PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 108
Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych 2010

Olena Sobotka
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ZASTOSOWANIE RELACJI DOMINACJI STOCHASTYCZNEJ W WARUNKACH NIEPEŁNEJ I DODATKOWEJ INFORMACJI

Streszczenie: Charakterystycznym wyróżnikiem problemów podejmowania decyzji w warunkach ryzyka jest to, że wybór najlepszej z nich opiera się na znajomości rozkładu prawdopodobieństwa wyników decyzji. W referacie przedstawiono metodę wyznaczania decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu, uwzględniającą niepełność wykorzystanej informacji. Metoda jest rozwinięciem podejścia do generowania decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej, wykorzystującego metodologię wielokryterialną, zaproponowanego przez W. Ogryczaka. Uwzględnienie niepełności informacji opiera się na określeniu granic stochastycznych sumy zależnych zmiennych losowych. Uwzględnienie dodatkowej informacji w postaci rozkładu prawdopodobieństwa zewnętrznej zmiennej losowej opiera się na wykorzystaniu modelu regresji kwantylowej.

Słowa kluczowe: dominacje stochastyczne, decyzje w warunkach niepewności i ryzyka, metody wielokryterialne, regresja kwantylowa

1. Wstęp

Sytuacje decyzyjne, charakteryzujące się brakiem pewności co do wyników decyzji, pojawiają się we wszystkich dziedzinach współczesnego zarządzania. W analizie tego rodzaju sytuacji rozróżnia się pojęcia ryzyka i niepewności. Ryzyko odnosi się do sytuacji, w których decydent może opisać niepewność, z którą ma do czynienia, za pomocą jednoznacznie określonych rozkładów prawdopodobieństwa.

Rozkłady prawdopodobieństwa wyników decyzji są wyznaczane na podstawie informacji o parametrach zewnętrznych, mających wpływ na wynik decyzji. W zależności od kompletności informacji wykorzystanej do oceny rozkładów prawdopodobieństwa wyników decyzji, problemy decyzyjne w warunkach ryzyka można podzielić na trzy grupy: 1) problemy podejmowania decyzji w warunkach pełnej informacji; 2) problemy podejmowania decyzji w warunkach niepełnej informacji; 3) problemy podejmowania decyzji w warunkach dodatkowej informacji.

W problemach decyzyjnych w warunkach pełnej informacji zakłada się, że rozkład prawdopodobieństwa wyników decyzji jest w pełni opisany za pomocą dostępnej informacji i nie ma innych czynników zewnętrznych, które mogą spowodować zmianę rozkładu prawdopodobieństwa wyników decyzji.

Problem podejmowania decyzji w warunkach niepełnej informacji odpowiada sytuacji, w której wyniki decyzji są zmiennymi losowymi, których rozkłady prawdopodobieństwa zależą od realizacji stanu otoczenia, istnieje więcej niż jeden stan otoczenia, natomiast rozkład prawdopodobieństwa stanów otoczenia jest nieokreślony.

W problemach decyzyjnych w warunkach dodatkowej informacji też uwzględnia się kilka stanów otoczenia i możliwe zmiany rozkładów prawdopodobieństwa wyników decyzji w zależności od realizacji stanów otoczenia. Dodatkowa informacja pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwa wystąpienia stanów otoczenia oraz rozkłady prawdopodobieństwa wyników decyzji w poszczególnych stanach otoczenia.

Wykorzystanie dodatkowej informacji w problemach decyzyjnych z ograniczonym i przeliczalnym zbiorem wyników decyzji często uwzględnia się przy rozwiązaniu problemów za pomocą metody drzewa decyzyjnego (por. [Sadowski 1981; Heilpern 2001]). W rozpatrywaniu problemów, w których wyniki decyzji są modelowane w postaci zmiennych losowych o ciągłym rozkładzie prawdopodobieństwa, wykorzystuje się obserwacje pomocniczej zmiennej losowej, które dostarczają dodatkowej informacji o zbiorze stanów otoczenia i rozkładach prawdopodobieństwa wyników decyzji w tych stanach otoczenia.

Problemy podejmowania decyzji w warunkach niepełnej i w warunkach dodatkowej informacji, pomimo wykorzystania zmiennych losowych do opisania niepewnych wyników decyzji, wykraczają poza kategorię problemów wyboru decyzji w warunkach ryzyka. L. Savage pokazał (por. [Rybicki 2005]), że reprezentację relacji słabego porządku na zbiorze wyników decyzji w postaci funkcji oczekiwanej użyteczności można wykorzystać także w takiej szerszej klasie problemów decyzyjnych.

Ponieważ relacje dominacji stochastycznej są ściśle związane z przedstawieniem preferencji w postaci funkcji oczekiwanej użyteczności [Levy 2006], można rozważać wyznaczenie decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej w problemach podejmowania decyzji w warunkach niepełnej i dodatkowej informacji. W podobnych problemach pojawia się jednak niepewność, dlatego w procesie wyboru decyzji należy wykorzystywać też podejścia stosowane w warunkach niepewności.

Wśród kryteriów wyboru decyzji w warunkach niepewności są kryteria uwzględniające stosunek decydenta do ryzyka. Ujęcie stosunku do ryzyka w tych metodach jest bliższe modelu wyboru decyzji w warunkach ryzyka Yaariego, w którym można wyrazić pesymistyczne postrzeganie szans przez decydenta. Relacja dominacji stochastycznej drugiego rzędu odpowiada pesymistycznemu postrzeganiu szans przez decydenta, dlatego w procesie wyznaczania decyzji efektywnych w sensie takiej relacji powinno się stosować kryterium pesymistyczne, jeśli w problemie są elementy niepewne.

W referacie przedstawiono podejście do uwzględnienia dodatkowej informacji przy wyznaczaniu decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu za pomocą metody opartej na wykorzystaniu metod optymalizacji wielokryterialnej, zaproponowanej przez W. Ogryczaka [2002]. Podejście jest oparte na idei wykorzystania gorszych (w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu) granic stochastycznych sumy zmiennych losowych w sytuacji, kiedy pełna ocena rozkładu prawdopodobieństwa sumy jest niemożliwa [Dhaene *et al.* 2002].

2. Koncepcja dominacji stochastycznej i jej zastosowanie do wspomagania wyboru decyzji w warunkach ryzyka

Rozważmy liniowy problem wyboru decyzji w warunkach ryzyka:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \xrightarrow[\mathbf{x}\in\mathbf{D}]{} opt \tag{1}$$

gdzie: $\mathbf{x}$ – wektor zmiennych decyzyjnych;
$\boldsymbol{\omega}$ – wektor parametrów losowych;
$\mathbf{D}$ – zbiór decyzji dopuszczalnych.

Wynik decyzji w rozważanym problemie jest liniową kombinacją losowych parametrów i zależy nie tylko od rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych parametrów, ale i od relacji pomiędzy rozkładami prawdopodobieństwa tych parametrów.

W takich problemach rozkłady prawdopodobieństwa wyników decyzji zwykle opisuje się za pomocą funkcji dystrybuant: $F_Y(t) = \Pr\{Y \le t\}, t \in R$.

Racjonalne wybory w warunkach ryzyka opisują modele preferencji w postaci funkcji równoważnika pewności (*certainty equivalent*) (funkcji użyteczności, funkcji percepcji prawdopodobieństwa). Wspomaganie podejmowania decyzji zgodnie z modelem racjonalnych wyborów polega na wskazaniu wariantu decyzyjnego, optymalizującego odpowiednią funkcję preferencji.

Decydenci mają skłonność do unikania ryzyka, gdy problem jest przedstawiony w kategoriach zysków. Do porównania wariantów decyzyjnych w warunkach ryzyka, w celu poszukiwania rozwiązania, można wykorzystać koncepcję dominacji stochastycznej. Wykorzystanie koncepcji dominacji stochastycznej polega na wyznaczaniu wariantów decyzyjnych o rozkładach prawdopodobieństwa wyników niezdominowanych w sensie relacji preferencji, odpowiadającej określonym, ogólnym założeniom o wyborach decydenta w warunkach ryzyka (np. awersji czy skłonności do podejmowania ryzyka). Najczęściej wykorzystuje się relację dominacji stochastycznej drugiego rzędu, która odpowiada awersji do ryzyka decydenta, opisującej racjonalne preferencje w problemach maksymalizacji zysku.

Niech Y_1 i Y_2 będą losowymi wynikami problemu wyboru decyzji sformułowanego w kategoriach zysków.

Relacja dominacji stochastycznej drugiego rzędu pozwala wyodrębnić zbiór wariantów decyzyjnych, których losowe wyniki będą preferowane przez decydentów z awersją do ryzyka.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y_2 będzie zdominowany przez rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y_1 w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu $Y_1 \succ_2 Y_2$, jeśli losowy zysk Y_2 będzie nie lepszy niż losowy zysk Y_1 w sensie wszystkich modeli preferencji w postaci funkcji równoważnika pewności, które opisują awersję do ryzyka decydenta. Można ustalić, czy zachodzi relacja dominacji stochastycznej drugiego rzędu, porównując funkcje dystrybuant lub funkcji kwantyli rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych:

$$Y_1 \succ_2 Y_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \int_{-\infty}^{t} F_{Y_1}(r)dr \le \int_{-\infty}^{t} F_{Y_2}(r)dr, \forall t,$$

jeśli odpowiednie całki istnieją;

$$Y_1 \succ_2 Y_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \int_{0}^{q} F_{Y_1}^{(-1)}(p)dp \ge \int_{0}^{q} F_{Y_2}^{(-1)}(p)dp, \forall 0 \le q \le 1 .$$

Relacje dominacji stochastycznych wykorzystuje się w analizie problemów decyzyjnych do uporządkowania zbiorów rozwiązań dopuszczalnych z wydzieleniem z nich zbiorów rozwiązań efektywnych w sensie odpowiedniej relacji dominacji stochastycznej. Rozwiązanie dopuszczalne należy do zbioru rozwiązań efektywnych w sensie odpowiedniej relacji dominacji stochastycznej, jeśli w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych nie istnieje inne rozwiązanie, którego rozkład prawdopodobieństwa wyników dominuje rozkład prawdopodobieństwa wyników danego rozwiązania w sensie odpowiedniej relacji dominacji stochastycznej.

4. Wyznaczanie decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu

W pracach W. Ogryczaka [1997; 2002] zostały sformułowane zadania wielokryterialne, pozwalające wyznaczyć zbiory rozwiązań efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej pierwszego i drugiego rzędu problemów decyzji sformułowanych w kategoriach zysków. Łączny rozkład prawdopodobieństwa wektora parametrów losowych problemu decyzyjnego $\boldsymbol{\omega}$ został uwzględniony przez wprowadzenie zbioru stanów otoczenia $\{s_k\}_{k=1,...,m}$ i zbioru prawdopodobieństw stanów otoczenia $\{p_k\}_{k=1,...,m}$ oraz zbioru realizacji wektora parametrów losowych w każdym stanie otoczenia $\boldsymbol{\omega}_k = (\omega_{1k}, ..., \omega_{nk})$.

Aproksymacja polega na wydzieleniu na odcinku [0; 1] ograniczonego zbioru poziomów prawdopodobieństwa $0 < \lambda_1 < \lambda_2, ..., \lambda_r = 1$, dla których wyznaczane są najmniejsze częściowe średnie (*worst conditional means*), będące ocenami wartości funkcji kwantyli drugiego rzędu w punktach λ_i (i = 1, ..., r).

Problem generowania decyzji efektywnych w sensie dominacji stochastycznej drugiego rzędu sprowadza się do wielokryterialnego problemu maksymalizacji najmniejszych częściowych średnich wyników decyzji $m_{\lambda_i}(f(\mathbf{x},\boldsymbol{\omega}))$ na wszystkich wybranych poziomach λ_i:

$$\begin{aligned}
&\max\{m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, ..., m_{\lambda_r}\}\\
&m_{\lambda_i} = \lambda_i q_i - \sum_{k=1}^{m} d_{ki}^- p_k, \quad i = 1, ..., r\\
&d_{ki}^- \geq q_i - f(x, \omega_k), \; k = 1, ..., m, \quad i = 1, ..., r \qquad (2)\\
&d_{ki}^- \geq 0, \; k = 1, ..., m, \quad i = 1, ..., r\\
&\mathbf{x} \in \mathbf{D}
\end{aligned}$$

gdzie: λ_i – wybrany poziom prawdopodobieństwa (i=1, ..., r);

q_i – kwantyl rzędu λ_i wyniku decyzji f(**x**, **ω**) (i=1, ..., r);

d_{ki}^- – zmienna pomocnicza (k = 1, ..., m; i = 1, ..., r);

m_{λ_i} – najmniejsza częściowa średnia wyników dla poziomu prawdopodobieństwa λ_i .

Zbiór rozwiązań efektywnych wielokryterialnego problemu (2) jest zbiorem decyzji, których rozkłady prawdopodobieństwa wyników są niezdominowane w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu.

4. Uwzględnienie dodatkowej informacji przy wyznaczaniu decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu

Przedmiotem rozważań w tym artykule są problemy podejmowania decyzji w warunkach ryzyka (1), w których wybór decyzji opiera się na znajomości obiektywnych rozkładów prawdopodobieństwa wyników decyzji, ocenianych na podstawie danych empirycznych.

Dodatkową informację w podobnych problemach można przedstawiać w postaci obserwacji wartości zewnętrznych zmiennych losowych, pozwalających opisać rozkład prawdopodobieństwa stanów otoczenia, od których realizacji zależy rozkład prawdopodobieństwa wyników decyzji.

Przedmiotem tej pracy są problemy decyzyjne, w których wynik decyzji zależy od kilku losowych parametrów i zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest mocy *continuum*, co oznacza, że w podobnych problemach można rozważać dywersyfikację ryzyka. W kontekście możliwości dywersyfikacji ryzyka bardzo ważną charakterystyką rozkładów prawdopodobieństwa losowych parametrów problemu jest ich wzajemna zależność. Jednocześnie uwzględnienie wzajemnej zależności rozkładów prawdopodobieństwa parametrów losowych przy wyznaczeniu rozkładu prawdopodobieństwa wyników decyzji jest trudne i wymaga szerszej informacji niż ta, którą można uzyskać, obserwując pomocnicze zmienne losowe, opisujące stany otoczenia. W związku z uwzględnieniem wzajemnej zależności parametrów losowych przy modelowaniu rozkładu prawdopodobieństwa wyników decyzji najczęściej pojawia się niepewność w problemach podejmowania decyzji w warunkach ryzyka.

Propozycja wykorzystania informacji dodatkowej w procesie podejmowania decyzji w warunkach ryzyka zgodnie z relacjami dominacji stochastycznej drugiego rzędu opiera się na podejściu do uwzględnienia niepełnej informacji o strukturze zależności pomiędzy rozkładami prawdopodobieństwa parametrów losowych problemu [Dhaene *et al.* 2002]. Idea podejścia polega na tym, aby w sytuacji, kiedy pełna ocena struktury zależności pomiędzy rozkładami prawdopodobieństwa parametrów losowych, od których zależy wynik decyzji, jest niemożliwa, wykorzystać do porównania wyników decyzji strukturę zależności, która charakteryzuje mniej korzystny rozkład wyników przy takich samych rozkładach brzegowych parametrów losowych.

Rozkład prawdopodobieństwa sumy zmiennych losowych dominuje w sensie relacji dominacji drugiego rzędu rozkład prawdopodobieństwa sumy kwantyli tych zmiennych losowych:

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \succ_2 F_{Y_1}^{(-1)}(U) + F_{Y_2}^{(-1)}(U) \ldots + F_{Y_n}^{(-1)}(U) \qquad (3)$$

gdzie U jest zmienną losowa o rozkładzie jednostajnym na [0; 1].

W warunkach niepełnej informacji o wzajemnej zależności rozkładów prawdopodobieństwa parametrów losowych problemu, do generowania decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu zgodnym z awersją do ryzyka jest przydatne wykorzystanie kwantyli rozkładów prawdopodobieństwa parametrów.

Wykorzystanie dodatkowej informacji o zależności parametrów losowych problemu od dodatkowej zmiennej losowej W pozwala pośrednio częściowo uwzględnić wzajemną zależność parametrów losowych. Dzięki uwzględnieniu wzajemnej zależności zmiennych losowych można bardziej dokładnie określić granicę stochastyczną rozkładu prawdopodobieństwa sumy tych zmiennych losowych:

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \succ_2 F_{Y_1|W}^{(-1)}(U) + F_{Y_2|W}^{(-1)}(U) + \ldots + F_{Y_n|W}^{(-1)}(U) \qquad (4)$$

Przyjmijmy, że dodatkowe informacje w problemie decyzyjnym przedstawia wektor obserwacji historycznych $(w_1, w_2, \ldots, w_T)$ zewnętrznej zmiennej losowej W oraz rozkład prawdopodobieństwa prognozowanych wartości zewnętrznej zmiennej losowej

W, który określa rozkład prawdopodobieństwa możliwych stanów otoczenia: $\{\hat{p}_s : P(W = \tilde{w}_s) = \hat{p}_s\}_{s=1,\dots,S}$. Informacje *a priori* przedstawia macierz obserwacji historycznych wartości losowych parametrów problemu $\omega_j\,(j = 1,\dots,n)$: $\{\omega_{jt}\}_{j=1,\dots,n}^{t=1,\dots,T}$.

Na podstawie danych obserwacji można dokonać estymacji parametrów regresji kwantylowej [Koenker 2005] rzędu *p* zmiennych losowych $\omega_j\,(j = 1,\dots,n)$ względem zewnętrznej zmiennej *W*:

$$Q_p(\omega_{jt} \mid w_t) = \beta^0_{(p)j} + \beta_{(p)j} \cdot w_t\,,$$

gdzie $\beta^0_{(p)j}, \beta_{(p)j}$ – parametry regresji.

Wykorzystując rozkład prawdopodobieństwa prognozowanych wartości zewnętrznych zmiennych losowych $\tilde{w}_s\,(s = 1,\dots,S)$, wyznaczymy kwantyle rzędów $p_l\,(l = 1,\dots,L)$ warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa losowych parametrów problemu $\omega_j \mid W = \tilde{w}_s$:

$$Q_{p_l}(\omega_j \mid \tilde{w}_s) = \hat{\beta}^0_{(p_l)j} + \hat{\beta}_{(p_l)j} \cdot \tilde{w}_s\ ,\ \forall s = 1,\dots,S, \forall l = 1,\dots,L \tag{5}$$

Korzystając ze wzoru (4), możemy wyznaczyć kwantyle rozkładu prawdopodobieństwa, będącego górną granicą w sensie stochastycznego porządku wypukłego warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa wyników problemu (4) $Y \mid W = \tilde{w}_s$:

$$Q_{p_l}(Y \mid \tilde{w}_s) = \sum_{j=1}^{n} x_j Q_{p_l}(\omega_j \mid \tilde{w}_s), \forall l = 1,\dots,L \tag{6}$$

Określone wzorem (6) wartości są kwantylami rozkładu prawdopodobieństwa zdominowanego w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu przez rozkład prawdopodobieństwa warunkowej zmiennej $Y \mid W = \tilde{w}_s$. Zatem, w sytuacji nieposiadania informacji o wzajemnej zależności pomiędzy warunkowymi zmiennymi $\omega_j \mid W$, stosując pesymistyczne kryterium wyboru decyzji w warunkach niepewności, możemy przyjąć jako warunkowy rozkład prawdopodobieństwa *a posteriori* wyników decyzji rozkład prawdopodobieństwa, opisany przez kwantyle $Q_{p_l}(Y \mid \tilde{w}_s)$, określone wzorem (6).

Uwzględniając prawdopodobieństwa prognozowanych wartości zmiennej zewnętrznej *W*, możemy przejść do postaci problemu podejmowania decyzji w warunkach ryzyka i wykorzystać do generowania decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu zadanie wielokryterialne (2). W zadaniu wielokryterialnym (2) wartość wyniku przy realizacji stanu otoczenia *k* wyznaczamy według (6), natomiast prawdopodobieństwo takiego wyniku wyznaczamy następująco:

$$p_k = \Delta p_l \cdot \hat{p}_s, \forall k = 1,...,L \cdot S,$$

gdzie $\Delta p_l = p_l - p_{l-1}$, przy czym $p_0 = 0, p_L = 1$, jest różnicą rzędów kwantyli warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa wyników $Q_{p_l}(Y \mid \tilde{w}_s)$.

5. Przykład numeryczny

Przedstawione wyżej podejście do generowania decyzji efektywnych w sensie dominacji stochastycznej drugiego rzędu w warunkach dodatkowej informacji zostało zastosowane do generowania portfeli efektywnych, składających się z jednostek uczestnictwa w funduszach inwestycyjnych notowanych na warszawskiej GPW. Wzięto pod uwagę 9 funduszy, za stopę zwrotu z inwestycji w te fundusze przyjęto 20-sesyjne zmiany wartości jednostek uczestnictwa, za dodatkową informację przyjęto odpowiednie 20-sesyjne zmiany wartości indeksu rynkowego WIG.

Na podstawie danych obserwacji zmian wartości jednostek uczestnictwa funduszy oraz zmian wartości indeksu rynkowego za okres 01.01.2004-30.12.2005 zostały wyznaczone parametry liniowej regresji kwantylowej, opisującej zależność stóp zwrotu funduszy od zmian wartości indeksu. Wartości parametrów regresji kwantylowej (tab. 1) wyznaczono dla poziomów prawdopodobieństwa 0,05, 0,25, 0,5, 0,75 oraz 0,95.

Tabela 1. Parametry regresji kwantylowej stóp zwrotu funduszy inwestycyjnych względem zmian wartości indeksu rynkowego

Fundusz	Wartości parametrów regresji kwantylowej									
	$\beta^0_{0,95}$	$\beta_{0,95}$	$\beta^0_{0,75}$	$\beta_{0,75}$	$\beta^0_{0,5}$	$\beta_{0,5}$	$B^0_{0,25}$	$\beta_{0,25}$	$\beta^0_{0,05}$	$\beta_{0,05}$
SEBZR	0,015	0,386	0,008	0,358	0,003	0,361	–0,001	0,363	–0,010	0,387
SEBOB	0,009	0,052	0,005	0,009	0,004	0,001	0,003	0,006	0,001	0,022
SEBAG	0,017	0,839	0,006	0,805	–0,001	0,803	–0,008	0,801	–0,022	0,745
INGAG	0,013	0,868	0,004	0,885	–0,003	0,863	–0,009	0,857	–0,019	0,850
INGOB	0,010	0,082	0,007	0,071	0,003	0,058	0,000	0,035	–0,006	0,025
INGZR	0,009	0,486	0,003	0,504	0,000	0,486	–0,004	0,496	–0,011	0,487
PION3AG	0,013	0,863	0,002	0,899	–0,003	0,894	–0,009	0,876	–0,016	0,859
PIONOB	0,016	0,050	0,010	0,051	0,006	0,045	0,001	0,048	–0,006	0,018
PIONZR	0,011	0,508	0,004	0,511	–0,001	0,500	–0,005	0,502	–0,011	0,509

Źródło: opracowanie własne.

Portfele efektywne były wyznaczane z wykorzystaniem dodatkowej informacji w postaci rozkładu prawdopodobieństwa zmian wartości indeksu rynkowego, ocenionego na podstawie danych empirycznych za okres 1.01.2006-01.01.2007.

Na podstawie wartości parametrów regresji kwantylowej oraz empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa zmian wartości indeksu rynkowego zostały wyznaczone kwantyle warunkowych zmian stóp zwrotu funduszy. Za pomocą wielokryterialnego zadania maksymalizacji najmniejszych częściowych średnich wartości stóp zwrotu portfela zostały wyznaczone portfele efektywne. Skład portfeli wierzchołkowych podano w tab. 2.

Tabela 2. Skład portfeli efektywnych, wyznaczonych z wykorzystaniem dodatkowej informacji

Portfel	Fundusze	Udział w portfelu	Portfel	Fundusze	Udział w portfelu
1	SEBZR	0,69	4	SEBZR	0,09
	PIONOB	0,31		SEBOB	0,11
2	SEBZR	0,27		PIONOB	0,8
	PIONOB	0,73	5	SEBZR	0,79
3	SEBZR	0,01		SEBAG	0,21
	SEBOB	0,88	6	SEBZR	0,37
	PIONOB	0,11		SEBAG	0,63
			7	SEBZR	1

Źródło: opracowanie własne.

W celu analizy rozwiązań, wyznaczonych z wykorzystaniem dodatkowej informacji, zostały wygenerowane rozwiązania efektywne na podstawie pełnej informacji, tzn. z wykorzystaniem danych obserwacji wartości stóp zwrotu funduszy za okres 1.01.2006- 01.01.2007. Portfele efektywne zostały wyznaczone za pomocą wielokryterialnego zadania maksymalizacji najmniejszych częściowych średnich wyników decyzji. W tabeli 3 podano skład portfeli wierzchołkowych, wyznaczonych na podstawie pełnej informacji.

Tabela 3. Skład portfeli efektywnych, wyznaczonych na podstawie pełnej informacji

Portfel	Fundusze	Udział w portfelu	Portfel	Fundusze	Udział w portfelu
1*	SEBAG	0,13	5*	SEBAG	0,63
	INGOB	0,11		INGOB	0,03
	PIONOB	0,76		PIONOB	0,34
2*	SEBAG	0,02	6*	SEBAG	0,32
	SEBOB	0,85		INGOB	0,45
	INGOB	0,13		PIONOB	0,23
3*	SEBAG	0,04	7*	SEBAG	0,82
	SEBOB	0,30		INGOB	0,03
	PIONOB	0,66		PIONOB	0,15
4*	SEBAG	0,06			
	SEBOB	0,02			
	PIONOB	0,92			

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 4 podano wartości najmniejszych częściowych średnich stóp zwrotu funduszy i portfeli wierzchołkowych wyznaczone na podstawie obserwacji w okresie 1.01.2006-01.01.2007. Można zauważyć, że rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu portfeli, wyznaczonych z wykorzystaniem informacji dodatkowej, są niezdominowane w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu przez rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu poszczególnych funduszy oraz innych portfeli.

Tabela 4. Wartości najmniejszych częściowych średnich stóp zwrotu funduszy i portfeli efektywnych za okres 1.01.2006- 01.01.2007 (w %)

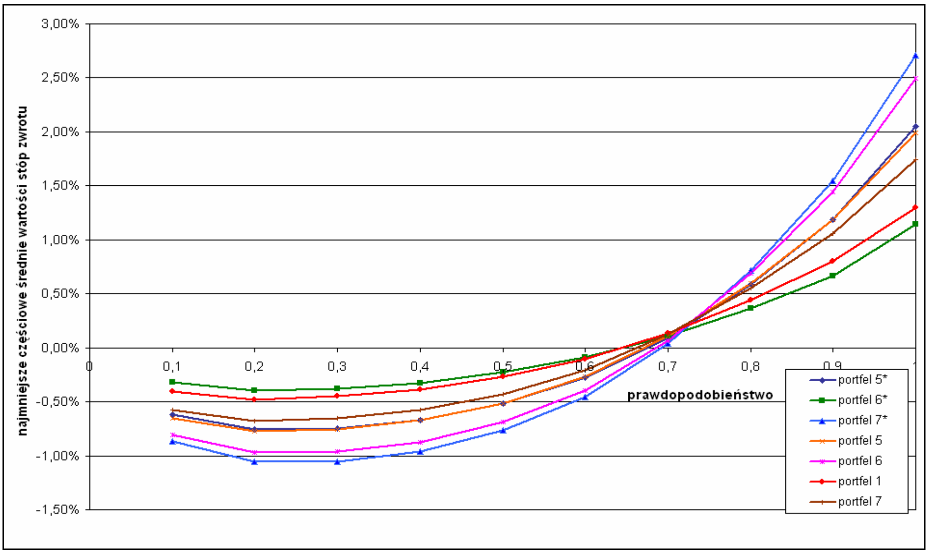
	Poziom prawdopodobieństwa									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
SEBZR	–0,58	–0,68	–0,65	–0,57	–0,43	–0,21	0,12	0,55	1,06	1,74
INGZR	–0,55	–0,67	–0,67	–0,62	–0,48	–0,28	0,04	0,47	1,04	1,83
PIONZR	–0,61	–0,78	–0,82	–0,79	–0,68	–0,52	–0,24	0,15	0,66	1,35
SEBOB	–0,02	–0,02	–0,01	0,00	0,01	0,03	0,05	0,08	0,10	0,15
INGOB	–0,08	–0,10	–0,10	–0,09	–0,06	–0,02	0,02	0,08	0,15	0,30
PIONOB	–0,06	–0,08	–0,08	–0,07	–0,05	–0,01	0,04	0,11	0,18	0,31
SEBAG	–0,94	–1,14	–1,15	–1,05	–0,84	–0,50	0,04	0,77	1,67	2,93
INGAG	–0,95	–1,17	–1,16	–1,07	–0,85	–0,50	0,04	0,81	1,86	3,28
PIONAG	–1,00	–1,23	–1,27	–1,22	–1,05	–0,75	–0,20	0,55	1,54	2,84
Portfel 1	–0,41	–0,48	–0,45	–0,39	–0,27	–0,11	0,13	0,44	0,80	1,30
Portfel 2	–0,18	–0,22	–0,19	–0,15	–0,07	0,02	0,14	0,28	0,44	0,69
Portfel 3	–0,02	–0,02	–0,02	0,00	0,01	0,04	0,06	0,09	0,13	0,18
Portfel 4	–0,08	–0,11	–0,09	–0,06	–0,02	0,04	0,10	0,18	0,27	0,42
Portfel 5	–0,65	–0,77	–0,75	–0,67	–0,51	–0,27	0,11	0,60	1,19	1,99
Portfel 6	–0,80	–0,97	–0,96	–0,87	–0,69	–0,39	0,07	0,69	1,45	2,49
Portfel 1*	–0,15	–0,19	–0,17	–0,13	–0,06	0,02	0,13	0,25	0,40	0,65
Portfel 2*	–0,03	–0,03	–0,02	–0,01	0,02	0,04	0,07	0,11	0,15	0,22
Portfel 3*	–0,06	–0,08	–0,07	–0,05	–0,01	0,04	0,09	0,16	0,23	0,36
Portfel 4*	–0,09	–0,12	–0,11	–0,07	–0,03	0,03	0,11	0,19	0,29	0,46
Portfel 5*	–0,62	–0,75	–0,75	–0,67	–0,52	–0,28	0,09	0,59	1,19	2,05
Portfel 6*	–0,32	–0,39	–0,38	–0,33	–0,23	–0,09	0,11	0,36	0,67	1,14
Portfel 7*	–0,87	–1,05	–1,06	–0,96	–0,77	–0,45	0,04	0,72	1,55	2,71

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono porównanie rozkładów najmniejszych częściowych średnich stóp zwrotu portfeli wyznaczonych z wykorzystaniem dodatkowej informacji oraz portfeli wyznaczonych na podstawie pełnej informacji.

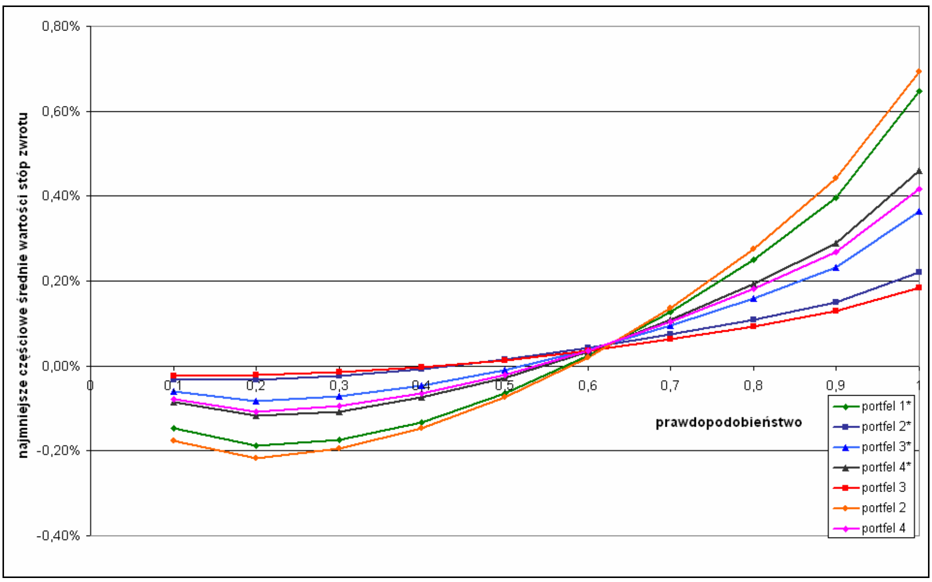
Analizując rys. 1 i 2, można zauważyć, że rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu portfeli wyznaczonych z wykorzystaniem informacji dodatkowej są również niezdominowane w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu przez rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu portfeli wyznaczonych na podstawie informacji pełnej, pomimo że struktura tych portfeli jest różna.

Taki wynik potwierdza empirycznie odporność wykorzystanej metody uwzględnienia informacji dodatkowej przy generowaniu decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznej drugiego rzędu.



Rys. 1. Rozkłady wartości najmniejszych częściowych średnich stóp zwrotu portfeli efektywnych, których średnie wartości stóp zwrotu są większe niż 1%

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Rozkłady wartości najmniejszych częściowych średnich stóp zwrotu portfeli, których średnie wartości stóp zwrotu są mniejsze niż 1%

Źródło: opracowanie własne.

6. Podsumowanie

W pracy została przedstawiona metoda uwzględnienia informacji dodatkowej w procesie wyznaczania decyzji efektywnych w sensie relacji dominacji stochastycznych drugiego rzędu, oparta na wykorzystaniu granicy stochastycznej rozkładu prawdopodobieństwa sumy zmiennych losowych oraz modelu regresji kwantylowej do opisu zależności parametrów losowych problemu od losowych zmiennych zewnętrznych.

Ponieważ zaproponowana metoda opiera się na nieparametrycznym ujęciu zależności zmiennych losowych i na odpornym modelu regresji kwantylowej, można twierdzić, że metoda ta zachowuje nieparametryczny charakter relacji dominacji stochastycznych i jest odporna.

Przedstawiony w pracy przykład zastosowania proponowanej metody do problemu dywersyfikacji portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem danych rzeczywistych zademonstrował odporność takiego podejścia.

Literatura

Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M.J., Kaas R., Vyncke D., *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory*, *insurance*, "Mathematics and Economics" 2002 vol. 31, s. 3-33.

Heilpern S., *Podejmowanie decyzji w warunkach ryzyka i niepewności*, Wydawnictwo AE, Wrocław 2001.

Koenker R., *Quantile Regression,* Econometric Society Monographs No 38, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

Levy H., *Stochastic Dominance*: *Investment Decision Making under Uncertainty*, Springer, New York 2006.

Ogryczak W., *Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1997.

Ogryczak W., *Multiple criteria optimization and decisions under risk*, "Control and Cybernetics" 2002 vol. 31.

Rybicki W., *Reprezentacje preferencji i modelowanie ryzyka*, Wydawnictwo AE, Wrocław 2005.

Sadowski W., *Decyzje i prognozy*, PWE, Warszawa 1981.

Yaari M., *The dual theory of choice under risk*, "Econometrica"1987 vol. 55, s. 95-115.

THE APPLICATION OF STOCHASTIC DOMINANCE TO THE DECISION PROBLEMS UNDER INCOMPLETE AND ADDITIONAL INFORMATION

Summary: The subject of this paper is the decision problem under risk with incomplete information about the join probability distribution of the random parameters. The application of the second stochastic dominance relation to decision making under this conditions is described.

The usage of the comonotonicity concept of dependency allows to generate the second stochastic dominance effective portfolios under incomplete information. The usage of quantile regression allows to consider the additional information about dependency between distributions of random parameters and the risk factor. In the paper, the method of generation of the second stochastic dominance effective portfolios considering the additional information is proposed.