

Dynamiczne modele decyzyjne
z kryterium wypłaty uwzględniającym ryzyko



PAŃSTWOWA AKADEMIA
NAUK STOSOWANYCH W NYSIE

Agnieszka SZPARA

**Dynamiczne modele decyzyjne
z kryterium wypłaty
uwzględniającym ryzyko**

OFICyna WYDAWNICZA PANS W NYSIE
NYSa 2022

RECENZENCI

prof. dr hab. inż. Jerzy SZKUTNIK

dr hab. Tomasz SŁOŃSKI, prof. UE

REDAKCJA TECHNICZNA, KOREKTA

Ewa BERNAT

PROJEKT OKŁADKI

QUINCY digital studio Andrzej Pośpiech

© Copyright by Oficyna Wydawnicza PANS w Nysie
Nysa 2022

ISBN 978-83-65881-27-4

OFICyna WYDAWNICZA PANS W NYSIE

48-300 Nysa, ul. Armii Krajowej 7

tel.: 77 409 11 70

e-mail: oficyna@pans.nysa.pl

www.pans.nysa.pl/oficyna

Druk i oprawa:

Mazowieckie Centrum Poligrafii

+48 22 487 80 80

kontakt@mcpdruk.pl

Spis treści

1. Taksonomia i typologia ryzyka	13
1.1. Ryzyko a niepewność	19
1.2. Ryzyko i losowość	21
2. Miary ryzyka	24
2.1. Ilościowe miary ryzyka	24
2.1.1. Obliczanie wartości narażonej na ryzyko	33
2.1.2. Empiryczne oszacowanie ryzyka rynkowego	37
2.2. Krytyka wartości narażonej na ryzyko	39
3. Kryterium maksymalizacji oczekiwanej użyteczności	45
3.1. Awersja do ryzyka a funkcja użyteczności	48
3.2. Współczynnik awersji do ryzyka	49
3.2.1. Równoważnik pewności	52
3.2.2. Użyteczność wypłat pieniężnych	57
3.3. Metody doboru funkcji użyteczności	60
3.3.1. Metoda gwarantowanego równoważnika	60
3.3.2. Metoda wyboru parametru	61
3.3.3. Kwestionariusz	62
3.4. Kryterium maksymalizacji oczekiwanej użyteczności. Krytyczna analiza	64

4. Metody badania przepływów pieniężnych	68
4.1. Deterministyczne przepływy pieniężne	68
4.1.1. Metody oceny dynamicznych przepływów pieniężnych	72
4.2. Wady metod opartych na DCF	77
4.3. Opcje rzeczywiste	79
4.3.1. Rodzaje opcji rzeczywistych	81
4.4. Stopa zwrotu	85
4.5. Stochastyczne przepływy pieniężne	89
4.5.1. Przypadek, w którym wpływy z inwestycji mają rozkład normalny	94
4.5.2. Przypadek, w którym wpływy z inwestycji mają rozkład jednostajny	95
5. Wieloetapowy proces decyzyjny zarządzania kapitałem	99
5.1. Programowanie dynamiczne	99
5.2. Model	102
5.3. Proces optymalizacyjny	106
5.4. Badanie procesów decyzyjnych z zastosowaniem optymalizacji	111
5.4.1. Modele z deterministyczną stopą zwrotu	111
5.4.2. Modele ze stochastycznymi stopami zwrotu	114
5.5. Model zarządzania kapitałem w nieskończonym horyzoncie czasowym	129
6. Podsumowanie	139
7. Dodatek	144
7.1. Kwestionariusz	144
7.2. Postać równoważnika Krepsa-Porteusa dla rozkładu normalnego	149
7.3. Rozkład logarymiczno-normalny i jego charakterystyki	150

7.4.	Charakterystyki rozkładu jednostajnego	152
7.5.	Charakterystyki rozkładu trójkątnego	153
7.6.	Pochodna funkcji logarytmicznej	155
7.7.	<i>EIS</i> dla rekurencyjnej funkcji użyteczności	156
7.8.	Maksymalizacja funkcji agregującej	158

Symbole i oznaczenia stosowane w pracy

Symbol/ oznaczenie	Znaczenie
γ	współczynnik awersji do ryzyka
$\hat{\gamma}$	współczynnik absolutnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta
$\hat{\Gamma}$	współczynnik relatywnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta
α	poziom istotności
VaR	wartość narazona na ryzyko
$E[X]$	wartość oczekiwana zmiennej X
$Var[X]$	wariancja zmiennej X
$E[X]^\gamma$	moment centralny zmiennej X rzędu γ
$U(x)$	funkcja użyteczności zmiennej x
G	równoważnik pewności
b	współczynnik dyskonta
d	stopa dyskontowa
Z_i	losowy wpływ z inwestycji w okresie i
NPV	wartość bieżąca netto
C_t	funkcja konsumpcji w okresie t
I_t	funkcja inwestycji w okresie t
X_t	poziom kapitału w okresie t
r_t	stopa zwrotu z inwestycji w okresie t
J_t	całkowita użyteczność decydenta obliczona od okresu t
a_t	optymalna strategia w okresie t

Wprowadzenie

W obecnych czasach wolnorynkowa działalność gospodarcza jest naturalną przestrzenią dla przedsiębiorców. Podstawowym warunkiem rozwoju każdego przedsiębiorstwa w takim środowisku jest opracowanie prawidłowej strategii inwestycyjnej. Ma ona na celu przyniesienie poprawy efektywności działania, wzmocnienie pozycji rynkowej przedsiębiorstwa oraz poprawę wyniku finansowego [142]. Droga prowadząca do tego celu jest związana z realizacją szeregu przedsięwzięć inwestycyjnych dotyczących ciągłego weryfikowania wielkości produkcji, obniżki kosztów bądź lokowania nadwyżek kapitału oraz bycia konkurencyjnym. Zmiany zachodzące na współczesnych rynkach oraz rosnąca dynamika ich rozwoju nie ułatwiają przedsiębiorcom zadania. Wręcz przeciwnie, powodują one, że przedsiębiorca już w fazie planowania inwestycji zmagają się z niepewnością, a liczba nieprzewidywalnych czynników jest ogromna. Na finałowy efekt inwestycji mogą mieć wpływ nie tylko wewnętrzne uwarunkowania przedsiębiorstwa, takie jak jego struktura, kadra zarządzająca, kapitał ludzki, ale także czynniki zewnętrzne. Najbardziej istotne z nich to globalność rynku, przepływy informacji, bardzo wysoka konkurencyjność czy wreszcie rozwój nowych technologii. Dlatego proces identyfikacji zagrożeń oraz skuteczne próby ograniczenia niekorzystnych efektów decyzji podejmowanych w atmosferze niepewności są niezbędnym warunkiem przetrwania przedsiębiorstwa na rynku. Analiza opłacalności przedsięwzięć inwestycyjnych powinna zatem skupić się nie tylko na czynnikach mikro- oraz makroekonomicznych, ale także wziąć pod uwagę czynniki o charakterze globalnym. Zatem ich identyfikacja jest jednym z podstawowych zadań przedsiębiorstwa.

Czym jest inwestycja? Według Różańskiego [141] „poprzez inwestycję rozumie się najczęściej albo wydatek pieniężny, który ma

przynieść dochód temu, który podejmuje inwestycję, a więc inwestorowi (aspekt finansowy), bądź też proces, w którym następuje przekształcenie środków pieniężnych w inne dobra (aspekt rzeczowy)”. Inwestycja jest zaangażowaniem środków gospodarczych w przedsięwzięcie gospodarcze mające na celu pomnożenie majątku właściciela przez przysporzenie określonych dochodów [124]. Podobnie uważa Jaworski [81] twierdząc, że „działalność inwestycyjna polega na angażowaniu przez przedsiębiorstwo zasobów pieniężnych, w celu uznania przyszłych korzyści”. Inwestycje mogą być także pojmowane jako bieżące wyrzeczenie (rezygnacja z pewnej bieżącej konsumpcji) dla niepewnych przyszłych korzyści. Za poniesione wyrzeczenia inwestor oczekuje nagrody, która będzie w postaci zwrotu z inwestycji [70]. Zatem z każdą inwestycją związane są następujące jej cechy: czas realizacji, wielkość nakładów, przyszłe korzyści oraz ryzyko.

Podjęcie decyzji inwestycyjnej jest jednym z najtrudniejszych zadań przedsiębiorstwa. Sama realizacja inwestycji jest efektem długiego i żmudnego procesu analizy opłacalności inwestycji. Kierując się przedmiotem inwestycji, można wyróżnić następujące grupy: inwestycje rzeczowe, inwestycje finansowe oraz inwestycje w kapitał ludzki. Ta pierwsza klasa stanowi majątek trwały przedsiębiorstwa i należą do niej zakupy maszyn, urządzeń technicznych, gruntów, nieruchomości itd. Do drugiej grupy należą zakupy papierów wartościowych czy zakładanie lokat bankowych. Tradycyjne metody badania opłacalności inwestycji zawsze opierają się na założeniu stałości warunków inwestowania, tzn. przyszłe strumienie przepływów pieniężnych bazują na prognozach, które mogą okazać się nieaktualne w przyszłości. Spowodowane jest to oczywiście niepewnością czy nieprzewidywalnością rynku oraz dotyczy inwestycji rzeczowych i finansowych. W klasycznej metodzie zaktualizowanej wartości bieżącej zakłada się, że podstawowym kryterium wyboru odpowiedniego projektu inwestycyjnego jest maksymalizacja wartości oczekiwanej przyszłych dyskontowanych

wpływów pieniężnych związanych z realizacją projektu. Jednak ta metoda ignoruje zmiany warunków inwestowania, które sprawiają, że pewne inwestycje przestają być opłacalne, a inne nimi się stają. Dlatego autorka porusza zagadnienia związane z procesem opłacalności inwestycji uwzględniającym czynniki ryzyka. Większość problemów związanych z zarządzaniem przedsiębiorstwem czy procesami inwestycyjnymi jest z natury dynamiczna oraz stochastyczna. Oznacza to ewolucję takiego procesu w czasie i w warunkach niepewności. Programowanie dynamiczne jest jednym ze sposobów zapewniających ujednoczoną strukturę analizy ekonomicznej dotyczącej zarządzania bieżącymi procesami inwestycyjnymi przedsiębiorstwa. Autorka omawia też zagadnienia związane z wieloetapowymi procesami podejmowania decyzji inwestycyjnych wykorzystując powyższą metodę badawczą. Przedstawia model, w którym przedsiębiorca w warunkach niepewności i ryzyka w każdym okresie trwania przedsięwzięcia zobligowany jest do podjęcia decyzji inwestycyjnej. Metoda oparta o zasadę Bellmana [117] może być stosowana z powodzeniem nie tylko do problemów, w których horyzont czasowy jest skończony, ale także może służyć pomocą w znalezieniu optymalnego ciągu decyzji inwestycyjnych w dowolnie długim horyzoncie czasowym, np. gdy czas trwania inwestycji nie jest dokładnie znany. Ponadto, zasada programowania dynamicznego pozwala także na badanie modeli, w których przedsiębiorca (lub ogólniej przedsiębiorstwo) wykazuje się różnymi postawami wobec ryzyka.

Powyższe fakty i badania naukowe prowadzone na przestrzeni ostatnich lat skłoniły autorkę do sformułowania następujących celów rozprawy.

1. Przedstawienie nowatorskiego podejścia opartego o metodę programowania dynamicznego do wyznaczania optymalnego ciągu decyzji inwestycyjnych w wieloetapowych procesach decyzyjnych.
2. Wyliczenie optymalnych strategii inwestycji i konsumpcji w zadanym okresie czasowym, wyliczenie optymalnej funkcji

wartości, w zależności od wartości współczynnika ryzyka oraz elastyczności substytucji międzyokresowej, oraz różnych rozkładów zmiennej losowej, opisującej stopę zwrotu z inwestycji.

3. Wyznaczenie optymalnych strategii inwestowania i konsumpcji w modelu z nieskończonym horyzontem czasowym.
4. Uwzględnienie współczynnika wrażliwości na ryzyko w modelach dotyczących oceny inwestycji z losowymi wpływami. Budowa kryterium opartego na metodzie *NPV*.

Tak sformułowane cele pracy wymagają realizacji następujących celów częściowych:

- zdefiniowania i rozróżnienia definicji ryzyka i niepewności,
- przedstawienia miar ryzyka oraz probabilistycznych metod jego obliczania,
- przedstawienia teorii oczekiwanej użyteczności, jej wad i zalet,
- wprowadzenia pojęcia *równoważnika pewności*, następnie równoważników używanych w pracy do budowy modeli: równoważnika Krepsa-Porteusa oraz entropijnej miary ryzyka,
- przedstawienia metod oceny inwestycji, ze szczególnym uwzględnieniem metody *NPV*,
- implementacji metod zarządzania wieloetapowego do wyznaczenia optymalnej polityki inwestycji.

Tak postawiony cel pozwala na postawienie następujących tez:

- Optymalne strategie konsumpcji i inwestycji w wieloetapowym procesie decyzyjnym zależą od elastyczności substytucji międzyokresowej, zależą również od współczynnika wrażliwości na ryzyko inwestora.
- Wyniki uzyskane w modelu z nieskończonym horyzontem czasowym są zbieżne z wynikami uzyskanymi za pomocą modelu ze skończonym horyzontem czasowym.
- Rosnąca awersja do ryzyka osłabia zapaf inwestycyjny inwestora, pomimo niezmiennających się warunków inwestycji.

Rozdział 1

Taksonomia i typologia ryzyka

Złożoność działalności człowieka czy działalności przedsiębiorstwa sprzyja powstawaniu zagrożeń w ramach procesu decyzyjnego. Dlatego z niemal każdą decyzją związane jest ryzyko. Czym ono jest? Nie ma jednej definicji ryzyka [133]. *Słownik Języka Polskiego PWN* [149] podaje trzy definicje ryzyka:

1. możliwość, że coś się nie uda; przedsięwzięcie, którego wynik jest niepewny,
2. odważenie się na niebezpieczeństwo,
3. prawdopodobieństwo powstania szkody obciążające osobę poszkodowaną niezależnie od jej winy, jeśli umowa lub przepis prawny nie zobowiązywały innej osoby do wyrównania szkody.

Warto tu wspomnieć, że termin „ryzyko” wywodzi się od łacińskiego słowa *risicare*, co znaczy „odważyć się”. W tym ujęciu ryzyko jest zatem skutkiem określonego wyboru. *Słownik Oxford English Dictionary* [127] definiuje ryzyko jako „hazard, szansę pojawienia się złych konsekwencji, straty albo możliwość pomyłki”. Aven [10] bazując na krótkich, wybranych streszczeniach z ostatnich 20 lat, przedstawił koncepcję ryzyka i zaprezentował jej ewolucję w *Oxford English Dictionary* od 1679 roku. Następnie Veland i Aven [181] wykorzystali koncepcję ryzyka

przedstawioną w pracy [10] do przedyskutowania: jak perspektywa ryzyka wpływa na komunikację pomiędzy decydentami a analitykami ryzyka, zwykłymi ludźmi a ekspertami. Istotnie dla KarimiAzari [84] inżynierowie, projektanci widzą ryzyko z punktu widzenia technologicznego; pożyczkodawcy, kredytobiorcy, deweloperzy widzą go z perspektywy ekonomicznej czy finansowej. Stąd można zasugerować, iż ryzyko to zdarzenie lub decyzja, która może niekorzystnie wpłynąć na działalność przedsiębiorstwa i uniemożliwić bądź przeszkodzić w osiągnięciu zamierzonych celów. Innymi słowy ryzyko może być zdefiniowane jako niepewne zdarzenie albo zbiór okoliczności, które będą miały wpływ na osiągnięcie jednego lub większej ilości celów. Podobną definicję podali Yang [185] oraz Bakr, Hagla, Nayer i Rawash [11]. Określili oni ryzyko jako prawdopodobieństwo, że zdarzenie albo decyzja będą mieć negatywny skutek dla danego przedsiębiorstwa. Natomiast dla Mazouni [113], ryzyko jest wewnętrzną własnością danej decyzji i mierzone jest takimi czynnikami jak: natężenie czy częstość występowania negatywnych efektów. W polskiej literaturze występuje wiele definicji ryzyka. Inwestorom angażującym swój kapitał stale towarzyszy ryzyko, ponieważ inwestując dokonują oni zmiany w strukturze swych aktywów. Ryzyko inwestowania jest identyfikowane z możliwym zagrożeniem lub szansą na osiągnięcie oczekiwanych korzyści oraz związane jest z niebezpieczeństwem wystąpienia efektu inwestowania niezgodnego z oczekiwaniami. Efekt ten może być gorszy lub lepszy od zakładanego wcześniej. Jajuga [75] podaje dwie koncepcje ryzyka spotykane w naukach ekonomicznych:

1. negatywna koncepcja ryzyka - możliwość, że coś się nie uda, zagrożenie,
2. neutralna koncepcja ryzyka - nieznanym wynikiem przedsięwzięcia, zagrożenie lub szansa.

W rozwoju teorii i praktyce pojęcie ryzyka ma charakter wieloaspektowy i wieloznaczny. Istnieje wiele pojęć definiujących ryzyko [157], ponieważ może być rozumiane na wiele sposobów i może oznaczać [125, 177]:

- możliwość poniesienia straty,
- prawdopodobieństwo poniesienia straty,
- rozbieżność pomiędzy rzeczywistymi i oczekiwanymi wynikami,
- prawdopodobieństwo wyniku innego od oczekiwanego,
- możliwość wystąpienia niepożądanych zdarzeń,
- warunki, w których występuje możliwość straty,
- niepewność, niebezpieczeństwo, możliwość niezrealizowania celu, spodziewanych efektów założonych w chwili podejmowania decyzji inwestycyjnej.

W książce [55] autorzy przez ryzyko rozumieją wszystkie zdarzenia nieprzewidywalne, zarówno pozytywne, jak i negatywne. Ryzyko związane jest z nieznaną przyszłą wartością czynników wpływających na efektywność inwestycji. Można stwierdzić, że niepewność jest pojęciem szerszym, zaś ryzyko jest pochodną niepewności i ma charakter wymierny. Ryzyko można zidentyfikować, zmierzyć przy zastosowaniu odpowiednich metod oraz poddać weryfikacji empirycznej. W ocenie efektywności ekonomicznej niepewność i ryzyko są funkcją dwóch grup czynników [126]: liczby i jakości informacji będących w dyspozycji inwestora oraz zmienności warunków realizacji i eksploatacji inwestycji. W związku z tym, ryzyko i niepewność należy rozpatrywać z uwzględnieniem następujących faktów.

1. Niepewność ma wymiar informacyjny. Jej przyczyną jest brak dostępu do informacji, brak potwierdzenia ich wiarygodności. W związku z tym, nie można ustalić prawdopodobieństw wystąpienia możliwych sytuacji wpływających na wynik inwestycji oraz ustalić prawdopodobieństw oczekiwanych wyników inwestowania. Helton

[64] wskazuje na dwoistą naturę niepewności i wyróżnia jej dwa rodzaje:

- niepewność losowa (*ang. aleatory uncertainty*) – rodzaj niepewności wynikający z faktu, że system może zachowywać się w sposób losowy (przypadkowy, stochastyczny); inne określenia tego rodzaju niepewności to: stochastyczna niepewność (*ang. stochastic uncertainty*), niepewność typu A (*ang. type A uncertainty*), niepewność podstawowa (nie dająca się zmniejszyć - *ang. irreducible uncertainty*), zmienność (*ang. variability*), obiektywna niepewność (*ang. objective uncertainty*);
 - niepewność poznawcza (*ang. epistemic uncertainty*) – rodzaj niepewności wynikający z braku wiedzy o systemie, będący cechą badacza dokonującego analizy; inne określenia tego rodzaju niepewności to: subiektywna niepewność (*ang. subjective uncertainty*), niepewność typu B (*ang. type B uncertainty*), niepewność podlegająca zmniejszeniu (*ang. reducible uncertainty*), niepewność stanu wiedzy (*ang. state of knowledge uncertainty*), niewiedza (*ang. ignorance*).
2. Ryzyko ma charakter finansowy, ponieważ można dokonać jego pomiaru, w sytuacji gdy istnieją dostępne informacje, które umożliwiają ocenę możliwych strat lub zysków związanych z daną inwestycją. Wyznacznikiem ryzyka jest osiągnięcie wyników różniących się od zakładanych i oczekiwanych przez inwestora. W racjonalnym zarządzaniu inwestycjami jest wymagane zastąpienie niepewności ryzykiem, w którym relacja między prawdopodobieństwem sukcesu a jego kosztami może być dość wyraźnie określona [129]. Ryzyko jest niepewnością, którą ponosi inwestor i związane jest z akcją. Dopóki inwestor nie podejmuje działań dotyczących inwestycji, nie można mówić o ryzyku

nieotrzymania oczekiwanych wyników. Inwestor ma świadomość, że istnieje niepewność co do przyszłych warunków, lecz dopóki nie podejmuje żadnych kroków, ta niepewność nie ma wpływu na wyniki otrzymywane przez przedsiębiorstwo.

W dyskusjach z ludźmi wyrazy towarzyszące słowu *ryzyko* lub pojawiające się z tym słowem to: zdarzenie, decyzja, konsekwencja oraz niepewność. Szczególnie zauważalne jest pojęcie straty związane z ryzykiem, a nie zauważa się, że może ono również prowadzić do potencjalnego zysku. Często ryzyko jest definiowane jako możliwe zdarzenia, których niekorzystne konsekwencje są trudne do zaakceptowania lub nawet niedopuszczalne [164].

Rodzaje ryzyka

W literaturze rozważa się wiele klasyfikacji ryzyka i wiele jego typów, w zależności od rodzaju rozważanej działalności [65, 75, 107, 177, 186].

- Ryzyko polityczne - związane z sytuacjami i decyzjami politycznymi podejmowanymi w kraju.
- Ryzyko rynkowe - wynikające ze zmian cen na rynkach finansowych i innych związanych z nimi rynkach. Ryzyko to można podzielić na cztery grupy: ryzyko kursu walutowego, ryzyko stopy procentowej, ryzyko cen akcji oraz ryzyko cen towarów.
- Ryzyko kredytowe - związane z możliwością niedotrzymania warunków przez drugą stronę kontraktu i dotyczy wszystkich sytuacji, gdy jedna strona kontraktu ma zobowiązania wobec strony drugiej.
- Ryzyko operacyjne - ryzyko straty wynikające z nieprawidłowo działających procesów wewnętrznych w przedsiębiorstwie, ludzi i systemów, a także ze zdarzeń zewnętrznych.
- Ryzyko finansowe - ryzyko związane z nadmiernym finansowaniem inwestycji kredytem.
- Ryzyko płynności - związane z trudnością likwidacji inwestycji.

- Ryzyko zasobów - związane z możliwością zagrożenia dostępu do zasobów.
- Ryzyko inflacji - związane ze zmianą stopy inflacji.
- Ryzyko prawne - dotyczące przekroczenia odpowiednich przepisów prawnych. Obejmuje ono trudności związane z egzekucją warunków zawartych w umowach i porozumieniach.
- Ryzyko społeczne - związane z klimatem społecznym dla działalności inwestycyjnej, tradycją pracy, kulturą, zamożnością czy religią.
- Ryzyko technologiczne - związane z dyfuzją innowacji.
- Ryzyko wojny i terroryzmu - związane z możliwością wojny i innych wrogich aktów.

Należy również wspomnieć, że występują rodzaje ryzyka specyficzne dla pewnych podmiotów (np. ryzyko ubezpieczeniowe).

W literaturze spotkać można również pojęcie ryzyka biznesowego. Przez ryzyko biznesowe należy rozumieć możliwość wystąpienia strat będących efektem wydarzeń lub zmian mających swe źródło w otoczeniu, w którym prowadzona jest dana działalność, a także strat wynikających z podjętych decyzji, braku podjęcia odpowiednich decyzji we właściwym terminie lub z błędów podczas wdrażania ustaleń. Źródłem ryzyka biznesowego jest zatem brak reakcji lub niewłaściwa reakcja na zmiany pojawiające się w otoczeniu biznesowym. Poziom tego ryzyka należy monitorować i odpowiednio nim zarządzać, gdyż brak kontroli nad tym obszarem może zagrażać realizacji celów strategicznych firmy. Ryzyko to zalicza się jednak do grupy ryzyk trudnomierzalnych.

Każdy z wymienionych rodzajów ryzyka można skwantyfikować, czyli oszacować prawdopodobieństwo wystąpienia jego skutków w określonej sytuacji. W tym celu należy posłużyć się metodami rachunku prawdopodobieństwa. Metody te są tematem rozważań w następujących rozdziałach.

1.1. Ryzyko a niepewność

Konieczność identyfikacji i weryfikacji ryzyka wynika z możliwości osiągnięcia oczekiwanych przez inwestora korzyści z inwestycji lub uniknięcia strat. Przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych możemy wyróżnić trzy rodzaje zachowań inwestorów [2, 60, 75, 109, 126, 182]:

- Preferowanie ryzyka i jego skutków (hazardzista) - inwestor podejmuje decyzje nawet wtedy, gdy prawdopodobieństwo straty przewyższa prawdopodobieństwo zysku. Inwestor jest skłonny ponieść większe nakłady w celu podjęcia decyzji o wyższym ryzyku.
- Neutralność wobec ryzyka - inwestor nie podejmuje decyzji, gdy prawdopodobieństwo osiągnięcia zysku jest zbyt małe. Inwestor nie zwraca uwagi przy podejmowaniu decyzji na wielkość ryzyka.
- Awersja do ryzyka - inwestor oczekuje, że prawdopodobieństwo zysku będzie większe niż straty. Inwestor podejmuje ryzyko wtedy, gdy oczekuje rekompensaty w postaci premii. Awersja do ryzyka zależy również od kapitału inwestora. Im bogatszy inwestor tym łatwiej jest mu pogodzić się ze stratą.

Modele podejmowania decyzji inwestycyjnych zakładają, że inwestorzy działają racjonalnie i charakteryzują się awersją do ryzyka (mają wklęsłą funkcję użyteczności, patrz Rozdział 2). W pracy rozpatrywane będą modele, które uwzględniają stosunek inwestora do ryzyka. Należy wspomnieć, że ryzyko i niepewność związane są z czasem [122]. Im dłuższy czas inwestycji, tym mniej jest się pewnym osiągnięcia zamierzonych efektów, ponieważ szacowanie w chwili obecnej przyszłej stopy zwrotu jest mniej dokładne ze względu na mniejszą pewność działalności i zmieniających się warunków otoczenia. Niepewność i ryzyko związane są ze stopą zwrotu z inwestycji. Im większa niepewność uzyskania zaplanowanych przepływów pieniężnych, tym większa jest ich zmienność, czyli rozrzut wokół wartości oczekiwanej. Decyzje

charakteryzujące się większym ryzykiem mogą przynieść większy zysk lub stratę niż w przypadku inwestycji charakteryzujących się mniejszym ryzykiem. Zatem pojawia się problem dywersyfikacji portfela. Dywersyfikacja taka opiera się na założeniu, że bezpieczniej jest realizować wiele mniejszych inwestycji o takiej samej oczekiwanej stopie zwrotu niż jedną dużą inwestycję. Należy również wspomnieć, iż ryzyko ma swoją cenę, która może być mierzona np. stopą procentową wyrażającą poniesione ryzyko w zamian za oczekiwany dochód. Inwestor akceptując dany poziom ryzyka, spodziewa się rekompensaty uwzględniającej premię za ryzyko w postaci odpowiedniej stopy zwrotu. Oznacza to konieczność pomiaru ryzyka i podjęcie działań dostosowujących jego wielkość do poziomu akceptowalnego przez inwestora.

W krajach wysoko rozwiniętych dla celów analizy, ograniczania i zabezpieczania się przed ryzykiem, rozwinęła się dyscyplina „risk management” służąca zarządzaniu ryzykiem. Zarządzanie ryzykiem finansowym w instytucji polega na projektowaniu i wdrażaniu struktury czasowej przepływów pieniężnych, w celu osiągnięcia pożądanego poziomu ryzyka. Metody zarządzania ryzykiem:

1. metody korygowania efektywności projektu inwestycyjnego - polegają one na korektach wybranych parametrów rachunku efektywności inwestycji i tzw. narzutach procentowych;
2. analiza wrażliwości i prognozy rentowności - polega na zmianach różnych rodzajów nakładów i efektów będących elementami rachunku oraz na wyznaczeniu dla przedsiębiorstwa wartości krytycznych związanych z realizacją danej inwestycji. Narzędzie, które służy do tych analiz to: próg rentowności, okres zwrotu zaangażowanego kapitału, margines bezpieczeństwa. Wynikiem metody jest ocena wartości krytycznych wariantów inwestycji;
3. metody probabilistyczno-statystyczne - szacowanie i pomiar ryzyka metodami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki

- matematycznej. Chodzi przede wszystkim o szacowanie oczekiwanej wartości zdyskontowanej netto (NPV);
4. metody operacyjne (w tym teoria gier) - stosuje się w warunkach niepewności wcześniej zdefiniowanej.

1.2. Ryzyko i losowość

Niezależnie od wszystkich kontekstów, ryzyko ściśle związane jest z losowością [26, 29, 38, 68, 73, 109, 126, 140]. Losowość jest dobrze zdefiniowanym pojęciem, gdyż w 1933 roku rosyjski matematyk Kołmogorow [92] podał aksjomatyczną definicję losowości i prawdopodobieństwa. Ta definicja i towarzysząca jej teoria (choć z kontrowersyjnymi aspektami) stanowi podstawę do ilościowego zarządzania ryzykiem.

W ujęciu Kołmogorowa model probabilistyczny jest opisany przez trójkę (Ω, \mathcal{F}, P) . Element ω zbioru Ω reprezentuje realizację eksperymentu, a w ekonomii często odnosi się do niepewnego stanu natury. Wyrażenie „prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A ” jest oznaczone przez $P(A)$, gdzie A jest elementem zbioru \mathcal{F} , czyli zbioru wszystkich możliwych zdarzeń. Należy tu podkreślić, że system podany przez Kołmogorowa pozwala na przetłumaczenie naszej intuicji na temat losowości w zwięzły, aksjomatyczny język z jasnymi regułami. Rozważmy następujące życiowe sytuacje: inwestor decydujący o kapitale czy inwestycjach przedsiębiorstwa, firma ubezpieczeniowa sprzedająca polisę ubezpieczeniową oraz pożyczkobiorca spłacający raty kredytu zaciągniętego w obcej walucie. Wszystkie te powyższe przypadki mają jeden wspólny mianownik: niepewna przyszła wartość produktu czy dobra. Zatem losowość i związana z nią niepewność grają decydującą rolę w ocenie produktu czy dobra będącego w rękach inwestora, firmy ubezpieczeniowej czy pożyczkobiorcy.

Aby móc modelować takie i podobne sytuacje, zdefiniowano jednookresową pozycję ryzyka (ryzyko) X jako funkcję na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) . Ta funkcja jest nazywana zmienną losową. Najczęściej modelowanie ryzyka X związane jest z jego dystrybuantą $F_X(x) = P(X \leq x)$, czyli prawdopodobieństwem, że pod koniec ustalonego okresu wartość ryzyka będzie mniejsza bądź równa wartości x .

Rozkłady zmiennych losowych dzielimy na dyskretne (skokowe) i ciągłe. Dla skokowej zmiennej losowej określone są prawdopodobieństwa, natomiast dla zmiennej ciągłej - funkcja gęstości. W literaturze zebrano najczęściej występujące rozkłady, wśród których prym wiodzie rozkład normalny, którym można opisać wiele naturalnych zjawisk. Również wiele modeli ekonomicznych jest opartych na tym rozkładzie. Przez wiele lat w teorii finansów panowało przekonanie, że empiryczne stopy zwrotu aktywów finansowych można modelować, wykorzystując normalny rozkład prawdopodobieństwa. Bazując na tym założeniu zbudowano wiele kluczowych dla praktyki finansów modeli. Opiera się na nim między innymi teoria portfelowa Markowitza, model wyceny dóbr kapitałowych CAPM czy też model wyceny opcji Blacka-Scholesa. W pracy przedstawiono modele, w których stopa zwrotu ma rozkład normalny a także jednostajny, trójkątny i logarytmiczno-normalny.

Podsumowanie

W tym rozdziale autorka przybliżyła pojęcie ryzyka, dokonała przeglądu definicji ryzyka oraz niepewności, przedstawiła i opisała rodzaje ryzyka. Opisała również postawy zachowań inwestorów przy podejmowaniu ryzykownych decyzji inwestycyjnych. Stosunek decydenta do podejmowania ryzyka jest bardzo istotny dla celów tej pracy.

Celem pracy jest rozważanie i studiowanie ilościowego ryzyka, ujęcie go za pomocą dostępnych w probabilistyce metod oraz modeli stochastycznych. Warto tu wspomnieć, że słowo „stochastyczny” pochodzi z greckiego słowa *stochazesthai*, czyli sztuka zgadywania, lub od słowa *stochastikos*, czyli uzdolniony w celowaniu, ponieważ *stochos* oznacza „cel”. W pracy autorka poświęciła uwagę bardziej „umiejętności w celowaniu aniżeli zgadywaniu”. W kolejnym rozdziale przedstawione zostaną miary ryzyka wraz z ich zastosowaniem.

Rozdział 2

Miary ryzyka

Inwestorzy na rynku kapitałowym na co dzień stykają się z ryzykiem i dlatego jest to szerokie pole do stosowania różnych metod zarządzania nim. Ostrożny inwestor pragnie uniknąć lub zminimalizować ryzyko inwestycji, dlatego swój portfel inwestycyjny opiera na kompromisie pomiędzy ryzykiem straty a możliwością zysku. Budowa takiego portfela możliwa jest dzięki użyciu ilościowych miar ryzyka.

2.1. Ilościowe miary ryzyka

Ryzyko może być podzielone na kilka kategorii. Przykładowo, ryzyko *rynkowe* jest związane z aktywami, które są łatwo zbywalne na rynku, czyli takimi jak bony czy akcje. Portfel składający się z powyższych papierów może ulegać zmianie każdego dnia, dlatego jego przewidywana wartość na dzień następny może być szacowana metodami probabilistycznymi. Natomiast ryzyko *nierynkowe* ma zastosowanie do papierów wartościowych, które nie są wyceniane na rynku. Przykładem może być inwestycja w prywatną firmę lub pożyczka. Brak płynności dla tych nierynkowych inwestycji sprawia, że są one trudne do wyceny.

Kolejną kategorią jest ryzyko *kredytowe*, będące ryzykiem wypłacalności pożyczkobiorcy. Jest ono kombinacją ryzyka rynkowego i nierynkowego, ponieważ ta niewypłacalność może być spowodowana przynajmniej w części przez rynkowe uwarunkowania.

Niezależnie od rodzaju ryzyka, każdy inwestor stara się je zredukować do akceptowalnego przez siebie poziomu. Prawo rynkowe mówi, że wraz ze wzrostem poziomu ryzyka rośnie żądana stopa zwrotu. Inwestor pragnie skutecznie zredukować ryzyko, nie tracąc przy tym zbyt wiele na oczekiwanej stopie zwrotu, musi zatem skutecznie nauczyć się to ryzyko mierzyć.

Podstawową koncepcją teoretyczną, stosowaną w zarządzaniu ryzykiem, a przede wszystkim służącą jego pomiarowi, jest zmienna losowa, opisująca losową stopę zwrotu z inwestycji. Każda taka zmienna losowa charakteryzowana jest przez rozkład, który może być dyskretny (skokowa zmienna losowa) lub ciągły. Miary ryzyka możemy podzielić na trzy kategorie [75]:

1. wartości dystrybuanty,
2. kwantyle,
3. miary zmienności.

Kwantyle i wartości dystrybuanty mogą być stosowane jedynie jako miary zagrożenia, które opierają się na wyliczeniu prawdopodobieństwa pewnych niepożądanych zmian.

Pomysł pomiaru ryzyka za pomocą miar zmienności wywodzi się z teorii portfelowej Markowitza [111]. Zakłada on, że im większa zmienność stopy zwrotu, tym większe jest ryzyko, ponieważ oczekiwana stopa zwrotu może się bardzo różnić od zrealizowanej. Klasyczną miarą zmienności jest odchylenie standardowe stóp zwrotu z inwestycji. Aby podać jego wzór należy najpierw zdefiniować oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji. Przez r oznaczono zmienną ryzyka. W Tabeli 1 podano wzory na wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe dla zmiennej ryzyka.

Tabela 1. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe dla dyskretnej i ciągłej zmiennej ryzyka. Źródło: [8, 23, 71, 92, 126, 150, 176, 188]

Rodzaj zmiennej ryzyka	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe
Dyskretna (skokowa)	$R = \sum_{i=1}^k p_i r_i$	$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^k p_i [r_i - R]^2}$
Ciągła	$R = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [x - R]^2 f(x) dx}$

Oznaczenia:

- p_i jest prawdopodobieństwem uzyskania wartości r_i ,
- $f(x)$ jest funkcją gęstości rozkładu zmiennej ryzyka,
- R jest wartością oczekiwaną stopy zwrotu.

Statystyczne miary ryzyka znajdują zastosowanie w analizie *ex post* opartej na danych historycznych. Wyliczenie tych miar staje się możliwe, gdy dane historyczne są dostępne. Ponadto należy też założyć, że przyszłość będzie podobna do przeszłości. Odchylenie standardowe jest probabilistyczną miarą rozrzutu zmiennej wokół jej oczekiwanej wartości. Jest więc miarą zmienności, stanowiąc jednocześnie miarę ryzyka związanego z daną inwestycją. Im większe odchylenie, tym większe rozproszenie, a tym samym większe ryzyko.

W przypadku, gdy porównywane są projekty o różnych oczekiwanych stopach zwrotu i różnych poziomach odchyień standardowych stosowany jest tzw. współczynnik zmienności. Zdefiniowany jest on następująco:

$$v = \frac{\sigma}{E(r)}.$$

Większa wartość współczynnika zmienności wskazuje, że jedna jednostka stopy zwrotu obarczona jest wyższym ryzykiem.

Kwantyle rozkładu

W pomiarze ryzyka za pomocą kwantyli stosuje się następujący wzór:

$$P(R \leq q_\alpha) = \alpha,$$

gdzie:

- q_α - kwantyl rozkładu rzędu α ,
- α - poziom istotności.

W tej metodzie wartość prawdopodobieństwa jest znana. Należy z tego wzoru wyliczyć kwantyl rozkładu rzędu α . Inną nazwą tego kwantyla jest stosowane w literaturze pojęcie poziomu bezpieczeństwa, ponieważ im niższa wartość kwantyla tym wyższe ryzyko.

Wartości dystrybuanty rozkładu

Wykorzystuje się tu następujący wzór

$$P(R \leq R_\alpha) = \alpha,$$

gdzie:

- R_α - ustalona wartość stopy zwrotu,
- α - wartość dystrybuanty (poziom istotności).

Dzięki tej formule wyznaczane jest prawdopodobieństwo, że zmienna ryzyka nie przekroczy pewnej ustalonej wielkości. Interpretacja tej miary jest taka, że im wyższa wartość dystrybuanty, tym wyższe ryzyko.

Miary te mają zastosowanie wyłącznie wtedy, gdy znany jest rozkład zmiennej ryzyka. Szczególnym przypadkiem miary zagrożenia jest wartość zagrożona ryzykiem *Value at Risk* (VaR).

Wartość narażona na ryzyko

Wartość narażona na ryzyko (skrót *VaR*, ang. *Value at Risk*) jest miarą motywowaną dbałością o stratę. Wartość narażona na

ryzyko jest statystyczną miarą ryzyka, która szacuje maksymalną stratę wartości rynkowej na instrumencie finansowym (portfelu, inwestycji), jaka może wystąpić przy założonym poziomie istotności (prawdopodobieństwie) [12]. Wartość narażona na ryzyko stała się znana w latach dziewięćdziesiątych XX wieku, dzięki instytucji finansowej J.P. Morgan. W 1994 roku J.P. Morgan opublikował metodologię zarządzania ryzykiem, tzw. *RiskMetrics*, służącą m.in. do obliczania wartości narażonej na ryzyko rynkowe [114]. Miara ta mierzy kwotę kapitału pozostającego w rezerwie, przy danym poziomie ryzyka w zadanym okresie i przy zadanym prawdopodobieństwie straty. Miara *VaR* jest najpopularniejszą miarą ryzyka w grupie miar zagrożenia, ma duże walory interpretacyjne i jest zalecana przez instytucje nadzoru do pomiaru ryzyka w różnych instytucjach finansowych [24, 76, 102].

Niech zmienna losowa X oznacza zmianę wartości pozycji finansowej w przyszłym okresie T . Na ogół, zmienna losowa X przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

Z perspektywy ryzyka, można skupić się na stracie, która jest równa $-X$. Dla ułatwienia, zmienna losowa X zostanie nazwana *pozycją*. Aby zdefiniować pojęcie *VaR*, należy najpierw określić tolerancję straty α pomiędzy 0 i 1 oraz towarzyszący jej poziom ufności równy $1 - \alpha$. Aby zdefiniować pojęcie *VaR*, należy najpierw określić tolerancję straty α pomiędzy 0 i 1 oraz towarzyszący jej poziom ufności równy $1 - \alpha$. Ponadto, należy zdefiniować pojęcie α -kwantyła.

Definicja 2.1

Kwantylem rzędu α (lub α -kwantylem) [49] zmiennej losowej X nazywamy dowolną liczbę rzeczywistą q taką, że:

$$P(X \leq q) \geq \alpha \quad \text{oraz} \quad P(X < q) \leq \alpha.$$

Zbiór wszystkich α -kwantyli jest przedziałem $[q_{\alpha}^{-}(X), q_{\alpha}^{+}(X)]$, gdzie

$$q_{\alpha}^{-}(X) = \sup\{V \in \mathbb{R} : P(X < V) < \alpha\} = \inf\{V \in \mathbb{R} : P(X \leq V) \geq \alpha\},$$

$$q_{\alpha}^{+}(X) = \sup\{V \in R : P(X < V) \leq \alpha\} = \inf\{V \in R : P(X \leq V) > \alpha\},$$

Symbol R oznacza zbiór liczb rzeczywistych.

Jeśli pozycja finansowa X będzie ustalona, to stosowane będą oznaczenia: $q_{\alpha}^{-} := q_{\alpha}^{-}(X)$ oraz $q_{\alpha}^{+} := q_{\alpha}^{+}(X)$. Poniżej podano przykładowe kwantyle dla zmiennej losowej dyskretnej oraz ciągłej. Na Rysunku 2.1 przedstawiono zmienną losową o następującym rozkładzie

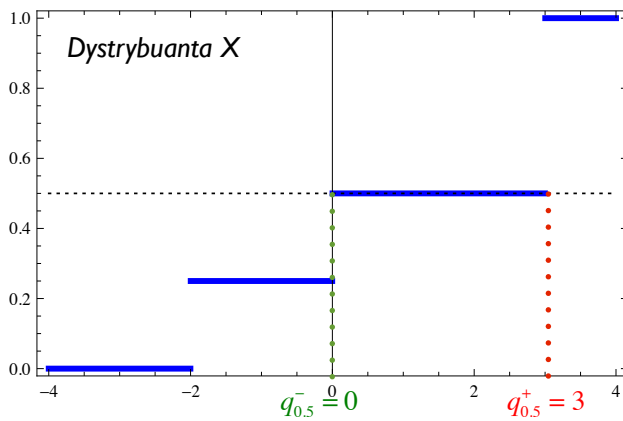
$$X = \begin{cases} -2 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/4, \\ 0 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/4, \\ 3 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2. \end{cases}$$

Na Rysunku 2.2 przedstawiono α -kwantyle dla ciągłej zmiennej losowej. Rysunek 2.2 przedstawia dystrybuantę zmiennej losowej Y z rozkładu logarytmiczno-normalnego $\mathcal{LN}(1, 1)$. Dla zmiennej losowej rozkładu ciągłego α -kwantyl jest wyznaczony jednoznacznie, tzn. $q_{\alpha}^{-} = q_{\alpha}^{+}$. Dlatego ten α -kwantyl będzie oznaczany w dalszej części przez q_{α} .

Definicja 2.2 Wartością narażoną na ryzyko (ang. *Value at Risk*) dla zadanej pozycji finansowej X oraz danym poziomie ufności α nazywamy najmniejszą liczbę V taką, że prawdopodobieństwo straty nie większej niż V jest nie większe niż α .

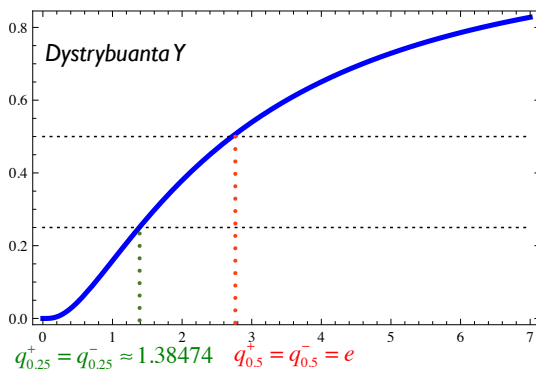
$$VaR_{\alpha}(X) = -q_{\alpha}^{+}(X) = q_{1-\alpha}^{-}(-X) = \inf\{c \in R : P(C + X < 0) \leq \alpha.\}$$

Jedną z najważniejszych własności VaR jest to, iż miara ta może być interpretowana jako kwota wypłaty wolnej od ryzyka, która musi być dodana do pozycji X , aby nowa wartość narażona na ryzyko była równa 0. Innymi słowy, VaR jest najmniejszą wartością jaka musi być dodana do X , aby zagwarantować, że strata większa niż 0 ma prawdopodobieństwo nie większe niż α . Jeżeli do X dodane zostanie $c = VaR_{\alpha}(X)$, wtedy nowy $VaR_{\alpha}(X + c)$ będzie równy 0. Zatem VaR jest odpowiedzią na pytanie „Jaki zysk muszę osiągnąć, aby strata nastąpiła jedynie z prawdopodobieństwem α ?”



Rys. 2.1: 0.5-kwantyle dla rozkładu dyskretnego

Źródło: opracowanie własne



Rys. 2.2: 0.5-kwantyl oraz 0.25-kwantyl dla rozkładu $\mathcal{LN}(1, 1)$

Źródło: opracowanie własne

W definicję wartości narażonej na ryzyko wpisany jest pośrednio czas T zmiany pozycji finansowej X . Dla monitorujących rezerwy bankowe czas T zazwyczaj wynosi kilka dni. Natomiast w sytuacjach, w których nie ma na rynku wysokiej płynności finansowej, ten czas może być równy jednemu rokowi. Poziom ufności bardzo często określany jest przez odpowiednie agencje finansowe i wynosi zazwyczaj 95% lub 98%, aczkolwiek inne wartości są również dopuszczalne dla wewnętrznych celów instytucji. VaR mierzy największą oczekiwaną stratę, jaką dany inwestor może ponieść w danym okresie, przy założeniu normalnych warunków rynkowych i przy danym poziomie ufności. Do wyznaczania VaR posłużono się dystrybuantą pozycji X , zdefiniowaną jako $F_X(x) = P(X \leq x)$. Założono, że $F_X(x)$ jest ciągła i rosnąca, zatem można zdefiniować funkcję odwrotną $x = F_X^{-1}(\alpha)$.

Wtedy otrzymujemy, że:

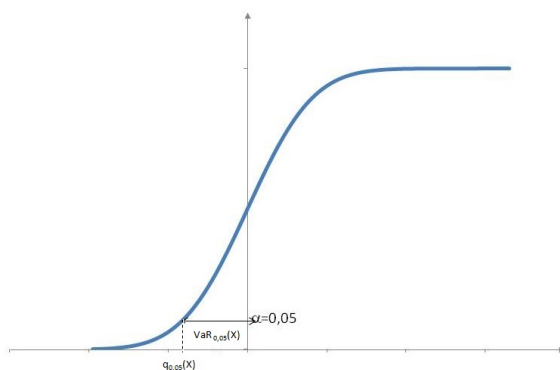
$$VaR_\alpha(X) = -q_\alpha(X). \quad (2.1)$$

VaR jest tutaj odległością pomiędzy punktem zero oraz punktem, dla którego dystrybuanta przyjmuje wartość α .

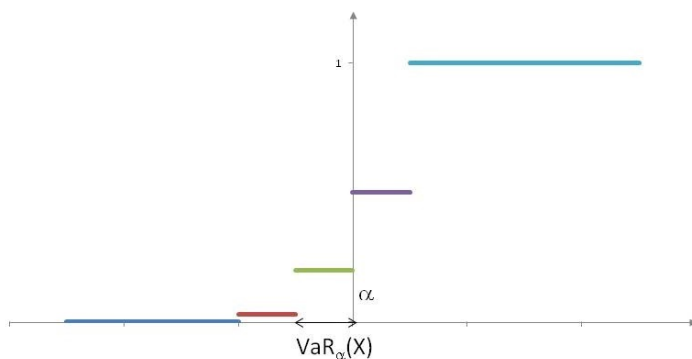
Łatwo zauważyć, że jeżeli pozycja finansowa X przyjmuje wartości nieujemne, to $VaR_\alpha(X) \geq 0$. Sposób wyznaczania VaR dla ciągłej pozycji finansowej X został przedstawiony na rysunku 2.3. Na rysunku 2.4 przedstawiono VaR dla dystrybuanty rozkładu skokowego.

Do ilustracji wartości narażonej na ryzyko można także użyć gęstości ciągłej zmiennej losowej X . Wartość $VaR_\alpha(X)$ została przedstawiona na rysunku 2.5. Wartość narażona na ryzyko posiada pewne własności, które pomagają wyjaśnić stopień przydatności tej miary.

1. Intuicyjność definicji: VaR odzwierciedla potencjalną stratę.
2. VaR odnosi się jedynie do lewego ogona funkcji gęstości, co oznacza, że skupia się ona na stratach, a nie na zysku.
3. VaR jest obiektywną miarą odwołującą się do prawdopodobieństwa. Nie jest definiowana przez kategorie ustalone np. przez agencje ratingowe.

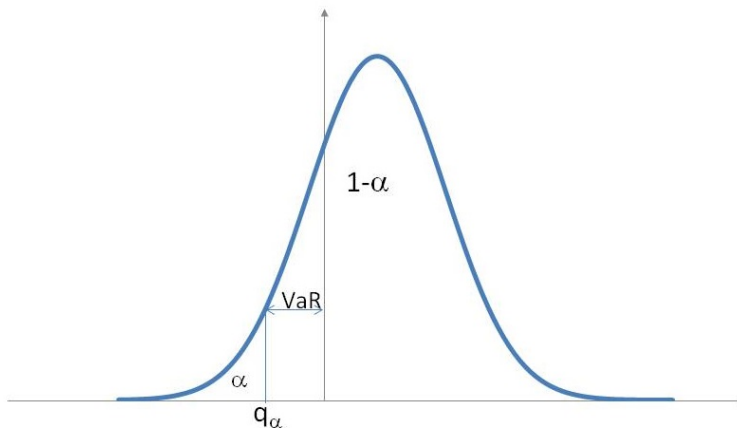


Rys. 2.3: Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0; 1,3)$ i $VaR_{0,05}$
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 2.4: VaR dla dystrybuanty rozkładu skokowego
 Źródło: opracowanie własne

Problemem może okazać się właściwe określenie gęstości pozycji finansowej X , zwłaszcza jej lewego ogona.



Rys. 2.5: Gęstość prawdopodobieństwa na rysunku ma dodatnią wartość oczekiwaną, zatem 0 jest na lewo od środka. VaR jest mierzone od punktu 0 do q_α - kwantyla rzędu α , zdefiniowanego jako tolerancja straty
 Źródło: opracowanie własne na podstawie [106]

2.1.1. Obliczanie wartości narażonej na ryzyko

Jak wspomniano powyżej, wyznaczenie VaR wymaga wiedzy i oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa pozycji X , szczególnie oszacowania wartości lewego ogona funkcji gęstości.

Zakłada się często, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X może być opisany przez pewną funkcję gęstości. Właściwy kwantyl może być wyznaczony analitycznie lub przez aproksymację. Głównym założeniem jest fakt, że ryzyko zmiany pozycji finansowej X w portfelu ma rozkład normalny ze średnią μ i wariancją σ^2 . Zatem $X \sim N(\mu; \sigma)$ i

$$VaR_\alpha(X) = -\sigma F_Z^{-1}(\alpha) - \mu, \quad (2.2)$$

gdzie F_Z jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego ze średnią 0 i wariancją 1, a F_Z^{-1} oznacza funkcję odwrotną. Istotnie można

zauważyć, że jeżeli X ma rozkład $N(\mu, \sigma)$ to nowa zmienna losowa $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ma rozkład normalny standardowy [88]. Aby znaleźć wartość VaR dla zmiennej losowej X założono, że $m = -VaR_\alpha(X)$. Celem jest wyliczenie prawdopodobieństwa $P(X \leq m) = \alpha$. Korzystając z metody standaryzacji otrzymano:

$$P(X \leq m) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{m-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{m-\mu}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{m-\mu}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Zatem

$$\frac{m-\mu}{\sigma} = F_Z^{-1}(\alpha).$$

W konsekwencji otrzymujemy wzór (2.2). Należy zauważyć, że dla wartości α mniejszej niż 0,5 wartość $F_Z^{-1}(\alpha)$ jest ujemna. Stąd wartość narażona na ryzyko będzie większa dla większego odchylenia standardowego. Miara VaR szacowana jest dla określonego horyzontu czasowego T , który wynika wprost z analizowanych danych. Dla danych dziennych, VaR wyliczona na ich podstawie, będzie miała także charakter dzienny. Może być ona jednak przeliczana na inne okresy. Najprostszą metodą skalowania jest przemnożenie oszacowanej wartości VaR przez pierwiastek z okresu, na który ta miara jest skalowana i podzielenie przez pierwiastek z okresu, dla którego ta miara była liczona. Na przykład w przypadku dwudniowej miary VaR skalowanej na okres 10 dniowy, jednodniowa wartość tej miary powinna zostać przemnożona przez $\sqrt{5}$. Wartość narażona na ryzyko wyznaczana jest w tych samych jednostkach, w których gromadzone są analizowane dane. Jeżeli dane mają charakter procentowy, to VaR będzie również ujęta w procentach. Jeżeli natomiast analizowane dane są wyrażone kwotowo, to VaR też będzie miała charakter kwotowy [48, 162].

W przykładach 2.1, 2.2, 2.3 przedstawiono sposób wyliczenia VaR .

Przykład 2.1. Założono, że inwestor posiada wysoce płynny portfel, którego wypłata jest pozycją X o rozkładzie normalnym. Jeżeli czas

realizacji inwestycji T jest krótki, np. kilka dni, to wtedy jest wielce prawdopodobne, że średnia X będzie o wiele mniejsza niż odchylenie standardowe. Przy założeniu, że $\mu = 0$ wartość narażona na ryzyko zależy będzie jedynie od wariancji. Jeśli $\alpha = 0,01$, to korzystając ze wzoru (2.2) oraz z tablic standardowego rozkładu normalnego otrzymano $-F_Z^{-1}(0,01) = 2,33$, co daje $VaR_{0,01}(X) = 2,33\sigma$.

Przykład 2.2. Pewien fundusz emerytalny ma wartość 10 milionów w pozycji X_A , danej rozkładem normalnym. Fundusz chciałby wyliczyć 10-dniową wartość narażoną na ryzyko dla tej pozycji na poziomie ufności 0,99. Do obliczeń użyto dziennej średniej i wariancji. Jeżeli roczne wartości średniej i odchylenia standardowego równe są odpowiednio μ_y oraz σ_y , to wartości dzienne równe są odpowiednio: $\mu_d = \frac{\mu_y}{250}$, $\sigma_d = \frac{\sigma_y}{\sqrt{250}}$. Założono, że X_A ma dzienny współczynnik zmienności równy 2%, co daje zmienność roczną na poziomie 30%. Jeśli dzienne stopy zwrotu będą niezależne, wtedy dla 10 dni współczynnik zmienności wynosi $\sigma = 0,02\sqrt{10} = 6,32\%$. Kładąc $\mu = 0$, otrzymano ze wzoru (2.2), iż:

$$VaR_{0,01}(X_A) = 10(-0,0632 \cdot F_N^{-1}(0,01)) = 10 \cdot 0,632 \cdot 2,33 = 1,47256.$$

Wynik podany jest w milionach.

Przykład 2.3. Założono, że fundusz z poprzedniego przykładu inwestuje 10 milionów w inną pozycję X_B . Ta pozycja ma dzienny współczynnik zmienności 3%, co daje zmienność roczną na poziomie około 45%. Dla 10 dni otrzymano, że $\sigma = 0,03\sqrt{10} = 9,49\%$. Jeśli przyjęty poziom ufności wynosi 0,99, to odpowiadający tej pozycji VaR równa się:

$$VaR_{0,01}(X_B) = 10 \cdot 0,0949 \cdot 2,33 = 2,21117.$$

Niech współczynnik korelacji pomiędzy obiema pozycjami wynosi $\rho = 0,5$. Dienne odchylenie standardowe wyliczono ze wzoru [78]:

$$\sigma_{A+B} = \sqrt{\sigma_A^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2}.$$

Zatem w tym przypadku otrzymano:

$$\sigma_{A+B} \sqrt{0,02^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,02 \cdot 0,03 + 0,03^2} = 0,0436.$$

Dla 10 dni wartość ta wynosi 13,79%. Stąd dla $\alpha = 0,01$ otrzymano, że:

$$VaR_{0,01}(X_A + X_B) = 10 \cdot 0,1379 \cdot 2,33 = 3,21307,$$

podczas gdy suma $VaR_{0,01}(X_A) + VaR_{0,01}(X_B) = 3,68373$. Wynika stąd, że zachodzi nierówność:

$$VaR_{\alpha}(X_A + X_B) \leq VaR_{\alpha}(X_A) + VaR_{\alpha}(X_B), \quad (2.3)$$

co implikuje, iż dywersyfikacja portfela redukuje ryzyko. Ryzyko sumy jest mniejsze niż suma ryzyk wyrażonych przez VaR dla zmiennych o rozkładzie normalnym. Własność dana wzorem (2.3) nazywana jest *subaddytywnością VaR* .

Jasnym jest, że używanie rozkładu normalnego do wyliczania wartości narażonej na ryzyko bardzo ułatwia zadanie. Po pierwsze, wynika to z formuły (2.2) oraz z faktu, że jeśli pozycja X jest kombinacją liniową komponentów mających rozkłady normalne, to X ma także rozkład normalny. Zatem wartość narażona na ryzyko jest łatwa do wyliczenia. Jednakże wielu praktyków zauważa, że stosowanie rozkładu normalnego nie do końca jest realistycznym założeniem [1, 6, 45, 137, 163]. Główna przyczyna leży w fakcie, że VaR nie doszacowuje ekstremalnych strat. Istotnie, realne dane pokazują, że prawdopodobieństwa dużych niespodziewanych strat są zazwyczaj dużo wyższe niż te przewidywane przez wartość prawdopodobieństw rozkładu normalnego, mających tę samą średnią i wariancję jak prawdziwa gęstość. Tej wadzie próbuje się zapobiec, poprzez zakładanie alternatywnego rozkładu dla pozycji X , który lepiej reprezentowałby ogony. Jednak taka manipulacja gęstościami jest zazwyczaj trudna, zwłaszcza gdy portfel zawiera wiele skomplikowanych komponentów. Liczba takich

komponentów może osiągać tysiące, a ryzyko z nimi związane jest często nieliniową funkcją zmiennych rynkowych (np. opcji). Co więcej, trudno jest brać pod uwagę, czy oszacować wpływy zdarzeń losowych, takich jak np. trzęsienie ziemi, które mogą mieć niebagatelny wpływ na system finansowy. Takie skomplikowane sytuacje są traktowane poprzez analizę różnych scenariuszy, zastosowanie metody Monte Carlo, symulacji czy ekstrapolacji danych historycznych. Metoda Monte Carlo to najbardziej zaawansowana metoda wyliczania wartości narażonej na ryzyko. W metodzie tej brane są pod uwagę doświadczenia oraz wyniki z poprzednich doświadczeń empirycznych. W oparciu o nie, przy pomocy geometrycznego ruchu Browna tworzony jest hipotetyczny model kształtowania się tych stóp. Następnie tworzy się dużą liczbę symulacji wartości stóp zwrotu i na ich podstawie uzyskuje się kwantyl rozkładu stopy zwrotu, co z kolei pozwala uzyskać wartość narażoną na ryzyko [75].

2.1.2. Empiryczne oszacowanie ryzyka rynkowego

Rozkład prawdopodobieństwa dla pozycji X często może być uzyskany wprost z historycznych danych cen papieru wartościowego. Dla estymacji dziennych stóp zwrotu można zastosować metodę empiryczną (empiryczna dystrybuanta).

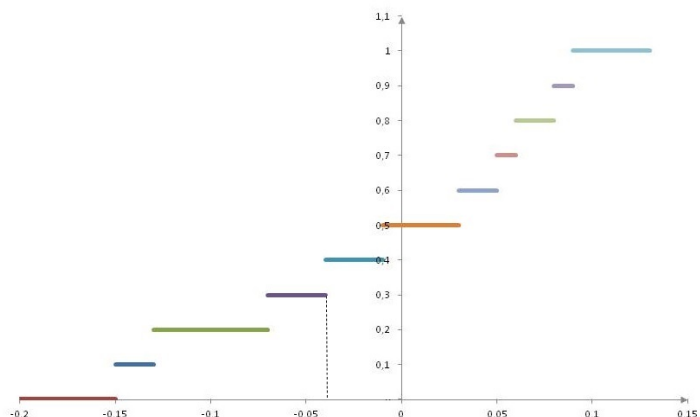
Założono, że posiadana baza danych zawiera dzienne stopy zwrotu dla każdego waloru i portfela inwestycyjnego dla n dni. W portfelu mamy m papierów wartościowych. Stopy zwrotu są oznaczone przez r_{ik} , gdzie $k = 1, 2, \dots, n$. Natomiast x_i oznacza wartość i -tego papieru wartościowego. Wtedy $\sum_{i=1}^m x_i r_{ik}$ jest kwotą zmiany wartości, jaką portfel będzie mieć jutro, jeśli dzisiejsze stopy zwrotu będą takie same jak były k -tego dnia. Przeprowadzając obliczenia dla każdego dnia k , otrzymano n hipotetycznych zmian wartości portfela $\sum_{i=1}^m x_i r_{ik}$ dla dnia następnego. Prawdopodobieństwo $\frac{1}{n}$ może być przypisane dla każdej z

tych powyższych możliwości. Wartość narażoną na ryzyko wyznaczono dla przykładu 2.4.

Przykład 2.4. Założono, że znane są stopy zwrotu każdego papieru wartościowego w portfelu dla 10 dni. Dla odpowiednich wag portfela wyliczono odpowiednie hipotetyczne stopy zwrotu, dzień po dniu. Posortowane rosnąco wartości znajdują się w poniższej tabeli.

N=10	Dzienne stopy zwrotu każdego waloru w portfelu									
	-0,15	-0,13	-0,07	-0,04	-0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,09

Celem jest wyliczenie VaR dla $\alpha = 0,3$, a każda z podanych stóp zwrotu występuje z prawdopodobieństwem $\frac{1}{10}$. Dystrybuantę dziennych stóp zwrotu przedstawiono na Rysunku 2.6.



Rys. 2.6: Dystrybuanta dziennych stóp zwrotu

Źródło: opracowanie własne

Zatem otrzymujemy krytyczną stopę zwrotu równą $-0,04$. Prawdopodobieństwo straty większej niż 70 000 jest jest mniejsze lub równe 0,3. Dla początkowej wartości portfela równej 1 000 000 wartość narażona na ryzyko wynosi $1\,000\,000 \cdot 0,04 = 40\,000$.

2.2. Krytyka wartości narażonej na ryzyko

Wartość narażona na ryzyko ma szerokie zastosowanie na rynkach finansowych. Umowy kapitałowe opracowane w Bazylei (tzw. Basel Accords) przez Bazylejski Komitet Nadzoru Finansowego pozwalają na pewną elastyczność w ustalaniu wartości narażonej na ryzyko i na elastyczność w używaniu różnych metod do jej wyliczenia. W 2010 roku Umowa Kapitałowa (tzw. Basel II) została zrewidowana, zmuszając banki do trzymania wyższych rezerw kapitałowych. W 2019 roku zaktualizowano ją i ukazała się umowa tzw. Basel III. Jest ona odpowiedzią na niedociągnięcia w przepisach finansowych, ujawnianych w związku z kryzysem finansowym w latach 2007-2008. Trzecia część porozumień bazylejskich ma na celu wzmocnienie wymogów kapitałowych poprzez zwiększenie płynności banków i zmniejszenie dźwigni finansowej. Szeroka zgoda na zastosowanie VaR jako uniwersalnej miary powoduje, że jest ona stosowana nagminnie w teorii zarządzania ryzykiem i jego kontroli. Pomimo powszechności w stosowaniu tej miary ma ona także wady i z ich powodu jest krytykowana. Poniżej wymieniono trzy poważne powody krytyki.

1. W przykładzie 2.3 pokazano, że w przypadku rozkładu normalnego dla ustalonej tolerancji straty α zachodzi własność subaddytywności VaR , tzn.:

$$VaR_{\alpha}(X_{A+B}) \leq VaR_{\alpha}(X_A) + VaR_{\alpha}(X_B).$$

Niestety ta nierówność nie musi być zachowana w przypadku, gdy rozkłady pozycji X_A i X_B nie są normalne [163]. Aby to pokazać rozważono pozycję finansową:

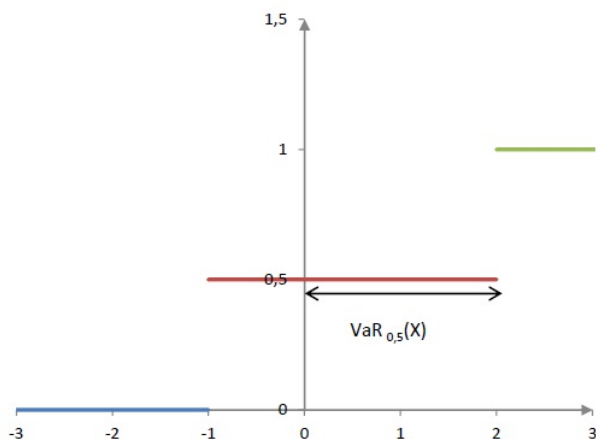
$$X_1 = \begin{cases} -1 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2, \\ 2 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2. \end{cases}$$

Założono dla przykładu, że $\alpha = 0,5$ i otrzymano z rysunku 2.7 $VaR_{0,5}(X_1) = -2$. Przyjęto, że pozycja X_2 jest niezależna od X_1 i ma

taką samą strukturę jak X_1 . Rozważono zdywersyfikowaną pozycję $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$. Wtedy:

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2} = \begin{cases} -1 \text{ z prawdopodobieństwem } 1/4, \\ 0,5 \text{ z prawdopodobieństwem } 1/2, \\ 2 \text{ z prawdopodobieństwem } 1/4. \end{cases}$$

oraz otrzymano z rysunku 2.8 $VaR_{0,5}(X) = -0,5$.



Rys. 2.7: Dystrybuanta pozycji finansowej X_1

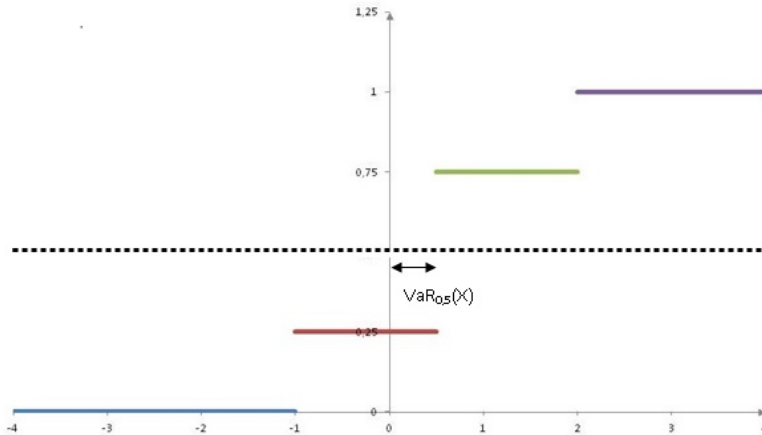
Źródło: opracowanie własne

Z rysunków odczytano, że:

$$VaR_{0,5}(X) = -0,5 > \frac{1}{2}VaR_{0,5}(X_1) + \frac{1}{2}VaR_{0,5}(X_2) = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(-2) = -2.$$

Ostatnia nierówność implikuje, że zdywersyfikowana pozycja jest bardziej ryzykowna niż ważona suma dwóch wartości narażonych na ryzyko.

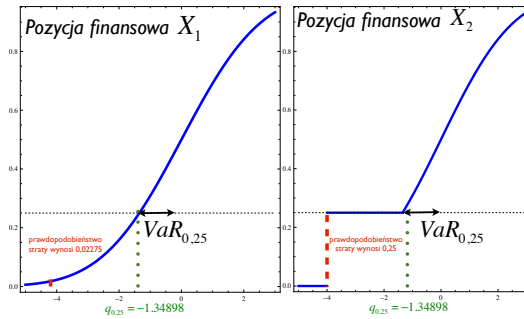
2. Największą wadą związaną z VaR jest słaba ocena ryzyka. Wiąże się to z tym, że pewne straty mogą być dużo większe aniżeli



Rys. 2.8: Dystrybuanta zdywersyfikowanej pozycji X
 Źródło: opracowanie własne

wyliczona wartość narażona na ryzyko. Wartość narażona na ryzyko informuje tylko o minimalnej stracie w $\alpha\%$ najgorszych przypadków. Ta wartość natomiast nie określa jak duże mogą być te straty w $\alpha\%$ najgorszych przypadków. Fakt ten można zilustrowano na Rysunku 2.9. Widać na nim, że VaR nie rozróżnia strat w lewym ogonie.

Na lewym rysunku 2.9 jest dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,2)$ dla pozycji finansowej X_1 . Na prawym rysunku lewy ogon dystrybuanty rozkładu normalnego został zmodyfikowany. W ten sposób otrzymano nową pozycję finansową X_2 . Kwantyle rzędu 0,25 są takie same dla obu pozycji finansowych i wynoszą -1.34898 , zatem $VaR_{0.25}(X_1) = VaR_{0.25}(X_2) = 1,34898$. Jednak np. prawdopodobieństwo straty 4 dla pozycji finansowej X_2 wynosi 0,25, podczas gdy prawdopodobieństwo straty w przypadku pozycji finansowej X_1 wynosi 0,02275, co znaczy że jest ono ponad 10 krotnie mniejsze.



Rys. 2.9: Wykresy dystrybuanty dla pozycji finansowych X_1 oraz X_2
 Źródło: opracowanie własne

Rozważono jeszcze dodatkowo następujący przykład. Dane są dwie pozycje opisane następująco:

$$X_1 = \begin{cases} 100 & \text{z prawdopodobieństwem } 0,97, \\ -10 & \text{z prawdopodobieństwem } 0,02, \\ -15 & \text{z prawdopodobieństwem } 0,01. \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 100 & \text{z prawdopodobieństwem } 0,97, \\ -10 & \text{z prawdopodobieństwem } 0,02, \\ -100 & \text{z prawdopodobieństwem } 0,01. \end{cases}$$

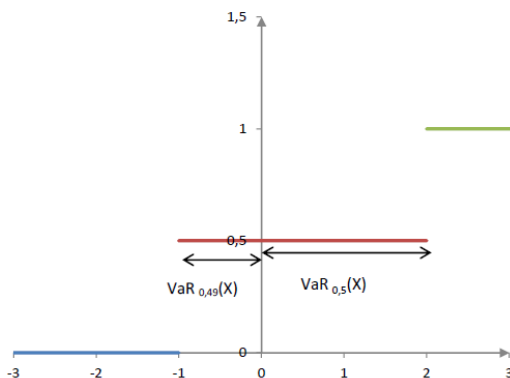
Dla obu pozycji $VaR_{0,02}(X_i) = -10$. Jednak intuicja podpowiada, że pozycja X_2 jest gorsza aniżeli pozycja X_1 .

- Inną wadą tej miary jest wrażliwość na wybór poziomu tolerancji α . Ten fakt dotyczy zwłaszcza zmiennych losowych dyskretnych. Aby tą własność zilustrować, rozważono pozycję X zdefiniowaną

jako:

$$X = \begin{cases} -1 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2, \\ 2 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2. \end{cases}$$

Rozkład pozycji X przedstawiono na rysunku 2.10.



Rys. 2.10: Rozkład pozycji X , pokazujący wrażliwość na wybór poziomu tolerancji

Źródło: opracowanie własne

Wtedy $VaR_{0,5}(X) = -2$, ale $VaR_{0,49}(X) = 1$. Ta prosta analiza prowadzi do wniosku, że VaR może być nieciągła ze względu na zmienną α , czyli mała zmiana tolerancji ryzyka prowadzi do znacznej zmiany wartości narażonej na ryzyko.

Należy również wspomnieć, że miara VaR szacuje prawdopodobieństwo wystąpienia straty większej niż założona kwota. Nie określa jak wysokie będą straty, jeśli wartość VaR zostanie przekroczona. VaR mówi tylko, ile najwięcej można stracić w sytuacji „normalnej” działalności. Mówi, ile można stracić w 95% przypadków, ale nie mówi nic, ile można stracić w pozostałych 5%. VaR należałoby rozpatrywać jako funkcję zależną od poziomu tolerancji [102].

Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono i opisano miary ryzyka. Szczególną uwagę poświęcono mierze VaR , która jest miarą zalecaną przez instytucje nadzoru finansowego. Przedstawiono wiele przykładów, które pokazują, w jaki sposób można wykorzystać tę miarę i obliczyć w zależności od rozkładu prawdopodobieństwa. Niestety miara ta posiada szereg wad. W dalszej części pracy posłużono się wariancją i odchyleniem standardowym jako miarą ryzyka, ponieważ ryzyko jest tu rozumiane jako niezgodność z oczekiwanym dochodem i pod uwagę bierze się rozkłady stopy zwrotu (ang. *rate of return*) zwanej również stopą zysku. W następnym rozdziale przedstawione zostaną preferencje wraz z kryteriami wyboru zmiennych, funkcje użyteczności oraz równoważnik pewności.

Rozdział 3

Kryterium maksymalizacji oczekiwanej użyteczności

W tym rozdziale rozważany będzie przedsiębiorca mający możliwość zainwestowania swojego kapitału bądź, szerzej, jakiegoś dobra. Oczywiście możliwości te wpływają na stan jego posiadania na koniec danego okresu inwestycyjnego. Celem inwestora jest wybranie takiej alternatywy albo opcji, która przyniosłaby największy możliwy poziom dobra. Dobro to może oznaczać pieniądze, czyli zysk finansowy, ale także może oznaczać wartości niematerialne (np. pozyskanie nowych partnerów w biznesie, łatwość współpracy, podniesienie kwalifikacji pracowników). Jeśli wyniki tych inwestycji są znane, to wtedy łatwo wyznaczyć ranking alternatyw. Jednak w przypadku losowym, tzn. gdy poziom dobra na końcu okresu nie jest znany i może być opisany zmienną losową, to określenie najlepszej alternatywy nie jest oczywiste. Dlatego potrzebna jest metoda, która pomogłaby skonstruować pewien ranking w zbiorze zmiennych losowych. Takim narzędziem jest *funkcja użyteczności*. Formalnie, funkcja użyteczności U zdefiniowana jest na zbiorze liczb rzeczywistych. Wtedy lista rankingowa tworzona jest zgodnie z kryterium von Neumana-Morgensterna, czyli kryterium

maksymalizacji wartości oczekiwanej [51, 183]. Precyzyjnie alternatywa a jest nie gorsza od alternatywy b , jeśli $EU(X_a) \geq EU(X_b)$, gdzie X_i oznacza losową wypłatę albo losowy zysk na koniec okresu inwestycyjnego po wybraniu opcji $i = a, b$. Stosowane jest następujące oznaczenie [18, 34, 89, 160]:

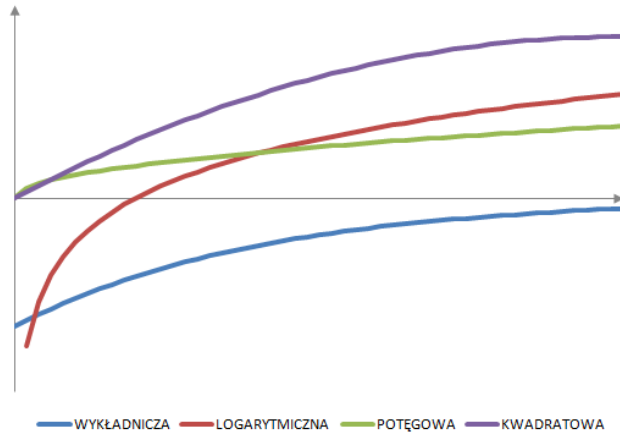
$$X_a \succsim X_b \iff EU(X_a) \geq EU(X_b).$$

Zatem ta operacja pozwala ustalić porządek w zbiorze zmiennych losowych. Funkcje użyteczności używane przez danego przedsiębiorcę czy decydenta zależą od jego indywidualnej tolerancji ryzyka, jego finansowego zaplecza, uwarunkowań psychologicznych czy sytuacji materialnej. Najprostszą funkcją użyteczności jest funkcja liniowa $U(x) = x$. Inwestor posługujący się taką funkcją użyteczności nazywany jest inwestorem *neutralnym względem ryzyka*, gdyż funkcja ta bierze pod uwagę tylko wartość oczekiwaną przyszłych wpływów. Jedyne założenie, aby funkcja była funkcją użyteczności jest monotoniczność (funkcja musi być rosnąca) i ciągłość. Klasyczna teoria użyteczności mówi, że funkcje użyteczności powinny być różniczkowalne, nawet dwukrotnie [39]. Te właściwości implikują, że funkcje są wygodne w obliczeniach, a modele powstałe w oparciu o nie są wykorzystywane np. w mikroekonomii, finansach i analizie decyzji konsumenckich [180]. Na rysunku 3.1 przedstawiono funkcje użyteczności najczęściej spotykane w praktyce.

Poniżej przedstawiono cztery klasy funkcji użyteczności spotykanych w literaturze [106]. Przez D_U oznaczono dziedzinę tej funkcji, czyli zbiór, na którym jest ona określona.

1. Funkcja wykładnicza $U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$, gdzie $\gamma > 0$ jest pewnym parametrem, $D_U = (-\infty, +\infty)$.
2. Funkcja logarytmiczna $U(x) = \ln x$, $D_U = (0, +\infty)$.

Łatwo zauważyć, że chociaż funkcja określona jest dla $x > 0$, to w przypadku gdy inwestor spodziewa się bankructwa z dodatnim



Rys. 3.1: Przykładowe funkcje użyteczności: wykładnicza $U(x) = -2e^{-0,5x}$, logarytmiczna $U(x) = \ln x$, potęgowa $U(x) = 0,5x^{0,5}$, kwadratowa $U(x) = x - 0,1x^2$

Źródło: opracowanie własne

prawdopodobieństwem, to użycie takiej funkcji użyteczności skutkuje tym, iż oczekiwana użyteczność losowej wypłaty będzie wynosić $-\infty$.

3. Funkcja potęgowa $U(x) = \gamma x^\gamma$, gdzie $\gamma < 1$ jest parametrem. Jeśli $\gamma \in (0, 1)$, $D_U = [0, +\infty)$. Jeśli $\gamma < 0$ to $D_U = (0, +\infty)$.
4. Funkcja kwadratowa $U(x) = x - \gamma x^2$, gdzie $\gamma > 0$ jest parametrem, $D_U = (-\infty, \frac{1}{2\gamma})$.

Funkcja ta jest rosnąca dla $x < \frac{1}{2\gamma}$.

Warto tu podkreślić, że choć funkcja użyteczności jest pożytecznym narzędziem do tworzenia rankingu inwestycji z losowymi wypłatami, to jej wartość numeryczna nie ma żadnej interpretacji. Dlatego dodanie stałej do funkcji użyteczności czy pomnożenie jej przez stałą $k > 0$ nie zmienia rankingu alternatyw. W związku z tym, można uznać, że funkcje

$U(x)$ oraz $\hat{U}(x) = k_0U(x) + k_1$ są równoważne, ponieważ:

$$X_a \succsim X_b \iff EU(X_a) \geq EU(X_b) \iff E\hat{U}(X_a) \geq E\hat{U}(X_b).$$

Uzasadnieniem do stosowania kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej z funkcji użyteczności jest fakt, iż to podejście daje się jednoznacznie opisać aksjomatami [51]. Należy również wspomnieć, że utworzenie rankingu jest możliwe jedynie wtedy, gdy funkcja użyteczności jest wklęsła.

3.1. Awersja do ryzyka a funkcja użyteczności

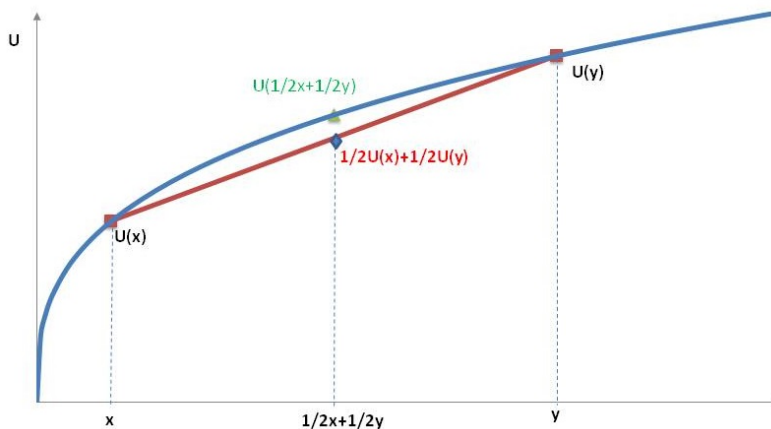
Funkcja U zdefiniowana na odcinku $[a, b]$ jest wklęsła [50, 99, 100], jeśli dla każdego $\alpha \in [0, 1]$ oraz $x, y \in [a, b]$ zachodzi nierówność:

$$U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y).$$

Taka wklęsła funkcja użyteczności U odzwierciedla awersję do ryzyka decydenta. Własność ta została zilustrowana na rysunku 3.2. Założono, że decydent ma do wyboru dwie alternatywy:

1. na koniec okresu otrzyma x albo y z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$,
2. otrzyma $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

Oczekiwana użyteczność pierwszej alternatywy jest wagą dwóch wartości funkcji użyteczności $\frac{1}{2}U(x) + \frac{1}{2}U(y)$. Oczekiwana użyteczność drugiej opcji (nie zawierającej ryzyka) jest równa wartości funkcji użyteczności w punkcie $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Ta wartość jest większa niż wartość pierwszej alternatywy, gdy funkcja użyteczności jest wklęsła. Zatem decydent wybierze drugą alternatywę.



Rys. 3.2: Wklęsła funkcja użyteczności odzwierciedlająca awersję do ryzyka. Źródło: opracowanie własne

3.2. Współczynnik awersji do ryzyka

Stopień awersji do ryzyka wklęsłej funkcji użyteczności związany jest z faktem, jak „mocno” taka funkcja jest wklęsła. Formalnie, stopień awersji do ryzyka jest mierzony przez współczynnik zdefiniowany przez Arrowa i Pratta [7, 106, 70, 131]. Aby podać wzór na współczynnik ryzyka, trzeba założyć, że funkcja użyteczności posiada drugą pochodną. Skoro $U(x)$ jest wklęsła to $U''(x) < 0$ [50, 99, 100].

Definicja 3.1. Współczynnikiem absolutnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta (indeksem Arrowa-Pratta) (ang. *the Arrow-Pratt absolute risk aversion coefficient*) nazwano wyrażenie:

$$\hat{\gamma}(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Współczynnik ten przyjmuje wartości dodatnie dla inwestorów z awersją do ryzyka i rośnie wraz z jej stopniem [35]. W Tabeli 2 przedstawiono

najczęściej spotykane funkcje użyteczności oraz odpowiadający im współczynnik absolutnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta.

Czynnik $U'(x)$ pojawiający się w mianowniku pełni rolę czynnika normalizującego. Współczynnik $\hat{\gamma}(x)$ ilustruje zmianę awersji do ryzyka wraz ze zmieniającym się poziomem dobra. Najczęściej, współczynnik ryzyka maleje wraz ze wzrostem kapitału (majątku). Odzwierciedla to sytuację, że inwestor jest w stanie więcej zaryzykować, jeśli czuje się bardziej zabezpieczony finansowo.

Tabela 2. Współczynnik absolutnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta dla wybranych funkcji użyteczności.

Lp.	Funkcja użyteczności $U(x)$	Współczynnik Arrowa-Pratta	Własności współczynnika
1.	$U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$	$\hat{\gamma}(x) = \gamma$	stały dla każdej wartości x
2.	$U(x) = \ln x$	$\hat{\gamma}(x) = \frac{1}{x}$	maleje wraz ze wzrostem x
3.	$U(x) = \gamma x^\gamma$	$\hat{\gamma}(x) = \frac{\gamma-1}{x}$	maleje wraz ze wzrostem x
4.	$U(x) = x - \gamma x^2$	$\hat{\gamma}(x) = \frac{2\gamma}{2\gamma x - 1}$	maleje wraz ze wzrostem x

Jeśli parametr γ dąży do 0, w przypadku użyteczności wykładniczej i kwadratowej w Tabeli 2, to decydent staje się coraz bardziej neutralny względem ryzyka [13, 14, 15, 174]. Ta sama sytuacja ma miejsce w przypadku użyteczności potęgowej, jeśli γ jest bardzo bliskie 1.

Współczynnik absolutnej awersji do ryzyka pokazuje, jak decydent reaguje na zmiany absolutne w majątku (np. dodatkowe pieniądze),

natomiast współczynnik relatywnej awersji do ryzyka pokazuje jak decydent reaguje na zmiany proporcjonalne w majątku. Współczynnik relatywnej awersji do ryzyka ma postać:

$$\hat{\Gamma}(x) = -x \frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Malejąca absolutna awersja do ryzyka wskazuje, że wielkość majątku, którą decydent jest skłonny narazić na ryzyko, wzrasta wraz ze wzrostem bogactwa, zaś malejąca relatywna awersja do ryzyka pokazuje, że część majątku, którą decydent jest skłonny narazić na ryzyko, wzrasta wraz ze wzrostem bogactwa.

W przypadku stałej absolutnej awersji do ryzyka wielkość bogactwa, którą decydent jest skłonny narazić na ryzyko, pozostaje stała w miarę jego wzrostu, część majątku zaś pozostaje niezmienna w przypadku stałej relatywnej awersji do ryzyka.

Rosnąca absolutna awersja do ryzyka wskazuje, że w miarę, jak decydent się bogaci, jest on skłonny zaryzykować coraz mniejszą część majątku oraz coraz mniejsze części posiadanego bogactwa w przypadku rosnącej relatywnej awersji do ryzyka [35].

W Tabeli 3 przedstawiono najczęściej spotykane funkcje użyteczności oraz odpowiadający im współczynnik relatywnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta.

Jeżeli porównamy współczynnik absolutnej awersji do ryzyka oraz relatywnej awersji do ryzyka np. dla funkcji $\ln x$, to możemy zaobserwować malejącą absolutną awersję do ryzyka, ale stałą relatywną awersję do ryzyka. Tę samą własność można zaobserwować dla wykładniczej funkcji użyteczności. Zgodnie z interpretacją, w miarę wzrostu bogactwa jednostki inwestować będą coraz większe kwoty w ryzykowne aktywa, ale nie będą zmieniać procentu inwestowanego w te aktywa kapitału.

Tabela 3. Współczynnik relatywnej awersji do ryzyka Arrowa-Pratta dla wybranych funkcji użyteczności

Lp.	Funkcja użyteczności $U(x)$	Współczynnik Arrowa-Pratta	Własności współczynnika
1.	$U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$	$\hat{\Gamma}(x) = \gamma \cdot x$	rośnie wraz ze wzrostem x
2.	$U(x) = \ln x$	$\hat{\Gamma}(x) = 1$	nie zależy od wartości x
3.	$U(x) = \gamma x^\gamma$	$\hat{\Gamma}(x) = \gamma - 1$	nie zależy od wartości x
4.	$U(x) = x - \gamma x^2$	$\hat{\Gamma}(x) = \frac{2\gamma x}{2\gamma x - 1}$	maleje wraz ze wzrostem x

3.2.1. Równoważnik pewności

Pomimo, że wartość oczekiwana użyteczności losowego dobra nie ma znaczenia poza porównaniem jej z inną alternatywą, to można zdefiniować nowe pojęcia, które ma intuicyjne znaczenie. Takim pojęciem jest gwarantowany równoważnik (ang. *certainty equivalent*) [115], który dla losowego zysku zdefiniowany jest jako stała G taka, że

$$U(G) = E[U(X)].$$

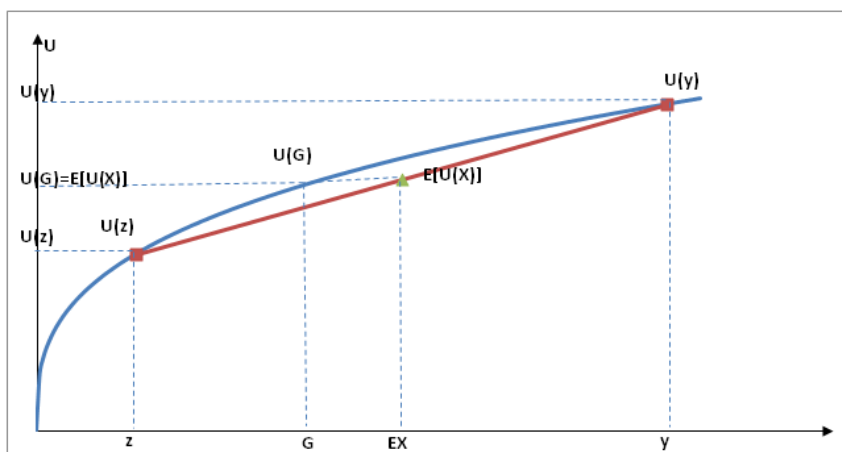
Innymi słowy, jest to gwarantowana wartość dobra, nie obciążona żadnym ryzykiem, dla której użyteczność jest taka sama jak wartość oczekiwana użyteczności losowego dobra X [74]. Jeśli U jest funkcją rosnącą, wtedy istnieje funkcja odwrotna U^{-1} do funkcji U i można napisać, że:

$$G = U^{-1}(E[U(X)]).$$

Gwarantowany równoważnik zmiennej losowej dla równoważnych funkcji użyteczności jest taki sam i jest mierzony w jednostkach wartości dobra. Niech $U(x)$ będzie wklęsłą funkcją użyteczności. Stała c jest taką liczbą, że $U(G)$ równa się wartości oczekiwanej $U(X)$. Innymi słowy, jest to taka wartość, którą decydent czy przedsiębiorstwo traktuje jako gwarantowaną wypłatę, nie inwestując w portfel X (który może przynieść stratę albo przynieść zysk). Z definicji równoważnika pewności oraz z nierówności Jensena [98] zachodzi nierówność:

$$U(G) = E[U(X)] \leq U(EX).$$

Skoro U jest funkcją rosnącą to $G \leq EX$. Ten fakt jest przedstawiony na rysunku 3.3.



Rys. 3.3: Równoważnik pewności dla wklęsłej funkcji użyteczności
Źródło: opracowanie własne

Założono, że rozpatrywana jest następująca inwestycja: decydent otrzymuje wypłaty z i y z jednakowym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Zatem wartość $E[U(X)]$ jest w połowie linii łączącej punkty $U(z)$ i $U(y)$, a

użyteczność gwarantowanego równoważnika jest punktem przecięcia się funkcji U oraz prostej poziomej przechodzącej przez punkt $E[U(X)]$.

$$U(G) = E[U(X)] = \frac{1}{2}U(z) + \frac{1}{2}U(y).$$

Zatem łatwo zauważyć, że w przypadku wklęsłej funkcji użyteczności c jest mniejsze aniżeli wartość oczekiwana $E[X]$. Jasnym jest, że im „mocniej” dana funkcja jest wklęsła (co odpowiada bardziej ostrożnemu inwestorowi), to liczba G leży jeszcze dalej na lewo od wartości $E[U(X)]$ [52]. Matematycznie jest to konsekwencją nierówności Jensena. Wartość $Premium = EX - G$ nazywana jest *premią za ryzyko*. Innymi słowy, premia za ryzyko jest nadwyżką zwrotu z inwestycji ponad kwotę wolną od ryzyka [189]. Ponadto, można wykazać [16], że premia za ryzyko jest proporcjonalna do losowej wypłaty pomnożonej przez pewien współczynnik. Dokładniej, ten współczynnik wynosi $\frac{1}{2}\hat{\gamma}(x)$.

Rozważono potęgową funkcję użyteczności $U(x) = \gamma x^\gamma$ z parametrem $\gamma \in (0, 1)$. Wtedy $\gamma G^\gamma = \gamma E[X^\gamma]$, a zatem $G^\gamma = E[X^\gamma]$, czyli $G = (E[X^\gamma])^{\frac{1}{\gamma}}$. Gwarantowany równoważnik tej postaci znany jest w literaturze jako równoważnik Krepsa-Porteusa [96]. W przykładzie 3.2 pokazano zastosowanie tego równoważnika dla wypłaty mającej rozkład jednostajny.

Przykład 3.2. Założono, że losowa wypłata X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. Wtedy funkcja użyteczności U :

$$U(x) = x^\gamma, \quad \gamma \in (0, 1),$$

określona jest dla $x \in [0, 1]$. Parametr γ wyraża awersję do ryzyka decydenta. Skoro:

$$E[X^\gamma] = \int_0^1 x^\gamma dx = \left[\frac{x^{1+\gamma}}{1+\gamma} \right]_0^1 = \frac{1}{1+\gamma},$$

to z Tabeli 3 otrzymano, że:

$$G = \left(\frac{1}{1 + \gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{(1 + \gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli γ jest bliskie 1, to G zbliża się do wartości $\frac{1}{2}$, a $EX = \frac{1}{2}$. Ten przypadek graniczny oznacza, że znika awersja do ryzyka. Z drugiej strony, jeżeli $\gamma > 0$ i γ jest bliskie wartości 0, to $\theta = \frac{1}{\gamma}$ staje się dowolnie dużą wartością. Stąd:

$$G = \frac{1}{(1 + \gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{\theta})^{\theta}} \rightarrow \frac{1}{e} \approx 0,37, \quad \text{gdy } \theta \text{ dąży do nieskończoności.}$$

Oznacza to, że za pozbycie się losowości, decydent jest skłonny zaakceptować mniejszą wypłatę, a ta wypłata maleje wraz z liczbą γ . Innymi słowy, im mniejsze γ , tym mniejszy gwarantowany równoważnik i tym większa awersja do ryzyka. Przykładowo, dla $\gamma = 1/2$ otrzymano

$$G = (EX^{1/2})^2 = (E\sqrt{X})^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x} dx \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} < EX = 0,5.$$

Przykład 3.3. Rozważono inwestora, który ma decydować o inwestycji w ryzykowny projekt. Oszacowano, że projekt ten przyniesie zysk 100 000 zł z prawdopodobieństwem ok. 5%, 50 000 zł z prawdopodobieństwem 50%, nie przyniesie zysku z prawdopodobieństwem 20% i z prawdopodobieństwem 25% przyniesie stratę 10 000 zł. Zatem niech X będzie losową wypłatą z tego projektu.

$$X = \begin{cases} 10^5 \text{ z prawdopodobieństwem } 0,05, \\ 5 \cdot 10^4 \text{ z prawdopodobieństwem } 0,5, \\ 0 \text{ z prawdopodobieństwem } 0,2, \\ -10^4 \text{ z prawdopodobieństwem } 0,25. \end{cases}$$

Inwestor posiada kwadratową funkcję użyteczności:

$$U(x) = x - \frac{1}{2 \cdot 10^6} x^2, \quad \text{dla } x < 10^6.$$

Założono, że decydent staje wobec dwóch alternatyw. W pierwszym przypadku z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ otrzymuje wypłatę równą 10 albo wypłatę 0 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. W drugim przypadku, gracz otrzymuje kwotę A.

Wtedy:

$$E[U(X)] = \frac{1}{20} \left(10^5 - \frac{1}{2 \cdot 10^6} 10^{10} \right) + \frac{1}{2} \left(10^4 \cdot 5 - \frac{1}{2 \cdot 10^6} 25 \cdot 10^8 \right) + \frac{1}{4} \left(-10^4 - \frac{1}{2 \cdot 10^6} 10^8 \right),$$

czyli:

$$E[U(X)] \approx 26\,612,5.$$

Następnie wyliczono wartość G taką, że $G - \frac{1}{2 \cdot 10^6} G^2 = 26\,612,5$. Rozwiązano równanie kwadratowe otrzymując $G = 26\,976,36$. Zatem, jeśli firma konkurencyjna zrekomensuje inwestorowi kwotę 26 976,36 zł, to inwestor będzie skłonny do odstąpienia projektu konkurentowi.

W Tabeli 4 znajdują się funkcje odwrotne oraz równoważniki pewności dla wybranych funkcji użyteczności.

Tabela 4. Funkcje odwrotne i gwarantowane równoważniki dla wybranych funkcji użyteczności. Źródło: opracowanie własne na podstawie [15, 106]

Funkcja użyteczności $U(x)$	Warunki na parametry i dziedzina $U(x)$	Funkcja odwrotna $U^{-1}(x)$	Gwarantowany równoważnik G
$U(x) = \ln x$	$x \in (0, \infty)$	$U^{-1}(x) = e^x$ $x \in (-\infty, \infty)$	$G = e^{E[\ln X]}$
$U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$	$x \in (-\infty, \infty)$ $\gamma \in (0, \infty)$	$U^{-1}(x) = -\frac{1}{\gamma} \ln(-\gamma x)$ $x \in (-\infty, 0)$	$G = -\frac{1}{\gamma} \ln E[e^{-\gamma X}]$ G jest entropijną miarą ryzyka
$U(x) = \gamma x^\gamma$	$x \in [0, \infty)$ i $\gamma \in (0, 1)$ lub $x \in (0, +\infty)$ i $\gamma < 0$	$U^{-1}(x) = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ $x \in [0, \infty)$	$G = (E[X^\gamma])^{\frac{1}{\gamma}}$ G jest równoważnikiem Krepsa-Porteusa
$U(x) = x - \gamma x^2$	$x \in (-\infty, \frac{1}{2\gamma})$ $\gamma \in (0, \infty)$	$U^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma x}}{2\gamma}$ $x \in (-\infty, \frac{1}{4\gamma}]$	$G = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\gamma EX - 4\gamma^2 EX^2}}{2\gamma}$ EX jest wartością oczekiwaną losowej inwestycji

3.2.2. Użyteczność wypłat pieniężnych

W tym podrozdziale opisano przykład ilustrujący fakt, że użyteczność decydenta rozważana jako funkcja wypłat pieniężnych nie jest funkcją liniową. Problem ten został przedstawiony przez Nicolausa Bernoulliego, a rozwiązany przez jego kuzyna Daniela Bernoulliego.

W literaturze znany jest on jako *Paradoks petersburski* [145, 148], gdyż D. Bernoulli rozwiązał go w czasie pobytu w Sankt Petersburgu w 1738 roku [22].

Rozważa się następującą grę: gracz rzuca monetą do momentu otrzymania orła. Jeśli orzeł pojawi się w k -tym rzucie, to jego wypłata wynosi 2^k . Zatem wypłata gracza może przyjmować następujące wartości:

$$2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots$$

z prawdopodobieństwami odpowiednio $1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^k, \dots$. Wartość oczekiwana wypłaty w każdej takiej grze wynosi:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty.$$

Zatem, jeśli gra jest powtarzana wielokrotnie i X_k jest wypłatą w k -tej grze, to podpierając się Prawem Wielkich Liczb [98] można stwierdzić, że średnia wypłata $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ dąży do nieskończoności, gdy liczba powtórzeń gry dąży do nieskończoności. Oznacza to, iż taki gracz powinien z chęcią zapłacić *dowolną cenę* (czyli dowolnie dużą sumę) za przystąpienie do takiej gry. Oczywiście jest, że prawie nikt by się na to nie zgodził.

Istnieje jednak inne rozwiązanie tego problemu. Mianowicie, znormalizowana średnia $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n \log_2 n}$ jest bliska 1 dla dowolnie dużej ilości powtórzeń gry [98]. Zatem, jeśli cena zagrania w każdą taką grę zależy od liczby tych gier i wynosi $g = \log_2 n$, to dla dostatecznie dużych n (liczby powtórzeń tej gry), całkowita opłata za uczestnictwo w n grach będzie bliska całkowitemu zyskowi. Zatem można powiedzieć, że G jest taką „sprawiedliwą” ceną za przystąpienie do gry.

D. Bernoulli kontynuował swoje badania, które dały podstawę do rozwinięcia nowoczesnej teorii funkcji użyteczności [51]. Ten szwajcarski matematyk zauważył, że stopień satysfakcji z posiadanego kapitału lub innymi słowy „użyteczność kapitału” zależy od ilości zgromadzonego kapitału, ale w sposób nieliniowy. Na przykład 1 000 zł dla osoby posiadającej oszczędności 1 000 000 zł i 1 000 zł dla osoby nic niemającej stanowi inną wartość. Oczywiście jest, że pierwsza

osoba będzie mniej zadowolona od tej drugiej. D. Bernoulli założył więc, iż satysfakcja z posiadania kapitału x może być mierzona za pomocą nieliniowej funkcji $U(x)$, zwanej funkcją kapitału bądź funkcją użyteczności. Taka funkcja jest niejako wbudowana w daną jednostkę bądź firmę i jest jej cechą charakterystyczną.

D. Bernoulli sam zaproponował dobrego kandydata na taką funkcję $U(x) = \ln x$ zakładając, że jeśli kapitał x przyrósł o małą wartość dx , to przyrost użyteczności powinien być wprost proporcjonalny do dx/x , tzn. $dU(x) = k \frac{dx}{x}$, gdzie $k > 0$. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $U(x) = k \ln x + K$, gdzie K jest stałą. Stałe k oraz K zależą jedynie od wybranej wartości jednostki i nie mają wpływu na mierzenie użyteczności. Jeśli gracz w *Paradoksie petersburskim* ma użyteczność $U(x) = \ln x$, to wartość oczekiwana użyteczności pieniądza w takiej grze wynosi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U(2^k)2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(2^k)2^{-k} = \ln 2 \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-k} = 2 \ln 2.$$

Jeśli G jest ceną udziału w każdej takiej grze, czyli równoważnikiem pewności, to gracz przystąpi do niej gdy:

$$U(G) \leq 2 \ln 2 \iff G \leq 4.$$

Rozwiązanie podane przez D. Bernoulliego w 1738 roku jest pierwszym zastosowaniem metody wartości oczekiwanej użyteczności. Dopiero w 1944 roku John von Neumann i Oskar Morgenstern w pracy *Theory of games and economic behaviour* [183] dokonali pierwszej aksjomatyzacji teorii oczekiwanej użyteczności. Przyjęli oni, że racjonalny decydent postępuje zgodnie z zasadą maksymalizacji wartości oczekiwanej użyteczności. Ponadto, podali oni szczegółowe aksjomaty i pokazali istnienie funkcji użyteczności [34].

Aksjomatyka ta była modyfikowana i rozwijana m.in. przez Hersteina i Milnora oraz Jensena [108]. W zależności od kontekstu istnieje

wiele różnych formalnych sposobów aksjomatyzacji teorii oczekiwanej użyteczności. Ich przegląd można znaleźć w pracy [51].

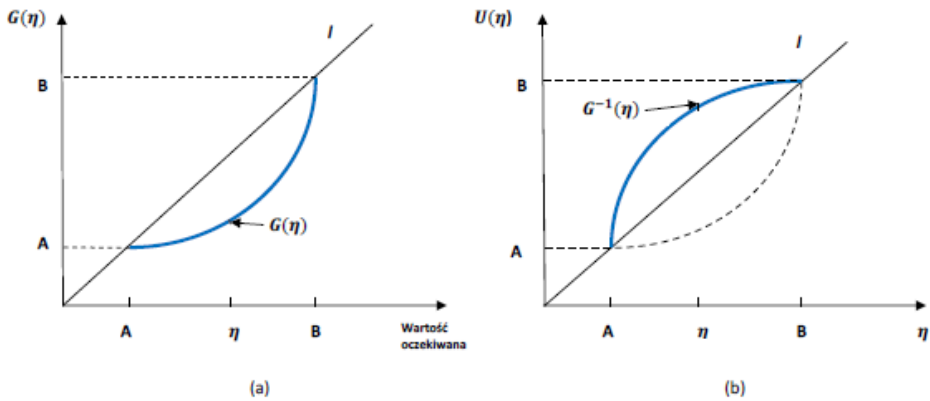
3.3. Metody doboru funkcji użyteczności

Wybór funkcji użyteczności dla danego inwestora jest istotnym problemem. Jednym ze sposobów jest przypisanie inwestorowi postaci funkcji użyteczności i następnie szacowanie parametrów, na podstawie przeprowadzonych eksperymentów wśród badanej grupy osób. Drugim sposobem jest szukanie postaci funkcji użyteczności. Skoro zarówno postaci, jak i parametry funkcji użyteczności wpływają na wartość oceny, dlatego właściwe ich oszacowanie ma istotne znaczenie w procesie decyzyjnym [40]. Istnieją standardowe procedury przypisania odpowiednich funkcji użyteczności inwestorom, decydentom bądź całym firmom. Poniżej przedstawiono kilka sposobów stosowanych w praktyce.

3.3.1. Metoda gwarantowanego równoważnika

Jedną z możliwości określenia użyteczności decydenta jest przypisanie gwarantowanemu równoważnikowi różnych ryzykownych alternatyw. Elegancka metoda to organizacja loterii, w której decydent wie, że wypłata wynosi A z prawdopodobieństwem p , bądź B z prawdopodobieństwem $1 - p$. Dla różnych wartości p inwestor określa cenę G (gwarantowany równoważnik) za odstępstwo w udziale w loterii. Wartość oczekiwana takiej loterii wynosi $\eta = Ap + B(1 - p)$. Zatem, jeśli decydent jest wrażliwy na ryzyko, to gwarantowany równoważnik G musi być mniejszy niż η .

Odpowiadające inwestorowi wartości G dla różnych wartości prawdopodobieństw p przedstawione są na rysunku 3.4. Wartość G znajduje się powyżej odpowiadającego jej η . Krzywa przechodzi przez punkty dające funkcję $G(\eta)$. Aby zdefiniować na podstawie tego rysunku



Rys. 3.4: Eksperymentalne wyznaczenie funkcji użyteczności. (a) Dla loterii, z wypłatami A lub B i mającymi wartość oczekiwaną η , osoba jest proszona o podanie równoważnika pewności G , (b) Odwrócenie tej relacji wyznacza funkcję użyteczności. Źródło: opracowanie własne

funkcję użyteczności, należy użyć normalizacji, ustalając $U(A) = A$ oraz $U(B) = B$ (jest to uzasadnione, ponieważ funkcja użyteczności ma dwa stopnie swobody skalowania). Stąd oczekiwana użyteczność loterii wynosi $pU(A) + (1 - p)U(B) = pA + (1 - p)B = \eta$. Zatem dla danego G , $U(G)$ jest oczekiwaną użytecznością loterii i $U(G) = \eta$. Więc $G = U^{-1}(\eta)$ i krzywa zdefiniowana przez $G(\eta)$ jest odwrotnością funkcji użyteczności. Funkcję użyteczności otrzymano poprzez odbicie wykresu $G(\eta)$ względem prostej diagonalnej l , co pokazano na rysunku 3.4 (b).

3.3.2. Metoda wyboru parametru

Kolejną metodą określenia funkcji użyteczności decydenta jest przypisanie mu danej funkcji użyteczności z odpowiedniej klasy, a następnie oszacowanie parametru. Metoda ta została

zaproponowana przez Tversky'ego i Kahnemana [169]. Zakłada ona, że funkcja użyteczności ma postać wykładniczą $U(x) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}$, gdyż jak potwierdzają badania [19, 173] najlepiej charakteryzuje preferencje decydentów. Parametr $\gamma > 0$ może być ustalony w wyniku przeprowadzenia prostej loterii. Decydent określa równoważnik pewności G , czyli wartość jaką jest w stanie zaakceptować za rezygnację w udziale w pewnej loterii. Zaproponowano następującą loterię. Inwestor wygrywa 2 z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ lub traci 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Jeśli $G = 1,5$ dla tego decydenta to:

$$-e^{-1,5\gamma} = -\frac{2}{3}e^{-2\gamma} - \frac{1}{3}e^{-1\gamma}.$$

Rozwiązaniem równania jest $\gamma = 1,38629$.

Kompromis lub bardziej złożone podejście do określania funkcji użyteczności opiera się na fakcie, że wiele decyzji inwestycyjnych nie implikuje wielkiego przyrostu dobra. Zatem, jeśli x_0 jest początkowym stanem posiadania, a w jest przyrostem wynikającym z inwestycji, to $U(x_0 + w)$ jest funkcją użyteczności decydenta na koniec okresu inwestycyjnego. Aby określić funkcję użyteczności tego przyrostu w używa się wykładniczej aproksymacji. Zatem, jeśli U jest wykładniczą funkcją użyteczności, to użyteczność przyrostu w wynosi $-e^{\gamma w}$, a jeśli $U(x) = \ln x$, to użyteczność przyrostu może być aproksymowana przez $-e^{-\frac{1}{x_0}w}$ (Tabela 3).

3.3.3. Kwestionariusz

Podstawą badań nad zachowaniami ekonomicznymi jest psychologia biznesu. Skupia się ona na zachowaniach konsumentckich, bada zachowania w zakresie finansów, zajmuje się kwestią podejmowania ryzyka oraz psychologią decyzji [46, 166, 168]. W teorii decyzji zakłada się indywidualne preferencje decydenta w stosunku do ryzyka.

Jednak istnieje wiele sytuacji, w których pożądanym jest, aby wyznaczyć stosunek jednostki do ryzyka. Na przykład banki, oferując różne instrumenty inwestycyjne, chciałyby dopasowywać stopień ryzyka proponowanych inwestycji do poziomu ryzyka akceptowanego przez klientów. Interesującym dla banków może być także stosunek do ryzyka pracowników przyznających kredyty [167] (chodzi tu o tzw. ryzyko operacyjne, mogące zaistnieć w wyniku błędnego działania ludzi).

Stosunek jednostki do ryzyka zależy od jej indywidualnego odczucia ryzyka, jej obecnej sytuacji finansowej, perspektywy przyszłych zysków finansowych, zobowiązań oraz wieku osoby. Jedną z metod oszacowania właściwego współczynnika ryzyka oraz funkcji użyteczności jednostki jest przeprowadzenie odpowiedniej ankiety. Daje ona dobrą, jakościową ocenę, a rezultaty mogą być użyte do określenia funkcji użyteczności. W kwestionariuszu część pytań koncentruje się zarówno na sytuacji finansowej inwestora, jak i na podejściu inwestora do inwestowania. Kolejne pytania charakteryzują rynek oraz dotyczą wartości zarządzanego funduszu. Ankieta taka pokazuje, że tolerancja ryzyka jest zdeterminowana przez odczucia jednostki dotyczące ryzyka oraz przez finansowe środowisko inwestora. Celem przeprowadzenia takiej ankiety jest określenie skłonności osoby do podejmowania ryzyka inwestycyjnego. Ankiety takie przygotowywane są we współpracy z psychologami.

Firmy inwestycyjne używają tego rodzaju ankiet do badania profilu inwestycyjnego klienta, ponieważ jego skłonność do ryzyka ma wpływ na to, które z zaoferowanych mu produktów jest skłonny zaakceptować. Gdy firma zna profil inwestycyjny klienta, jest w stanie zaoferować mu produkty, które najlepiej odpowiadają jego potrzebom.

W Dodatku 7.1 zamieszczono przykładową ankietę *Jaki jest Twój współczynnik ryzyka?* zaczerpniętą z [106].

3.4. Kryterium maksymalizacji oczekiwanej użyteczności. Krytyczna analiza

Podejście maksymalizacji wartości oczekiwanej funkcji użyteczności może być rozpatrywane jako pierwsza aproksymacja opisu ludzkich preferencji. Walorami tej koncepcji są:

- jasna i przejrzysta aksjomatyka,
- duża ogólność,
- możliwość stosowania miar Arrowa-Pratta jako narzędzi mierzenia siły awersji do ryzyka [94].

Dodatkowo koncepcja ta umożliwia formalną analizę zachowań ekonomicznych. Szczególnym przykładem jej zastosowania jest problematyka wyboru optymalnego portfela akcji. Ale od momentu sformułowania teorii wartości oczekiwanej użyteczności trwają dyskusje nad jej zgodnością z praktyką, z obserwowanym zachowaniem jednostek w sytuacji kiedy należy dokonać wyboru. Przeprowadzono cały szereg eksperymentów, które wskazują, że to podejście w wielu sytuacjach jest nieefektywne. Badania wykonane przez Kahnemana i Tversky'ego [83] pokazały, że decydenci oceniają dostępne dla nich alternatywy ze względu na własną pozycję, na stan swojego bogactwa, ze względu na własne doświadczenia. Dla prognoz pozytywnych ich funkcja użyteczności jest wklęsła, dla prognoz negatywnych wypukła (potwierdzają to również inni badacze ludzkich zachowań [53, 66]). Bardzo rzadkie zdarzenia traktowane są jako zdarzenia niemożliwe, a zdarzenia, których prawdopodobieństwo zajścia jest wysokie, badani traktowali jako zdarzenia pewne. Istnieją badania potwierdzające, że większość ludzi ma awersję do ryzyka, gdy koncentrują się na przyszłych zyskach oraz wybierają ryzyko, gdy stoją w obliczu strat. To zjawisko znane jest w literaturze jako *teoria perspektywy* [94, 132]. Osoba wybierze raczej pewny zysk w wysokości 500 dolarów niż wypłatę równą 1 000 dolarów z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Ta sama osoba wybierze

ryzyko utraty 1000 dolarów z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ niż pewną utratę 500 dolarów. Można wyciągnąć wnioski, że w przypadku zwiększania się kapitału decydujący charakteryzuje się awersją do ryzyka, a w przypadku zmniejszania się kapitału, czyli straty, charakteryzuje się skłonnością do ryzyka [83]. Liczne badania empiryczne dowiodły, że funkcja użyteczności ogólnie nie jest liniową funkcją prawdopodobieństw. Takim znanym przykładem jest paradoks, sformułowany po raz pierwszy w 1953 roku przez ekonomistę francuskiego Maurice'a Allais [4], późniejszego laureata Nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii. Paradoks ten jest szeroko opisywany w literaturze [31, 57, 63] oraz przytoczony w przykładzie 3.4.

Przykład 3.4. Rozważono cztery zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 oznaczające przyszły dochód. Wszystkie przyjmują wartości 0, 10 milionów lub 30 milionów. Odpowiednie prawdopodobieństwa podane są w tabeli:

Losowy dochód	0	10 milionów	30 milionów
X_1	0	1	0
X_2	0,01	0,89	0,1
X_3	0,9	0	0,1
X_4	0,89	0,11	0

Jasnym jest, że większość ludzi będzie preferować losową wypłatę X_1 od wypłaty X_2 . 10 milionów to dużo pieniędzy, dlatego lepiej jest wybrać pewne 10 milionów niż ściągać się o 30 milionów, ponosząc ryzyko nieotrzymania niczego. Zatem $X_1 \succ X_2$. Sytuacja ze zmiennymi X_3 i X_4 jest inna. Tutaj prawdopodobieństwa otrzymania 0 są duże, a decydujący może otrzymać 30 milionów lub 10 milionów praktycznie z takim samym prawdopodobieństwem. W tym wypadku logiczne jest, by wybrać większą wygraną. Dlatego $X_3 \succ X_4$.

Założono, że są dwie osoby, które maksymalizują wartość oczekiwanej użyteczności $U(x)$. Porównano dwie alternatywy. Pierwsza osoba wybiera losowy dochód X_1 i X_3 , oba z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Niech Y_1 będzie otrzymaną w ten sposób losową wypłatą.

Zatem $E[Y_1] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_3]$. Druga osoba wybiera losowy dochód X_2 i X_4 , oba z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Niech Y_2 będzie otrzymanym w ten sposób losowym zyskiem.

Zatem $E[Y_2] = \frac{1}{2}E[X_2] + \frac{1}{2}E[X_4]$. Ponieważ $X_1 \succ X_2$ oraz $X_3 \succ X_4$, zatem podążając tą logiką myślenia $E[X_1] > E[X_2]$ i $E[X_3] > E[X_4]$, więc:

$$E[Y_1] > E[Y_2]. \quad (3.1)$$

Z drugiej strony:

$$EY_1 = \frac{1}{2}(0 + 0,9) + \frac{1}{2}(1 + 0) + \frac{1}{2}(0 + 0,1) = 0,45 + 0,5 + 0,05,$$

$$EY_2 = \frac{1}{2}(0,01 + 0,89) + \frac{1}{2}(0,89 + 0,11) + \frac{1}{2}(0,1 + 0) = 0,45 + 0,5 + 0,05.$$

Zatem losowe wypłaty Y_1 i Y_2 mają te same wartości oczekiwane, co jest sprzeczne z (3.1).

Przykład ten ilustruje, że klasyczna teoria użyteczności von Neumanna-Morgensterna nie zawsze sprawdza się we wszystkich przypadkach. Paradoks ten był motywacją do wprowadzenia lub poszukiwania innych rozwiązań. Jednakże klasyczna teoria użyteczności jest szeroko stosowana, a powyższy paradoks może być interpretowany jako przykład pojawiania się irracjonalnego zachowania zachowania w pojedynczych przypadkach.

Funkcje użyteczności wykorzystywane są przez ekonomistów do tworzenia skutecznych modeli ale można je wykorzystywać z pewnymi zastrzeżeniami. Żadna funkcja użyteczności nie oddaje w pełni wszystkich zachowań ludzkich. Niektóre funkcje użyteczności, takie jak np. kwadratowe, przynoszą prognozy dotyczące zachowania ludzi wobec

ryzyka, które są sprzeczne z intuicją. Jeżeli chodzi o awersję do ryzyka, między jednostkami istnieją tak duże różnice, że znalezienie funkcji użyteczności, która pasowałaby do reprezentatywnego inwestora czy jednostki, może okazać się bardzo trudne lub wręcz niemożliwe. Pomimo tych ograniczeń znajomość podstaw teorii użyteczności jest warunkiem wstępnym rozsądnego zarządzania ryzykiem.

Podsumowanie

W rozdziale tym omówiono różne funkcje użyteczności oraz metody ich doboru do profilu inwestora czy jednostki. Ponadto, omówiono klasyczną teorię użyteczności i jej zastosowanie. Wiele miejsca poświęcono pojęciu awersji do ryzyka oraz gwarantowanemu równoważnikowi. Pojęcia te będą kluczowe dla dalszych rozważań tej pracy. w budowanych w następnych rozdziałach modelach wykorzystano gwarantowany równoważnik Krepsa-Porteusa oraz entropijną miarę ryzyka.

Rozdział 4

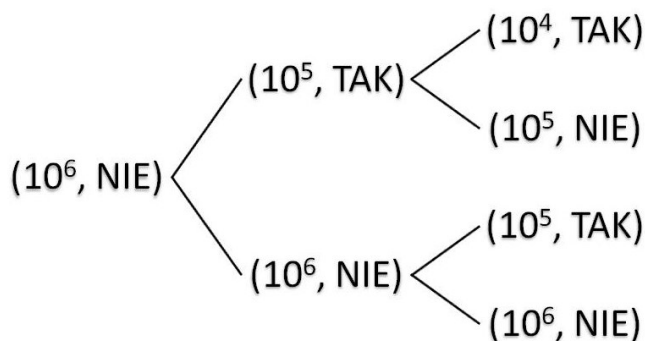
Metody badania przepływów pieniężnych

Zgodnie z szeroką interpretacją, każda inwestycja może być zdefiniowana w terminach przepływów pieniężnych, czyli wydatków i wpływów inwestora. Zazwyczaj przepływy pieniężne (ujemne bądź dodatnie) mają miejsce w pewnych określonych dniach, miesiącach, kwartałach bądź na koniec roku. Przepływy pieniężne dzielą się na deterministyczne (np. bankowe rachunki, spłata pożyczki) oraz stochastyczne.

4.1. Deterministyczne przepływy pieniężne

Aby zapewnić sobie pożądane rezultaty w przyszłości każda inwestycja wymaga zamierzonego ciągłego zarządzania. Deterministyczna inwestycja zdefiniowana jest przez strumień pieniężny $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, gdzie wielkości Z_i często zależą od wyborów związanych z zarządzaniem. Aby rozwiązać problem zarządzania potrzebny jest model dynamiczny. W tym celu można posłużyć się

grafem, w którym wierzchołki reprezentują momenty przepływów pieniężnych, a krawędzie opisują możliwy scenariusz. Przykładowo, inwestor zakupił rafinerię i każdego miesiąca musi zdecydować, czy pompować ropę czy nie. Każdego dnia można wypompować ok. 10% zawartości. Początkowa wartość to 10^6 litrów. Jednakże ta praca wymaga zatrudnienia załogi i jej opłacenia. Rysunek 4.1 przedstawia poziom rezerwy i status załogi: TAK (pracuje), NIE (nie pracuje). Na krawędziach podano wypłatę załogi. Mając graficzną reprezentację



Rys. 4.1: Przykładowe wydobycie ropy wraz z kosztami. Źródło: opracowanie własne na podstawie [106]

można zastosować *programowanie dynamiczne* do obliczenia optymalnej strategii w zarządzaniu. Ścieżka w grafie generuje następujące przepływy $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}, V_n$, gdzie V_n stanowi ostatni wierzchołek w grafie dla tej ścieżki. Zatem wartość bieżąca wynosi:

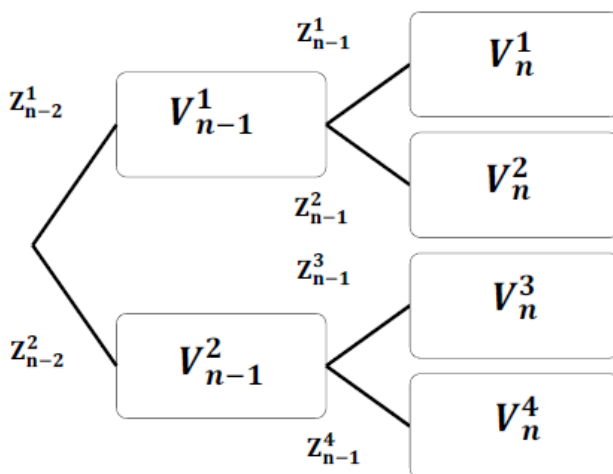
$$PV = Z_0 + \frac{Z_1}{1 + d_1} + \frac{Z_2}{(1 + d_2)^2} + \dots + \frac{Z_{n-1}}{(1 + d_{n-1})^{n-1}} + \frac{V_n}{(1 + d_n)^n},$$

gdzie d_k są jednookresowymi stopami dyskontowymi.

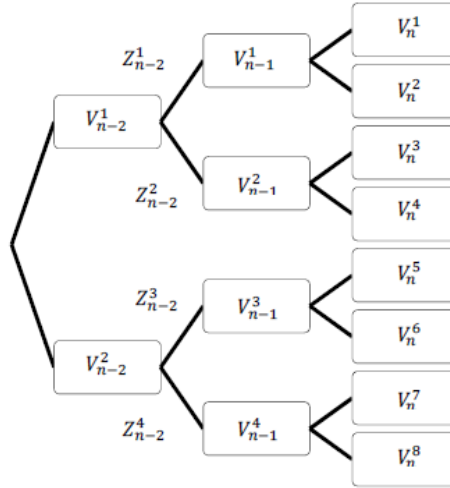
Współczynnik $b_k = \frac{1}{1+d_k}$ nazywany jest współczynnikiem dyskonta. Poszczególne etapy programowania dynamicznego przedstawiono na rysunkach 4.2 i 4.3. W pierwszym kroku na etapie $n - 1$ wylicza się najlepszą decyzję przed osiągnięciem ostatniego kroku. Dla każdego okresu $n - 1$ znajduje się maksymalną wartość bieżącą:

$$V_{n-1}^1 = \max_{i=1,2} (Z_{n-1}^i + b_{n-1}V_n^i),$$

$$V_{n-1}^2 = \max_{i=3,4} (Z_{n-1}^i + b_{n-1}V_n^i).$$



Rys. 4.2: Etap pierwszy. Źródło: opracowanie własne na podstawie [106]



Rys. 4.3: Etap drugi. Źródło: opracowanie własne na podstawie [106]

W drugim etapie sytuacja się powtarza, po uwzględnieniu etapu pierwszego.

$$V_{n-2}^1 = \max_{i=1,2} (Z_{n-2}^i + b_{n-2} V_{n-1}^i),$$

$$V_{n-2}^2 = \max_{i=3,4} (Z_{n-2}^i + b_{n-2} V_{n-1}^i).$$

Ta metoda może być sformułowana w sposób rekurencyjny, tzn.

$$V_l^m = \max_i (Z_l^i + b_l V_{l+1}^i).$$

Wadą tego podejścia jest tzw. „przekleństwo wymiaru” (ang. *curse of dimensionality*). Zauważyć można, że dla dwumianowego grafu liczba możliwych ścieżek wynosi 2^n dla n okresów.

4.1.1. Metody oceny dynamicznych przepływów pieniężnych

Do szacowania efektywności inwestycji stosowane są metody dynamiczne, których podstawą jest wyznaczanie wydatków i wpływów określanych jako strumienie pieniądza generowane przez dane projekty inwestycyjne.

Projekt inwestycyjny jest opłacalny, gdy generuje wpływy, które przewyższają wydatki. Metody dynamiczne uwzględniają upływ czasu. Istotą inwestycji jest odpowiedni wybór ze zbioru możliwych przepływów pieniężnych. Do oceny efektywności danej inwestycji wykorzystuje się następujące metody [42, 118, 139, 179]:

1. Wartość obecna netto NPV (ang. *Net Present Value*).
2. Wewnętrzna stopa zwrotu IRR (ang. *Internal Rate of Return*).
3. Indeks zyskowności PI (ang. *Profitability Index*).
4. Zdyskontowany okres zwrotu DPB (ang. *Discounted Payback Period*).
5. Wskaźnik wartości bieżącej netto (*NPVR*)

1. Wartość bieżąca netto

Dwie pierwsze metody stosowane są najczęściej przez inwestorów, aczkolwiek wydaje się, że *NPV* jest częściej wykorzystywana przez managerów [42]. Podstawową ideą tej metody jest określenie wielkości przepływów pieniężnych w całym rozpatrywanym okresie i zdyskontowanie ich odpowiednią stopą dyskontową. Taka stopa dyskontowa powinna odzwierciedlać zarówno wartość pieniądza w czasie, jak i ryzyko, które niesie ze sobą projekt. Podstawową regułą stosowania *NPV* jest to, że projekt jest akceptowalny wtedy, gdy *NPV* jest większa od zera. Oznacza to, że analizowany projekt generuje wartość bieżącą przepływów pieniężnych wyższą od wartości bieżącej nakładów poniesionych na realizację inwestycji, a w związku z tym, projekt przynosi zwrot kosztu kapitału zaangażowanego w finansowanie

przedsięwzięcia. *NPV* można określić jako zaktualizowane na chwilę obecną korzyści, jakie przyniesie realizacja danego projektu. Wartość bieżąca netto jest podstawowym zagadnieniem rozważanym w analizie inwestycji [29, 69, 110] i określona jest wzorem:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1+d)^k} - I, \quad (4.1)$$

gdzie:

- CF_k - wpływy z inwestycji w okresie k ,
- d - stopa dyskontowa,
- n - liczba okresów inwestycji,
- I - koszt inwestycji.

Oczekiwane wpływy z inwestycji w badanym okresie można zastąpić gwarantowanymi przepływami pieniężnymi, które zostałyby przyjęte jako ich alternatywa (równoważniki pewności) oraz zdyskontować przedmiotowe przepływy pieniężne o stopę wolną od ryzyka [35]. Zatem:

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{G(CF_k)}{(1+r_f)^k} - I, \quad (4.2)$$

gdzie:

- CF_k - wpływy z inwestycji w okresie k ,
- r_f - stopa wolna od ryzyka,
- n - liczba okresów inwestycji,
- I - koszt inwestycji.

Metoda *NPV* pozwala sprawdzić czy inwestycja jest opłacalna, za pomocą porównywalnych wartości wpływów z inwestycji i zaangażowanych w nią środki. Gdy *NPV* wynosi 0, oznacza to, że zaktualizowane przepływy pieniężne netto wystarczają tylko na spłatę zaangażowanego kapitału i pokrycie kosztu kapitału, wyrażonego stopą dyskontową. Gdy *NPV* jest dodatnia, stopa zwrotu z inwestycji przewyższa stopę dyskontową.

2. Wewnętrzna stopa zwrotu (*IRR*)

Wewnętrzna stopa zwrotu *IRR* pozwala ustanowić ranking inwestycji poprzez wyliczenie porównawcze odpowiednich stóp zwrotu. Jest to taka wartość stopy dyskontowej, przy której *NPV* jest równe 0. Zakłada się, że dane przedsięwzięcie jest opłacalne, jeżeli uzyskana z niego stopa zwrotu jest wyższa lub w skrajnym przypadku równa stopie dyskontowej przyjętej do obliczenia *NPV*. Im wyższa wartość *IRR*, tym inwestycja jest bardziej opłacalna i bezpieczna z punktu widzenia dawców kapitału, ponieważ generuje większą potencjalną stopę zwrotu z inwestycji [120].

$$NPV = \sum_{k=1}^n \frac{CF_k}{(1 + IRR)^k} - I = 0. \quad (4.3)$$

Przykład 4.1. Rozważono dwie dwuletnie inwestycje wymagające zainwestowania kapitału 1\$. Pierwsza inwestycja opisana jest strumieniem (2,0), a druga inwestycja przez strumień (0,3). Oznacza to, że pierwszy projekt przyniesie po roku wypłatę 2\$, a drugi po dwóch latach wypłatę 3\$. Założono, że stopa procentowa wynosi 10%.

$$(1) NPV_1 = -1 + \frac{2}{1,1} = 0,82.$$

$$(2) NPV_2 = -1 + \frac{0}{1,1} + \frac{3}{1,1^2} = 1,48.$$

Zatem kryterium *NPV* sugeruje wybór inwestycji pierwszej. Wyliczono także wewnętrzną stopę zwrotu.

$$(1) -1 + 2b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow d_1 = 1.$$

$$(2) -1 + 3b_2^2 = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d_2 = \sqrt{3} - 1 \approx 0,73.$$

Zatem drugie kryterium sugeruje także wybór inwestycji pierwszej.

Obie metody posiadają zarówno ograniczenia, jak i zalety. *NPV* jest łatwa do wyliczenia, nie ma niejednoznaczności związanych z wieloma możliwymi rozwiązaniami jak w przypadku równania określającego *IRR*. Natomiast *IRR* ma tę zaletę, że zależy tylko od postaci strumienia przepływów pieniężnych, a nie od stóp zwrotu, które czasem mogą być trudne do określenia. Warto podkreślić, że zarówno praktycy, jak i

teoretycy przychylają się ku opinii, że najlepszym kryterium jest *NPV* [119].

3. Indeks zyskowności

Indeks ten określa stosunek zdyskontowanych wpływów pieniężnych do zdyskontowanych wydatków. Taki projekt inwestycyjny należy przyjąć, jeśli $PI > 1$. Wartość wskaźnika równa 1 oznacza, że projekt inwestycyjny przynosi zwrot na minimalnym wymaganym przez inwestora poziomie. Innymi słowy jest to minimalny zwrot, wystarczający do uznania inwestycji za efektywną [153].

4. Zdyskontowany okres zwrotu

Ta metoda określa liczbę okresów, po której zdyskontowane wpływy związane z realizacją projektu zrównają się z dyskontowanymi wydatkami związanymi także z realizacją projektu. Innymi słowy, to liczba okresów, po której suma zdyskontowanych przepływów netto będzie równa zero. Uzyskanie dodatniej wartości skumulowanych zdyskontowanych przepływów pieniężnych wygenerowanych przez projekt oznacza, że w okresie tym projekt przyniesie zwrot zaangażowanego kapitału wraz z uwzględnieniem jego kosztu, a więc od tego momentu będzie kreował wartość dla akcjonariuszy. Niestety zastosowanie zdyskontowanych przepływów do kalkulacji okresu zwrotu nie eliminuje podstawowej wady tej metody, jaką jest nieuwzględnianie korzyści z tytułu realizacji przedsięwzięcia powstających po okresie, w którym skumulowana wartość przepływów wyniesie zero [120].

5. Zmodyfikowana wewnętrzna stopa zwrotu (*MIRR*)

Zmodyfikowana wewnętrzna stopa zwrotu *MIRR*, to dynamiczna metoda oceny efektywności ekonomicznej projektów inwestycyjnych, a także wskaźnik finansowy, wyznaczony w oparciu o tę metodę. Uwzględnia ona zmiany wartości pieniądza w czasie i jest oparta o analizę zdyskontowanych przepływów pieniężnych. *MIRR* jest więc stopą dyskontową, dla której (zdyskontowana) wartość końcowa inwestycji jest równa zaktualizowanej wartości nakładów inwestycyjnych dla danego

projektu. Wartość końcowa to wartość przyszła nadwyżek finansowych netto generowanych przez projekt, składanych za pomocą stopy równej kosztowi kapitału. W porównaniu do *IRR* (ang. *Internal Rate of Return*) modyfikacja polega na tym, że nie dyskontuje się od razu dodatnich przepływów pieniężnych, ale oblicza ich wartość przyszłą wg kosztu kapitału, następnie ta wartość (jako suma) jest dyskontowana do momentu bieżącego.

6. Wskaźnik wartości bieżącej netto (*NPVR*)

Wskaźnik *NPVR* jest to iloraz zaktualizowanej wartości bieżącej netto projektu (*NPV*) i zaktualizowanej wartości bieżącej nakładów inwestycyjnych (*PVI* – ang. *Present Value of Investment*). *NPVR* obliczany jest według wzoru:

$$NPVR = \frac{NPV}{PVI}$$

gdzie: *PVI* – zaktualizowana wartość bieżąca nakładów inwestycyjnych.

Wartość wskaźnika *NPVR* większa od zera oznacza, że projekt generuje wartość *NPV* większą od zera, a więc jego realizacja pozwala na osiągnięcie zwrotu z zainwestowanego kapitału na poziomie wyższym niż koszt kapitału. Niektórzy analitycy stosują metodę *NPVR* do układania listy rankingowej projektów, wychodząc z założenia, że przedsięwzięcia o wyższym wskaźniku *NPVR* są lepsze pod względem finansowym od projektów o niższym *NPVR* [120].

W literaturze przedmiotu [41, 47, 72, 138] metoda *NPV* jest uważana za najwłaściwsze narzędzie oceny opłacalności inwestycji, ponieważ metoda ta jest zgodna z następującymi zaleceniami teoretycznymi [138] :

- uwzględnia cały okres życia projektu inwestycyjnego,
- uwzględnia cel działania przedsiębiorstwa,
- uwzględnia ryzyko projektu inwestycyjnego,
- uwzględnia zmienną wartości pieniądza w czasie,
- określa korzyści netto jako wartości przepływów pieniężnych netto,
- umożliwia zbudowania obiektywnego kryterium.

Przedsięwzięcie inwestycyjne należy podejmować wtedy i tylko wtedy, gdy jego wartość zaktualizowana netto jest większa od 0. To znaczy, że jego realizacja jest opłacalna tylko wtedy, gdy wewnętrzna stopa zwrotu *IRR* jest większa od przyjętej stopy dyskontowej. W przypadku dokonywania wyboru spośród kilku wykluczających się projektów, manager powinien wybrać ten projekt, którego *NPV* jest największe. W przypadku dysponowania ograniczonymi zasobami, w pierwszej kolejności powinny zostać wybrane projekty o najwyższej wartości *NPV* na jednostkę nakładu inwestycyjnego.

4.2. Wady metod opartych na DCF

W procesie liczenia zdyskontowanych przepływów pieniężnych popełnianych jest wiele błędów. Jednym z nich jest problem szacowania kosztu kapitału, który powinien zawierać tylko ryzyko zewnętrzne, które nie może być zdywersyfikowane przez odpowiednią konstrukcję portfela inwestycji. Kolejnym praktycznym błędem jest to, że czasami koszt kapitału zawiera stopę inflacji, podczas gdy prognozowane przepływy pieniężne jej nie zawierają. Aby uniknąć tej nieścisłości powinna być szacowana tylko nominalna wartość przepływów. W sytuacji zmiennych warunków inwestowania może się okazać, że obliczenia oparte na zdyskontowanych przepływach pieniężnych nie pasują do nowej sytuacji [187]. Standardowy model oceny opłacalności przedsięwzięcia inwestycyjnego oparty na *DCF* jest wystarczający dla większości tradycyjnych gałęzi przemysłu, ale brakuje mu elementu elastyczności zarządzania dla nowych rodzajów przedsięwzięć gospodarczych. Z tego też powodu menedżerowie uważają metodę *NPV* za krótkowzroczną i niekompletną. Jej proces kalkulacji bazuje jedynie na informacjach dostępnych w momencie obliczeń. Metoda wartości zaktualizowanej netto zakłada, że decyzja dotycząca podjęcia realizacji inwestycji opiera się na decyzji wszystko albo nic. Metoda *NPV* obliżuje

i wymusza obliczenie bieżącej wartości inwestycji zakładając, że wszystkie koszty zostały już poniesione. Ponadto *NPV* obniża wartość projektu inwestycyjnego, ponieważ nie zawiera elastyczności zarządzania ang. *management flexibility*. Metoda *NPV* pomija możliwość modyfikacji zachowania inwestora, która może nastąpić w wyniku otrzymania jakichś nowych informacji.

Metody oparte na zdyskontowanych przepływach pieniężnych zakładają, że rynkowa pozycja przedsiębiorstwa nie ulegnie zmianie i nie uwzględniają działań i pozycji przedsiębiorstw konkurencyjnych. Zakładają, że sytuacja na rynku jest stabilna i niezmienna. S.C. Myers [123] uważa, że metody oparte na *DCF* nadają się do wyceny papierów wartościowych o stałym dochodzie bądź papierów, od których płacone są regularne dywidendy, natomiast nie nadają się do oceny projektów, w których tkwi duży potencjał wzrostu ich wartości. Jego zdaniem stosowanie metod opartych na zdyskontowanych oczekiwanych przepływach pieniężnych związane jest z paroma trudnościami:

- Oszacowanie stopy dyskontowej. Chodzi tu głównie o trudności związane z ustaleniem właściwej dla danego projektu premii za ryzyko potrzebnej do oszacowania kosztu kapitału własnego (oczekiwanej przez inwestora stopy zwrotu).
- Szacowanie oczekiwanych wartości przepływów pieniężnych w odległym horyzoncie czasu.
- Ujęcie współzależności przepływów generowanych przez różne projekty inwestycyjne podejmowanych przez dane przedsiębiorstwo, co wynika z założenia addytywności projektów inwestycyjnych w metodzie *NPV*. W przypadku projektów tworzących łańcuch generowania wartości (np. od wydobywania surowca po produkcję wyrobu finalnego), własność addytywności może nie zachodzić, ponieważ wartość całego łańcucha może być wyższa niż suma jego składowych.
- Nieuwzględnienie w metodzie *NPV* przyszłych możliwości

wzrostu *growth opportunities*, które mogą wystąpić dzięki realizacji projektu. Chodzi tu o sytuację, kiedy realizacja jednego projektu stwarza możliwość rozpoczęcia następnego [123].

Również inni badacze poddali metodę *NPV* krytyce [37, 87]. Największym zarzutem dla tej metody jest fakt nieuwzględniania przez nią możliwości operowania czasem, na przykład brak możliwości opóźnienia rozpoczęcia projektu. W tym sensie *NPV* jest metodą statyczną.

Metody oparte na *DCF* nie uwzględniają w trakcie realizacji projektu inwestycyjnego ani możliwości pozyskania nowych informacji, ani możliwości uczenia się. Nie uwzględniają żadnych czynników, które mogłyby wpłynąć na zmianę kierunku realizacji inwestycji, a co za tym idzie, mogłyby wpłynąć na minimalizację strat, czy też zwiększenie dochodów. Warunki inwestowania charakteryzują się dużą niepewnością, co wymaga poszukiwania nowych sposobów strategicznego myślenia oraz nowych narzędzi analizy finansowej. Jednym z takich nowych narzędzi są opcje rzeczywiste, które stanowią dobre narzędzie dla szacowania wartości przedsięwzięcia inwestycyjnego i ustalania strategii. Dlatego też opcje realne powinny stanowić swego rodzaju uzupełnienie analizy *NPV*.

4.3. Opcje rzeczywiste

Wartość opcji realnych wynika z tego, że dokonując inwestycji w ryzykowne aktywa, inwestor może się uczyć, dzięki obserwacji tego, co dzieje się w świecie rzeczywistym i dostosowywać swoje zachowanie, w celu zwiększenia potencjalnych korzyści z inwestycji, a także zmniejszenia potencjalnych strat. W przypadku metody opcji realnych wykorzystywana jest uaktualniona wiedza lub informacje, w celu zwiększenia szans i jednocześnie ograniczenia niebezpieczeństw. W

kontekście ryzykownej inwestycji, opierając się na takiej uaktualnionej wiedzy, inwestor ma możliwość podjęciach trzech rodzajów działań:

- może kontynuować dobrą passę, aby zwiększyć możliwe zyski – jest to opcja dalszego rozwoju. Na przykład można zwiększyć skalę projektu w przypadku większej zadeklarowanej przez konsumentów skłonności do nabywania produktów;
- gdy informacja zwrotna jest niepomyślna, możliwe jest zmniejszenie skali inwestycji lub całkowita rezygnacja - jest to opcja rezygnacji, która umożliwia zmniejszenie potencjalnych strat;
- może się wstrzymać od podejmowania dalszych inwestycji, jeżeli informacje, które otrzymuje, sugerują brak pewności co do przyszłych perspektyw - jest to opcja zwłoki lub oczekiwania. W pewnym sensie kupowany jest czas dla inwestycji z nadzieją, że rozwój produktu oraz sytuacji na rynku uczyni ją atrakcyjną w przyszłości.

Jeżeli brane jest pod uwagę zachowanie adaptacyjne, to metodą bardziej zbliżoną do opcji realnych jest metoda drzew decyzyjnych, w przypadku której optymalne decyzje na każdym z etapów zależą od wyników na etapach wcześniejszych. Obie metody przynoszą jednak zazwyczaj różne wartości dla tego samego ryzykownego instrumentu, ponieważ metoda drzewa decyzyjnego opiera się na prawdopodobieństwie i dla każdej gałęzi umożliwia różne wyniki, natomiast metoda opcji realnych jest bardziej ograniczona w swoim podejściu do niepewności. W wersji dwumianowej tej metody, na każdym etapie możliwe są jedynie dwa wyniki, przy czym prawdopodobieństwa nie są określone. Stopy dyskonta używane do oszacowania aktualnych wartości w drzewach decyzyjnych, a przynajmniej te wykorzystywane w sposób konwencjonalny, są z zasady skorygowane o ryzyko i nie zależą od tego, którą z gałęzi drzewa poddajemy analizie. W przypadku metody opcji realnych stopa dyskonta będzie się różnić w zależności od gałęzi

drzewa, która poddawana jest analizie [35]. Można pokazać, że wartość ryzykownego instrumentu będzie taka sama w przypadku opcji realnych oraz drzew decyzyjnych, jeżeli zastosowana zostanie stopa dyskonta uzależniona od danej ścieżki [9].

Symulacje oraz opcje realne są uzupełniającymi się metodami oceny ryzyka.

4.3.1. Rodzaje opcji rzeczywistych

Inwestycje wiążą się z trzema możliwymi opcjami – dalszego rozwoju, zwłoki lub rezygnacji z inwestycji. W literaturze przedmiotu wyróżnia się trzy główne kategorie opcji rzeczowych [36]:

- opcja wzrostu,
- opcja opóźnienia,
- opcja rezygnacji.

1. Opcja wzrostu

Opcja wzrostu (ang. *a growth option, option to expand*) polega na dokonywaniu kolejnych inwestycji, jeśli inwestycja początkowa okazała się sukcesem. W przypadku niektórych projektów nakłady inwestycyjne są duże, a krótkookresowe prognozy przepływów środków pieniężnych obarczone są dużą niepewnością, co skutkuje ujemną wartością *NPV*. Jednak mimo to, projekty takie są realizowane, ponieważ w dłuższym okresie czasu, kiedy wytworzy się rynek na dany produkt i potencjalni nabywcy zdążą się już z nim zapoznać, mogą okazać się bardzo opłacalnymi przedsięwzięciami. Dlatego też opcje wzrostu często określa się mianem opcji strategicznych, ponieważ wyznaczają pozycję konkurencyjną przedsiębiorstwa [101]. Przykładem opcji wzrostu może być nabycie patentu, który pozwoli przedsiębiorstwu na wykorzystanie nowej technologii w przyszłości. Przedsiębiorstwa, które inwestują w prace badawczo-rozwojowe posiadają opcje wprowadzania na rynek nowych produktów. Opcja rozszerzenia projektu jest warta tym więcej,

im większa jest zmienność stóp zwrotu w danej branży i im wyższe są te stopy zwrotu. Opcjami wzrostu są opcje zwiększenia działalności ang.(*scale up*) i opcje przełączania ang.(*switch up*). Opcje zwiększania skali działalności mogą występować w sytuacji, gdy działalność gospodarcza jest już prowadzona, a celem jest zwiększenie przychodów ze sprzedaży, poprzez zintensyfikowanie prowadzonej produkcji lub rozpoczęcie produkcji wyrobów zupełnie nowych. Zachodzi analogia pomiędzy *NPV* projektu polegającego na rozszerzeniu skali działalności a amerykańską opcją kupna. Instrumentem bazowym jest tutaj wartość projektu z uwzględnieniem korzyści rozszerzenia, natomiast ceną wykonania jest nakład inwestycyjny, który musi zostać poniesiony, aby zrealizować rozszerzenie skali działalności. Tak jak w przypadku amerykańskiej opcji kupna, nie znany jest dokładny moment, kiedy dojdzie do rozszerzenia skali działania. Podejmując decyzję o zwiększeniu skali działania, porównuje się korzyści z projektu rozszerzenia skali (po odjęciu potrzebnych nakładów) z korzyściami z projektu bez rozszerzenia. Optymalnym momentem na podjęcie decyzji o rozszerzeniu skali działania jest czas, kiedy wartość wewnętrzna opcji zrówna się z jej wartością całkowitą, to znaczy, gdy przyrost korzyści z odsunięcia rozszerzenia skali w czasie zrówna się z krańcowym kosztem czekania uosabianym jako koszt utraconych korzyści w związku z odsunięciem rozszerzenia skali [121]. Opcje przełączania znajdują zastosowanie w branżach charakteryzujących się szybkim postępem technicznym i dotyczą zmiany wykorzystywanych czynników produkcji lub zmiany całej technologii w celu dostosowania się do zmieniającej się sytuacji rynkowej. Zasady podjęcia decyzji dotyczącej przełączenia odpowiadają zasadom podejmowania decyzji odnoszących się do amerykańskiej opcji sprzedaży. Rolę instrumentu bazowego odgrywa wartość projektu, a ceną wykonania jest wartość projektu polegającego na alternatywnym wykorzystaniu surowców, innych czynników produkcji, czy też zmianie technologii produkcji.

2. Opcja opóźnienia

Opcja opóźnienia (ang. *timing option*, *option to defer*, *option to delay*) polega na czasowym wstrzymaniu inwestycji do momentu uzyskania nowych informacji (dotyczących, np. warunków rynkowych, konkurencji, popytu) lub poprawy warunków inwestowania, które są istotne dla dalszego przebiegu procesu inwestycyjnego. Szczególnie cenne są opcje będące w posiadaniu jednego przedsiębiorstwa, które np. posiada wyłączne prawo do danego patentu. Tego typu opcję rozważa się jako amerykańską opcję kupna, dla której ceną wykonania jest wartość nakładów inwestycyjnych, terminem wygaśnięcia jest okres posiadania przez przedsiębiorstwo praw wyłączności do realizacji projektu. Ceną instrumentu bazowego jest wartość *NPV* projektu. Wartość takiej opcji musi oczywiście uwzględniać wartości utracone w czasie oczekiwania dochodów. Wykonanie opcji jest równoważne rozpoczęciu inwestycji. Zakładając, że:

X – wartość bieżąca inwestycji początkowej,

PV – wartość bieżąca oczekiwanych bieżących przepływów pieniężnych (bez inwestycji początkowej)

to wtedy *NPV* będzie równe różnicy $PV - X$

i

jeśli $PV > X \Rightarrow NPV > 0 \Rightarrow$ projekt powinien zostać rozpoczęty,

jeśli $PV < X \Rightarrow NPV < 0 \Rightarrow$ projekt nie powinien być rozpoczynany.

Wyłączne prawo do realizacji projektu może być cenne nawet, jeśli *NPV* projektu w danej chwili jest ujemne. Przedsiębiorstwo może również poczekać z rozpoczęciem projektu, nawet jeśli jego *NPV* jest dodatnie, aby rozpocząć go w chwili, kiedy jego wartość wzrośnie.

3. Opcja rezygnacji Opcja rezygnacji (ang. *an exit option*, *option to abandon*) polega na zamknięciu projektu inwestycyjnego, kiedy nie ma już potencjału w danym przedsięwzięciu inwestycyjnym, tzn. kiedy przepływy pieniężne projektu okażą się niższe niż oczekiwane. Opcja ta podnosi atrakcyjność projektu inwestycyjnego

i zwiększa prawdopodobieństwo jego akceptacji przez decydentów. Przedsiębiorstwo może nabyć opcję porzucenia przede wszystkim poprzez zawarcie odpowiednich zapisów w umowach (np. zawieranie kontraktów krótko-, a nie długoterminowych, przyjmowanie personelu na zasadzie pracy dorywczej, a nie stałej, korzystanie z leasingu zamiast kupna). Możliwość zaniechania projektu można rozważać jako amerykańską opcję sprzedaży.

Jeśli $V > L \Rightarrow$ wartość opcji porzucenia projektu = 0,

Jeśli $V \leq L \Rightarrow$ wartość opcji porzucenia projektu = $L - V$,

gdzie:

V – wartość dla przedsiębiorstwa w przypadku kontynuacji projektu,

L – wartość, jaką przedsiębiorstwo może uzyskać z natychmiastowej likwidacji lub porzucenia projektu.

Do opcji rezygnacji można zaliczyć opcje zmniejszenia skali (ang. *scale down*). Opcja zmniejszenia skali występuje w sytuacji, gdy ograniczenie produkcji lub całkowita rezygnacja z produkcji danego wyrobu przynosi korzyść, dzięki alternatywnemu zagospodarowaniu majątku (najczęściej jego sprzedaży), służącego do tej pory realizowaniu działalności podlegającej ograniczeniu. Można doszukać się tutaj analogii między *NPV* projektu zmniejszenia skali a amerykańską opcją sprzedaży. Biorąc pod uwagę *NPV* rozumianą jako różnicę między wartością korzyści z alternatywnego zagospodarowania majątku i utraconych korzyści na skutek zmniejszenia skali, rolę instrumentu bazowego pełni wartość utraconych korzyści na skutek zmniejszenia skali. Ceną wykonania jest natomiast wartość korzyści przy założeniu alternatywnego zagospodarowania majątku albo oszczędność na wydatkach inwestycyjnych projektu w mniejszej skali. Opcję zmniejszenia skali należy wykonać, gdy przyrost korzyści z odsunięcia zmniejszenia skali jest równy kosztowi utraconych korzyści wskutek odsunięcia zmniejszenia skali (krańcowym kosztem czekania). Innymi słowy należy ją wykonać, gdy jej wartość czasowa wyniesie zero [121].

Metoda opcji realnych uwzględnia pozytywny aspekt niepewności. Niepewność może powodować straty, ale jednocześnie, można zauważyć, że niepewność może być wykorzystywana do potencjalnych zysków, jak również że uaktualnione informacje mogą być wykorzystywane do zwiększania potencjału pozytywnego i zmniejszania potencjału negatywnego, które są nieodłączną częścią inwestycji. W istocie można zauważyć, że konwencjonalne metody korekty o ryzyko nie uwzględniają wiążących się z nim szans i z tego względu do wartości skorygowanej o ryzyko powinniśmy dodawać premię za opcję [35].

4.4. Stopa zwrotu

Aby móc porównać opłacalność różnego rodzaju inwestycji należy posiadać wskaźnik efektywności inwestycji. Takim wskaźnikiem jest stopa zwrotu (zwrot z inwestycji) – jest to dochód z zainwestowanego kapitału, który wyraża się w procentach. Można ją opisać następującym wzorem [70]:

$$d = \frac{FV}{PV} - 1,$$

gdzie

- d - stopa zwrotu,
- FV - wartość końcowa inwestycji,
- PV - wartość początkowa inwestycji.

Stopa zwrotu jest pewnego rodzaju rekompensatą dla inwestorów w zamian za zgodę na odroczone płatności. Może być również określona na podstawie alternatywnych sposobności inwestycyjnych [143]. Innymi słowy koszt kapitału jest stopą zwrotu, którą przedsiębiorstwo musi osiągnąć na nakładach pieniężnych użytych do sfinansowania inwestycji. W literaturze przedmiotu [54, 82] określono koszt kapitału jako koszt oczekiwanej stopy zwrotu z zainwestowanego kapitału przy danym

poziomie ryzyka. Oczekiwana stopa zwrotu będzie wyższa, kiedy ponoszone będzie większe ryzyko.

Wartość obecna przepływów pieniężnych projektu inwestycyjnego obliczana jest za pomocą stopy dyskontowej, która może być zdefiniowana jako [72]:

- minimalna stopa zwrotu z przedsięwzięcia,
- stopa zwrotu możliwa do uzyskania na rynku,
- koszt kapitału koniecznego do sfinansowania projektu o znanym ryzyku (WACC).

W modelowaniu finansowym możliwe jest znalezienie postaci rozkładu zmiennej losowej poprzez dopasowanie jej do jednego ze znanych rozkładów statystycznych. Poniżej przedstawiono kilka rozkładów najczęściej wykorzystywanych w praktyce [32].

1. Rozkład zero-jedynkowy

Jest to najprostszy rozkład zmiennej losowej, w którym przyjmuje ona tylko dwie wartości - 1 z prawdopodobieństwem p lub 0 z prawdopodobieństwem $1 - p$. Osiągnięcie przez zmienną wartości 1 uznawane jest za „sukces”, natomiast zdarzenie, gdy zmienna przyjmie wartość 0 nazywane jest „porażką”.

2. Rozkład Bernoulliego (dwumianowy)

Jest to rozkład dyskretny, związany z rozkładem zero-jedynkowym. Suma n zmiennych o rozkładzie zero-jedynkowym ma rozkład Bernoulliego $\mathcal{B}(n, p)$. Rozkład ten zakłada, że prawdopodobieństwo sukcesu w każdej z n niezależnych prób jest takie samo i równe p .

3. Rozkład normalny

Najbardziej znanym i najszerzej stosowanym rozkładem jest rozkład normalny, który opisuje wiele naturalnych zjawisk. Jest on określony przez dwie wartości - średnią oraz odchylenie standardowe. Niektóre z jego zastosowań to: stopa zwrotu z akcji, wzrost ludzi, stopa inflacji, przychody ze sprzedaży. Dzięki

Centralnemu Twierdzeniu Granicznemu większość zjawisk może być przybliżona rozkładem normalnym.

4. Rozkład logarytmiczno-normalny

Rozkład logarytmiczno-normalny zmiennej oznacza, iż jej logarytm naturalny ma rozkład normalny. Rozkład ten, podobnie jak rozkład normalny określony jest przez średnią oraz odchylenie standardowe, jest nieograniczony z prawej strony, natomiast w przeciwieństwie do rozkładu normalnego, jest ograniczony z lewej strony przez 0. Ta własność sprawia, że rozkład ten jest użyteczny w przypadku, gdy wartości są skończone dodatnio i nie mogą być ujemne. Może więc opisywać takie zmienne jak całkowity zwrot z akcji, gdy potencjalna strata akcjonariusza jest ograniczona do kwoty, którą zainwestował lub sprzedaż produktu, która nie może być ujemna. Rozkład ten odzwierciedla stopy zwrotu, które są bardziej prawdopodobne po lewej stronie niż w prawym ogonie.

5. Rozkład jednostajny

Rozkład jednostajny jest najprostszym rozkładem ciągłym, zdefiniowanym przez dwie wartości - maksimum oraz minimum, który zakłada, że każda wartość pomiędzy nimi jest osiągnięta przez zmienną z jednakowym prawdopodobieństwem. W rozkładzie tym nieznana jest wartość najbardziej prawdopodobna. Chociaż rozkład ten jest bardzo prosty, to doskonale nadaje się do opisanie takich zjawisk jak np. wyciek z rurociągu lub czas do awarii jakiegoś komponentu, po okresie jego wypalenia do wymaganego jego czasu wymiany. Stosowany tutaj odzwierciedla takie wartości stopy zwrotu, które są przyjmowane na danym przedziale z jednakowym prawdopodobieństwem.

6. Rozkład trójkątny

Rozkład trójkątny jest odpowiedni do użycia, gdy nieznane są wartości zmiennej, ale znane jej minimum, maksimum oraz najbardziej prawdopodobna wartość. Jest on całkowicie określony

przez te trzy parametry. Rozkład trójkątny pozwala modelować takie losowe stopy zwrotów, których wartości skupione wokół średniej są częściej przyjmowane niż te na brzegach. Jest podobny do rozkładu normalnego.

Jak znaleźć postać stopy zwrotu? Pierwszy sposób to użycie danych historycznych do wyliczenia stóp zwrotu w okresach przeszłych i użycie ich do wyliczenia przyszłych stóp zwrotu. Metoda ta ma jednak wady, ponieważ można jedynie odtworzyć to co już było więc metoda ta nie jest precyzyjna.

Drugi sposób to wykorzystanie metod wnioskowania statystycznego, w celu dopasowania teoretycznego rozkładu zmiennej losowej, a następnie sprawdzenie jego dopasowania odpowiednim testem statystycznym. Metoda ta jest bardziej dokładna. Ponieważ rozkłady empiryczne stóp zwrotu inwestycji finansowej mogą wykazywać istotne rozbieżności względem rozkładu normalnego [178], należy sprawdzić dopasowanie rozkładu empirycznego do innych znanych rozkładów teoretycznych. Niedopasowanie rozkładu teoretycznego może być źródłem istotnych błędów obliczeniowych, prowadzących w konsekwencji do przeszacowania lub niedoszacowania ryzyka rynkowego. Jedną z metod dopasowania są statystyki jakości dopasowania (ang. *goodness of fit*) – statystyka chi-kwadrat (χ^2), Kołmogorowa-Smirnowa (KS) oraz Andersona-Darlinga (AD) [184]. Wykorzystanie symulacji do oszacowania ryzyka wymaga omówienia kilku kwestii [35].

- Niska jakość danych wejściowych prowadzi do małej użyteczności wyników analizy. Rozkłady wybrane dla danych wejściowych powinny zostać wybrane na podstawie analizy i danych. Analizy powinny dokonywać osoby, które posiadają odpowiednią wiedzę statystyczną, dotyczącą rozkładów i ich cech.
- Dane rzeczywiste mogą nie pasować do rozkładów. Zastosowanie rozkładu statystycznego, który nie odpowiada rozkładowi

rzeczywistemu będącemu podstawą danych wejściowych zmiennych, doprowadzi do błędnych wyników.

- Rozkłady o charakterze niestałym. W przypadku, gdy dane dopasowane są do rozkładu statystycznego lub kiedy dostępne są rozkłady danych historycznych, zmiany w strukturze rynku doprowadzić mogą do zmian w rozkładach. W niektórych przypadkach może to skutkować zmianami formy rozkładu, w innych zaś zmianami parametrów rozkładu. Dlatego średnia oraz wariancja pochodzące z danych historycznych dla danych wejściowych mających rozkład normalny w następnym okresie mogą ulec zmianie.
- Zmiana korelacji pomiędzy danymi wejściowymi. Stabilna i możliwa do przewidzenia korelacja pomiędzy zmiennymi danych wejściowych może zostać uwzględniona w symulacjach. Niestety, kiedy korelacje pomiędzy tymi zmiennymi ulegają zmianom w czasie, stają się one znacznie trudniejsze do modelowania.

4.5. Stochastyczne przepływy pieniężne

Zazwyczaj, gdy inwestor decyduje się na jakąś inwestycję, to początkowy wkład kapitału jest znany, natomiast wypłaty czy koszty ponoszone w kolejnych okresach nie są znane i mogą być traktowane jako niezależne zmienne losowe. Poniżej zostanie przedstawiona ocena opłacalności takiej inwestycji w przypadku, gdy inwestor jest wrażliwy na ryzyko. Model budowany jest z wykorzystaniem kryterium *NPV*, które mówi, że projekt jest opłacalny, gdy $NPV > 0$. Model zakłada, że w czasie trwania inwestycji stopa dyskontowa jest stała, natomiast przepływy pieniężne są zmiennymi losowymi. Stosunek inwestora do ryzyka, reprezentowany jest przez współczynnik γ , a kryterium zbudowane jest przy użyciu gwarantowanego równoważnika dla wykładniczej funkcji użyteczności, zwanego entropijną miarą ryzyka (Tabela 4).

Budowana tutaj koncepcja modelu opłacalności inwestycji z uwzględnieniem współczynnika wrażliwości na ryzyko wymaga rozważenia pewnego problemu. Problem ten dotyczy wyboru alternatywy a z pewnego zbioru A , którego rezultatem będzie losowa wypłata X_a o rozkładzie prawdopodobieństwa zależnym od a . Decydent, który jest niewrażliwy na ryzyko wybierze oczywiście alternatywę a , dla której wartość oczekiwana EX_a jest maksymalna (kryterium maksymalizacji wartości oczekiwanej) [59].

Zajmując się problematyką wyboru dobrego portfela inwestycyjnego Markowitz [25] zasugerował, aby kryterium optymalizacji opierało się na maksymalizacji następującej sumy:

$$M_a = E[X_a] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}[X_a], \quad (4.4)$$

gdzie $\gamma > 0$ jest współczynnikiem wrażliwości na ryzyko danego przedsiębiorcy.

Biorąc pod uwagę to wyrażenie inwestor dba o możliwie wysoką wartość oczekiwaną i możliwie małą wariancję losowej wypłaty. Nieco ogólniejsze i subtelniejsze podejście do wskazanego problemu wywodzi się z teorii użyteczności i optymalizacji stochastycznej [16, 25, 49, 174]. Polega ono na maksymalizacji wielkości postaci:

$$W_a = -\frac{1}{\gamma} \ln(E[e^{-\gamma X_a}]), \quad \text{gdzie } \gamma > 0 \quad (4.5)$$

jest współczynnikiem ryzyka (patrz Rozdział 3).

Gdy γ jest bliskie zera, to po zastosowaniu rozwinięcia funkcji e^x oraz $\ln(1+x)$ w szereg Taylora dowodzi się, że W_a jest granicą szeregu zawierającą wyrażenie EX_a i dalsze momenty centralne zmiennej losowej X_a pomnożone przez liczby zależne od potęg liczby γ i zbieżne w szybkim tempie do zera. Otrzymać można następującą aproksymację

$$W_a \approx E[X_a] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}[X_a].$$

W przypadku, gdy losowa wypłata X_a ma rozkład normalny w powyższym wzorze mamy równość. Dla innych rozkładów równość nie występuje. Jednak zauważono, że w przypadku współczynnika ryzyka γ bliskiego 0, $\gamma > 0$ kryterium wyboru oparte o wyrażenie postaci W_a jest bliskie idei Markowitza. Wartości γ bliskie zeru świadczą o stosunkowo umiarkowanej wrażliwości na ryzyko. Ze wzoru (4.5) wynika, że dla $\gamma > 0$ maksymalizacja wyrażenia W_a jest równoważna minimalizacji $\ln(E[e^{\gamma X}])$, a ze względu na to, że logarytm jest funkcją rosnącą, jest ona dalej równoważna minimalizacji wielkości $Ee^{-\gamma X_a}$.

Przykład 4.2. Niech zbiór alternatyw składa się z dwóch inwestycji $A = \{1, 2\}$. Założono, że zmienna losowa X_1 przyjmuje wartości $-1, 1$ z jednakowymi prawdopodobieństwami. Niech $X_2 = 2X_1$. Wydaje się, że ostrożny inwestor będzie preferował X_1 ze względu na mniejszą wariancję. Obie zmienne losowe mają zerowe wartości oczekiwane i są nierozróżnialne przez osobę niewrażliwą na ryzyko. Zauważono, że:

$$E[e^{-\gamma X_1}] = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} > E[e^{-\gamma X_2}] = \frac{e^{2\gamma} + e^{-2\gamma}}{2}$$

dla $\gamma > 0$.

Dla $\gamma = 0, 1$ otrzymano $E[e^{-0,1X_1}] \approx E[e^{-0,1X_2}] \approx 1$, czyli wspomniane wyżej kryterium jest zgodne z oczekiwaniami. Oczywiście może być ono rozstrzygające w sytuacjach, gdy intuicja jest niemożliwa ze względu na bardziej skomplikowane losowe wypłaty czy ich rozkłady prawdopodobieństwa.

W podobny sposób można porównywać losowe zwroty z inwestycji X i Y . Wiadomo, że inwestycja X jest lepsza od Y , gdy:

$$-\frac{1}{\gamma} \ln(E[e^{-\gamma X}]) \geq -\frac{1}{\gamma} \ln(E[e^{-\gamma Y}]),$$

gdzie $\gamma > 0$ jest ustalonym czynnikiem wrażliwości na ryzyko.

Oczywiście, powyższa nierówność jest równoważna nierówności:

$$E[e^{-\gamma X}] \leq E[e^{-\gamma Y}].$$

Powyższe rozważania dotyczą jednookresowego przepływu pieniężnego.

Można rozważyć model, w którym wpływy z inwestycji są niezależnymi zmiennymi losowymi Z_1, Z_2, \dots, Z_n otrzymanymi na końcu każdego okresu. Stosując metodę *NPV* można zbudować kryterium opłacalności inwestycji z uwzględnieniem czynnika wrażliwości na ryzyko. Losowa wartość *NPV*, oznaczana dalej przez Y , ma znaną postać:

$$Y = \sum_{t=1}^n \frac{Z_t}{(1+d)^t} - I,$$

gdzie: $d > 0$ jest stopą dyskontową w jednym okresie, a I oznacza bieżący koszt inwestycji.

Przyjmując, że współczynnik dyskonta wynosi: $b_t = \frac{1}{(1+d)^t}$, $t = 1, \dots, n$, wyrażenie na *NPV* przyjmuje postać:

$$Y = b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_n Z_n - I.$$

1. Inwestor neutralny (niewrażliwy) względem ryzyka

W tym wypadku inwestor opiera swoją decyzję na porównaniu wartości oczekiwanych z losowych wpływów oraz wartości początkowego wkładu. Zatem:

$$\begin{aligned} EY &= E(b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_n Z_n) - I = \\ &= \sum_{t=1}^n b_t E Z_t - I = \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+d)^t} E Z_t - I. \end{aligned}$$

Reguła decyzyjna N1

Założono, że $E Z_t = \mu_t$ dla każdego $t = 1, 2, \dots, n$. Inwestycję należy przyjąć, gdy:

$$\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+d)^t} \mu_t \geq I.$$

Reguła decyzyjna N2

Gdy losowe wpływy opisane są tym samym rozkładem o średniej

μ , wtedy inwestycja zostanie przyjęta, jeśli:

$$\frac{\mu}{d} \left(1 - \frac{1}{(1+d)^n} \right) \geq I.$$

2. Inwestor wrażliwy na ryzyko

W tym przypadku inwestor dba także o przyszłe momenty losowych wpływów. Jego współczynnik wrażliwości na ryzyko wynosi $\gamma > 0$. Nietrudno zauważyć, że taka inwestycja jest dla decydena do zaakceptowania, gdy:

$$-\frac{1}{\gamma} \ln E e^{-\gamma Y} \geq -\frac{1}{\gamma} \ln E e^{-\gamma I} \iff E e^{-\gamma Y} \leq e^{-\gamma I}.$$

Skoro wpływy Z_1, Z_2, \dots, Z_n są niezależne, to wiadomo, że również niezależne są zmienne losowe $e^{-\gamma b_1 Z_1}, e^{-\gamma b_2 Z_2}, \dots, e^{-\gamma b_n Z_n}$ i dlatego:

$$E[e^{-\gamma Y}] = E[e^{-\gamma(b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_n Z_n)} e^{\gamma I}] = e^{\gamma I} \prod_{t=1}^n E e^{-\gamma b_t Z_t}.$$

Zatem inwestycja jest do przyjęcia dla inwestora wrażliwego na ryzyko, gdy:

$$\prod_{t=1}^n E e^{-\gamma b_t Z_t} \leq e^{-\gamma I}. \quad (4.6)$$

Jeśli założone zostanie dodatkowo, że losowe wpływy Z_t opisane są tym samym rozkładem prawdopodobieństwa, wtedy wzór (4.6) będzie można napisać jeszcze w zgrabniejszej postaci. Ten przypadek zostanie omówiony poniżej.

W badanych przypadkach stopa zwrotu z inwestycji była stała. Zmieniał się jedynie rozkład losowych wpływów z inwestycji. Przeanalizowano i porównano skłonność do inwestycji o tych samych parametrach inwestorów, którzy charakteryzowali się różnymi wartościami współczynnika wrażliwości na ryzyko. Wyniki tych analiz wskazują, że rosnąca awersja do ryzyka zmniejsza zainwestowane kwoty kapitału.

4.5.1. Przypadek, w którym wpływy z inwestycji mają rozkład normalny

Założono dodatkowo, że losowe wpływy Z_1, Z_2, \dots, Z_n pochodzą z rozkładu normalnego $N(\mu_t; \sigma_t)$. Wtedy $Y = b_t Z_t$ ma rozkład $N(b_t \mu_t, b_t \sigma_t)$. Ze wzoru (7.1) w Dodatku 7.2 oraz ze wzoru (4.6) otrzymano

$$\prod_{t=1}^n e^{-\gamma b_t \mu_t + \frac{\gamma^2 b_t^2 \sigma_t^2}{2}} \leq e^{-\gamma I} \iff \sum_{t=1}^n \left(-\gamma b_t \mu_t + \frac{\gamma^2 b_t^2 \sigma_t^2}{2} \right) \leq -\gamma I.$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\gamma > 0$ i podstawiając $b_t = \frac{1}{(1+d)^t}$ ostatni wzór można zapisać jako:

$$\sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{(1+d)^t} \mu_t - \frac{\gamma b_t^2 \sigma_t^2}{2} \right) \geq I. \quad (4.7)$$

Reguła decyzyjna RS1:

Inwestycję należy przyjąć, gdy:

$$\sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{(1+d)^t} \mu_t - \frac{\gamma b_t^2 \sigma_t^2}{2} \right) \geq I.$$

Reguła decyzyjna RS2:

Jeśli wpływy pochodzą z tego samego rozkładu normalnego $N(\mu; \sigma)$, to inwestycję należy przyjąć, gdy:

$$\frac{\mu}{d} \left(1 - \frac{1}{(1+d)^n} \right) - \frac{\gamma \sigma^2}{2} \frac{1}{d^2 + 2d} \left(1 - \frac{1}{(1+d)^{2n}} \right) \geq I.$$

Przykład 4.3. Rozważono inwestycję dziesięcioletnią. Wpływy losowe są niezależne o rozkładzie $N(10\ 000; 100)$. Przyjmując, że stopa procentowa w każdym okresie wynosi $d = 0,04$, zaś inwestor charakteryzuje się współczynnikiem ryzyka $\gamma = 0,02$. Z reguły

decyzyjnej **RS1** otrzymano, iż inwestycja zostanie przyjęta, jeśli jej bieżący koszt I będzie wynosić co najwyżej 80 442,77 zł. Jeśli inwestor jest neutralny względem ryzyka, to z reguły decyzyjnej **N2** wynika, że inwestycja zostanie przyjęta, jeśli jej bieżący koszt wynosić będzie 81 108,96 zł. Można się przekonać, że świadomość ryzyka nieco osłabiła zapał inwestycyjny.

4.5.2. Przypadek, w którym wpływy z inwestycji mają rozkład jednostajny

Założono, że tym razem wpływy pochodzą z rozkładu jednostajnego $U[m, n]$, gdzie m oraz n są pewnymi stałymi. Wtedy:

$$Ee^{-\gamma b_t Z_t} = \frac{1}{n-m} \int_m^n e^{-\gamma b_t x} dx = \frac{1}{n-m} \frac{e^{-\gamma b_t n} - e^{-\gamma b_t m}}{-\gamma b_t}.$$

Podstawiając powyższą formułę do wzoru (4.6) otrzymano kolejną regułę decyzyjną.

Reguła decyzyjna RS3:

Inwestycję należy przyjąć, jeśli:

$$-\frac{1}{\gamma} \ln \left[-\frac{1}{(n-m)\gamma} \prod_{t=1}^n \left(e^{\frac{-\gamma m}{(1+d)^t}} - e^{\frac{-\gamma n}{(1+d)^t}} \right) (1+d)^t \right] \geq I$$

lub równoważnie:

$$-\frac{1}{\gamma} \sum_{t=1}^n \ln \left[-\frac{(1+d)^t}{(n-m)\gamma} \left(e^{\frac{-\gamma m}{(1+d)^t}} - e^{\frac{-\gamma n}{(1+d)^t}} \right) \right] \geq I.$$

Przykład 4.4. Rozważono inwestycję trzyletnią i przyjęto, że losowe wpływy Z_1, Z_2, Z_3 pochodzą z rozkładu jednostajnego na odcinku $[800, 1\ 000]$. Przyjęto, że stopa procentowa wynosi $d = 0,04$. Inwestor

niewrażliwy na ryzyko, stosując regułę decyzyjną **N2**, podejmie się inwestycji, jeśli jej bieżący koszt I będzie wynosił co najwyżej 2 497,58 zł, ponieważ wtedy NPV będzie dodatnie. Istotnie, otrzymano:

$$900 \left(\frac{1}{(1+d)} + \frac{1}{(1+d)^2} + \frac{1}{(1+d)^3} \right) \geq I \implies \frac{900}{d} \left(1 - \frac{1}{(1+d)^3} \right) \geq I.$$

Stąd $I \leq 2497,58$.

Jeśli inwestor jest wrażliwy na ryzyko, to inwestycja zostanie przyjęta, jeśli kapitał początkowy, niezbędny do uruchomienia projektu o założonych wpływach, przy uwzględnieniu współczynnika wrażliwości na ryzyko inwestora, będzie równy co najwyżej wartościom podanym w Tabeli 5.

Tabela 5. Wartości krytyczne dla bieżącego wkładu I obliczone na podstawie **RS3**

Współczynnik wrażliwości na ryzyko γ	Wkład inwestora potrzebny do przyjęcia inwestycji
0,01	2455,92
0,05	2353,53
0,1	2307,59
0,9	2237,12

Przykład 4.5. Rozważono dwie inwestycje: sześciolletnią i dziesięcioletnią. Losowe wpływy Z_i pochodzą z rozkładu jednostajnego na odcinku $[-50, 300]$. Przyjęto, że stopa procentowa wynosi $d = 0,04$. Inwestor niewrażliwy na ryzyko, stosując regułę decyzyjną **N2** podejmie się inwestycji, jeśli jej bieżący koszt I będzie wynosił co najwyżej 655,27 zł w przypadku inwestycji sześciolletniej oraz co najwyżej 1 013,86 zł w przypadku inwestycji dziesięcioletniej. Jeśli inwestor jest wrażliwy na ryzyko, to inwestycja zostanie przyjęta, jeśli bieżący koszt będzie równy co najwyżej wartościom podanym w Tabeli 6.

Tabela 6. Wartości krytyczne dla bieżącego wkładu I obliczone na podstawie **RS3**

Współczynnik wrażliwości na ryzyko γ	Inwestycja sześćoletnia	Inwestycja dziesięcioletnia
0,01	436,72	695,16
0,02	281,20	461,63
0,03	180,74	306,44
0,04	113,16	200,30
0,05	64,88	123,75
0,1	-57,02	-71,58

Zauważono, że w przypadku inwestora z dość wysoką niechęcią do ryzyka ani inwestycja sześćoletnia, ani dziesięcioletnia nie są warte rozpatrzenia. Podane przykłady pokazują, że skłonność do inwestowania zależy od współczynnika wrażliwości na ryzyko inwestora. Świadomość ryzyka wpływa na wielkość kwoty, którą jest on skłonny wydać na początku inwestycji. Ta kwota jest mniejsza dla inwestora wrażliwego na ryzyko niż dla inwestora neutralnego. W przypadku, gdy inwestor oczekuje dużych wpływów i wie, że one „przyjdą”, wtedy jest w stanie wyłożyć na inwestycję dużą kwotę (tak jak w przypadku rozkładu $U[800,1000]$). Natomiast, gdy losowe wpływy mogą okazać się także stratami, to inwestor zaakceptuje inwestycję, w której koszt bieżący nie przekroczy średniej z losowych wpływów.

Podsumowanie

W rozdziale tym rozważono model NPV w nowym ujęciu. Pokazano, że skłonność do inwestowania zależy od czynnika wrażliwości na ryzyko. Zbudowano dynamiczny model oraz opracowano kryteria jego oceny. Ponadto, dostosowano wzory do modelu, w którym wpływy mają rozkład jednostajny oraz normalny. Warto zaznaczyć, że

kryteria te mogą być zastosowane do dowolnego rozkładu wpływów pieniężnych. Przeanalizowane przykłady potwierdziły założenia modelu, że świadomość ryzyka osłabia zapał inwestycyjny oraz, że inwestowane kwoty zależą od stosunku inwestora do ryzyka.

Rozdział 5

Wieloetapowy proces decyzyjny zarządzania kapitałem

Inwestor podejmuje decyzje inwestycyjne w warunkach niepewności, tzn. kiedy nie można z góry przewidzieć efektu inwestycji. Aby osiągnąć pożądany rezultat działań, decydent musi podjąć szereg kolejnych decyzji. Wtedy rozważany jest tzw. proces decyzyjny wieloetapowy [95]. Decydent kieruje się własnym celem inwestycyjnym, na każdym etapie podejmuje decyzje dotyczące strategii inwestowania. W zależności od przyjętej strategii, zyski z inwestycji mogą być różne. W przypadku, gdy podany jest efekt końcowy, a celem jest określenie ciągu decyzji prowadzących do pożądanego efektu końcowego, stosowane są metody *programowania dynamicznego* [21].

5.1. Programowanie dynamiczne

Programowanie dynamiczne jest techniką stosowaną przeważnie do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. Wynalazcą techniki jest amerykański matematyk Richard Bellman, uhonorowany za

to odkrycie medalem IEEE (ang. *medal of honour*) w 1979 roku. Klucz do zaprojektowania algorytmu tą techniką leży w znalezieniu równania rekurencyjnego opisującego optymalną wartość funkcji celu dla danego problemu jako funkcji optymalnych wartości funkcji celu dla podproblemów o mniejszych rozmiarach. Należy podzielić dane zagadnienia na podproblemy (etapy), a następnie rozwiązywać je sekwencyjnie, aż do znalezienia rozwiązania optymalnego. Programowanie dynamiczne, rozwiązując podproblemy, znajduje optymalną wartość funkcji celu dla całego zagadnienia. Rozwiązanie ostatniego z rozpatrywanych podproblemów jest na ogół wartością rozwiązania zadanego zagadnienia. Rozwiązaniem rozważanego problemu jest znalezienie strategii optymalnej, czyli takiego ciągu decyzji, dla którego funkcja celu osiąga ekstremum (w zależności od jej praktycznego sensu - minimum albo maksimum). Aby można było zastosować metodę programowania dynamicznego problem ten musi mieć własność Markowa, tzn. decyzje optymalne na pewnym etapie procesu, nie zależą od wcześniejszych decyzji, jedynie od stanu wynikającego z ich podjęcia.

Z własności Markowa wynika **zasada optymalności Bellmana**, na której oparto metodę programowania dynamicznego. „Strategia optymalna ma tę własność, że niezależnie od tego, jaki był stan początkowy i jakie były decyzje początkowe, pozostałe decyzje muszą tworzyć strategię optymalną ze względu na stan będący efektem tych początkowych decyzji.” [20]

Programowanie dynamiczne wykorzystuje zasadę optymalności Bellmana niezależnie od algorytmu. W myśl tej zasady, optymalne rozwiązanie zagadnień z zakresu programowania dynamicznego ma tę własność, że optymalne rozwiązanie dla k -tego etapu jest jednocześnie rozwiązaniem optymalnym dla etapów $k + 1, k + 2, \dots, N$. Tak więc, optymalne rozwiązanie dla etapu pierwszego stanowi optymalne rozwiązanie dla całego problemu. W związku z zasadą optymalności

Bellmana problem z zakresu programowania dynamicznego rozwiązuje się rozpoczynając od poszukiwania rozwiązania dla ostatniego etapu N , a następnie cofając się poszukuje się rozwiązania dla etapu $N - 1$. Uzyskane w ten sposób rozwiązanie dla etapów $N - 1$ oraz N jest optymalne bez względu na to, w jaki sposób osiągnięto etap $N - 1$. Powtarzając w powyższy sposób etap po etapie, dochodzi się do rozwiązania optymalnego dla pierwszego etapu, a więc i dla całego problemu.

Niejednokrotnie jednoznaczne opisanie dynamiki procesu oraz oszacowanie skutków podejmowanych decyzji nie jest jednak możliwe. W wielu przypadkach osoby rozwiązujące algorytm starają się uzyskać częściową wiedzę pozwalającą na oszacowanie rozkładów prawdopodobieństwa, opisujących zachowanie się procesu w zależności od podejmowanych decyzji oraz wartości kryteriów etapowych związanych z tymi zmianami. Podejście to nazwane jest podejściem stochastycznym. Oceniając rozpatrywane strategie, wykorzystuje się pojęcie wartości oczekiwanej strategii, związane ze znanym decydującemu rozkładem prawdopodobieństwa w zbiorze stanów początkowych. Do określenia strategii optymalnej wykorzystuje się zasadę optymalności Bellmana, tym razem w wersji stochastycznej [161].

Pierwszymi, którzy zastosowali równania Bellmana w ekonomii byli Martin Beckmann i Richard Muth w pracy z 1954 roku *On the Solution to the Fundamental Equation of Inventory Theory*. Martin Beckmann jest również autorem pracy o teorii konsumpcji z 1959, w której wykorzystał równanie Bellmana. Kolejnym znanym zastosowaniem równania Bellmana w ekonomii jest praca Roberta Mertona z 1973 roku, która dotyczy międzyokresowego modelu wyceny aktywów (*An Intertemporal Capital Asset Pricing Model*). Rozwiązanie teoretycznego modelu Mertona, w którym inwestor dokonuje wyboru pomiędzy przychodami dziś lub przychodami w przyszłości czy też zyskami kapitałowymi, jest formą równania

Bellmana. Nancy Stokey, Robert E. Lucas i Edward Prescott opisali dokładnie programowanie dynamiczne stochastyczne i niestochastyczne oraz podali twierdzenia na istnienie rozwiązań problemów spełniających określone warunki. Opisali oni również wiele przykładów modelowania teoretycznych problemów ekonomii przy użyciu metod rekurencyjnych (*Recursive Methods in Economic Dynamics*). Książka ta przedstawia zastosowania dynamicznego programowania do rozwiązania szerokiego zakresu teoretycznych problemów ekonomicznych, w tym optymalnego wzrostu gospodarczego, wydobycia zasobów, problemów dyrektora, finansów publicznych, inwestycji biznesowych, wyceny aktywów, podaży czynników i organizacji przemysłowej. Lars Ljungqvist i Thomas Sargent stosują programowanie dynamiczne, aby badać różne teoretyczne problemy dotyczące polityki pieniężnej, polityki fiskalnej, podatków, wzrostu gospodarczego, teorii wyszukiwania i ekonomii pracy (*Recursive Macroeconomic Theory*). Natomiast Avinash Dixit i Robert Pindyck zastosowali programowanie dynamiczne do oceny projektów inwestycyjnych (*Investment Under Uncertainty*).

5.2. Model

W tym rozdziale zaproponowano metodę badania poziomu zasobów firmy lub zasobów naturalnych, opisanych pewnym rekurencyjnym równaniem stochastycznym bądź deterministycznym. Do tego celu wykorzystano tzw. rekurencyjne preferencje decydenta.

Każdy projekt, stan kapitału wymaga podejmowania decyzji w określonych momentach czasu i wyboru takich akcji, które maksymalizowałyby zdefiniowaną funkcję celu, zgodnie z zadanymi warunkami.

Rekurencyjne preferencje mogą być w tym zagadnieniu bardzo pomocne, głównie z trzech powodów:

- dostarczają możliwości i metody uchwycenia różnych preferencji inwestora,
- pozwalają na rozróżnianie pomiędzy postawą decydenta w stosunku do ryzyka a postawą decydenta w stosunku do substytucji międzyokresowej,
- pozwalają na stosowanie metod programowania dynamicznego, np. indukcji wstecznej w modelu ze skończonym horyzontem czasowym.

Rekurencyjne preferencje, zwane także rekurencyjnymi użytecznościami, zostały zaksjomatyzowane przez Koopmansa [93] w 1960 roku dla poziomu kapitału opisanego równaniem deterministycznym. Kreps i Porteus [96] rozszerzyli podejście Koopmansa na modele stochastyczne, a Epstein i Hynes [43] oraz Epstein i Zin [44] uwzględnili w tych preferencjach koncepcję substytucji międzyokresowej. Rekurencyjne użyteczności znalazły zastosowanie w zarządzaniu zasobami naturalnymi [58, 91, 128]. Obecnie badane są one w ekonomii na czołowych uczelniach [134, 135].

Modele użyteczności rekurencyjnej przedstawiają preferencje agenta jako rozwiązanie nieliniowych równań funkcyjnych. Dlatego, jak zauważono w [17, 117, 152], modele te mogą być analizowane za pomocą metod programowania dynamicznego, które zapewniają odpowiednie narzędzia do uchwycenia awersji do ryzyka decydenta przy jednoczesnym zachowaniu tej samej elastyczności substytucji międzyokresowej.

Model zarządzania kapitałem

Rozważono wieloetapowy model konsumpcji z czasem dyskretnym $t = 1, 2, 3, \dots$. Niech $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots)$, gdzie $c_t \geq 0$ dla każdego $t = 1, 2, 3, \dots$ będzie ciągiem konsumpcji danego kapitału. Funkcja U nazywana jest rekurencyjną funkcją użyteczności, jeśli spełnia

następujące równanie:

$$U(c) = W(c_1, U(c_2, c_3, \dots)), \quad (5.1)$$

gdzie W jest tzw. funkcją agregującą, zwaną także agregatem [17, 152]. Powyższą własność rekurencji (5.1) wprowadził Koopmans [93] w 1910 roku. Później wielu wybitnych ekonomistów [28, 67, 104, 105, 170] rozważało różne klasy funkcji użyteczności U w zależności od postaci agregatu W . W tej pracy posłużono się następującą funkcją agregującą:

$$W(z_1, z_2) = ((1 - b)z_1^\rho + bz_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad (5.2)$$

gdzie: $b \in (0, 1)$ oznacza współczynnik dyskonta, a ρ jest stałą należącą do przedziału $(0, 1]$.

Agregat ten został wprowadzony przez Epsteina i Hynesa [43]. Jeśli $\rho = 1$, to $W(z_1, z_2) = (1 - b)z_1 + bz_2$ i taka funkcja prowadzi do standardowej dyskontowanej użyteczności w skończonym lub nieskończonym horyzoncie czasowym. Była ona wprowadzona i analizowana przez Samuelsona [144] w 1937 roku. Jednak, jak zauważono w pracy [17], taki agregat stosowany w danym procesie decyzyjnym (określenia poziomów konsumpcji oraz inwestycji) może prowadzić do ekstremalnych zachowań decydenta: konsumpcji całego dostępnego kapitału bądź do zerowej konsumpcji na każdym kroku.

Współczynnik b oznacza subiektywny czynnik dyskonta i zazwyczaj $b = \frac{1}{1+d}$, gdzie d jest subiektywną stopą dyskonta). Współczynnik ρ służy do określenia tzw. elastyczności substytucji międzyokresowej *EIS* (ang. *elasticity of intertemporal substitution*).

Elastyczność substytucji międzyokresowej

Postawa decydenta i jego stosunek do zmienności konsumpcji w poszczególnych stanach (dla poszczególnych poziomów kapitału) mogą być scharakteryzowane poprzez współczynnik awersji do ryzyka. Natomiast postawę decydenta i stosunek do zmienności

konsumpcji z okresu na okres charakteryzuje elastyczność substytucji międzyokresowej *EIS* (ang. *elasticity of intertemporal substitution*). Aby zdefiniować ten ważny wskaźnik, ustalono dwa okresy t i $t + 1$ procesu konsumpcji. Formalnie współczynnik elastyczności substytucji międzyokresowej definiowany jest następująco:

$$EIS = \left| \frac{d \ln(c_{t+1}/c_t)}{d \ln(U_{t+1}/U_t)} \right|.$$

W mikroekonomii [160] iloraz U_{t+1}/U_t jest interpretowany jako stosunek cen konsumpcji jednej jednostki pojedynczego dobra w okresach $t + 1$ i t .

Zauważono, że:

$$d \ln(c_{t+1}/c_t) = \frac{d(c_{t+1}/c_t)}{c_{t+1}/c_t} \quad \text{oraz} \quad d \ln(U_{t+1}/U_t) = \frac{d(U_{t+1}/U_t)}{U_{t+1}/U_t}.$$

Ponadto, z Dodatku 7.6 otrzymano, że:

$$d \ln(U_t/U_{t+1}) = \frac{d(U_t/U_{t+1})}{U_t/U_{t+1}} = -d \ln(U_{t+1}/U_t).$$

Zatem, *EIS* może być wyrażona następująco:

$$EIS = \left| \frac{d \ln(c_{t+1}/c_t)}{d \ln(U_t/U_{t+1})} \right|.$$

EIS mierzy relatywną zmianę konsumpcji z okresu t na okres $t + 1$ w odniesieniu do względnej zmiany cen użyteczności po zmianie konsumpcji.

Ogólnie, *EIS* nie musi być stałą i może zależeć od poziomów konsumpcji. Jednak funkcja agregująca (5.2) charakteryzuje się stałą elastycznością substytucji międzyokresowej, która wynosi $\frac{1}{1-\rho}$ i należy do przedziału $(1, \infty)$.

Współczynnik *EIS* informuje, jak mocno decydent reaguje na zmiany ilorazu cen konsumpcji z okresu na okres, zmieniając swoje plany konsumpcji. Im większa elastyczność *EIS*, tym silniejsza reakcja decydenta i skłonność do zmiany proporcji konsumpcji z okresu na okres.

5.3. Proces optymalizacyjny

Rozważono następujący wieloetapowy proces zarządzania kapitałem w skończonym horyzoncie czasowym T ($T < +\infty$) z następującymi komponentami:

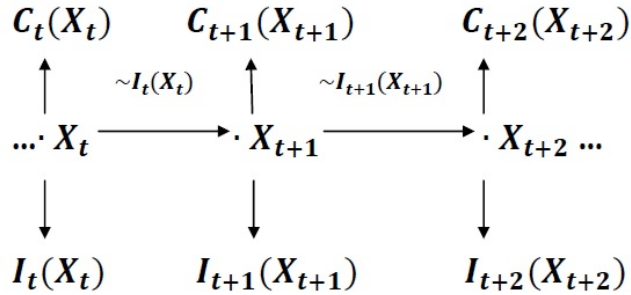
- okres zarządzania $t = 1, 2, \dots, T$,
- X_t - poziom kapitału w okresie t ; $X_1 = x$ - dany poziom kapitału na początku okresu decyzyjnego,
- $C_t(\cdot)$ - funkcja konsumpcji w okresie t ,
- $I_t(X_t) = X_t - C_t(X_t)$ - funkcja inwestycji w okresie t ,
- b - subiektywny współczynnik dyskonta, $b = \frac{1}{1+d}$, gdzie d jest subiektywną stopą,
- stan kapitału w okresie $t + 1$ określony jest równaniem rekurencyjnym

$$X_{t+1} = R_{t+1} (X_t - C_t(X_t)),$$

gdzie: $R_{t+1} = 1 + r_{t+1}$ i r_{t+1} oznacza stopę zwrotu z inwestycji w okresie $[t, t + 1)$.

Powyższy model został zaczerpnięty z [154], a podobne modele były rozważane w [79, 80, 112, 151]. Celem inwestora jest wyznaczenie strumienia poziomów konsumpcji ($C_1(\cdot), C_2(\cdot), C_3(\cdot), \dots, C_T(\cdot)$), a tym samym inwestycji ($I_1(\cdot), I_2(\cdot), I_3(\cdot), \dots, I_T(\cdot)$), tak aby zmaksymalizować określoną funkcję celu. Skoro proces jest wieloetapowy założono, że inwestor posłuży się potęgową funkcją użyteczności do ewaluacji przyszłej całkowitej użyteczności, czyli gwarantowanym równoważnikiem Krepsa-Porteusa [96] (Rozdział 3). Z Tabeli 3 wiadomo, że współczynnik ryzyka inwestora wynosi wtedy $\frac{\gamma-1}{x}$, a więc zależy od poziomu dobra (kapitału) x .

Przez J_{t+1} oznaczono całkowitą użyteczność decydenta obliczoną od okresu $t + 1$, wynikającą z optymalnego ciągu konsumpcji



Rys. 5.1: Wieloetapowy proces decyzyjny zarządzania kapitałem
Źródło: opracowanie własne

$(C_{t+1}^*(\cdot), C_{t+2}^*(\cdot), C_{t+3}^*(\cdot), \dots, C_T^*(\cdot))$ lub równoważnie optymalnego ciągu inwestycji $(I_{t+1}^*(X_{t+1}), I_{t+2}^*(X_{t+2}), \dots, I_T^*(X_T))$. Przez $C_l^*(\cdot)$ oznaczono optymalną konsumpcję w okresie l . Problem optymalizacyjny decydenta zdefiniowany jest w poniższy sposób:

Problem (P)

$$\max_{0 \leq c_t \leq X_t} [((1-b)c_t^\rho + b(E[J_{t+1}^\gamma(X_{t+1})|X_t])^\frac{\rho}{\gamma})^\frac{1}{\rho}],$$

przy warunku:

$$X_{t+1} = R_{t+1}(X_t - c_t) \text{ dla każdego } t = 1, 2, \dots, T.$$

Symbol E oznacza operator wartości oczekiwanej liczony względem rozkładu stopy zwrotu z inwestycji. Oznaczono $J_{t+1}^\gamma(X_{t+1}) = (J_{t+1}(X_{t+1}))^\gamma$.

Jeśli stopa zwrotu z inwestycji r_{t+1} nie jest losowa, wtedy $(E[J_{t+1}^\gamma(X_{t+1})|X_t])^\frac{1}{\gamma} = J_{t+1}(X_{t+1})$.

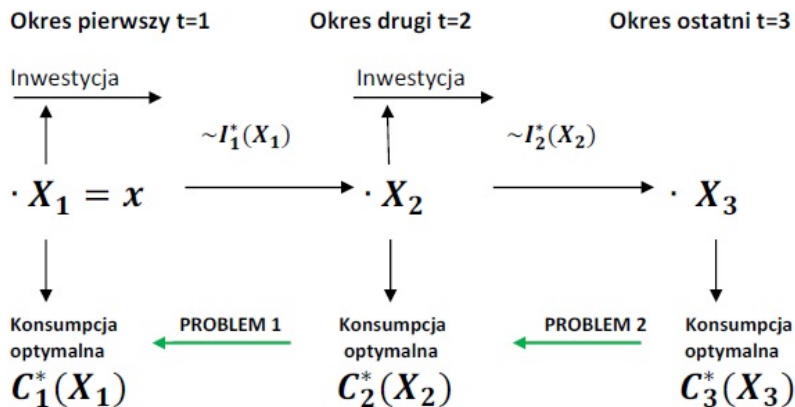
Z zasady programowania dynamicznego [117] wynika, że funkcje

$J_t(\cdot), t = 1, 2, \dots, T$ spełniają tzw. równania Bellmana, czyli:

$$J_t(X_t) = \max_{0 \leq c_t \leq X_t} [((1-b)c_t^p + b(E[J_{t+1}^y(X_{t+1})|X_t])^{\frac{p}{\gamma}})^{\frac{1}{p}}]. \quad (5.3)$$

Do rozwiązania powyższego **Problemu (P)** posłużono się indukcją wsteczną i zasadami programowania dynamicznego, zaproponowanymi w Rozdziale 3.1. Na Rysunku 5.1 przedstawiono rozwiązanie takiego problemu decyzyjnego dla modelu 3-okresowego. Sama nazwa „indukcja wsteczna” sugeruje, że rozwiązanie powinno rozpocząć się od ostatniego stanu X_3 . Skoro są trzy okresy, to na ostatnim etapie decydent konsumuje cały możliwy kapitał, czyli X_3 . Zatem $C_3^*(X_3) = X_3$ i $J_3(X_3) = X_3$.

Stąd optymalna inwestycja $I_3^*(X_3) = 0$, (nie opłaca się inwestować, ponieważ okres działalności się kończy). Strzałki zielone na Rysunku 5.2 prowadzą od stanu X_3 do poprzedniego stanu X_2 . Stosując funkcję agregującą (5.2) oraz rozwiązując **Problem P** otrzymano następujące jednookresowe problemy optymalizacyjne.



Rys. 5.2: Indukcja wsteczna w modelu trzyokresowym

Źródło: opracowanie własne

Problem 1, Problem (P) dla $t = 2$:

$$\max_{0 \leq c_2 \leq X_2} [(1-b)c_2^\rho + b(E[X_3^\gamma | X_2])^{\frac{\rho}{\gamma}}]^{\frac{1}{\rho}} \rightarrow J_2(X_2),$$

przy warunku, że $X_3 = (X_2 - c_2)R_3$.

Rozwiązując **Problem 1** dla każdego poziomu kapitału X_2 otrzymano optymalną konsumpcję $C_2^*(\cdot)$.

Stąd optymalna inwestycja wynosi $I_2^*(X_2) = X_2 - C_2^*(X_2)$.

Następnie zostaje do rozpatrzenia ostatni etap, czyli problem optymalizacyjny dla okresu pierwszego.

Problem 2, Problem (P) dla $t = 1$:

$$\max_{0 \leq c_1 \leq X_1} [(1-b)c_1^\rho + b(E[J_2^\gamma(X_2) | X_1])^{\frac{\rho}{\gamma}}]^{\frac{1}{\rho}} \rightarrow J_1(X_1),$$

przy warunku $X_2 = (X_1 - c_1)R_2$.

Po rozwiązaniu powyższego problemu otrzymano optymalną konsumpcję, czyli funkcję $C_1^*(\cdot)$. Wtedy optymalna funkcja inwestycji wynosi $I_1^*(X_1) = X_1 - C_1^*(X_1)$. Dzięki rozwiązaniu problemu inwestor otrzymuje optymalną funkcję inwestycji: $I_1^*(\cdot), I_2^*(\cdot), I_3^*(\cdot)$ oraz maksymalną użyteczność $J_1(x)$ w modelu trzyokresowym, jeśli początkowy kapitał wynosi x .

Optymalne strategie konsumpcji i inwestycji w modelu T-okresowym

Następnym krokiem jest wyliczenie optymalnego ciągu konsumpcji oraz inwestycji w modelu z dowolnym horyzontem czasowym T . Założono, że optymalna konsumpcja jest funkcją liniową względem poziomu kapitału, tzn. $C_t^*(X_t) = a_t X_t$, wtedy (5.3) przyjmuje postać:

$$J_t(X_t) = \max_{0 \leq a_t \leq 1} [((1-b)a_t^\rho X_t^\rho + b(E[J_{t+1}^\gamma(X_{t+1}) | X_t])^{\frac{\rho}{\gamma}})]^{\frac{1}{\rho}}. \quad (5.4)$$

Zakładając, że funkcja wartości jest także liniowa, tzn. $J_t(X_t) = A_t X_t$, $A_t \in [0, +\infty)$, otrzymano, że:

$$\begin{aligned} E(J_{t+1}^\gamma(X_{t+1})|X_t) &= A_{t+1}^\gamma E[X_{t+1}^\gamma|X_t] = A_{t+1}^\gamma E[R_{t+1}^\gamma(X_t - a_t X_t)^\gamma] = \\ &= A_{t+1}^\gamma E[R_{t+1}^\gamma \cdot X_t^\gamma](1 - a_t)^\gamma = A_{t+1}^\gamma (1 - a_t)^\gamma X_t^\gamma E[R_{t+1}^\gamma]. \end{aligned}$$

Celem jest wyznaczenie wartości A_t oraz a_t , które spełniają **Problem (P)**, czyli musi zachodzić równanie:

$$A_t = \max_{0 \leq a_t \leq 1} [(1 - b)a_t^\rho + (1 - a_t)^\rho A_{t+1}^\rho b(E[R_{t+1}^\gamma])^{\frac{\rho}{\gamma}}]^{\frac{1}{\rho}}. \quad (5.5)$$

Rozwiązaniem są następujące liczby:

$$a_t = \frac{1}{1 + [\frac{b}{1-b} A_{t+1}^\rho E[R_{t+1}^\gamma]^{\frac{\rho}{\gamma}}]^{\frac{1}{1-\rho}}}, \quad a_T = 1 \quad (5.6)$$

dla $t = 1, \dots, T - 1$, oraz:

$$A_t = (1 - b)^{\frac{1}{\rho}} a_t^{\frac{\rho-1}{\rho}}, \quad A_{T+1} = 0 \quad (5.7)$$

dla $t = 1, 2, \dots, T$.

Wprowadzenie wzorów (5.6) oraz (5.7). Skoro a_t maksymalizuje prawą stronę równania (5.5), to musi zachodzić równość (patrz Dodatek 7.8):

$$(1 - b)\rho a_t^{\rho-1} = \rho(1 - a_t)^{\rho-1} \kappa, \quad (5.8)$$

gdzie: $\kappa := b A_{t+1} (E[R_{t+1}^\gamma])^{\frac{\rho}{\gamma}}$.

Zatem $\kappa = (1 - b) \left(\frac{a_t}{1 - a_t}\right)^{\rho-1}$. Na podstawie definicji a_t i κ równanie (5.5) przyjmuje postać:

$$A_t = ((1 - b)a_t^\rho + (1 - a_t)^\rho \kappa)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (5.9)$$

Wstawiając κ do (5.9) otrzymano:

$$\begin{aligned} A_t &= \left((1-b)a_t^\rho + (1-a_t)^\rho(1-b) \left(\frac{a_t}{1-a_t} \right)^{\rho-1} \right)^{\frac{1}{\rho}} = \\ &= (1-b)^{\frac{1}{\rho}} \left(a_t^\rho + (1-a_t)a_t^{\rho-1} \right)^{\frac{1}{\rho}} = \\ &= (1-b)^{\frac{1}{\rho}} \left[a_t^\rho + a_t^{\rho-1} - a_t^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} = (1-b)^{\frac{1}{\rho}} a_t^{\frac{\rho-1}{\rho}}. \end{aligned}$$

Zatem wzór (5.7) zachodzi. Natomiast wzór (5.6) łatwo otrzymać ze wzoru (5.8) wstawiając A_{t+1} ze wzoru (5.7). Zatem:

$$C_t^*(x) = \frac{x}{1 + [ba_{t+1}^{\rho-1} E[R_{t+1}^\gamma]^{\frac{\rho}{\gamma}}]^{\frac{1}{1-\rho}}}$$

oraz

$$I_t^*(x) = \frac{[ba_{t+1}^{\rho-1} E[R_{t+1}^\gamma]^{\frac{\rho}{\gamma}}]^{\frac{1}{1-\rho}} x}{1 + [ba_{t+1}^{\rho-1} E[R_{t+1}^\gamma]^{\frac{\rho}{\gamma}}]^{\frac{1}{1-\rho}}}$$

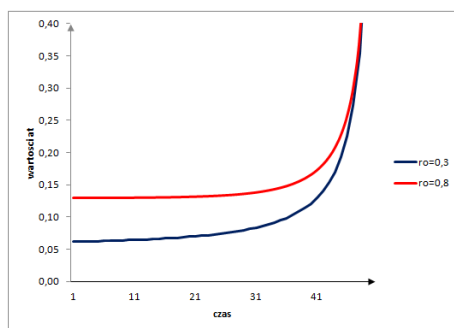
5.4. Badanie procesów decyzyjnych z zastosowaniem optymalizacji

5.4.1. Modele z deterministyczną stopą zwrotu

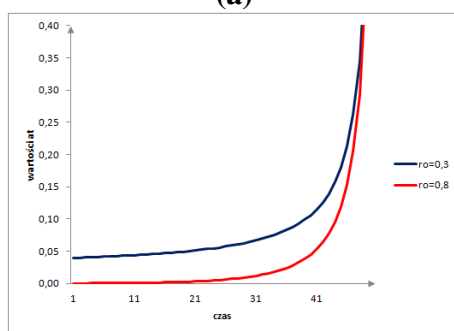
W tym rozdziale posłużono się modelem T -okresowym, omówionym w powyższym podrozdziale. Do rozważania problemu użyto wzorów (5.6) oraz (5.7). Przyjęto, że:

- $T = 50$,
- $b = 0,95$, zatem subiektywna stopa zwrotu wynosi $d = \frac{1-b}{b} = \frac{1}{b} - 1 = 0,05236$,
- $R_{t+1} = 1 + r$ dla $t = 1, \dots, T-1$, gdzie $r > 0$.

W poniższych przykładach zbadano wpływ elastyczności substytucji międzyokresowej na zachowanie decydenta. Na rysunku 5.3 przedstawiona jest sytuacja, gdy $\rho = 0,3$ i $\rho = 0,8$. Na obu rysunkach kolor niebieski odpowiada przypadkowi $\rho = 0,3$, czyli $EIS_{0,3} = \frac{10}{7} \approx 1,43$, a kolor czerwony $\rho = 0,8$, czyli $EIS_{0,8} = \frac{10}{2} = 5$. Wykresy przedstawiają optymalną konsumpcję, tzn. wartości a_t , gdy $C_t^*(X_t) = a_t X_t$ dla $t = 1, \dots, 50$. Wykres ten przedstawia zależność wartości współczynnika a_t od czasu t , czyli określa nam strategię konsumpcji $C_t^*(X_t) = a_t X_t$, dla $t = 1, \dots, T$. Łatwo zauważyć, że współczynnik $EIS = \frac{1}{1-\rho}$ mówi o tym, jak mocno decydent reaguje na zmiany ilorazu cen konsumpcji z okresu na okres, zmieniając swoje plany konsumpcji. Jeśli ρ rośnie, czyli EIS rośnie, to zachowanie decydenta zmienia się w zależności od zmian kapitału z okresu na okres. Na rysunku 5.3(a) założono, że $1 + r = 1,03$. Stopień wykorzystania kapitału a_t wzrośnie, gdy $b(1+r) < 1$. $\frac{1}{1+d} < \frac{1}{1+r}$, co implikuje, że $d > r$. Ta sytuacja oznacza, że stopa dyskonta jest większa od stopy inwestycji. Dlatego decydent, będzie skłonny powiększyć konsumpcję w okresie t , kosztem konsumpcji w następnym okresie $t + 1$. Jest tak dlatego, że cena konsumpcji w następnym okresie wzrośnie ze względu na malejący kapitał. Inwestycja ta nie spełnia oczekiwań decydenta. Natomiast na rysunku 5.3(b) sytuacja jest odwrotna: $b(1+r) > 1$ i przyjęto, że oraz $1 + r = 1,1$, czyli $r = 0,1 > d = 0,0526$. Ta sytuacja oznacza, że stopa dyskonta jest niższa niż stopa inwestycji. Dlatego decydent będzie skłonny powiększyć inwestycję w okresie t , a zmniejszyć konsumpcję. Na przedstawionych rysunkach różnice w konsumpcji dla obu przypadków są duże. W przypadku (a) konsumpcja rozpoczyna się od poziomu 0,06 dla $\rho = 0,8$, oraz 0,13 dla $\rho = 0,3$, podczas gdy w przypadku (b) obie wartości konsumpcji są mniejsze od 0,05, a dla $\rho = 0,8$ wartości te początkowo są bardzo bliskie 0. Różnice w obu strategiach są bardzo duże.



(a)



(b)

Rys. 5.3: Przykład deterministyczny (a) $r < d$, (b) $r > d$

Źródło: opracowanie własne

Interpretacja

Na rysunku 5.3(a) przedstawiono przypadek, gdy $1 + r = 1,03$, czyli $r < d$. Zatem:

$$b(1 + r) = 0,95 \cdot 1,03 = 0,9785 < 1.$$

Rysunek 5.3(b) odzwierciedla sytuację, gdy $1 + r = 1,03$, czyli $r > d$ i wtedy:

$$b(1 + r) > 1.$$

Porównując czerwone krzywe na obu rysunkach, widać, że inwestor dość znacznie zmienia swoje decyzje co do konsumpcji, a w konsekwencji także strategię inwestycji. To zjawisko związane jest z dość dużym współczynnikiem EIS inwestora. Gdy jego subiektywna stopa zwrotu jest większa od stopy zwrotu z inwestycji, to jest on skłonny konsumować znacznie więcej niż w przypadku, gdy to stopa zwrotu z inwestycji jest większa od d . W tym drugim przypadku rozsądnym jest odkładać konsumpcje na później i przeznaczać więcej na inwestycje. Dlatego czerwona krzywa na rysunku 5.3(b) oscyluje w okolicach zera w początkowych okresach t ($t \leq 17$). Stąd niemal cały kapitał przeznaczany jest na inwestycje. W przypadku, gdy współczynnik elastyczności substytucji międzyokresowej nie jest duży (krzywe koloru niebieskiego), to strategię konsumpcji (a co za tym idzie strategię inwestycji) inwestora na obu rysunkach nie różnią się tak bardzo i w początkowych okresach oscylują w okolicach 0,05. Oznacza to inwestor przeznaczając na inwestycje około 95% swojego kapitału. Tylko 1/20 części kapitału jest konsumowana.

5.4.2. Modele ze stochastycznymi stopami zwrotu

W tym podrozdziale rozważono przypadek, gdy stopa zwrotu z inwestycji r_t jest dana przez pewien rozkład prawdopodobieństwa. Zatem $1 + r_t = R_t$ ma także pewien rozkład. Rozważono przypadki, w których zmienna losowa R_t ($t = 2, \dots, T$) ma rozkład:

1. logarytmiczno-normalny,
2. jednostajny,
3. trójkątny.

Dla tych trzech wybranych rozkładów otrzymano wzory pozwalające na wyliczenie optymalnych strategii i inwestycji. Natomiast dla skomplikowanych rozkładów zmiennej losowej R_t , np. normalnego, nie da się *explicite* wyliczyć całki i nie można podać wzoru (5.6) dla

danego rozkładu i dalej policzyć kolejnych współczynników a_t w sposób rekurencyjny. Trzeba stosować metody numeryczne.

1. Założono, że R_t ma rozkład logarymiczno-normalny $\mathcal{LN}(\mu_t, \alpha^2 s_t^2 + \sigma^2)$, gdzie $\alpha \in (0, 1)$ i $\sigma \geq 0$ są pewnymi liczbami. Ciągi (μ_t) oraz (s_t) są zdefiniowane rekurencyjnie w następujący sposób:

$$\mu_t = (1 - \eta^t)\mu, \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, T \quad \text{z } \mu > 0 \quad \text{oraz } \eta \in (0, 1),$$

$$s_{t+1} = \sqrt{\alpha^2 s_t^2 + \sigma^2} \quad \text{dla } t = 1, 3, \dots, T-1 \quad \text{z } s_1 > 0.$$

Z Dodatku 7.4 otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned} E[R_t] &= e^{\mu_t + \frac{\alpha^2 s_t^2 + \sigma^2}{2}}, \\ \text{Var}[R_t] &= e^{2\mu_t + \alpha^2 s_t^2 + \sigma^2} (e^{\alpha^2 s_t^2 + \sigma^2} - 1) \end{aligned} \quad (5.10)$$

oraz:

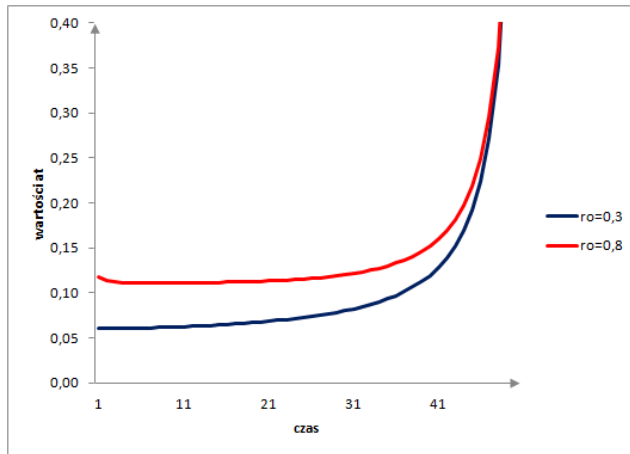
$$E[R_t]^\gamma = e^{\frac{1}{2}\gamma^2(\alpha^2 s_t^2 + \sigma^2) + \gamma\mu_t}. \quad (5.11)$$

Ostatecznie wzór (5.6) przyjmuje postać:

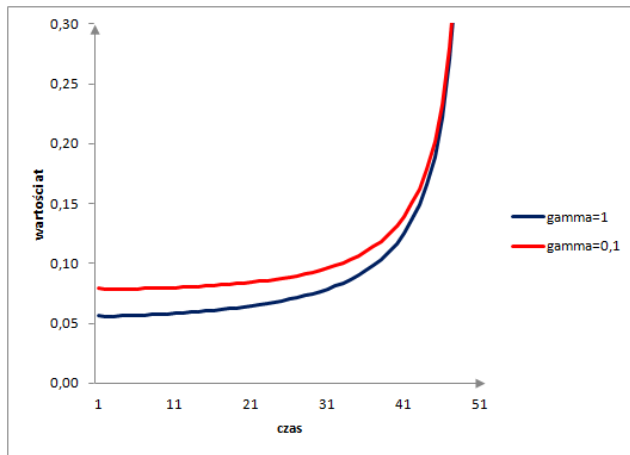
$$a_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{1-b}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} A_{t+1}^{\frac{\rho}{1-\rho}} e^{\frac{\rho}{2(1-\rho)}\gamma(\alpha^2 s_t^2 + \sigma^2) + \mu_t \frac{\rho}{1-\rho}}}. \quad (5.12)$$

Rozważono cztery przypadki.

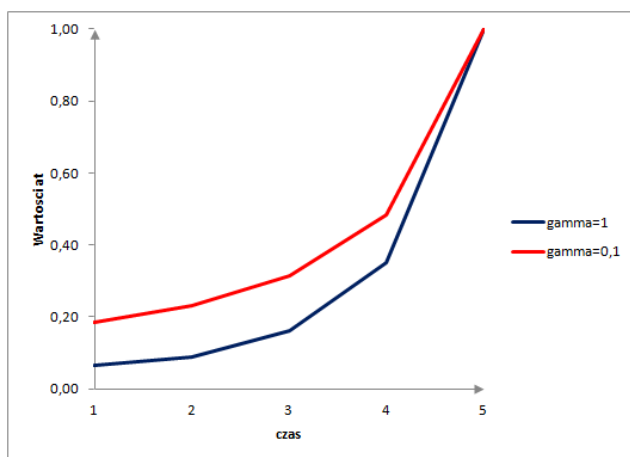
Nr rysunku	μ	s_t^2	Współczynnik ryzyka γ	η	α^2	σ^2	ρ	b	T
5.4	0,02	0,06 dla każdego t	0,5	0,5	0,9	0,006	$\rho = 0,3$ $\rho = 0,8$	0,95	50
5.5	0,02	0,06 dla każdego t	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	0,5	0,9	0,006	$\rho = 0,5$	0,95	50
5.6	0,1	$1,5 - \frac{1}{t}$	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	0,5	1	0	$\rho = 0,5$	0,95	5
5.7	0,1	$1,5 - \frac{1}{t}$	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	0,5	1	0	$\rho = 0,5$	0,5	5



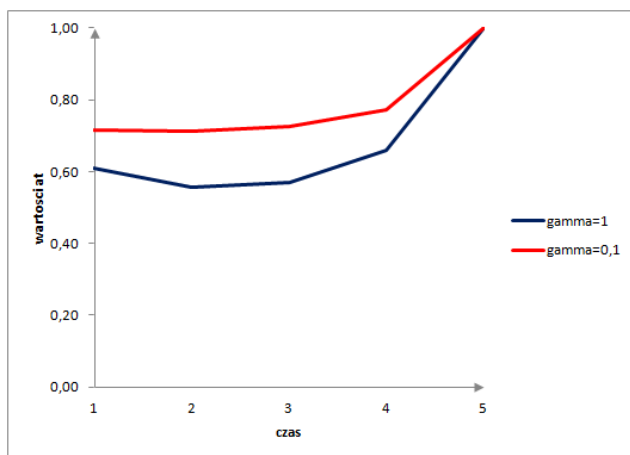
Rys. 5.4: Optymalna konsumpcja dla rozkładu logarytmiczno-normalnego
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.5: Optymalna konsumpcja dla rozkładu logarytmiczno-normalnego
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.6: Optymalna konsumpcja dla rozkładu logarytmiczno-normalnego
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.7: Optymalna konsumpcja dla rozkładu logarytmiczno-normalnego
 Źródło: opracowanie własne

Interpretacja

Przykład 5.4 analizuje wpływ czynnika ryzyka na strategię konsumpcji oraz inwestycji, gdy EIS ulega zmianie. Można zauważyć, że wzajemne położenie krzywych jest podobne do wykresu na rysunku 5.3(a), tzn. czerwona krzywa leży powyżej niebieskiej. Wartości na krzywej czerwonej są dwukrotnie większe niż wartości dla krzywej niebieskiej, co oznacza, że konsumpcja przy tych samych parametrach niemal się podwaja, gdy współczynnik ρ zwiększono z 0,3 do 0,8. Wynika to z faktu, że średnia stopa zwrotu z inwestycji r_t jest mniejsza od subiektywnej stopy zwrotu $d = 0,05236$. Istotnie, zauważono, że:

$$E[R_t] = e^{(1-0,5^t) \cdot 0,02 + \frac{0,9 \cdot 0,06 + 0,006}{2}} \leq e^{0,023 + 0,9 \cdot 0,03} \approx 1,05127.$$

W konsekwencji otrzymano nierówność:

$$E[r_t] \leq 0,05127 < d = 0,05236.$$

Natomiast na rysunkach 5.5, 5.6 oraz 5.7 przeanalizowano wpływ czynnika ryzyka na strategię konsumpcji (inwestycji), gdy współczynnik elastyczności substytucji międzyokresowej jest stały i wynosi 2. Czerwone krzywe odzwierciedlają przypadek inwestora wrażliwego na ryzyko, a niebieskie krzywe są wykreślone dla inwestora neutralnego względem ryzyka. We wszystkich przypadkach czerwone krzywe leżą powyżej krzywych niebieskich. Świadczy to o tym, że inwestor wrażliwy na ryzyko obawia się dużych inwestycji. Natomiast mała rozpiętość pomiędzy wykresami na rysunku 5.5 wynika z faktu małej wariancji zmiennej losowej R_t . Różnice w poziomie konsumpcji wynoszą ok. 30%, są one wynikiem tylko i wyłącznie zmiany wartości współczynnika ryzyka. Zwiększenie jego wartości z 0,1 do 1 spowodowało wzrost konsumpcji o ok. 30%. Ze wzoru (5.10) oszacowano, iż:

$$Var[R_t] = e^{2 \cdot 0,5^t \cdot 0,02 + 0,9 \cdot 0,06 + 0,006} (e^{0,9 \cdot 0,06 + 0,006} - 1) \leq 0,066987.$$

Na Rysunkach 5.6 oraz 5.7 przyjęto, że czas trwania procesu decyzyjnego wynosi $T = 5$. W obu przypadkach widać większą rozpiętość pomiędzy krzywymi niż na rysunku 5.5. Powodem tego jest większa wariancja zmiennej losowej R_t . Korzystając ponownie ze wzoru (5.10) otrzymano oszacowania:

$$\text{Var}[R_t] = e^{0,2 \cdot (1-0,5^t) + 1,5 - 1/t} (e^{1,5 - 1/t} - 1) \leq e^{0,2 \cdot (1-0,5^5) + 1,3} (e^{1,3} - 1) \approx 11,8884$$

oraz:

$$\text{Var}[R_t] \geq 1,18205.$$

Obie nierówności otrzymano z faktu, iż funkcja:

$$k(t) = e^{0,2 \cdot (1-0,5^t) + 1,5 - 1/t} (e^{1,5 - 1/t} - 1), \quad t \in [1, 5]$$

jest rosnąca. Zatem maximum przyjmuje w prawym końcu przedziału w punkcie $t = 5$, a minimum w lewym końcu przedziału w $t = 1$. Kształty strategii konsumpcji na rysunkach 5.6 oraz 5.7 są podobne do siebie, ale wartości ich są różne. Wynika to z faktu, że w przypadku rysunku 5.6 subiektywna stopa zwrotu $d = 0,0526$, a dla Rysunku 5.7 $d = 1$.

Ponadto: $E[R_t] = e^{(1-0,5^t) \cdot 0,1 + (1,5 - 1/t)/2} \leq e^{1-0,5^5} \cdot 0,1 + 1,3/2 \approx 2,11$

oraz:

$$E[R_t] \geq 1,34.$$

Stąd w obu przypadkach $0,34 \leq E[r_t] \leq 1,11$. Zatem, jeśli $d = 0,0525$ to dla każdego $t = 1, \dots, 5$ zachodzi nierówność $d < E[r_t]$. W drugim przypadku dla pewnych t subiektywna stopa zwrotu jest mniejsza niż $E[r_t]$, a dla pozostałych t większa niż $E[r_t]$. Zgodnie z wykresami na rysunku 5.7 inwestor niewiele inwestuje. Wynika to właśnie z dużej wartości subiektywnej stopy zwrotu $d = 1$, która implikuje, że przyszłość przestaje być istotna. W obu tych przypadkach większy współczynnik ryzyka implikuje mniejszą konsumpcję. Rozpiętość krzywych w obu przypadkach jest niewielka, chociaż na rysunku 5.6 dla

współczynnika $\gamma = 1$ konsumpcja jest dwukrotnie wyższa niż dla inwestora, charakteryzującego się współczynnikiem $\gamma = 0,1$. Zmiana wartości współczynnika dyskonta spowodowała, że konsumpcja osiąga wartości powyżej 60% wartości dostępnego kapitału i tutaj różnice pomiędzy obiema strategiami wynoszą ok. 30%.

2. Założono, że R_t jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[n, m]$, gdzie $n, m > 0$ są pewnymi liczbami. Z Dodatku 7.4 otrzymano, że:

$$E[R_t] = \frac{n+m}{2}$$

oraz:

$$\text{Var}[R_t] = \frac{(m-n)^2}{12}. \quad (5.13)$$

Ponadto z Dodatku 7.4 wiadomo, że:

$$E[R_t]^\gamma = \frac{1}{m-n} \frac{1}{\gamma+1} (m^{\gamma+1} - n^{\gamma+1}). \quad (5.14)$$

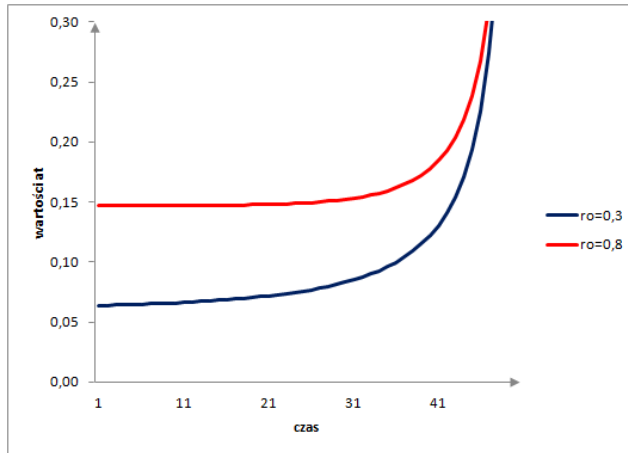
Wyrażenie z (5.14) wstawiono do (5.6) i otrzymano:

$$a_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{1-b}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} A_{t+1}^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left(\frac{1}{d-c} \frac{1}{\gamma+1} (d^{\gamma+1} - c^{\gamma+1})\right)^{\frac{\rho}{\gamma} \frac{1}{1-\rho}}}. \quad (5.15)$$

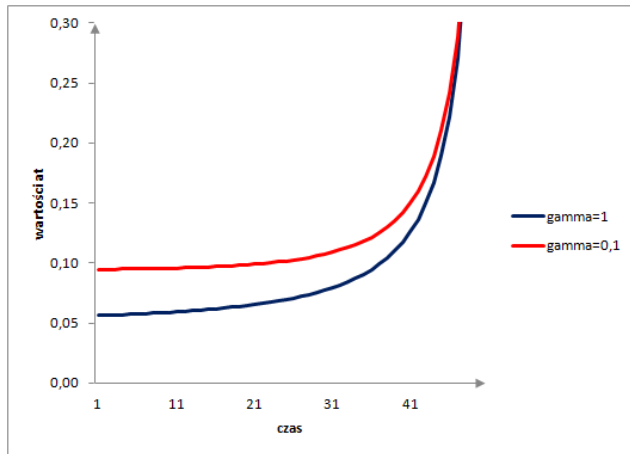
Korzystając ze wzoru (5.15) w kolejnych przykładach wyliczono optymalne strategie konsumpcji w przypadku, gdy stopa zwrotu z inwestycji ma rozkład jednostajny.

Rozważono cztery przypadki.

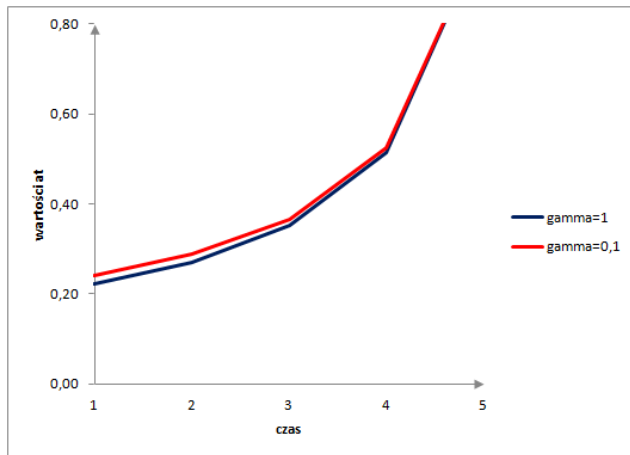
Nr Rysunku	c	d	Współczynnik ryzyka γ	ρ	b	T
5.8	0,5	1,6	$\gamma = 0,5$	$\rho = 0,3$ $\rho = 0,8$	0,95	50
5.9	0,5	1,6	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	$\rho = 0,5$	0,95	50
5.10	0,5	1,6	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	$\rho = 0,5$	0,95	5
5.11	0,5	1,6	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	$\rho = 0,5$	0,5	5



Rys. 5.8: Optymalna konsumpcja dla rozkładu jednostajnego
 Źródło: opracowanie własne

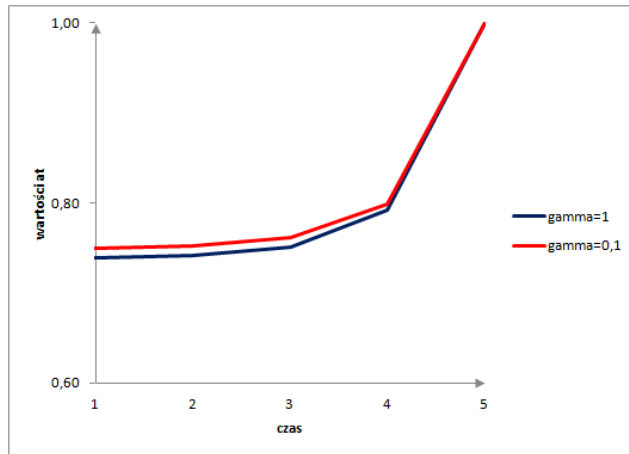


Rys. 5.9: Optymalna konsumpcja dla rozkładu jednostajnego
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.10: Optymalna konsumpcja dla rozkładu jednostajnego
 Źródło: opracowanie własne

Interpretacja Podobnie jak w poprzednim przykładzie stochastycznym położenie krzywych na rysunku 5.8 podobne



Rys. 5.11: Optymalna konsumpcja dla rozkładu jednostajnego
 Źródło: opracowanie własne

jest do rysunku 5.3(a). Istotnie, kolejny raz otrzymano, że:

$$E[r_t] = 0,05 < d = 0,0526.$$

Istotnie, wynika to ze wzoru (5.14), że $E[R_t] = 1,05$. Odległość między krzywymi jest duża. Mniejsza wartość EIS powoduje, że konsumpcja jest dwukrotnie wyższa. Widać tu istotny wpływ tego współczynnika na optymalną strategię. Na rysunkach 5.9, 5.10 oraz 5.11 przeanalizowano wpływ czynnika ryzyka na strategię konsumpcji (inwestycji), gdy współczynnik elastyczności substytucji międzyokresowej jest stały i wynosi 2. Czerwone krzywe odzwierciedlają przypadek inwestora wrażliwego na ryzyko, a niebieskie krzywe są wykreślone dla inwestora neutralnego na ryzyko. We wszystkich przypadkach czerwone krzywe leżą powyżej krzywych niebieskich tak jak w poprzednim przykładzie. Rozpiętość krzywych jest mniejsza niż poprzednio. Różnice w wartości współczynnika γ powodują mniejsze różnice

w wartości konsumpcji, niż zmiana wartości współczynnika ρ . Natomiast ciekawym elementem jest tu mała rozpiętość pomiędzy wykresami konsumpcji dla inwestora na rysunkach 5.10 oraz 5.11 gdy czas trwania procesu decyzyjnego wynosi $T = 5$. Wynika to z małej wariancji zmiennej losowej R_t . Ze wzoru (5.13) otrzymano, że:

$$\text{Var}[R_t] = \frac{(1,6 - 0,5)^2}{12} \approx 0,1.$$

Gdy współczynnik dyskonta wynosi $b = 0,5$ (subiektywna stopa zwrotu $d = 1$) wtedy znowu opłaca się inwestorowi mniej inwestować niż w przypadku gdy subiektywna stopa zwrotu $d = 0,0526$. W obu przypadkach rozpiętości pomiędzy wykresami są bardzo małe, mniejsze niż 10%, natomiast łatwo zauważyć, że zwiększenie subiektywnej stopy zwrotu spowodowało, że konsumpcja niezależnie od wartości współczynnika ryzyka od pierwszego kroku stanowi więcej niż 70% dostępnego zasobu.

3. Założono, że R_t ma rozkład trójkątny $\mathcal{T}[x_0 - B, x_0 + B]$, a $B > 0$ jest pewną liczbą. Z Dodatku 7.5 otrzymano, że:

$$E[R_t] = x_0$$

oraz

$$\text{Var}[R_t] = \frac{1}{6}B^2.$$

Wynika z tego, że:

$$E[R_t]^\gamma = \frac{1}{B^2} \frac{1}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \left[(x_0 - B)^{\gamma+2} - 2x_0^{\gamma+2} + (x_0 + B)^{\gamma+2} \right]. \quad (5.16)$$

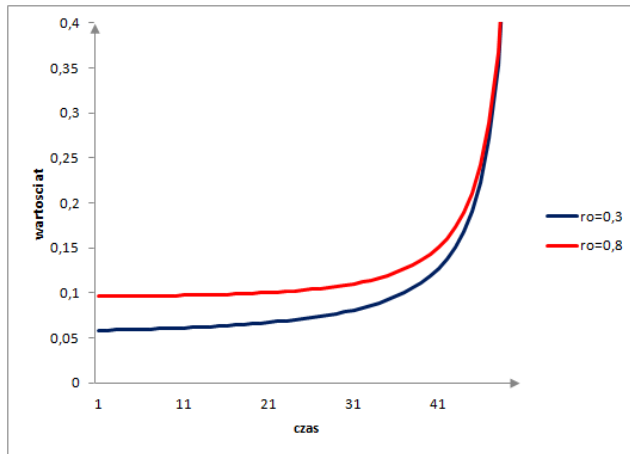
Wyrażenie przyjmuje następującą postać:

$$a_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{1-b}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} A_{t+1}^{\frac{\rho}{1-\rho}} \left(\frac{1}{B^2} \frac{1}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \left[(x_0 - B)^{\gamma+2} - 2x_0^{\gamma+2} + (x_0 + B)^{\gamma+2} \right]\right)^{\frac{\rho}{\gamma} \frac{1}{1-\rho}}}. \quad (5.17)$$

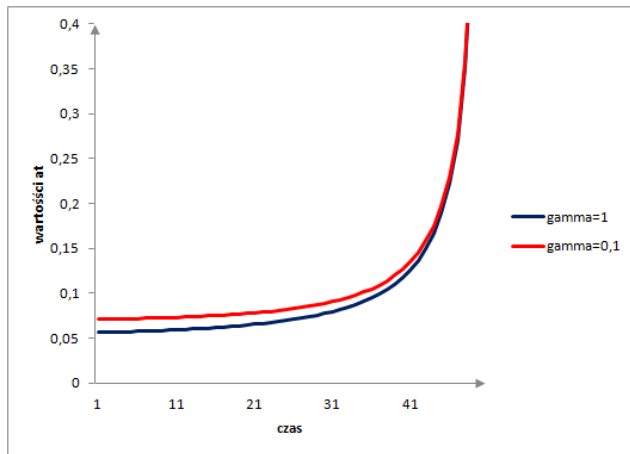
Wzór (5.17) posłuży do wyliczenia wartości a_t w przypadku, gdy stopa zwrotu z inwestycji R_t ma rozkład trójkątny.

Rozważono cztery przypadki.

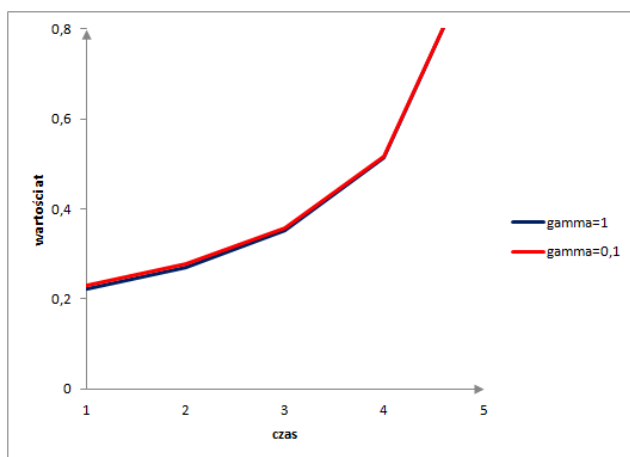
Nr Rysunku	x_0	B	Współczynnik ryzyka γ	ρ	b	T
5.12	1,05	0,5	$\gamma = 0,5$	$\rho = 0,3$ $\rho = 0,8$	0,95	50
5.13	1,05	0,5	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	$\rho = 0,5$	0,95	50
5.14	1,05	0,5	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	$\rho = 0,5$	0,95	5
5.15	1,05	0,5	$\gamma = 1$ $\gamma = 0,1$	$\rho = 0,5$	0,5	5



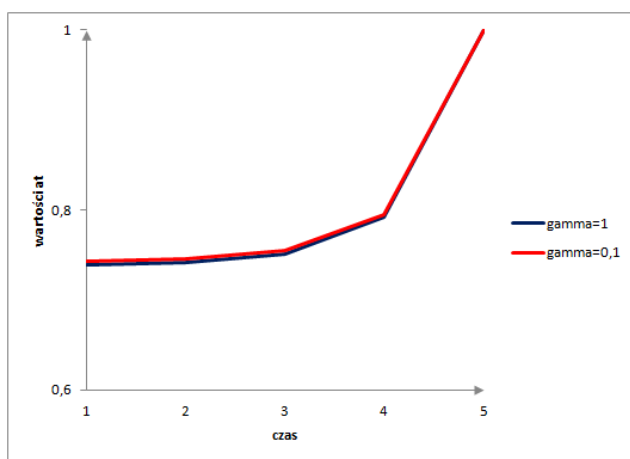
Rys. 5.12: Optymalna konsumpcja dla rozkładu trójkątnego
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.13: Optymalna konsumpcja dla rozkładu trójkątnego
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.14: Optymalna konsumpcja dla rozkładu trójkątnego
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.15: Optymalna konsumpcja dla rozkładu trójkątnego
 Źródło: opracowanie własne

Interpretacja

W przypadku rozkładu trójkątnego $\mathcal{T}[0,55 \ 1,55]$ można natychmiast otrzymać wzory na wartość oczekiwaną i wariancję R_t :

$$E[R_t] = 1,05,$$

$$\text{Var}[R_t] = \frac{1}{6}B^2 = \frac{1}{24} \approx 0,0416667.$$

Wnioski w tym przypadku są bardzo podobne do poprzedniego przypadku, gdy zmienna losowa R_t pochodziła z rozkładu jednostajnego.

Jednak istnieją drobne różnice. Na przykład porównując wykresy na rysunkach 5.8 i 5.12, to widać, że inwestor z większym współczynnikiem elastyczności substytucji międzyokresowej konsumuje mniej w stosunku do takiego samego inwestora gdy R_t miało rozkład jednostajny. Większa wartość EIS nadal powoduje większą konsumpcję ale już nie dwukrotnie większą jak dla rozkładu jednostajnego. Różnica wynosi ok 50%. Wynika to z faktu, że stopa zwrotu z inwestycji r_t ma także rozkład jednostajny: jej duże jak i małe wartości są jednakowo prawdopodobne.

Ponadto, wariancja R_t w przypadku rozkładu jednostajnego jest trzykrotnie większa od wariancji w tym przykładzie.

Z wykresów na rysunkach 5.9 oraz 5.13 wynika, że inwestor wrażliwy na ryzyko konsumuje znacznie mniej gdy R_t ma rozkład jednostajny. Natomiast w przypadku procesu decyzyjnego z $T = 5$ (rysunki 5.14 oraz 5.15) praktycznie nie widać różnic w poziomie inwestycji czy konsumpcji. Jest to efekt bardzo małej wariancji dla tego rozkładu trójkątnego oraz krótkiego okresu decyzyjnego $T = 5$. Zmiana współczynnika ryzyka nie wpływa na wartość konsumpcji, ponieważ linie dla różnych wartości współczynnika γ niemal się pokrywają. Wartość konsumpcji jest porównywalna z wartościami otrzymanymi dla

rozkładu jednostajnego, natomiast rozpiętość między krzywymi jest mniejsza. Dla rozkładu trójkątnego zwiększenie wartości współczynnika dyskonta również powoduje, że konsumpcja od pierwszego kroku stanowi ponad 70% wartości kapitału.

5.5. Model zarządzania kapitałem w nieskończonym horyzoncie czasowym

W tym rozdziale rozważono model zarządzania kapitałem opisany w Rozdziale 5.2, tym razem z nieskończonym horyzontem czasowym. W modelu tym nie ma ostatniego etapu, zatem nie można użyć bezpośrednio indukcji wstecznej. Jednak zastosowano aproksymację modelami ze skończonym horyzontem czasowym. Pokazano, że granica ciągu optymalnych konsumpcji i inwestycji otrzymana w modelach ze skończonym horyzontem czasowym dąży do optymalnej konsumpcji czy inwestycji w modelu z nieskończonym horyzontem czasowym. W podrozdziale tym zmieniono numerację aby móc wziąć granicę ciągu.

Horyzont czasowy T .

Numeracja w Rozdziale 5.2



Numeracja w tym rozdziale



W tym modelu przyjęto, że (R_2, R_3, \dots) jest ciągiem niezależnych nieujemnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie co zmienna R . Ponadto założono, że $ER^\gamma < +\infty$.

$J_1(x) \equiv 0$ dla każdego $x \geq 0$. Niech $J_t(\cdot)$ będzie maksymalną użytecznością w momencie t . Stosując metody programowania dynamicznego [117, 136], maksymalną użyteczność można wyznaczyć ze wzoru:

$$\begin{aligned} J_{t+1}(x) &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(E[J_t^\gamma(X_{t+1})|x])^{\rho/\gamma}]^{1/\rho} \\ &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(E[(x-c)^\gamma R^\gamma])^{\rho/\gamma}]^{1/\rho} \\ &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(x-c)(E[R^\gamma])^{\rho/\gamma}]^{1/\rho}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Niech $D = (E[R^\gamma])^{\frac{\rho}{\gamma}}$.

1. Krok 1: model z horyzontem czasowym $t = 1$:

$$J_1(x) = \max_{0 \leq c \leq x} (1-b)^{1/\rho} u(c) = (1-b)^{1/\rho} x. \text{ Zatem } c_1(x) = x.$$

2. Krok 2: model z horyzontem czasowym $t = 2$:

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(E[J_1^\gamma(X_2)|x])^{\rho/\gamma}]^{1/\rho} \\ &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(E[(1-b)^{1/\rho} X_2^\gamma |x]^{\rho/\gamma})]^{1/\rho} \\ &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(1-b)(x-c)^\rho (E[R^\gamma])^{\rho/\gamma}]^{1/\rho} \\ &= \max_{0 \leq a \leq 1} [(1-b)c^\rho + b(1-b)x^\rho (1-a)^\rho D]^{1/\rho} \\ &= x(1-b)^{1/\rho} \max_{a \in [0,1]} [a^\rho + b(1-a)^\rho D]^{1/\rho} \\ &= x(1-b)^{1/\rho} [1 + (bD)^{\frac{1}{1-\rho}}]^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \end{aligned}$$

W powyższym kroku wykorzystano informację, że optymalna funkcja konsumpcji jest liniowa, czyli postaci ax , gdzie $a \in [0, 1]$. Stałą a maksymalizującą prawą stronę równania można wyliczyć z

Dodatku 7.8 i wynosi ona $\frac{1}{1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}}}$.

Zatem $c_2(x) = \frac{x}{1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}}}$.

3. Krok 3: model z horyzontem czasowym $t = 3$:

$$\begin{aligned}
 J_3(x) &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(E[J_2^\gamma(X_3)|x]^{\rho/\gamma})]^{1/\rho} \\
 &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(E[(1-b)^{1/\rho} [1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}}]^{\frac{1-\rho}{\rho}} R(x-c)]^\gamma)^{\rho/\gamma}]^{1/\rho} \\
 &= \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)(xa)^\rho + b(1-b)[1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}}]^{1-\rho} (x-xa)^\rho D]^{1/\rho} \\
 &= x(1-b)^{1/\rho} \max_{a \in [0,1]} [a^\rho + b(1-a)^\rho [1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}}]^{1-\rho} D]^{1/\rho} \\
 &= x(1-b)^{1/\rho} [1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}} + (bD)^{\frac{2}{1-\rho}}]^{\frac{1-\rho}{\rho}}.
 \end{aligned}$$

Stała a , która maksymalizuje prawą stronę powyższego równania jest postaci $\frac{1}{1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}} + (bD)^{\frac{2}{1-\rho}}}$.

Stąd otrzymano, że $c_3(x) = \frac{x}{1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}} + (bD)^{\frac{2}{1-\rho}}}$.

Kontynuując powyższą procedurę można pokazać, że w n -tym kroku:

$$c_n(x) = \frac{x}{1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}} + (bD)^{\frac{2}{1-\rho}} + \dots + (bD)^{\frac{n-1}{1-\rho}}},$$

a maksymalna użyteczność wynosi:

$$J_n(x) = x(1-b)^{1/\rho} [1+(bD)^{\frac{1}{1-\rho}} + (bD)^{\frac{2}{1-\rho}} + \dots + (bD)^{\frac{n-1}{1-\rho}}]^{\frac{1-\rho}{\rho}}.$$

Aby obliczyć maksymalną konsumpcję w modelu z nieskończonym horyzontem czasowym, należy założyć, że:

$$(A) \quad (bD)^{\frac{1}{1-\rho}} < 1.$$

Stąd wynika, że $bD < 1$. Wtedy ciąg $(J_n(x))_n$ jest niemalejący dla każdego $x \geq 0$. Zatem granica ciągu $J_n(x)$ istnieje dla każdego $x \geq 0$ gdy n dąży do nieskończoności. Oznaczono tę granicę jako:

$$J(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) = x(1-b)^{1/\rho} \left(\frac{1}{1-(bD)^{\frac{1}{1-\rho}}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \quad (5.19)$$

Wykorzystując wzór (5.18) otrzymano, że:

$$J_{n+1}(x) \geq \left[(1-b)c^\rho + b \left\{ E \left[R(x-c)(1-b)^{1/\rho} \left[1 + (bD)^{\frac{1}{1-\rho}} + \dots + (bD)^{\frac{n-1}{1-\rho}} \right]^{\frac{1-\rho}{\rho}} \right]^\gamma \right\}^{\rho/\gamma} \right]^{1/\rho}$$

dla każdego $0 \leq c \leq x$ Gdy n dąży do nieskończoności w powyższej nierówności to:

$$\begin{aligned} J(x) &\geq \left[(1-b)c^\rho + b \left\{ E \left[R(x-c)(1-b)^{1/\rho} \left(\frac{1}{1-(bD)^{\frac{1}{1-\rho}}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \right]^\gamma \right\}^{\rho/\gamma} \right]^{1/\rho} \\ &= \left[(1-b)c^\rho + b \{ E [J(R(x-c))]^\gamma \}^{\rho/\gamma} \right]^{1/\rho} \end{aligned}$$

dla każdego $0 \leq c \leq x$.

Zatem, otrzymano:

$$J(x) \geq \max_{c \in A(x)} \left[(1-b)c^\rho + b \{ E [J(R(x-c))]^\gamma \}^{\rho/\gamma} \right]^{1/\rho} \quad (5.20)$$

dla każdego $x \geq 0$.

Rozważono teraz problem maksymalizacji w (5.20). Założono ponownie, że funkcja, która maksymalizuje prawą stronę, jest postaci $C^*(x) = a^*x$.

Zatem:

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq c \leq x} \left[(1-b)c^\rho + b \{E[J(R(x-c))]^\gamma\}^{\rho/\gamma} \right]^{1/\rho} = \\
& \max_{0 \leq a \leq 1} x(1-b)^{1/\rho} \left[a^\rho + b \left\{ E \left[R(1-a) \left(\frac{1}{1-(bD)^{1/\rho}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \right]^\gamma \right\}^{\rho/\gamma} \right]^{1/\rho} = \\
& \max_{0 \leq a \leq 1} x(1-b)^{1/\rho} \left[a^\rho + b(1-a)^\rho \left(\frac{1}{1-(bD)^{1/\rho}} \right)^{1-\rho} \{E[R^\gamma]\}^{\rho/\gamma} \right]^{1/\rho} = \\
& \max_{0 \leq a \leq 1} x(1-b)^{1/\rho} \left[a^\rho + (1-a)^\rho \frac{bD}{\left(1-(bD)^{1/\rho}\right)^{1-\rho}} \right]^{1/\rho}.
\end{aligned}$$

Z Dodatku 7.8 wynika, że:

$$a^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{bD}{\left[1-(bD)^{1/\rho}\right]^{1-\rho}} \right)^{1/\rho}} = \frac{1}{1 + \frac{(bD)^{1/\rho}}{1-(bD)^{1/\rho}}} = 1 - (bD)^{1/\rho}.$$

Zauważono, że $a^* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Z drugiej strony, wstawiając $C^*(x)$ do (5.20) otrzymano:

$$\begin{aligned}
J(x) & \geq x(1-b)^{1/\rho} \left[a^{*\rho} + (1-a^*)^\rho \frac{bD}{\left(1-(bD)^{1/\rho}\right)^{1-\rho}} \right]^{1/\rho} \\
& = x(1-b)^{1/\rho} \left[\left(1-(bD)^{1/\rho}\right)^\rho + (bD)^{\frac{\rho}{1-\rho}} \frac{bD}{\left(1-(bD)^{1/\rho}\right)^{1-\rho}} \right]^{1/\rho} \\
& = x(1-b)^{1/\rho} \left[\left(1-(bD)^{1/\rho}\right)^\rho + \frac{(bD)^{1/\rho}}{\left(1-(bD)^{1/\rho}\right)^{1-\rho}} \right]^{1/\rho} \\
& = x(1-b)^{1/\rho} \left(\frac{1}{1-(bD)^{1/\rho}} \right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} = J(x).
\end{aligned}$$

Podsumowując powyższe rozważania, można sformułować następujące wnioski. Jeśli zachodzi założenie **(A)**, wtedy, funkcja $J(x)$ w (5.19) jest rozwiązaniem równania optymalności, tzn. zachodzi równanie:

$$J(x) = \max_{0 \leq c \leq x} [(1-b)c^\rho + b(E[J(R(x-c))]^\rho)^\rho]^{1/\rho}.$$

Funkcja:

$$C^*(x) = x \left(1 - \left(bE[R^\rho]^\rho \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right)$$

realizująca maksimum po prawej stronie powyższego równania stanowi optymalną politykę. Funkcja

$$I^*(x) = x - C^*(x) = x \left(bE[R^\rho]^\rho \right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

stanowi optymalną inwestycję. Ponadto funkcja wartości $J(x)$ może być otrzymana jako granica ciągu wartości funkcji otrzymanych w modelach ze skończonym horyzontem czasowym. Wyprowadzono wzory na optymalne polityki dla rozkładów rozpatrywanych w modelu ze skończonym horyzontem czasowym.

1. Rozkład logarytmiczno-normalny $\mathcal{LN}(\mu_t, \alpha^2 s_t^2 + \sigma^2)$

$$C^*(x) = x \left(1 - \left(b \left(e^{\mu_t \gamma + \frac{1}{2} \gamma^2 (\alpha^2 s_t^2 + \sigma^2)} \right)^{\rho/\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right).$$

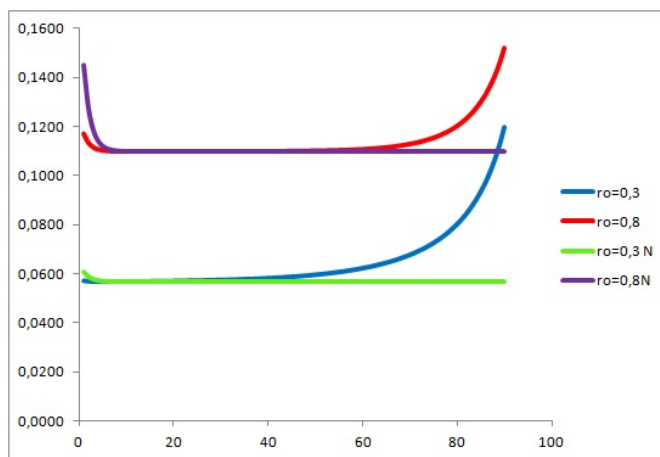
2. Rozkład jednostajny $\mathcal{U}[m, n]$,

$$C^*(x) = x \left(1 - \left(b \left(\frac{1}{n-m} \frac{1}{\gamma+1} (n^{\gamma+1} - m^{\gamma+1}) \right)^{\rho/\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right).$$

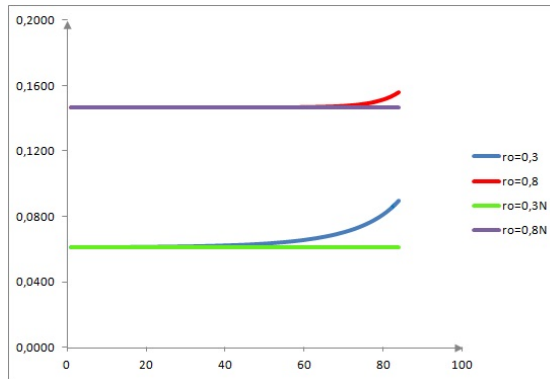
3. Rozkład trójkątny $\mathcal{T}[x_0 - B, x_0 + B]$

$$C^*(x) = x \left(1 - \left(b \left(\frac{1}{B^2} \frac{1}{(\gamma+1)(\gamma+2)} [(x_0 - B)^{\gamma+2} - 2x_0^{\gamma+2} + (x_0 + B)^{\gamma+2}] \right)^{\frac{\rho}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \right).$$

Aby pokazać, że wyniki otrzymane dla modelu z nieskończonym horyzontem czasowym są zbieżne z wynikami otrzymanymi dla danych rozkładów w modelu ze skończonym horyzontem narysowano ponownie wykresy do badanych poprzednio scenariuszy. Dla większej przejrzystości przykładów, wydłużono horyzont czasowy do $T = 100$. Wartości dla modelu ze skończonym horyzontem dążyć będą do wartości 1, ponieważ model zakłada całkowitą konsumpcję w ostatnim kroku, natomiast w modelu z nieskończonym horyzontem pozostają na stałym poziomie. Dla rozkładu logarytmiczno-normalnego narysowano ponownie optymalne strategie, biorąc dane z przykładu 6.4. (Linie dla modelu z nieskończonym horyzontem oznaczono literą N). Dla rozkładu jednostajnego narysowano ponownie optymalne strategie biorąc dane z przykładu 6.8. Dla rozkładu trójkątnego narysowano ponownie optymalne strategie biorąc dane z przykładu 5.12.

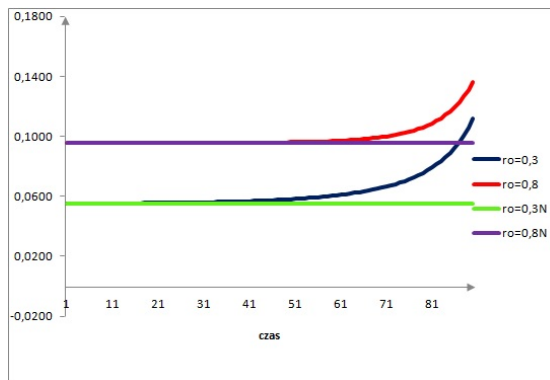


Rys. 5.16: Optymalna konsumpcja dla rozkładu logarytmiczno-normalnego ze skończonym i nieskończonym horyzontem czasowym. Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.17: Optymalna konsumpcja dla rozkładu jednostajnego ze skończonym i nieskończonym horyzontem czasowym

Źródło: opracowanie własne



Rys. 5.18: Optymalna konsumpcja dla rozkładu trójkątnego ze skończonym i nieskończonym horyzontem czasowym

Źródło: opracowanie własne

We wszystkich prezentowanych powyżej przykładach wyniki są zbieżne. Linie dla modelu ze skończonym horyzontem oraz dla modelu z nieskończonym horyzontem, przy zadanych parametrach pokrywają się.

Podsumowanie

W rozdziale tym rozważono wieloetapowy model zarządzania kapitałem lub zarządzania danym dobrem przez inwestora. Założono, że dynamika procesu poziomu kapitału z okresu na okres opisana jest przez pewne równanie rekurencyjne. Ponadto przyjęto, że inwestor agreguje przyszłą całkowitą użyteczność i natychmiastowe użyteczności pochodzące z konsumpcji danego dobra w danym okresie za pomocą funkcji agregującej wprowadzonej przez Epsteina-Hynesa [43]. Ponadto, inwestor stosuje gwarantowany równoważnik Krepsa-Porteusa [96] do oszacowania przyszłej całkowitej użyteczności. Przeanalizowano przykłady deterministyczne oraz przykłady stochastyczne, uwzględniając otrzymane wzory pozwalające wyliczyć optymalną politykę konsumpcji. W przykładach stochastycznych stopa procentowa miała zadany rozkład prawdopodobieństwa, a przykłady analizowano ze względu na różne wartości parametrów, takich jak elastyczność substytucji międzyokresowej, współczynnik ryzyka, wielkość stopy dyskontowej d . Pomimo przyjętych różnych rozkładów stopy procentowej, dla tych samych parametrów w modelu otrzymano podobne wnioski co do zachowania decydenta. Wyznaczono optymalne strategie konsumpcji, uwzględniając wpływ współczynnika ryzyka inwestora. Do modelowania przyjęto, że stopa procentowa ma rozkład logarytmiczno-normalny, jednostajny i trójkątny. Jak wspomniano w pracy, dla rozkładów tych otrzymano wzory, które pozwoliły na wyliczenie optymalnych strategii konsumpcji, natomiast dla innych rozkładów, np. normalnego, wzorów tych otrzymać nie można i należy wartości wyliczać numerycznie, co stanowić będzie kolejne etapy pracy naukowej autorki. Zbadano również model konsumpcji z nieskończonym horyzontem czasowym. Dokładniej, rozważono model decyzyjny, w którym decydent w każdym kroku musi decydować ile konsumować, a ile środków finansowych przeznaczyć na inwestycje [152]. Model z nieskończonym horyzontem czasowym rozwiązano analizując model ze skończonym horyzontem

czasowym. Pokazano, że przy słabych założeniach ciąg maksymalnych użyteczności otrzymanych dla problemu ze skończonym horyzontem czasowym jest zbieżny, gdy horyzont czasowy dąży do nieskończoności. Udowodniono, że funkcja graniczna (maksymalna użyteczność w modelu z nieskończonym horyzontem czasowym) spełnia tzw. równanie optymalności i pozwala wyznaczyć optymalną politykę inwestycji oraz konsumpcji.

Rozdział 6

Podsumowanie

Standardowa użyteczność dyskontowana z nieskończonym horyzontem czasowym została wprowadzona do modeli ekonomicznych przez Samuelsona [146]. Tę metodę dyskontowania można nazwać liniową. Niestety badania empiryczne sposobów ewaluacji użyteczności wskazują, że taki typ dyskontowania nie jest używany w praktyce. Lekarstwem może być tu wprowadzenie nieliniowej funkcji użyteczności [79] albo innego sposobu agregacji bieżącej użyteczności oraz strumienia przyszłych użyteczności okresowych. Ten drugi sposób został nakreślony w pracy Koopmansa [93], który zdefiniował użyteczność w modelu wieloetapowym proponując podejście oparte na pewnym równaniu rekurencyjnym. Stąd wywodzi się nazwa „użyteczność rekurencyjna”. Podstawowym narzędziem w badaniu tych użyteczności była metoda oparta na zasadzie programowania dynamicznego Bellmana. Za pomocą tej metody wyznaczono formuły optymalnych strategii inwestycji oraz konsumpcji w zadanym okresie czasowym, a także tzw. funkcję wartości, czyli maksymalną użyteczność. W szczególności, wyliczono optymalną strategię wynikającą ze stosowania ciągu optymalnych strategii, w przypadku gdy inwestor uwzględnia nie tylko wartość oczekiwaną przyszłej losowej użyteczności, ale także jej wyższe momenty, np.

wariancję. W tym celu rozważano następujące warunkowe ekwiwalenty: Krepsa i Porteusy [96] oraz ekwiwalent oparty na funkcji wykładniczej. Drugi wspomniany ekwiwalent znany jest w literaturze pod nazwą entropijnej miary ryzyka [49] i stosowany jest w badaniach operacyjnych [62], finansach czy ubezpieczeniach [13].

Kolejnym punktem pracy było uwzględnienie współczynnika wrażliwości na ryzyko w modelach dotyczących oceny inwestycji z losowymi wypłatami. Przyjmując, że wypłaty są niezależnymi zmiennymi losowymi o danym rozkładzie, określono kiedy dana inwestycja jest do przyjęcia dla inwestora o określonym współczynniku ryzyka, a kiedy należy ją odrzucić. Przedyskutowano zalety i wady tradycyjnych metod opłacalności inwestycji oraz zaproponowano nowe metody uwzględniające czynnik ryzyka. W szczególności wykorzystano miarę NPV oraz różne rozkłady zmiennej losowej w procesie badania przepływów pieniężnych.

Celem pracy było także przedstawienie nowatorskiego podejścia opartego o metodę programowania dynamicznego do wyznaczania optymalnego ciągów decyzji inwestycyjnych w wieloetapowych procesach decyzyjnych. Tak sformułowany cel pracy wymagał realizacji następujących celów cząstkowych:

- zdefiniowania i rozróżnienia definicji ryzyka i niepewności,
- przedstawienia miar ryzyka oraz probabilistycznych metod jego obliczania,
- przedstawienia teorii oczekiwanej użyteczności,
- implementacji metod zarządzania wieloetapowego do wyznaczenia optymalnej polityki inwestycji.

W pierwszym rozdziale pracy przybliżono i opisano pojęcie ryzyka. Dokonano przeglądu definicji ryzyka oraz niepewności. Przedstawiono, sklasyfikowano i opisano różne rodzaje ryzyka. W rozdziale tym opisano również możliwe postawy zachowań inwestorów przy podejmowaniu ryzykownych decyzji inwestycyjnych. Ten rozdział miał istotne znaczenie

w dalszej części, w której opisano modele, które uwzględniały stosunek inwestora do ryzyka. W Rozdziale tym przybliżono również proces zarządzania ryzykiem, który pozwala skutecznie redukować ryzyko do akceptowalnego przez inwestora poziomu.

W drugim rozdziale przedstawiono miary ryzyka wraz z ich zastosowaniem. Ilościowe ryzyko opisano za pomocą dostępnych w probabilistyce metod oraz za pomocą modeli stochastycznych. Szczególną uwagę poświęcono metodzie *VaR*, gdyż jest ona najpopularniejszą miarą stosowaną w wielu instytucjach nadzoru finansowego. Przedstawiono wiele przykładów, które pokazują jak tę metodę wykorzystać, w zależności od rozkładu prawdopodobieństwa. Miara ta przy pewnych założeniach pozwala oszacować w prosty sposób ryzyko rynkowe oraz może być interpretowana jako kwota wypłaty wolna od ryzyka, co jest wstępem do opisywanego w kolejnych rozdziałach i wykorzystywanego w modelach gwarantowanego równoważnika.

W trzecim rozdziale przedstawiono kryteria wyboru odpowiedniej funkcji użyteczności dla inwestora, opisano metody doboru jej parametrów oraz postaci. Omówiono również klasyczną teorię użyteczności i jej zastosowanie. Wiele miejsca poświęcono pojęciu awersji do ryzyka oraz gwarantowanemu równoważnikowi, który używany był w modelach opisywanych w kolejnych rozdziałach.

W rozdziale czwartym przedstawiono metody oceny dynamicznych przepływów pieniężnych. Następnie rozważono model *NPV* w nowym ujęciu. Uwzględniono w nim współczynnik wrażliwości na ryzyko inwestora. Pokazano, że skłonność do inwestowania zależy od wartości współczynnika wrażliwości na ryzyko decydenta. Zbudowano model i opisano kryteria jego oceny, dostosowano wzory do przypadków, w których wpływy mają rozkład jednostajny lub rozkład normalny. Kryteria oceny modelu przepływów pieniężnych mogą być z powodzeniem stosowane również do innych podobnych modeli. Przeanalizowane przykłady potwierdziły, że świadomość ryzyka osłabia

zapał inwestycyjny oraz wysokość inwestowanych kwot zależy od stosunku inwestora do ryzyka.

W piątym rozdziale zaproponowano metodę zarządzania poziomem kapitału firmy w wieloetapowym procesie decyzyjnym. Do tego celu wykorzystano tzw. rekurencyjne preferencje decydenta. Rozważono wieloetapowy model zarządzania kapitałem lub zarządzania danym dobrem przez inwestora. Przyjęto założenia, że dynamika procesu poziomu kapitału z okresu na okres opisana jest pewnym równaniem rekurencyjnym, które może być deterministyczne lub stochastyczne. Założono, że inwestor agreguje przyszłą całkowitą użyteczność i natychmiastowe użyteczności pochodzące z konsumpcji danego dobra w danym okresie za pomocą funkcji agregującej wprowadzonej przez Epsteina i Zina. Inwestor stosuje gwarantowany równoważnik Krepsa-Porteusa do oszacowania przyszłej całkowitej użyteczności. Przeanalizowano tu przykłady z deterministycznymi oraz stochastycznymi stopami zwrotu z inwestycji. W przykładach stochastycznych stopa procentowa miała zadany rozkład prawdopodobieństwa, a analiza była prowadzona ze względu na różne wartości parametrów. Wyprowadzono odpowiednie wzory na optymalne strategie konsumpcji oraz inwestycji. Pomimo przyjętych różnych rozkładów stopy procentowej, dla tych samych parametrów w modelu otrzymano podobne wnioski co do zachowania decydenta. Wyznaczono optymalne strategie konsumpcji, uwzględniając wpływ współczynnika ryzyka inwestora. Zbadano również model konsumpcji z nieskończonym horyzontem czasowym. Model z nieskończonym horyzontem czasowym rozwiązano, analizując model ze skończonym horyzontem czasowym, w którym pokazano, że przy słabych założeniach ciąg maksymalnych użyteczności otrzymanych dla problemu ze skończonym horyzontem czasowym jest zbieżny, gdy horyzont czasowy dąży do nieskończoności. Pokazano, że graniczna maksymalna użyteczność spełnia tzw. równanie optymalności i pozwala na wyliczenie optymalnych strategii.

Głównym celem pracy było skonstruowanie modeli zarządzania kapitałem uwzględniających stosunek inwestora do ryzyka. Celem pracy nie było zaproponowanie szczególnej metody zarządzania ryzykiem czy też wskazanie najlepszej metody jego oceny. Zagadnienia te, jak również funkcje użyteczności, zostały przedstawione w pracy stopniu umożliwiającym wprowadzenie oraz dobre rozeznanie w poruszanej dalej problematyce.

Rozdział 7

Dodatek

7.1. Kwestionariusz

Poniżej zamieszczono przykładową ankietę zaczerpniętą z książki D. Luenbergera *Investment Science*

Ankieta - jaki jest Twój współczynnik ryzyka?

1. Moje wynagrodzenie i całkowite zarobki znacząco wzrosną w nadchodzących latach:
 - a) całkowicie się nie zgadzam
 - b) nie zgadzam się
 - c) nie mam zdania
 - d) zgadzam się
 - e) całkowicie się zgadzam
2. Gdybym miał zdecydować jak zainwestować składki z mojego planu emerytalnego, wybrałbym inwestycję która oferuje stałe zyski i stabilizację:
 - a) całkowicie się nie zgadzam

- b) nie zgadzam się
 - c) nie mam zdania
 - d) zgadzam się
 - e) całkowicie się zgadzam
3. Uważam, że inwestowanie dzisiaj na tak zmieniającym się rynku papierów wartościowych jest jak gra w ruletkę w Las Vegas. Wszystko jest przeciwko tobie:
- a) całkowicie się nie zgadzam
 - b) nie zgadzam się
 - c) nie mam zdania
 - d) zgadzam się
 - e) całkowicie się zgadzam
4. Gdybym miał wybrać w akcje jakich spółek zainwestować, wybrałbym firmy, które są związane z rozwojem produktów istotnych dla przyszłości, takich jak następna penicylina (kolejne przełomowe odkrycie):
- a) całkowicie się nie zgadzam
 - b) nie zgadzam się
 - c) nie mam zdania
 - d) zgadzam się
 - e) całkowicie się zgadzam
5. Gdybym miał wybierać inwestycję na fundusz szkolny moich dzieci, wybrałbym:
- a) certyfikaty depozytowe
 - b) obligacje rządowe lub komunalne
 - c) udziały w funduszu inwestycyjnym

- d) kontrakty na towary
6. Ile osób mam na utrzymaniu:
- a) cztery lub więcej
 - b) trzy
 - c) dwie
 - d) jedną
 - e) tylko siebie
7. Ile lat pozostaje mi do przejścia na emeryturę:
- a) jestem emerytem
 - b) mniej niż 5 lat
 - c) 5-14 lat
 - d) 15-24 lata
 - e) 25 lat lub więcej
8. Wartość netto całego mojego majątku wynosi:
- a) mniej niż 15 tysięcy dolarów
 - b) 15001-50000\$
 - c) 50001-150000\$
 - d) 150001-350000\$
 - e) powyżej 350000\$
9. Kwota, którą zaoszczędziłem na nieprzewidywane sytuacje, takie jak utrata pracy lub nieoczekiwane wydatki na leczenie to:
- a) wysokość jednomiesięcznej pensji lub mniej
 - b) od dwóch do sześciu pensji
 - c) od siedmiu do dwunastu pensji

- d) więcej niż roczne ale mniej niż dwuletnie zarobki
 - e) więcej niż dwuletnie zarobki
10. Zainwestowałbym pieniądze raczej w fundusze inwestycyjne niż w pojedyncze akcje, ponieważ fundusze oferują profesjonalne zarządzanie i dywersyfikację portfela:
- a) całkowicie się zgadzam
 - b) zgadzam się
 - c) nie mam zdania
 - d) nie zgadzam się
 - e) całkowicie się nie zgadzam
11. Muszę i potrzebuję zredukować ogólny poziom zadłużenia moich finansów:
- a) całkowicie się zgadzam
 - b) zgadzam się
 - c) nie mam zdania
 - d) nie zgadzam się
 - e) całkowicie się nie zgadzam
12. Kiedy inwestuję, wybieram inwestycje, które dają mniejszy ale gwarantowany zysk w przeciwieństwie do tych, które są niepewne choć pozwalają zarobić więcej:
- a) całkowicie się zgadzam
 - b) zgadzam się
 - c) nie mam zdania
 - d) nie zgadzam się
 - e) całkowicie się nie zgadzam

Punktacja:

za każdą odpowiedź a - 1pkt, b - 2pkt, c - 3pkt, d - 4pkt, e - 5pkt.

- 46 punktów i więcej - bardzo wysoka tolerancja ryzyka
- 41-45 punktów - tolerancja ryzyka powyżej średniej
- 36-40 punktów - średnia tolerancja ryzyka
- 31-35 punktów - tolerancja ryzyka poniżej średniej
- 30 punktów lub mniej - brak tolerancji ryzyka.

Im wyższa tolerancja ryzyka tym mniejsza awersja do niego.

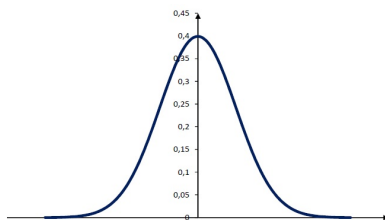
7.2. Postać równoważnika Krepsa-Porteusa dla rozkładu normalnego

Zmienna losowa Y ma rozkład normalny $Y \sim N(\mu_t, \sigma_t)$. Niech $r < 0$. Wtedy korzystając z rachunku całkowego oraz z faktu, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, (gdzie f jest funkcją gęstości zmiennej losowej), otrzymano:

$$\begin{aligned}
 E[e^{rY}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + rx} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{2rx\sigma^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 + 2x\mu + 2rx\sigma^2 - \mu^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2 + 2x(\mu+r\sigma^2) - \mu^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(\mu+r\sigma^2))^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu r\sigma^2 + r^2\sigma^4}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(\mu+r\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{2\mu r\sigma^2 + r^2\sigma^4}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{\frac{2\mu r\sigma^2 + r^2\sigma^4}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(\mu+r\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{2\mu r + r^2\sigma^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

Zatem:

$$E[e^{rY}] = e^{\frac{2\mu r + r^2\sigma^2}{2}} = e^{\mu r + \frac{r^2\sigma^2}{2}}. \quad (7.1)$$



Rys. 7.1: Gęstość rozkładu normalnego z parametrami $\mu = 0$ i $\sigma = 1$

Źródło: opracowanie własne

7.3. Rozkład logarytmiczno-normalny i jego charakterystyki

Zmienna losowa X jest zmienną o rozkładzie logarytmiczno-normalnym $\mathcal{LN}(\mu, s)$ [78]. Wtedy X ma gęstość:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2s^2}}, & \text{dla } x > 0 \\ 0, & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Obliczono $E[X]^a$ dla $a > 0$. Wiadomo, że:

$$E[X]^a = \int_0^{\infty} \frac{x^a}{xs\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2s^2}} dx.$$

Podstawiono teraz $t = \ln x$, więc $dt = \frac{dx}{x}$ oraz $x^a = e^{at}$. Granicami całkowania teraz będą $-\infty$ i ∞ . Zatem:

$$E[X]^a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{at - \frac{(t - \mu)^2}{2s^2}} dx.$$

Zauważono, że:

$$at - \frac{(t - \mu)^2}{2s^2} = \frac{-(t - (\mu + as^2))^2 + 2a\mu s^2 + a^2 s^4}{2s^2},$$

a stąd:

$$E[X]^a = e^{a\mu + \frac{a^2 s^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - (\mu + as^2))^2}{2s^2}} dx = e^{a\mu + \frac{a^2 s^2}{2}}, \quad (7.2)$$

ponieważ powyższa całka ma wartość 1, gdyż pod całką znajduje się gęstość rozkładu normalnego $N(\mu + as^2, s)$.

Wprost ze wzoru (7.2) wynikają następujące wnioski.

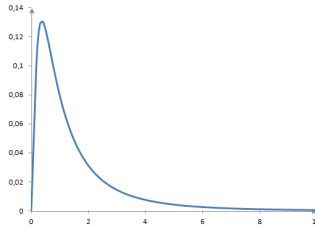
Wniosek 7.1. *Jeśli X ma rozkład logarytmiczno-normalny $\mathcal{LN}(\mu_t, \alpha^2 s_t^2 + \sigma^2)$ oraz $a = \gamma$, to:*

$$E[X]^\gamma = e^{\mu_t \gamma + \frac{1}{2} \gamma^2 (\alpha^2 s_t^2 + \sigma^2)}.$$

Wniosek 7.2. *Zachodzą wzory:*

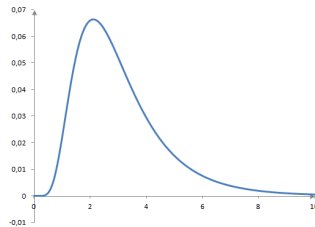
$$E[X]^2 = e^{(2\mu+2s^2)},$$

$$\text{Var}[X] = E[X]^2 - (E[X])^2 = e^{(2\mu+2s^2)} - e^{(2\mu+s^2)} = e^{(2\mu+s^2)}(e^{s^2} - 1).$$



Rys. 7.2: Gęstość rozkładu logarytmiczno-normalnego $\mathcal{LN}(0, 1)$

Źródło: opracowanie własne



Rys. 7.3: Gęstość rozkładu logarytmiczno-normalnego $\mathcal{LN}(1, \frac{1}{2})$

Źródło: opracowanie własne

7.4. Charakterystyki rozkładu jednostajnego

Zmienna losowa X jest zmienną o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[m, n]$.
Wtedy X ma gęstość:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-m}, & \text{gdy } x \text{ należy do } [m, n] \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Należy wyznaczyć teraz $E[X]^a$ dla $a > 0$. Otrzymano:

$$E[X]^a = \int_m^n \frac{x^a}{n-m} dx = \frac{1}{n-m} \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_m^n = \frac{1}{n-m} \frac{1}{a+1} (n^{a+1} - m^{a+1}). \quad (7.3)$$

Wprost ze wzoru (7.3) wynikają następujące wnioski:

Wniosek 7.3. *Jeśli X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[m, n]$ oraz $a = \gamma$, to:*

$$E[X]^\gamma = \frac{1}{n-m} \frac{1}{\gamma+1} (n^{\gamma+1} - m^{\gamma+1}).$$

Wniosek 7.4. *Zachodzą wzory:*

$$E[X] = \frac{1}{n-m} \frac{1}{2} (m^2 - n^2) = \frac{m+n}{2}$$

oraz

$$E[X]^2 = \frac{1}{n-m} \frac{1}{3} (n^3 - m^3) = \frac{1}{3(n-m)} (n^3 - m^3) = \frac{1}{3} (n^2 + mn + m^2),$$

$$\text{Var}[X] = E[X]^2 - (E[X])^2 = \frac{1}{3} (n^2 + mn + m^2) - \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 = \frac{(n-m)^2}{12}.$$

7.5. Charakterystyki rozkładu trójkątnego

Zmienna losowa X jest zmienną o rozkładzie trójkątnym $\mathcal{T}[x_0 - B, x_0 + B], B > 0$. Wtedy X ma gęstość:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2(x-x_0+B)}{2B^2}, & \text{gdy } x \text{ należy do } [x_0 - B, x_0] \\ \frac{2(x_0+B-x)}{2B^2}, & \text{gdy } x \text{ należy do } [x_0, x_0 + B] \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wyznaczono $E[X]^a$ dla $a > 0$:

$$\begin{aligned} E[X]^a &= \int_{x_0-B}^{x_0+B} x^a g(x) dx \\ &= \frac{1}{2B^2} \int_{x_0-B}^{x_0} x^a 2(x-x_0+B) dx + \frac{1}{2B^2} \int_{x_0}^{x_0+B} x^a 2(x_0+B-x) dx \\ &= \frac{1}{B^2} \int_{x_0-B}^{x_0} x^{a+1} - x^a(x_0-B) dx + \frac{1}{B^2} \int_{x_0}^{x_0+B} x^a(x_0+B) - x^{a+1} dx \\ &= \frac{1}{B^2} \left[\frac{x^{a+2}}{a+2} - \frac{x^{a+1}}{a+1}(x_0-B) \right]_{x_0-B}^{x_0} + \frac{1}{B^2} \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}(x_0+B) - \frac{x^{a+2}}{a+2} \right]_{x_0}^{x_0+B} \\ &= \frac{1}{B^2} \frac{1}{(a+1)(a+2)} [(x_0-B)^{a+2} - 2x_0^{a+2} + (x_0+B)^{a+2}]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

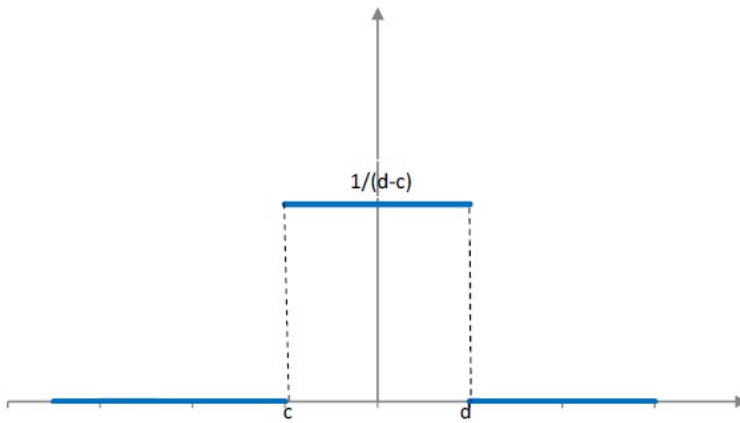
Wprost ze wzoru (7.4) wynikają następujące wnioski.

Wniosek 7.5. *Jeśli X ma rozkład trójkątny $\mathcal{T}[x_0 - B, x_0 + B], B > 0$ oraz $a = \gamma$, to:*

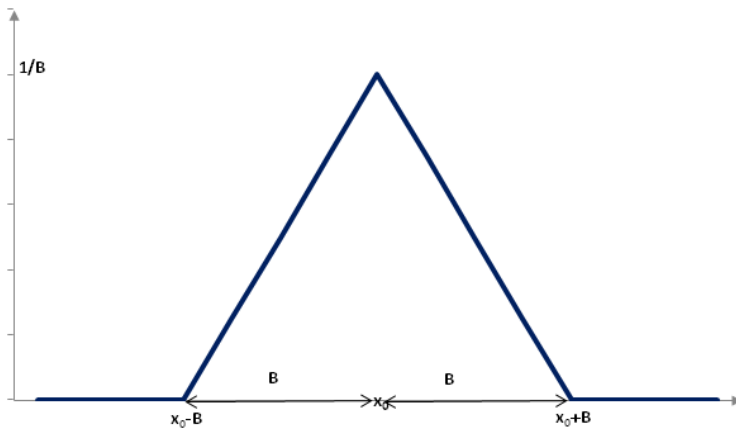
$$E[X]^\gamma = \frac{1}{B^2} \frac{1}{(\gamma+1)(\gamma+2)} [(x_0-B)^{\gamma+2} - 2x_0^{\gamma+2} + (x_0+B)^{\gamma+2}].$$

Wniosek 7.6. *Zachodzą wzory:*

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{B^2} \frac{1}{6} [(x_0-B)^3 - 2x_0^3 + (x_0+B)^3] = x_0, \\ E[X]^2 &= \frac{1}{B^2} \frac{1}{12} [(x_0-B)^4 - 2x_0^4 + (x_0+B)^4] = x_0^2 + \frac{1}{6}B^2, \\ \text{Var}[X] &= E[X]^2 - (E[X])^2 = x_0^2 + \frac{1}{6}B^2 - x_0^2 = \frac{1}{6}B^2. \end{aligned}$$



Rys. 7.4: Gęstość rozkładu jednostajnego na odcinku $[c, d]$
 Źródło: opracowanie własne



Rys. 7.5: Gęstość rozkładu trójkątnego na odcinku $[x_0 - B, x_0 + B]$
 Źródło: opracowanie własne

7.6. Pochodna funkcji logarytmicznej

Rozważono funkcję $f : R \mapsto (0, +\infty)$ różniczkowalną, gdzie R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Wtedy:

$$\frac{d \ln f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Zatem:

$$d \ln f(x) = \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)} \implies d \ln f = \frac{df}{f}.$$

Ponadto:

$$\frac{d \ln(1/f(x))}{dx} = -\frac{1}{1/f(x)} \left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 f'(x) = -\frac{f'(x)dx}{f(x)},$$

i w konsekwencji:

$$d \ln(1/f) = -\frac{df}{f}.$$

7.7. EIS dla rekurencyjnej funkcji użyteczności

Niech $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots)$. Ten podrozdział ma na celu pokazanie, że dla rekurencyjnej użyteczności opisanej przez równanie rekurencyjne:

$$U(\mathbf{c}) = ((1-b)c_1^\rho + b(U_{(2c)})^\rho)^{1/\rho}$$

elastyczność substytucji międzyokresowej jest stała i równa:

$$EIS = \frac{1}{1-\rho}.$$

Oznaczono ${}_t c = (c_t, c_{t+1}, c_{t+2}, \dots)$. Rozważono następujące równanie

$$U({}_t c) = ((1-b)c_t^\rho + b(U_{(t+1c)})^\rho)^{1/\rho}.$$

Z definicji $EIS = \left| \frac{d \ln(c_{t+1}/c_t)}{d \ln(U_{t+1}/U_t)} \right|$.

Zauważono, że:

$$U_t = \frac{\partial U({}_t c)}{\partial c_t} = ((1-b)c_t^\rho + b(U_{(t+1c)})^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} (1-b)c_t^{\rho-1}.$$

Zatem:

$$U_t = \frac{(1-b)(U({}_t c))^{1-\rho}}{c_t^{1-\rho}},$$

oraz:

$$U_{t+1} = \frac{(1-b)(U_{(t+1c)})^{1-\rho}}{c_{t+1}^{1-\rho}}.$$

Używając obu wyrażeń otrzymano, że:

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{1-\rho} \left(\frac{U({}_t c)}{U_{(t+1c)}} \right)^{1-\rho} = \frac{U_t}{U_{t+1}}$$

i w konsekwencji:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{U_t}{U_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \frac{U_{(t+1c)}}{U({}_t c)}. \quad (7.5)$$

Stąd:

$$\frac{d(c_{t+1}/c_t)}{d(U_t/U_{t+1})} = \frac{1}{1-\rho} \left(\frac{U_t}{U_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\rho}-1} \frac{U_{(t+1)c}}{U_{(t)c}}. \quad (7.6)$$

Co więcej, z równania (7.5) wynika, że:

$$\frac{U_{(t+1)c}}{U_{(t)c}} = \frac{c_{t+1}}{c_t} \left(\frac{U_{t+1}}{U_t} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}.$$

Łącząc to wyrażenie z (7.6) otrzymano:

$$\frac{d(c_{t+1}/c_t)}{d(U_t/U_{t+1})} = \frac{1}{1-\rho} \left(\frac{U_t}{U_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\rho}-1} \frac{c_{t+1}}{c_t} \left(\frac{U_{t+1}}{U_t} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{1-\rho} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{U_{t+1}}{U_t}.$$

Ostatecznie:

$$\frac{\frac{d(c_{t+1}/c_t)}{c_{t+1}/c_t}}{\frac{d(U_t/U_{t+1})}{U_t/U_{t+1}}} = \frac{1}{1-\rho} \implies \frac{d \ln(c_{t+1}/c_t)}{d \ln(U_t/U_{t+1})} = \frac{1}{1-\rho}.$$

7.8. Maksymalizacja funkcji agregującej

Ten podrozdział ma na celu pokazanie, że funkcja:

$$f(x) = (px^\rho + q(1-x)^\rho)^{1/\rho}, \quad \text{gdzie } \rho \in (0, 1), \quad p, q > 0, \quad x \in [0, 1],$$

którą maksymalizowano w Rozdziale 5, osiąga maksimum w punkcie

$$x_{\max} = \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}}.$$

Zauważono, że funkcja $z \mapsto z^{1/\rho}$ jest rosnąca gdyż $1/\rho > 0$. Zatem wystarczy rozważyć maksymalizację funkcji:

$$f_0(x) = px^\rho + q(1-x)^\rho.$$

Zaobserwowano, że funkcja f_0 jest sumą dwóch ściśle wklęsłych funkcji i dlatego f_0 jest ściśle wklęsła. Niech x_{\max} będzie wartością, w której funkcja f osiąga maksimum. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum wiadomo, że:

$$f_0'(x) = \rho px^{\rho-1} - \rho q(1-x)^{\rho-1} = 0.$$

W konsekwencji dla $x \neq 1$ oraz $x \neq 0$ otrzymano, że:

$$\frac{p}{x^{1-\rho}} = \frac{q}{(1-x)^{1-\rho}} \quad \implies \quad (1-x)p^{\frac{1}{1-\rho}} = xq^{\frac{1}{1-\rho}}.$$

Zatem:

$$x_{\max} = \frac{p^{\frac{1}{1-\rho}}}{p^{\frac{1}{1-\rho}} + q^{\frac{1}{1-\rho}}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}}.$$

Streszczenie

Dynamiczne modele decyzyjne z kryterium wypłaty uwzględniającym ryzyko

Praca poświęcona jest ujęciu ryzyka w wieloetapowych procesach zarządzania kapitałem przedsiębiorstwa. Omówiono w niej pojęcie ryzyka, podano jego różne definicje oraz zaprezentowano proces zarządzania ryzykiem. Opisano również ilościowe miary ryzyka, wartość narażoną na ryzyko oraz pokazano, w jaki sposób ryzyko może być ujęte za pomocą funkcji użyteczności. W szczególności skupiono się na omówieniu i wykorzystaniu gwarantowanych równoważników Krepsa i Porteusy oraz Weila. Przy pomocy gwarantowanego równoważnika Weila zaproponowano ulepszoną metodę NPV oceny inwestycji z losowymi wpływami. Odzwierciedla to sytuację inwestora ostrożnego w stosunku do ryzyka. Następnie opierając się o metodę agregacji, zaproponowaną przez Epsteina i Zina, bieżącej wypłaty oraz wypłaty związanej ze strumieniem przyszłych inwestycji, podano optymalne ciągi inwestycji i konsumpcji. Podstawowym narzędziem w badaniu tych wieloetapowych problemów decyzyjnych była metoda oparta na zasadzie programowania dynamicznego oraz zasada indukcji wstecznej. W szczególności wyliczono optymalne strategie, w przypadku gdy inwestor uwzględnia nie tylko wartość oczekiwaną przyszłej losowej wypłaty, ale także jej wyższe momenty, np. wariancję. Do tego celu wykorzystano gwarantowany równoważnik Krepsa i Porteusy.

Abstract

Dynamic decision models with a risk-sensitive payment criterion

This work is devoted to a study of risk in multistage capital management processes. The PhD thesis discusses the concept of risk, provides its various definitions and presents the risk management process. In particular, the quantitative risk measures, the value at risk are described and how the risk can be captured with the aid of the utility function. Moreover, the work focuses on a discussion of two well-known certainty equivalents: the Kreps-Porteus certainty equivalent and the Weil certainty equivalent. With the help of the latter, an improved NPV method of assessing investments with random payoffs was proposed. This reflects the investor's cautious attitude toward risk. Next, based on the aggregation function, proposed by Epstein and Zin, of the current payment and the payment generated by future investments, the sequences of optimal investments and consumptions were obtained. The basic tool in the study of these multistage decision problems was the principle of dynamic programming and the backward induction. In particular, the optimal strategies were provided, when the investor takes into account not only the expected value of the future random payoff, but also its higher moments, for example the variance. For this purpose, the certainty equivalent of Kreps and Porteus was considered.

Bibliografia

- [1] Acerbi C., Tasche D. (2002), *Expected shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk*, Economic Notes. Review of Banking, Finance and Monetary Economics 31, <http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0105191.pdf>.
- [2] Adhikari B. K., Agrawal A. (2016), *Does local religiosity matter for bank risk-taking?* Journal of Corporate Finance 38, 272-293.
- [3] Alhawari S., Karadsheh L., Talet A.N., Mansour E. (2012), *Management framework from Information Technology project*, International Journal of Information Management 25, 50-65.
- [4] Allais M. (1953), *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'Ecole Americaine*, Econometrica 21, 503-546.
- [5] Anderson E.W. (2005), *The dynamics of risk-sensitive allocations*, Journal of Economic Theory 125, 93-150.
- [6] Artzner P., Delbaen F., Eber J-M., Heath D. (1999), *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance 9, 203-228.
- [7] Arrow K. J. (1965), *Aspects of the Theory of Risk Bearing*, The Theory of Risk Aversion, Helsinki: Yrjo Jahnssonin Saatio. Reprinted in: *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Markham Publ. Co., Chicago, 1971, 90-109.
- [8] Ashenfelter O., Levine P. B., Zimmerman D.J. (2003), *Statistics and Econometrics: Methods and Applications*, John Wiley and Sons, Inc. New York

- [9] Antikarov V., Copeland T.E. (2003), *Real Options: A Practitioner's Guide*, Texere.
- [10] Aven T. (2012), *The risk concept-historical and recent development trends*, Reliability Engineering and System Safety 99, 33-44.
- [11] Bakr A.F., El Hagla K., Nayer A., Rawash A. (2012), *Heuristic approach for risk assessment modeling: EPCCM application (Engineer Procure Construct Contract Management)*, Alexandria Engineering Journal 51, 305-323.
- [12] Bałamut T. (2002), *Metody estymacji Value at Risk*, Materiały i Studia - Zeszyt nr 147, Narodowy Bank Polski, Departament Analiz Makroekonomicznych i Strukturalnych, Warszawa.
- [13] Bäuerle N., Jaśkiewicz A. (2015), *Risk sensitive dividend problems*, European Journal of Operational Research 242, 161-171.
- [14] Bäuerle N., Jaśkiewicz A. (2017), *Dividend payout model with risk sensitive preferences*, Insurance: Mathematics and Economics 73, 82-93.
- [15] Bäuerle N., Rieder U. (2011), *Markov Decision Processes with Applications to Finance*, Springer, Berlin.
- [16] Bäuerle N., Rieder U. (2017), *Zero-sum risk-sensitive stochastic games*, Stochastic Processes and their Applications 127, 622-642.
- [17] Becker R.A., Boyd III H.J. (1997), *Capital Theory, Equilibrium Analysis and Recursive Utility*, Blackwell Publishers, Oxford.
- [18] Begg D., Fisher S., Dornbusch R. (2003), *Ekonomia. Mikroekonomia*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [19] Bell D.E. (1988), *One-switch utility functions and a measure of risk*, Management Science 34, 1416-1424.
- [20] Bellman R.E. (1965), *Adaptacyjne procesy sterowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [21] Bellman R.E., Dreyfus E. (1967), *Programowanie dynamiczne, zastosowania*, PWE, Warszawa.

- [22] Bernoulli D. (1954), *Exposition of new theory on the measurement of risk*, *Econometrica* 22, 23-36.
- [23] Bernstein P.L., Damodaran A. (1999), *Zarządzanie inwestycjami*, Liber, Warszawa.
- [24] Best P. (2000), *Wartość narażona na ryzyko*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- [25] Bielecki T., Pliska S.R. (2003), *Economic properties of the risk sensitive criterion for portfolio management*, *Review of Accounting and Finance* 2, 3-17.
- [26] Bizon-Górecka J. (1998), *Monitoring czynników ryzyka w przedsiębiorstwie*, Oficyna Wydawnicza Ośrodka Postępu Organizacyjnego Sp. z o.o., Bydgoszcz.
- [27] Blavatsky P. (2008), *Stochastic utility theorem*, *Journal of Mathematical Economics* 44, 1049-1056.
- [28] Boyd J. (1990), *Recursive utility and the Ramsey problem*, *Journal of Economic Theory* 50, 326-345.
- [29] Brigham E.F., Gapenski L.C. (2000), *Zarządzanie finansami*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [30] Butler C. (2001), *Tajniki Value at Risk*, Liber, Warszawa.
- [31] Camerer C. (1989), *An experimental test of several generalized utility theories*, *Journal of Risk and Uncertainty* 2, 61-104.
- [32] Charnes J. (2007), *Financial Modeling with Crystal Ball and Excel*, John Wiley and Sons, New York.
- [33] Cheng T.C.E., Yip F.K., Yeung A.C.L. (2012), *Investment Valuation. Tools and Techniques for Determining the Value of any Asset*, John Wiley and Sons, New York.
- [34] Czarny E. (2006), *Mikroekonomia*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [35] Damodaran A. (2009), *Ryzyko strategiczne. Podstawy zarządzania ryzykiem*, Akademia Leona Koźmińskiego, Warszawa.
- [36] Damodaran A. (2007), *Finanse korporacyjne: teoria i praktyka*, Helion, Gliwice.

- [37] Dixit A.K., Pindyck R.S. (1995), *The options approach to capital investment*, Harvard Business Review.
- [38] Dobija M. (1991), *Elementy rachunkowości zarządczej*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków.
- [39] Dror M., Hartman B.C. (1999), *Stopping rules for utility functions and the St. Petersburg gamble*, Applied Mathematics and Computation 98, 279-291.
- [40] Dudzińska-Baryła R. (2012), *Wybrane metody szacowania funkcji użyteczności i funkcji wartości*, W: Modelowanie preferencji a ryzyko '12, Zeszyty Naukowe Wydziałowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- [41] Dziworska K. (2000), *Decyzje inwestycyjne przedsiębiorstw*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- [42] Dyduch A., Sierpińska M., Wilimowska Z. (2013), *Finanse i rachunkowość*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [43] Epstein L., Hynes A. (1983), *The rate of time preference and dynamic economic analysis*, Journal of Political Economy, 91 (4), 611-635.
- [44] Epstein L., Zin S. (1989), *Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework*, Econometrica, 57 (4), 937-969.
- [45] Fabozzi F.J. (1996), *Measuring and controlling interest rate risk*, Frank J. Fabozzi Associates, New Hope, Pennsylvania.
- [46] Falkowski A., Tyszka T. (2006), *Psychologia zachowań konsumenckich*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.
- [47] Fedorowicz Z. (1993), *Finanse przedsiębiorstwa*, Poltext, Warszawa.
- [48] Fiszeder P. (2009), *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- [49] Föllmer H., Schied A. (2004), *Stochastic Finance*, Walter de Gruyter, Berlin.

- [50] Fichtenholz G.M. (2011), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [51] Fishburn P.C. (1982), *The Foundations of Expected Utility*, Springer, Dordrecht.
- [52] Forlicz S., Jasiński M. (2000), *Mikroekonomia*, Wydawnictwo WSB, Poznań.
- [53] Frankenhuys W.E., del Giudice M. (2012), *When do adaptive developmental mechanisms yield maladaptive outcomes?* *Developmental Psychology* 48, 628-642.
- [54] Gajdka J. (2001), *Teorie struktury kapitałowej i ich implikacja w warunkach polskich*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- [55] Gątarek D., Maksymiuk R., Krysiak M., Witkowski Ł. (2001), *Nowoczesne metody zarządzania ryzykiem*, WIG-Press, Warszawa.
- [56] Giannakis M., Louis M. (2011), *A multi-agent based frame work for supply chain risk management*, *Journal of Purchasing and Supply Management* 17, 23-32.
- [57] Gluzicka A. (2013), *Problem naruszania zasad teorii oczekiwanej użyteczności na przykładzie paradoksu Allais*, *Studia Ekonomiczne, Analiza i wspomaganie decyzji* 135, 51-63.
- [58] Ha-Dong M., Treich N. (2000), *Recursive intergenerational utility in global modelling*, Working paper LEERNA-INRA, University of Toulouse 1.
- [59] Heilpern S. (2001), *Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka i niepewności*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- [60] Hillson D., Murray-Webster R. (2007), *Understanding and Managing Risk Attitude*, Gower Publishing Ltd.
- [61] Houston A. I., Fawcett T. I., Mallpress D. E. W., McNamara J. M. (2014), *Clarifying the relationship between prospect theory and risk-sensitive foraging theory*, *Evolution and Human Behavior* 35, 502-507.

- [62] Howard R.A., Matheson J.E. (1972), *Risk-sensitive Markov decision processes*, Management Science 18, 356-369.
- [63] Huck S., Muller W. (2007), *Allais for all: revisiting the paradox*, ELSE Working Papers 289.
- [64] Helton J.C. (1997), *Uncertainty and sensitivity analysis in the presence of stochastic and subjective uncertainty*, Journal of Statistical Computation and Simulation 57.
- [65] Holliwell J. (2001), *Ryzyko finansowe. Metody identyfikacji i zarządzania ryzykiem finansowym*, Liber, Warszawa.
- [66] Houston A.I, Fawcett T.W., Mallpress D.E., McNamara J.M. (2014), *Clarifying relationship between prospect theory and risk-sensitive foraging theory*, Evolution and Human Behavior 35, 502-506.
- [67] Howard R.A., Matheson J.E. (1972), *Risk-sensitive Markov decision processes*, Management Science 18, 356-369.
- [68] Ignasiak E. (1994), *Optymalizacja projektów inwestycyjnych*, PWE, Warszawa.
- [69] Jajuga K., Jajuga T. (2001), *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [70] Jajuga K., Jajuga T. (1998), *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [71] Jajuga T. (2000), *Podjęmowanie decyzji inwestycyjnych w warunkach ryzyka*, W: Budżetowanie kapitałów, pod red. W. Pluty, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [72] Jajuga T., Słoiński T. (1997), *Finanse spółek, długoterminowe decyzje inwestycyjne i finansowe*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- [73] Jajuga K. (2000), *Miary ryzyka rynkowego - część trzecia*, Rynek Terminowy 2.
- [74] Jajuga K. (2004), *O pewnych modelach decyzji finansowych*, Decyzje 1, 37-54.

- [75] Jajuga K. (2007), *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [76] Jajuga K. (2001), *Value at Risk*, Rynek Terminowy 13, 18-20.
- [77] Jakubowski J. (2006), *Modelowanie rynków finansowych*, Wydawnictwo Script, Warszawa.
- [78] Jakubowski J., Sztencel R. (2010), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo Script, Warszawa.
- [79] Jaśkiewicz A., Matkowski J., Nowak A.S. (2014), *On variable discounting in dynamic programming: applications to resource extraction and other economic models*, Annals of Operations Research 220, 263-278.
- [80] Jaśkiewicz A., Nowak A.S. (2011), *Discounted dynamic programming with unbounded returns: application to economic models*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 378, 450-462.
- [81] Jaworski J. (2010), *Teoria i praktyka zarządzania finansami w przedsiębiorstwie*, Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa.
- [82] Jerzemowska M. (1999), *Kształtowanie struktury kapitału w spółkach akcyjnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [83] Kahneman D., Tversky A. (1979), *Prospect theory: an analysis of decision under risk*, Econometrica 47, 263-291.
- [84] KarimiAzari A., Mousavi N., Mousavi F., Hosseini S. (2011), *Risk assessment model selection in construction industry*, Expert Systems with Applications 38, 9105-9111.
- [85] Keeney R.L. (1982), *Decision analysis: an overview*, Operations Research 30, 803-838.
- [86] Keeney R.L., Raiffa H. (1976), *Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, Wiley, New York.
- [87] Kester W.C. (1984), *Today's options for tomorrow's growth*, Harvard Business Review.
- [88] Kijima M. (2013), *Stochastic Processes with Applications to Finance*, CRC Press, Boca Raton.

- [89] Klimczak B. (2006), *Mikroekonomia*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- [90] Kloman H.F. (1990), *Risk management Agonist*, Risk Analysis 10, 201-205.
- [91] Knapp K.C., Olson L.J. (1996), *Dynamic resource management: intertemporal substitution and risk aversion*, American Journal of Agricultural Economics 7, 1004-1014.
- [92] Kołmogorow A.N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.
- [93] Koopmans T. (1960), *Stationary ordinal utility and impatience*, Econometrica 28, 287-309.
- [94] Kopańska-Bródka D. (2012), *Wzorzec modelu oczekiwanej użyteczności a rozwój teorii decyzji*, W: Modelowanie preferencji a ryzyko '12, Zeszyty Naukowe Wydziałowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- [95] Kowalik S. (2004), *Nowoczesne metody optymalizacyjne w zastosowaniach górniczych i ekonomicznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- [96] Kreps D., Porteus E. (1978), *Temporal resolution of uncertainty and dynamic choice theory*, Econometrica 46, 185-200.
- [97] Krupa M. (2002), *Ryzyko i niepewność w zarządzaniu firmą*, Antykwa, Kraków.
- [98] Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M. (1999), *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Część I Rachunek prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [99] Krysicki W., Włodarski L. (2011), *Analiza matematyczna w zadaniach cz. 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [100] Krysicki W., Włodarski L. (2011), *Analiza matematyczna w zadaniach cz. 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [101] Kulatilaka N., Perotti E.C. (1998), *Strategic growth options*, Management Science.

- [102] Kuziak K., *Koncepcja wartości zagrożonej VaR (Value at Risk)*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Katedra Inwestycji Finansowych i Ubezpieczeń, dostępny <http://www.statsoft.pl/czytelnia/finanse/PDF/kuziak.pdf>.
- [103] Lavastre O., Spalanzani A. (2010), *Comment gerer les risques lies a la chaine logistique? Une reponse par les pratiques de SCRM*, Cahier de recherche nr 2010-02 E5, CERAG.
- [104] Lucas R., Stokey N. (1984), *Optimal growth with many consumers*, Journal of Economic Theory 32, 139-171.
- [105] Lucas R., Stokey N., Prescott E. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamic*, Cambridge: Harvard University Press.
- [106] Luenberger D. (1998), *Investment Science*, Oxford University Press, New York Oxford, 229-238.
- [107] Łuniewska M. (2008), *Ekonometria finansowa. Analiza rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [108] Machina M.J. (2004), *Nonexpected Utility Theory*, W: Encyclopedia Of Actuarial Science, Red. J.L. Teugels, B. Sundt, John Wiley and Sons, Chichester.
- [109] Marcinek K. (2002), *Finansowa ocena przedsięwzięć inwestycyjnych przedsiębiorstw*, skrypty uczelniane AE im. K. Adamieckiego w Katowicach, Katowice.
- [110] Marcinek K. (2001), *Ryzyko projektów inwestycyjnych*, Prace Naukowe, Wydawnictwo Uczelniane AE im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice.
- [111] Markowitz H. (1952), *Portfolio selection*, Journal of Finance 7, 77-91.
- [112] Matkowski J., Nowak A.S. (2011), *On discounted dynamic programming with unbounded returns*, Economic Theory 46, 455-474.
- [113] Mazouni M.H. (2008), *Pour une Meilleure Approche du Management des Risques; De la Modelisation Ontologique du*

- Processes Accidentel au systeme Interactif d'Aide a la Decision*, These de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Univerite de Nancy.
- [114] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. (2005), *Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, New Jersey.
- [115] Merton R.C. (1990), *Continuous-Time Finance*, Blackwell Publishers, Cambridge.
- [116] mfiles.pl/index.php/Nowa-umowa-kapitałowa.
- [117] Miao J. (2014), *Economic Dynamics in Discrete Time*, Cambridge: The MIT Press, Cambridge.
- [118] Michalak A. (2007), *Finansowanie inwestycji w teorii i praktyce*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [119] Michalski M.Ł. (2009), *Analiza metod oceny efektywności inwestycji rzeczowych*, *Managerial Economics* 6, 119-128.
- [120] Mielcarz P., Paszczyk P. (2013), *Analiza projektów inwestycyjnych w procesie tworzenia wartości przedsiębiorstwa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [121] Mizerka J. (2005), *Opcje rzeczywiste w finansowej ocenie efektywności inwestycji*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- [122] Mun J. (2010), *Modeling risk*, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.
- [123] Myers S.C., (2001), *Finance theory and financial strategy*. W: Real options and investment under uncertainty, (eds.) E.S. Schwartz, L.Trigeorgis, MIT Press, Cambridge, Mass., London.
- [124] Nowak E., Pielichaty E., Poszwa M. (1999), *Rachunek opłacalności inwestowania*, Wydawnictwo PWE, Warszawa.
- [125] Ostrowska E. (1999), *Ryzyko inwestycyjne. Identyfikacja i metody oceny*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- [126] Ostrowska E. (2002), *Ryzyko projektów inwestycyjnych*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

- [127] *Oxford English Dictionary* (2011), Oxford University Press.
- [128] Peltola J., Knapp K.C. (2001), *Recursive preferences in forest management*, *Forest Science* 47, 455-465.
- [129] Penc J. (1994), *Strategie zarządzania*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa.
- [130] Pritchard C. (2001), *Zarządzanie ryzykiem w projektach*, Wydawnictwo WIG-Press, Warszawa.
- [131] Pratt J.W. (1964), *Risk aversion in the small and in the large*, *Econometrica* 32, 122-136.
- [132] Rabin M. (2000), *Risk aversion and expected utility theory: a calibration theorem*, *Econometrica* 68, 1281-1292.
- [133] Rejda G.E., McNamara M.J. (2014), *Principles of Risk Management and Insurance*, Pearson Education Limited, Edinburgh.
- [134] Ren G. (2019), *Dynamic programming with recursive preferences*, PhD Thesis, Research School of Economics, Australian National University.
- [135] Ren G., Stachurski J. (2019), *Discrete time dynamic programming with recursive preferences: optimality and applications*, Raport 2019, arXiv:1812.05748v3.
- [136] Rincon-Zapatero J.P., Rodriguez-Palmero C. (2003), *Existence and uniqueness of solutions to the Bellman equation in the unbounded case*, *Econometrica* 71 (2003), 1519-1555.
- [137] Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002), *Conditional Value-at-Risk for general loss distributions*, *Journal of Banking and Finance* 26, 1443-1471.
- [138] Rogowski W. (2008), *Rachunek efektywności inwestycji*, Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o., Kraków.
- [139] Rogowski W., Kasiewicz S. (2006), *Konfrontacja teorii z praktyką w zakresie stosowania metod oceny opłacalności inwestycji w Polsce*, W: Czas na pieniądz, Zarządzanie finansami – inwestycje

- i wycena przedsiębiorstw, tom I, pod red. D. Zarzeckiego, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- [140] Rogowski W., Michalczewski A. (2005), *Zarządzanie ryzykiem w przedsięwzięciach inwestycyjnych. Ryzyko walutowe i ryzyko stopy procentowej*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- [141] Różański J. (2006), *Inwestycje rzeczowe i kapitałowe*, Difin, Warszawa.
- [142] Rudkowski A. (2010), *Zarządzanie finansami*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [143] Rutkowski A. (2007), *Zarządzanie finansami*, PWE, Warszawa.
- [144] Samuelson P. (1937), *A note on measurement of utility*, Review of Economic Studies 4, 155-161.
- [145] Samuelson P. (1977), *St. Petersburg paradoxes: defanged, dissected, and historically described*, Journal of Economic Literature 15, 24-55.
- [146] Samuelson P.A., Nordhaus W.D. (2000), *Ekonomia 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [147] Schorfheide F., Song D., Yaaron A. (2018), *Identifying Long-Run Risks: A Bayesian Mixed-Frequency Approach*, Econometrica 86, 617-654.
- [148] Seidl C. (2013), *The St. Petersburg Paradox at 300*, Journal of Risk and Uncertainty 46, 247-264.
- [149] *Słownik Języka Polskiego* (2006), Wydawnictwo Naukowe PWN.
- [150] Sosnowska H. (2008), *Prawdopodobieństwo subiektywne a reguły rachunku prawdopodobieństwa, Metody ilościowe w ekonomii*, Wydawnictwo WSB w Poznaniu, Poznań.
- [151] Stachurski J. (2009), *Economic Dynamics: Theory and Computation*, MIT Press, Cambridge.
- [152] Stokey N., Lucas R., Prescott E. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamic*, Cambridge: Harvard University Press.
- [153] Szczepańska J. (2016), *Model badania opłacalności inwestycji rzeczowych w warunkach ryzyka i niepewności*, Oficyna Wydawnicza PWSZ w Nysie, Nysa.

- [154] Szpara A. (2017), *On application of recursive preferences in optimal growth model*, ISAT 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing 657, Springer.
- [155] Szpara A., Seretna-Sałamaj D. (2015), *Zarządzanie finansami przedsiębiorstw z uwzględnieniem czynnika wrażliwości na ryzyko. O nowy ład finansowy w Polsce. Rekomendacje dla animatorów życia gospodarczego*. Opracowanie z serii „Przedsiębiorczość” Wydawnictwo SGH, Warszawa.
- [156] Tang O., Musa S.W. (2011), *Identifying risk issues and research advancements in supply chain risk management*, International Journal of Production Economics (133), 25-34.
- [157] Tarczyński W. (2001), *Istota ryzyka i zarządzania ryzykiem*, Twój Kapitał 2001, Zachodniopomorskie Forum Finansowo-Kapitałowe, Szczecin.
- [158] Tarczyński W., Mojsiewicz M. (2001), *Zarządzanie ryzykiem*, PWE, Warszawa.
- [159] Tarczyński W., Zwolanowski M. (1999), *Inżynieria finansowa*, Placet, Warszawa.
- [160] Tokarski T. (2011), *Ekonomia matematyczna*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [161] Trzaskalik T. (2015), *Strategie optymalne i prawie optymalne w dyskretnym stochastycznym programowaniu dynamicznym*, Zarządzanie i Finanse / Journal of Management and Finance Vol. 13.
- [162] Trzpiot G. (2012), *Analiza szeregów czasowych a statystyczny pomiar ryzyka*, Prace Naukowe AE im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice.
- [163] Trzpiot G. (2008), *Wybrane modele oceny ryzyka. Podejście nieklasyczne*, Prace Naukowe AE im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice.

- [164] Tsai M.C., Lai K.H., Lloyd A.E., Lin H.J. (2012), *The dark side of logistics outsourcing - Unraveling the potential risks leading to failed relationships*, Transportation Research Part E 48, 178-189.
- [165] Tuncel G., Alpan G. (2010), *Risk assesment and management for supply chain networks: a case study*, Computers in Industry 61, 250-259.
- [166] Tyszka T. (1986), *Analiza decyzyjna i psychologia decyzji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [167] Tyszka T., Domurat A. (2004), *Czy istnieje ogólna skłonność jednostki do ryzyka?* Decyzje 2, 85-103.
- [168] Tyszka T., Zaleśkiewicz T. (2001), *Racjonalność decyzji*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [169] Tversky A., Kahneman D. (1992), *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*, Journal of Risk and Uncertainty 5, 297-323.
- [170] Uzawa H. (1968), *Time preference, the consumption function, and optimal asset holdings*, In: J. N. Wolfe (ed.), *Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks*, Chicago: Aldine, 485-504.
- [171] Weil P. (1993), *Precautionary savings and the permanent income hypothesis*, Review of Economic Studies 60, 367-383.
- [172] Weil P. (1989), *The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle*, Journal of Monetary Economics 24, 401-421.
- [173] Weber M. (1990), *Risikoentscheidungskalkule in der Finanzierungstheorie*, C. E. Poeschel Verlag, Stuttgart.
- [174] Whittle P. (1990), *Risk-Sensitive Optimal Control*, Wiley, New York.
- [175] Wiliams A., Smith M., Young P. (2002), *Zarządzanie ryzykiem a ubezpieczenia*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [176] Wilimowska Z. (1997), *Metodyka budowy efektywnego portfela projektów inwestycyjnych*, Prace Naukowe Instytutu Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej Nr 66, Seria: Monografie Nr 29, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

- [177] Wilimowska Z., Wilimowski M. (2002), *Sztuka zarządzania finansami Część I*, Oficyna Wydawnicza Ośrodka Postępu Organizacyjnego Sp. z o.o., Bydgoszcz.
- [178] Wilmott P. (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance. Volume I*, John Wiley and Sons, West Sussex.
- [179] Wiśniewski T. (2008), *Ocena efektywności inwestycji rzeczowych ze szczególnym uwzględnieniem ryzyka*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- [180] Varian H.R. (1992), *Microeconomic Analysis*, W.W. Norton, Baltimore.
- [181] Veland H., Aven T. (2013), *Risk communication in the light of different risk perspectives*, Reliability Engineering and System Safety 110, 34-40.
- [182] Virine L., Trumper M. (2013), *ProjectThink: Why Good Managers Make Poor Project Choices*, Gower Publishing Ltd.
- [183] von Neumann J., Morgenstern O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [184] Vose D. (2008), *Risk Analysis. A Quantitative Guide*, John Wiley and Sons, West Sussex.
- [185] Yang Y.C. (2011), *Risk management of Taiwan's maritime supply chain security*, Safety Science 49, 382-393.
- [186] Zachorowska A. (2006), *Ryzyko działalności inwestycyjnej przedsiębiorstw*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [187] *Zarządzanie wartością przedsiębiorstwa a alokacja kapitału*, pod red. J. Bielińskiego,(2004), Wyd. CeDeWu Sp. z o.o., Warszawa.
- [188] Zeliaś A. (2000), *Metody statystyczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [189] Zhang Z. (2010), *Certainty equivalent, risk premium and asset pricing*, Higher Education Press and Springer - Verlag.