PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 108
Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych 2010

Krzysztof Dmytrów
Uniwersytet Szczeciński

PORÓWNANIE KILKU PODEJŚĆ W MODELOWANIU ZAPASÓW Z OGRANICZENIAMI POZIOMU OBSŁUGI

Streszczenie: W teorii gospodarowania zapasami istnieje wiele podejść zakładających bądź pełną informację o kosztach albo ograniczenia poziomu obsługi. Wśród tych drugich występują trzy rodzaje ograniczeń poziomu obsługi – α, β oraz γ. W niniejszym artykule została podjęta próba porównania wyników generowanych przez model gospodarowania zapasami <*Q*, *r*> z ograniczeniami poziomu obsługi różnego rodzaju.

Słowa kluczowe: gospodarowanie zapasami, modelowanie zapasów, metody numeryczne

1. Wstęp

W gospodarowaniu zapasami w warunkach niepewności bądź ryzyka zawsze należy się liczyć z możliwością niezaspokojenia bieżącego zapotrzebowania na produkt. W takiej sytuacji istnieje trudność w uwzględnianiu niedoborów i w określaniu ich optymalnej wielkości. Największym problemem jest oszacowanie kosztów niedoborów. Można je określać na kilka sposobów. Jeżeli kryterium podziału jest rodzaj zapasów, to koszty niedoborów można podzielić następująco [Chen, Krass 2001, s. 86]:

– w odniesieniu do surowców i materiałów będą to koszty przestoju linii produkcyjnych, koszty specjalnych zamówień czy kary umowne za niewykonanie zobowiązań produkcyjnych wynikających z umów z kontrahentami,
– w odniesieniu do części zamiennych maszyn i urządzeń będą to koszty bezczynności maszyn i siły żywej, opóźnienia w realizacji zamówień czy też marnotrawstwo materiałów,
– w odniesieniu do wyrobów gotowych i towarów będą to utracone dochody i pogorszenie pozycji firmy na rynku.

Należy jednak zauważyć, iż nawet wiedząc, do której grupy należy badany asortyment, oszacowanie kosztów braku zapasów jest bardzo często trudne czy wręcz niemożliwe. Dzieje się tak dlatego, że oprócz wymiernych składowych tych kosztów (kary umowne, koszty przestoju linii, utrata zysków) występują także składowe niewymierne, takie jak utrata dobrego wizerunku firmy czy zagrożenia dla zdrowia czy nawet życia ludzi (np. brak zapasów krwi czy insuliny w szpitalu).

Jeśli koszty niedoboru mogą zostać oszacowane, do matematycznego modelowania gospodarowania zapasami wykorzystuje się podejście zakładające pełną informację o kosztach, w przeciwnym razie – modele z ograniczeniami poziomu obsługi (*service level constraints*).

W literaturze przedmiotu spotykane są trzy sposoby wyznaczania poziomów obsługi [Chen, Krass 2001, s. 126]:

1. Poziom obsługi typu α (α *service level*) – jest to prawdopodobieństwo, że poziom zapasów na końcu jakiegokolwiek okresu nie spadnie poniżej poziomu krytycznego. Inaczej jest on nazywany *wskaźnikiem gotowości* (*ready rate*).

2. Poziom obsługi typu β (β *service level*) – oznacza oczekiwaną frakcję popytu zaspokojoną z zapasów w jakimkolwiek okresie. Nazywa się go inaczej *wskaźnikiem wypełnienia* (*fill rate*).

3. Poziom obsługi typu γ (γ *service level*) – oczekiwany stosunek skumulowanego popytu zaspokojonego z zapasów do całkowitego skumulowanego popytu w okresie realizacji dostaw i okresie przeglądania zapasów. Miara ta jest podobna do β z tym, że podany stosunek szacowany jest na podstawie pewnej liczby okresów, nie zaś w pojedynczym okresie. Dodatkową różnicą jest to, iż poprzednie podejście stosuje się najczęściej w modelach poziomu zamawiania, to zaś jest charakterystyczne dla modeli cyklu zamawiania.

Dodatkowym elementem, którego często nie wolno pomijać w modelach gospodarowania zapasami, jest zmienność czasu realizacji dostaw. Może być ona traktowana dwojako:
- czas realizacji dostaw może być zmienną losową,
- czas realizacji dostaw może być zmienną decyzyjną.

W pierwszym przypadku nie zakłada się konkretnego kształtu rozkładu czasu realizacji dostaw, gdyż powoduje to bardzo duże skomplikowanie obliczeń. Bierze się pod uwagę jedynie takie parametry, jak średnia wartość czasu realizacji dostaw i jego wariancja. Na podstawie tych parametrów modyfikuje się wartość średnią i wariancję zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw.

W drugim przypadku zakłada się, że czas realizacji dostaw może zostać skrócony przy pewnym dodatkowym koszcie. Koszt ten ponosi się przy składaniu zamówienia uzupełniającego. Podejście zostało szczegółowo opisane na przykład w pracach [Hariga, Ben-Daya 1999; Chu, Yang, Chen 2005; Dmytrów 2004].

Mimo że bardziej naturalną sytuacją jest ta, w której nie mamy pełnej informacji o kosztach braku zapasów, bardziej rozpowszechnione są modele z pełną informacją o kosztach. Dzieje się tak głównie dlatego, że bardziej zaawansowane modele z ograniczeniami poziomu obsługi są trudniejsze matematycznie od modeli z pełną informacją o kosztach. Dlatego też w niniejszym artykule została podjęta próba porównania wyników generowanych przez model gospodarowania zapasami $<Q, r>$ z ograniczeniami poziomu obsługi typu α i β.

2. Oznaczenia i model

W pracy postanowiono zbadać klasyczny model gospodarowania zapasami <*Q*, *r*> dla zaległych zamówień. Dla pełnej informacji o kosztach funkcja celu modelu ma postać:

$$K(Q,r,\tau)=[A+R(\tau)]\frac{D}{Q}+h\left(\frac{Q}{2}+r-\mu\right)+s\frac{D}{Q}\overline{\eta}(r) \tag{1}$$

gdzie: D – roczne zapotrzebowanie na produkt, (uwaga: proszę zmienić pauzy na półpauzy w całej „wyliczance”)
A – koszt złożenia i realizacji pojedynczego zamówienia,
Q – wielkość zamówienia,
h – jednostkowy koszt magazynowania,
r – poziom zamawiania,
μ – wartość średnia zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw,
s – jednostkowy koszt niedoboru,
τ – czas realizacji dostaw,
$R(\tau)$ – koszt, przy którym można osiągnąć dany czas realizacji dostaw w jednym cyklu,
$\overline{\eta}(r)$ – oczekiwana ilość niedoborów w jednym cyklu odnowienia zapasów dana wzorem:

$$\overline{\eta}(r)=\int_r^\infty (x-r)f(x)dx \tag{2}$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją gęstości zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw.

Zasada działania modelu polega na tym, że stan zapasów jest monitorowany w sposób ciągły i kiedy jego poziom spadnie poniżej r, składane jest zamówienie uzupełniające na Q jednostek. Optymalne wielkości Q i r wyznacza się poprzez wyliczenie pierwszych pochodnych równania (1) względem Q oraz r i przyrównaniu ich do zera. Po odpowiednich przekształceniach wzory na optymalne wielkości zmiennych decyzyjnych są następujące:

$$Q=\sqrt{\frac{2D\left[A+R(\tau)+s\overline{\eta}(r)\right]}{h}} \tag{3}$$

oraz:

$$F(r)=1-\frac{hQ}{sD} \tag{4}$$

gdzie $F(r) = \int_0^r f(x)dx$ jest dystrybuantą rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw w punkcie r. Ponieważ w każdym wzorze występują obie wartości zmiennych decyzyjnych, więc najpierw wyznacza się wartość Q ze wzoru Harrisa-Wilsona $\left(Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}} \right)$, następnie podstawia się ją do wzoru (4), z tego wzoru wyznacza się r, które podstawia się następnie do (3) itd. Powyższe kroki są powtarzane tak długo, aż kolejne wartości Q i r będą zbieżne.

W naszym przypadku nieznana jest wartość s, czyli powyższy model z pełną informacją o kosztach należy zamienić na model z ograniczeniami poziomu obsługi. W przypadku ograniczeń typu α zasada postępowania jest bardzo prosta:
- wyznaczamy r takie, że $F(r) = \alpha$.
- optymalna wielkość zamówienia wyznaczana jest pierwszej pochodnej równania (1), z wyłączeniem ostatniego składnika $s\frac{D}{Q}\eta$, czyli:

$$Q = \sqrt{\frac{2[A + R(\tau)]D}{h}} \tag{5}$$

Wielkość α interpretuje się jako proporcję cykli uzupełniania zapasów, w których nie wystąpią niedobory. Powinna ona przyjąć wartość wystarczająco dużą, czyli ażeby niedobory występowały relatywnie rzadko. Najczęściej przyjmuje ona wartości od 0,9 wzwyż (do jedności).

W poziomie obsługi klienta typu II wskaźnik β jest prawdopodobieństwem, że popyt zostanie zaspokojony z zapasów, jakie posiada przedsiębiorstwo. Tak więc prawdopodobieństwo, że popyt nie zostanie zaspokojony, wynosi $1 - \beta$. Ograniczenie to można zapisać następująco [Nahmias 2001, s. 265]:

$$\frac{\overline{\eta}(r)}{Q} \leq 1 - \beta \tag{6}$$

Wskaźnik wypełnienia także musi być ustalony na odpowiednio wysokim poziomie (najczęściej powyżej 0,9).

Aby rozwiązać model dany równaniem (1), należy wyeliminować z niego wartość s. Robi się to poprzez rozwiązanie równania (4), aby otrzymać wartość s:

$$s = \frac{hQ}{D[1 - F(r)]} \tag{7}$$

Obliczoną w równaniu (7) wartość podstawiamy do wzoru na optymalną wielkość zamówienia Q daną równaniem (3):

$$Q = \sqrt{\frac{2D\left\{A + R(\tau) + \dfrac{hQ\overline{\eta}(r)}{D[1 - F(r)]}\right\}}{h}}.$$

Po podniesieniu powyższego równania do drugiej potęgi otrzymamy trójmian kwadratowy od Q postaci:

$$h[1 - F(r)]Q^2 - 2h\overline{\eta}(r)Q + 2[A + R(\tau)]D[1 - F(r)] = 0.$$

Powyższe równanie ma dodatnie rozwiązanie, dane wzorem:

$$Q = \frac{\overline{\eta}(r)}{1 - F(r)} + \sqrt{\frac{2[A + R(\tau)]D}{h} + \left[\frac{\overline{\eta}(r)}{1 - F(r)}\right]^2} \tag{8}$$

Równanie (8) rozwiązywane jest jednocześnie z równaniem:

$$\overline{\eta}(r) = (1 - \beta)Q \tag{9}$$

które otrzymamy z (6).

Numeryczna procedura rozwiązywania optymalnych wielkości Q i r jest następująca [Dmytrów 2004, s. 78]:

– podajemy wstępną wartość r_1,
– wyznaczamy $F(r_1)$ oraz $\overline{\eta}(r_1)$ ze wzoru (2), podstawiamy do wzoru (8) i wyznaczamy Q_1,
– na podstawie równania (9) wyznaczamy $\overline{\eta}(r_2)$, a ze wzoru (2) – r_2,
– powyższe kroki powtarza się tak długo, aż kolejne wartości Q oraz r będą zbieżne.

Inny sposób podejścia do ograniczeń poziomu obsługi typu II z czasem realizacji dostaw będącym zmienną decyzyjną został zaprezentowany w pracy [Chu, Yang, Chen 2005]. Funkcja celu jest następująca:

$$K(Q,\tau) = [A + R(\tau)]\frac{D}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + k\sigma\sqrt{\tau}\right) \tag{10}$$

gdzie k – wskaźnik bezpieczeństwa.

Warunkiem ograniczającym, podobnie jak w poprzednim modelu, jest nierówność (6). Dla normalnego rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw, $\overline{\eta}(r)$ można zapisać następująco [Chu, Yang, Chen 2005, s. 287]:

$$\overline{\eta}(r) = \sigma\sqrt{\tau}\psi(k) \tag{11}$$

gdzie $\psi(k) = \varphi(k) - k[1 - \Phi(k)] > 0$, a φ i Φ są odpowiednio funkcją gęstości i dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego, czyli warunek ograniczający można zapisać następująco:

$$\frac{\sigma\sqrt{\tau}\psi(k)}{Q} \leq 1 - \beta \tag{12}$$

Wyznaczenie optymalnej wielkości zamówienia z równania (10) jest bardzo proste, po wyliczeniu pierwszej pochodnej względem Q i przyrównaniu jej do zera otrzymamy (5).

Optymalna wielkość zamówienia dana wzorem (5) jest minimum równania (10), jeżeli nie bierze się pod uwagę ograniczenia (12). Jednakże optymalna wielkość zamówienia wyznaczona za pomocą wzoru (5) nie zawsze spełnia warunek (12). Warunek ten można zapisać następująco:

$$\frac{\sigma}{1 - \beta}\sqrt{\tau}\psi(k) \leq Q \tag{13}$$

Jeżeli otrzymana ze wzoru (5) wielkość Q spełnia nierówność (13), to jest ona optymalną wielkością zamówienia. Jeżeli zaś Q nie spełnia warunku (13), to lewa strona powyższej nierówności jest optymalną wielkością zamówienia. Tak więc optymalną wielkość zamówienia otrzymuje się następująco:

$$Q_{\text{opt}} = \max\left\{\sqrt{\frac{2AD}{h}}; \frac{\sigma}{1 - \beta}\sqrt{\tau}\psi(k)\right\} \tag{14}$$

3. Przykład numeryczny

W przykładzie wykorzystano dane pochodzące z pracy [Ouyang, Wu 1997]. Są one następujące: D = 600 jednostek/rok, A = 200 USD, h = 20 USD/jednostkę, σ = 7 jednostek/tydzień, 1 – β = 0,985 (wskaźnik bezpieczeństwa k = 0,845), okres realizacji dostaw τ = 8 tygodni. Okres ten można skrócić, ponosząc dodatkowe koszty. Są one podane w tab. 1.

Wszystkie obliczenia przeprowadzono w programie Scilab oraz OpenOffice.org Calc. Tabela 2 zawiera optymalne wielkości zmiennych decyzyjnych, niedoborów oraz łącznych kosztów dla ograniczeń poziomu obsługi typu α, β dla procedury iteracyjnej oraz β dla procedury zaproponowanej w pracy [Chu, Yang, Chen 2005].

Tabela 1. Czas realizacji dostaw i koszt jego skrócenia

i	τ (tygodnie)	$R(\tau)$ ($)
0	8	0
1	6	5,6
2	4	22,4
3	3	57,4

Źródło: [Chu, Yang, Chen 2005, s. 290].

Tabela 2. Optymalne wartości zmiennych decyzyjnych i łącznych kosztów

	Poziom obsługi typu α				Poziom obsługi typu β, procedura iteracyjna				Poziom obsługi typu β, procedura zaproponowana w pracy [Chu, Yang, Chen 2005]			
τ	8	6	4	3	8	6	4	3	8	6	4	3
Q	109,544	111,068	115,516	124,274	120,649	120,928	123,908	131,824	146,464	126,797	115,516	124,274
r	134,947	106,193	76,569	60,653	110,881	83,984	56,430	42,045	108,785	83,530	59,857	44,764
$\overline{\eta}(r)$	0,106	0,092	0,072	0,067	1,810	1,814	1,859	1,977	2,197	1,902	1,553	1,345
K ($)	3048,73	2964,40	2921,16	3008,13	2577,64	2528,25	2524,05	2640,29	2618,56	2530,71	2546,98	2690,43

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych zawartych w pracy [Chu, Yang, Chen 2005].

Jak widać z tab. 2, wyniki wygenerowane przez trzy podejścia różnią się od siebie głównie w zakresie wartości zmiennych decyzyjnych. Poziom obsługi typu α wygenerował najwyższe wartości poziomu zamawiania r, co przełożyło się na najniższe oczekiwane ilości niedoborów oraz na wysokie (w porównaniu z pozostałymi podejściami) całkowite koszty gospodarowania zapasami. Były one wyższe właśnie z powodu większych zapasów, jakie musiało utrzymywać przedsiębiorstwo.

Interesująco wypada porównanie dwóch podejść dla poziomu obsługi typu β. Dla dłuższego czasu realizacji dostaw (8 i 6 tygodni) podejście iteracyjne wygenerowało niższe optymalne wielkości zamówienia niż podejście zaproponowane w pracy [Chu, Yang, Chen 2005]. Odwrotnie było z optymalną wielkością poziomu zamawiania i oczekiwanych niedoborów. Oczekiwane łączne koszty zamawiania i magazynowania były nieco niższe w ramach procedury iteracyjnej. Jest to zrozumiałe, ponieważ procedura iteracyjna powoduje wyznaczenie wielkości zmiennych decyzyjnych, które minimalizują funkcje kosztów całkowitych. Należy jednak zauważyć, że korzyści z zastosowania procedury iteracyjnej wynoszą zaledwie 1-2% w porównaniu z procedurą zaproponowaną w pracy [Chu, Yang, Chen 2005]. Tak więc w przypadku normalnego rozkładu zapotrzebowania w okresie realizacji dostaw w zasadzie nie opłaca się poświęcać więcej czasu na obliczenia, ponieważ zysk z tego tytułu jest niewielki. Zatem sytuacja jest podobna jak przy pełnej informacji o kosztach. Tam różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi dla procedury iteracyjnej i bez uciekania się do metod numerycznych także są nieistotne (około 1%) [Geunes, Ramasesh, Hayya 2001, s. 245].

W przypadku ograniczeń poziomu obsługi typu α oraz dla procedury iteracyjnej w przypadku ograniczeń poziomu obsługi typu β, optymalną długością czasu realizacji dostaw były 4 tygodnie, natomiast dla poziomu obsługi typu β, w metodzie zaproponowanej w pracy [Chu, Yang, Chen 2005], optymalna długość tego czasu to 6 tygodni.

Otrzymane wyniki jednoznacznie wskazują, że zastosowanie ograniczeń poziomu obsługi typu β jest znacznie efektywniejsze od ograniczeń poziomu obsługi typu α. W drugim przypadku niedobory są co prawda mniejsze, za to ponosimy dużo wyższe koszty magazynowania.

4. Wnioski

W niniejszym artykule porównano ze sobą wyniki zastosowania modelu zapasów dla zaległych zamówień z ograniczeniami poziomu obsługi typu α i β. Lepsze wyniki (niższe łączne koszty gospodarowania zapasami) generują modele z ograniczeniami obsługi typu β. Dodatkowo w ramach tej klasy modeli porównano wyniki wygenerowane dla podejścia iteracyjnego i podejścia zaproponowanego w pracy [Chu, Yang, Chen 2005]. Okazało się, że oczekiwane łączne koszty gospodarowania zapasami dla metody iteracyjnej były niższe od kosztów uzyskanych dla podejścia zaproponowanego w cytowanej pracy maksymalnie o niecałe 2%, czyli korzyści z zastosowania bardziej pracochłonnej metody iteracyjnej były praktycznie nieistotne.

W dalszym etapie badań należy porównać wyniki generowane przez modele dla innych rozkładów zapotrzebowania niż rozkład normalny oraz dla różnych kombinacji kosztów zamawiania i kosztów magazynowania. Analizę należy także rozszerzyć o przypadek utraconej sprzedaży oraz o mieszaninę zaległych zamówień i utraconej sprzedaży.

Literatura

Chen F.Y., Krass D., *Inventory models with minimal service level constraints*, "European Journal of Operational Research" 2001 vol. 134, s. 120-140.

Chu P., Yang K-L., Chen P.S., *Improved inventory models with service level and lead time*, "Computer & Operations Research" 2005 vol. 32, s. 285-296.

Dmytrów K., *Stochastyczne metody optymalizacji zapasów materiałowych w przedsiębiorstwie, praca doktorska*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2004.

Geunes J.P., Ramasesh R.V., Hayya J.C., *Adapting the newsvendor model for infinite-horizon inventory systems*, "International Journal of Production Economics" 2001 vol. 72, s. 237-250.

Hariga M., Ben-Daya M., *Some stochastic inventory models with deterministic variable lead time*, "European Journal of Operational Research" 1999 vol. 113, s. 42-51.

Nahmias S., *Production and operations analysis*, fourth edition, McGraw-Hill, New York 2001.

Ouyang L.Y., Wu K.S., *Mixture inventory model involving variable lead time with a service level constraint*, "Computers & Operations Research" 1997 vol. 24, s. 875-882.
Sarjusz-Wolski Z., *Strategia zarządzania zaopatrzeniem*, *praktyka logistyki biznesu*, Agencja Wydawnicza PLACET, Warszawa 1998.

COMPARISON OF SEVERAL APPROACHES IN INVENTORY MODELS WITH SERVICE LEVEL CONSTRAINTS

Summary: In case of inventory models subject to random demand the decision maker must always take into account the probability of not satisfying current demand. In such case there is a difficulty in consideration of shortages and their optimal amount. The biggest problem is estimation of shortage costs. In case, when they can be estimated, we use the full-costs model. In opposite cane – service level constraints models. In the article the author compared results generated by the $<Q, r>$ model with service levels of the α, β and γ type.