PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 108
Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych 2010

Janusz Łyko
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

OPTYMALIZACJA PREFERENCJI

Streszczenie: Głównym problemem teorii grupowego wyboru jest przekształcenie indywidualnych opinii wyborców w decyzję grupową. Decyzja grupowa ma oczywiście w najlepszy sposób uwzględnić indywidualne opinie. Okazuje się, że nie ma uniwersalnego kryterium najlepszej reprezentacji indywidualnych sądów. Treścią artykułu są rozważania dotyczące optymalizacji preferencji grupowej w sensie Condorceta. Z jednej strony poszukuje się najbardziej zgodnej preferencji, co prowadzi do braku jednoznaczności rozwiązania, z drugiej – relacji maksymalnej zgodności, która nie zawsze jest preferencją. Można podać warunki, w których te dwie metody prowadzą do jednakowego rozstrzygnięcia.

Słowa kluczowe: modelowanie preferencji, indeks preferencji, optymalizacja preferencji w sensie Condorceta

1. Wstęp

Zagadnienie optymalizacji preferencji związane jest z problematyką grupowego wyboru, a dokładniej z zadaniem znalezienia relacji liniowego porządku, która w ustalonym sensie najlepiej odzwierciedla gusty indywidualne. Oczywiście najczęściej przyjmowanym i intuicyjnie akceptowanym sensem zgodności opinii grupowej z opiniami elektoratu jest większość głosów. Zbiorowy sąd powinien uwzględniać wolę większości.

O tym, że nie istnieje oczywisty sposób rozwiązania tego zadania, świadczy historyczny przykład Condorceta. Rozpatrywał on sytuację, w której trzej wyborcy w sposób liniowy porządkowali trzy alternatywy. Przez alternatywę rozumie się jeden z być może wielu wariantów, o których wyborca czy ankietowany ma wyrazić swoją opinię. Mimo istnienia konkretnych liniowych uporządkowań indywidualnych nie można wskazać preferencji, która mogłaby być uznana za wybór grupowy. Istotnie, gdyż, jeżeli oznaczy się przez

$$M = \{a, b, c\}$$

zbiór alternatyw czy wariantów wyboru, a trzyliterowe słowa

$$p_1 = abc, p_2 = bca, p_3 = cab$$

oznaczają indywidualne, liniowe ich uporządkowania, to w zasadzie każde z nich może zostać uznane za jednakowo dobrą preferencję grupową [Condorcet 1785]. Istotnie, gdyż zgodnie z ideą porównań parami Condorceta każde uporządkowanie p_1, p_2 i p_3 jest zgodne z większością opinii dla dwóch z trzech par. Na przykład uporządkowanie *abc* jest zgodne z opinią większości dla pary *ab* i *bc*, a dwóch z trzech wyborców preferuje *c* nad *a*, czyli przeciwnie niż w uporządkowaniu *abc*. Powstałe możliwe liniowe uporządkowania zbioru *M* nie zapewniają zgodności nawet w takim stopniu, jak trzy wspomniane preferencje p_1, p_2 i p_3.

Późniejsze prace, a szczególnie Arrowa [1951], Maya [1952] i Malkevitcha [1990], wykazały, że zwykła większość, intuicyjnie rozumiana jako najlepsze rozwiązanie, nie może być zastosowana do poszukiwania optymalnej preferencji grupowej. Co więcej, precyzyjnej definicji wymaga także pojęcie większości czy zwykłej większości, gdyż okazuje się, że w zależności od rozumienia tego pojęcia rozwiązania mogą być różne.

2. Indeks preferencji

Jedno z interesujących i bardzo naturalnych rozwiązań problemu wskazania optymalnej preferencji grupowej zostało podane przez Smoluka [Florek, Habiniak, Łyko, Misztal, Smoluk 1999]. Zdefiniowany na potrzeby tej konstrukcji indeks preferencji uwzględnia większość głosów w sensie porównania alternatyw parami, czyli w sensie Condorceta, lecz możliwe jest także jego uogólnienie np. na przypadek preferencji optymalnej w sensie Bordy [Łyko (w druku)]. Aby przedstawić ową konstrukcję, należy na wstępie uściślić prowadzone rozważania.

Podobnie jak poprzednio, przez *M* oznaczany będzie niepusty zbiór alternatyw. O populacji wyborców zakłada się, że jest zbiorem złożonym z *n* elementów. Bez zmniejszania stopnia ogólności można przyjąć, że jest to podzbiór $\{1, ..., n\}$ zbioru liczb naturalnych. Każdy z wyborców swoją opinię o elementach zbioru alternatyw przedstawia w postaci liniowego uporządkowania tego zbioru, czyli relacji przeciwzwrotnej, przechodniej oraz spójnej. Relacje te nazywa się profilami czy preferencjami indywidualnymi i oznacza p_i, $i = 1, ..., n$. Konkretną preferencję przedstawia się natomiast w postaci słowa $m_{i1}m_{i2}\ldots m_{in}$, gdzie pierwszy element jest największy, a ostatni najmniejszy w liniowym uporządkowaniu.

Przez grupowy wybór można rozumieć każdą funkcję

$$f: \boldsymbol{P} \rightarrow O(M),$$

gdzie $\boldsymbol{P}$ jest dowolnym niepustym podzbiorem zbioru $O^n(M)$, a $O(M)$ rodziną wszystkich preferencji w zbiorze *M*. Funkcja ta, zwana funkcją grupowego wyboru, przyporządkowuje więc każdemu układowi preferencji indywidualnych należących do $\boldsymbol{P}$ pewną relację preferencji, którą interpretuje się jako wyraz gustów wyborców czy ankietowanych. Podstawowym problemem jest określenie kryterium i miary zgodności wartości tej funkcji z jej argumentami. Inaczej to ujmując, należy wskazać, w jaki sposób rozumie się zgodność grupowej opinii z gustami elektoratu. Jedną z takich możliwości jest reguła porównań parami Condorceta. Zgodnie z tą regułą, alternatywą lepszą, sklasyfikowaną wyżej w porządku liniowym, jest taka, którą jako lepszą w porównaniu z dowolną inną uważa większość wyborców. Optymalizacja grupowego wyboru będzie polegać wówczas na znalezieniu takiej funkcji, której wartości są w tym sensie najbardziej zgodne z opinią elektoratu. Formalizacją takiego podejścia jest wspomniany wcześniej indeks preferencji.

Dla dowolnych

$$x, y \in M \text{ oraz } P = (p_1, ..., p_n) \in O^n(M)$$

liczbę naturalną

$$I_P(x, y) = \sum_{i=1}^{n} v(xp_i y)$$

nazywa się indeksem pary (x, y) względem układu $P = (p_1, ..., p_n)$, gdzie v oznacza funkcję określoną na klasie zdań, która zdaniom prawdziwym przyporządkowuje liczbę 1, fałszywym zaś zero. Indeks określa, ilu ankietowanych preferuje x nad y. Nie uwzględnia się tutaj relacji z pozostałymi elementami zbioru M. Nie jest ważne, czy x jest bezpośrednio większy od y, czy nie. Tego typu rozróżnienie potrzebne jest natomiast w przypadku optymalizacji grupowej preferencji w sensie Bordy. Punktowa metoda Bordy rozróżnia bowiem nie tylko to, czy alternatywa uważana jest za lepszą czy gorszą, ale także to, które miejsce zajmuje w liniowym uporządkowaniu.

Ustalając dowolną preferencję $p \in O(M)$, symbolem

$$\mathrm{ind}_P(p) = \sum_{(x,y)\in p} I_P(x, y)$$

będzie oznaczany jej indeks względem wspomnianego wcześniej układu [Florek, Habiniak, Łyko, Misztal, Smoluk 1999]. Jeśli układ preferencji P jest jednoznacznie ustalony, oznaczenia indeksu pary i preferencji względem tego układu będą upraszczane i zapisywane w formie $I(x, y)$ oraz $\mathrm{ind}(p)$. Indeks preferencji jest miarą jej zgodności z upodobaniami indywidualnymi $(p_1, \ldots, p_n)$. Im indeks jest większy, tym lepiej miara odzwierciedla – w sensie porównań parami Condorceta – poszczególne, jednostkowe gusty elektoratu. W związku z tym optymalizacja grupowego wyboru w tym wypadku będzie polegać na poszukiwaniu preferencji o maksymalnym indeksie.

Przy ustalonym układzie preferencji indywidualnych $P = (p_1, \ldots, p_n)$ funkcja

$$\mathrm{ind}_P : O(M) \to N$$

odwzorowuje zbiór $O(M)$ w zbiór liczb naturalnych N. Istnieje wobec tego taka preferencja, dla której ta funkcja osiąga wartość maksymalną. Można ją w takim razie nazwać optymalną w sensie Condorceta.

3. Relacja maksymalnej zgodności

Opisana konstrukcja nie pozwala niestety na zdefiniowanie funkcji grupowego wyboru. Okazuje się, że dla zadanego układu $P = (p_1, \ldots, p_n)$ optymalnych preferencji może być wiele, a zatem wartością funkcji nie byłby element zbioru $O(M)$, lecz jego podzbiór. Poszukiwanie preferencji o maksymalnym indeksie prowadzi wobec tego do braku jednoznaczności rozwiązania. W związku z tym podstawowe jest pytanie o określenie warunków, w których rozwiązanie jest jedyne, czyli optymalna preferencja jest wyznaczona jednoznacznie.

Przykład. Niejednoznaczność można zauważyć, rozpatrując zbiór preferencji $P = \{p_1, p_2, p_3\}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_p(abc) &= 5,\\
\mathrm{ind}_p(acb) &= 4,\\
\mathrm{ind}_p(bac) &= 4,\\
\mathrm{ind}_p(bca) &= 5,\\
\mathrm{ind}_p(cab) &= 5,\\
\mathrm{ind}_p(cba) &= 4,
\end{aligned}$$

i widać, że wartość maksymalna funkcji ind_p jest przyjmowana trzykrotnie.

Rozwiązań optymalnych w sensie Condorceta można także poszukiwać inaczej. Pojęcie indeksu preferencji można uogólnić na przypadek dowolnej relacji przeciwzwrotnej, spójnej i mocno antysymetrycznej R, gdzie przez mocną antysymetrię rozumie się, że dla dowolnych dwóch elementów $x, y \in M$, jeżeli $(x, y) \in R$, to nieprawdą jest, iż $(y, x) \in R$ [Łyko 2004].

Niech $R \subset M^2$ będzie dowolną relacją mającą wspomniane własności. Wówczas symbolem

$$\mathrm{ind}_P(R) = \sum_{(x,y)\in R} I_P(x, y)$$

będzie oznaczany indeks relacji R względem układu preferencji $P = (p_1, ..., p_n)$.

Przy ustalonym $P = (p_1, ..., p_n)$ funkcja

$$\mathrm{ind}_P : S(M) \to N$$

przekształca zbiór $S(M)$ wszystkich relacji przeciwzwrotnych, spójnych i mocno antysymetrycznych w zbiorze M w zbiór liczb naturalnych N. W związku z tym, podobnie jak poprzednio, zawsze istnieje taka relacja S_P – być może więcej niż jedna – dla której funkcja ta przyjmuje wartość maksymalną. Relacje te będą nazywane relacjami maksymalnej zgodności. Łatwo zauważyć, że jeśli $(x, y) \in S_P$, to $I_P(x, y) \geq \frac{n}{2}$ i ponadto, jeżeli dla ustalonego $P \in O^n(M)$ i każdych $x, y \in M, x \neq y$

$$I_P(x, y) > \frac{1}{2}n \text{ lub } I_P(y, x) > \frac{1}{2}n,$$

to relacja S_p jest wyznaczona jednoznacznie. W związku z tym problem jednoznaczności jest tutaj marginalny, natomiast główne jest pytanie o to, kiedy relacja S_p jest preferencją.

Przykład. Dla zbioru preferencji $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ wartość maksymalna funkcji ind_p wynosi 6 i przyjmowana jest dla relacji $S_p = \{(a, b); (b, c); (c, a)\}$.

4. Liniowe uporządkowanie relacji maksymalnej zgodności

Można wobec tego mówić o dwóch nurtach poszukiwań preferencji optymalnej w sensie Condorceta. Optymalność jest wyrażona przez maksymalizację indeksu. Im indeks jest większy, tym opinia zbiorowa bardziej odzwierciedla gusty elektoratu. Problem polega na tym, że jeżeli założyć, iż poszukuje się maksymalizującej indeks preferencji, to rozwiązanie nie jest jednoznaczne, a maksymalnie zgodna relacja nie musi być preferencją. Okazuje się, że na naturalne pytanie o połączenie tych dwóch nurtów można udzielić dwojakiej odpowiedzi. W każdym z przypadków otrzymuje się wspólne rozwiązanie kosztem dodatkowych założeń związanych w pewnym sensie z koncentracją poglądów elektoratu.

Twierdzenie. *Jeżeli dla ustalonego* $P \in O^n(M)$ *i każdych* $x, y \in M$, $x \neq y$

$$I_P(x, y) > \frac{2}{3}n \text{ lub } I_P(y, x) > \frac{2}{3}n,$$

to relacja S_P *jest preferencją* [Łyko 2000].

Twierdzenie to określa minimalną zgodność elektoratu w ocenie każdej pary alternatyw, potrzebną do tego, aby relacja maksymalnej zgodności była preferencją. Przy takich założeniach możliwa jest konstrukcja funkcji grupowego wyboru na podstawie zasady maksymalizacji indeksu. Osłabiony zostaje zatem tutaj postulat nieograniczonej dziedziny – założenie, które było poczynione przez Arrowa w jego znanym twierdzeniu.

Przechodniość relacji maksymalnej zgodności można osiągnąć także za pomocą innego założenia, które także w pewnym sensie wymaga zgodności poglądów elektoratu. Zgodność ta zostaje wyrażona za pomocą warunku istnienia alternatywy wygrywającej w sensie Condorceta. Innymi słowy, wymaga się istnienia alternatywy określanej jako lepsza w porównaniu parami z każdą inną. Rozważania zaprezentowane w pracy [Łyko 2007] jako prosty wniosek dają

Twierdzenie. *Jeżeli dla każdego podzbioru zbioru alternatyw istnieje zwycięzca Condorceta, to relacja S_P jest preferencją.*

5. Podsumowanie

Optymalizacja preferencji rozumiana jest w pracy jako zagadnienie istnienia liniowego uporządkowania alternatyw, które najlepiej w sensie Condorceta odzwierciedla gusty elektoratu. Można to zapewnić dzięki liniowemu uporządkowaniu relacji maksymalnej zgodności. W ogólnym przypadku nie jest to możliwe. Przedstawione twierdzenia wskazują, jak można osiągnąć ten cel dzięki dodatkowym założeniom. W pierwszym z nich dzieje się to kosztem ograniczenia dziedziny, w drugim natomiast przez wprowadzenie silnego postulatu o istnieniu zwycięzcy Condorceta w każdym podzbiorze alternatyw.

Literatura

Arrow K.J., *Social Choice and Individual Values*, John Wiley, New York 1951.

de Condorcet M., *Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilite des Decisions Rendues a la Pluralitedes* Voix, Paris 1785.

Florek J., Habiniak L., Łyko J., Misztal A., Smoluk A., *Problem grupowego wyboru a środek ciężkości*, „Ekonomia Matematyczna" nr 3, AE, Wrocław 1999, s. 41-48.

Łyko J., *Twierdzenie Arrowa a ordynacje wyborcze*, [w:] *Elementy metrologii ekonomicznej*, red. A. Smoluk, Wydawnictwo AE, Wrocław 2000, s. 165-168.

Łyko J., *O większościowych zasadach wyborczych*, [w:] *Postępy ekonometrii*, red. A. Barczak, Wydawnictwo AE, Katowice 2004.

Łyko J., *Relacja maksymalnej zgodności a zwycięzca Condorceta*, „Mathematical Economics" vol. 4 nr 11, AE, Wrocław 2007, s. 37-42.

Łyko J., *Optymalna preferencja Bordy*, Wydawnictwo WSB, Wrocław (w druku).

Malkevitch J., *Mathematical Theory of Elections*, Annals of the New York Academy of Sciences 16, New York 1990, s. 89-97.

May K.O., *A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision*, „Econometrica" 1952 vol. 20, s. 680-684.

OPTIMALISATION OF PREFERENCES

Summary: The main problem of the theory of group preference is the transfer of individual voters' decision into a group decision. The group decision has in the best possible way to mirror the individual decisions. It shows that there is nothing like a universal criterion to represent individual opinions. This article debates on optimization of group preferences in Condorcet's sense. On one hand, it seeks the most complacent preference which leads to the lack of explicit solution, on the other – relation of maximum consensus which is not always a preference. Though, we may provide conditions where these two methods lead to identical resolution.