PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 108
Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych 2010

Agata Gluzicka
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

MIARY KOHERENTNE I ICH ZASTOSOWANIE DO ANALIZY RYZYKA PORTFELA

Streszczenie: Tradycyjny model Markowitza stosowany w analizie portfelowej to model średnia-ryzyko. Model ten wykorzystuje różne miary ryzyka. Jedną z takich miar jest średnia różnica Giniego (*Gini's mean difference*). Jest to przykład miary koncentracji, której można użyć do wyznaczania portfeli optymalnych w prostym modelu liniowym. Jednak zamiast średniej różnicy Giniego można zastosować tzw. tail *Gini's mean difference*, która może być liczona na podstawie znanej miary *conditional value at risk*. W artykule zostanie przedstawiona definicja *tail Gini's measure*, jej związek z *conditional value at risk* oraz z dominacjami stochastycznymi. Omówiony zostanie również model optymalizacyjny z wykorzystaniem tej miary jako ryzyka. Przedstawiony model zostanie zastosowany do wyznaczania optymalnych portfeli inwestycyjnych na podstawie danych z GPW w Warszawie

Słowa kluczowe: miary koherentne, analiza portfelowa, dominacje stochastyczne, Giełda Papierów Wartościowych

1. Wstęp

W analizie portfelowej do pomiaru ryzyka możemy używać różnych miar, które następnie są stosowane w różnych modelach optymalizacyjnych.

Główną z metod stosowanych w modelowaniu wyboru niepewnych decyzji inwestycyjnych jest podejście średnia–ryzyko. Jednak w tym podejściu nie ma możliwości użycia wszystkich informacji o preferencjach awersji do ryzyka. Ponadto dla typowych miar ryzyka podejście średnia–ryzyko może prowadzić do gorszych wyników. Wielu autorów podkreśla, że model średnia–wariancja w zasadzie nie jest zgodny z dominacjami stochastycznymi. Jednak, stosując pewne transformacje podstawowych miar ryzyka, można wykazać zgodność tych miar z relacjami dominacji stochastycznych.

Przedmiotem rozważań tego artykułu jest średnia różnica Giniego jako przykład miary ryzyka. Miara ta, stosowana do wyznaczania inwestycyjnych portfeli optymalnych, jest porównywana z tradycyjnymi miarami ryzyka, m.in. z odchyleniem standardowym czy semiodchyleniem, jak również z popularnymi miarami koherentnymi, takimi jak wartość zagrożona (VaR) czy warunkowa wartość zagrożona (CVaR).

W pierwszej części artykułu zostanie przypomniana aksjomatyka koherentnych miar ryzyka. W dalszej części artykułu będą zdefiniowane miary bezpieczeństwa (m.in. dla średniej różnicy Giniego) oraz wykazane związki tych miar z dominacjami stochastycznymi i z koherentnością. W końcowej części artykułu zostaną zaproponowane kryteria wyboru portfeli optymalnych, w których zastosowano transformację średniej różnicy Giniego.

2. Koherentne miary ryzyka

Aksjomaty określające koherentne miary ryzyka zostały wprowadzone przez Artznaera [Artznaer, Delbaen, Eber, Heath 1999]. Aksjomaty te przedstawiają najważniejsze własności ryzyka, które są porównywane przy podejmowaniu decyzji ekonomicznych. Są one uważane za standardowe wymagania dla miary ryzyka.

Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich stanów natury, i załóżmy, że jest to zbiór skończony; G – zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji (zbiór wszystkich rodzajów ryzyka) określonych na Ω. Każde odwzorowanie ρ ze zbioru G w zbiór liczb rzeczywistych R nazywane jest miarą ryzyka. Dla dowolnej miary ryzyka ρ możemy rozważać następujące warunki:

- Aksjomat translacji inwariantnej:

$$\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha$$

dla wszystkich $X \in G$ i liczby rzeczywistej α.

- Aksjomat subaddytywności:

$$\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$$

dla wszystkich X, $Y \in G$.

- Aksjomat dodatniej homogeniczności:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

dla wszystkich $\lambda \ge 0$ i wszystkich $X \in G$.

- Aksjomat monotoniczności:

$$\text{dla } X \le Y \text{ mamy } \rho(Y) \le \rho(X)\,,$$

dla wszystkich X, $Y \in G$.

Miarą koherentną nazywamy miarę ryzyka spełniającą aksjomaty translacji inwariantnej, subaddytywności, dodatniej homogeniczności i monotoniczności.

Przykładami miar koherentnych są:

– *worst conditional expectation*,
– *conditional value at risk*,
– *expected shortfall*.

3. Warunkowa wartość zagrożona (CVaR) jako przykład miary koherentnej

Miara [Pflug 2000] określana jako warunkowa wartość zagrożona CVaR została zdefiniowana na podstawie miary zwanej wartością zagrożoną, popularnie w skrócie nazywaną miarą VaR (*value at risk*, wartość ryzykowna, wartość narażona na ryzyko). VaR definiowana jest jako maksymalna wartość, jaką można stracić w wyniku inwestycji dla danego okresu oraz przy założonym poziomie tolerancji.

Wartość VaR dla stopy zwrotu z portfela określa się jako:

$$P(R_p \leq R_\alpha) = \alpha,$$

gdzie: R_p – stopa zwrotu z portfela na koniec okresu,
R_α – kwantyl rozkładu stopy zwrotu odpowiadający zadanemu prawdopodobieństwu (poziomowi tolerancji) α,
α – poziom tolerancji.

Powyższy zapis oznacza, że z prawdopodobieństwem równym poziomowi tolerancji α zajdzie zdarzenie polegające na tym, że wartość na końcu okresu będzie mniejsza (lub równa) niż wartość obecna pomniejszona o VaR.

Miarę VaR można zdefiniować jako graniczną stopę zwrotu:

$$\mathrm{VaR}(x;\alpha) = \min\{u \in R: F(x;u) \geq \alpha\} = F^{-1}(x;\alpha),$$

gdzie x to wektor udziałów składowych portfela, a $F(x; u) = P\{R_p \leq u\}$ – dystrybuanta rozkładu stóp zwrotu R_p z portfela.

Warunkowa wartość zagrożona – CVaR (*conditional value at risk*) określana jest jako warunkowa wartość oczekiwana stóp zwrotu z portfela, pod warunkiem, że stopy te są mniejsze niż α-kwantyl rozkładu stóp zwrotu. Kwantyl ten jest równy wartości VaR na poziomie α, stąd wartość CVaR można zapisać jako:

$$\mathrm{CVaR}(x;\alpha) = E[R_p(x) \mid R_p(x) \leq -\mathrm{VaR}(x;\alpha)].$$

CVaR jako miara ryzyka [Rockafellar, Uryasev 2000]

Rozpatrzmy portfel składający się z n papierów wartościowych. Oznaczmy przez $x = (x_1; x_2, ..., x_n)$ wektor udziałów poszczególnych spółek w portfelu. Składowe x_j wektora x powinny spełniać warunki:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \text{ oraz } x_j \geq 0 \text{ dla } j = 1, 2, ..., n.$$

Niech $f(x, y)$ oznacza stratę portfela. Strata portfela jest funkcją udziałów poszczególnych składników w portfelu x oraz wektora wartości losowych y:

$$f(x;y) = -[x_1y_1 + \ldots + x_ny_n] = -x^{T}y.$$

Składowe wektora losowego $y = (y_1, ..., y_n)$ przedstawiają stopy zwrotu poszczególnych spółek. Zakładamy, że y jest zmienną losową, której rozkład określa funkcja gęstości $p(y)$, niezależna od x.

Prawdopodobieństwo, że strata f nie przekroczy pewnego ustalonego poziomu s, można określić jako:

$$\Psi(x;s) = \int_{f(x,y)\le s} p(y)\,dy .$$

Funkcja $\Psi(x; s)$ jako funkcja zmiennej s i dla ustalonego x jest funkcją dystrybuanty straty związanej z portfelem x.

Wartość zagrożoną VaR na poziomie tolerancji α dla portfela o składowych x można określić jako:

$$\mathrm{VaR}(x, \alpha) = \min\{s\in R\colon \Psi(x; s) \ge \alpha\}.$$

Natomiast warunkowa wartość zagrożona CVaR na poziomie tolerancji α dla tego portfela jest równa:

$$\mathrm{CVaR}(x,\alpha) = (1-\alpha)^{-1} \int_{f(x;y)\ge \mathrm{VaR}(x,\alpha)} f(x;y)\,p(y)\,dy .$$

Równanie to można również zapisać w innej postaci:

$$\mathrm{CVaR}(x;\alpha) = VaR(x;\alpha) + (1-\alpha)^{-1} \int_{y\in R^m} [f(x;y) - \mathrm{VaR}(x;\alpha)]^+ p(y)\,dy ,$$

gdzie funkcja $[t]^+$ określona jest następująco:

$$[t]^+ = \begin{cases} t & \text{dla} \quad t > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t \le 0 \end{cases}.$$

W modelu wyboru portfela optymalnego można zastosować następujące liniowe przybliżenie równania CVaR:

$$F(x;s) = s + (1-\alpha)^{-1} \int_{y\in R^m} [-x^T y - s]^+ p(y)\,dy .$$

Prawdziwa jest następująca zależność:

$$\mathrm{CVaR}(x;\alpha) = \min_{s\in R} F(x;s).$$

Funkcję $F(x; s)$ można przekształcić do następującej postaci:

$$\tilde{F}(x;s) = s + \frac{1}{q(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{q} [-x^T y_k - s]^+ .$$

gdzie wektory $y_1, y_2, y_3, ..., y_q$ to q scenariuszy wygenerowanych z rozkładu $p(y)$. Za scenariusze można przyjąć realizacje stóp zwrotu pochodzące z q okresów historycznych.

Równanie to jest przykładem funkcji liniowej i wypukłej. Minimalizacja tego równania pozwala na wyznaczenie portfela o minimalnej wartości CVaR. Wartość parametru s, dla którego to równanie przyjmuje wartość minimalną, jest równa minimalnej wartości VaR dla portfela o określonym składzie *x*.

Zadanie optymalizacyjne, na którego podstawie wyznaczane są portfele o minimalnej wartości CVaR , jest postaci (model CVaR):

$$\tilde{F}\left(x;s\right)=s+\frac{1}{q\left(1-\alpha\right)}\sum_{k=1}^{q}[-x^T y_k-s]^+\rightarrow \min,$$

$$\begin{aligned} \mu_p &= x^T\mu \\ 1 &= x^T 1 \quad, \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

gdzie: α – założony poziom tolerancji,
s – ustalony poziom, którego strata nie może przekroczyć,
x – wektor udziałów poszczególnych spółek w portfelu,
y_k – scenariusze realizacji stóp zwrotu dla k = 1, 2, ..., q okresów historycznych,
μ_p – oczekiwany zysk portfela,
μ – wektor oczekiwanych stóp zwrotu rozpatrywanych spółek,
1 – wektor jedynek.

4. Miary bezpieczeństwa i ich związek z relacją dominacji stochastycznych oraz z koherentnością

Tradycyjne miary ryzyka, takie jak odchylenie standardowe czy też średnia różnica Giniego, nie spełniają aksjomatów koherentności. W przypadku takich miar możliwe jest zastosowanie ich w postaci przetransformowanej, która takie aksjomaty spełnia.

Dla dowolnej miary ryzyka (miary typu dyspersji) $\rho(X)$, można zdefiniować funkcję postaci $S(X) = \mu(X) - \rho(X)$, którą nazywamy miarą bezpieczeństwa. Mówimy, że miara bezpieczeństwa $\mu(X) - \rho(X)$ jest zgodna w sensie SSD lub że miara ryzyka $\rho(X)$ jest dopełnieniowo zgodna z SSD, jeśli spełniony jest następujący warunek [Ogryczak, Opolska-Rutkowska 2004]:

$$X \succeq_{SSD} Y \Rightarrow S(X) \geq S(Y)$$

czyli

$$X \succeq_{SSD} Y \Rightarrow \mu\left(X\right)-\rho(X)\geq \mu(Y)-\rho(Y)$$

dla dwóch zmiennych losowych *X*, *Y*.

Przykładami miar ryzyka dopełnieniowo zgodnych z SSD są:
- średnia różnica Giniego [Shalit, Yitzhaki 2005; Yitzhaki 1982],
- semiodchylenie standardowe [Ogryczak, Ruszczyński 1999],

– średnie semiodchylenie [Baumol 1964; Konno, Yamazaki 1991],
– warunkowe β-semiodchylenie [Ogryczak, Ruszczyński 2002],
– maksymalne semiodchylenie [Ogryczak, Ruszczyński 2002].

Wymienione powyżej miary dopełnieniowo zgodne z SSD są przykładami miar wypukłych, dodatnio homogenicznych i spełniających warunek translacji inwariantnej. Dla tych miar ryzyka można wykazać ich związek z koherentnością, co zostało przedstawione w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1 [Ogryczak, Opolska-Rutkowska 2004]. Niech $\rho(X) \geq 0$ będzie wypukłą, dodatnio homogeniczną i spełniającą warunek translacji inwariantnej miarą ryzyka (typu dyspersji). Jeśli dodatkowo dla miary $\rho(X)$ prawdziwy jest jeden z poniższych warunków:

a) $\rho(X)$ jest miarą dopełnieniowo zgodną z SSD,

b) $\rho(X)$ jest ograniczona z góry przez średnią stopę zwrotu:

$$X \geq 0 \Rightarrow \rho(X) \leq \mu(X),$$

to miara postaci $C(X) = -S(X) = \rho(X) - \mu(X)$ spełnia aksjomaty koherentności.

Jako miarę ryzyka możemy również rozważać kombinację pewnych miar ryzyka. Dla miar dopełnieniowo zgodnych prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2 [Krzemieniowski, Ogryczak 2005]. Załóżmy, że wszystkie miary ryzyka ρ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) są miarami dopełnieniowo zgodnymi z SSD, wówczas każda kombinacja miar ryzyka postaci:

$$\rho_c(X) = \sum_{k=1}^{m} w_k \rho_k(X) \quad \sum_{k=1}^{m} w_k(X) \leq 1 \quad w_k > 0 \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, m$$

jest również dopełnieniowo zgodna z SSD w takim sensie, że

$$X \succeq_{SSD} Y \Rightarrow \mu(X) - \rho_c(X) \geq \mu(Y) - \rho_c(Y).$$

Z własności miar wypukłych wynika, że kombinacja miar wypukłych również jest miarą wypukłą. Jeśli miary ryzyka są dodatnio homogeniczne, to kombinacja takich miar jest również miarą dodatnio homogeniczną. Ponadto, jeśli miary te spełniają aksjomat translacji inwariantnej, kombinacja tych miar również spełnia ten aksjomat. Oznacza to, że kombinacja takich miar spełnia założenia twierdzenia 1. Taka kombinacja jest zatem przykładem miary spełniającej aksjomaty koherentności.

5. Kryteria wyboru portfeli optymalnych – przykład empiryczny

Krótki przykład empiryczny dotyczy konstrukcji i analizy portfeli optymalnych wyznaczanych przez zastosowanie następujących miar dopełnieniowo zgodnych z SSD:

- Średnia różnica Giniego [Rockafellar, Uryasev 2000; Yitzhaki 1982]:

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| x_i - x_j \right| p_i p_j .$$

- Średnie bezwzględne semiodchylenie [Konno, Yamazaki 1991]:

$$\overline{\delta} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta_i} \text{ gdzie } \overline{\delta_i} = \begin{cases} |x_i - \mu| & \text{dla } x_i - \mu < 0 \\ 0 & \text{dla } x_i - \mu \geq 0 \end{cases}.$$

- Standardowe semiodchylenie [Ogryczak, Ruszczyński 1999]:

$$\overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma_i} \text{ gdzie } \overline{\sigma_i} = \begin{cases} (x_i - \mu)^2 & \text{dla } x_i - \mu < 0 \\ 0 & \text{dla } x_i - \mu \geq 0 \end{cases},$$

gdzie X jest zmienną losową taką, że $Pr\{X = x_i\} = p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ jest średnią X.

W jednym z kryteriów zastosowano również przedstawioną w rozdziale drugim warunkową wartość zagrożoną:

$$\tilde{F}(x;s) = s + \frac{1}{q(1-\alpha)}\sum_{k=1}^{q}[-x^T y_k - s]^+.$$

Jako miary ryzyka można stosować miary dopełnieniowe zgodne, które spełniają również aksjomaty koherentności. Można rozpatrywać następujące kryteria optymalizacji:

Model 1: $C(X) = \Gamma(X) - \mu(X)$.

Model 2: $C(X) = \overline{\delta}(X) - \mu(X)$.

Model 3: $C(X) = \overline{\sigma}(X) - \mu(X)$.

Kryterium wyboru portfeli optymalnych może być również kombinacją wybranych miar ryzyka. Dla średniej różnicy Giniego można stosować np. następujące kombinacje miar dopełnieniowo zgodnych (spełniających warunki koherentności):

Model 4: $C(X) = \varepsilon\Gamma(X) + (1-\varepsilon)\overline{\delta}(X) - \mu(X)$.

Model 5: $C(X) = \varepsilon\Gamma(X) + (1-\varepsilon)\overline{\sigma}(X) - \mu(X)$.

Można również jako kryterium zastosować kombinację średniej różnicy Giniego z miarą koherentną, jaką jest CVaR:

Model 6: $C(X) = \varepsilon\Gamma(X) + (1-\varepsilon)\tilde{F}(X;s) - \mu(X)$.

We wszystkich zaproponowanych modelach zastosowano dwa warunki ograniczające: stopa zwrotu portfela przyjmuje wartość na założonym poziomie oraz suma udziałów wszystkich spółek w portfelu jest równa jedności.

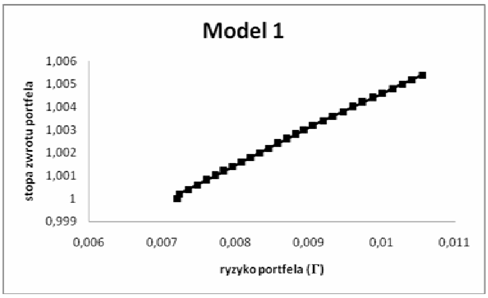
W przykładzie wykorzystano dane z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Analizie poddano różne grupy spółek: spółki indeksu WIG20 (grupa składała się z 20 spółek), spółki indeksu TECHWIG (grupa 30 spółek), spółki notowane w sposób ciągły w ciągu całego 2007 r. (grupa 100 spółek), spółki notowane w sposób ciągły w okresie styczeń 2006 – grudzień 2007 (grupa 70 spółek). Na podstawie danych z 2007 r. – dziennych stóp zwrotu, dla wybranych spółek wyznaczono portfele zgodnie z przedstawionymi powyżej modelami. Dla każdej rozważanej grupy spółek otrzymano podobne wyniki, dlatego rezultaty zostaną przedstawione dla dwóch pierwszych grup spółek.

Kolejne portfele były konstruowane dla różnych wartości założonego minimalnego poziomu stopy zwrotu portfela. Stosując różne modele optymalizacyjne, otrzymano różne portfele – porównywano portfele optymalne, wyznaczone według różnych miar, ale dla tego samego założonego poziomu stopy zwrotu.

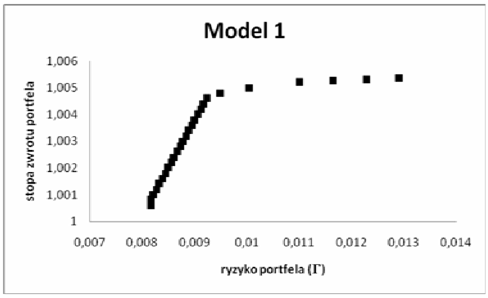
Modele optymalizacyjne z zaproponowanymi miarami ryzyka można analizować m.in. pod względem zależności pomiędzy wartością ryzyka (wyrażonego wybraną miarą, np. średnią różnicą Giniego czy semiodchyleniem) a wartością stopy zwrotu portfela.

Zależności te przedstawiono na poniższych wykresach. W modelu 1, w którym zastosowano średnią różnicę Giniego, zależność wartości ryzyka od wartości stopy zwrotu jest zależnością liniową. Jeśli jako kryterium optymalizacji zastosujemy semiodchylenie, zależności te swym kształtem przypominają granicę efektywną typową dla portfeli wyznaczanych według modelu Markowitza. Zależność dla portfeli złożonych z akcji indeksu TECHWIG dla poszczególnych modeli przedstawiają rys. 1, 3, 5; natomiast dla portfeli akcji indeksu WIG20 zależność obrazują wykresy na rys. 2, 4, 6.

Modele optymalizacyjne, w których stosujemy kombinację miar ryzyka, można porównywać dodatkowo pod względem wpływu wartości współczynnika kombinacji liniowej ε na wartość ryzyka portfela. Wykresy swym kształtem również przypominają granicę efektywną. Ponadto na podstawie otrzymanych wyników możemy stwierdzić, że: jeśli miarą ryzyka jest średnie bezwzględne semiodchylenie, to najbardziej ryzykowne portfele (portfele o najwyższej wartości ryzyka) są wyznaczane dla najwyższej wartości współczynnika ε. Wyniki dla modelu 4 przedstawiają poniższe wykresy (rys. 7, 8).



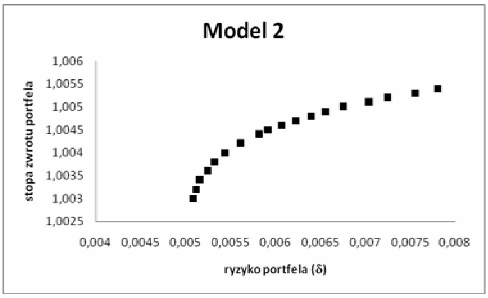
Rys. 1. Granica efektywna dla modelu 1 (indeks TECHWIG)



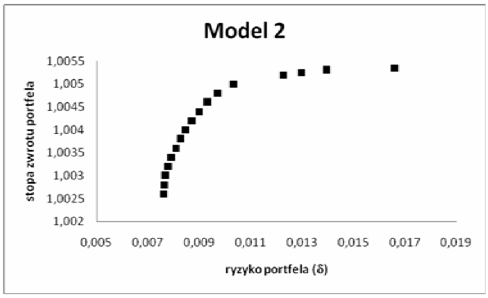
Rys. 2. Granica efektywna dla modelu 1 (indeks WIG20)

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli miarą ryzyka jest standardowe semiodchylenie, różnice między ryzykiem portfeli optymalnych są bardzo małe (wartość semiodchylenia standardowego jest dużo mniejsza od wartości średniej różnica Giniego).

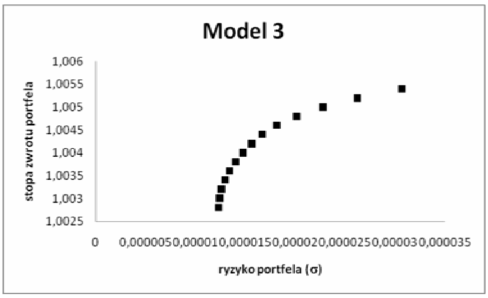


Rys. 3. Granica efektywna dla modelu 2 (indeks TECHWIG)

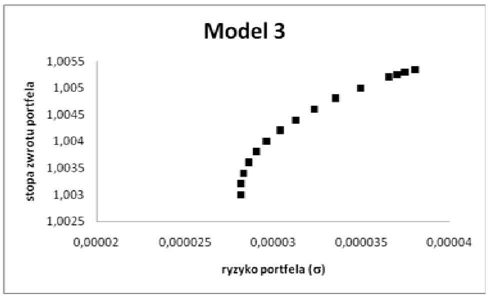


Rys. 4. Granica efektywna dla modelu 2 (indeks WIG20)

Źródło: opracowanie własne.

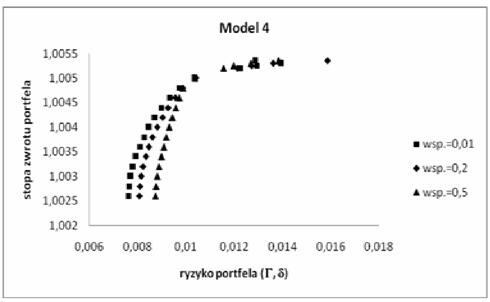


Rys. 5. Granica efektywna dla modelu 3 (indeks TECHWIG)

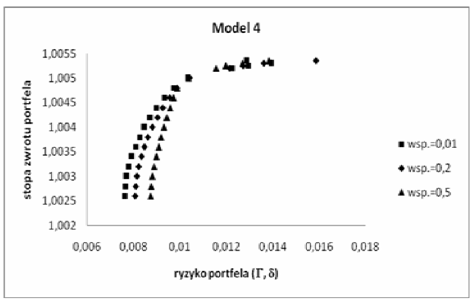


Rys. 6. Granica efektywna dla modelu 3 (indeks WIG20)

Źródło: opracowanie własne.



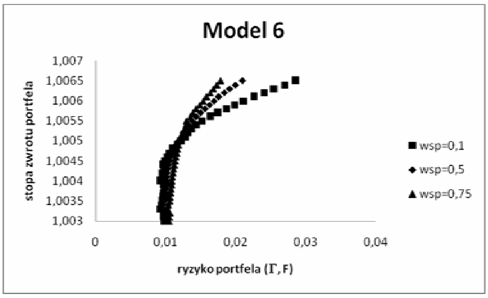
Rys. 7. Granica efektywna dla modelu 4 (dla różnych wartości współczynnika ε), indeks WIG20



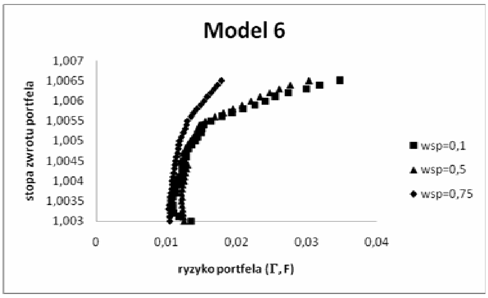
Rys. 8. Granica efektywna dla modelu 4 (dla różnych wartości współczynnika ε), indeks TECHWIG

Źródło: opracowanie własne.

Podobnej analizy dokonano dla portfeli wyznaczanych na podstawie modelu, gdzie ryzyko było kombinacją średniej różnicy Giniego i miary koherentnej CVaR. Model ten również został przeanalizowany pod względem wpływu wartości współczynnika kombinacji liniowej ε na wartość ryzyka portfela optymalnego. Rozpatrywano dwa przypadki: dla poziomu tolerancji α = 0,95 oraz α = 0,99. Podobnie jak w powyższym przypadku, również tutaj: im wyższa wartość współczynnika ε, tym bardziej ryzykowne portfele. Zależność przedstawiają wykresy na rys. 9 i 10.



Rys. 9. Granica efektywna dla modelu 6 (dla β = 0,95 i różnych wartości współczynnika ε), indeks TECHWIG



Rys. 10. Granica efektywna dla model 6 (dla β = 0,99 i różnych wartości współczynnika ε), indeks TECHWIG

Źródło: opracowanie własne.

Dla różnych portfeli efektywnych, o tej samej wymaganej stopie zwrotu, porównano rzeczywiste stopy zysku. Rzeczywiste stopy zysku były obliczane na podstawie danych z kolejnych kilku tygodni od ostatniej obserwacji (zaczynając od 2 stycznia 2008 roku). Wyniki przedstawiono w tab. 1.

Najlepsze – najwyższe rzeczywiste stopy zysku otrzymano dla portfeli wyznaczanych na podstawie modelu ze średnią różnicą Giniego. (podobne wyniki można odnotować dla modelu, w którym jako kryterium stosowana jest po prostu średnia różnica Giniego). Najniższe rzeczywiste stopy zwrotu mamy dla portfeli z modelu, w którym ryzyko mierzone było odchyleniem standardowym.

Tabela 1. Rzeczywiste stopy zysku dla wybranych portfeli optymalnych wyznaczonych na podstawie modeli 1, 2, 3, 4, 6 (dla ε = 0,2 i α = 0,99) (TECHWIG)

Data	Portfele dla najniższego założonego poziomu stopy zwrotu					Portfele dla najwyższego założonego poziomu stopy zwrotu				
	model 1	model 2	model 3	model 4	model 6	model 1	model 2	model 3	model 4	model 4
02/01/2008	**1,024**	0,962	0,921	0,963	0,928	**0,975**	0,857	0,795	0,850	0,840
09/01/2008	**1,004**	0,931	0,920	0,955	0,949	**1,000**	0,886	0,821	0,879	0,847
16/01/2008	**1,019**	0,931	0,909	0,958	0,975	**1,022**	0,898	0,830	0,892	0,889
23/01/2008	1,027	1,088	**1,102**	1,065	1,026	0,997	1,116	1,013	**1,122**	0,992
30/01/2008	1,011	1,012	1,013	**1,013**	1,005	**1,024**	1,020	1,018	1,021	0,979
06/02/2008	**0,989**	0,978	0,974	0,978	0,983	**0,993**	0,978	0,976	0,978	0,979

Źródło: opracowanie własne.

6. Podsumowanie

W artykule przedstawiono transformacje średniej różnicy Giniego jako miary ryzyka. Miarę tę można stosować w postaci, dla której zachodzi związek z dominacjami stochastycznymi oraz która spełnia aksjomaty koherentności. Jako kryterium wyboru portfela można również stosować kombinację średniej różnicy Giniego z wybranymi miarami ryzyka. W artykule analizowano kombinację średniej Giniego z semiodchyleniem oraz z warunkową wartością zagrożoną CVaR.

Zaproponowane kryteria zastosowano w modelach optymalizacyjnych, na których podstawie wyznaczono optymalne portfele inwestycyjne. Portfele analizowano m.in. pod względem zależności pomiędzy wartością ryzyka a wartością stopy zwrotu portfela. Zależność ta w przypadku stosowania miary dopełnieniowo zgodnej dla średniej różnicy Giniego jest zależnością liniową – podobnie jak dla kryterium, w którym minimalizowana jest wartość średniej różnicy Giniego [Gluzicka, Kopańska-Bródka 2005]. Jeśli natomiast kryterium optymalizacji jest kombinacja liniowa średniej różnicy Giniego i wybranej miary (spełniającej warunki koherentności), to wykres zależności ryzyka od stopy zwrotu portfela przypomina swym kształtem wykres granicy efektywnej według modelu Markowitza. Ponadto portfele optymalne wyznaczane na podstawie modelu ze średnią różnicą Giniego jako miarą ryzyka charakteryzują się najwyższymi rzeczywistymi stopami zysku.

Literatura

Artznaer P., Delbaen F., Eber J., Heath D., *Coherent measures of risk*, "Mathematical Finance" 1999 (July) vol. 9, s. 203-228.

Baumol W.J., *An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection*, "Management Science" 1964 vol. 10, s. 174-182.

Gluzicka A., Kopańska-Bródka D., *Applications of Gini's Mean Difference to Portfolio Analysis*, Proceedings of the 23rd International Conference: Mathematical Methods in Economics 2005, Publisher Gaudeamus University of Hradec Kralove, Hradec Kralove, Czech Republic, s. 111-116.

Konno H., Yamazaki H., *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo Stock Market*, "Management Science" 1991 (May) vol. 37, no. 5, s. 519-531.

Krzemieniowski A., Ogryczak W., *On extending the LP computable risk measures to account downside risk*, "Computational Optimization and Applications" 2005 vol. 32, s. 133-160.

Ogryczak W., Opolska-Rutkowska M., *On Mean-Risk Model Consistent with Stochastic Dominance*, Report of the Institute of Control and Computation Engineering, Warsaw University of Technology, May 2004.

Ogryczak W., Opolska-Rutkowska M., *SSD consistent criteria and coherent risk measures*, „System Modelling and Optimization" 2005, s. 227-237.

Ogryczak W., Ruszczyński A., *From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures*, "European Journal Optimization Research" 1999 vol. 116, 1999, s. 33-50.

Ogryczak W., Ruszczyński A., *Dual stochastic dominance and related mean-risk models*, "SIAM Journal Optimization" vol. 13, 2002, s. 60-78.

Okunev J., *The generation of mean Gini efficient sets*, "Journal of Business Finance and Accounting" 1991 (January), s..209-218.

Pflug G.C., *Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk*, [w:] *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, red. S. Uryasev, Kluwer Academic Publishers, Norwell 2000.

Rockafellar R.T., Uryasev S., *Optimization of conditional value at risk*, "Journal of Risk" 2000 no 2, s. 21-41.

Shalit H., Yitzhaki S., *The mean-Gini efficient portfolio frontier*, "The Journal of Financial Research" 2005 vol. 27, s. 59-75.

Yitzhaki S., *Stochastic dominance, mean variance and Gini's mean difference*, "The American Economic Review" 1982, s. 178-185.

COHERENT MEASURES AND THEIR APPLICATION TO PORTFOLIO RISK ANALYSIS

Summary: Many different measures can be used as a criterion of portfolio's risk. The Gini's Mean Difference is a one of these measures. This measure mainly is compared with others measures as standard deviation or Value-at-Risk. All these measures we can use in different optimization models. The mean-risk approach is a one of the main methods which we can use to model the choice of uncertain investment decisions. Generally, the mean-risk model is not consistent with the stochastic dominance. However we can use some transformation of measures of risk – safety measure, which is consistent with the stochastic dominance rules.

In the first part of the article, the axioms of the coherent measure and the definition of safety measure (also for Gini's Mean Difference) are presented. Then, the relationship between the safety measure, stochastic dominance and coherence is discussed. At the end, the example of the application of linear optimization models is presented. In these models, different criteria are used which fulfill axioms of coherency.