PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 94
Wiedza w gospodarce i gospodarka oparta na wiedzy 2010
Zarządzanie w gospodarce opartej na wiedzy

Dorota Kuchta
Wyższa Szkoła Oficerska Wojsk Lądowych we Wrocławiu

PROGRAMOWANIE LINIOWE W ODPORNYM PLANOWANIU PROJEKTÓW

Streszczenie: W artykule zaproponowano nowe użycie programowania liniowego do wyznaczania odpornego (elastycznego) planu projektu – planu wstępnego i prowizorycznego pozwalającego na rozpoczęcie przygotowań do realizacji projektu zanim będą dokładnie znane kryteria, według których decydent będzie oceniał i wybierał plany projektu. Dla kryteriów, którymi może się kierować decydent, wyznaczono możliwe plany realizacji, a następnie szukano planu najmniej różniącego się od tych planów. Stworzony tymczasowy plan będzie później zamieniony na plan odpowiadający decydentowi. Zastosowano podejście najgorszego przypadku: generowany plan odporny ma najmniejsze koszty dopasowania do planu ostatecznie wybranego przez decydenta przy założeniu, że decydent wybierze plan najbardziej różniący się od planu odpornego.

1. Wstęp

W ostatnich latach częstym tematem badań w zakresie podejmowania decyzji jest tzw. odporność decyzji czy rozwiązań. Odporność związana jest z niepewnością i niepełnością informacji w otoczeniu, w jakim dzisiaj podejmuje się decyzje. Chodzi zatem o to, by podejmować decyzje – na tyle, na ile to możliwe – odporne na te zmiany. Odporność rozwiązań problemów decyzyjnych może być rozumiana w różny sposób [Ben-Tal, Nemirovsky 1999; Kouvelis, Yu 1997; Kuchta 2009b]. W dotychczas opublikowanej literaturze związana ona jest ze zmiennością i z niepełną informacją o parametrach problemu (np. o cenach jednostkowych). W pracy [Kuchta 2009a] po raz pierwszy zaproponowano koncepcję odporności związaną z niepełną znajomością funkcji celu – nie współczynników funkcji celu, a konkretnie doboru funkcji celu i ich hierarchii. W niniejszym artykule podejście to zostanie zastosowane do planowania projektów.

Bardzo często [Kouvelis, Yu 1997] do wyznaczania rozwiązania odpornego stosuje się podejście najgorszego przypadku – to znaczy wyznacza się takie rozwiązanie, które przy założeniu, że zawsze warunki implementacji decyzji okażą się najgorsze z możliwych dla podjętej już decyzji, da najlepsze wartości odpowiednich kryteriów. Zostanie ono wykorzystane również w niniejszym artykule.

Jeśli chodzi o planowanie projektów, to w tej dziedzinie znane jest już pojęcie planu odpornego [de Vonder i in. 2006]. Przede wszystkim wyróżnia się plan projektu odporny jakościowo, czyli taki, w którym nawet w niekorzystnej sytuacji najważniejsza ogólna charakterystyka projektu, np. czas realizacji czy koszt realizacji projektu, nie ulegnie znaczącemu pogorszeniu. Przy tym podejściu szczegóły, czyli np. momenty rozpoczęcia czy zakończenia poszczególnych zadań, mogą się zmieniać nawet znacznie; ten aspekt nie jest jednak uważany za bardzo istotny. Natomiast w drugim ujęciu odporności planu projektu mówimy o tzw. odporności harmonogramowej. W tym przypadku dbamy również o odporność szczegółów planu, czyli także o możliwą stabilizację czasów rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych zadań, pracy poszczególnych zasobów itp., uznając, że wszelkie zmiany w tym zakresie powodują powstanie znacznych kosztów. Chodzi tu o koszty oczekiwania zasobów na możliwość rozpoczęcia pracy w czasie, jaki sobie na tę pracę zaplanowano, a także niemożliwość wykonania innej pracy w zaplanowanym czasie, np. przy innych projektach.

W niniejszym artykule zajmujemy się odpornością harmonogramową. *Novum* w stosunku do literatury [de Vonder i in. 2006] jest to, że odporność tę rozpatrujemy nie w odniesieniu do zmienności parametrów planowanego projektu (czasów trwania zadań, kosztu, zakresu prac itp.), a − jak już wspomniano − w odniesieniu do preferencji decydenta. To właśnie te preferencje, sposób, kryteria oceny planu projektu uznajemy za nie do końca znane, natomiast parametry projektu, czyli czasy trwania zadań czy ich koszty, uznajemy za znane. Zakładamy, że nie wiemy tylko, co dla decydenta – klienta, będzie w ostatecznym rozrachunku najważniejsze: czy czas realizacji projektu, czy koszty, czy może inne jeszcze kryterium lub jakaś ich liniowa kombinacja. Jesteśmy w stanie tylko przewidzieć, z jakiego zbioru preferencji decydent ostatecznie wybierze swoje preferencje, natomiast ostatecznego wyboru nie znamy. Niemniej jednak z tą niepełną wiedzą już chcemy zacząć przygotowania do realizacji projektu i chcemy zacząć wdrażać plan – wiemy jednak, że nie będzie to plan ostateczny. Jesteśmy gotowi dopasować się w przyszłości do planu ostatecznie wybranego – preferowanego przez decydenta. Chcemy zatem, by plan, który przygotowujemy, był odporny w tym sensie, że będzie się stosunkowo niewiele różnił od planu ostatecznego, przy czym różnicę między planami będziemy rozumieć jako koszt dopasowania przygotowanego planu odpornego do planu ostatecznego. Ten koszt dopasowania będziemy z kolei definiować jako wielkość zależną od różnic w planowanych terminach rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych zadań – w tym właśnie miejscu odwołujemy się do odporności harmonogramowej.

Struktura artykułu jest następująca: zaczniemy od sformułowania problemu, następnie pokażemy efektywny sposób jego rozwiązania, a na końcu proponowane podejście zilustrujemy za pomocą przykładu liczbowego.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest pewien projekt rozumiany jako zbiór czynności (zadań) $A_i (i = 1, ..., N)$, dla których dane są następujące charakterystyki ($i = 1, ..., N$):

– ND_i: „normalna długość”, tzn. długość trwania realizacji czynności A_i możliwa do uzyskania bez ponoszenia dodatkowych kosztów, przy kosztach minimalnych wynoszących MK_i,
– MD_i: „minimalna długość”, tzn. najmniejsza możliwa długość trwania realizacji czynności A_i, możliwa do uzyskania po poniesieniu odpowiednich kosztów, przy czym zakładamy, że czas realizacji czynności A_i możemy skracać stopniowo, po jednostce czasu – od wielkości ND_i do wielkości MD_i ($MD_i \le ND_i$), przy czym koszt skrócenia czynności A_i o jednostkę czasu wynosi JKS_i, zatem maksymalne możliwe skrócenie czynności A_i kosztowałoby $(ND_i \le MD_i)JKS_i$.

Zaplanowanie realizacji projektu rozumiemy jako wyznaczenie wartości następujących zmiennych decyzyjnych ($i = 1, ..., N$):

– S_i: czas rozpoczęcia czynności A_i,
– D_i: czas trwania czynności A_i, przy czym musi być

$$MD_i \le D_i \le ND_i. \tag{1}$$

Kiedy wyznaczymy poszukiwane wartości zmiennych decyzyjnych, wówczas będziemy znali również następujące wartości istotne z punktu widzenia planowania projektu:

– F_i: czas zakończenia czynności A_i:

$$F_i = S_i + D_i, \tag{2}$$

– K_i: koszt realizacji czynności A_i wyznaczany ze wzoru:

$$K_i = MK_i + (ND_i - D_i)JKS, \tag{3}$$

– KP: koszt realizacji całego projektu wyznaczany ze wzoru:

$$KP = \sum_{i=1}^{N} K_i, \tag{4}$$

– FP: czas realizacji całego projektu wyznaczany ze wzoru:

$$FP = \max_{i=1,...,N} F_i. \tag{5}$$

Znany jest przy tym zbiór par $\left\{\left(i_1^j, i_2^j\right)\right\}_{j=1}^{M}$, $i_1^j < i_2^j, i_1^j, i_2^j \in \{1,...,N\}$, $j = 1,...,M$, na które narzucona jest relacja poprzedzania typu „koniec-początek”, tzn. muszą być spełnione warunki:

$$S_{i_2^j} \ge F_{i_2^j} \; j = 1,...,M \cdot \tag{6}$$

Zatem przez plan projektu możemy rozumieć dowolny zbiór par $\{(S_i, D_i)\}_{i=1}^{N}$, spełniających warunki (1), (2), (6).

Oczywiście nie każdy plan projektu będzie planem dobrym, jakkolwiek to pojęcie byłoby w danym przypadku rozumiane (a rozumiane może być oczywiście na różne sposoby). Zapewne każdy byłby zadowolony z planu, dla którego zarówno wartość (4), jak i (5) oraz nieskwantyfikowane w naszym artykule (bo trudne do kwantyfikacji) wartości jakości, poziomu zadowolenia poszczególnych udziałowców projektu itp. osiągałyby swoje pożądane wartości ekstremalne (tzn. minima w przypadku czasu i kosztów, maksima w pozostałych wymienionych przypadkach). Wiadomo jednak (np. [Konarzewska-Gubała 1980]), że jednoczesna optymalizacja wielu celów jest zazwyczaj niemożliwa. Dlatego w każdym przypadku istnieje – mniej lub bardziej uświadomiona – hierarchia celów, tyle że – tak jak wiele informacji o projekcie – nie zawsze jest ona znana w pełni w momencie planowania projektu. Często planujemy i przygotowujemy projekt, negocjując jeszcze z klientem cenę, czas, poziom jakości i inne szczegóły. Jest tak zwłaszcza wtedy, kiedy przygotowanie wykonania projektu jest pracochłonne, wymaga czasu i powinno być rozpoczęte dostatecznie wcześnie, jeszcze podczas końcowych negocjacji. Nie wiemy jeszcze dokładnie, czy w procesie negocjacji najważniejszym kryterium planu projektu okaże się czas, koszt, jakość czy jeszcze może inne kryterium, czy jakaś średnia ważona wybranych kryteriów. Musimy jednak zacząć przygotowania. Chcemy zatem przygotować plan odporny, który będziemy definiowali i rozumieli w następujący sposób:

- Będzie on zdefiniowany w powiązaniu ze zbiorem P = $\{P_1, ..., P_K\}$ planów potencjalnie optymalnych, czyli takich, które mogą być najlepsze czy przynajmniej w pełni akceptowalne przez klienta. Niestety na tym etapie nie wiemy jeszcze, jakie preferencje będzie miał klient i konkretnie który z elementów zbioru P = $\{P_1, ..., P_K\}$ wybierze, ale możemy założyć, że na pewno będzie on zadowolony z jednego z planów z tego zbioru. Zbiór P = $\{P_1, ..., P_K\}$ wyznaczany jest przy uwzględnieniu różnych możliwych kryteriów oceny planów i ich możliwych hierarchii. Na przykład jeden z planów może minimalizować funkcję (4), inny (5), a jeszcze inny brać również pod uwagę wykorzystanie zasobów, jego rozkład itp. Można tu uwzględniać wszystkie potencjalne kwantyfikowalne kryteria, jakie klient może brać pod uwagę, i różne sposoby ich agregacji.
- Plan odporny, który chcemy przygotować, nie będzie raczej ostatecznym planem. Traktujemy go jako punkt wyjścia, jako plan, który potem, kiedy ostateczny plan już będzie znany, będzie dopasowany do wymagań klienta, czyli zmieniony w ten sposób, by stał się wybranym przez klienta planem ze zbioru P. Chodzi o przygotowanie, kiedy jeszcze nie wszystkie informacje są dostępne, takiego punktu wyjścia – czyli właśnie planu odpornego − który będzie można przekształcić na właściwy plan jak najmniejszym kosztem/nakładem pracy.
- Realizując przedstawione założenie, stosujemy często używane przy rozwiązywaniu odpornych problemów optymalizacyjnych podejście najgorszego przy-

padku, czyli zakładamy, iż niezależnie od tego, na jakie rozwiązanie odporne się zdecydujemy, nasz klient zdecyduje się na to rozwiązanie z rozwiązań ze zbioru P, dla którego koszt adaptacji naszego rozwiązania będzie największy. Będziemy zatem szukać takiego rozwiązania odpornego, które w najgorszym przypadku da najmniejszy koszt adaptacji.

- Zakładamy, iż koszty adaptacji wybranego rozwiązania są związane z różnicami w planowanych czasach rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych zadań w wyznaczonym planie odpornym i w wybranym przez decydenta planie docelowym.

Poszczególne elementy zbioru P oznaczamy $\left\{\left(S_i^k, D_i^k\right)\right\}_{i=1}^{N}$, $k = 1,\ldots,K$. Zakładamy, że dla każdego $i = 1, \ldots, N$ znane są jednostkowe koszty konieczności dopasowania (czyli zmniejszenia lub zwiększenia w celu zrównania z pewnym planem docelowym) czasów rozpoczęcia i zakończenia i-tego zadania z dowolnego planu $\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$, oznaczmy je odpowiednio KS_i i KF_i. Jeśli zatem za plan odporny przyjmiemy pewien plan $\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$, a decydent przyjmie za plan docelowy $\left\{\left(S_i^k, D_i^k\right)\right\}_{i=1}^{N}$ dla pewnego $k = 1, \ldots, K$, to będziemy wtedy mieli następujące koszty dopasowania planu $\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$ do planu $\left\{\left(S_i^k, D_i^k\right)\right\}_{i=1}^{N}$:

$$KD^k\left(\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(KS_i \times \left|S_i - S_i^k\right| + KF_i \times \left|F_i - F_i^k\right|\right). \tag{7}$$

Zgodnie z podejściem najgorszego przypadku poszukujemy zatem takiego planu $\left\{\left(S_i^*, D_i^*\right)\right\}_{i=1}^{N}$, dla którego spełniony jest warunek:

$$\max_{k=1,\ldots,K} KD^k\left(\left\{\left(S_i^*, D_i^*\right)\right\}_{i=1}^{N}\right) = \min_{\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}} \max_{k=1,\ldots,K} KD^k\left(\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}\right). \tag{8}$$

3. Rozwiązanie problemu

Z problemem postawionym w punkcie 2 można sobie poradzić, rozwiązując następujące zadanie programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \min \\ &\lambda \geq KD^k\left(\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}\right) \qquad k = 1,\ldots,K; \end{aligned} \tag{9}$$

z ograniczeniami (1), (3), (6).

Problem (9) możemy sformułować w postaci zadania programowania liniowego, wyrażając każde nieliniowe ograniczenie $\lambda \geq KD^k\left(\left\{\left(S_i, D_i\right)\right\}_{i=1}^{N}\right)$ w postaci czterech ograniczeń liniowych. Otrzymamy wówczas następujący problem liniowy:

$$
\begin{aligned}
&\lambda \to \min \\
&\lambda \geq \sum_{i=1}^{N}\left(KS_i \times \left(S_i - S_i^k\right) + KF_i \times \left(F_i - F_i^k\right)\right) \quad k = 1,\dots,K; \\
&\lambda \geq \sum_{i=1}^{N}\left(KS_i \times \left(S_i^k - S_i\right) + KF_i \times \left(F_i - F_i^k\right)\right) \quad k = 1,\dots,K; \\
&\lambda \geq \sum_{i=1}^{N}\left(KS_i \times \left(S_i - S_i^k\right) + KF_i \times \left(F_i^k - F_i\right)\right) \quad k = 1,\dots,K;
\end{aligned}
\tag{10}
$$

z ograniczeniami (1),(2),(6).

Będzie on miał $3N$ zmiennych decyzyjnych oraz $2N + M + 4K$ ograniczeń, gdzie N jest liczbą zadań projektu, M − liczbą par zadań połączonych zależnością koniec-początek, a K − liczbą elementów zbioru P, przy czym rozmiary problemu można w prosty sposób zredukować, wykorzystując ograniczenia (2) jako podstawienie w celu redukcji N zmiennych. Problem (10) można rozwiązać za pomocą klasycznego algorytmu Simplex.

4. Przykład liczbowy

Dane o projekcie zostały zaczerpnięte z pracy [Kukuła (red.) 2002, s. 191], w której przykład ten jest rozpatrywany w innym kontekście. Parametry czynności projektu są takie jak w tab. 1.

Tabela 1. Dane o projekcie z przykładu (normalne i minimalne długości zadań, minimalne koszty realizacji zadań, jednostkowe koszty skrócenia czasu realizacji zadań)

i	ND_i	MD_i	MK_i	JKS_i
1	8	6	280	60
2	10	5	100	10
3	6	4	300	50
4	12	10	260	20
5	15	15	150	0
6	10	2	200	20

Źródło: [Kukuła (red.) 2002].

Zbiór par, dla których zachodzi relacja poprzedzania koniec-początek, to w naszym przypadku zbiór {(1,3), (3,4), (2,5), (5,6)}.

Autorzy pracy [Kukuła (red.) 2002] wyznaczają dwa plany spełniające warunki (1), (4), (6): jeden minimalizujący funkcję (5) (jej minimalna wartość wynosi 1290, wówczas wartość funkcji (5) wynosi 35), drugi minimalizujący funkcję (5) (jej minimalna wartość wynosi 22, wówczas wartość funkcji (4) wynosi 1640). Ponieważ zakładamy, że nie wiemy jeszcze, jakie preferencje będzie miał decydent, zakładamy, że może on wybrać któreś z tych dwóch rozwiązań albo któreś z jeszcze innych dwóch wyznaczonych jako rozwiązanie z funkcją celu będącą sumą ważoną funkcji (4) i (5), czyli stanowiącymi rozwiązania sprawne problemu dwukryterialnego z ograniczeniami (1), (2) i (6) i funkcjami celu (4) i (5). Rozpatrujemy zatem zbiór P złożony z czterech rozwiązań sprawnych rozpatrywanego problemu przedstawiony w tab. 2.

Tabela 2. Cztery przykłady projektu, które mogą być wybrane przez decydenta (czasy rozpoczęcia zadań, czasy realizacji zadań, koszt realizacji danego planu, czas realizacji projektu przy danym planie)

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
S_1^k	0	0	0	0
S_2^k	0	0	0	0
S_3^k	8	8	8	8
S_4^k	12	14	14	14
S_5^k	5	5	5	10
S_6^k	20	20	20	25
D_1^k	8	8	8	8
D_2^k	5	5	5	10
D_3^k	4	6	6	6
D_4^k	10	11	12	12
D_5^k	15	15	15	15
D_6^k	2	5	10	10
KP^k	1640	1460	1340	1290
FP^k	22	25	30	35

Źródło: [Kukuła (red.) 2002].

Rozwiązując problem (10) z jednostkowymi kosztami dopasowania równymi 1 (czyli $KS_i = KF_i = 1$, $i = 1, ..., 6$), otrzymujemy odporny plan projektu przedstawiony w tab. 3.

Zauważmy, że wygenerowany plan nie spełnia relacji poprzedzania nałożonej na parę (5, 6) – w wygenerowanym planie odpornym oba zadania częściowo zachodzą na siebie. Ale też nie jest to z założenia plan, który będzie wykonany. Jest on jedynie przygotowywany wstępnie, ale potem – kiedy preferencje decydenta staną się jasne – będzie dopasowany do jednego (w omawianym przypadku) z czterech planów, który będzie ostatecznie wybrany przez decydenta.

Tabela 3. Rozwiązanie odporne przykładu liczbowego – wstępny plan minimalizujący koszty dopasowania do planu ostatecznie wybranego w najgorszym przypadku

S_1^*	0
S_2^*	0
S_3^*	8
S_4^*	14
S_5^*	6
S_6^*	21
D_1^*	8
D_2^*	6
D_3^*	5
D_4^*	12
D_5^*	16
D_6^*	9
$KD^1\left(\left\{\left(S_i^*, D_i^*\right)\right\}_{i=1}^{6}\right)$	20
$KD^2\left(\left\{\left(S_i^*, D_i^*\right)\right\}_{i=1}^{6}\right)$	12
$KD^3\left(\left\{\left(S_i^*, D_i^*\right)\right\}_{i=1}^{6}\right)$	6
$KD^4\left(\left\{\left(S_i^*, D_i^*\right)\right\}_{i=1}^{6}\right)$	21
$\max\limits_{k=1,\ldots,4} KD^k\left(\left\{\left(S_i^*, D_i^*\right)\right\}_{i=1}^{6}\right)$	21

Źródło: [Kukuła (red.) 2002].

Jeśli wystąpi nie najgorszy, a najlepszy przypadek, czyli decydent będzie preferował plan o numerze 3, koszty dopasowania będą niskie – będą wynosiły tylko 6. Niemniej jednak w najgorszym razie mogą one wynosić 21, i są to najmniejsze możliwe koszty najgorszego przypadku − w każdym innym planie koszty dopasowania w najgorszym przypadku byłyby wyższe.

5. Podsumowanie

Zaproponowano sposób wyznaczania prowizorycznego, „odpornego” czy elastycznego planu projektu, do którego przygotowywania będą mogły być rozpoczęte, kiedy preferencje decydenta (klienta) jeszcze nie będą znane. W literaturze występuje takie podejście do planowania projektów – zazwyczaj zakłada się, że wiadomo, jakie charakterystyki projektu są dla decydenta najważniejsze. Przedstawiona tutaj propozycja dotyczy rozpoczęcia planowania projektu wcześniej, kiedy nie będzie jeszcze jasne, na podstawie jakich kryteriów i przy jakiej hierarchii (wagach) kryteriów decydent będzie oceniał plan projektu. Znany będzie jedynie potencjalny zbiór rozwiązań, spośród których decydent wybierze najlepsze. Niemniej jednak, dzięki zaproponowanemu w niniejszym artykule rozwiązaniu, przygotowania do realizacji projektu będzie można zacząć jeszcze zanim decydent się do końca określi. Plan, którego koncepcję proponuje autorka w prezentowanym artykule, będzie wyznaczony w ten sposób, by koszty jego dopasowania do planu ostatecznie wybranego były w tak zwanym najgorszym przypadku jak najniższe. Problem został sformułowany w postaci zadania programowania linowego i można go rozwiązać za pomocą algorytmu Simplex.

Literatura

Ben-Tal A., Nemirovsky A., *Robust solutions to uncertain programs*, „Operations Research Letters" 1999, 25, 1-13.

Gaspars-Wieloch H., *Przegląd modeli optymalizacyjnych stosowanych w analizie czasowo-kosztowej przedsięwzięć*, [w:] W. Sikora (red.), Z prac Katedry Badań Operacyjnych nr 104, AE, Poznań 2008, s. 67-87.

Konarzewska-Gubała E., *Programowanie przy wielorakości celów*, PWN, Warszawawa 1980.

Kukuła K. (red.), *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, PWN, Warszawa 2002.

Kuchta D., *A concept of a robust solution of a multicriterial linear programming problem*, wysłane do Central European Journal of Operational Research, 2009a.

Kuchta D., *Nowa koncepcja odporności planów projektów*, zgłoszone do MPAR 2009, AE, Katowice 2009b.

Kouvelis P., Yu G., *Robust Discrete Optimization and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1997.

Vonder de S.V., Demeulemeester E.L., Herroelen W.S., Leus R., *The trade-off between stability and makespan in resource-constrained project scheduling*, "International Journal of Production Research" 2006, 44(2), 215-236.

LINEAR PROGRAMMING IN RESISTANT PLANNING OF PROJECTS

Summary: A new approach to use linear programming to determine a resistant (elastic) project plan is proposed. This plan is an initial, provisory plan, which allows to start the preparation of the project realization before the criteria according to which the decision maker will evaluate the project (time, cost, quality, a combination of them, etc.) are known. This provisory plan is determined in such a way that its cost to become the plan actually preferred by the decision maker (which will be actually realized) will be as small as possible. The problem is formulated as a linear programming problem and can be solved by means of the well known simplex algorithm.