PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 108
Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych 2010

Ewa Michalska
Akademia Ekonomiczna w Katowicach

DOMINACJE STOCHASTYCZNE A TEORIA PERSPEKTYW

Streszczenie: Najczęściej z dominacjami stochastycznymi mamy do czynienia w kontekście teorii użyteczności, której aksjomatyka formułuje zasady racjonalności. Jednak rzeczywiste wybory decydentów nie zawsze są zgodne z zasadami racjonalności. W zaproponowanej przez Kahnemana i Tversky'ego teorii perspektyw stwierdza się, że decydenci oceniają warianty decyzyjne w zależności od ich aktualnego stanu posiadania i od tego, czy decyzja przyniesie zysk, czy stratę. W ostatnich latach wraz z silnym rozwojem koncepcji Kahnemana i Tversky'ego pojawiło się w piśmiennictwie szereg publikacji, w których bada się różne aspekty teorii perspektyw, m.in. związki z dominacjami stochastycznymi. Celem pracy jest przedstawienie własności dominacji stochastycznych w powiązaniu z kumulacyjną teorią perspektyw.

Słowa kluczowe: teoria perspektyw, dominacje stochastyczne, decyzje w warunkach niepewności i ryzyka

1. Wstęp

Z dominacjami stochastycznymi mamy najczęściej do czynienia w kontekście teorii użyteczności, której aksjomatyka formułuje zasady racjonalności. Jednak rzeczywiste wybory decydentów nie zawsze są zgodne z zasadami racjonalności. W zaproponowanej przez Kahnemana i Tversky'ego teorii perspektyw stwierdza się, że decydenci oceniają warianty decyzyjne w zależności od ich aktualnego stanu posiadania i od tego, czy decyzja przyniesie zysk, czy stratę. W sytuacji, gdy decyzja ma przynieść zysk, decydenci mają awersję do ryzyka, natomiast gdy decyzja ma przynieść stratę, wykazują skłonność do ryzyka.

W ostatnich latach wraz z silnym rozwojem koncepcji Kahnemana i Tversky'ego pojawiło się w piśmiennictwie szereg publikacji, w których bada się różne aspekty teorii perspektyw, m.in. związki z dominacjami stochastycznymi. Celem pracy jest badanie zgodności decyzji podjętych na gruncie teorii perspektyw z zasadami dominacji stochastycznej.

2. Teoria perspektyw

Powszechnie akceptowanym modelem podejmowania decyzji w warunkach ryzyka jest zaproponowana przez von Neumanna i Morgensterna teoria użyteczności oczekiwanej (EU). Jest to podejście normatywne, wskazujące, w jaki sposób decydent powinien podejmować decyzje, aby jego wybory można było uznać za racjonalne. Zgodnie z teorią oczekiwanej użyteczności racjonalny decydent wybiera alternatywę przynoszącą mu największą korzyść.

Rozważając dowolny wariant decyzyjny na gruncie teorii decyzji, zwykle stosuje się zapis postaci

$$(w_1, p_1; w_2, p_2; ..., w_n, p_n), \tag{1}$$

gdzie $w_1, w_2, ..., w_n$ oznaczają kolejne możliwe wyniki (mierzone w jednostkach monetarnych), osiągane z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, ..., p_n$, przy czym $p_1 + p_2, + ... + p_n = 1$. W tradycyjnym podejściu zakłada się, że prawdopodobieństwa $p_1, p_2, ..., p_n$ pojmowane są zgodnie z ich matematycznie wyznaczonym poziomem, każdej wartości w_i przypisuje się odpowiednią użyteczność, a racjonalny wybór powinien być determinowany maksymalizacją oczekiwanej użyteczności

$$EU = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot U(w_i) \tag{2}$$

gdzie: EU – oczekiwana użyteczność,
$U(w_i)$ – użyteczność i-tego wyniku.

W zaproponowanej przez Kahnemana i Tversky'ego teorii perspektyw (PT) podobnie jak w jej rozszerzeniu zwanym kumulacyjną teorią perspektyw (CPT), możliwe wyniki pojmuje się w kategoriach zysków oraz strat w stosunku do pewnego punktu odniesienia, tzw. punktu referencyjnego, interpretowanego często jako poziom bieżącego bogactwa decydenta. Dlatego też dowolny wariant decyzyjny przedstawia się w postaci

$$(x_{-m}, p_{-m}; ...; x_{-1}, p_{-1}; x_0, p_0; x_1, p_1; ..., x_n, p_n) \tag{3}$$

gdzie $(x_{-m}, ..., x_{-1}, x_0,; x_1, ..., x_n)$ to uporządkowany rosnąco ciąg relatywnych wyników (m oznacza liczbę wyników ujemnych, n oznacza liczbę wyników dodatnich) przy czym wartość $x_0 = 0$ odpowiada punktowi referencyjnemu [Kahneman, Tversky 1979, s. 263-291; Tversky, Kahneman 1992, s. 297-323].

Przeprowadzone przez Kahnemana i Tversky'ego liczne eksperymenty dotyczące sytuacji decyzyjnych potwierdzają, że decydenci nie odczuwają w ten sam sposób zysków i strat. Jeśli możliwe wyniki są zyskami, to decydenci wykazują awersję do ryzyka, natomiast straty stanowią bodziec do zachowań ryzykownych. Wyrazem takich zachowań w teorii perspektyw jest tzw. funkcja wartości (*value* *function*). Funkcja wartości $v(x)$ jest modyfikacją tradycyjnej funkcji użyteczności w następujących aspektach:

– argumentami funkcji wartości są zyski i straty, a nie absolutny poziom bogactwa,
– funkcja wartości jest wklęsła w dziedzinie zysków i wypukła w dziedzinie strat, ponadto jest bardziej stroma dla strat niż dla zysków.

W literaturze można znaleźć kilka różnych propozycji co do postaci funkcji wartości, autorzy pracy [Tversky, Kahneman 1992, s. 297-323] proponują następującą postać tej funkcji:

$$v(x) = \begin{cases} -\lambda(-x)^{\beta} & x < 0 \\ x^{\alpha} & x \geq 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Wartość parametru λ oszacowano na poziomie 2,25, wartości zaś parametrów α i β stanowiących wykładniki funkcji wartości odpowiednio dla zysków i dla strat ustalono na jednakowym poziomie równym 0,88. Z kolei w pracy [Dudzińska--Baryła, Kopańska-Bródka 2008, s. 45-61] autorki zaproponowały funkcję wartości postaci:

$$v(x) = \begin{cases} 2,25x^2 + 4,5x & x < 0 \\ -x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Przeprowadzone przez Kahnemana i Tversky'ego badania dowiodły również, iż postrzeganie przez decydenta prawdopodobieństw osiągnięcia zysków i strat ulega zniekształceniu. Teoria perspektyw daje temu wyraz, uwzględniając nieliniową transformację prawdopodobieństw w postaci funkcji wag prawdopodobieństwa (*probability weighting function*). Zakłada się, że funkcja wag $\pi(p)$ jest funkcją rosnącą, przeszacowuje niskie prawdopodobieństwa, natomiast oceny prawdopodobieństw średnich i wysokich są zaniżane. Ponadto $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = 1$ oraz dla wszystkich $p \in (0,1)$ zachodzi $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$. Funkcją spełniającą powyższe postulaty jest zaproponowana przez Kahnemana i Tversky'ego w pracy [Tversky, Kahneman 1992, s. 297-323] funkcja postaci:

$$\pi(p) = \frac{p^{\gamma}}{\left(p^{\gamma} + (1-p)^{\gamma}\right)^{1/\gamma}} \tag{6}$$

Wartość parametru γ została oszacowana na poziomie 0,69, gdy rozważane prawdopodobieństwa dotyczą wyników rozumianych jako straty, i na poziomie 0,61, gdy prawdopodobieństwa dotyczą zysków.

Funkcję wartości i funkcję wag prawdopodobieństwa wykorzystuje się w ocenie wariantów decyzyjnych. Zgodnie z kumulacyjną teorią perspektyw wartość wariantu decyzyjnego jest sumą oceny wartości zysków i oceny wartości strat [Tversky, Kahneman 1992, s. 297-323]:

$$CPT(\mathbf{x},\mathbf{p}) = CPT^{+}(\mathbf{x},\mathbf{p}) + CPT^{-}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \tag{7}$$

Składniki $CPT^{+}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ oraz $CPT^{-}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ wyznacza się na podstawie następujących zależności:

$$CPT^{+}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = v(x_n)\pi(p_n) + \sum_{k=1}^{n} v(x_{n-k})\left[\pi\left(\sum_{j=0}^{k} p_{n-j}\right) - \pi\left(\sum_{j=0}^{k-1} p_{n-j}\right)\right] \tag{8}$$

oraz

$$CPT^{-}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = v(x_{-m})\pi(p_{-m}) + \sum_{k=1}^{m} v(x_{-m+k})\left[\pi\left(\sum_{j=0}^{k} p_{-m+j}\right) - \pi\left(\sum_{j=0}^{k-1} p_{-m+j}\right)\right] \tag{9}$$

Dominacja w sensie CPT wariantu decyzyjnego A nad B będzie oznaczać, że wartość CPT jest większa dla A niż dla B.

Przykład 1

Rozważmy siedem różnych wariantów decyzyjnych A-G, odpowiadające im wartości wypłat przy założonym rozkładzie równomiernym zestawiono w tab. 1.

Tabela 1. Wartości CPT dla różnych wariantów decyzyjnych

	Warianty decyzyjne						
	A	B	C	D	E	F	G
Wartości wypłat	–0,4	–0,4	–0,3	–0,4	–0,4	–0,4	–0,3
	–0,3	–0,2	–0,2	–0,1	–0,3	–0,2	–0,2
	0	–0,1	–0,1	0,1	–0,1	0,1	–0,1
	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,2	0,1
	0,4	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	0,5
CPT=	–0,3370	–0,3456	–0,1925	–0,2356	–0,3438	–0,2532	–0,2417

Źródło: opracowanie własne.

Tabela ta zawiera także wartości CPT obliczone na podstawie wzoru (7), dla funkcji wartości postaci (5) i funkcji wag prawdopodobieństw postaci (6).

Wyznaczone wartości CPT posłużyły do ustalenia dominacji w sensie CPT pomiędzy poszczególnymi wariantami decyzyjnymi (tab. 2).

Wyniki w tab. 2 odczytuje się następująco: „CPT” oznacza, że wariant decyzyjny z lewej strony tabeli dominuje wariant decyzyjny zapisany u góry tabeli w sensie CPT, „-” zaś oznacza brak dominacji.

Tabela 2. Dominacje w sensie CPT

Wariant decyzyjny	A	B	C	D	E	F	G
A		CPT	-	-	CPT	-	-
B	-		-	-	-	-	-
C	CPT	CPT		CPT	CPT	CPT	CPT
D	CPT	CPT	-		CPT	CPT	CPT
E	-	CPT	-	-		-	-
F	CPT	CPT	-	-	CPT		-
G	CPT	CPT	-	-	CPT	CPT	

Źródło: opracowanie własne.

3. Dominacje stochastyczne

Niech A oraz B będą dwoma różnymi wariantami decyzyjnymi (perspektywami) o dystrybuantach odpowiednio F i G. Porównywanie wariantów decyzyjnych w warunkach ryzyka odbywa się zwykle przy użyciu metod wykorzystujących momenty rozkładu bądź metod opartych na znajomości funkcji użyteczności. Przykładem takiego podejścia jest kryterium MV, w którym zakłada się, że wariant decyzyjny A z dystrybuantą F jest preferowany bardziej niż wariant decyzyjny B z dystrybuantą G, jeśli wartość oczekiwana wypłat dla wariantu A przekracza wartość oczekiwaną wypłat dla wariantu B, ponadto wariancja rozkładu wariantu decyzyjnego A jest nie większa niż wariancja rozkładu wariantu decyzyjnego B. Kryterium MV pozwala na podjęcie decyzji przy uwzględnieniu następujących założeń: decydent ma kwadratową funkcję użyteczności, charakteryzuje go awersja do ryzyka, a wartości wypłat są realizowane zgodnie z rozkładem normalnym [Trzpiot 2006].

W kryterium dominacji stochastycznej, zamiast posługiwać się wartościami momentów, posługujemy się wszystkimi wartościami rozkładu wariantu decyzyjnego. Według tego kryterium lepszym wariantem decyzyjnym jest ten, który charakteryzuje się rozkładem z wyższymi prawdopodobieństwami dla wyższych wartości wypłat. Jednocześnie podejście dominacji stochastycznej jest modelem wyboru wariantu decyzyjnego, równoważnym podejściu, w którym maksymalizuje się oczekiwaną użyteczność dla odpowiedniej klasy funkcji użyteczności. Rozważmy następujące klasy funkcji [Levy, Levy 2002, s. 1334-1349]:

$\mathbf{U_1}$ – klasa wszystkich niemalejących funkcji użyteczności U, tzn. $U \in \mathbf{U_1}$, jeśli $U' \geq 0$;

$\mathbf{U_2}$ – klasa wszystkich niemalejących, wklęsłych funkcji użyteczności U, tzn. $U \in \mathbf{U_2}$, jeśli $U' \geq 0$ oraz $U'' \leq 0$;

$\mathbf{V_{KT}}$ – klasa wszystkich funkcji wartości (lub użyteczności) typu „S” z punktem przegięcia $x = 0$, takich, że $v \in \mathbf{V_{KT}}$, jeśli $v' \geq 0$ dla wszystkich $x \neq 0$, $v'' \geq 0$ dla $x < 0$ oraz $v'' \leq 0$ dla $x > 0$.

Z klasą funkcji $\mathbf{U_1}$ związany jest najbardziej ogólny typ dominacji stochastycznej, dominacja stochastyczna pierwszego stopnia **FSD** (*first stochastic dominance*). Powiemy, że wariant decyzyjny A dominuje B (A *FSD* B) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F(x) \leq G(x) \text{ dla każdego } x \tag{9}$$

oraz przynajmniej dla jednej wartości *x* zachodzi $F(x) < G(x)$.

Dominacja stopnia drugiego **SSD** (*second stochastic dominance*) odpowiada węższej klasie funkcji użyteczności $\mathbf{U_2}$.

Powiemy, że A dominuje B (A *SSD* B) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_{-\infty}^{x} [G(t) - F(t)]dt \geq 0 \text{ dla każdego } x \tag{10}$$

oraz przynajmniej dla jednego *x* zachodzi ścisła nierówność.

Z kolei zbiór funkcji $\mathbf{V_{KT}}$ będący podzbiorem zbioru $\mathbf{U_1}$ ma związek z dominacjami stochastycznymi perspektyw **PSD** (*prospect stochastic dominance*).

Powiemy, że A dominuje B (A *PSD* B) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_{y}^{0} [G(t) - F(t)]dt \geq 0 \text{ dla każdego } y \leq 0$$

oraz

$$\int_{0}^{x} [G(t) - F(t)]dt \geq 0 \text{ dla każdego } x \geq 0$$

i przynajmniej dla jednej pary (x, y) zachodzi ścisła nierówność [Baucells, Heukamp 2006, s. 1409-1423].

Przykład 2

Dla danych z wcześniejszego przykładu zostały wyznaczone: dominacje pierwszego stopnia FSD, dominacje drugiego stopnia SSD oraz dominacje w sensie perspektyw PSD. Otrzymane wyniki zestawiono w tab. 3-5, symbole FSD, SSD, PSD oznaczają, że wariant decyzyjny z lewej strony tabeli dominuje wariant decyzyjny zapisany u góry w rozważanym sensie, „-” oznacza brak dominacji.

Tabela 3. Dominacje stopnia pierwszego FSD

Wariant decyzyjny	A	B	C	D	E	F	G
A		-	-	-	-	-	-
B	-		-	-	-	-	-
C	-	FSD		-	FSD	-	FSD
D	-	-	-		-	-	-
E	-	-	-	-		-	-
F	FSD	FSD	-	-	-		-
G	-	FSD	-	-	-	-	

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Dominacje drugiego stopnia SSD

Wariant decyzyjny	A	B	C	D	E	F	G
A		-	-	-	-	-	-
B	SSD		-	-	-	-	-
C	SSD	SSD		-	SSD	-	SSD
D	SSD	SSD	-		SSD	SSD	-
E	-	-	-	-		-	-
F	SSD	SSD	-	-	SSD		-
G	SSD	SSD	-	-	SSD	-	

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Dominacje w sensie perspektyw PSD

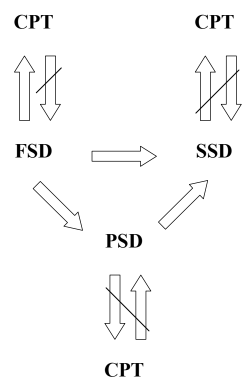
Wariant decyzyjny	A	B	C	D	E	F	G
A		-	-	-	-	-	-
B	PSD		-	-	-	-	-
C	PSD	PSD		-	PSD	-	PSD
D	PSD	PSD	-		-	-	-
E	-	-	-	-		-	-
F	PSD	PSD	-	-	PSD		-
G	PSD	PSD	-	-	-	-	

Źródło: opracowanie własne.

Dla powyższego przykładu można wysunąć następujące wnioski:
- jeśli zachodzi dominacja pierwszego stopnia FSD, to zachodzi dominacja stopnia drugiego SSD i dominacja w sensie perspektyw PSD;
- jeśli zachodzi dominacja w sensie perspektyw PSD, to zachodzi również dominacja drugiego stopnia SSD;
- brak zależności pomiędzy dominacjami SSD i PSD a dominacją w sensie CPT (wariant decyzyjny A ma wyższą wartość CPT niż wariant decyzyjny B (por. tab. 2), jednak B dominuje A w sensie SSD oraz PSD (por. tab. 4, 5).
- dominacja stochastyczna pierwszego stopnia FSD implikuje dominacje w sensie CPT, implikacja odwrotna nie zachodzi.

Zaobserwowane zależności ilustruje rys. 1.

Wnioski dotyczące zależności między dominacjami FSD, SSD oraz PSD znajdują także potwierdzenie w literaturze [Levy, Wiener 2002; Trzpiot 2006]. Na podstawie analizowanego przykładu wykazano również brak zgodności dla decyzji podejmowanych na gruncie CPT z wyborami dokonywanymi zgodnie z zasadami dominacji stochastycznych drugiego stopnia



Rys. 1. Zależności pomiędzy dominacjami FSD, SSD, PSD oraz CPT

Źródło: opracowanie własne.

oraz w sensie perspektyw (SSD i PSD). W przypadku badanej zależności między wyborami opartymi na wartościach CPT a wyborami dokonywanymi zgodnie z dominacją pierwszego stopnia FSD, prawdziwość implikacji FSD⇒CPT została potwierdzona w pracy [Levy, Wiener 2002], natomiast implikacja odwrotna nie zachodzi.

4. Podsumowanie

Teoria perspektyw stanowi rozszerzenie i modyfikację tradycyjnego (normatywnego) sposobu myślenia o dokonywaniu wyborów, właściwego teorii użyteczności. Celem przyświecającym jej twórcom było stworzenie deskryptywnej teorii podejmowania decyzji opisującej faktyczne mechanizmy rządzące ludzkimi wyborami. Jak pokazano w pracy, wybory dokonywane na podstawie wartości CPT najczęściej nie są zgodne z wyborami opartymi na zasadach dominacji stochastycznych. Kumulacyjna teoria perspektyw zachowuje jedynie wybory zgodne z zasadami dominacji stochastycznej pierwszego stopnia.

Literatura

Baucells M., Heukamp F., *Stochastic dominance and cumulative prospect theory*, „Management Science" 2006 vol. 52.

Dudzińska-Baryła R., Kopańska-Bródka D., *Analiza granicy efektywnej na gruncie teorii perspektyw*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko '07*, red. T. Trzaskalik, Wydawnictwo AE, Katowice 2008.

Kahneman D., Tversky A., *Prospect theory: An analysis of decision under risk*, „Econometrica" 1979 vol. 47.

Levy H., Wiener Z., *Prospect theory and utility theory: temporary versus permanent attitude towards risk*, 2002, http://pluto.mscc.huji.ac.il/~mswiener/research/PTandUT.pdf.

Levy M., Levy H., *Prospect theory: Much ado about nothing?*, „Management Science" 2002 vol. 48.

Trzpiot G., *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*. Wydawnictwo AE, Katowice 2006.

Tversky A., Kahneman K., *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty" 1992 vol. 5.

STOCHASTIC DOMINANCE AND PROSPECT THEORY

Summary: In the last years, prospect theory has become more popular. The researchers investigate different matters connected with prospect theory. Among other things they are interested in relationships between stochastic dominance and prospect theory. The purpose of this article is to analyze consistency of decisions made according to this theory with the decisions made according to the stochastic dominance principles.