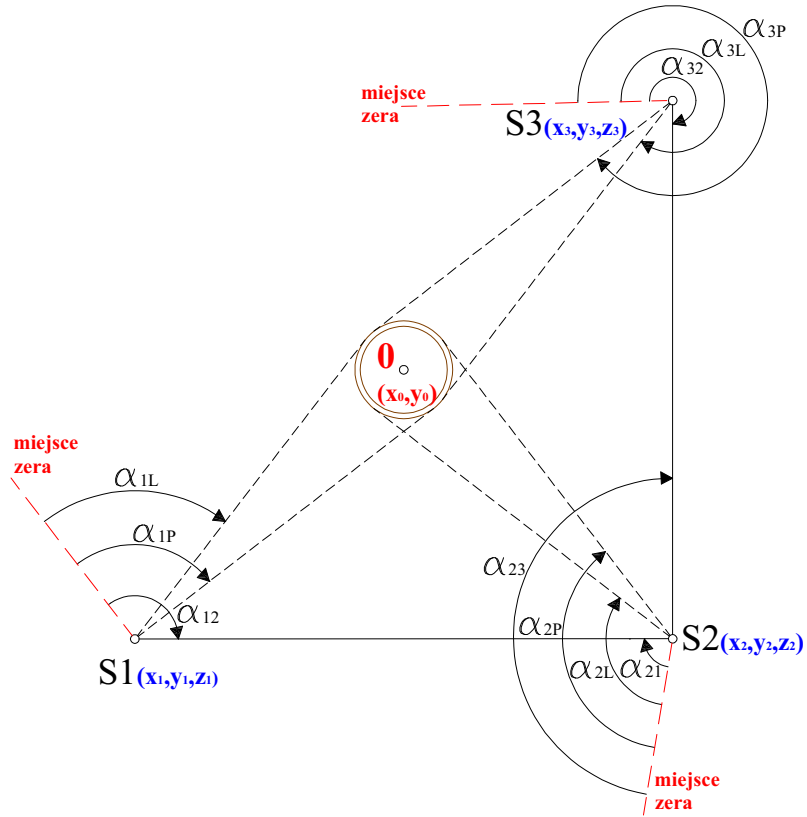
Obliczenie rzeczywistego błędu wyznaczenia azymutu z pomiaru terenowego:

$$m_{S1} := \sqrt{\frac{(m_{S1L3})^2 + (m_{S1P3})^2}{4} + (m_{S1S2})^2} \quad m_{S1} = 0.0018$$

$$m_{S2} = 0.0020$$

$$m_{S3} = 0.0014$$

Obliczenie współrzędnych płaskich (x, y) osi komina o przekroju kołowym. Pomiar z trzech stanowisk o znanych współrzędnych (x, y) metodą dwusiecznych. Przykład dla poziomu trzeciego.



Rys. 21. Schemat pomiaru

Fig. 21. A survey scheme

Odczyty wykonane podczas pomiaru komina:

1) ze stanowiska S1:

wysokość instrumentu  $i_{h1} := 1.54$

	Hz	V
na stanowisko S2	- $\alpha_{12} := 152.7100$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{1L} := 100.2580$ g	$V_{1L} := 78.6150$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{1P} := 105.2200$ g	$V_{1P} := 78.6200$ g

2) ze stanowiska S2:

wysokość instrumentu  $i_{h2} := 1.58$

na stanowisko S1	- $\alpha_{21} := 88.4000$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{2L} := 135.9150$ g	$V_{2L} := 79.1500$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{2P} := 140.8730$ g	$V_{2P} := 79.1540$ g

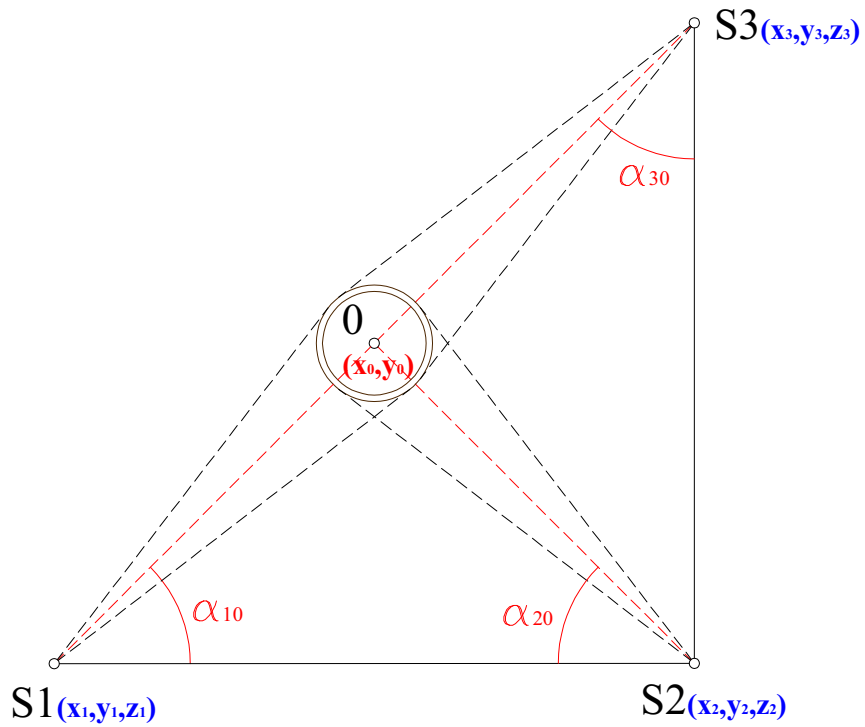
3) ze stanowiska S3:

wysokość instrumentu  $i_{h3} := 1.63$

na stanowisko S2	- $\alpha_{32} := 303.9300$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{3L} := 351.4170$ g	$V_{3L} := 79.4750$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{3P} := 356.3880$ g	$V_{3P} := 79.4730$ g

---

Obliczenie wartości kierunków od bazy na oś komina:



Rys. 22. Schemat obliczenia wartości kierunków na oś komina

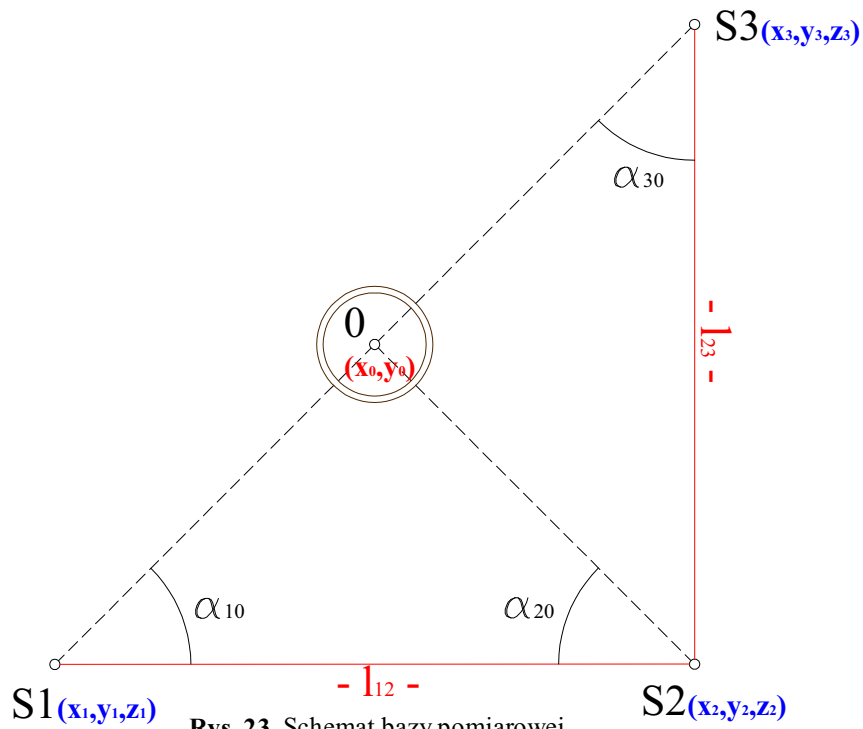
Fig. 22. The calculation scheme of the value of directions on the axis of the chimney.

$$\alpha_{10} := \alpha_{12} - \frac{\alpha_{1L} + \alpha_{1P}}{2} \quad \alpha_{10} = 49.9710 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{20} := \frac{\alpha_{2L} + \alpha_{2P}}{2} - \alpha_{21} \quad \alpha_{20} = 49.9940 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{30} := \frac{\alpha_{3L} + \alpha_{3P}}{2} - \alpha_{32} \quad \alpha_{30} = 49.9725 \text{ } ^\circ$$

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi i długości boków bazy pomiarowej ze współrzędnych



Rys. 23. Schemat bazy pomiarowej

Fig. 23. The survey base scheme

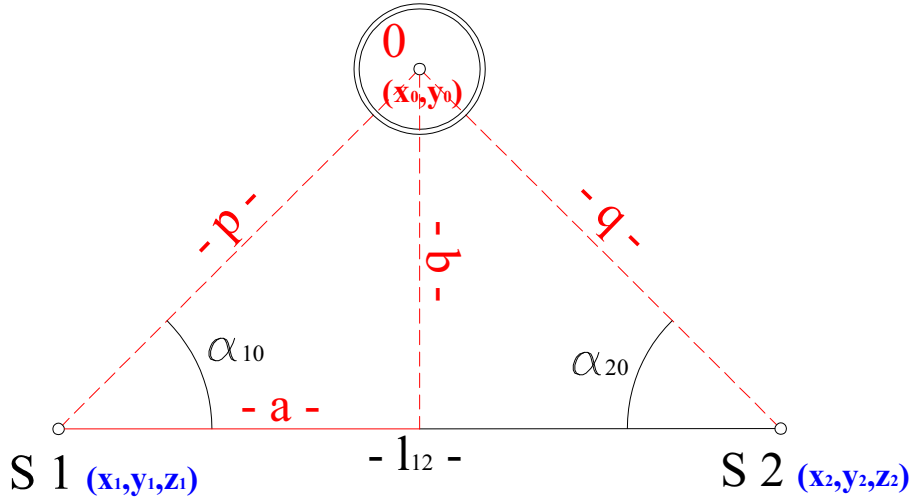
$$\text{grad} := \frac{\pi}{200}$$

Współrzędne stanowisk:

$$\begin{aligned} \Delta x_{12} &:= x_2 - x_1 & \Delta x_{12} &= -0.010 \text{ m} \\ \Delta y_{12} &:= y_2 - y_1 & \Delta y_{12} &= 100.000 \text{ m} \\ \Delta x_{21} &:= x_1 - x_2 & \Delta x_{21} &= 0.010 \text{ m} \\ \Delta y_{21} &:= y_1 - y_2 & \Delta y_{21} &= -100.000 \text{ m} \\ l_{12} &:= \sqrt{(\Delta x_{12})^2 + (\Delta y_{12})^2} & l_{12} &= 100.000 \text{ m} \\ \Delta x_{23} &:= x_3 - x_2 & \Delta x_{23} &= 100.000 \text{ m} \\ \Delta y_{23} &:= y_3 - y_2 & \Delta y_{23} &= 0.000 \text{ m} \\ \Delta x_{32} &:= x_2 - x_3 & \Delta x_{32} &= -100.000 \text{ m} \\ \Delta y_{32} &:= y_2 - y_3 & \Delta y_{32} &= 0.000 \text{ m} \end{aligned}$$

$$l_{23} := \sqrt{(\Delta x_{23})^2 + (\Delta y_{23})^2} \quad l_{23} = 100.000 \text{ m}$$

Obliczenie przybliżonych współrzędnych osi komina ze stanowisk S1 i S2:



**Rys. 24.** Schemat bazy pomiarowej do obliczenia współrzędnych przybliżonych osi komina

**Fig. 24.** The survey base scheme to calculate the approximate co-ordinates of the chimney axes

$$p := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad p = 70.704 \text{ m}$$

$$q := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad q = 70.678 \text{ m}$$

$$a := \frac{p^2 - q^2 + (l_{12})^2}{2 \cdot l_{12}} \quad a = 50.018 \text{ m}$$

$$b := \sqrt{p^2 - a^2} \quad b = 49.973 \text{ m}$$

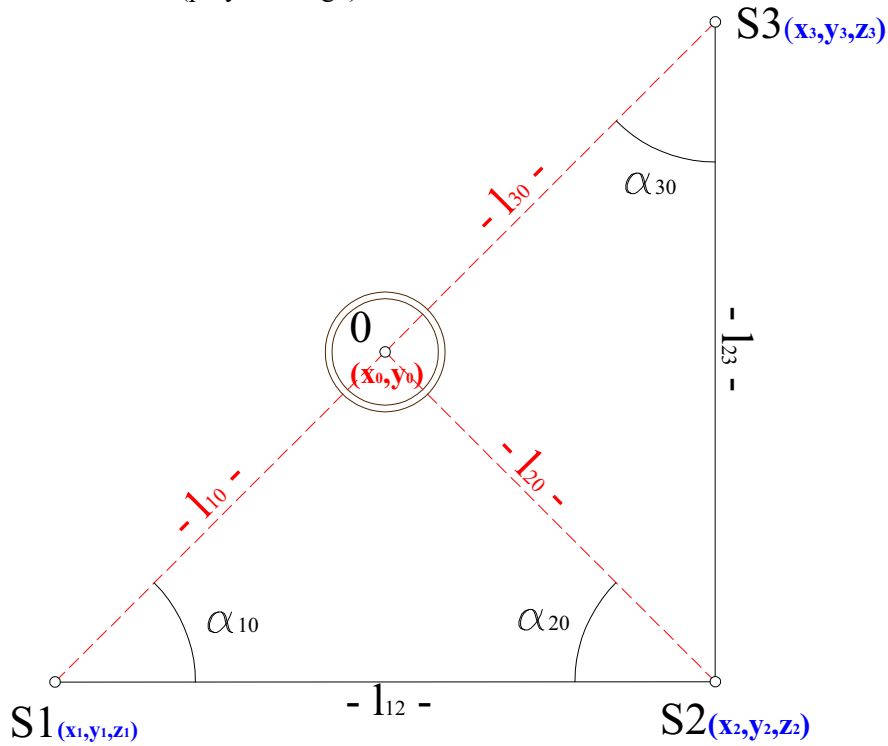
$$x_0 := x_1 + a \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} + b \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} \quad x_0 = 149.978 \text{ m}$$

$$y_0 := y_1 + a \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} - b \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} \quad y_0 = 1050.023 \text{ m}$$

Przybliżone współrzędne osi komina obliczone ze stanowisk S1 i S2:

$$w_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 149.978 \\ 1050.023 \end{pmatrix}$$

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_{i_0}$ ,  $\Delta y_{i_0}$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi a przybliżonymi współrzędnymi osi komina i długości boków od stanowiska do środka komina (przybliżonego).



Rys. 25. Schemat pełnej bazy pomiarowej

Fig. 25. A scheme of the complete survey base

Współrzędne stanowisk i kąty pomierzone od baz pomiarowych:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &:= \alpha_{10} \rho & \alpha_{10} &= 49.9710 \text{ } ^\circ \\ \alpha_{20} &:= \alpha_{20} \rho & \alpha_{20} &= 49.9940 \text{ } ^\circ \\ & & \alpha_{30} &= 49.9725 \text{ } ^\circ \end{aligned}$$



Obliczenie przyrostów współrzędnych i długości boków:

$$\Delta x_{10} := x_0 - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.968 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_0 - y_1 \quad \Delta y_{10} = 50.023 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_0 \quad \Delta x_{01} = -49.968 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_0 \quad \Delta y_{01} = -50.023 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.704 \text{ m}$$

$$\Delta x_{20} := x_0 - x_2 \quad \Delta x_{20} = 49.978 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_0 - y_2 \quad \Delta y_{20} = -49.977 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_0 \quad \Delta x_{02} = -49.978 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_0 \quad \Delta y_{02} = 49.977 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.678 \text{ m}$$

$$\Delta x_{30} := x_0 - x_3 \quad \Delta x_{30} = -50.022 \text{ m}$$

$$\Delta y_{30} := y_0 - y_3 \quad \Delta y_{30} = -49.977 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_0 \quad \Delta x_{03} = 50.022 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_0 \quad \Delta y_{03} = 49.977 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.710 \text{ m}$$

Obliczenie promienia komina dla poziomu trzeciego (3):

$$r_{13} := l_{10} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{1P} - \alpha_{1L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{13} = 2.755 \text{ m}$$

$$r_{23} := l_{20} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{2P} - \alpha_{2L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{23} = 2.752 \text{ m}$$

$$r_{33} := l_{30} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{3P} - \alpha_{3L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{33} = 2.760 \text{ m}$$

Obliczenie średniego promienia z trzech stanowisk:

$$r_{3sr} := \frac{r_{11} + r_{21} + r_{31}}{3} \quad r_{3sr} = 3.004 \text{ m}$$

Obliczenie wysokości poziomu trzeciego:

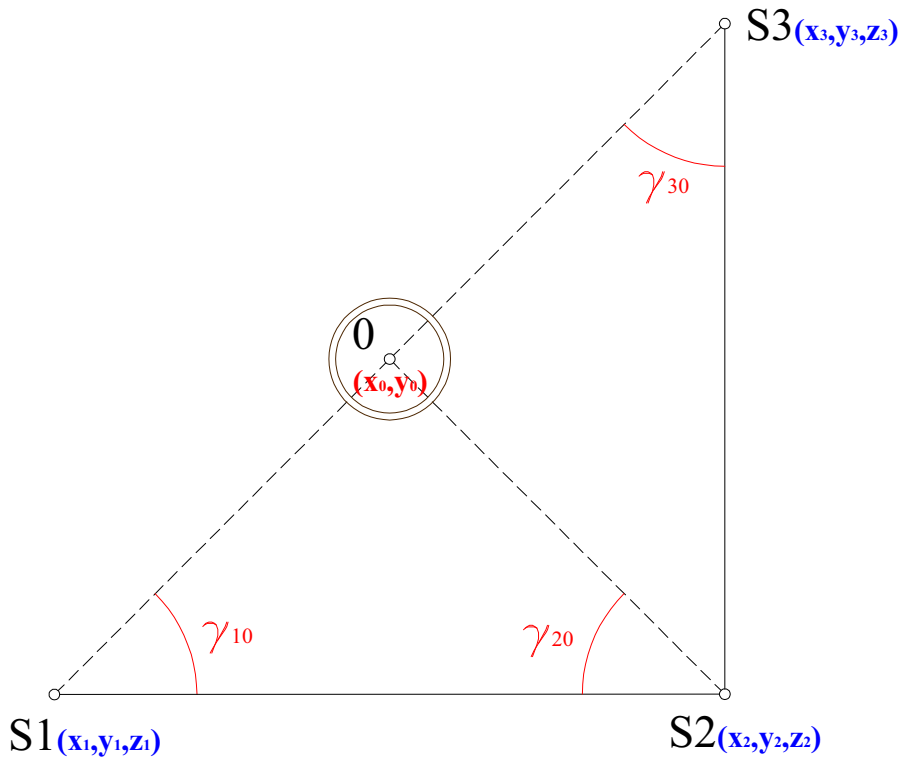
$$Z_{13} := z_1 + l_{10} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{1L} + V_{1P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h1} \quad Z_{13} = 143.294 \text{ m}$$

$$Z_{23} := z_2 + l_{20} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{2L} + V_{2P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h2} \quad Z_{23} = 143.294 \text{ m}$$

$$Z_{33} := z_3 + l_{30} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{3L} + V_{3P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h3} \quad Z_{33} = 143.296 \text{ m}$$

$$Z_{03} := \frac{Z_{13} + Z_{23} + Z_{33}}{3} - \left( \frac{Z_{11} + Z_{21} + Z_{31}}{3} \right) + Z_{01}$$

$$Z_{03} = 26.749 \text{ m}$$



Rys. 26. Schemat do obliczenia kątów od bazy

Fig. 26. A scheme to the calculate angles from the survey base

$$\gamma_{10} := \text{atan} \left( \frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}} \right) \cdot \rho \quad \gamma_{10} = 49.9710 \text{ } ^\circ$$

$$\gamma_{20} := \text{atan} \left( \frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}} \right) \cdot \rho \quad \gamma_{20} = 49.9940 \text{ } ^\circ$$

$$\gamma_{30} := \text{atan} \left( \frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}} \right) \cdot \rho \quad \gamma_{30} = 49.9710 \text{ } ^\circ$$

Obliczenie azymutów (kierunków zorientowanych) dla baz pomiarowych:

$$Az_{21} := 400 - \left( \text{atan} \left( \frac{|\Delta y_{21}|}{|\Delta x_{21}|} \right) \rho \right) \quad Az_{21} = 300.0064 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{12} := 200 - \left( \text{atan} \left( \frac{|\Delta y_{12}|}{|\Delta x_{12}|} \right) \rho \right) \quad Az_{12} = 100.0064 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{32} := 200 + \left( \text{atan} \left( \frac{|\Delta y_{32}|}{|\Delta x_{32}|} \right) \rho \right) \quad Az_{32} = 200.0000 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{23} := \text{atan} \left( \frac{|\Delta y_{23}|}{|\Delta x_{23}|} \right) \rho \quad Az_{23} = 0.0000 \text{ } ^\circ$$

Obliczenie azymutów na oś komina z kątów obliczonych ze współrzędnych przybliżonych:

$$Az_{o10} := \text{atan} \left( \frac{|\Delta y_{10}|}{|\Delta x_{10}|} \right) \rho \quad Az_{o10} = 50.0354 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o20} := 400 - \left( \text{atan} \left( \frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|} \right) \rho \right) \quad Az_{o20} = 350.0004 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o30} := 200 + \left( \text{atan} \left( \frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|} \right) \rho \right) \quad Az_{o30} = 249.9710 \text{ } ^\circ$$

Obliczenie azymutów z kątów pomierzonych:

$$Az_{p10} := Az_{12} - \alpha_{10} \quad Az_{p10} = 50.0354 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p20} := Az_{21} + \alpha_{20} \quad Az_{p20} = 350.0004 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p30} := Az_{32} + \alpha_{30} \quad Az_{p30} = 249.9725 \text{ } ^\circ$$

Macierz współczynników (A) przy niewiadomych ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ):

$$A = \begin{pmatrix} -0.637033 & 0.636326 \\ 0.636906 & 0.636914 \\ 0.636333 & -0.636913 \end{pmatrix}$$

Macierz wyrazów wolnych L (wzór 28):

$$L = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0015 \end{pmatrix}$$

Macierz wag P:

$$P = \begin{pmatrix} 313432.8358 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 241379.3103 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 509090.9091 \end{pmatrix}$$

Rozwiązując układ równań (26), otrzymuje się:

$$\Delta p := \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} \qquad \Delta p = \begin{pmatrix} -0.0007 \\ 0.0007 \end{pmatrix}$$

Wyrównane współrzędne osi komina:

$$w_3 := w_0 - \Delta p \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 149.978 \\ 1050.022 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{03} \\ y_{03} \end{pmatrix} := w_3 \qquad \begin{pmatrix} x_{03} \\ y_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149.978 \\ 1050.022 \end{pmatrix}$$

Ocena dokładności:

$$v := A \cdot \Delta p - L \qquad v = \begin{pmatrix} 0.0009 \\ 0.0000 \\ 0.0006 \end{pmatrix}$$

Warunek konieczny  $A^T P v = 0$

$$A^T P \cdot v = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix} \qquad - \text{warunek spełniony.}$$

Obliczenie wartości błędu  $m_0$

$n := 3$  - liczba równań obserwacyjnych.

$k := 2$  - liczba wyznaczanych niewiadomych.

$$m_0 := \sqrt{\frac{v^T P \cdot v}{n - k}} \quad m_0 = 0.6593$$

Wyrównanie azymutów obliczonych z kątów pomierzonych:

$$Az_p := \begin{pmatrix} Az_{p10} \\ Az_{p20} \\ Az_{p30} \end{pmatrix} \quad Az_p = \begin{pmatrix} 50.0354 \\ 350.0004 \\ 249.9725 \end{pmatrix}$$

Azymuty po wyrównaniu:

$$\begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} := Az_p - v \begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.0344 \\ 350.0004 \\ 249.9719 \end{pmatrix}$$

Obliczenie przyrostów i odległości z wyrównanych współrzędnych osi komina:

$$\Delta x_{10} := x_{03} - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.968 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_{03} - y_1 \quad \Delta y_{10} = 50.022 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_{03} \quad \Delta x_{01} = -49.968 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_{03} \quad \Delta y_{01} = -50.022 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.704 \text{ m}$$

$$\Delta x_{20} := x_{03} - x_2 \quad \Delta x_{20} = 49.978 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_{03} - y_2 \quad \Delta y_{20} = -49.978 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_{03} \quad \Delta x_{02} = -49.978 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_{03} \quad \Delta y_{02} = 49.978 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.679 \text{ m}$$

$$\Delta x_{30} := x_{03} - x_3 \quad \Delta x_{30} = -50.022 \text{ m}$$

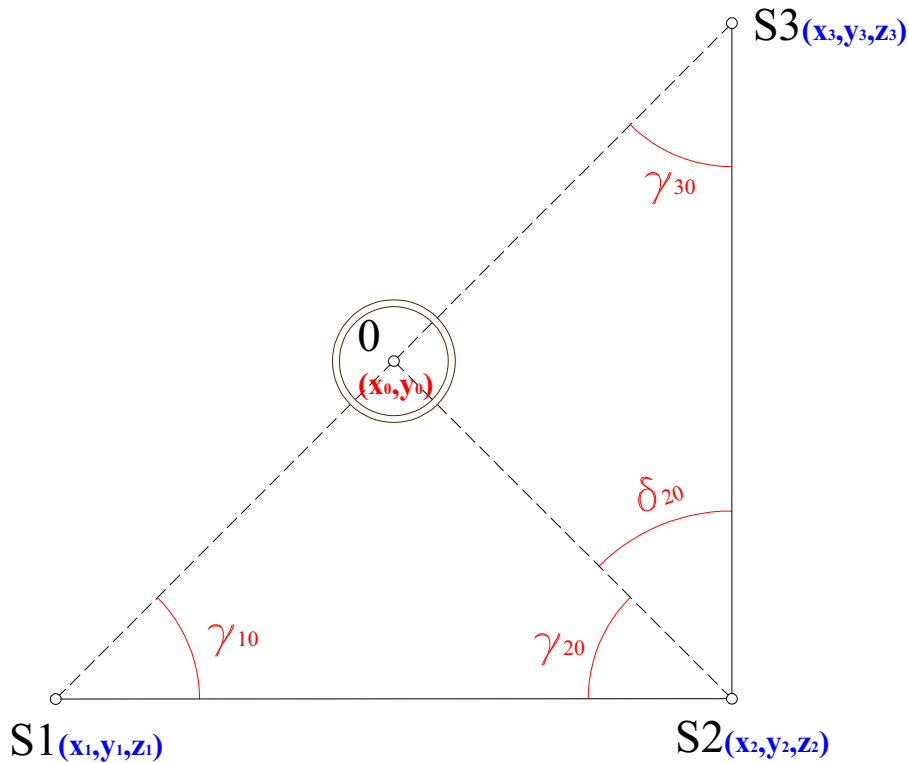
$$\Delta y_{30} := y_{03} - y_3 \quad \Delta y_{30} = -49.978 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_{03} \quad \Delta x_{03} = 50.022 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_{03} \quad \Delta y_{03} = 49.978 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.710 \text{ m}$$

Kąty od bazy obliczone ze współrzędnych wyrównanych osi komina:



Rys. 27. Schemat bazy pomiarowej po wyrównaniu współrzędnych osi komina

Fig. 27. A scheme of the survey base after settlement of the co-ordinate of the chimney

$$\begin{aligned}\gamma_{10} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}}\right) \cdot \rho & \gamma_{10} &= 49.9719 \text{ g} \\ \gamma_{20} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}}\right) \cdot \rho & \gamma_{20} &= 49.9940 \text{ g} \\ \delta_{20} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{20} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{20}}{\Delta x_{20} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{23}}\right) \cdot \rho & \delta_{20} &= 49.9996 \text{ g} \\ \gamma_{30} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}}\right) \cdot \rho & \gamma_{30} &= 49.9719 \text{ g}\end{aligned}$$

Obliczenie ze współrzędnych kąta S1-S2-S3:

$$\gamma_{13} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{21} \cdot \Delta y_{23}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ } ^\circ$$

Suma kątów  $\gamma_{20}$  i  $\delta_{20}$  obliczonych ze współrzędnych wyrównanych powinna się równać kątowi S1-S2-S3 po wyrównaniu.

$$\gamma_{20} + \delta_{20} = 99.9936 \text{ } ^\circ \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ } ^\circ \quad - \text{warunek spełniony}$$

Obliczenie azymutów z kątów obliczonych ze współrzędnych wyrównanych:

$$Az_{o10W} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta y_{10}}{\Delta x_{10}}\right) \rho \quad Az_{o10W} = 50.0344 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o20W} := 400 - \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o20W} = 350.0004 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{o30W} := 200 + \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o30W} = 249.9719 \text{ } ^\circ$$

Azymuty po wyrównaniu kątów:

$$Az_{p10W} = 50.0344 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p20W} = 350.0004 \text{ } ^\circ$$

$$Az_{p30W} = 249.9719 \text{ } ^\circ$$

Azymuty obliczone ze współrzędnych wyrównanych oraz azymuty wyrównane z poprawek są sobie równe, zatem obliczenia wykonano prawidłowo.

Podstawiamy wyrównane dane (x, y - osi komina) do równań poprawek:

$$v_1 = 0.0009 \text{ } ^\circ$$

$$v_2 = 0.0000 \text{ } ^\circ$$

$$v_3 = -0.0009 \text{ } ^\circ$$

- macierz błędów współrzędnych  $C_x := m_0^2 (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}$

$$C_x = \begin{pmatrix} 0.00000144 & 0.00000078 \\ 0.00000078 & 0.00000144 \end{pmatrix}$$

- błędy wyrównanych azymutów

$$m_{AZ,i} := \sqrt{a_i C_X a_i^T}$$

$$m_{AZ} = \begin{pmatrix} 0.0007 \\ 0.0013 \\ 0.0007 \end{pmatrix}$$

- błędy poprawek

$$m_v = \begin{pmatrix} 0.0016 \\ 0.0015 \\ 0.0012 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.5678 \\ 0.0008 \\ -0.7731 \end{pmatrix}$$

Błąd wyrównanego azymutu  $m_{vi}$  musi być mniejszy od dokładności jego pomiaru  $m_{kat}$ , tj.  $m_{vi} < m_{kat}$ .

- błędy współrzędnych

$$m_x := \sqrt{C_{X_{1,1}}}$$

$$m_x = 0.0012 \text{ m}$$

$$m_y := \sqrt{C_{X_{2,2}}}$$

$$m_y = 0.0012 \text{ m}$$

$$m_{xy} := C_{X_{1,2}}$$

$$m_{xy} = 0.00000078 \text{ m}$$

- błąd położenia punktu:

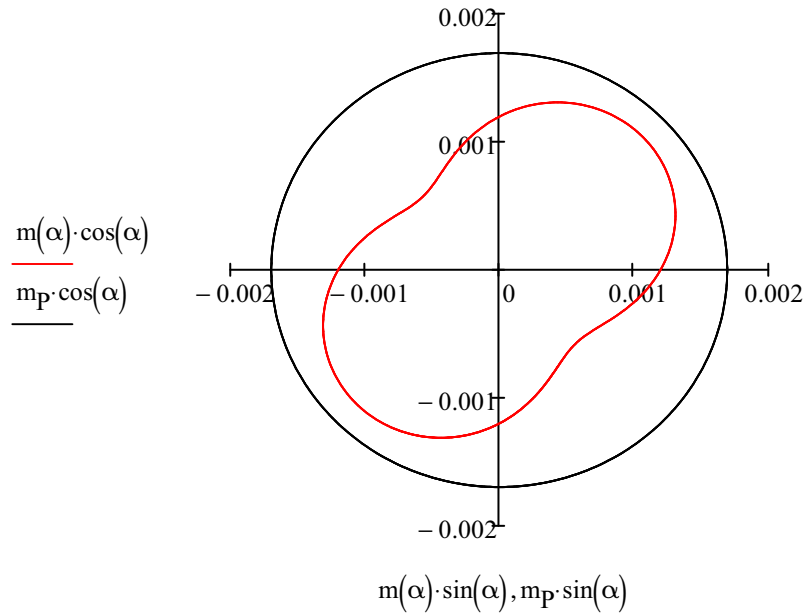
$$m_p := \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

$$m_p = 0.002 \text{ m}$$



- błąd położenia punktu w zadanym kierunku  $\alpha$

$$m(\alpha) := \sqrt{m_x^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + m_{xV} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + m_v^2 \cdot \sin(\alpha)^2}$$



**Rys. 28.** Elipsa błędów dla poziomu trzeciego

**Fig. 28.** The errors ellipse for third height level

- kąt skręcenia elipsy dla ekstremalnych wartości błędu położenia punktu:

$$\alpha_C = 49.9935^\circ$$

$$\alpha_D = 149.9935^\circ$$

obliczenie maksymalnych wartości błędu położenia punktu:

$$C := m(\alpha_C) \qquad C = 0.0010 \text{ m}$$

$$D := m(\alpha_D) \qquad D = 0.0008 \text{ m}$$

### 8. POZIOM CZWARTY

Rzeczywistą dokładnością pomiaru (celowania) na tworzącą komina jest błąd średniej arytmetycznej z 4 nacełowań.

Pomierzone kierunki ze stanowiska pierwszego na lewą tworzącą komina, poziomu czwartego (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S1_{L4} := \begin{pmatrix} 100.3795 \\ 100.3775 \\ 100.3790 \\ 100.3760 \end{pmatrix} \quad \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane (- 200g).}$$

Kierunki pomierzone zostały z tego samego stanowiska z tą samą dokładnością dlatego do wagowania przyjmujemy dla każdego pomiaru kierunku

$$m_1 := 1$$

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1^2} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1_{L4sr} := \frac{\sum S1_{L4}}{4} \quad S1_{L4sr} = 100.3780 \text{ g}$$
$$v := S1_{L4} - S1_{L4sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0015 \\ -0.0005 \\ 0.0010 \\ -0.0020 \end{pmatrix}$$

$n := 4$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem:

$$m_{S1L4} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1L4} = 0.0016$$

Pomierzone kierunki ze stanowiska pierwszego na prawą tworzącą komina, poziomu czwartego (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S_{1P4} := \begin{pmatrix} 105.0895 \\ 105.0895 \\ 105.0900 \\ 105.0910 \end{pmatrix} \quad \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane} \\ \text{(- 200g).}$$

$$S_{1P4sr} := \frac{\sum S_{1P4}}{4} \quad S_{1P4sr} = 105.0900 \text{ g}$$

$$v := S_{1P4} - S_{1P4sr} \quad v = \begin{pmatrix} -0.0005 \\ -0.0005 \\ 0.0000 \\ 0.0010 \end{pmatrix}$$

$n := 4$  - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem:

$$m_{S1P4} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1P4} = 0.0007$$

Rzeczywistą dokładnością pomiaru (celowania) na tworzącą komina jest błąd średniej arytmetycznej z 8 nacełowań.

Obliczenie kierunku średniego oraz błędu wyznaczenia kierunku na stanowisko 2 ze stanowiska 1 (dziennik pomiarowy s. 27):

$$S_{1S2} := \begin{pmatrix} 152.7120 \\ 152.7120 \\ 152.7090 \\ 152.7070 \\ 152.7100 \\ 152.7100 \\ 152.7110 \\ 152.7090 \end{pmatrix} \quad \text{- odczyty z drugiego położenia lunety zostały zredukowane} \\ \text{(- 200g)}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S1S2_{sr} := \frac{\sum S1S2}{8} \quad S1S2_{sr} = 152.7100 \text{ g}$$

$$v := S1S2 - S1S2_{sr} \quad v = \begin{pmatrix} 0.0020 \\ 0.0020 \\ -0.0010 \\ -0.0030 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0010 \\ -0.0010 \end{pmatrix}$$

n := 8 - ilość spostrzeżeń

Błąd pojedynczego spostrzeżenia przed wyrównaniem wyznaczenia kierunku na stanowisko 2 ze stanowiska 1:

$$m_{S1S2} := \sqrt{\frac{(v^T P \cdot v)}{n - 1}} \quad m_{S1S2} = 0.0017$$

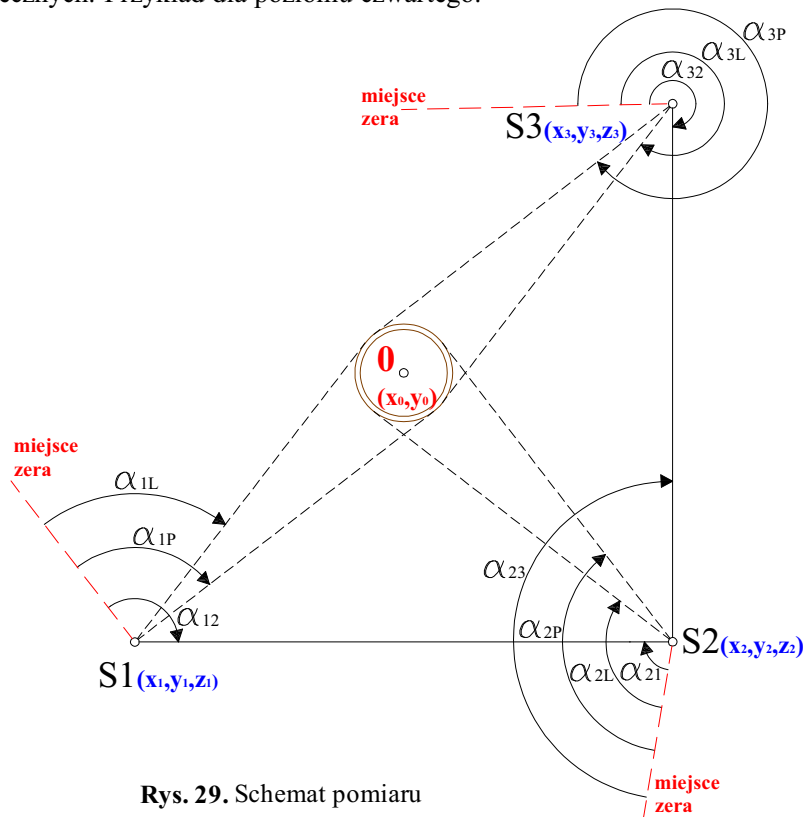
Obliczenie rzeczywistego błędu wyznaczenia azymutu z pomiaru terenowego:

$$m_{S1} := \sqrt{\frac{(m_{S1L4})^2 + (m_{S1P4})^2}{4} + (m_{S1S2})^2} \quad m_{S1} = 0.0019$$

$$m_{S2} = 0.0019$$

$$m_{S3} = 0.0014$$

Obliczenie współrzędnych płaskich (x, y) osi komina o przekroju kołowym. Pomiar z trzech stanowisk o znanych współrzędnych (x, y) metodą dwusiecznych. Przykład dla poziomu czwartego.



Rys. 29. Schemat pomiaru

Fig. 29. A survey scheme

Odczyty wykonane podczas pomiaru komina:

1) ze stanowiska S1:

wysokość instrumentu  $i_{h1} := 1.54$

	Hz	V
na stanowisko S2	- $\alpha_{12} := 152.7100$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{1L} := 100.3780$ g	$V_{1L} := 66.3200$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{1P} := 105.0900$ g	$V_{1P} := 66.3180$ g

2) ze stanowiska S2:

wysokość instrumentu  $i_{h2} := 1.58$

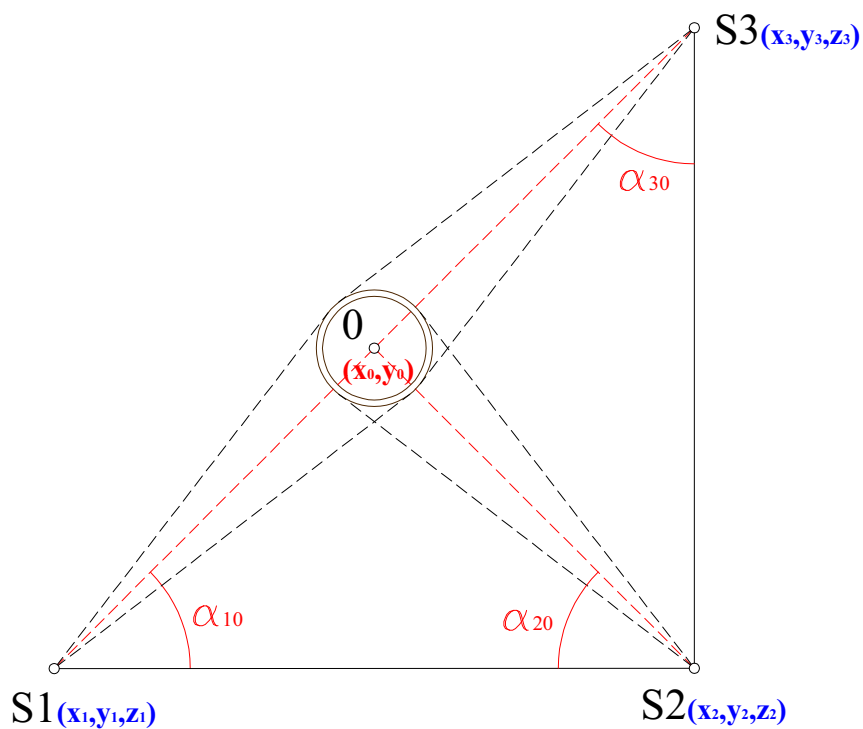
na stanowisko S1	- $\alpha_{21} := 88.4000$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{2L} := 136.0380$ g	$V_{2L} := 66.9050$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{2P} := 140.7540$ g	$V_{2P} := 66.9020$ g

3) ze stanowiska S3:

wysokość instrumentu  $i_{h3} := 1.63$

na stanowisko S2	- $\alpha_{32} := 303.9300$ g	
lewa tworząca komina	- $\alpha_{3L} := 351.5520$ g	$V_{3L} := 67.2520$ g
prawa tworząca komina	- $\alpha_{3P} := 356.2630$ g	$V_{3P} := 67.2560$ g

Obliczenie wartości kierunków od bazy na oś komina:



Rys. 30. Schemat obliczenia wartości kierunków na oś komina

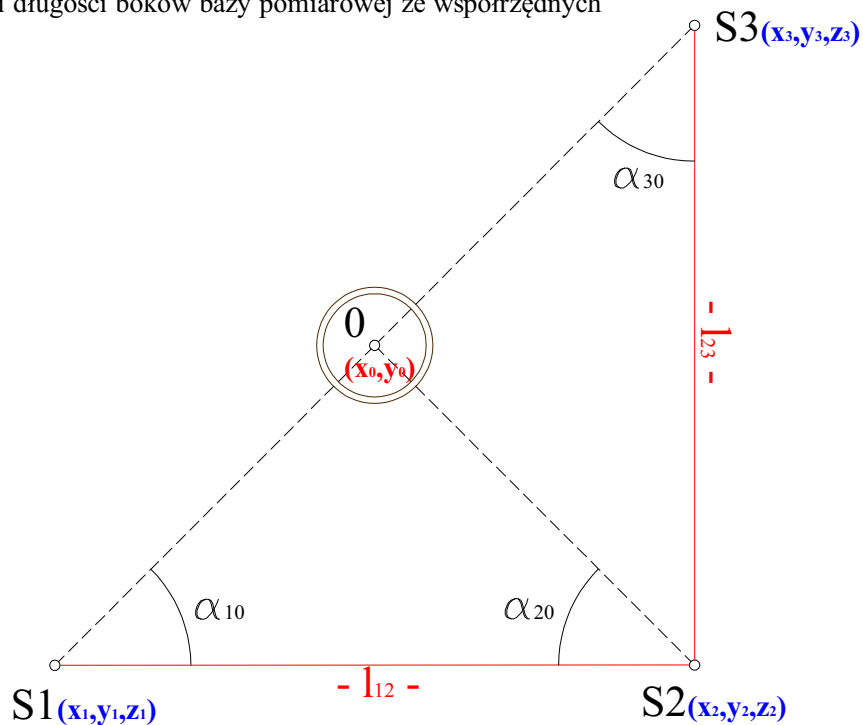
Fig. 30. The calculation scheme of the value of directions on the axis of the chimney

$$\alpha_{10} := \alpha_{12} - \frac{\alpha_{1L} + \alpha_{1P}}{2} \quad \alpha_{10} = 49.9760 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{20} := \frac{\alpha_{2L} + \alpha_{2P}}{2} - \alpha_{21} \quad \alpha_{20} = 49.9960 \text{ } ^\circ$$

$$\alpha_{30} := \frac{\alpha_{3L} + \alpha_{3P}}{2} - \alpha_{32} \quad \alpha_{30} = 49.9775 \text{ } ^\circ$$

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi i długości boków bazy pomiarowej ze współrzędnych



Rys. 31. Schemat bazy pomiarowej

Fig. 31. The survey base scheme

Współrzędne stanowisk:

$$\Delta x_{12} := x_2 - x_1 \quad \Delta x_{12} = -0.010 \text{ m}$$

$$\Delta y_{12} := y_2 - y_1 \quad \Delta y_{12} = 100.000 \text{ m}$$

$$\Delta x_{21} := x_1 - x_2 \quad \Delta x_{21} = 0.010 \text{ m}$$

$$\Delta y_{21} := y_1 - y_2 \quad \Delta y_{21} = -100.000 \text{ m}$$

$$l_{12} := \sqrt{(\Delta x_{12})^2 + (\Delta y_{12})^2} \quad l_{12} = 100.000 \text{ m}$$

$$\Delta x_{23} := x_3 - x_2 \quad \Delta x_{23} = 100.000 \text{ m}$$

$$\Delta y_{23} := y_3 - y_2 \quad \Delta y_{23} = 0.000 \text{ m}$$

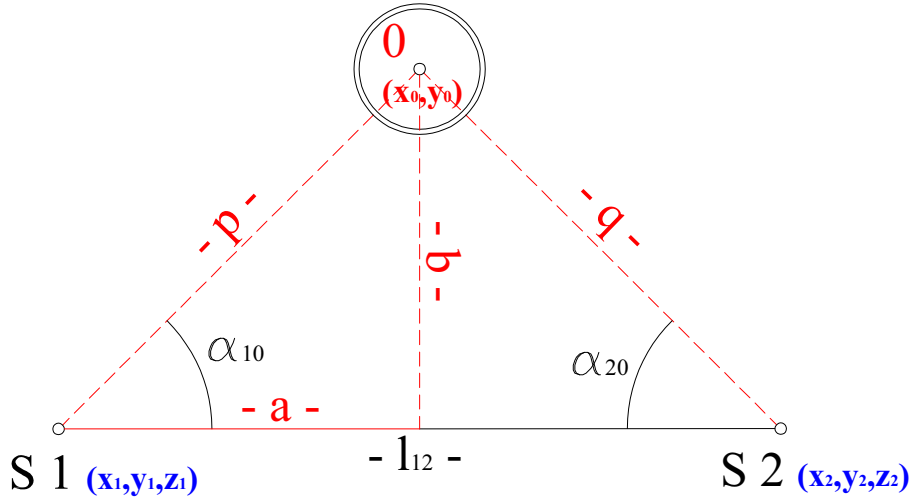
$$\Delta x_{32} := x_2 - x_3 \quad \Delta x_{32} = -100.000 \text{ m}$$

$$\Delta y_{32} := y_2 - y_3 \quad \Delta y_{32} = 0.000 \text{ m}$$



$$l_{23} := \sqrt{(\Delta x_{23})^2 + (\Delta y_{23})^2} \quad l_{23} = 100.000 \text{ m}$$

Obliczenie przybliżonych współrzędnych osi komina ze stanowisk S1 i S2:



**Rys. 32.** Schemat bazy pomiarowej do obliczenia współrzędnych przybliżonych osi komina

**Fig. 32.** The survey base scheme to calculate the approximate co-ordinates of the chimney axes

$$p := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{20})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad p = 70.706 \text{ m}$$

$$q := l_{12} \cdot \frac{\sin(\alpha_{10})}{\sin(\alpha_{10} + \alpha_{20})} \quad q = 70.684 \text{ m}$$

$$a := \frac{p^2 - q^2 + (l_{12})^2}{2 \cdot l_{12}} \quad a = 50.016 \text{ m}$$

$$b := \sqrt{p^2 - a^2} \quad b = 49.978 \text{ m}$$

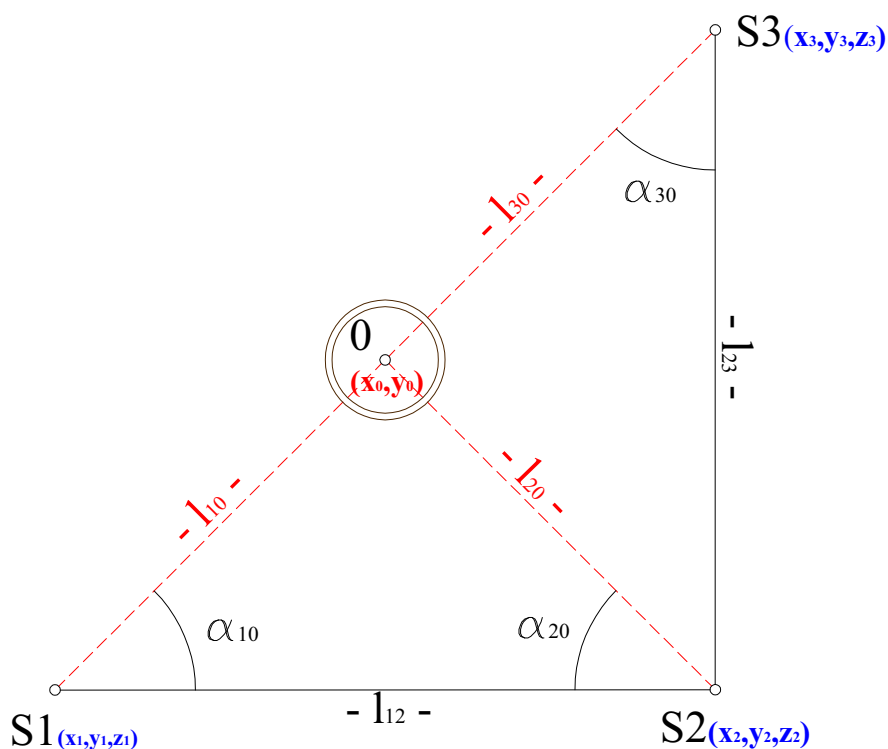
$$x_0 := x_1 + a \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} + b \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} \quad x_0 = 149.983 \text{ m}$$

$$y_0 := y_1 + a \cdot \frac{\Delta y_{12}}{l_{12}} - b \cdot \frac{\Delta x_{12}}{l_{12}} \quad y_0 = 1050.021 \text{ m}$$

Przybliżone współrzędne osi komina obliczone ze stanowisk S1 i S2:

$$w_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 149.983 \\ 1050.021 \end{pmatrix}$$

Obliczenie przyrostów  $\Delta x_{i_0}$ ,  $\Delta y_{i_0}$  pomiędzy stanowiskami pomiarowymi a przybliżonymi współrzędnymi osi komina i długości boków od stanowiska do środka komina (przybliżonego).



Rys. 33. Schemat pełnej bazy pomiarowej

Fig. 33. A scheme of the complete survey base

Współrzędne stanowisk i kąty pomierzone od baz pomiarowych:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &:= \alpha_{10\rho} & \alpha_{10} &= 49.9760 \text{ } ^\circ \\ \alpha_{20} &:= \alpha_{20\rho} & \alpha_{20} &= 49.9960 \text{ } ^\circ \\ & & \alpha_{30} &= 49.9775 \text{ } ^\circ \end{aligned}$$

Obliczenie przyrostów współrzędnych i długości boków:

$$\Delta x_{10} := x_0 - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.973 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_0 - y_1 \quad \Delta y_{10} = 50.021 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_0 \quad \Delta x_{01} = -49.973 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_0 \quad \Delta y_{01} = -50.021 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.706 \text{ m}$$

$$\Delta x_{20} := x_0 - x_2 \quad \Delta x_{20} = 49.983 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_0 - y_2 \quad \Delta y_{20} = -49.979 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_0 \quad \Delta x_{02} = -49.983 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_0 \quad \Delta y_{02} = 49.979 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.684 \text{ m}$$

$$\Delta x_{30} := x_0 - x_3 \quad \Delta x_{30} = -50.017 \text{ m}$$

$$\Delta y_{30} := y_0 - y_3 \quad \Delta y_{30} = -49.979 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_0 \quad \Delta x_{03} = 50.017 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_0 \quad \Delta y_{03} = 49.979 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.708 \text{ m}$$

Obliczenie promienia komina dla poziomu czwartego (4):

$$r_{14} := l_{10} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{1P} - \alpha_{1L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{14} = 2.616 \text{ m}$$

$$r_{24} := l_{10} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{2P} - \alpha_{2L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{24} = 2.618 \text{ m}$$

$$r_{34} := l_{10} \cdot \sin \left[ \left( \frac{\alpha_{3P} - \alpha_{3L}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] \quad r_{34} = 2.616 \text{ m}$$

Obliczenie średniego promienia z trzech stanowisk:

$$r_{4sr} := \frac{r_{14} + r_{24} + r_{34}}{3} \quad r_{4sr} = 2.617 \text{ m}$$

Obliczenie wysokości poziomu czwartego:

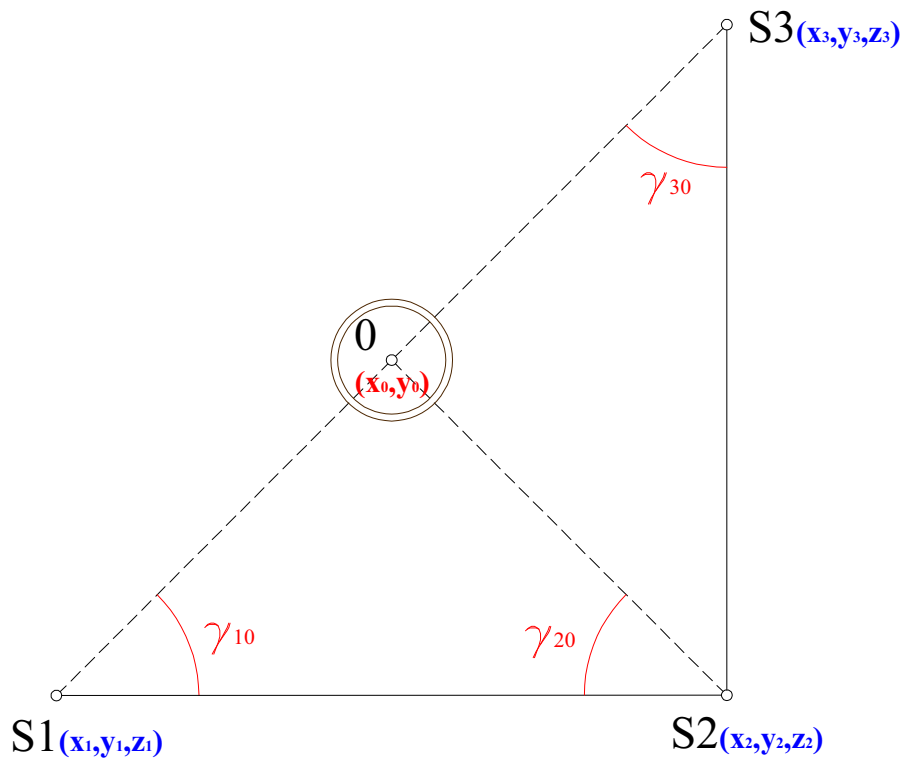
$$Z_{14} := z_1 + l_{10} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{1L} + V_{1P}}{2} \right) \cdot \text{grad} \right] + i_{h1} \quad Z_{14} = 155.677 \text{ m}$$

$$Z_{24} := z_2 + l_{20} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{2L} + V_{2P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h2} \quad Z_{24} = 155.674 \text{ m}$$

$$Z_{34} := z_3 + l_{30} \cdot \cos \left[ \left( \frac{V_{3L} + V_{3P}}{2} \right) \text{grad} \right] + i_{h3} \quad Z_{34} = 155.678 \text{ m}$$

$$Z_{04} := \frac{Z_{14} + Z_{24} + Z_{34}}{3} - \frac{Z_{11} + Z_{21} + Z_{31}}{3} + Z_{01}$$

$$Z_{04} = 39.131 \text{ m}$$



Rys. 34. Schemat do obliczenia kątów od bazy

Fig. 34. A scheme to the calculate angles from the survey base

$$\gamma_{10} := \text{atan} \left( \frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}} \right) \cdot \rho \quad \gamma_{10} = 49.9760 \text{ g}$$

$$\gamma_{20} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{20} = 49.9960 \text{ g}$$

$$\gamma_{30} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{30} = 49.9760 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów (kierunków zorientowanych) dla baz pomiarowych:

$$Az_{21} := 400 - \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{21}|}{|\Delta x_{21}|}\right) \rho \right) \quad Az_{21} = 300.0064 \text{ g}$$

$$Az_{12} := 200 - \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{12}|}{|\Delta x_{12}|}\right) \rho \right) \quad Az_{12} = 100.0064 \text{ g}$$

$$Az_{32} := 200 + \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{32}|}{|\Delta x_{32}|}\right) \rho \right) \quad Az_{32} = 200.0000 \text{ g}$$

$$Az_{23} := \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{23}|}{|\Delta x_{23}|}\right) \rho \quad Az_{23} = 0.0000 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów na oś komina z kątów obliczonych ze współrzędnych przybliżonych:

$$Az_{o10} := \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{10}|}{|\Delta x_{10}|}\right) \rho \quad Az_{o10} = 50.0304 \text{ g}$$

$$Az_{o20} := 400 - \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o20} = 350.0024 \text{ g}$$

$$Az_{o30} := 200 + \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o30} = 249.9760 \text{ g}$$

Obliczenie azymutów z kątów pomierzonych:

$$Az_{p10} := Az_{12} - \alpha_{10} \quad Az_{p10} = 50.0304 \text{ g}$$

$$Az_{p20} := Az_{21} + \alpha_{20} \quad Az_{p20} = 350.0024 \text{ g}$$

$$Az_{p30} := Az_{32} + \alpha_{30} \quad Az_{p30} = 249.9775 \text{ g}$$

Macierz współczynników (A) przy niewiadomych ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ):

$$A = \begin{pmatrix} -0.636963 & 0.636356 \\ 0.636836 & 0.636884 \\ 0.636403 & -0.636883 \end{pmatrix}$$

Macierz wyrazów wolnych L (wzór 28):

$$L = \begin{pmatrix} -0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0015 \end{pmatrix}$$

Macierz wag P:

$$P = \begin{pmatrix} 277227.723 & 0 & 0 \\ 0 & 291161.179 & 0 \\ 0 & 0 & 543689.32 \end{pmatrix}$$

Rozwiązując układ równań (26), otrzymuje się:

$$\Delta p := \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} \qquad \Delta p = \begin{pmatrix} -0.0008 \\ 0.0008 \end{pmatrix}$$

Wyrównane współrzędne osi komina:

$$w_4 := w_0 - \Delta p \qquad w_4 = \begin{pmatrix} 149.984 \\ 1050.020 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{04} \\ y_{04} \end{pmatrix} := w_4 \qquad \begin{pmatrix} x_{04} \\ y_{04} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149.984 \\ 1050.020 \end{pmatrix}$$

Ocena dokładności:

$$v := A \cdot \Delta p - L \qquad v = \begin{pmatrix} 0.0010 \\ 0.0000 \\ 0.0005 \end{pmatrix}$$

Warunek konieczny  $A^T P v = 0$

$$A^T P \cdot v = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ -0.0000 \end{pmatrix} \qquad - \text{warunek spełniony}$$

Obliczenie wartości błędu  $m_0$

$n := 3$  - liczba równań obserwacyjnych

$k := 2$  - liczba wyznaczanych niewiadomych

$$m_0 := \sqrt{\frac{v^T P \cdot v}{n - k}} \quad m_0 = 0.6423$$

Wyrównanie azymutów obliczonych z kątów pomierzonych:

$$Az_p := \begin{pmatrix} Az_{p10} \\ Az_{p20} \\ Az_{p30} \end{pmatrix} \quad Az_p = \begin{pmatrix} 50.0304 \\ 350.0024 \\ 249.9775 \end{pmatrix}$$

Azymuty po wyrównaniu:

$$\begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} := Az_p - v \begin{pmatrix} Az_{p10W} \\ Az_{p20W} \\ Az_{p30W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.0294 \\ 350.0024 \\ 249.9770 \end{pmatrix}$$

Obliczenie przyrostów i odległości z wyrównanych współrzędnych osi komina:

$$\Delta x_{10} := x_{04} - x_1 \quad \Delta x_{10} = 49.974 \text{ m}$$

$$\Delta y_{10} := y_{04} - y_1 \quad \Delta y_{10} = 50.020 \text{ m}$$

$$\Delta x_{01} := x_1 - x_{04} \quad \Delta x_{01} = -49.974 \text{ m}$$

$$\Delta y_{01} := y_1 - y_{04} \quad \Delta y_{01} = -50.020 \text{ m}$$

$$l_{10} := \sqrt{(\Delta x_{10})^2 + (\Delta y_{10})^2} \quad l_{10} = 70.706 \text{ m}$$

$$\Delta x_{20} := x_{04} - x_2 \quad \Delta x_{20} = 49.984 \text{ m}$$

$$\Delta y_{20} := y_{04} - y_2 \quad \Delta y_{20} = -49.980 \text{ m}$$

$$\Delta x_{02} := x_2 - x_{04} \quad \Delta x_{02} = -49.984 \text{ m}$$

$$\Delta y_{02} := y_2 - y_{04} \quad \Delta y_{02} = 49.980 \text{ m}$$

$$l_{20} := \sqrt{(\Delta x_{20})^2 + (\Delta y_{20})^2} \quad l_{20} = 70.685 \text{ m}$$

$$\Delta x_{30} := x_{04} - x_3 \quad \Delta x_{30} = -50.016 \text{ m}$$

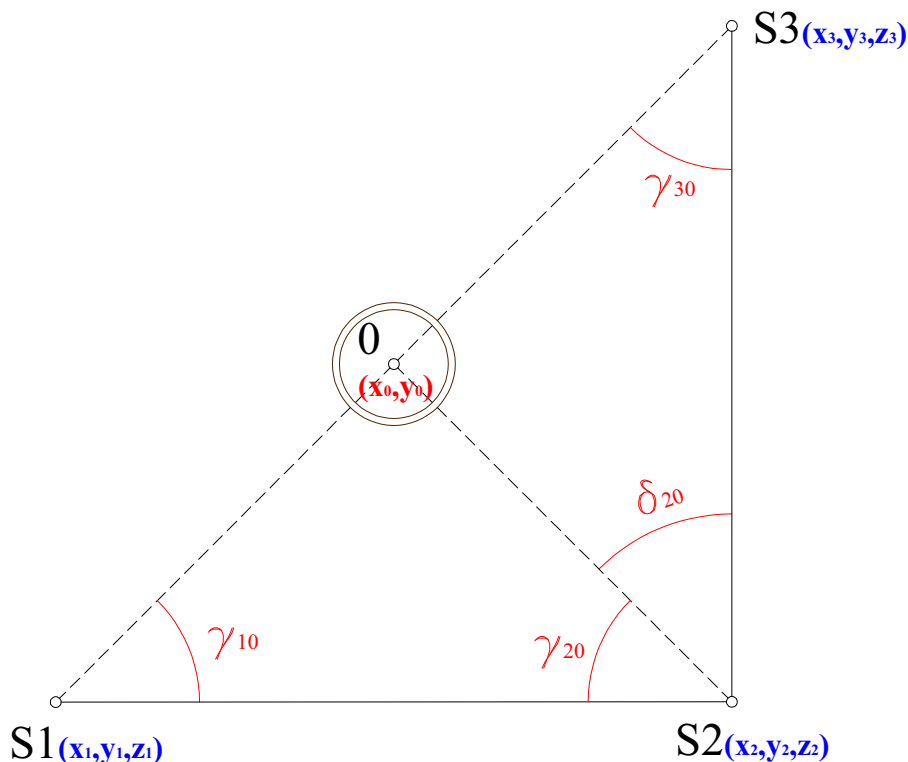
$$\Delta y_{30} := y_{04} - y_3 \quad \Delta y_{30} = -49.980 \text{ m}$$

$$\Delta x_{03} := x_3 - x_{04} \quad \Delta x_{03} = 50.016 \text{ m}$$

$$\Delta y_{03} := y_3 - y_{04} \quad \Delta y_{03} = 49.980 \text{ m}$$

$$l_{30} := \sqrt{(\Delta x_{30})^2 + (\Delta y_{30})^2} \quad l_{30} = 70.708 \text{ m}$$

Kąty od bazy obliczone ze współrzędnych wyrównanych osi komina:



Rys. 35. Schemat bazy pomiarowej po wyrównaniu współrzędnych osi komina

Fig. 35. A scheme of the survey base after settlement of the co-ordinate of the chimney

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{10} \cdot \Delta y_{12} - \Delta x_{12} \cdot \Delta y_{10}}{\Delta x_{10} \cdot \Delta x_{12} + \Delta y_{10} \cdot \Delta y_{12}}\right) \cdot \rho & \gamma_{10} &= 49.9770 \text{ } ^\circ \\ \gamma_{20} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{20} - \Delta x_{20} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{20} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{21}}\right) \cdot \rho & \gamma_{20} &= 49.9960 \text{ } ^\circ \\ \delta_{20} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{20} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{20}}{\Delta x_{20} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{20} \cdot \Delta y_{23}}\right) \cdot \rho & \delta_{20} &= 49.9976 \text{ } ^\circ \\ \gamma_{30} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{32} \cdot \Delta y_{30} - \Delta x_{30} \cdot \Delta y_{32}}{\Delta x_{32} \cdot \Delta x_{30} + \Delta y_{32} \cdot \Delta y_{30}}\right) \cdot \rho & \gamma_{30} &= 49.9770 \text{ } ^\circ \end{aligned}$$



Obliczenie ze współrzędnych kąta S1-S2-S3:

$$\gamma_{13} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta x_{21} \cdot \Delta y_{23} - \Delta x_{23} \cdot \Delta y_{21}}{\Delta x_{21} \cdot \Delta x_{23} + \Delta y_{21} \cdot \Delta y_{23}}\right) \cdot \rho \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ g}$$

Suma kątów  $\gamma_{20}$  i  $\delta_{20}$  obliczonych ze współrzędnych wyrównanych powinna się równać kątowi S1-S2-S3 po wyrównaniu.

$$\gamma_{20} + \delta_{20} = 99.9936 \text{ g} \quad \gamma_{13} = 99.9936 \text{ g} \quad - \text{warunek spełniony}$$

Obliczenie azymutów z kątów obliczonych ze współrzędnych wyrównanych:

$$Az_{o10W} := \operatorname{atan}\left(\frac{\Delta y_{10}}{\Delta x_{10}}\right) \rho \quad Az_{o10W} = 50.0294 \text{ g}$$

$$Az_{o20W} := 400 - \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{20}|}{|\Delta x_{20}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o20W} = 350.0024 \text{ g}$$

$$Az_{o30W} := 200 + \left( \operatorname{atan}\left(\frac{|\Delta y_{30}|}{|\Delta x_{30}|}\right) \rho \right) \quad Az_{o30W} = 249.9770 \text{ g}$$

Azymuty po wyrównaniu kątów:

$$Az_{p10W} = 50.0294 \text{ g}$$

$$Az_{p20W} = 350.0024 \text{ g}$$

$$Az_{p30W} = 249.9770 \text{ g}$$

Azymuty obliczone ze współrzędnych wyrównanych oraz azymuty wyrównane z poprawek są sobie równe, zatem obliczenia wykonano prawidłowo.

Podstawiamy wyrównane dane (x, y - osi komina) do równań poprawek:

$$v_1 = 0.0010 \text{ g}$$

$$v_2 = 0.0000 \text{ g}$$

$$v_3 = -0.0010 \text{ g}$$

- macierz błędów współrzędnych  $C_x := m_0^2 (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}$

$$C_x = \begin{pmatrix} 0.00000118 & 0.00000056 \\ 0.00000056 & 0.00000118 \end{pmatrix}$$

- błędy wyrównanych azymutów

$$m_{Az.} = \begin{pmatrix} 0.0007 \\ 0.0012 \\ 0.0007 \end{pmatrix}$$

- błędy poprawek

$$m_v = \begin{pmatrix} 0.0018 \\ 0.0014 \\ 0.0012 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0.5634 \\ 0.0006 \\ -0.8587 \end{pmatrix}$$

Błąd wyrównanego azymutu  $m_{v_i}$  musi być mniejszy od dokładności jego pomiaru  $m_{kat}$ , tj.  $m_{v_i} < m_{kat}$ .

- błędy współrzędnych

$$m_x := \sqrt{C_{x_{1,1}}} \quad m_x = 0.0011 \text{ m}$$

$$m_y := \sqrt{C_{x_{2,2}}} \quad m_y = 0.0011 \text{ m}$$

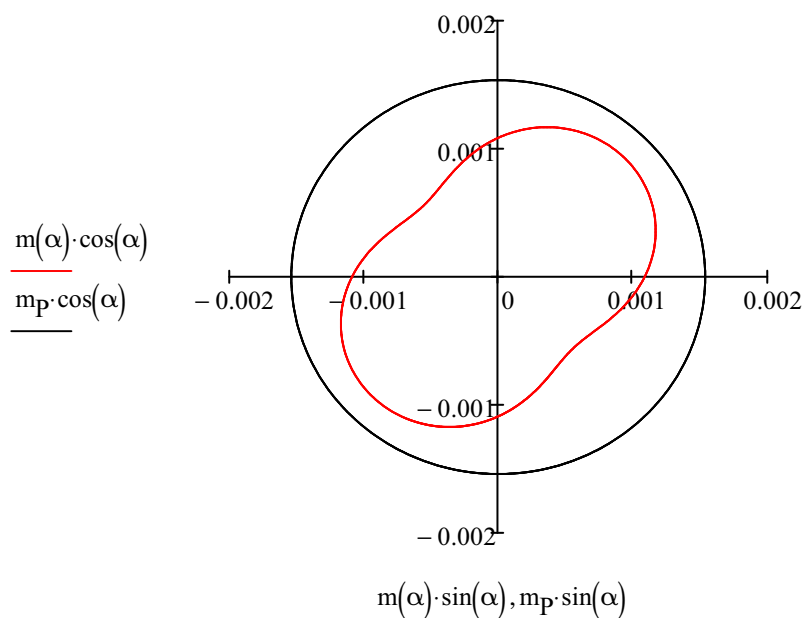
$$m_{xy} := C_{x_{1,2}} \quad m_{xy} = 0.00000056 \text{ m}$$

- błąd położenia punktu:

$$m_p := \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad m_p = 0.002 \text{ m}$$

- błąd położenia punktu w zadanym kierunku  $\alpha$

$$m(\alpha) := \sqrt{m_x^2 \cdot \cos(\alpha)^2 + m_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) + m_y^2 \cdot \sin(\alpha)^2}$$



**Rys. 36.** Elipsa błędów dla poziomu czwartego

**Fig. 36.** The errors ellipse for fourth height level

- kąt skręcenia elipsy dla ekstremalnych wartości błędu położenia punktu:

$$\alpha_C = 449.9900 \text{ }^\circ$$

$$\alpha_D = 149.9900 \text{ }^\circ$$

obliczenie maksymalnych wartości błędu położenia punktu:

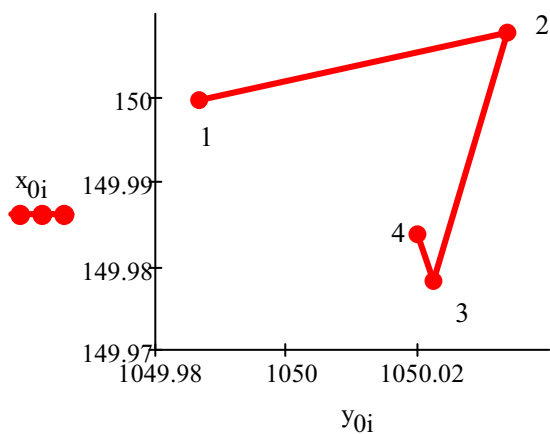
$$C := m(\alpha_C) \qquad C = 0.0013 \text{ m}$$

$$D := m(\alpha_D) \qquad D = 0.0008 \text{ m}$$

### 9. ZESTAWIENIE WSPÓLRZĘDNYCH OSI KOMINA DLA POSZCZEGÓLNYCH POZIOMÓW

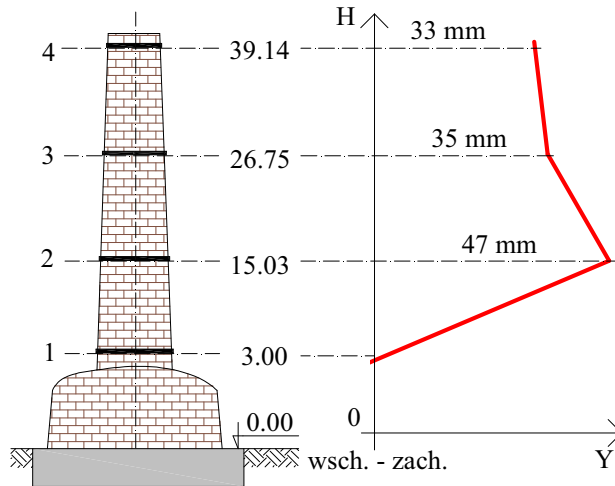
$$x_{0i} := \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ x_{04} \end{pmatrix} \quad x_{0i} = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 150.008 \\ 149.978 \\ 149.984 \end{pmatrix} \quad y_{0i} := \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ y_{03} \\ y_{04} \end{pmatrix} \quad y_{0i} = \begin{pmatrix} 1049.987 \\ 1050.034 \\ 1050.022 \\ 1050.020 \end{pmatrix}$$
$$Z_{0i} := \begin{pmatrix} Z_{01} \\ Z_{02} \\ Z_{03} \\ Z_{04} \end{pmatrix} \quad Z_{0i} = \begin{pmatrix} 3.00 \\ 15.03 \\ 26.75 \\ 39.13 \end{pmatrix}$$

#### 9.1 GRAFICZNE PRZEDSTAWIENIE WYNIKÓW POMIARÓW



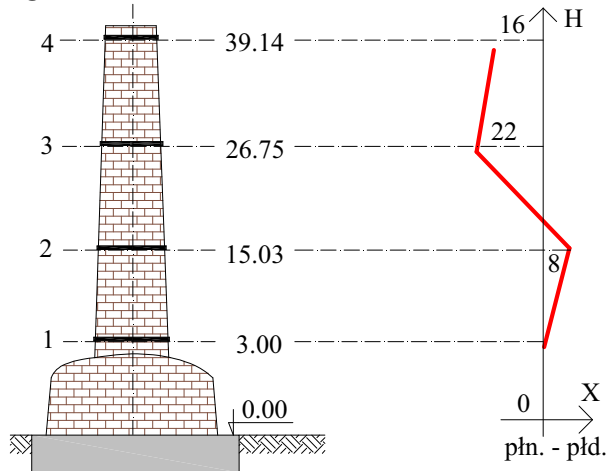
Rys. 37. Wykres odchylenia osi komina od pionu (widok z góry)

**Fig. 37.** A deviations graph of the chimney axis from the plumb line (view on the top).



**Rys. 38.** Wykres odchyień osi komina od pionu (widok w płaszczyźnie YO H)

**Fig. 38.** A deviations graph of the chimney axis from the plumb line (the top view YO H)



**Rys. 39.** Wykres odchyień osi komina od pionu (widok w płaszczyźnie XO H)

**Fig. 39.** A deviations graph of the chimney axis from the plumb line (the top view YO H)

## 10. UWAGI KOŃCOWE

Celem pomiarów i obliczeń było określenie odchylenia osi komina od pionu. Przyjęto następujące założenia: współczynniki wagowe obserwacji kątowych odpowiadają rzeczywistej dokładności pomiaru kierunku, natomiast współrzędne stanowisk pomiarowych przyjęto za bezbłędne. W przedstawionej poniżej analizie dokładności przeliczono i zestawiono wpływ błędów pomiarów kierunków dla ( $m_{kat}$ ):  $1^{cc}$ ,  $5^{cc}$ ,  $10^{cc}$ ,  $15^{cc}$ ,  $20^{cc}$ ,  $30^{cc}$ ,  $40^{cc}$ ,  $50^{cc}$  i  $100^{cc}$  na dokładność wyniku końcowego dla poziomu pierwszego.

**Tabela nr 1.** Zestawienie błędów wyznaczenia osi komina w zależności od dokładności pomiaru kierunku.

**Table 1.** A specification of errors in determination of the chimney axis depending on the accuracy of direction survey.

$m_{kat} [^{cc}]$	$1^{cc}$	$5^{cc}$	$10^{cc}$	$15^{cc}$	$20^{cc}$	$30^{cc}$	$40^{cc}$	$50^{cc}$	$100^{cc}$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	
[mm]	$m_x$	0,4	0,9	1,3	1,6	1,9	2,3	2,7	3,0	4,2
	$m_y$	0,4	0,9	1,3	1,6	1,9	2,3	2,7	3,0	4,2
	$m_p$	0,6	1,3	1,9	2,3	2,2	3,3	3,8	4,2	6,0
$m_0$	19,4	3,89	1,94	1,30	0,97	0,65	0,49	0,39	0,19	
[ $^{cc}$ ]	$v_1$	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14
	$v_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$v_3$	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14
[ $^{cc}$ ]	$m_{v1}$	$\sqrt{-0}$	$\sqrt{-0}$	2	9	14	25	35	45	95
	$m_{v2}$	$\sqrt{-0}$	$\sqrt{-0}$	$\sqrt{-0}$	$\sqrt{-0}$	3	18	29	39	90
	$m_{v3}$	$\sqrt{-0}$	$\sqrt{-0}$	2	9	14	25	35	45	95
$v_1 / m_{v1}$	4,7i	2,8i	-8,3	-1,6	-1,0	-0,6	-0,4	-0,3	-0,1	
$v_2 / m_{v2}$	0,0i	0,0i	0,0i	0,0i	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
$v_3 / m_{v3}$	-4,7i	-2,8i	8,3	1,6	1,0	0,6	0,4	0,3	0,1	

gdzie:  $\sqrt{-0}$  – oznacza pierwiastek z liczby ujemnej,  
 „i” – oznacza liczbę urojoną.

Obliczenie współrzędnych osi komina metodą wielokrotnego wcięcia kąowego w przód można interpretować jako wyznaczenie współrzędnych punktu osnowy poziomej zgodnie z wytycznymi technicznymi G-2.5 [5] (Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników, s. 49). Jeśli dla którejś obserwacji zależność  $v_i / m_{v_i} \geq 3$  jest spełniona, to powinna być ona szczegółowo sprawdzona. Błędne obserwacje należy skorygować i ponownie wyrównać.

Z danych zestawionych z powyższej tabeli wynika, że dokładność pomiaru kierunku (dla analizowanego zestawu danych) rzędu  $20''$  jest wystarczająca dla odległości stanowisk pomiarowych od komina zbliżonych jak w przeliczonym przykładzie, tj. do 100 m. Przedstawiony algorytm umożliwia wykonanie pełnej analizy dokładnościowej pomiaru. Zaprezentowany algorytm bez modyfikacji można wykorzystać do własnych obliczeń. Spośród wielu metod obliczeniowych wybrano metodę opartą na odniesieniu pomiarów kąowych do kierunków zorientowanych. Taki sposób podejścia umożliwia wykonanie obliczeń według przedstawionego algorytmu, niezależnie od sposobu nawiązania kąowego na poszczególnych stanowiskach. Może to być nawiązanie na sąsiednie stanowisko jak w zaprezentowanym przykładzie albo np. na punkt wyznaczony metodą GPS. W takim przypadku obliczenia należy rozpocząć od podania współrzędnych przybliżonych osi komina.

W wartościach błędów  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$ ,  $m_p$  i poprawek zawarte są błędy: obserwatora, instrumentów pomiarowych, zmiany geometrii trzonu komina w trakcie pomiarów, jak i niekołowość przekroju komina. Błąd średni jednostkowy  $m_0$  przyjmuje wartość zbliżoną do 1 dla dokładności pomiaru kierunku rzędu  $20''$ . Odchyłki większe o 20% od 1 świadczą o niewłaściwym wagowaniu lub o błędach występujących w obserwacjach. W takich przypadkach konieczna jest szczegółowa analiza danych, wprowadzenie odpowiednich zmian i ponowne wyrównanie.

#### **LITERATURA CYTOWANA**

- [1] CHOJNICKI W.: Geodezyjny rachunek wyrównania w zadaniach. PPWK, Warszawa 1968, s. 95-99.
- [2] CIESIELSKI R.: O zmianach stanu konstrukcji inżynierskich, ich przyczynach i sprawdzeniach pomiarowych. Prace IGIK. 2001. t. XLVIII, z. 102, s. 19-37.
- [3] HENNECKE F., WERNER H.: Ingenieurgeodäsie. Anwendungen im Bauwesen und im Anlagenbau. 2. bearbeitete Auflage. VEB Verlag für Bauwesen. Berlin. 1986, pp. 280-308.
- [4] OSADA E.: Geodezja. Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 2002, s. 397-398.

#### **CYTOWANE AKTY PRAWNE, NORMY TECHNICZNE, INSTRUKCJE I WYTYCZNE**

- [5] Główny Geodeta Kraju. Wytyczne techniczne G-2.5. Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników. GUGiK. Warszawa 2002.
- [6] Główny Urząd Geodezji i Kartografii. Instrukcja techniczna G-3. Geodezyjna obsługa inwestycji. Wyd. II. Warszawa 1980.
- [7] Ministerstwo Przemysłu Ciężkiego. Wytyczne wykonania geodezyjnych pomiarów masywnych budowli wieżowych. Załącznik nr 13 do instrukcji geodezyjnej resortu przemysłu ciężkiego. Wyd. Przemysłu Maszynowego WEMA. Warszawa 1976 r.
- [8] PN-N-02211, sierpień 2000. Geodezja. Geodezyjne wyznaczanie przemieszczeń. Terminologia podstawowa.
- [9] PN-88/b-03004. Kominy murowane i żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.



- [10] PN-93/B-03201. Konstrukcje stalowe. Kominy. Obliczenia i projektowanie.
- [11] PN-B-03204:2002. Konstrukcje stalowe. Wieże i maszty. Projektowanie i wykonanie.
- [12] Prawo budowlane. DzU 1994 nr 89, poz. 414 (z późniejszymi zmianami).
- [13] Prawo geodezyjne i kartograficzne. DzU z dnia 21 listopada 2000 r. nr 100. Poz. 1086. Obwieszczenie Ministra Rozwoju Regionalnego i Budownictwa z dnia 24 października 2000 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu ustawy – Prawo geodezyjne i kartograficzne.
- [14] Rozporządzenie Ministra Gospodarki Przestrzennej i Budownictwa z dnia 21 lutego 1995 r. w sprawie rodzaju i zakresu opracowań geodezyjno-kartograficznych oraz czynności geodezyjnych obowiązujących w budownictwie. DzU nr 25 z dnia 13 marca 1995 r. poz. 133.

#### **LITERATURA PRZEDMIOTU**

- [15] BARTKIEWICZ A., GAŁDA M., PIJANOWSKI L., RYCHLEWSKI G.: Ćwiczenia polowe z geodezji. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej. Rzeszów 1986, s. 89-98.
- [16] BERNASIK J.: Elementy fotogrametrii i teledetekcji. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH. Kraków 2003, s. 53-55
- [17] BRYŚ H., PRZEWŁOCKI St.: Geodezyjne metody pomiarów przemieszczeń. PWN. Warszawa 1998, s. 24-28.
- [18] Budownictwo betonowe. t. XII „Budowle przemysłowe”, część I i II. Arkady 1970/71.
- [19] Budownictwo betonowe. t. XIII „Zbiorniki, zasobniki, kominy i maszty. Arkady. Warszawa 1966.

- [20] CIESIELSKI R.: Obliczenia dynamiczne wysokich kominów żelbetowych. Budownictwo Przemysłowe. Nr 1-4/1954.
- [21] CZAJA J.: Geodezja inżyniersko-przemysłowa. Zbiór przykładów i zadań. Część druga. Wyd. IV. Wyd. AGH, Kraków 1992. Skrypt uczelniany 1319, s. 280-309.
- [22] FIJAK St.: Kominy przemysłowe. Gliwice 2005, s. 85-86.
- [23] GALAS B.: Fotogrametria w pracach inżynierskich. Wyd. Polit. Wrocławskiej. Wrocław 1976, s. 132-134.
- [24] GARGULA T.: Rachunek wyrównawczy. Przykłady opracowania ćwiczeń. Wyd. GEODPIS Andrzej Jagielski. Kraków 2005.
- [25] GIL J.: Pomiary geodezyjne w praktyce inżynierskiej. Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra 2005, s. 254-262.
- [26] Główny Geodeta Kraju. Wytyczne techniczne G-2.5. Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna. Projektowanie, pomiar i opracowanie wyników. GUGiK. Warszawa 2002.
- [27] Główny Geodeta Kraju. Instrukcja techniczna G-3. Geodezyjna obsługa inwestycji. Wyd. II Warszawa 1980.
- [28] GRALIŃSKI M.: Fotogrametria. III fotogrametria naziemna. Wyd. ART. Olsztyn 1988, s. 70-78.
- [29] GRUBER F.J., JOECKEL R.: Formelsammlung für das vermessungswesen. 13. Auflage. Treubner Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2007.
- [30] JANUSZ W.: Obsługa geodezyjna budowli i konstrukcji. PPWK. Warszawa 1975, s. 380-391.
- [31] JASIAK A., LELONKIEWICZ H., WÓJCIK M., WYCZAŁEK I.: Pomiary inżynierskie. Wyd. Politechniki Poznańskiej. Poznań 1999, s. 92-98.

- [32] KŁOŚ Cz.: Kominy. BA. Warszawa 1956.
- [33] KOBIAK J., STACHURSKI W.: Konstrukcje żelbetowe. Cz. II. Wyd. Arkady. Warszawa 1969, s. 229-276.
- [34] KRAL L.: Elementy budownictwa przemysłowego. Cz. I. PWN. Warszawa 1973.
- [35] KRAL L.: Elementy budownictwa przemysłowego, t. II. PWN. Warszawa 1973, s. 133-134.
- [36] KWAŚNIEWSKI J.: Pomiar odkształceń komina przemysłowego. Szczecińskie Towarzystwo Naukowe, Wydział Nauk Matematycznych i Technicznych. Tom I, Zeszyt 1. Szczecin 1959, s. 1-39.
- [37] LAZZARINI T.: Geodezyjne pomiary przemieszczeń budowli i ich otoczenia. PPWK. Warszawa 1977, s. 326-331; s. 365-371.
- [38] MELER M., PACEK M.: Kominy przemysłowe. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej. Koszalin 2001, s. 39-40.
- [39] Metody pomiarów konstrukcji budowlanych w profilaktyce i diagnostyce. Praca zbiorowa pod redakcją St. Przewłockiego. Wyd. Politechniki Łódzkiej. Łódź 1993, s. 121-132.
- [40] MIELNIK A.: Budowlane konstrukcje przemysłowe. PWN. Warszawa 1975, s. 395-515.
- [41] MONTI C., VASSENA G. The leaning tower of Pisa: the geodetic approach to the control of the deformations. Proceedings of 1<sup>st</sup> Turkish International Symposium on Deformations, Istanbul (Turkey), 5-9 September, 1994, pp. 1104-1114.
- [42] PAŚKO J.: Pomiar pionowości komina przemysłowego. Ćwiczenie nr 1 w pracy zbiorowej pod redakcją M. Pękalskiego: Ćwiczenia terenowe z geodezji inżynierskiej i miejskiej. Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2003, s. 5-51.

- [43] PAWŁOWSKI W., PRZEWŁOCKI St.: Pomiary inżynierskie metodami geodezyjnymi. Ćwiczenia z przykładami. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej. Łódź 1997, s. 54-64.
- [44] PRÓSZYŃSKI W., KWAŚNIAK M.: Niezawodność sieci geodezyjnych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2002.
- [45] RYKALUK K.: Konstrukcje stalowe: kominy, wieże, maszty. Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 2005.
- [46] SAAD B.: Deformation of minarets procedure and application. Proceedings of 1<sup>st</sup> Turkish International Symposium on Deformations, Istanbul (Turkey), 5-9 September, 1994, pp. 1115-1123.
- [47] SIECZKOWSKI J.M.: Zagadnienia projektowania konstrukcyjno-budowlanego zakładów przemysłowych. Wyd. Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1977, s. 302-348.
- [48] UREN J., PRICE W.F.: – Surveying for engineers. 4th edition. Palgrave Macmillan, New York 2006.
- [49] WIŚNIEWSKI Z.: Rachunek wyrównawczy w geodezji (z przykładami). Wydawnictwo UWM. Olsztyn 2005.
- [50] WŁODARCZYK W., KOWALSKI A., PIETRZAK K.: Projektowanie wybranych konstrukcji przemysłowych. Przykłady. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1995.
- [51] WOLSKI B., TOŚ C.: Geodezja inżyniersko-budowlana. Wyd. Politechniki Krakowskiej. Kraków 2005, s. 133-134.
- [52] WOLSKI B.: Monitoring metrologiczny obiektów geotechnicznych. Politechnika Krakowska. Kraków 2006, s.1-275.
- [53] ŻAK M.: Obsługa geodezyjna przemysłowego budownictwa wieżowego. Praca zbiorowa. Geodezja inżynierska. Tom II, Rozdz. 6. wyd. II, PPWK. Warszawa 1994 r., s. 278-380.

GEODEZJA INŻYNIERYJNA  
Wybrane zagadnienia  
Wyznaczenie odchylenia osi komina od pionu

Streszczenie

W monografii przedstawiono kompleksowo sposób określenia odchylenia osi komina od pionu metodą wielokrotnego wcięcia kąтового w przód. Monografia zawiera wprowadzenie teoretyczne, materiały z pomiarów polowych (dzienniki pomiarowe) pionowości osi komina wykonanych z trzech stanowisk oraz analityczne i graficzne opracowanie wyników pomiaru. W zaprezentowanym przykładzie obserwacjom geodezyjnym podlegały tworzące komin na czterech poziomach metodą dwusiecznych. Obliczenia wykonano algorytmem opracowanym przez autora w środowisku informatycznym Mathcad 14. W części teoretycznej podano wyprowadzenie równań poprawek i algorytm obliczeniowy wykorzystany w dalszej części monografii. W części praktycznej podano szczegółowo rozpisane obliczenia ze wskazówkami do korzystania z programu Mathcad. Bardzo istotną częścią opracowania wyników pomiarów terenowych jest ich wyrównanie. Przyjęto następujące założenia: współczynniki wagowe obserwacji kątowych odpowiadają rzeczywistej dokładności pomiaru kierunku, natomiast współrzędne stanowisk pomiarowych przyjęto za bezbłędne. W końcowej analizie dokładności przeliczono i zestawiono wpływ błędów pomiarów kierunków dla:  $1^{\text{cc}}$ ,  $5^{\text{cc}}$ ,  $10^{\text{cc}}$ ,  $15^{\text{cc}}$ ,  $20^{\text{cc}}$ ,  $50^{\text{cc}}$  i  $100^{\text{cc}}$  na dokładność wyniku końcowego dla poziomu pierwszego. Z analizy wynika, że dokładność pomiaru kierunku z dokładnością rzędu  $20^{\text{cc}}$  jest w zupełności wystarczająca dla odległości stanowisk pomiarowych od komina zbliżonych jak w przeliczonym przykładzie, tj. do 100 m.

Zaprezentowany algorytm bez modyfikacji można wykorzystać do własnych obliczeń. Spośród wielu metod obliczeniowych wybrano metodę opartą na odniesieniu pomiarów kątowych do kierunków zorientowanych. Taki sposób podejścia umożliwia wykonanie obliczeń według przedstawionego algorytmu, niezależnie od sposobu nawiązania kąтового na poszczególnych stanowiskach. Przedstawiony algorytm można wykorzystać do zagadnień, gdzie wykorzystuje się metodę wielokrotnego wcięcia kąтового w przód.

ENGINEERING SURVEY  
Selected problems  
Determining deviation of chimney axis  
from the plumb

Summary

The following monograph presents in a complex way a procedure of determining deviation of a chimney axis from the plumb by the multi-point intersection method. It contains a theoretical introduction, research materials gathered at site measurements (survey logs) of the chimney axis plumb-line executed from three different stations as well as graphic representations of the survey results. In the presented example, survey observations focused on generating lines of the chimney on four levels, with use of the bisector method. The calculations have been made with use of an algorithm worked out by the author in the Mathcad 14 and Fortran Power environment. The theoretical part contains derivation of correction equations and a calculation algorithm used in the further part of the monograph. The practical part presents detailed calculations with instructions how to use the Mathcad programme. Settlement of results constitutes a crucial part of the description of site survey results. The following assumptions have been made: weight coefficients of angle observations agree with actual direction survey accuracy, where the station coordinates have been assumed correct. In the final accuracy analysis the author has calculated and prepared a specification of influence of survey errors for  $1^{\text{cc}}$ ,  $5^{\text{cc}}$ ,  $10^{\text{cc}}$ ,  $15^{\text{cc}}$ ,  $20^{\text{cc}}$ ,  $50^{\text{cc}}$  and  $100^{\text{cc}}$  upon the accuracy of the final result for the first level. As it results from the analysis, the accuracy of direction survey of  $20^{\text{cc}}$  is good enough for the distance of survey stations from the chimney approximating at 100 m, as in the calculated example.

It can, with no modifications, be used for own calculations. From among numerous calculation methods, the one has been chosen which is based upon the relation of angle surveys towards the azimuth. Such an approach makes it possible to execute calculations in accordance with the presented algorithm, regardless the way of angular reference in individual stations. The presented algorithm can be used to problems where the method of multipoint intersection is used.