PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 108
Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych 2010

Ilona Jankowska
Uniwersytet Łódzki

STOCHASTYCZNA ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI ROZWIĄZANIA LINIOWEGO ZADANIA OPTYMALIZACYJNEGO

Streszczenie: W artykule przedstawiono liniowy model optymalizacyjny w warunkach niepewności. W zadaniu losowym zaburzeniom poddawano współczynniki funkcji celu. Referat ten jest kontynuacją badań poświęconych analizie niepewności występującej w jednym elemencie modelu. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wyników analizy wpływu jednoczesnej losowości kilku elementów zadania na rozwiązanie optymalne. W przeprowadzonym doświadczeniu wykorzystano symulację stochastyczną.

Słowa kluczowe: decyzje w warunkach niepewności, liniowy model optymalizacyjny, symulacje stochastyczne

1. Wstęp

W artykule przedstawiono liniowy model optymalizacyjny w warunkach niepewności. W zadaniu losowym współczynniki funkcji celu są poddawane zaburzeniom. W tym celu do przeprowadzenia doświadczenia wykorzystano symulację stochastyczną. Referat jest kontynuacją badań poświęconych analizie niepewności występującej w jednym elemencie modelu [Jankowska (w druku)].

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wyników analizy wpływu jednoczesnej losowości kilku elementów zadania na rozwiązanie optymalne.

2. Deterministyczny liniowy model optymalizacyjny

W artykule rozważam deterministyczny model liniowy na przykładzie optymalizacji portfela papierów wartościowych, który składa się z akcji pięciu spółek sektora bankowego (Bank BPH SA, Bank Zachodni WBK SA, Bank Millennium SA, Bank Polska Kasa Opieki SA, Powszechna Kasa Oszczędności Bank Polski SA) notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie[1]:

[1] Zaprezentowany deterministyczny model optymalizacyjny jest zlinearyzowaną wersją klasycznego modelu Markowitza. Przedstawione zadanie maksymalizuje stopę zwrotu portfela przy danym ryzyku. Aby

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{5} r_i x_i \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^{5} \sigma_{r_i} x_i \le s,$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_5 \ge 0,$$

gdzie: x_i – procentowy udział akcji i-tej spółki w portfelu (i = 1, 2, …, 5),
r_i – oczekiwana dzienna stopa zwrotu akcji i-tej spółki oszacowana na danych empirycznych (i = 1, 2, …, 5),
σ_{r_i} – ryzyko akcji i-tej spółki (mierzone odchyleniem standardowym dziennej stopy zwrotu) (i = 1, 2, …, 5),
s – dopuszczalne ryzyko portfela (średnia arytmetyczna ryzyka wszystkich akcji).

Parametry modelu (średnie dzienne stopy zwrotu oraz ich odchylenia standardowe) zostały wyznaczone na podstawie 250 obserwacji (kursów zamknięcia akcji) z okresu 03.07.2006 – 29.06.2007[2]. Dla uproszczenia podczas obliczeń nie uwzględniono dywidendy.

W rezultacie uzyskano deterministyczny model liniowy postaci:

$$f(\mathbf{x}) = 0{,}0014x_1 + 0{,}0022x_2 + 0{,}0037x_3 + 0{,}0015x_4 + 0{,}0018x_5 \to \max,$$
$$0{,}0202x_1 + 0{,}0256x_2 + 0{,}0231x_3 + 0{,}0215x_4 + 0{,}0197x_5 \le 0{,}0220,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0.$$

3. Liniowy model optymalizacyjny w warunkach niepewności

W przedstawionym modelu optymalizacyjnym źródłem niepewności są współczynniki funkcji celu. W doświadczeniu, podczas rozwiązywania pojedynczego zadania liniowego, niezależnie zaburzane są jednocześnie dwa lub więcej wybrane parametry r_i odpowiadające kolejnym zmiennym decyzyjnym x_i. Narzędzie symulacji stochastycznej umożliwia przeprowadzenie określonej liczby replikacji, co w tym przypadku jest równoznaczne z wielokrotnym rozwiązywaniem modelu liniowego z zaburzonymi już parametrami [Gajda 2001, s. 108-111].

móc zastosować metody programowania liniowego do rozwiązania zadania, zarówno funkcja celu, jak i warunki ograniczające są liniowymi funkcjami zmiennych decyzyjnych [Tarczyński 2002, s. 74-78].

[2] W referacie użyłam tego samego modelu, który został przedstawiony w artykule [Jankowska (w druku)].

Dla uproszczenia przyjęto, że zakłócenia oczekiwanych dziennych stóp zwrotu (Δr_i) mają rozkład normalny [Tarczyński 2002, s. 36, 75]:

$$\Delta r_i : \mathrm{N}\left(0, \sigma_{r_i}\right) \text{ (dla } i = 1, 2, \ldots, 5),$$

gdzie: $\sigma_{r_1} = 0{,}0202$; $\sigma_{r_2} = 0{,}0256$; $\sigma_{r_3} = 0{,}0231$; $\sigma_{r_4} = 0{,}0215$; $\sigma_{r_5} = 0{,}0197$ (oszacowania z próby uznane za parametry populacji generalnej).

4. Rozwiązanie zadania liniowego z wykorzystaniem symulacji stochastycznej

Do rozwiązywania pojedynczych zadań liniowych został wykorzystany dodatek Solver w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel [Szapiro 2000, s. 390-401]. W celu przeprowadzenia poszczególnych symulacji stochastycznych uruchamiano makro, które w każdej replikacji kolejno:
- niezależnie losowało zakłócenia dla wybranych i z góry określonych współczynników funkcji celu,
- rozwiązywało zadanie liniowe z zaburzonymi elementami,
- zapisywało otrzymane rozwiązanie optymalne.

W każdej przeprowadzonej symulacji wykonano 5000 replikacji. Wyniki przeprowadzonego doświadczenia zostały opracowane w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel oraz z pomocą aplikacji Eviews 3.1.

Punktem odniesienia otrzymanych wyników po przeprowadzeniu wszystkich symulacji jest rozwiązanie deterministycznego zadania optymalizacji liniowej zaprezentowane w tab. 1.

Tabela 1. Rozwiązanie deterministycznego zadania optymalizacji liniowej

<table>
<tr><td rowspan="2">Zmienna decyzyjna</td><td rowspan="2" colspan="2">Rozwiązanie optymalne</td><td colspan="3">Współczynnik funkcji celu</td></tr>
<tr><td>wartość minimalna</td><td>aktualny</td><td>wartość maksymalna</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td colspan="2">0</td><td>$-\infty$</td><td>0,0014</td><td>0,0021</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td colspan="2">0</td><td>$-\infty$</td><td>0,0022</td><td>0,0051</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td colspan="2">0,6765</td><td>0,0020</td><td>0,0037</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>x_4</td><td colspan="2">0</td><td>$-\infty$</td><td>0,0015</td><td>0,0028</td></tr>
<tr><td>x_5</td><td colspan="2">0,3235</td><td>0,0010</td><td>0,0018</td><td>0,0037</td></tr>
<tr><td colspan="3">Optymalna wartość funkcji celu</td><td colspan="3">0,0031</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ograniczenie</td><td rowspan="2">zmienna swobodna</td><td rowspan="2">zmienna dualna</td><td colspan="3">Wyraz wolny ograniczenia</td></tr>
<tr><td>wartość minimalna</td><td>aktualny</td><td>wartość maksymalna</td></tr>
<tr><td>Ryzyko</td><td>0</td><td>0,5588</td><td>0,0197</td><td>0,0220</td><td>0,0231</td></tr>
</table>

Źródło: opracowanie własne [Jankowska (w druku)].

Uzyskany optymalny portfel papierów wartościowych składa się z akcji dwóch spółek. Udział akcji spółki trzeciej w portfelu równy 67,65% jest ponad dwa razy większy od udziału akcji spółki piątej (32,35%). Taki portfel akcji zapewnia oczekiwaną dzienną stopę zwrotu na poziomie 0,31%.

W artykule [Jankowska (w druku)] porównałam wyniki przeprowadzonych pięciu symulacji stochastycznych. W opisywanych modelach źródłem niepewności były pojedyncze współczynniki funkcji celu. Rozkład optymalnej wartości funkcji kryterium o najwyższej średniej równej 1,09% charakteryzował się odchyleniem standardowym 1,20%. Najniższą średnią stopę zwrotu portfela pośród wszystkich pięciu modeli uzyskano na poziomie 0,66% z odchyleniem standardowym 0,55%.

Poniżej przedstawiono wyniki symulacji modeli optymalizacyjnych z dwoma lub więcej elementami niepewnymi. Ogółem przeprowadzono 26 eksperymentów symulacyjnych. Otrzymano w sumie 10 modeli zawierających po dwa zaburzone parametry r_i, 10 modeli, w których zaburzone były trzy parametry, oraz 5 modeli z czterema zakłóconymi współczynnikami funkcji celu i 1 model z pięcioma elementami niepewnymi.

Rozkład optymalnej wartości funkcji celu, uzyskany po dokonaniu symulacji modelu z zaburzonymi pięcioma parametrami, charakteryzuje średnia na poziomie 2,3% i odchylenie standardowe 1,35%. Podstawowe statystyki otrzymanych rozkładów o najwyższej i najniższej średniej optymalnej wartości funkcji kryterium, wśród modeli z dwiema, trzema i czterema zaburzonymi stopami zwrotu, zestawiono w tab. 2.

Tabela 2. Podstawowe statystyki rozkładów optymalnej wartości funkcji celu zadań liniowych

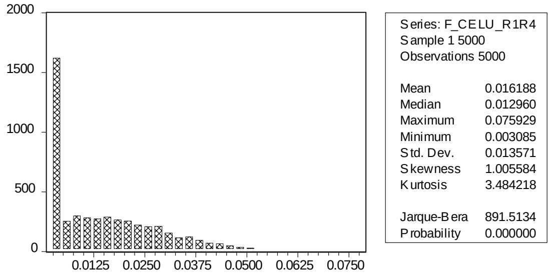
	Statystyki rozkładu optymalnej		Statystyki rozkładu optymalnej	
	średnia	odchylenie	średnia	odchylenie
Modele z 2 elementami	0,0112	0,0094	0,0162	0,0136
Modele z 3 elementami	0,0160	0,0119	0,0197	0,0141
Modele z 4 elementami	0,0200	0,0130	0,0220	0,0139

Źródło: opracowanie własne.

Wraz ze wzrostem zaburzeń wprowadzanych do modelu liniowego rosną wartości średnich z rozkładów optymalnej wartości funkcji celu. Uwzględniając to, że wszystkie parametry r_i są losowe, uzyskanie wyższej dziennej stopy zwrotu portfela jest bardziej prawdopodobne.

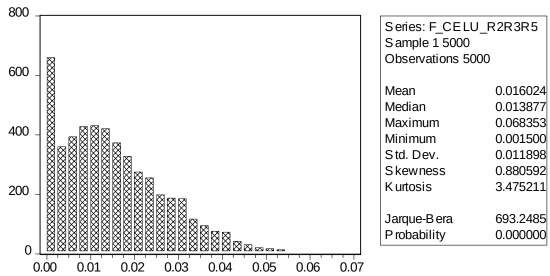
Rozkłady optymalnej wartości funkcji celu modeli z dwoma zaburzanymi parametrami cechuje silna asymetria prawostronna (rys. 1). Asymetryczność ta maleje wraz ze zwiększeniem liczby zakłócanych elementów modelu (rys. 2 i 3).

Rozkład optymalnej wartości funkcji kryterium modelu, w którym wszystkie stopy zwrotu zostały zaburzone, nadal charakteryzuje asymetria, ale już nie o tak dużej sile jak w modelach z dwoma elementami losowymi (zob. rys. 3).



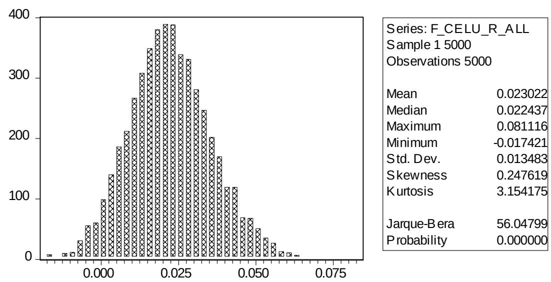
Rys. 1. Rozkład optymalnej wartości funkcji celu modelu z zaburzanymi stopami zwrotu r_1 i r_4

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Rozkład optymalnej wartości funkcji celu modelu z zaburzanymi stopami zwrotu r_2, r_3 i r_5

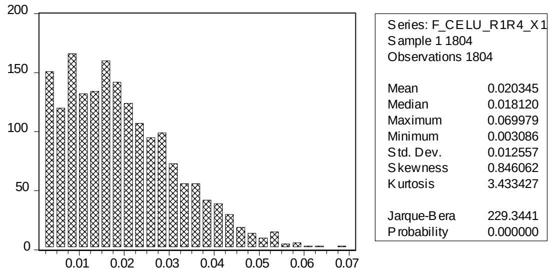
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Rozkład optymalnej wartości funkcji celu modelu z zaburzonymi wszystkimi stopami zwrotu

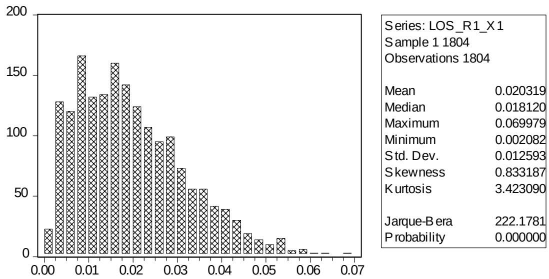
Źródło: opracowanie własne.

Gdy zaburzany jest współczynnik funkcji celu przy zmiennej niebazowej w rozwiązaniu optymalnym, to wprowadzone zakłócenie do modelu nie wywiera wpływu na funkcję kryterium. Gdy zaburzana jest wartość parametru odpowiadającego zmiennej bazowej (czyli zmiennej o wartości niezerowej) w otrzymanym rozwiązaniu, na rozkład optymalnej wartości funkcji celu bezpośredni wpływ mają losowane wielkości (rys. 4 i 5).



Rys. 4. Rozkład optymalnej wartości funkcji celu modelu z zaburzanymi stopami zwrotu r_1 i r_4 (przy zmiennej bazowej x_1)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Rozkład zaburzanej stopy zwrotu r_1 przy zmiennej bazowej x_1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Występowanie poszczególnych portfeli optymalnych w rozwiązaniach modeli z różną liczbą zaburzanych parametrów

Portfele optymalne	Modele z 1 elementem niepewnym	Modele z 2 elementam i niepewnymi	Modele z 3 elementami	Modele z 4 elementami	Model z 5 elementami
$[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1]$	✓	✓	✓	✓	✓
$[0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0]$	✓	✓	✓	✓	✓
$[0\quad 0\quad 0{,}3125\quad 0{,}6875\quad 0]$	✓	✓	✓	✓	✓
$[0\quad 0\quad 0{,}6765\quad 0\quad 0{,}3235]$	✓	✓	✓	✓	✓
$[0\quad 0{,}1220\quad 0\quad 0{,}8780\quad 0]$	—	✓	✓	✓	✓
$[0\quad 0{,}3898\quad 0\quad 0\quad 0{,}6102]$	✓	✓	✓	✓	✓
$[0{,}3793\quad 0\quad 0{,}6207\quad 0\quad 0]$	✓	✓	✓	✓	✓
$[0{,}6667\quad 0{,}3333\quad 0\quad 0\quad 0]$	—	✓	✓	✓	✓
$[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]$	✓	✓	✓	✓	✓

Źródło: opracowanie własne.

Podczas wykonywania symulacji wybranego modelu w każdej replikacji rozwiązywane było pojedyncze zadanie liniowe z wybranymi losowanymi parametrami. Zmiany współczynników funkcji celu powodują „przeskakiwanie" rozwiązania optymalnego do innego wierzchołka. W rezultacie, po wykonaniu 26 eksperymentów symulacyjnych, otrzymano 9 różnych portfeli optymalnych zawartych w tab. 3.

Wśród wszystkich portfeli znalazł się również wierzchołek będący rozwiązaniem zadania deterministycznego $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}6765 & 0 & 0{,}3235 \end{bmatrix}$. Jedynie podczas rozwiązywania modeli z pojedynczymi zakłóceniami uzyskano maksymalnie 7 rozwiązań optymalnych.

5. Podsumowanie

Zastosowanie symulacji stochastycznej do rozwiązywania liniowych modeli optymalizacyjnych z elementami losowymi daje możliwość analizy otrzymywanych rozwiązań optymalnych i omówienia rozkładów optymalnej wartości funkcji celu. Wykorzystanie stochastycznej optymalizacji może okazać się pożyteczne nie tylko w dziedzinie wyboru optymalnego portfela papierów wartościowych, ale również przy rozwiązywaniu klasycznych problemów z wykorzystaniem programowania liniowego.

Na podstawie wykonanych symulacji dla modeli z różną liczbą elementów zaburzanych mogę stwierdzić, iż średnia charakteryzująca rozkład optymalnej wartości funkcji kryterium wzrasta wraz z liczbą parametrów losowych w zadaniu. Oprócz tego silna asymetria również słabnie, gdy w modelu zakłócano kolejne parametry. Ponadto, gdy zaburzany jest współczynnik przy zmiennej bazowej, bezpośredni wpływ na rozkład optymalnej wartości funkcji celu mają losowane wartości parametru r_i.

Podsumowując, otrzymane wyniki doświadczenia nie wyczerpują możliwości pogłębiania analizy wrażliwości rozwiązania optymalnego na skutek zaburzania parametrów zadania. Kontynuacja prowadzonych badań mogłaby dotyczyć:

– zaburzania innych parametrów zadania liniowego,
– wprowadzania zależnie losowanych zakłóceń,
– uchylenia założenia o normalności zaburzeń parametrów.

Literatura

Gajda J. B., *Prognozowanie i symulacja a decyzje gospodarcze*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2001.

Jankowska I., *Analiza stochastyczna liniowego zadania wyznaczania portfela akcji*, [w:] *Metody i zastosowania badań operacyjnych '07*, Wydawnictwo AE, Katowice (w druku).

Miszczyńska D., Miszczyński M., *Wybrane metody badań operacyjnych*, Wyższa Szkoła Ekonomiczno-Humanistyczna, Skierniewice 1997.

Szapiro T. (red.), *Decyzje menedżerskie z Excelem*, PWE, Warszawa 2000.
Tarczyński W., *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*, PWE, Warszawa 2002.
Trzaskalik T., *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*, PWE, Warszawa 2003.

STOCHASTIC ANALYSIS OF LINEAR OPTIMIZATION PROBLEM'S SOLUTION

Summary: The paper presents an application of stochastic simulation in solving linear programming problems with random parameters. In the experiment the objective function coefficients in the portfolio model were simultaneously disturbed. The aim of this paper is to analyze the influence of the random parameters on the calculated optimal solution.