

Eugeniusz Gatnar, Ewa Witek

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

WYKORZYSTANIE MIESZANEK MODELI GLM DO OCENY KRYTERIÓW KONWERCENCJI

Streszczenie: Celem artykułu jest weryfikacja i ocena ważności kryteriów wejścia poszczególnych państw do strefy euro, sformułowanych w traktacie z Maastricht. W tym celu zostały wykorzystane mieszanki modeli GLM. Mieszanki tych modeli stosowane są w przypadku zbiorów niejednorodnych lub wówczas, gdy zbiór obserwacji charakteryzuje się nadmiernym rozproszeniem, będącym wynikiem np. pominięcia jednej z ważnych zmiennych objaśniających.

1. Wstęp

Modele mieszanek rozkładów różnego typu są często wykorzystywane w zagadnieniach klasyfikacji i regresji. Przede wszystkim dzieje się tak wtedy, gdy zbiór obserwacji jest wysoce niejednorodny. Pozwalają one po pierwsze na określenie optymalnej liczby klas (podzbiorów), a następnie zidentyfikowanie wielowymiarowych rozkładów zmiennych charakteryzujących obiekty należące do poszczególnych klas.

W artykule przedstawiono zastosowanie modeli mieszanek rozkładów Poissona do weryfikacji i oceny ważności kryteriów konwergencji nominalnej, przyjętych w traktacie z Maastricht [*Treaty on European Union* 1992] dla państw ubiegających się o członkostwo w strefie euro. Na podstawie danych dla 27 krajów Europy zbudowano model mieszanek rozkładów Poissona, wykorzystując pakiet `flexmix` w programie **R**. Określono optymalną liczbę klas, opierając się na kryteriach informacyjnych (np. BIC), oraz zinterpretowano parametry rozkładów składowych mieszanki, wykorzystując ilorazy szans.

2. Strefa euro

Plany utworzenia unii walutowej państw Europejskiej Wspólnoty Gospodarczej pojawiły się już w latach 60. XX wieku, lecz dopiero w latach 70. opracowano szczegółowy plan wprowadzenia wspólnej waluty. W roku 1979 powstał Europejski System Walutowy, w roku 1986 zaś rozpoczęto emisję obligacji międzynarodowych denominowanych w ECU.

Ostateczna decyzja o utworzeniu wspólnej waluty na obszarze Unii Europejskiej zapadła w Maastricht, gdzie powołano do życia Unię Gospodarczą i Walutową. W grudniu 1995 r. w Madrycie wspólnej walucie nadano nazwę „euro”. Stworzono również system TARGET, który umożliwiał automatyczne przeliczanie walut narodowych na euro. W dniu 1 stycznia 1999 r. euro zaczęło obowiązywać w transakcjach bezgotówkowych w 11 krajach UE (oprócz Grecji), a od 1 stycznia 2002 r. wprowadzono tę walutę także w formie gotówkowej w dwunastu państwach Unii Europejskiej (oprócz Wielkiej Brytanii, Szwecji i Danii na podstawie tzw. klauzuli „opt-out”). W dniu 1 lipca 2002 r. ostatecznie wycofano z obiegu waluty narodowe 12 państw, które przystąpiły do strefy euro.

Rozszerzenie tej pierwotnej strefy euro nastąpiło później jeszcze trzykrotnie: 1 stycznia 2007 r. euro zastąpiło słoweński tolar, 1 stycznia 2008 r. – funt cypryjski i lirę maltańską, a 1 stycznia 2009 r. – koronę słowacką.

Do korzyści związanych z przyjęciem wspólnej waluty można zaliczyć: stabilizację gospodarki, eliminację kosztów wymiany, ułatwienia w podróżowaniu osób, eliminację ryzyka wahań kursowych. Natomiast koszty przyjęcia euro związane są z: przystosowaniem systemu bankowego do obsługi nowej waluty, utratą zysków banków i instytucji finansowych pochodzących z transakcji wymiany walut, rezygnacją z waluty jako elementu tożsamości narodowej. Nie bez znaczenia jest także fakt, że kraj, który przyjmuje euro, rezygnuje z suwerenności fiskalnej oraz ważnego symbolu narodowego.

Pierwsi członkowie strefy euro (1 stycznia 1999 r.), to: Austria, Belgia, Finlandia, Francja, Hiszpania, Holandia, Irlandia, Luksemburg, Niemcy, Portugalia i Włochy. Następnie do strefy euro wstąpili: Grecja (1 stycznia 2001 r.), Słowenia (1 stycznia 2007 r.), Cypr (1 stycznia 2008 r.), Malta (1 stycznia 2008 r.) oraz ostatnio Słowacja (1 stycznia 2009 r.).

Obecnie do strefy euro kandydują następujące państwa: Litwa, Estonia, Polska, Bułgaria, Łotwa, Rumunia oraz Węgry. Z tych krajów do mechanizmu ERM II przystąpiły trzy państwa bałtyckie: Estonia (w 2004 r.), Litwa (w 2004 r.) oraz Łotwa (w 2005 r.).

3. Kryteria konwergencji

Kraj ubiegający się o członkostwo w unii walutowej (tzw. strefie euro) musi osiągnąć poziom tzw. trwałej konwergencji nominalnej i prawnej. Oznacza to, że musi być członkiem Unii Europejskiej, realizować kryteria konwergencji, być zakwalifikowany przez Komisję Europejską, stabilizować kurs swej waluty co najmniej przez dwa lata w ERM (*Exchange Rate Mechanism* – mechanizmie wymiany kursowej) oraz mieć niezależny od rządu i parlamentu Narodowy Bank Centralny.

Przyjęte w traktacie z Maastricht (TEU, art. 109j) kryteria nominalne to:

- deficyt budżetowy, który nie powinien przekroczyć 3% PKB,
- dług publiczny, który nie powinien przekroczyć 60% PKB,

- inflacja (mierzona za pomocą HICP): nie powinna przekroczyć o więcej niż 1,5% poziomu średniego dla trzech krajów o najniższej inflacji w strefie euro,
- stopy procentowe (stopa długoterminowych obligacji rządowych, np. dziesięcioletnich) nie powinny przekraczać o więcej niż 2% poziomu średniego dla trzech krajów o najniższej stopie inflacji w strefie euro,
- kurs walutowy (w stosunku do euro) musi mieścić się w zakresie normalnych wahań w europejskim mechanizmie kursowym ($\pm 15\%$) przez dwa ostatnie lata.

Sformułowane powyżej kryteria konwergencji nominalnej można podzielić na dwie grupy: monetarne i fiskalne. Kryteria fiskalne to: deficyt budżetowy i dług publiczny. Są one trudniejsze do spełnienia, ponieważ mają charakter bezwzględny, odnoszą się bowiem do poziomu produktu krajowego brutto (PKB). Natomiast kryteria monetarne to stopa inflacji i stopa procentowa. Poziom ich jest zmienny, w zależności od wyników uzyskiwanych w tym zakresie przez trzy państwa strefy euro o najniższej inflacji.

W lutym 2009 r. NBP opublikował raport, w którym zaproponował opóźnienie przyjęcia euro ze względu na wahania kursu złotego w okresie kryzysu finansowego [*Raport...* 2009]. Natomiast rząd nie zmienił harmonogramu wstąpienia do strefy euro w 2012 r., chociaż coraz częściej mówi się o roku 2015 jako prawdopodobnym terminie przyjęcia przez Polskę wspólnej waluty.

4. Modele GLM i ich mieszanki

Pomimo że skończone modele mieszanek (*finite mixture models*) znane są już od ponad 100 lat, w ostatnim czasie obserwuje się wyraźny wzrost zainteresowania tymi modelami i ich wykorzystaniem w taksonomii i regresji. Do wzrostu popularności modeli mieszanek przyczynił się przede wszystkim rozwój zaawansowanych technik komputerowych znacznie ułatwiających estymację parametrów mieszanek rozkładów.

W pracy zastosowane zostaną mieszanki rozkładów warunkowych. Mieszanki tych rozkładów stosowane są w przypadku niejednorodnych zbiorów obserwacji lub wówczas, gdy zbiór ten charakteryzuje się nadmiernym rozproszeniem, będącym wynikiem np. pominięcia jednej z ważnych zmiennych objaśniających. Wtedy zbiór obserwacji dzielony jest na podzbiory, których liczba oraz parametry funkcji regresji w każdej z nich są szacowane równocześnie, za pomocą algorytmu EM.

Uogólnione modele liniowe GLM (*Generalized Linear Models*) stosowane są w celu określenia zależności pomiędzy zmiennymi w przypadku, gdy powiązanie zmiennej y ze zmiennymi objaśniającymi ma charakter nieliniowy. Zaletą modeli GLM jest to, że rozkład zmiennej objaśnianej może być rozkładem innym niż normalny, a ponadto zmienna ta nie musi być zmienną o charakterze ciągłym (np. zmienna y może pochodzić z rozkładu Poissona czy rozkładu dwumianowego). Wartości zmiennej y prognozowane są na podstawie liniowej kombinacji zmiennych objaśniających, która „powiązana” jest ze zmienną objaśnianą za pomocą funkcji wiążącej (*link function*).

W przypadku, gdy zbiór obserwacji cechuje się niejednorodnością, stosowane są mieszanki modeli GLM, w których zakłada się, że każda składowa mieszanki charakteryzowana jest przez warunkowy rozkład prawdopodobieństwa (dla danych wartości zmiennej \mathbf{x}), a związek pomiędzy zmienną objaśnianą i zmiennymi objaśniającymi jest określony za pomocą złożonego modelu (*complex model*), jakim jest uogólniony model liniowy. Liczba podzbiorów, tj. rozkładów składowych mieszanki (*components of mixture model*), może być rozumiana np. jako liczba segmentów rynku, w których prawdopodobieństwa zakupu w zależności od ceny czy reklamy są wyraźnie różne dla klientów każdego z wyodrębnionych segmentów. Liczba segmentów i parametry modeli GLM wyznaczone są równocześnie. Funkcja gęstości takiego modelu mieszanki dla obserwacji (\mathbf{x}, y) jest wtedy równa:

$$f(y|\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \Theta) = \sum_{s=1}^u \tau_s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) f_s(y|\mathbf{x}, \Theta_s), \quad (1)$$

gdzie: f_s – funkcja gęstości s -tego rozkładu składowego mieszanki,
 y – zmienna zależna,
 \mathbf{x} – wektor zmiennych objaśniających,
 $\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\alpha})$ – wektor zmiennych towarzyszących,
 Θ_s – wektor parametrów s -tego rozkładu składowego,
 Θ – wektor parametrów mieszanki rozkładów, $\Theta = (\tau_s, \boldsymbol{\alpha}_s, \Theta_s)$,
 τ_s – prawdopodobieństwo *a priori*, tj. wartość prawdopodobieństwa, że dana obserwacja należy do podpopulacji C_s

$$(\tau_s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0 \wedge \sum_{s=1}^u \tau_s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) = 1), \Theta_s \neq \Theta_l \forall s \neq l.$$

Zakłada się, że realizacje zmiennej losowej y_i z prawdopodobieństwem τ_s należą do jednego z podzbiorów C_s . Rozkłady zmiennej objaśnianej mogą przyjmować różne postacie – mogą to być rozkłady normalne, Poissona, dwumianowe, ujemne dwumianowe, gamma, rozkłady odwrotne do rozkładu normalnego. Wszystkie z wymienionych rozkładów zalicza się do rodziny rozkładów wykładniczych (*exponential family of distribution*), tj. rodziny rozkładów obejmującej rozkłady dla zmiennych mierzonych na skalach zarówno słabych, jak i mocnych. Zakłada się, że poszczególne rozkłady składowe należą do tej samej rodziny rozkładów charakteryzowanych za pomocą wektora parametrów Θ_s .

Prawdopodobieństwa *a priori* przynależności obiektów do klas τ_s mogą zależeć ponadto od tzw. zmiennych towarzyszących $\boldsymbol{\omega}$ (*concomitant variables*)¹ i parametrów je określających $(\boldsymbol{\alpha})$. W przypadku jednowymiarowego rozkładu normalnego

¹ Zmienne towarzyszące wraz ze zmiennymi \mathbf{X} biorą udział w szacowaniu parametrów modelu mieszanek, na podstawie którego można będzie dokonać klasyfikacji nowych obiektów bez udziału zmiennych \mathbf{X} . Zmienne towarzyszące wykorzystywane są często w badaniach marketingowych, ekonomicznych, psychologicznych, w których pozyskanie zmiennych \mathbf{X} jest bardzo kosztowne.

o średniej $\mu_s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\beta_s$ i wariancji σ_s^2 równanie (1) jest mieszanką modeli liniowych. Jeżeli f należy do rodziny funkcji wykładniczych, to mówimy o mieszance uogólnionych modeli liniowych, zwanych w literaturze marketingowej mieszanką modeli GLM (*Generalized Mixture Regression Model*²) [Leisch 2004, s. 2]. Mieszanki rozkładów, w przypadku gdy $\mathbf{x} \equiv 1$, to przykład klasycznej analizy skupień opartej na modelach mieszanek (*model-based clustering*). Zagadnienie to było poruszane m.in. w pracach [Witek 2009a; 2009b].

Obserwacje przydzielane są do klas (podzbiorów) o największym prawdopodobieństwie *a posteriori*. Prawdopodobieństwo przynależności obserwacji (\mathbf{x}, y) do klasy C_r dane jest wzorem:

$$P(r|\mathbf{x}, y, \varphi) = \frac{\tau_r f(y|\mathbf{x}, \Theta_r)}{\sum_{s=1}^u \tau_s f(y|\mathbf{x}, \Theta_s)}. \quad (2)$$

Parametry modeli mieszanek szacowane są najczęściej za pomocą algorytmu EM [Dempster, Laird, Rubin 1977, s. 1-38; Leisch 2004, s. 2], a wybór modelu optymalnego dokonywany jest na podstawie kryteriów informacyjnych, tj. BIC, AIC oraz ICL [Frühwirth-Schnatter 2006, s. 116].

5. Analiza empiryczna

Celem przeprowadzonego badania jest weryfikacja i ocena kryteriów konwergencji nominalnej pod kątem ich ważności w procesie integracji krajów Unii Europejskiej ze strefą euro.

Wykorzystane w badaniu dane statystyczne obejmują 27 krajów UE charakteryzowanych za pomocą następujących zmiennych: y – czas przynależności krajów do strefy euro (w latach³), x_1 – stopa procentowa, x_2 – inflacja, x_3 – dług publiczny, x_4 – deficyt budżetowy. Dane statystyczne wykorzystane w analizie dotyczą roku 2008 i pochodzą z bazy danych AMECO [Internet 1]. Obliczenia zostały wykonane za pomocą pakietu `flexmix`, który działa w środowisku programu statystycznego **R**⁴.

W badaniu przyjęto założenie, że zmienna y (okres przynależności do strefy euro w latach) pochodzi z rozkładu Poissona. Ponieważ dla wielu krajów zmienna ta przyjmuje wartość 0, zastosowano tutaj specyficzną mieszankę modeli GLM, tj. mieszankę modeli Poissona o nadmiernej liczbie zer (*zero-inflated Poisson regressions*) [Böhning,

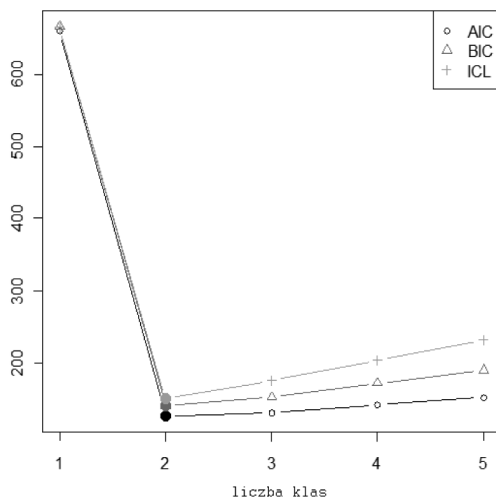
² Modele GLM to modele regresji, w których zmienna zależna ma rozkład należący do rodziny rozkładów wykładniczych. Modele te opisują związek zmiennej zależnej, tj. częstość zakupów, preferencje co do marki ze zbiorem zmiennych objaśniających (np. atrybuty produktu).

³ Od roku 1999 do 2008, np. 9 lat dla Niemiec, 0 dla Polski.

⁴ Program **R** jest bezpłatnie dostępny na stronie [Internet 3].

Dietz, Schlattmann 1999, s. 195-209]. Należy dodać, że kraje o klauzuli „opt-out” (Szwecja i Wielka Brytania) potraktowane zostały jako obserwacje oddalone.

Optymalną liczbę klas wybrano za pomocą kryteriów informacyjnych BIC, AIC oraz ICL. Wartości wspomnianych kryteriów dla poszczególnych modeli przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Kryteria informacyjne BIC, AIC i ICL

Źródło: obliczenia własne.

Każde z analizowanych kryteriów informacyjnych wskazuje na to, że optymalna liczba klas to 2 (pierwsze minimum lokalne osiągnięte zostało dla modelu mieszanek o dwóch rozkładach składowych). Do klasy pierwszej zaliczono 8 krajów, takich jak: Bułgaria, Czechy, Cypr, Litwa, Malta, Polska, Rumunia, Szwecja. Są to kraje niezaliczane do strefy euro (Cypr i Malta dopiero w 2008 r. wstąpiły do unii walutowej). Do klasy drugiej, w której większość stanowią kraje strefy euro, należą: Belgia, Dania, Niemcy, Estonia, Irlandia, Grecja, Hiszpania, Włochy, Łotwa, Luksemburg, Węgry, Holandia, Austria, Portugalia, Francja, Słowacja, Słowenia, Finlandia, Wielka Brytania. Parametry modeli dla każdej z klas oszacowano m.in. za pomocą funkcji `flexmix()` oraz `stepFlexmix()`.

Tabela 1. Wpływ zmiennych na szansę przynależności krajów do strefy euro

Zmienna (kryterium)		Parametr	Iloraz szans
x_1	stopy procentowe	-0,80	0,45
x_2	inflacja	-0,24	0,79
x_3	dług publiczny	-0,02	0,98
x_4	deficyt budżetowy	-0,04	0,96

Źródło: obliczenia własne.

Wartości otrzymanych parametrów modelu dla krajów należących do strefy euro przedstawiono w tab. 1.

Ponieważ parametry przy każdej z badanych zmiennych przyjmują wartości ujemne, to można twierdzić, że zmienne te mają negatywny wpływ na przynależność krajów do strefy euro. Najbardziej istotny wpływ spośród analizowanych kryteriów miały stopy procentowe, tj. wzrost stóp procentowych o 1% zmniejszał szansę przynależności krajów do strefy euro o 55%. Duże znaczenie miała także inflacja, tj. wzrost inflacji o 1% zmniejszał szansę przynależności do krajów strefy o 21%. Znaczenie mniejszy wpływ miał dług publiczny oraz deficyt budżetowy, tj. ich 1-procentowy wzrost zmniejszał szansę przynależności krajów do unii walutowej odpowiednio o 2 i 4%.

6. Podsumowanie

W pracy dokonano oceny kryteriów konwergencji nominalnej, określających poziom rozwoju gospodarczego koniecznego do wejścia do unii walutowej (strefy euro). W tym celu wykorzystano mieszanki modeli GLM, za pomocą których dokonano klasyfikacji 27 państw europejskich do dwóch grup w przybliżeniu odpowiadających podziałowi na należące do strefy euro i nienależące do niej. Następnie w każdej z nich zbudowano modele GLM charakteryzujące oddziaływanie poszczególnych kryteriów konwergencji.

Najbardziej istotne spośród analizowanych kryteriów okazały się kryteria monetarne, odnoszone do innych krajów strefy euro, tj. stopa procentowa oraz inflacja. Można powiedzieć, że to one charakteryzują państwa należące do unii walutowej. Mniej „ważne” są natomiast kryteria fiskalne, tj. dług publiczny oraz deficyt budżetowy. Są one trudne do spełnienia przed wejściem, a kraje już należące do strefy euro, jak np. Włochy, ich nie honorują. Ostatnio dług publiczny w tym kraju osiągnął bardzo wysoki poziom 90%.

Literatura

- Böhning D., Dietz E., Schlattmann P., *The zero-inflated Poisson model and the decayed, missing and filled teeth index in dental epidemiology*, „Journal of the Royal Statistical Society” 1999, A, 162(2).
- Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B., *Maximum likelihood for incomplete data via the EM algorithm (with discussion)*, „Journal of the Royal Statistical Society” 1977, B, 39.
- Frühwirth-Schnatter S., *Finite Mixture and Markov Switching Models*, Springer Series in Statistics, Hardcover, Berlin 2006.
- Leisch R., *FlexMix: A general framework for finite mixture models and latent class regression in R*, „Journal of Statistical Software” 2004, 11(8).
- Raport na temat pełnego uczestnictwa Rzeczypospolitej Polskiej w trzecim etapie Unii Gospodarczej i Walutowej*, Narodowy Bank Polski, Warszawa 2009.
- Treaty on European Union*, Maastricht 1992.

- Walesiak M., Gatnar E. (red.), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- Witek E., *Analiza skupień – podejście modelowe*, [w:] *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*, M. Walesiak, E. Gatnar (red.), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009a.
- Witek E., *Zastosowanie podejścia modelowego w taksonomii do oceny zróżnicowania dochodów*, [w:] *Współczesne problemy modelowania i prognozowania zjawisk społeczno-gospodarczych*, J. Pocięcha (red.), UE, Kraków 2009b.

Źródła internetowe

- [1] http://ec.europa.eu/economy_finance/db_indicators/db_indicators8646_en.htm.
- [2] <http://eur-lex.europa.eu/en/treaties/dat/11992M/htm/11992M.html>.
- [3] <http://www.r-project.org/>.

THE USE OF MIXTURE OF GLM MODELS IN EVALUATION OF CONVERGENCE CRITERIA

Summary: The goal of this paper is to evaluate the convergence criteria with the use of the mixture of GLM models.

Finite mixtures of GLMs allow to relax the assumption that the regression coefficients and dispersion parameters are the same for all observations and are often used to capture overdispersion in the data which can occur for example if important covariates are omitted in the regression or in the case of heterogeneous data sets .