IANUA SCIENTIAE

Brama filomatów, rys. A.S.

Antoni Smoluk

IANUA SCIENTIAE

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu
Wrocław 2022

Recenzja naukowa
Mariusz Czekała

Redakcja wydawnicza
Aleksandra Śliwka

Korekta
Barbara Łopusiewicz

Skład i łamanie
Małgorzata Myszkowska

Projekt okładki
Beata Dębska

Na okładce wykorzystano zdjęcie z zasobów uczelni

ISBN 978-83-67400-06-0 (dla wersji papierowej)
ISBN 978-83-67400-07-7 (dla wersji elektronicznej)

DOI: 10.15611/2022.07.7

Cytuj jako: Smoluk, A. (red.). (2022). *Ianua scientiae*. Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.

Druk i oprawa: TOTEM

Spis treści

Prolog

Książka *Ianua scientiae* to zbiór kilkunastu artykułów, poprzedzony wstępem i zakończony żartobliwym epilogiem. Dzieło – z pozoru niejednolite – łączy entuzjazm badawczy z zaangażowaniem społecznym. Jest to więc rodzaj poematu dygresyjnego, stworzonego przez trzech autorów.

Spectrum badawcze jest szerokie: od mody idealnej i statystyki po topologię, analizę i logikę. Ekonomia może być traktowana jako wiedza o świecie, ale jednocześnie jako nauka moralna. Adam Smith wykładał przecież filozofię moralną. Liberalizm ekonomiczny jest doktryną popularną i pociągającą. Jednakowoż wielka swoboda gospodarcza, bez ograniczeń prawnych, prowadzi do nadużyć. Podobnie jest z przeciwstawnym kierunkiem, zwanym keynesizmem lub interwencjonizmem. Interwencjonizm, niekiedy, jest pożądanym działaniem – pobudza działalność gospodarczą. Jak wszędzie, tak i tutaj istnieją dopuszczalne granice ingerencji państwa w działalność gospodarczą. Interwencjonizm i państwo opiekuńcze to inflacja i spadek wydajności. Liberalizm zaś to tłumienie konkurencji i tworzenie monopoli zawyżających ceny.

Wiedza naukowa jest przekazywalna jednoznacznie – bo to logika. Sztuka zaś – oparta głównie na intuicji – nie jest przekazywalna jednoznacznie. Książka łączy naukę ze sztuką. Nie ma nauki bez sztuki, ale i odwrotnie – nie ma sztuki bez nauki. Wszędzie jest matematyka – matematyka rozumiana szeroko, jako wiedza o świecie, a nie sztucznie tworzone struktury matematyczne. David Hilbert wierzył, że całą matematykę można zalgorytmizować i komputery mogą zastąpić ludzi w dowodzeniu twierdzeń. Kurt Goedel pokazał, że większości teorii naukowych, mających praktyczne zastosowanie, czyli teorii, w których występuje zbiór nieskończony, nie da się zalgorytmizować. Występują w nich prawdy bez formalnego dowodu. Jeśli zbiór aksjomatów jest znany, to teoria może być niezupełna, lecz jeśli do aksjomatów włączymy wszystkie zdania prawdziwe, wtedy teoria staje się zupełna. Teoria jest bezużyteczna i nie ma charakteru nauki, jeśli jej aksjomaty nie są znane – nie wiemy, które zdania są aksjomatami, bo aksjomatów jest nieprzeliczalnie wiele. Dowód twierdzenia Goedla jest niezwykle prosty. Dowodów jest tyle, ile liczb naturalnych, natomiast prawd jest znacznie więcej – tyle, ile liczb rzeczywistych. Dowody to punkty dyskretne, natomiast prawda jest ciągłą linią. Wyróżnia się dwa pojęcia nieskończoności. Nieskończoność aktualną, oznaczającą, że całość jest równoważna części, oraz nieskończoność potencjalną, oznaczającą, że świat jest skończony, ale nie istnieje zbiór największy. Nieskończoność jest powszechnie akceptowalna, chociaż wydaje się to dziwne, bowiem istotę najwyższą – Boga – część ludzi odrzuca. Nieskończoność to ciągłość, a ciągłość to ważne narzędzie intuicji.

Książka może być traktowana jako niezbędnik, rodzaj pocket-booka, do którego często powinno się zaglądać. Studium można rozpocząć w dowolnym miejscu i na dowolnym akapicie. Ten sam fragment czytany powtórnie będzie brzmiał inaczej i odsłaniał nowy obraz przedmiotu – także zapewniał natchnienie i odpoczynek przy lekturze. Tak więc jest to książka dla każdej myślącej istoty, niezależnie od wykształcenia i zawodu.

Bez życzliwej pomocy wielu osób nie byłoby tego zbioru esejów. Szczególne słowa uznania należą się Recenzentowi. Historia nauki wskazuje, a pogląd ten podziela Recenzent, że myśli nowe i oryginalne są często odrzucane i wyśmiewane. Stają się one z czasem wiodącą ideą – paradygmatem nauki. Zgodnie z sugestią Recenzenta usunięto esej, mający charakter dialogu, o ekonomii i medycynie. Dialog matematyka ze zwolenniczką medycyny opartej na psychologii i punktach energetycznych – akupunkturze – jest zbiorem hipotez, ale i faktów. Teoria Einsteina w swej początkowej postaci również była niczym innym jak zespołem hipotez. Weryfikacją hipotez Einsteina zajęli się później inni. W opuszczonym artykule były trzy główne idee. *Medicus curat – Deus sanat*. Jest to podstawowa zasada samego Hipokratesa. We współczesnym języku oznacza ona, że chory nie jest zepsutym samochodem, który po tygodniu z warsztatu wraca lepszy niż nowy. *Mens sana in corpore sano.* Ta zasada Juwenalisa oznacza, że zdrowe ciało implikuje, iż duch jest także zdrowy. Jest jednak odwrotnie: zdrowy duch implikuje zdrowe ciało. *Medice, cura te ipsum.* Jest to przysłowie, które cytuje Jezus. Dotyczy ono organizacji służby zdrowia i etyki lekarskiej. Nie można służyć dwóm panom – Bogu i mamonie. Zawód medyka jest powołaniem do służby bliźniemu.

Almanach to wynik pracy zespołu. Dziękuję! Uważam ponadto, że rządzić mają prawi mężowie. *Memento* – daleka transpozycja głośnego porzekadła Katona – niech obudzi kandydatów i wyborców. Niech zasady jednego staną się regułą drugiego – prawem powszechnym. Rewolucja myśli to dużo więcej niż bicie w dzwony i palenie dobytku. Cyncynat wzorem.

Dziękuję wszystkim Przyjaciołom i Kolegom, dzięki którym almanach może się ukazać.

Wrocław, 26 maja 2022 *Antoni Smoluk*

1

On the Ideal Mode Once Again

Antoni Smoluk

We all here have a great opportunity and possibility to see the Cross of the South. Another constellation of stars has also appeared here. It is the Northern Hemisphere constellation of the Pleiades. What does it mean? Everything and nothing. It depends. You must find your own answer. Every real scientist must always be a mathematician. It may be very specific mathematics, one's own mathematics, but it is mathematics. Thus you can be a mathematician, even a very good mathematician, without being conscious of that. To avoid the abuse of statistics, we should not go beyond some critical point. We cannot extract from data any more information than they really have. We should focus on natural calculations of parameters like mean, medium, and perhaps mode. Life itself is too complicated, so I am not trying to make the situation worse.

Welcome all those untired participants who managed to come here to the Russell Love Theatre. It is the last session and the shortest lecture. I promise you that my talk will be brief and simple. I will help you not to be troubled in the least. My purpose is to attract your attention for a while to the old and remaining in oblivion modal value, to the usual mode. Everybody knows what a mode is. Let us go straight to our destination. I will start with some examples to tune you into my frequency. We identity function

$$i\colon R \to R,$$

$$i(x) = x,\ x \in R,$$

on the set of real numbers R is called the stochastic variable. In general, a stochastic variable is an identity function on the n-dimensional real vector space R^n, $n \in N$. This means that the usual notion of a random variable is not important. This is only in the stochastic variable; measures or probabilities are important.

The first ideal mode exists. The class of distribution A0 is a real and important set of measures. Distributions with the ideal mode are natural objective beings. The second ideal mode has more information, it is more informative, in different senses, than the usual mode. It is a real existing object, it is not merely conceived in the mind. This why I believe that it is important and useful. We cannot ignore it in the same way, as we cannot ignore the normal distribution. Hence the ideal mode is versatile and fruitful to all of us.

The ideal mode can easily be extended onto multidimensional distributions from the convex set prob(R^n).

Theorem. The set of distributions with the same ideal mode m is the convex closed set. This set is compact if distributions are restricted to those bounded – it means that a certain closed interval has the measure 1.

After dinner there should be something light and sweet if possible. There are only three types of pure distribution with the ideal mode. The first class of such distributions comprises pure atomic distributions with probability accumulated in one point; these are Dirac distributions. The second class of pure distributions with the ideal mode is built out of uniform distributions. To the third class of pure distributions belong all the continuous distributions such as the normal distribution, Cauchy distribution, and so on. Only the second class of uniform distributions is important. Other distributions can be obtained from uniform distributions by taking convex combination and limit processes. Obviously, uniform distributions are not only continuous, but also absolutely continuous.

Theorem. The set $I(m)$ of all distributions with the ideal mode m is equal to the closure of the set of all convex combinations of uniform distributions with the ideal mode equal to m.

1. Modal value, a dominant, the most frequent value or simply a mode, is a positional parameter informing about the distribution of probability. In place of the distribution of probability, we use a synonymous expression, a probabilistic measure shortened to one word – measure – since only probabilistic measures are mentioned.

Thus, what is a mode of measure μ? To start with, before giving a precise definition of this notion we should mention that not all the positional parameters are defined for each measure. There are measures for which an average value is defined, and there are measures for which it is not – because it does not exist. Similarly, this is the case with standard deviation and moments of higher order. Therefore for certain measures a modal value exists, and for others it does not. Before we propose a new definition of a mode and attempt its generalisation into multidimensional distribution, let us consult the literature. This notion does not appear in many of the textbooks on probability (M. Fisz (1958)). Why? Because it is not properly defined, and there is no precise definition of what a mode is. "The mode is the value of the variable corresponding to the maximum of the ideal curve which gives the closest possible fit to the actual distribution" (G.U. Yule, M.G. Kendall (1948)). Further on Yule explained this definition of a modal value: "it represents the value which is most frequent or typical, the value which is, in fact, the fashion (*la mode*)". In theory, for continuous distribution with a single maximum of the density function, such a definition is satisfactory. In practice however, we have only histograms. Yule warned his readers loyally, "it is, in fact, difficult to determine the mode for such distributions as they arise in practice, particularly by elementary methods". The entry *mode*, written by A.V. Prochorov, can be found in a well-prepared, much valued by mathematicians and practitioners, Soviet six-volume

Encyclopaedia of Mathematics. "If function $g(x)$ is a density of a random variable, then every point x_0 in which $g(x)$ reaches the maximum value is called a mode. A mode can be also defined for discrete distributions: if a random variable takes on value x_k with a probability p_k and when $x_k < x_{k+1}$ then point x_m is called a mode, when $p_{m-1} \leq p_m$ and $p_{m+1} \leq p_m$. Distributions with a single, two or larger number of modal values are called respectively unimodal, bimodal and multimodal. The most important for the theory of probability and for statistics are unimodal distributions." (I.M. Winogradow [Ed.] (1982)). The entry *mode* can also be found in the popular *Mathematics Dictionary* of G. James. "The member of a series of measurements or observations that occurs most often, if there is such a member; there is no useful definition if more than one member occurs most often. If more students in a given class make 75 than any other one grade, then 75 is the mode. For a continuous random variable with probability density function f, the mode is the point at which f has its greatest value, if there is exactly one such point. Sometimes any point at which f has a local maximum is called a mode, but multimodality is unusual in practise" (R.C. James [Ed.] (1976)). Similar information can be found in a pedantic German *Lexicon der Mathematik* under *Modawert* (*Modus*, *Mode*), (W. Gellert, H. Kastner, S. Neuber [Eds.] (1977)). There is no mention of a mode in the selection of articles valuable for historical studies, *Studies in the History of Statistics and Probability* (E.S. Pearson, M.G. Kendall [Eds.] (1970)), which can indicate additionally a low opinion of the theoretical and practical importance of a mode. The above mentioned statements suggest that the notion of a mode has been depreciated. Is it not useful? Certainly it is useful and important. It has been pushed aside due to its imprecise definition, and not because of its scant usefulness. K. Pearson introduced the idea of a mode in 1895 in his paper *Skew variation in homogenous material*. I think it is high time to review and make more precise this undoubtedly useful – especially in prediction theory – notion. Statistics is not just a language and a method but above all a science of the real world, formulating laws of nature, and every science is a mathematical, exact discipline (A. Smoluk (1996), (2002)).

2. Let μ signify a probabilistic measure in a set of real numbers R. In a symbolic language it means that $\mu \in \mathrm{Prob}(R)$. Let x be any but fixed real number. To number $x \in R$ and measure $\mu \in \mathrm{Prob}(R)$ is assigned function $f(\mu, x)$ transforming the set of real numbers R in R by the formula

$$f(\mu, x)(h) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad h < 0, \\ \int\limits_{x-h}^{x+h} d\mu(t), & \text{if} \quad 0 \leq h, \end{cases}$$

where $h \in R$, and an integral appearing in a definition of function $f(\mu, x)$ is the probability that any random variable with a distribution μ takes on values from the closed interval $[x - h\ , x + h]$. Naturally, function $f(\mu, x)$ is a certain distribution function. Symbol $F(\mu)$ designates the family of all such distribution functions

$$F(\mu)=\{f(\mu,x):x\in R\}.$$

Family $F(\mu)$ is an order set. It is

$$f(\mu, x)\leq f(\mu, y)$$

if and only if, for every $h \in R$ it is

$$f(\mu, x)(h)\leq f(\mu, y)(h).$$

If in family $F(\mu)$ exists function $f(\mu, m)$ such that for every $x\in R$ is

$$f(\mu, x)\leq f(\mu, m),$$

then value m is called *an ideal mode* of measure μ. The ideal mode of measure μ exists only when in family $F(\mu)$ exists the largest element – the supremum.

Theorem. An ideal mode is unique.

Argument. If an ideal mode exists, it is only one because the supremum of the set is unique.

Comment. Every normal distribution has a mode and an ideal mode; both of these values are equal to the average.

A mode for a uniform distribution can be any point of an interval of positive density. In such cases the notion has no value. However, an ideal mode of uniform distribution is unique, and obviously just like for normal distribution, it is equal to the mean. The necessary condition for an ideal mode to exist is the symmetry of distribution. The distribution has to be symmetrical in order to have an ideal mode. Naturally, many symmetrical distributions exist without an ideal mode. At the same time we should stress the great importance of multimodal distribution in the cluster analysis and in the theory of subdivision of the population into classes – just as is done in calibration. Multimodality cannot be fought against because the distributions of such kind take place in natural and social sciences. The notion of a mode is not very useful in cases when the distribution is multimodal. Simply, a mode carries little information about distribution. I have even come across a task to measure an informational value of a mode. An ideal mode gives far more information than a mode. Full information about ideal mode m is contained in distribution function $f(\mu, m)$ defining the mode. Such a function also carries information about an ordinary mode, because to each modal value m – in a traditional sense – in a set of distribution functions $F(\mu)$ there is a corresponding maximal element $f(\mu, m)$. This modal value m which corresponds to distribution function $f(\mu, m)$, and the function is maximum element in set $F(\mu)$, deserves special attention as their informative value is greater.

3. An ideal mode is a stable value due to a weak convergence of random variables.

Theorem. If sequence (f_n) of random variables with distributions (μ_n) is weakly convergent to random variable f with distribution μ, and measure μ_n for each natural n has ideal mode m_n, then measure μ has ideal mode m, and $m = \lim (m_n)$.

4. Examples

A. Measure μ with a density

$$g(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } \dfrac{\pi}{2}\le |x|, \\ c\dfrac{\cos^2 x}{1+x^2}, & \text{if } |x|\le\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

and number $0 < c$ is selected in such a way that function g is the density, has a mode equal to 0. It is a symmetrical unimodal distribution, which has also an ideal mode.

B. A symmetrical measure ν with a density

$$h(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } \pi\le |x|, \\ d\dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}, & \text{if } |x|\le\pi, \end{cases}$$

where number d is selected in such a way that function h is the density does not have an ideal mode. Distribution ν is bimodal in a traditional sense – it has two modes: $-\dfrac{\pi}{2}$ and $\dfrac{\pi}{2}$. In this case there is no ideal mode because the function of density does not increase to the centre which is at point 0, and obviously the function does not decrease on the right to the centre.

C. Binomial distribution $p = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, \ldots n$, where $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $n \in N$, does not have an ideal mode either although it is a symmetrical distribution. Here the reason for the non-existence of an ideal mode is the non-continuity of distribution – the lack of a density function.

D. Distribution of a student with n degrees of freedom, $n \in N$, $1 \le n$, with density given by the formula

$$g_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}},\ t\in R,$$

where $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, $x, y \in R$, $0 < x$, $0 < y$, has an ideal mode equal to an ordinary modal value – number 0.

E. A symmetrical distribution

$$\mu_o = (1/10,\ 3/20,\ 1/2,\ 3/20,\ 1/10),$$

associated with the natural numbers 0, 1, 2, 3 and 4 respectively, these probabilities have modal value equal to 2. It is naturally a symmetrical distribution with a centre of symmetry 2. Such a distribution has no modal value since, by analogy to binomial distribution, it is a purely atomic distribution and has no density. If we extend this distribution to density function g given by the formula

$$g(t)=\begin{cases} 0, & \text{if} \quad t<-\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \frac{9}{2}<t, \\ \frac{1}{10}, & \text{if} \quad -\frac{1}{2}\le t<\frac{1}{2}, \\ \frac{3}{20}, & \text{if} \quad \frac{1}{2}\le t<\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{if} \quad \frac{3}{2}\le t<\frac{5}{2}, \\ \frac{3}{20}, & \text{if} \quad \frac{5}{2}\le t<\frac{7}{2}, \\ \frac{1}{10}, & \text{if} \quad \frac{7}{2}\le t\le\frac{9}{2}, \end{cases}$$

we obtain a continuous symmetrical distribution with an ideal mode equal to 2 (Figure 1).

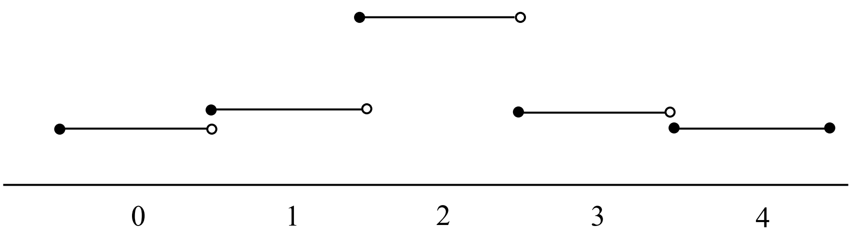


Fig. 1. Combination of uniform distributions

F. A distribution beta with a density function dependent on two positive parameters x and y

$$g(t)=\begin{cases} 0, & \text{if} \quad t\le 0, \\ \frac{1}{B(x,y)}t^{x-1}(1-t)^{y-1}, & \text{if} \quad 0<t<1, \\ 0, & \text{if} \quad 1<t, \end{cases}$$

has an ideal mode when $1 \le x$, $1 \le y$ and $x = y$. An ideal mode of distribution beta equals 1/2.

5. The notion of an ideal mode can be easily extended onto multidimensional distributions. In such cases the term *centre* is more appropriate because an ideal mode is a certain point m in space R^n. Therefore if $\mu \in \mathrm{Prob}(R^n)$, μ is a n-dimensional distribution, then analogously to the one-dimensional case, we can define function $f(\mu, x)$ using the formula

$$f(\mu,x)(h) = \begin{cases} 0, & \text{if } h < 0, \\ \int\limits_{K(x,h)} d\mu(t), & \text{if } 0 \le h, \end{cases}$$

where $K(x, h)$ is a closed ball $\{\{z \in R^n : |x - z| \le h\}$, h is a real number, x a vector in R^n, and number $|y|$ is a norm of vector y. The ideal mode – the centre of distribution $\mu \in \mathrm{Prob}(R^n)$ – can be called point $m \in R^n$ such that function $f(\mu, m)$ is the biggest element – the supremum – of family $F(\mu)$. The mode of distribution in R^n is point $m = (m_1, ..., m_n)$, therefore a certain vector. It is not a single number but a series of numbers. Multidimensional normal distribution has an ideal mode and it is a point in which density reaches the highest value. This mode does not depend on the choice of norm in R^n and it is a vector consisting of modal values of the marginal distributions.

6. Problems. A. Characterise a class of distributions for which an ideal mode exists. Distribution possessing a density function has an ideal mode if and only if it is symmetrical and its function of density to point of symmetry increases, and from the point of symmetry decreases.

B. Does the definition of a mode not depend on the choice of norm in space R^n? Certainly this so for normal distributions, as stated above, and it really does not depend on the norm. If measure μ has a central point in one norm, then in every other norm it has also a central point and all these points are identical.

C. Does every uniform distribution μ with support set A has a centre, if A is a convex symmetrical set? Set A is called symmetrical if there exists point $a \in R^n$ such that set $B = \{x - a : x \in A\}$ is symmetrical with respect to the origin; this means that B fulfils the condition: if $z \in B$, then $-z \in B$.

D. Multidimensional distribution μ has a centre m if and only if, marginal distributions μ_i , $i = 1, ..., n$, have ideal modes m_i, where

$$m = (m_1, ..., m_n)?$$

It seems that this is so in the case of the independent marginal distributions, i.e. when μ is a product of marginal measures.

Literature

M. Fisz (1958). *Probability and Mathematical Statistics*. PWN. Warszawa [In Polish].
W. Gellert, H. Kästner, S. Neuber [Eds.] (1977). *Lexikon der Mathematik*. Bibliographisches Institut. Leipzig.
R.C. James [Ed.] (1976). *Mathematics – Dictionary*. Van Nostrand Reinhold Company. New York [Fourth edition].
E.S. Pearson, M.G. Kendall [Eds.] (1970). *Studies in the History of Statistics and Probability*. Griffin. London.
K. Pearson (1895). *Skew variation in homogeneous material*. Philosophical Transactions of the Royal Society. Series A. Vol. 186.
A. Smoluk (1996). *Numerical Methods*. AE Wrocław [In Polish].
A. Smoluk (1997). *Remarks on the definition of modal value*. Przegląd Statystyczny 44, 41-46 [In Polish].
A. Smoluk (2002). *Educational Standards in Statistics.* Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics ICOTS 6 2002. Cape Town.
I.M. Winogradow [Ed.] (1982). *Mathematical Encyclopaedia*. Vol. 3. Izdatielstwo „Sowietskaja Encikłopiedija”. Moscow [In Russian].
G.U. Yule, M.G. Kendall (1948). *An Introduction to the Theory of Statistics*. Charles Griffin and Company. London.

On the Ideal Mode Once Again

Summary

The author provides a precise definition of modal value, and a theorem on the stability of this parameter is also formulated. Let μ signify a probabilistic measure in a set of real numbers R. Let x be any but fixed real number. To number $x \in R$ and measure μ there is assigned function $f(\mu, x)$ transforming the set of real numbers R into R by the formula

$$f(\mu,x)(h)=\begin{cases}0, & \text{if} \quad h<0,\\ \int\limits_{x-h}^{x+h} d\mu(t), & \text{if} \quad 0\le h,\end{cases}$$

where $h \in R$, and an integral appearing in a definition of function $f(\mu, x)$ is a probability that any random variable with distribution μ takes on values from interval $[x-h, x+h]$.

Naturally, function $f(\mu, x)$ is a certain distribution function. Symbol $F(\mu)$ designates the family of all such distribution functions $F(\mu)=\{f(\mu,x) : x \in R\}$.

Family $F(\mu)$ is an order set. It is

$$f(\mu, x) \le f(\mu, y)$$

if and only if, for every $h \in R$ it is

$$f(\mu, x)(h) \leq f(\mu, y)(h).$$

If in family $F(\mu)$ exists function $f(\mu, m)$ such that for every $x \in R$ is

$$f(\mu, x) \leq f(\mu, m),$$

then value m is called *an ideal mode* of measure μ. The ideal mode of measure μ exists only when in family $F(\mu)$ exists the largest element – the supremum.

An ideal mode is unique. If an ideal mode exists, it is only one because the supremum of the set is unique. Every normal distribution has a mode and an ideal mode; both of these values are equal to the average. A mode for a uniform distribution can be any point of an interval of positive density. In such case the notion has no value. However, an ideal mode of uniform distribution is unique, and obviously just like for the normal distribution, it is equal to the mean. The distribution has to be symmetrical in order to have an ideal mode.

An ideal mode is stable with respect to the weak convergence of random variables.

Theorem. If sequence (f_n) of random variables with distributions (μ_n) is weakly convergent to random variable f with distribution μ, and measure μ_n for each natural n has ideal mode m_n, then measure μ has ideal mode m, and $m = \lim (m_n)$.

2

Objaśnienie i uogólnienie paradoksu Simpsona

Antoni Smoluk, Czesław Szmigiel

Streszczenie: W artykule objaśnia się paradoks Simpsona i podaje źródło takich paradoksów. Paradoksy pojawiają się, albowiem efektywność sumy wektorów na ogół nie jest równa średniej efektywności składowych. Wektory proporcjonalne mają taką samą efektywność. Stożek jest uogólnieniem proporcji. Zasadnicze twierdzenie wiąże uogólnione proporcje, czyli stożki z podstawowym nowym pojęciem pracy – paradoksem potencjalnym. Paradoks potencjalny to taki układ, który po zmianie intensywności niektórych wektorów staje się paradoksem.

Słowa kluczowe: paradoks Simpsona, paradoks potencjalny, stożek.

Consuetudo altera natura est

1. Uwagi wstępne

Paradoks nie jest antynomią: paradoks to zdziwienie – odstępstwo od nawyków i tego, czego oczekujemy, antynomia zaś jest sprzecznością – niemożliwym stanem natury.

Paradoks Simpsona dotyczy wzajemnej relacji pomiędzy preferencjami. Jeżeli P jest preferencją w zbiorze X, to P jest relacją zwrotną i tranzytywną – przechodnią. W produkcie kartezjańskim X^k, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną większą lub równą 2, preferencja produktowa Pareto P_k jest określona warunkiem: xP_ky wtedy i tylko wtedy, gdy x_iPy_i, $i = 1, \ldots, k$, gdzie $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots., y_k)$. Automorfizm $g: X^k \to X^k$ jest różnowartościową funkcją monotoniczną: jeśli xP_ky, to $g(x)P_kg(y)$. Niech dana będzie funkcja $f: X^k \to X$; jeśli funkcja f rośnie, czyli jest funkcją monotoniczną, to warunek xP_ky pociąga warunek $f(x)Pf(y)$.

Podzbiór populacji zawierający więcej niż 2/3 elementów, czyli spełniający regułę J. Łyki, jest powszechnie utożsamiany z całą populacją. Trafiają się funkcje niemonotoniczne, które ogół uważa za monotoniczne. Uwaga ta rzuca światło na paradoksy statystyczne i zarazem je objaśnia.

Układ (x, y) nazywa się układem paradoksalnym względem funkcji f, jeżeli xP_ky, ale nie $f(x)Pf(y)$, gdzie funkcja f jest w powszechnym odczuciu funkcją rosnącą.

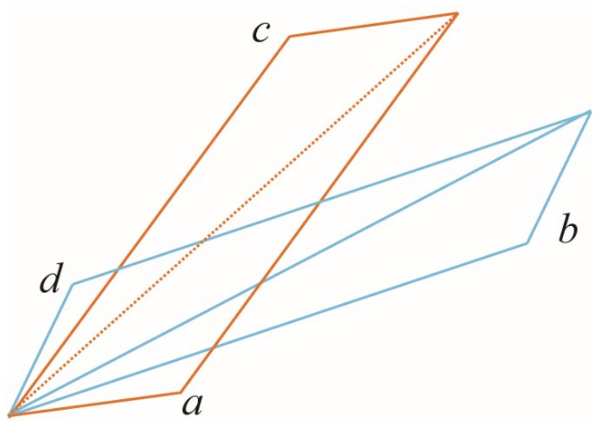
Rodzina wszystkich automorfizmów struktury matematycznej (X^k, P_k) jest grupą przekształceń. Układ (x, y) jest układem potencjalnie paradoksalnym względem funkcji f, jeżeli istnieją automorfizmy g i h takie, że układ $(g(x), h(y))$ jest układem paradoksalnym.

Jeśli układ jest paradoksalny względem funkcji f, to naturalnie jest on potencjalnie paradoksalny; za $g = h$ wystarczy wziąć automorfizm tożsamościowy. Takie jest ogólne spojrzenie na paradoks Simpsona. W dalszym ciągu wyspecyfikujemy zbiór X; najpierw ograniczymy się do podzbioru płaszczyzny R^2, gdzie R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór X jest w tym przypadku rodziną par nieujemnych liczb rzeczywistych (x, y), gdzie element x nie jest zerem i jest nie mniejszy niż y.

2. Paradoks Simpsona

Skutecznością wektora a równego (x, y) jest kąt φ wektora (x, y) z dodatnim kierunkiem osi Ox. oznaczany symbolem $e(a)$, zwany również *efektywnością* wektora. Tangens tego kąta jest stosunkiem y/x. W zbiorze X jest określona relacja preferencji P wzorem: aPb wtedy i tylko wtedy, gdy $e(a) \leq e(b)$.

Wektory: $d = (2, 1)$, $c = (30, 10)$, $b = (40, 10)$, $a = (4, 1)$, których tangensy równają się odpowiednio: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, tworzą układ, po rozdzieleniu na dwie grupy: $A = (a, c)$, $B = (b, d)$, paradoksalny w sensie Simpsona. Jest bowiem $A \leq B$, lecz $11/42 = e(b + d) < e(a + c) = 11/35$ (rys. 1).



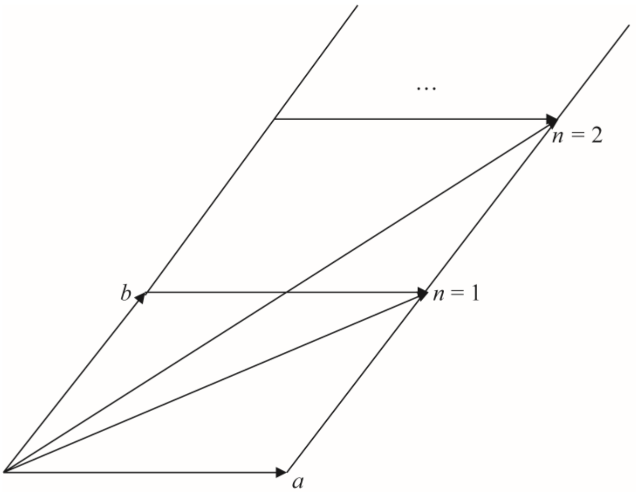
Rys. 1. Paradoks Simpsona

Kąt φ nie zależy od długości wektora; wszystkie wektory współliniowe mają taką samą efektywność. Średnia arytmetyczna wektorów jest proporcjonalna do ich sumy; oznacza to więc, że efektywność sumy wektorów jest równa efektywności średniej arytmetycznej tych wektorów. Jednak średnia arytmetyczna efektywności wektorów jest na ogół różna od efektywności ich sumy – stąd paradoksy.

3. Objaśnienie paradoksu

Długość wektora nie ma wpływu na wartość kąta, lecz długości wektorów składowych mają wpływ na efektywność sumy. Długość wektora jest jego *intensywnością*. Zmiana intensywności składowych ma decydujący wpływ na skuteczność sumy. Liderzy ekonomiczni – wzorce do naśladowania – mają wysoką efektywność i wielką intensywność; efektywność można uważać za stopień wykorzystania zasobów – procent skutecznego zużycia energii ekonomicznej, natomiast intensywność to rozmiar produkcji.

Lemat. Ciąg efektywności ($e(a + nb)$), gdzie $e(b) < e(a)$ oraz n jest dowolną liczbą naturalną, jest zbieżny do efektywności wektora b (dowód *vide* rys. 2).



Rys. 2. Dowód lematu

Lemat ten prosto objaśnia paradoks Simpsona.

Twierdzenie. Układ $((a, c), (b, d))$ taki, że $e(a) \le e(b)$ i $e(c) \le e(d)$, jest potencjalnie paradoksalny wtedy i tylko wtedy, gdy wektory a, b, c, d przeplatają się, czyli $e(a) < e(b) < e(c) < e(d)$ (rys. 1).

Dla dowodu wystarczy posłużyć się lematem oraz zauważyć, że automorfizmy nie zmieniają efektywności składowych układu, natomiast zmieniają efektywność sumy. Twierdzenie powyższe można z korzyścią przeformułować.

Układ wektorów $((a, c), (b, d))$ taki, że $e(a) \le e(b)$ i $e(c) \le e(d)$, jest potencjalnie paradoksalny wtedy i tylko wtedy, gdy stożek rozpięty na zbiorze $\{a, c\}$ i stożek rozpięty na zbiorze $\{b, d\}$ mają część wspólną o niepustym wnętrzu.

Przeformułowanie twierdzenia ułatwia jego uogólnienie. Będziemy więc mówić o układzie nie dwóch, lecz większej liczby wektorów – szpitalach, w których leczy się nie dwie choroby, lecz kilkanaście, z podziałem na mężczyzn i kobiety. Jest również ekonomiczny paradoks Simpsona. Jeśli gospodarka kraju A jest efektywniejsza, we wszystkich działach, od gospodarki kraju B, to jednak łączna efektywność gospodarki B może okazać się wyższa od łącznej efektywności kraju A.

4. Uogólnienie paradoksu

Można uogólniać jeszcze dalej; zamiast przestrzeni dwuwymiarowej R^2 rozpatrzmy k-wymiarową przestrzeń euklidesową R^k. Niech K oznacza stożek wektorów nieujemnych. W tym przypadku efektywność określona jest niejednoznacznie – daje się mierzyć różnorodnie. Ustala się jeden wektor wzorcowy, którego umowna efektywność jest równa 1, a następnie definiuje się efektywność każdego wektora względem wektora wzorcowego. Efektywnością jest kąt pomiędzy danym wektorem i wzorcem. Cosinus efektywności oblicza się łatwo; dla wektorów jednostkowych jest to zwykły iloczyn skalarny. Wektor wzorcowy może być obrany dowolnie, wygodnie przyjąć, że jest nim pierwszy wektor bazowy lub wektor o wszystkich składowych równych 1.

Twierdzenie uogólnione. Dane są dwa układy wektorów $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ takie, że $A \leq B$, czyli $e(a_i) \leq e(b_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Układ (A, B) jest potencjalnie paradoksalny wtedy i tylko wtedy, gdy stożki rozpięte $K(A)$ i $K(B)$ mają część wspólną o niepustym wnętrzu.

Zamiast dowodu zauważmy jedynie, że stożek $K(A)$ jest zbiorem

$$\{x_1a_1 + \ldots + x_na_n\colon x_i \in R_+, i = 1, \ldots, n\}.$$

Jest to stożek rozpięty na układzie wektorów A; analogicznie definiuje się stożek rozpięty na układzie wektorów B. Umownie możemy przyjąć, że efektywność wektora zerowego, który w tym przypadku nie został wykluczony z rozważań, jest zerowa. Ponieważ wektor zerowy jest elementem neutralnym półgrupy, jaką jest stożek, więc każdy automorfizm nie zmienia jego położenia.

Przez automorfizm stożka $K(A)$ rozumie się układ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ liczb rzeczywistych silnie dodatnich, działających na wektor x należący do stożka $K(A)$ według wzoru

$$\alpha(x) = (\alpha_1a_1)x_1 + \ldots + (\alpha_na_n)x_n,$$

gdzie $x = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, natomiast współczynniki a_i, $i = 1, \ldots n$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Rodzina takich automorfizmów jest podgrupą grupy wszystkich automorfizmów stożka $K(A)$. W takim sensie użyto powyżej terminu „automorfizm".

5. Zakończenie

Celem artykułu jest popularyzacja, objaśnienie i uogólnienie paradoksów statystycznych. Artykuł jest również ostrzeżeniem przed swobodnym manipulowaniem średnimi. Przy okazji zwracamy uwagę, że stożek można uważać za uogólnioną proporcję. Istotą paradoksów statystycznych jest właśnie zmiana proporcji. Jeśli dwa stożki mają wnętrze niepuste, to wtedy mamy do czynienia z paradoksem potencjalnym; przy odpowiedniej zmianie intensywności powstaje paradoks.

Literatura

G. Malinas, J. Bigelow, *Simpson's Paradox*. [w:] Stanford Encyclopedia of Philosophy [online], CSLI, Stanford University, 1 kwietnia 2016, ISSN 1095-5054 [dostęp 2018-01-17] (ang.).

3

Prawo giełdy

Antoni Smoluk, Czesław Szmigiel

Streszczenie: W pracy stan giełdy definiuje się jako parę liczb, z których pierwsza jest aktualną ceną akcji, a druga ceną tej akcji w okresie poprzednim. Zbiór stanów giełdy jest semistożkiem – powierzchnią równowagi. Pokazuje się, jak z danych giełdowych wnioskować o tendencji rozwojowej. Najważniejszym wynikiem jest teza, że w naturze są tylko trzy rodzaje ruchów: laminarny, wirowy i cykliczny.

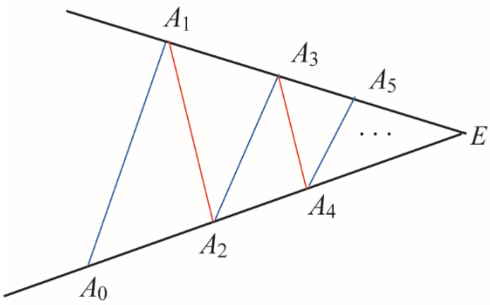
Słowa kluczowe: spirala, wir, równowaga, ruch laminarny, ruch wirowy, ruch cykliczny.

1. Wstęp

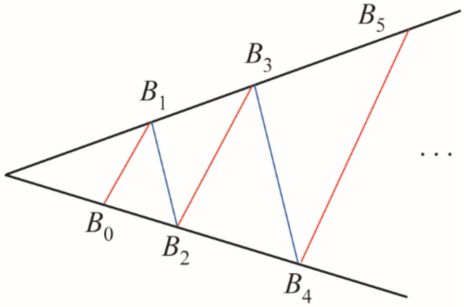
Zasada równowagi jest ogólnym prawem nauki rządzącym również giełdą. Po każdym wzroście kursów akcji następuje spadek, a po spadku wzrost. Takie naturalne zachowanie się stanu giełdy w języku menadżerów giełdowych nazywa się odpowiednio korektą w dół i korektą w górę. Ceny akcji zbliżają się do rzeczywistej wartości przedsiębiorstwa. Giełda weryfikuje ceny kredytu.

2. Liczba złota i równowaga na giełdzie

W pracy pokazuje się, że liczba złota $\chi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ oraz reguła równoległoboku dodawania sił objaśniają zachowanie się giełdy. Są możliwe dwa rodzaje zachowań: zbieżność do stanu równowagi E (rys. 1) i rozbieżność rujnująca gospodarkę (rys. 2). Prawo równoległoboku jest regułą dodawania wektorów. Jeśli wektory tworzą równoległobok tak, że koniec jednego jest początkiem drugiego, to sumą tych wektorów jest przekątna łącząca początek pierwszego wektora z końcem drugiego. Z prawa równoległoboku wynika również twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie optyki mówiące, że kąt padania promienia jest równy kątowi odbicia. Z niego wynika również droga dwóch pojazdów po zderzeniu. Istotą równowagi jest ruch wirowy. Jeśli wir zmierza do wierzchołka stożka generowanego przez spiralę, wtedy mówimy o dążności do równowagi, a gdy spirala oddala się od wierzchołka stożka, wtedy mamy do czynienia z destruktywną rozbieżnością.



Rys. 1. Stabilizacja



Rys. 2. Destabilizacja

Stożek jest powierzchnią stopnia drugiego daną równaniem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},$$

gdzie parametry a, b, c są dowolnymi liczbami dodatnimi; punkt przestrzeni trójwymiarowej (x, y, z) spełniający powyższe równanie leży na powierzchni stożka. Wierzchołek (0, 0, 0) jest punktem osobliwym powierzchni stożka, a prosta o równaniach: $x = 0$, $y = 0$, czyli oś zetów, jest osią stożka. Jeśli $a = b$, to stożek nazywa się stożkiem kołowym, w przeciwnym razie – eliptycznym. Wierzchołek dzieli stożek na dwa półstożki: dolny – odpowiadający niedodatnim wartościom współrzędnej z i górny – dla wartości nieujemnych. Stożek jako powierzchnia równowagi jest prawem przyrody; jest utkany ze spirali wiru. Liczby zespolone są miarą wirów. Jeżeli $z = x + iy$, to wir generowany przez tę liczbę jest funkcją w_z: $R_+^* \times T \to C^*$ określoną wzorem

$$w_z(t,\alpha)=|z|^{\ln t}\exp\big(i(\alpha+\phi\ln t)\big),$$

gdzie $z=\sqrt{x^2+y^2}\exp(i\varphi)$ jest liczbą różną od zera, $t\in R_+^*$, natomiast $u = \exp(i\alpha)$ jest elementem grupy koła $T=\{e^{i\alpha}:0\le\alpha<2\pi\}$, zaś C^* jest multiplikatywną grupą liczb zespolonych różnych od zera (A. Maciuk, A. Smoluk (2015, 2016)). Pochodna infinitezymalna $D_{\inf}$ wiru spełnia warunek

$$D_{\inf} w_z(1,0)=z,$$

gdzie

$$D_{\inf} w_z=\exp\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln w_z\right).$$

Iloczyn $R\times T$ grup jest walcem; grupa ta jest izomorficzna z grupą C^* oraz z cylindrem $R_+^*\times T$. Torus T^2 jest pochodną cylindra; jest to grupa ilorazowa $(R\times T)/Z$, gdzie Z jest grupą liczb całkowitych. Organicznie związane z cylindrem są linie śrubowe, a także linie proste tworzące walca oraz elipsę – walec może być eliptyczny – powstające z przekrojów walca płaszczyzną prostopadłą do jego osi. Izomorfizm grupy walca z grupą multiplikatywną liczb zespolonych utożsamia linie śrubowe ze spiralami. Wynika stąd, że w przyrodzie możliwe są tylko trzy rodzaje ruchów: ruch **laminarny** po liniach prostych, ruch **wirowy** po spiralach i ruch **cykliczny** po elipsach. W rozważaniach giełdowych ograniczamy się do semistożków.

Spirala jest trajektorią – drogą pyłku wprawionego w ruch wirem powietrznym. Rzut stożka na płaszczyznę przechodzącą przez oś stożka obrazuje giełdowe zygzaki: stabilizację (rys. 1) oraz destabilizację (rys. 2). Stan giełdy jest parą liczb (x, y), z których pierwsza oznacza aktualną cenę określonej akcji, a druga – cenę tej akcji w okresie poprzednim. Zbiór stanów giełdy jest pierwszą ćwiartką

$$\left\{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0\right\},$$

gdzie R jest zbiorem liczb rzeczywistych. Zbiór stanów giełdy będący pierwszą ćwiartką płaszczyzny jest semistożkiem. Oznacza to, że punkty tej ćwiartki $(x, 0)$ oraz $(0, x)$ utożsamia się. Po tym utożsamieniu pierwsza ćwiartka staje się przestrzenią topologiczną homeomorficzną z półstożkiem dodatnim. Pierwsza ćwiartka została zwinięta w rożek taki, do którego dawniej pakowano cukierki. Koło o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych wyznacza w pierwszej ćwiartce płaszczyzny R^2 łuk o długości $\frac{\pi}{2}$. Ten łuk przy zwijaniu ćwiartki w rożek zamienia się w elipsę lub koło. Kąt rozwarcia stożka α, mierzony na płaszczyźnie rzutu stożka, zmienia się w granicach od 0 do γ, czyli $0 < \alpha < \gamma$, gdzie $\sin\gamma = \frac{\pi}{32}\sqrt{64 - \pi^2}$. Jeśli $\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{15}}{8}$, to stożek o kącie rozwarcia α_0 jest kołowy. Przybliżone wartości kątów granicznych to około 29° dla α_0 i około 46° dla γ. Płaszczyzna rzutu stożka przechodzi przez jego oś i jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez półprostą $y = x$ i półprostą powstałą ze sklejenia dodatniej półosi x z dodatnią półosią y. Jeżeli α jest małe, to stożek jest spłaszczony wzdłuż osi x, a gdy duże – wzdłuż osi y; jest to konwencja – można przyjąć również odwrotnie. Prostą miarą spłaszczenia jest ułamek $\frac{a}{b}$. Małe kąty rozwarcia stożka oznaczają zwolnienie pulsu giełdy, a duże – jego przyspieszenie. Czas na giełdzie nie jest jednorodny. Jest czas błyskawicznych decyzji, jest czas oczekiwania na rozwój sytuacji. Spirala na stożku jest zadana układem równań:

$$x(t) = ta\cos(\alpha + \varphi \ln t),$$

$$y(t) = tb\sin(\alpha + \varphi \ln t),$$

$$z(t) = tc,$$

gdzie t jest elementem multiplikatywnej grupy R_+^* liczb rzeczywistych dodatnich, natomiast parametry α i φ należą do przedziału $[0, 2\pi]$.

Giełda stabilizuje ceny akcji na poziomie równowagi; ceny akcji odzwierciedlają rzeczywistą wartość przedsiębiorstwa.

3. Współmierność i liniowa zależność

Algorytm Euklidesa jest metodą obliczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych. Jego istotą jest ułamek łańcuchowy. Czym jest ułamek łańcuchowy? Można go utożsamić z prostokątem. Wartością ułamka łańcuchowego, zwanego również ułamkiem ciągłym, jest stosunek boku krótszego do dłuższego. Jeżeli boki są współmierne, to ich stosunek jest liczbą wymierną, a gdy niewspółmierne – niewymierną. Współmierność dwóch odcinków oznacza istnienie trzeciego odcinka mieszczącego się całkowitą liczbę razy w każdym z nich. Odcinki $\sqrt{2}$ oraz $7\sqrt{2}$ są współmierne, natomiast odcinki $\sqrt{2}$ oraz $7+\sqrt{2}$ nie są współmierne. Relacja współmierności jest równoważnością w zbiorze liczb rzeczywistych silnie dodatnich. Nawiasem mówiąc, jest to relacja liniowej zależności w przestrzeni liniowej liczb rzeczywistych R nad ciałem liczb wymiernych Q. Prostokąt zawsze można rozkroić na skończoną liczbę mniejszych prostokątów. Nie każdy jednak prostokąt daje się podzielić na skończoną liczbę kwadratów. Prostokąt można podzielić na skończoną liczbę kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy jego boki są współmierne.

4. Ułamki łańcuchowe i liczba złota

Niech para (a, b) oznacza prostokąt o dłuższym boku a. Z prostokąta tego można odciąć n_0 kwadratów o boku równym krótszemu bokowi prostokąta tak, by pozostały prostokąt miał dłuższy bok równy b; reszta, gdy istnieje, jest prostokątem o dłuższym boku równym b. Z otrzymanym prostokątem postępujemy podobnie; otrzymujemy liczbę n_1. Proces ten albo się kończy, wtedy kolejne wyrazy tego ciągu są zerami, albo można go kontynuować bez końca. Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (n_1) są różne od zera, to boki prostokąta są niewspółmierne. Dany jest więc ułamek łańcuchowy

$$1/\left(n_0 + 1/\left(n_1 + 1/\left(n_2 + \ldots\right)\right)\right),$$

czyli

$$\cfrac{1}{n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ldots}}}.$$

Istnieje tylko jeden taki prostokąt, z dokładnością do podobieństwa, z którego w każdym kroku można odciąć tylko jeden kwadrat. Taki prostokąt nazywa się prostokątem złotym. Wartością ułamka łańcuchowego zdefiniowanego przez ciąg stacjonarny samych jedynek jest liczba złota. Jest więc

$$\chi = 1/\left(1+1/\left(1+1/\left(1+\ldots\right)\right)\right).$$

Jeśli proces odcinania kwadratów kończy się, to bok ostatniego kwadratu jest liczbą różną od zera; jest to największy wspólny dzielnik liczb naturalnych a i b. Wartość ułamka łańcuchowego jest w tym przypadku liczbą wymierną. W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko prostokątem złotym.

5. Ciąg Fibonacciego i zygzaki giełdowe

Proces stabilizujący polegający na odcinaniu z prostokąta kwadratów zdefiniowany jest macierzą

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

albowiem: $x_0 = a$, $y_0 = b$ oraz $x_{n+1} = y_n$, $y_{n+1} = x_n - y_n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Macierz $\mathbf{U}$ jest macierzą symetryczną, $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}$, więc ma dwie rzeczywiste wartości własne: $\sigma_{\mathbf{U}1} = \chi$, $\sigma_{\mathbf{U}2} = -\dfrac{1}{\chi}$. Liczba χ jest takim jedynym prawdopodobieństwem, którego kwadrat równa się prawdopodobieństwu zdarzenia przeciwnego. W języku potocznym liczbie złotej odpowiada ułamek 2/3 oznaczający zdecydowaną przewagę lub absolutną większość.

Wektory własne macierzy $\mathbf{U}$ to $\mathbf{u}_1 = \left(\dfrac{1}{\chi},\ 1\right)$, $\mathbf{u}_2 = (-\chi,\ 1)$. Ciąg wektorów $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_n)$ jest zbieżny do wektora zerowego, gdzie $\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{K}\mathbf{w}_n$, $n \in N$, natomiast $\mathbf{K} = \chi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Macierz $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ można obrazowo nazwać pulsem giełdy: wzrost, spadek, wzrost, spadek i tak dalej. Operator $\mathbf{P}$ jest symetrią osiową. Linią symetrii jest prosta $y = x$. Oś symetrii przy rzutowaniu stożka pokrywa się z osią stożka; gdy tak nie jest, wystarczy zmienić początek układu współrzędnych i obrócić oś stożka. Stożki giełdowe ulegają ciągłej deformacji. Oczywiście $\mathbf{P}^{2n} = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}^{2n+1} = \mathbf{P}$, gdzie $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową. Wektor początkowy $\mathbf{w}_0$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{U}$ odpowiadającym dodatniej wartości własnej. Ciąg $(\mathbf{w}_n)$ jest orbitą wektora $\mathbf{w}_0$

generowaną przez operator **K**. Orbita jest ciągiem kolejnych obrazów: $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{K}\mathbf{w}_n$. Z prawa równoległoboku wynika, że ciąg długości wektorów $A_{2n}A_{2n+2} = A_{2n}A_{2n+1} + A_{2n+1}A_{2n+2}$ jest ciągiem Fibonacciego (rys. 1, rys. 5). Stosunek długości wektorów $A_{2n+1}A_{2n+3}$ do $A_{2n}A_{2n+2}$ jest równy χ (rys. 1): cena się stabilizuje – układ zmierza do stanu równowagi. Macierz **P** jest korektą – giełdowe wahadło.

Analogicznie jest w przypadku destabilizacji ceny akcji. Teraz stosunek długości wektora $B_{2n}B_{2n+2} = B_{2n}B_{2n+1} + B_{2n+1}B_{2n+2}$ do długości wektora $B_{2n+1}B_{2n+3}$ jest równy $\frac{1}{\chi}$ (rys. 2). Tym razem dokleja się kolejne kwadraty, a nie obcina (rys. 5).

Proces doklejania reprezentuje macierz $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Spektrum tej macierzy to liczby $\sigma_{\mathrm{V}1} = -\chi$, $\sigma_{\mathrm{V}2} = \frac{1}{\chi}$. Wektory własne to odpowiednio $\mathbf{V}_1 = (-\chi, 1)$, $\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\chi}, 1\right)$. Wektory $\mathbf{w}_n$ ciągu $\mathbf{w}$ są kolejno mnożone przez operator $\frac{1}{\chi}\mathbf{P}$, gdzie $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_2$.

Przykłady

Dane empiryczne są ciągiem (x_n) kursów akcji trzech firm występujących na warszawskiej giełdzie. Dotyczą one odmiennych przedziałów czasowych i są zbierane z różną częstotliwością. Test teorii rozpoczynamy od spółki AMICA. Dane zaobserwowano 9 lutego 2018 roku; ceny notowano, z częstotliwością co 10 minut, od godziny 14.49. W ciągu (x_n) danych giełdowych jest tylko 9, chociaż teoretyczny szereg czasowy jest nieskończony. Jest więc:

$$x_0 = 126{,}20;\ x_1 = 126{,}20;\ x_2 = 127{,}20;\ x_3 = 127{,}40;\ x_4 = 127{,}40;$$
$$x_5 = 127{,}60;\ x_6 = 127{,}00;\ x_7 = 127{,}60;\ x_8 = 127{,}40.$$

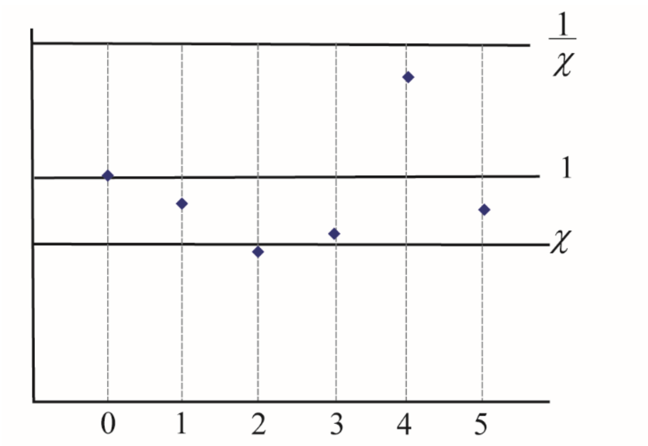
Wielkości teoretyczne $\delta_i = \sqrt{\frac{(x_{i+3} - x_{i+2})^2 + (x_{i+2} - x_{i+1})^2}{(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}}$ są równe bądź wynoszą χ – stabilizacja, bądź $\frac{1}{\chi}$ – destabilizacja. Ten proces jest stabilny, więc podane ceny akcji są w przybliżeniu ceną równowagi.

Firmę AMREST reprezentują dane mierzone dwa razy na dobę: o godzinie 12 i o 17, począwszy od 5 lutego 2018 roku. Jest więc

$$x_0 = 430{,}00;\ x_1 = 435{,}00;\ x_2 = 419{,}50;\ x_3 = 434{,}00;\ x_4 = 423{,}50;$$

$$x_5 = 420{,}00;\ \ x_6 = 427{,}00;\ \ x_7 = 418{,}00;\ \ x_8 = 415{,}50.$$

Indeksy empiryczne ∂_i, $i = 0, ..., 5$ przedstawiono na rys. 3.

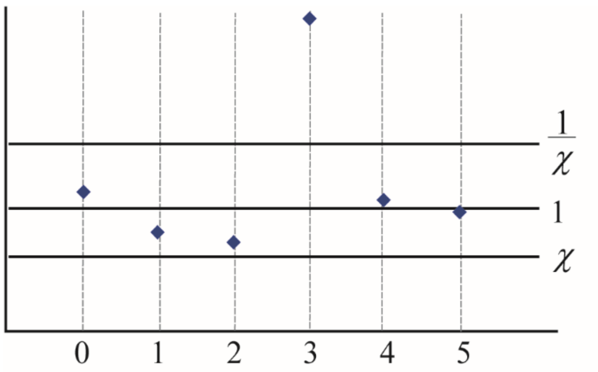


Rys. 3. Indeks stabilności akcji firmy AMREST

Z rysunku łatwo odczytać stan giełdy.
Bank PKO SA reprezentują dane:

$$x_0 = 128{,}00;\ x_1 = 130{,}15;\ x_2 = 128{,}55;\ x_3 = 131{,}50;\ \ x_4 = 132{,}00;$$
$$x_5 = 134{,}30;\ \ x_6 = 140{,}50;\ \ x_7 = 135{,}90;\ \ x_8 = 129{,}15;$$

są to dane tygodniowe, mierzone w środy o godzinie 12.00, począwszy od 13 grudnia 2017 roku.



Rys. 4. Zmienność kursu akcji PKO SA

6. Zakończenie i wnioski

Podsumowując, należy zauważyć, że procesem stabilizacji rządzi liczba χ, czyli ciąg geometryczny zbieżny, a procesem destabilizacji jej odwrotność – ciąg geometryczny rozbieżny. Praktyczna weryfikacja formułowanej w tej pracy złotej reguły sprowadza się do zbadania stosunków długości wektorów określonych wyżej. Stożek równowagi nie jest stały i ulega częstym zmianom. Znaczenie prognostyczne tego odkrycia jest niewielkie. Może to być dobry wskaźnik powrotu do normalności po większych zaburzeniach finansowych. Empiryczne stosunki δ są zmienne i ich wartości bliskie są liczbie złotej lub jej odwrotności: stabilizacja lub jej brak. Jednocześnie zwracamy uwagę na rys. 5, który jest nieskończoną mapą utworzoną z samych, i to różnych, kwadratów.

Na zakończenie kilka słów tyczących się symetrii powierzchni równowagi, jaką jest stożek. Niech W oznacza komutatywną półgrupę słów w alfabecie trójelementowym $\{a, b, c]$. Półgrupa ta, oprócz aksjomatu przemienności, spełnia jeszcze trzy dodatkowe warunki: $aa = bb = cc = I$, gdzie I oznacza słowo puste – bez liter; I jest jednością tej półgrupy. Problem równoważności słów jest tu prosty; istnieje osiem klas słów równoważnych $\{I, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$. Ze słowem I są równoważne słowa, w których każda litera występuje parzystą liczbę razy; ze słowem a równoważne są te słowa, w których litera a występuje nieparzystą liczbę razy, a pozostałe litery – parzystą; ze słowem ac równoważne są wszystkie słowa, w których litera b występuje parzystą liczbę razy, a pozostałe litery – nieparzystą *et cetera*. Ośmioelementowa grupa klas abstrakcji jest grupą symetrii stożka. Są to w istocie przekształcenia przestrzeni R^3 w siebie – najprostsze z możliwych – przy których powierzchnia stożka jest inwariantna. Grupa ta ma naturalną reprezentację macierzową. Element neutralny I jest macierzą jednostkową; elementowi a odpowiada symetria lustrzana S_x w płaszczyźnie Oyz, czyli

$$\mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicznie jest:

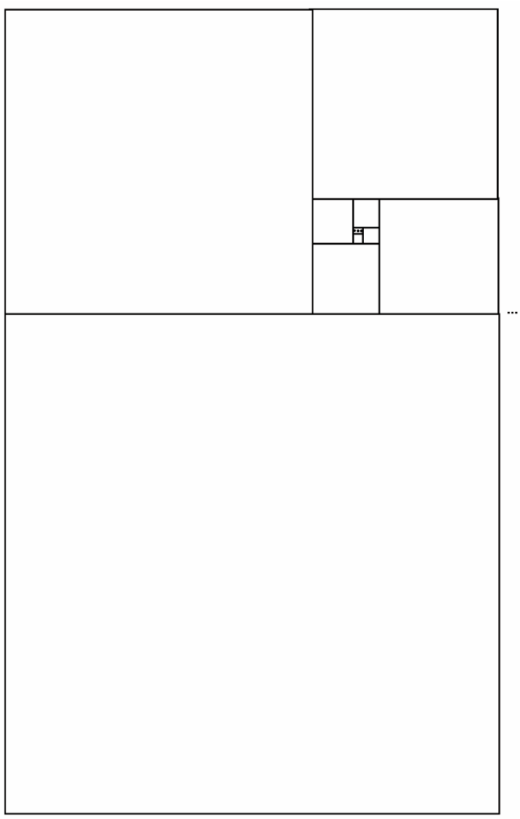
$$\mathbf{S}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i

$$\mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pozostałe elementy są reprezentowane iloczynami macierzy odbić lustrzanych. Element *abc* reprezentowany jest macierzą $\mathbf{S}_{xyz} = -\mathbf{I}$. Abstrakcyjne słowa stały się fizycznym ciałem – symetrią. Tablica Cayleyego tej grupy dana jest macierzą

$$\mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} I & S_x & S_y & S_z & S_{xy} & S_{xz} & S_{yz} & S_{xyz} \\ S_x & I & S_{xy} & S_{xz} & S_y & S_z & S_{xyz} & S_{yz} \\ S_y & S_{xy} & I & S_{yz} & S_x & S_{xyz} & S_z & S_{xz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & I & S_{xyz} & S_x & S_y & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y & S_x & S_{xyz} & I & S_{yz} & S_{xz} & S_z \\ S_{xz} & S_z & S_{xyz} & S_x & S_{yz} & I & S_{xy} & S_y \\ S_{yz} & S_{xyz} & S_z & S_y & S_{xz} & S_{xy} & I & S_x \\ S_{xyz} & S_{yz} & S_{xz} & S_{xy} & S_z & S_y & S_x & I \end{pmatrix}.$$



Rys. 5. Stabilizacja i destabilizacja

Praca daje teoretyczne podstawy nauce o giełdzie. Sprowadzają się one do połączenia dwóch powszechnie znanych praw nauki: reguły równoległoboku dodawania wektorów z ciągiem Fibonacciego, opisującym naturalny wzrost. Liczba złota, która rządzi proporcjami architektonicznymi, znajduje swoje miejsce również na giełdzie. Wiedziano już o tym wcześniej; przy omawianiu tzw. fal Elliotta pojawia się również liczba złota. Liczba złota jest teoretycznym odpowiednikiem liczby 2/3 w języku potocznym, oznaczającym zdecydowaną większość (J. Łyko (2000)), (J. Łyko, A. Smoluk (2014)).

W stosunku do wcześniejszej literatury praca jednolicie opisuje zachowanie giełdy.

Literatura

A. Maciuk, A. Smoluk (2015). *Vortices and complex numbers*. Mathematical Economics 11(18), s. 69-76.

A. Maciuk, A. Smoluk (2016). *Vortices on a pinched sphere*. Mathematical Economics 12(19), s. 53-59.

J. Łyko, A. Smoluk (2014). *Tema con variazioni, czyli o regule 2/3*, [w:] J. Pociecha [red.], *Statystycy, ekonometrycy i matematycy Polski Południowej dla rozwoju badań społeczno-ekonomicznych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, s. 43-55.

J. Łyko (2000). *Twierdzenia Arrowa a ordynacje wyborcze*, [w:] A. Smoluk [red.], *Elementy metrologii ekonomicznej*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.

4

Trójkąt – król wieloboków, czyli traktat o przyczynie i skutku

Antoni Smoluk, Czesław Szmigiel

Omnes trivum perfektum

Jeśli wieloboki obierałyby króla, to jaki wielobok powinien zostać królem tej monarchii? Jaki wielobok jest najważniejszym wielokątem? Ankietowano, nie całkiem przypadkowo wybrane, 14 osób. Na podane podwójnie pytanie, by wykluczyć wątpliwości, o co chodzi, w odpowiedzi otrzymano wyniki: 8 osób wskazało trójkąt, 2 kwadrat, 2 ośmiobok, 1 sześćdziesięciobok, a jedna nie miała pojęcia, czym jest wielobok. Wśród ankietowanych było 6 matematyków, w tym jeden profesor i 2 doktorów, 2 inżynierów z doktoratem, 2 techników z wykształceniem średnim lub niepełnym wyższym, 2 ekonomistów, 1 chemik i 12-letni Piotruś. Profesor matematyki wskazał na tryb o 30 zębach losowej wysokości i 30 wgłębieniach losowej głębokości. Przypuszczalnie ta odpowiedź była żartobliwa, bo osoba ta lubi prokopy; prokop to sześćdziesiąta część całości – analogon procenta. Jest to jedyna figura wklęsła wśród otrzymanych odpowiedzi. Przypuszczalnie jest to symboliczna gwiazda mrugająca o 30 promieniach wskazująca królom drogę do Betlejem. Pozostali matematycy, inżynierowie i chemik wskazali na trójkąt; technicy wybrali kwadrat, ekonomistka i Piotruś wskazali na ośmiobok, a księgowa zapomniała, czym jest wielobok. Osoby proponujące na króla ośmiobok uważają, że król powinien mieć dużo boków; wszak hinduscy bogowie mają kilka par rąk i więcej innych członków. Król musi się wyróżniać spośród swoich podwładnych. Ankieta miała za cel nie tyle wybranie króla wieloboków, ile rozeznanie w kulturze matematycznej, naukowej i ogólnej naszego społeczeństwa. Dwóm odpowiedziom towarzyszyła wzmianka o sześcioboku; jest to figura występująca w przyrodzie. Sześciobok ma piękne własności optymalne; naturalnie mowa tu o sześcioboku foremnym. Kwadrat jest czworobokiem idealnym w tym sensie, że definiuje jednostkę pola oraz jest tylko jeden z dokładnością do podobieństwa. Nikt z ankietowanych nie wskazał na bardzo popularny dwunastobok, bo prawie każdy ma go na ręce – jest to półdobowy zegar, a ponadto tuzin.

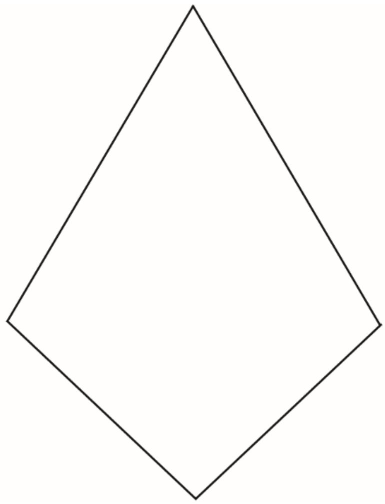
Czym jest trójkąt? Są to trzy liczby rzeczywiste: a, b, c, zwane bokami trójkąta, spełniające warunki:

$$0 < a \leq b \leq c < a + b.$$

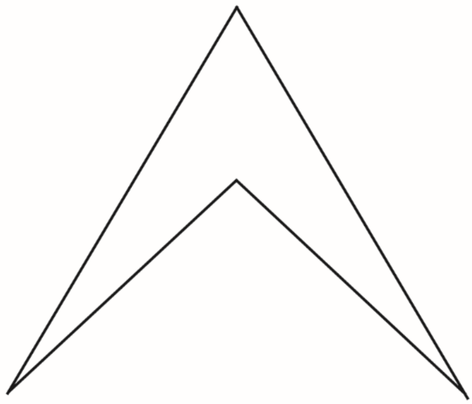
Pojęcie trójkąta jest bytem platońskim mieszczącym w sobie wszystkie możliwe trójkąty. Trójkąty dzielą się na: ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne. Naturalnie suma wszystkich kątów w trójkącie równa się π. Kąty α, β i γ leżą odpowiednio naprzeciw boków a, b i c. W każdej klasie trójkątów wyróżnia się trójkąty równoramienne. Dwa trójkąty równoramienne prostokątne o równej przeciwprostokątnej tworzą kwadrat. Tylko wśród trójkątów ostrokątnych równoramiennych istnieje trójkąt równoboczny. Wszystkie trójkąty równoboczne, podobnie jak kwadrat, są do siebie podobne. Można więc mówić, że jest tylko jeden trójkąt równoboczny, podobnie jak kwadrat. Kąty trójkąta spełniają warunki: $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < \pi$. Tylko dwa kąty α i β, takie, że $\alpha + \beta < \pi$, definiują całą klasę trójkątów podobnych. Wszystkie trójkąty, z dokładnością do podobieństwa, można utożsamić z trójkątem o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $C = (0, \pi)$ bez boków BC i CA. Jest to królewski dwór trójkąta rządzącego państwem wieloboków. Trójkąt jest figurą niezwykłą, choć najprostszą. O samych trójkątach płaskich, pomijając trójkąty sferyczne, można prowadzić roczny dwugodzinny wykład, i to pewnie bez wyczerpania tematu. Wieloboki powstają z trójkątów. Wielobok jest figurą płaską dzielącą płaszczyznę na dwie części: wewnętrzną i zewnętrzną, której brzeg jest złożony z odcinków zwanych bokami. Punkty, w których łączą się dwa boki, nieleżące na jednej prostej, nazywa się wierzchołkami wieloboku. Wieloboki dzielą się na wypukłe i wklęsłe. Wieloboki wklęsłe dzielą się na koła zębate, czyli gwiazdy, oraz na figurę zwaną skrzydłem. Podział wieloboków wypukłych jest bogatszy; wśród nich wyróżnia się rozety – wieloboki foremne. Rodzeństwo czworoboków jest najbogatsze: czworobok dający się wpisać w koło, trapez, trapez równoramienny, równoległobok, prostokąt, romb, a księciem tej rodziny jest kwadrat.

Trójkąty mogą być tylko wypukłe. Istnieją już wklęsłe czworoboki, pięcioboki itd. Wielobok można triangulować – podzielić na trójkąty. Podstawą geodezji jest trójkąt. Jeśli weźmiemy półgrupę słów w alfabecie jednoliterowym t, to słowa tej półgrupy są wielobokami. Tutaj figury utożsamia się, gdy dzielą się na równą liczbę trójkątów. Słowo jednoliterowe t oznacza każdy trójkąt, słowo dwuliterowe tt. – czworobok, trójliterowe ttt – pięciobok itd. Nazwy wielobok i wielokąt są synonimiczne. Trójkąt nie jest jednakowoż trójbokiem. Jest to przypuszczalnie związane z daleką przeszłością, gdy mieszkaliśmy w czworościennych szałasach. Trójkąt równoboczny był podłogą, a trzy ściany boczne, będące również trójkątami równobocznymi, utworzone z gałęzi, zamykały całość. Środek tego pierwotnego domu wypełniało ognisko; poszczególne kąty były przeznaczone dla ludzi: dzieci, rodziców, dziadków. Zwrot *mieć własny kąt* przypuszczalnie jest tak stary jak pierwotny dom.

W polskich szkołach uczy się nieco o trójkątach, wcześniej mówi się o kwadratach i prostokątach, później o równoległobokach, trapezach i na tym kończy się znajomość wieloboków. Z oczywistych powodów wspomina się o sześcioboku foremnym i ośmioboku foremnym, bo łatwo go otrzymać z kwadratu. Bardzo rzadko wymienia się latawiec pod imieniem romboidu (rys. 1) i całkowicie zapomina się o skrzydle (rys. 2), które można nazwać wklęsłym latawcem. Naturalnie znają uczniowie spłaszczony kwadrat, czyli popularne karo, zwane rombem. Wzór na pole kwadratu, rombu, latawca i skrzydła jest jeden: pół iloczynu przekątnych. Latawiec jest figurą wypukłą utworzoną z dwóch trójkątów równoramiennych o wspólnej podstawie, skrzydło zaś powstaje również z trójkątów równoramiennych o wspólnej podstawie, tylko jest figurą wklęsłą – w obu przypadkach podstawę odrzuca się. Skrzydła latają podobnie jak latawce, australijski bumerang przypomina nieco skrzydło, owoce klonów mają kształt skrzydła.

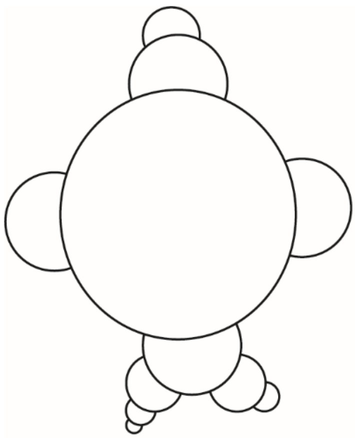


Rys. 1. Latawiec

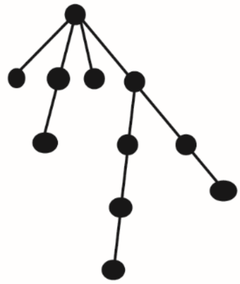


Rys. 2. Skrzydło

Wieloboki wypukłe klasyfikuje się łatwo. W szerokim sensie można uważać, że jest tylko jeden wielobok wypukły. Z klasyfikacją wieloboków wklęsłych sprawa nie jest taka prosta. Wypukłość jest jedna, wklęsłości jest wiele. Linię mającą punkt wspólny z wielobokiem i taką, że wielobok leży po jednej jej stronie, nazywa się prostą podpierającą. Prosta podpierająca wielobok wklęsły i dzieląca go na dwa wieloboki o wspólnym boku utworzonym przez tę prostą nazywa się uszkiem. Naturalnie jedna prosta w szczególnym przypadku może wyznaczyć kilka takich uszek. Wielobok wklęsły ma zwykle kilka takich uszek. Są to uszka rzędu pierwszego. Liczba uszek k nie przekracza liczby n, gdzie $n + 3$ jest liczbą boków. Odcięte w pierwszym kroku wieloboki mogą mieć również uszka; są to uszka rzędu drugiego. Następnie idą uszka rzędu trzeciego, czwartego itd. Łączna liczba uszek nie przekracza n. W ten sposób klasyfikuje się topologicznie wieloboki wklęsłe. Dołączenie wszystkich uszek czyni z takiego wieloboku rodzaj kaktusa (rys. 3).



Rys. 3. Uszka – agawa



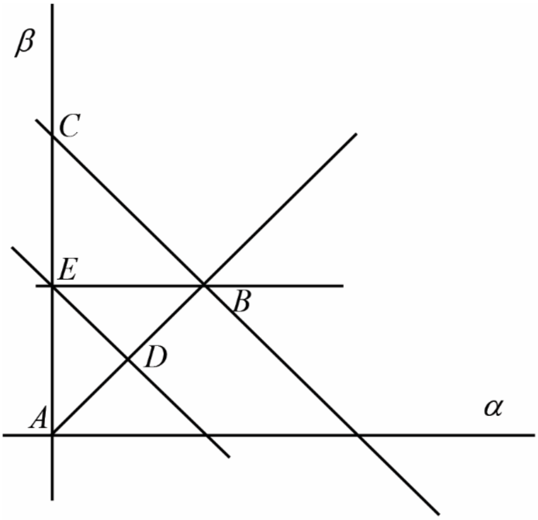
Rys. 4. Dendryt

Kaktusy to dendryty. Dendryty klasyfikują wieloboki wklęsłe. Czym jest dendryt? Jest to skończony, uporządkowany niepusty zbiór mający jeden element maksymalny i bez cykli. Brak cykli oznacza, że dla dowolnych dwóch elementów x, y istnieje tylko jedna droga od x do y. Punkty wyznaczające drogę są bezpośrednimi sąsiadami i ułożone są w porządku monotonicznym – wzrastają lub maleją. Kaktusowi (rys. 3) odpowiada dendryt (rys. 4). Uszka przechodzą na odcinki. Wszystkie drzewa genealogiczne są naturalnie dendrytami. Dendryty tworzą uogólnioną półgrupę – istnieje uogólniony produkt. Iloczynem dendrytów D_1 i D_2 jest dendryt D powstający przez dołączenie do wybranego elementu minimalnego dendrytu D_1 elementu maksymalnego dendrytu D_2.

Całą rodzinę trójkątów podobnych utożsamiamy z parą (α, β) kątów spełniających warunki:

$$0 < \alpha \leq \beta \text{ i } \alpha + \beta < \pi.$$

Wszystkie trójkąty z dokładnością do podobieństwa tworzą trójkąt ABC bez boków AC i BC, gdzie $A = (0, 0)$, $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $C = (0, \pi)$ (rys. 5). Odcinek AB bez końców to wszystkie trójkąty równoramienne, odcinki BE i DE bez końców tworzą trójkąty prostokątne. Punkt D to trójkąty prostokątne i równocześnie równoramienne, czyli połowa kwadratu przeciętego diagonalą. Trójkąt ADE bez brzegów jest rodziną trójkątów rozwartokątnych; kąt γ jest większy od kąta prostego. Otwarty trójkąt DBE tworzą trójkąty ostrokątne, natomiast otwarty BCE tworzą również trójkąty rozwartokątne, tylko tym razem kąt β jest większy od kąta prostego. Rodziny trójkątów prostokątnych i równoramiennych nie są stabilne. Otwarte trzy trójkąty wymienione wyżej są zbiorami stabilnymi. Stabilne są więc trójkąty ostrokątne, ale nie równoramienne, i stabilne są trójkąty rozwartokątne, ale również nie równoramienne. Mała zmiana parametrów nie powoduje zmiany typu trójkąta: trójkąt ostrokątny zmienia się na inny trójkąt ostrokątny, a rozwartokątny na inny trójkąt rozwartokątny. Trójkąty prostokątne i równoramienne tej własności nie mają.



Rys. 5. Dwór królewski trójkątów

Trójkąt jako pojedynczy egzemplarz, a nie rodzina figur podobnych, jest uporządkowaną trójką liczb rzeczywistych (a, b, c) taką, że

$$0 < a \leq b \leq c \;\text{ i }\; c < a + b.$$

Rodzina wszystkich trójkątów T jest stożkiem bez wierzchołka w przestrzeni R^3. Stożek w przestrzeni liniowej jest z definicji zbiorem wypukłym zamkniętym ze względu na dodawanie wektorów i mnożenie wektorów przez skalary dodatnie. Jest to stożek bez wierzchołka. Stożek z wierzchołkiem jest półgrupą ze względu na dodawanie wektorów. Niech k oznacza dowolną liczbę rzeczywistą silnie większą od jedności; k-trójkątem nazywa się taki trójkąt (a, b, c), który spełnia dodatkowy warunek

$$a^k + b^k = c^k.$$

Jeżeli $1 < k < 2$, to k-trójkąty są rozwartokątne, gdy $k = 2$, to trójkąt jest prostokątny, a gdy $k > 2$ – to ostrokątny. Nie ma k-trójkątów równobocznych, ale istnieją k-trójkąty równoramienne. Dla dowolnych a, b i k, spełniających odpowiednie warunki, istnieje c takie, że (a, b, c) jest k-trójkątem. Nie istnieje k-trójkąt równoboczny, ale istnieją trójkąty równoramienne. Trójkątem Fermata nazywamy taki k-trójkąt, którego zarówno boki, jak i wykładnik k są liczbami naturalnymi. Jeżeli wykładnik $k = 2$, to naturalnie istnieją trójkąty Fermata; są to dobrze znane trójkąty Pitagorasa. Typowym przykładem trójkąta Pitagorasa jest znany już budowniczym egipskim trójkąt (3, 4, 5). Słynna hipoteza Fermata mówi, że nie istnieje trójkąt o bokach będących liczbami naturalnymi, gdy parametr k jest liczbą naturalną postaci $k = n + 3$.

Lemat. Jeżeli funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \ln (1 + x)$, gdzie $x \in R_+$ – dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, to f jest funkcją podaddytywną, czyli

$$f(x+y) \le f(x) + f(y).$$

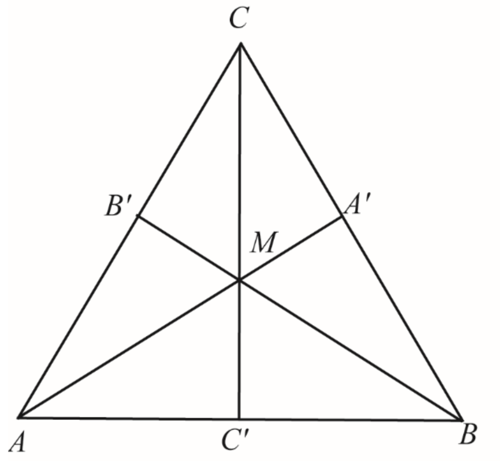
Funkcje podaddytywne – subaddytywne – są dla ekonomii typowe. Dowód lematu jest prostą konsekwencją faktu, że pochodna funkcji f maleje do zera, gdy x rośnie, a jej wartość w zerze jest równa 1.

Łatwo dowodzi się, korzystając z lematu, że jeśli boki k-trójkąta są liczbami naturalnymi, to $\ln c < \ln a + \ln b$. Jest bowiem $c < a + b$, więc $c + 1 \le a + b$. Wynika stąd, na podstawie lematu, że $\ln c \le \ln (a - 1 + b - 1 + 1) < \ln x + \ln y$.

Hipotezę Fermata można uogólnić. Liczby naturalne bez zera są multiplikatywną i komutatywną półgrupą słów w alfabecie nieskończonym, który tworzą liczby pierwsze. Indeksem liczby naturalnej jest długość słowa w tej półgrupie. Liczba 1 ma indeks 0, każda liczba pierwsza ma indeks 1, a liczby złożone mają indeksy większe od jedności. Jeżeli liczba naturalna jest k-tą potęgą, to jej indeks jest podzielny przez k, ale gdy indeks liczby jest podzielny przez k, to nie musi być ona k-tą potęgą.

Uogólniona hipoteza. Indeks sumy k-tych potęg nie jest podzielny przez k, gdy k jest liczbą naturalną postaci $n + 3$.

Jeśli prawdziwa jest uogólniona hipoteza, to z niej łatwo wynika hipoteza Fermata. Informacja o trójkątach Fermata ma utwierdzić czytelnika, że wykład akademicki poświęcony trójkątom nie jest prostym geometrycznym ćwiczeniem. Należy go rozpocząć od podania aksjomatycznej definicji płaszczyzny i udowodnić, że suma kątów w dowolnym trójkącie jest stała i równa się π. Twierdzenie to jest równoważne aksjomatowi mówiącemu, że przez każdy punkt nieleżący na prostej przechodzi dokładnie jedna prosta do niej równoległa. Z własności trójkąta wyprowadza się następnie twierdzenie o kątach środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku: kąt środkowy jest dwa razy większy od wpisanego. Dalej idzie twierdzenie sinusów, następnie uogólnienie twierdzenia Pitagorasa, czyli twierdzenie cosinusów, i tak dalej. Zatrzymamy się chwilę dłużej nad pięknym twierdzeniem Cevy. Punkty A', B' i C', leżące odpowiednio we wnętrzach boków BC, AC i AB, nazywają się układem Cevy, jeżeli proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie M (rys. 6). Giovanni Ceva był włoskim matematykiem żyjącym na przełomie XVI i XVII wieku.



Rys. 6. Kartezjusz – geometria analityczna

Twierdzenie Cevy. Układ (*A'*, *B'*, *C'*) jest układem Cevy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AC'}{C'B}\times\frac{BA'}{A'C}\times\frac{CB'}{B'A}=1.$$

Twierdzenie to można dowodzić metodami geometrii analitycznej. Dowód jest ideowo prosty, ale rachunki żmudne. Cała inwencja w tym przypadku sprowadza się do wyboru współrzędnych wierzchołków trójkąta. Najwygodniej przyjąć: $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$, $C = (b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ i $M = (u, w)$. Dalsze rachunki są standardowe. Piszemy 6 równań prostych i obliczamy współrzędne punktów przecięcia odpowiednich prostych; na końcu obliczamy długości potrzebnych odcinków i sprawdzamy, czy stosunki spełniają tezę.

Metoda geometrii syntetycznej jest prosta w zakresie transformacji wzorów, lecz jej podstawą jest nietrywialny pomysł: należy narysować prostą równoległą do podstawy *AB* i przechodzącą przez wierzchołek *C*, a następnie przedłużyć prostą *AA'* i *BB'* do przecięcia z tą dodatkową prostą odpowiednio w punktach *A''* i *B''* (rys. 7). Niech: $AC' = z$, $BA' = x$, $CB' = y$; przy tych oznaczeniach teza twierdzenia Cevy sprowadza się do wzoru:

$$\frac{x}{a-x}\times\frac{y}{b-y}\times\frac{z}{c-z}=1.$$

Łatwo zauważyć, że powstały 4 pary trójkątów podobnych. Trójkąt *B'CB''* jest podobny do trójkąta *B'AB*, więc z twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{y}{CB''}=\frac{b-y}{c};$$

trójkąt *MC'B* jest podobny do *MCB"*, więc:

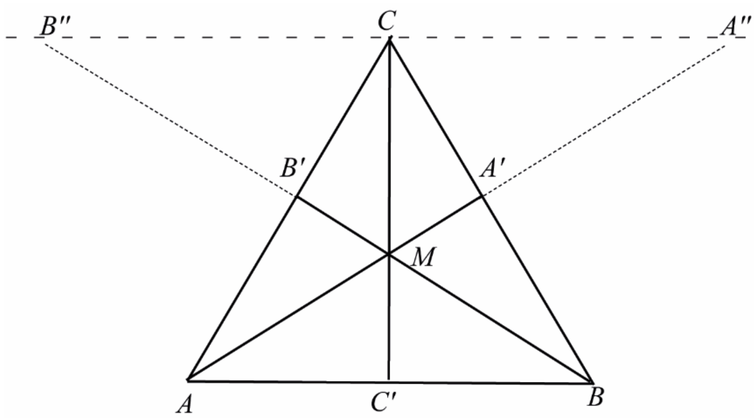
$$\frac{C'M}{c-z}=\frac{CM}{CB"};$$

trójkąt *A'AB* do *A'A"C*:

$$\frac{x}{c}=\frac{a-x}{A"C};$$

i trójkąt *C'MA* do *CMA"*, więc:

$$\frac{z}{C'M}=\frac{A"C}{CM}.$$



Rys. 7. Tales – geometria syntetyczna

Tezę otrzymuje się przez pomnożenie proporcji stronami i podzielenie lewej strony przez prawą. Trzy parametry x, y, z występujące w tezie twierdzenia Cevy spełniają warunki: $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$. Tylko dwa z nich można obrać dowolnie, trzeci jest funkcją obranej pary. Powstają w ten sposób trzy funkcje f_A, f_B, f_C. Funkcja

$$f_A(y,z)=a\frac{(b-y)(c-z)}{(b-y)(c-z)+yz}$$

jest określona we wnętrzu prostokąta $P_A=[0,b]\times[0,c]$. Funkcja

$$f_B(x,z)=b\frac{(a-x)(c-z)}{(a-x)(c-z)+xz}$$

jest określona we wnętrzu prostokąta $P_B=[0,a]\times[0,c]$. Wreszcie trzecia funkcja

$$f_C(x,y) = c\frac{(a-x)(b-y)}{(a-x)(b-y)+xy}$$

jest określona we wnętrzu prostokąta $P_C = [0,a]\times[0,b]$. Całki z tych funkcji po odpowiednich prostokątach są równe, czyli $\iint\limits_{P_A} f_A dydz = \iint\limits_{P_B} f_B dxdz = \iint\limits_{P_C} f_C dxdy = \frac{1}{2}abc.$ Wzory te łatwo sprawdzić. W pierwszej całce należy wprowadzić nowe zmienne $y = by'$, $z = cz'$; po tej zmianie parametrów otrzymuje się nową funkcję $g(y,z) = \frac{(1-y)(1-z)}{(1-y)(1-z)+yz}$, gdzie dla wygody primy opuszczono. Całka podwójna z funkcji f_A po prostokącie P_A równa jest całce podwójnej z funkcji g po kwadracie $S = [0, 1] \times [0, 1]$ ze współczynnikiem abc. Analogicznie jest z dwiema pozostałymi całkami. Aby zakończyć obliczenia wystarczy zauważyć, że funkcja $h(y,z) = \frac{yz}{(1-y)(1-z)+yz}$ jest symetrycznym odbiciem funkcji g w diagonali kwadratu f przechodzącej przez wierzchołki (1, 0), (0, 1), czyli $h(yz) = g(1-z, 1-y)$. Oczywiście $h + g = 1$ i całka z funkcji h po kwadracie F jest równa całce z funkcji g po tym kwadracie. Wynika stąd, że całka z funkcji f_A jest równa $\frac{1}{2}abc$, zgodnie z tym, co powiedziano wcześniej. Wartość przeciętna funkcji f_A na prostokącie P_A jest równa $\frac{1}{2}a$; całkę podzielono przez pole bc prostokąta P_A. Parametr x ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, a]$. Podobnie jest z pozostałymi dwoma parametrami y i z. Parametr y ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, b]$, a parametr z rozkład jednostajny na odcinku $[0, c]$. Trójkąt ABC zamienił się w ten sposób na cebrzyk o trzech klepkach różnej wysokości, gdy boki miały różne długości. Te wysokości to odwrotności długości boków, czyli wartości funkcji gęstości rozkładów jednostajnych.

Królem wieloboków jest naturalnie trójkąt. Jaki rozkład jest królem wśród jednowymiarowych rozkładów? Uczestników wykładu firmowanego przez Polskie Towarzystwo Statystyczne zapytano o najważniejszy rozkład jednowymiarowy. Rozkład jednowymiarowy to drut nieskończenie długi ważący 1 kilogram. Mogą być na nim kawałki, w których nie ma masy, ale również mogą być nanizane paciorki, czyli punkty mające masę. Na około 18 słuchaczy tego statystycznego wykładu na ankietę odpowiedziało tylko 9 osób, dziesiąta kartka była z pouczeniem ankietera. *Warunkiem prowadzenia badań ankietowych jest zreferowanie uczestnikom celów*. Nie ma badań bez wyraźnie określonego celu. Jest to cel pierwotny, wstępny. Dopiero w trakcie badań ostateczny cel może się wyłonić. Celem badań naukowych jest poznanie natury, odkrycie praw przyrody. Warunkiem koniecznym badań ankietowych jest znajomość celu nie przez badanych, ale przez badającego. Przeprowadzający ankietę powinien wiedzieć, o co pyta. Ankietowani zwykle nie powinni znać tego celu, bo w przypadku znajomości celu odpowiedzi mogą być sfałszowane. Liczą się szczere odpowiedzi podawane bez konsultacji z kimkolwiek; taka ankieta ma wartość poznawczą. Celem tej ankiety było poznanie kultury naukowej, matematycznej i ogólnej uczestników tego wykładu. Trzech uczestników tej ankiety wskazało na rozkład normalny, dwóch na rozkład dwupunktowy, dwóch na rozkład wykładniczy (rozkład wykładniczy i Poissona, który zaliczamy do wykładniczego), jeden na rozkład dwumianowy i jeden na rozkład jednopunktowy. Na jednej kartce z napisem „rozkład normalny" było postscriptum: ankietowany najwyżej ceni rozkład dwupunktowy, a normalny uważa za króla, bo tak wypada. Rozkład dwupunktowy raz nazwany został: orzeł-reszka. Wyniki są zaskakujące, wszak ankietowano ludzi światłych w probabilistyce. Szokujące wydają się propozycje. Orzeł-reszka jest szczególnym rodzajem rozkładu dwupunktowego. Czym jest rozkład jednopunktowy? Nikt nie wymienił rozkładu jednostajnego. Jest to prawdziwy król wszystkich rozkładów. Jego wartości są na skończonym przedziale, średnią, medianą i modą idealną jest środek tego przedziału. Jest to ciągły rozkład symetryczny, który ma właśnie modę idealną. Czym jest moda idealna? Moda idealna miary probabilistycznej μ jest liczba rzeczywistą n taką, że funkcja określona wzorem $F_n(x) = \int_{n-x}^{n+x} d\mu(t)$ na zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych jest elementem maksymalnym w rodzinie wszystkich tego typu funkcji związanych z miarą μ. Warunkiem istnienia mody idealnej jest ciągłość prawdopodobieństwa i jego symetria. Rozkłady dyskretne nie mają mody idealnej. Rozkład jednostajny jest królem wśród rozkładów z tego powodu, że każdy rozkład jest transformacją rozkładu jednostajnego na odcinku [0, 1], przez dystrybuantę, na dowolny rozkład. Badania symulacyjne korzystają z tego zabiegu; liczby losowe rozłożone jednostajnie transformuje się w pożądany rozkład. Rozkład jednostajny można rozszerzyć na całą prostą. Otrzymuje się wtedy kuriozalny rozkład dwupunktowy bez punktów. Jest to takie prawdopodobieństwo, które każdemu zbiorowi ograniczonemu z góry i będącemu otoczeniem $-\infty$ przypisuje się wartość 1/2 i zbiorowi ograniczonemu z dołu i będącemu otoczeniem $+\infty$ również wartość 1/2. Dystrybuanta tego rozkładu to linia $y = 1/2$. Tutaj w istocie uzupełniono liczby rzeczywiste R o dwa nowe punkty. Masa prawdopodobieństwa jest skupiona w tych właśnie punktach.

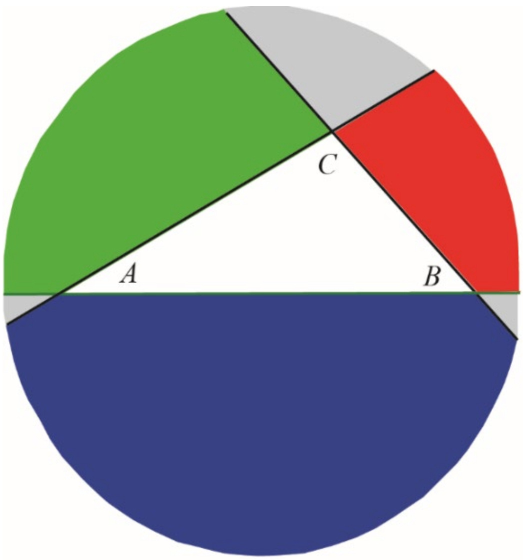
Z trójkątem organicznie związanych jest osiem okręgów: okrąg opisany na trójkącie, okrąg wpisany wewnętrznie w trójkąt, trzy okręgi wpisane zewnętrznie w trójkąt oraz trzy okręgi wzajemnie styczne o środkach w wierzchołkach trójkąta.

Przez okrąg wpisany zewnętrznie w trójkąt rozumie się okrąg styczny do jednego boku i do przedłużeń pozostałych dwóch boków. Promienie okręgu wpisanego r i okręgów wpisanych zewnętrznie: r_A, r_B, r_C łączy ze sobą twierdzenie L'Huillera pięknym i prostym wzorem

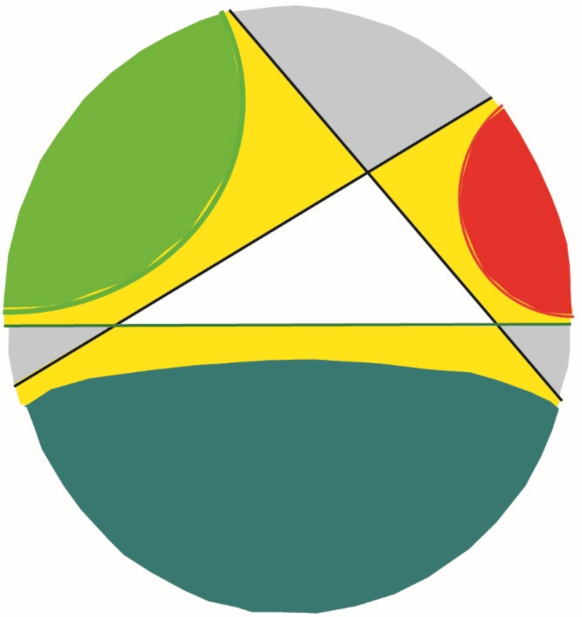
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}.$$

Niech A_w, B_w, C_w będą punktami styczności okręgu wpisanego odpowiednio z bokami: BC, CA i AB, a punkty A_z, B_z i C_z niech będą punktami styczności do tychże boków okręgów wpisanych zewnętrznie. Pary (A_z, A_w), (B_z, B_w) oraz (C_z, C_w) są ogniskami trzech elips. Aby zobaczyć te elipsy, wprowadzimy trzeci wymiar. Wierzchołki trójkąta mają teraz współrzędne (0, 0, 0), (0, c, 0) i (b cosα. b sinα. 0). Wierzchołek A jest wierzchołkiem półstożka obrotowego o kącie rozwarcia α, którego tworzące są półprostymi AB i AC; przecięcie tego stożka płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny, na której leży trójkąt i przechodzącą przez prostą BC, jest elipsą E_A leżącą naprzeciw wierzchołka A. Analogicznie otrzymuje się elipsy E_B i E_C. Z nieskończonego graniastosłupa trójkątnego wychodzą trzy półstożki; są to snopy światła o różnej barwie z reflektorów umieszczonych w wierzchołkach. Każdy reflektor oświetla przeciwległą ścianę. Okrąg wpisany w trójkąt staje się tutaj kulą; kulami są również okręgi wpisane zewnętrznie w trójkąt – są to kule wpisane w trzy stożki. Punkty styczności kul do ścian graniastosłupa wyznaczają ogniska elips. Kolorowa ta figura (rys. 8, 9, 10) jest pomnikiem trójkąta, króla nie tylko wieloboków, ale i całej nauki. Milcząco założono tu, że w wierzchołkach trójkąta są umieszczone reflektory rzucające stożkowe snopy białego światła, natomiast elipsy na złotych ścianach graniastosłupa są oknami o kolorowych szybach: elipsa BC jest czerwona, CA – zielona i AB – niebieska.

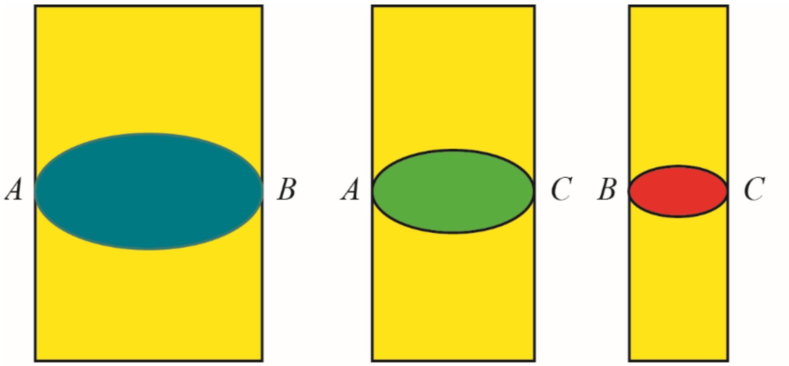
Proponowane godło jest utworzone z wieloboków wypukłych i wklęsłych. Łącznie jest tutaj kilkadziesiąt wieloboków. Wieloboki wypukłe to: trójkąty, romb, kwadraty, pięcioboki i sześcioboki; wieloboki wklęsłe to: pięcioboki, sześcioboki, ośmioboki i dwunastoboki. Gwiazdy sześcioramienne są naturalnie dwunastobokami wklęsłymi. Litery U i E to również wieloboki wklęsłe.



Rys. 8. Wieża światła – rzut poziomy



Rys. 9. Inny przekrój wieży



Rys. 10. Ściany boczne pomnika trójkąta

Symetryczne odbicie, w linii pionowej, dużej litery *E* jest symbolem kwantyfikatora szczegółowego, egzystencjalnego. Znak ten można więc czytać jak słowa: *jest* lub *istnieje*. Symetryczne zaś odbicie dużej litery *U*, tym razem w linii poziomej, jest symbolem – w innej notacji logicznej – kwantyfikatora ogólnego, zwanego również dużym. Kwantyfikator ogólny należy czytać jak słowo *każdy* lub *wszystkie*. Symbol ten jest również znakiem produktu – iloczynu zarówno logicznego, jak i algebraicznego. Litery umieszczone na biało-czerwonej szachownicy w tej symbolice tworzą tekst: *Uniwersytet Ekonomiczny* (górny wiersz) *jest produktem* – w domyśle – europejskim (wiersz drugi).

Szczegółową analizę godła względem typów wieloboków w nim zawartych pozostawiamy czytelnikom dla rozrywki. *Sine scientia ars nihil est*. Bez nauki nie ma sztuki. Całość barwi emalia (rys. 11). Kolor czerwony symbolizuje piękno, złoty – dobro, biały – prawdę. Są to kolory nauki i Boga, albowiem czerwień to miłość, złoto – mądrość, a biel – moc. Całość uzupełnia błękit nieba ze świecącymi gwiazdami. *Lux in tenebris lucet*.

Rys. 11. Godło – propozycja

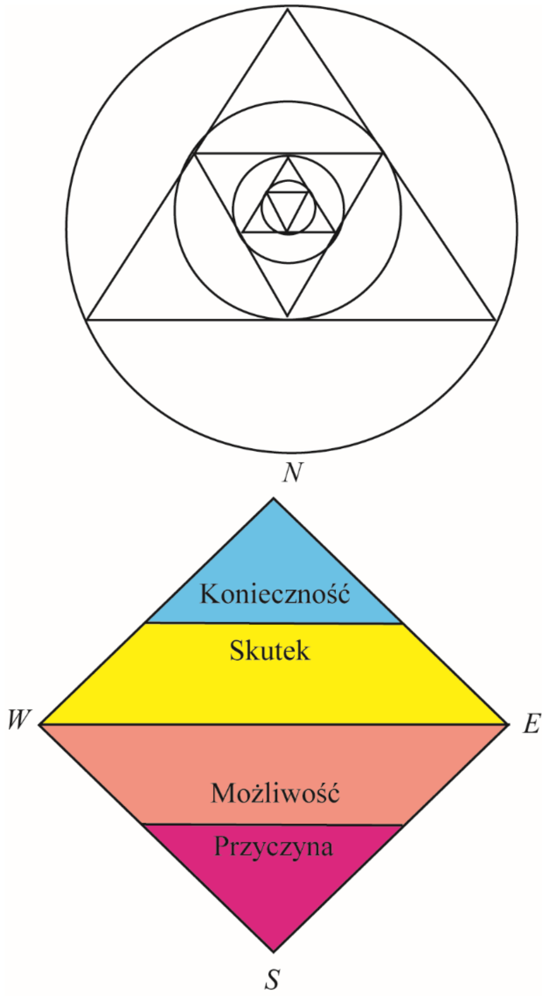
Z trójkąta powstają wszystkie wieloboki, a rozkład jednostajny generuje wszystkie rozkłady jednowymiarowe. Nie oznacza to jednak, że przyczyną wieloboku jest trójkąt; podobnie przyczyną rozkładów jednowymiarowych nie jest rozkład jednostajny.

Problem przyczyny i skutku jest stary jak filozofia. John Stuart Mill próbował te pojęcia ująć w aksjomaty, nadając im nazwy kanonów indukcji eliminacyjnej. Pierwszy kanon Milla, zwany kanonem jedynej zgodności, głosi, że jednej przyczynie odpowiada jeden skutek. Oznacza to, że relacja przyczynowo-skutkowa jest funkcyjna. Drugi aksjomat Milla, aksjomat jedynej różnicy, mówi, że skutek ma tylko jedną przyczynę. Czyli wspomniana wyżej relacja funkcyjna jest funkcją różnowartościową – zbiór przyczyn jest równoliczny ze zbiorem skutków. Trzeci kanon, kanon zmian towarzyszących, jest aksjomatem głoszącym, że zmiana przyczyny implikuje zmianę skutku. Jeżeli więc w zbiorze przyczyn jest relacja równoważności, to odpowiednia relacja równoważności jest i w zbiorze skutków. Wszystkie trzy kanony Milla oznaczają, że struktura matematyczna rodziny przyczyn jest izomorficzna ze strukturą skutków. Jednym słowem Mill swoimi kanonami utożsamił skutki i przyczyny. W artykule o wielobokach proponujemy *wieloboczny* model świata przyczyn i skutków. Jest nim kwadrat obrócony o 90 stopni tak, że przekątna *SN* jest wertykalna, a przekątna *WE* horyzontalna. Punkt północny *N* to rodzaj *Ultima Thule* – skąd wszystko wypływa, natomiast punkt *S* jest rodzajem czarnej dziury, do której wszystko spływa. Świat powyżej równika to nieznane możliwości, a poniżej – zrealizowane konieczności. Każdy punkt kwadratu poniżej równika jest skutkiem punktów leżących wyżej i jednocześnie przyczyną punktów leżących niżej. Nie ma tu ani jednej przyczyny, ani jednego skutku jak u Milla, ale również skutki utożsamia się z przyczynami. Równik jest chwilową aktualizacją możliwości wypływających z północy. Przy okazji należy stwierdzić, że to, co zaszło, było konieczne; różne scenariusze przyszłości są tylko możliwościami. Przyczyn bywa wiele, a skutek jeden, chociaż te same przyczyny mogą wywoływać w innym czasie i miejscu inne skutki. Ilustruje to pięknie stara przypowieść ludowa o kosiarzu. Rano, gdy szedł w pole, kosę wbił w ziemię, a sam ukląkł, by pić ze źródła. Wtedy usłyszał głos: *przyczyna jest, śmierci nie ma*. Wracając wieczorem, też wbił kosę w ziemię i przykląkł, by pić. Teraz usłyszał głos: *przyczyna jest i śmierć jest*. Kosa utraciła równowagę i spadając, ucięła mu głowę. Właściwa przyczyna ujawnia się wtedy, gdy skutek okazuje się koniecznością.

Na zakończenie wspomnimy o łamanych zamkniętych w przestrzeni trójwymiarowej R^3. Taka łamana jest homeomorficzna z okręgiem. Jest to skończony ciąg punktów połączonych odcinkami w ten sposób, że punkt ostatni łączy się z pierwszym, a kolejne odcinki nie leżą na linii prostej oraz żadne odcinki, zwane bokami łamanej, nie przecinają się. Tego typu linie nazywa się węzłami lub – dowcipnie – knotami (z angielskiego). Dwa węzły są równoważne, jeżeli istnieje homeomorfizm całej przestrzeni trójwymiarowej na siebie, przeprowadzający jeden z nich na drugi. Węzły reprezentowane przez łamane mają charakter skończony – finitny; każdy z nich może mieć tylko skończoną liczbę zawęźleń; aby otrzymać łamaną zamkniętą, liczba jej boków musi być nie mniejsza niż 3. Łamana zamknięta o 3 bokach jest oczywiście równoważna z okręgiem. Jeżeli liczba boków łamanej zamkniętej jest $n + 3$, to klas równoważnych knotów może być k_n. Jest to klasyfikacja węzłów skończonych. Innych węzłów w naturze nie ma. Klasyfikacja węzłów skończonych sprowadza się do wyliczania ich typów przy zadanym *n*. Węzeł jest tożsamy z gładką rozmaitością bez brzegu wymiaru 1; można ją utożsamić z norką kreta o stałej średnicy. Jeżeli tę norkę kreta wraz z brzegiem odejmiemy od całej przestrzeni, to otrzymamy gładką rozmaitość trójwymiarową również bez brzegu. Badanie węzłów, czyli rozmaitości wymiaru 1, jest równoważne z badaniem rozmaitości trójwymiarowych wspomnianego typu. Węzły to koronki, dzianiny i wszystkie tkaniny. Potężny przemysł tekstylny jest więc materialnym odpowiednikiem teorii knotów. Piękne i funkcjonalne są węzły żeglarskie. Ahoj!

Literatura

A. Smoluk (2016). *Siedmiu z ekonometrii.* Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.



5

Złota proporcja i wybór społeczny

Antoni Smoluk, Marek Biernacki

Streszczenie: W artykule uogólnia się regułę 2/3 Janusza Łyki; tym uogólnieniem jest złota reguła. Przy okazji przypomniano dawny wyborczy paradoks Condorceta. Wprowadzono pojęcie preferencji generowanej oraz wskazano, że preferencją grupową może być centrum Czebyszewa.

Słowa kluczowe: preferencja, decyzja, liczba złota.

1. Wstęp

Wybór społeczny – *social choice* – w naszych czasach stał się zasadniczą dziedziną badań. Związany jest z interwencjonizmem państwowym; rząd poprzez swoje decyzje wymusza określone zachowania ludności. Wybór społeczny wywodzi się z czasów starożytnych; w Grecji był głośny sąd skorupkowy – ὄστρακον. Swój współczesny charakter zyskał w czasach rewolucji francuskiej – paradoks wyborczy Nicolasa de Condorceta. Kenneth Arrow otrzymał w 1972 roku Nagrodę Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii między innymi za wybór grupowy.

2. Preferencje generowane

Niech X oznacza zbiór elementów, które można uważać za towary lub szkoły, lub kandydatów na urzędy; niech Y oznacza zbiór elementów, które nazywamy decydentami lub konsumentami, lub klientami. Oba te zbiory są niepuste i skończone. Parę uporządkowaną (X, Y) nazywamy krótko rynkiem; zakłada się, że zbiór X liczy m elementów natomiast $Y – n$. Każdy konsument ma swoją preferencję – zbiór par uporządkowanych w dziedzinie X. Preferencja jest relacją dwuczłonową, zwrotną, czyli refleksywną, oraz przechodnią – tranzytywną. Relacja jest zwrotna, jeśli każdy element jest z sobą samym w tej relacji, czyli para (a, a) jest elementem relacji; przechodnia: jeśli pary (a, b) i (b, c) należą do relacji, to para (a, c) też do niej należy. Relacja jest liniowa, jeżeli każde dwa elementy są porównywalne, czyli para (a, b) lub para (b, a) należy do tej relacji dla dowolnych elementów *a i b*. Parę uporządkowaną (a, b) będziemy w dalszym ciągu zapisywać w postaci słowa dwuliterowego *ab*.

Lemat. Każdy zbiór par uporządkowanych, każda relacja, rozszerza się do najmniejszej preferencji zawierającej ten zbiór.

Dowód. Najmniejszą preferencją jest iloczyn mnogościowy wszystkich preferencji zawierających dany zbiór par uporządkowanych – daną relację. Minimalną preferencję nazywamy krótko preferencją generowaną przez daną relację.

Powstaje pytanie, jaka jest preferencja grupowa populacji *Y*. Parę *ab* nazywamy decyzją konsumenta, jeśli jest ona elementem jego preferencji. Każda decyzja *ab* ma swoją częstotliwość – liczbę konsumentów podejmujących tę decyzję. Decyzja jest maksymalna, jeśli podejmuje ją 50% lub więcej uczestników rynku. Zbiór decyzji maksymalnych zwany jest relacją maksymalną. Decyzje *ab* i *ba* są maksymalne jednocześnie wtedy i tylko wtedy, gdy ich częstotliwości są równe.

Preferencja społeczna. Preferencja generowana przez zbiór decyzji maksymalnych jest naturalną – niekwestionowaną – preferencją populacji *Y*.

Jest to najprostsze i najwłaściwsze rozwiązanie problemu preferencji grupowej. Jeżeli jednak pragniemy, by preferencja grupowa była porządkiem liniowym, to rozwiązanie powyższe nie wystarcza, albowiem preferencja generowana przez rodzinę decyzji maksymalnych może nie być porządkiem liniowym, a nawet dowolnym porządkiem, lecz tylko preferencją. Preferencja jest porządkiem, jeśli spełnia dodatkowo trzeci warunek – jest słabo asymetryczna. Relacja jest bowiem słabo asymetryczna wtedy, gdy warunki *ab i ba* pociągają równość elementów $a = b$. Każda decyzja ma swoje prawdopodobieństwo: stosunek częstotliwości do liczby wszystkich konsumentów *n*. Tak więc mówiąc o decyzji, można mówić o zdarzeniu i jego prawdopodobieństwie. Jest to prawdopodobieństwo klasyczne – uczestnicy mają równe wagi.

Definicja. Dwa zdarzenia *A* i *B* są *subniezależne*, gdy $p(AB) \leq p(A)p(B)$, są *niezależne*, gdy $p(AB) = p(A)p(B)$, są *superniezależne*, gdy $p(AB) \geq p(A)p(B)$, gdzie *p* oznacza prawdopodobieństwo.

3. Reguła Janusza Łyki, czyli reguła 2/3

Reguła 2/3. Jeśli prawdopodobieństwo każdej decyzji maksymalnej jest ostro większe od 2/3: $p(A) > 2/3$, gdzie $A = ab$, natomiast *ab* jest decyzją maksymalną, to zbiór decyzji maksymalnych jest porządkiem liniowym.

Dowód tego faktu jest niezwykle prosty. Jeśli bowiem $A = ab$ i $B = bc$ oraz $p(A) > 2/3$ i $p(B) > 2/3$, to naturalnie $p(AB) > 1/3$. Tak więc decyzja $C = ac$ ma prawdopodobieństwo ostro większe od 1/3, co oznacza, że zdarzenie przeciwne $C' = ca$ nie może być elementem maksymalnym. Tak więc *C* jest elementem maksymalnym (J. Łyko (2000)).

4. Reguła złota

Liczba złota $\chi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ jest jedynym prawdopodobieństwem, wynoszącym nieco mniej niż 62%; spełnia równość $\chi^2 = 1 - \chi$. Jeśli więc prawdopodobieństwo zdarzenia równa się liczbie złotej, to kwadrat tego prawdopodobieństwa jest równy prawdopodobieństwu zdarzenia przeciwnego: szczególny, wyróżniony fakt, który stanowi podstawę zasadniczego twierdzenia. Najprostszy ułamek łańcuchowy

$$1/(1+\frac{1}{1+\cdots})$$

reprezentuje liczbę złotą. Jego redukty są dane pięknym wzorem – prawem natury –

$$r_n = {}^{F_n}/_{F_{n+1}},$$

gdzie (F_n) jest ciągiem Fibonacciego: $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \in N$.

Jest więc:

$$r_1 = {}^1/_2 < r_3 = {}^3/_5 < \cdots < \chi < \cdots < {}^2/_3 = r_2 < 1 = r_0.$$

Liczba złota określa liczbę Łyki 2/3 oraz definiuje przedział [1/2, 1].

Złota reguła. Jeżeli prawdopodobieństwo każdej decyzji maksymalnej jest ostro większe od χ , czyli $p(A) > \chi$, gdzie $A = ab$ i ab jest decyzją maksymalną, a dodatkowo decyzje maksymalne postaci $A = ab$ i $B = bc$ są super niezależne, to zbiór decyzji maksymalnych jest porządkiem liniowym.

Dowód tego twierdzenia jest równie prosty. Jeżeli bowiem $A = ab$ i $B = bc$ oraz $p(A) > \chi$ $p(B) > \chi$ i $p(AB) \geq p(A)p(B)$, to $p(C) \geq p(A)p(B) > \chi^2 = 1 - \chi$, gdzie $C = ac$. Tak więc $C' = ca$ nie może być zdarzeniem maksymalnym.

Twierdzenie to jest uogólnieniem reguły Łyki. Paradoks wyborczy Condorceta nie spełnia warunku superniezależności; u Condorceta $n = m = 3$. Relacje porządku liniowego wygodnie jest zapisywać podobnie jak decyzje w postaci słów. Każdy porządek liniowy jest permutacją zbioru X. U Condorceta trzy relacje porządku liniowego to: *abc, cab* oraz *bca*. Relacja maksymalna jest w tym przypadku zbiorem: $\{ca, ab, bc\}$. Do zbioru decyzji maksymalnych należą *ab* i *bc*, ale nie należy *ac*. Prawdopodobieństwa wszystkich decyzji maksymalnych są równe 2/3. $p(AB) = 1/3 < p(A)p(B) = 4/9$; oznacza to, że zdarzenia te są subniezależne, a nie superniezależne. W paradoksie Condorceta wszystkie elementy zbioru X są równoważne – równo cenne. W regule J. Łyki o superniezależności wyraźnie się nie mówi, lecz prawdopodobieństwa maksymalne są tak duże, że pociągają bezpośrednio przechodniość relacji.

Uwaga. Złotą regułę można nieco uogólnić przez osłabienie założeń. Zamiast superniezależności decyzji maksymalnych wystarczy przyjąć nierówność: $p(AB) > \chi^2$, gdzie $A = ab$ i $B = bc$. Oczywiście z superniezależności wynika podana nierówność. Jest to więc nieznaczne osłabienie założeń. W pracy (A. Maciuk, A. Smoluk (2018)) dowodzi się złotą regułę przy założeniu, że zdarzenia maksymalne są niezależne.

5. Morał

Bez nazw, terminów i orzeczników – predykatów – nie ma nauki, nie ma wiedzy, nie ma teorii. Zawsze więcej widzimy, gdy znamy nazwy przedmiotów, na które patrzymy. Teorie naukowe dotyczą obiektów idealnych, które uważa się za pojęcia pierwotne – niedefiniowalne. Nauka to struktury matematyczne. Struktury mogą się wzajemnie wykluczać: zawierać sprzeczne aksjomaty. Prawda absolutna jest poza nauką. Prawdę naukową mierzy się w złocie. Im teoria bardziej użyteczna, im daje większy zysk, tym jest lepsza – bliższa prawdy absolutnej. Nauka jest więc utylitarystyczna. Podane tutaj rozwiązania problemu społecznego wyboru, łącznie z twierdzeniem o dyktatorze Arrowa, są tylko propozycjami. Naturalnie są też inne warianty relacji grupowej, na przykład relacja będąca centrum Czebyszewa wszystkich preferencji uczestników rynku. Przy tym rozwiązaniu trzeba wprowadzić odległość pomiędzy preferencjami. Centrum Czebyszewa zbioru to środek najmniejszej kuli zawierającej ten zbiór. Głośny malarz Vincent van Gogh w domu rozkoszy obciął sobie ucho. Bolesław Kopociński uważa, że uczynił to po to, by uprościć malowanie autoportretu. Obandażowaną głowę maluje się szybciej; im więcej bandaży, tym lepiej. *Se non è vero, è ben trovato.* Chociaż to może nie być prawdą, jednak jest dobrze pomyślane. Ironiczną wypowiedź Giordana Bruna odnosimy nie tylko do żartobliwej anegdoty Kopocińskiego, ale również do wszystkich rozpatrzonych tu propozycji, włącznie z twierdzeniem o dyktatorze. W latach między wielkimi wojnami, 1918-1939, w Brzeżanach sędzią był Rusin. Przyszły do niego dwie niewiasty – zwane wówczas babami – z żądaniem rozstrzygnięcia sporu. Sędzia po wysłuchaniu stron uznał sprawę za błahą i zalecał ugodę – bez sądu. Kobiety jednakowoż nalegały na sędziego, by wydał oficjalne rozstrzygnięcie. – *Budete prisiagati? – Budemo. – Budete ciełowaty kriest? Budemo.* Po załatwieniu formalności sędzia oświadcza: – *Teper pocełujtie mienia w żopu. Sprawę umarzam.* Kobiety po wyjściu z budynku sądu zgodnie wołają: – *Mudryj sudia!* Tutaj zbiór Y tworzą dwie baby z porządkami liniowymi *ab i ba*. Umarzając sprawę, sędzia wybrał preferencję utożsamiającą oba poglądy. Anegdotę powyższą wielokrotnie powtarzała Stanisława Bartosiewicz pochodząca z Brzeżan. Słynny od trzech tysięcy lat jest sąd Salomona. Sędzia kierowany boską mądrością wskazał prawdziwą matkę dziecka – ona została dyktatorem – inaczej niż w Brzeżanach.

Złota proporcja – fundament architektury greckiej – trafiła, za sprawą złotej reguły, do ekonomii i polityki. Są stałe fizyczne, są i stałe ekonomiczne oraz polityczne. Prawa nauki są uniwersalne. Liczba 2/3 jest swoistym zaokrągleniem złotej liczby do liczby wymiernej. Wiele populacji ze względu na określoną cechę dzieli się na dwa obszary, z których jeden obejmuje 2/3 całości, a drugi 1/3. Cukru trzcinowego jest 2/3, a buraczanego 1/3. Liczba 2/3 i jej dopełnienie do jedności, czyli 1/3, pojawia się w wielu wzorach geometrycznych; wystarczy wspomnieć o kuli, stożku i walcu oraz o objętościach i polach powierzchni tych figur. Józefa bracia sprzedali za 20 srebrników, a Judasz Jezusa sprzedał za 30 srebrników. Czyżby tu także pojawiła się reguła 2/3?

Decyzje społeczne budzą refleksje natury ogólniejszej. Demokracja nie zawsze kieruje się logiką i rzeczywistą zależnością. Sąd skorupkowy wydalił Arystydesa z Aten. Przeciętnego zjadacza fig kłuła w oczy jego szlachetność i sprawiedliwość. Podobną sytuację obserwuje się w naszych wyborach do władz państwowych i uczelnianych. Wybiera się wygodną przeciętność, a przecież lepiej jest, gdy lew przewodzi stadu baranów niż baran stadu lwów. We Wrocławiu przy ulicy Katedralnej stoi dom z mądrą dewizą: *Non dominus domo, set Domus Domino honestanda est.* Nie pan domem, lecz dom panem się szczyci. Nie katedra wynosi profesora, lecz uczony nobilituje profesję. *Simia simia est, etiam si insygnia aurea gestat.* Ongiś środowisko akademickie było elitą – *crème de la crème;* dziś jest to pospolite ruszenie szturmujące złoty zamek na glinianej górze. W kraju mamy ponad 400 szkół typu akademickiego pod różnymi nazwami: uniwersytet, akademia, politechnika, szkoły regionalne i ogólnokrajowe z różnymi przymiotnikami. Nazwy te zmieniają się jak w kalejdoskopie w zależności od sytuacji rynkowej. Personel nauczający jest stały, albowiem zna się na wszystkim. Na każdy milion obywateli Rzeczypospolitej przypada jedenaście uczelni. *Bon mot* z czasów towarzysza Gierka – *w każdej wsi WSI* – stał się faktem. Trafiają się persony, których mózg skuty złotymi, rektorskimi łańcuchami jak mrozem, czyni wszystko – włącznie ze zmianą statutu szkoły – by ciężar tego złota odczuć na piersi. Czy może istnieć szkoła wyższa z prosperującą spółdzielnią przyjęć: gotówka, a nie wiedza i zdolności, decyduje o wpisie na listę *Alma Matrix*.

Dobry artykuł naukowy jest jednocześnie dziełem literackim – esejem lub felietonem. Jego lektura, nawet pobieżna, winna każdego ubogacić. Trzy kategorie: logika, etyka i estetyka nim żądzą. Logika to proponowana teoria i dowody, pouczenie moralne to etyka, piękno zaś to estetyka.

Literatura

J. Łyko (2000). *Twierdzenie Arrowa a ordynacje*, [w:] Smoluk A. (red). *Elementy metrologii ekonomicznej*. Wydawnictwo AE we Wrocławiu, s. 165-168.

A. Maciuk, A. Smoluk (2018). *A golden ratio as a generalization of the 2/3 rule of Janusz Łyko.* Mathematical Economics 14(21). Wydawnictwo UE we Wrocławiu, s. 31-36.

6

Świat nauki – kwiat nauki

Marek Biernacki, Antoni Smoluk

Sta viator!

1. Profesor Ludomir Laudański był mistrzem krótkiej formy, zwanej przez niego *felietem*. Pochodził ze Lwowa – miasta niezwykłego. Lwowskie *całuję rączki* zna cała Polska. Lwów – miasto bohaterskie, odznaczone przez Marszałka Józefa Piłsudzkiego, słynął z nauki, sztuki i kultury. Ludomir Laudański przejął wszystkie dobre cechy mieszkańców Lwowa. Wysoką kulturę ogólną, piękny język oraz zdolności twórcze. Podobno – zdaniem profesora Stanisława Niciei – jedna trzecia wybitnych polskich twórców nauki, kultury i sztuki to lwowianie. Laudański był absolwentem Politechniki Warszawskiej. Przez wiele lat pracował za granicą; w uczelniach Północnej Afryki wykładał przedmiot zwany krótko lotnictwem. Aeronautyka jest nauką o pływaniu cięższych od powietrza obiektów w ziemskiej atmosferze. W swych pracach łączył sztukę lotu z nauką o optymalizacji kosztów magazynowania. Przelot szybowca na zadanym dystansie w czasie najkrótszym zależy od właściwego wykorzystania prądów wznoszących. Nabieranie wysokości przez szybowiec to gromadzenie towarów w magazynie; przelot jest równoznaczny z wydawaniem towaru z magazynu. Łączny koszt magazynowania i wydawania towarów ma być w określonym okresie czasu najniższy. Profesor Laudański był nie tylko mistrzem krótkiej formy; Springer wydał Jego piękną książkę *Between Certainty and Uncertainty* (L. Laudański (2013)). W książce tej zamieścił zdjęcie rzeźby z nadproża wejścia do Piwnicy Świdnickiej we Wrocławiu. Pocztówka z tym zdjęciem przedstawiającym graczy w kości była przygotowana dla uczestników XIV Europejskiego Spotkania Statystyków, które odbyło się we Wrocławiu w 1981 roku. Pod zdjęciem była łacińska sentencja: *Alea iacta sunt* – kości zostały rzucone. Na wrocławskim ratuszu przedstawiono chwilę skupienia graczy przed rzuceniem kości. Niezwykłe fizjonomie. Europejskie Spotkanie Statystyków we Wrocławiu odbywało się w czasach totalnego obowiązywania systemu kartkowego zapoczątkowanego przez towarzysza Gierka. Napis na pocztówce był dwuznaczny; odnosił się nie tylko do płaskorzeźby, lecz również do sytuacji rynkowej w Polsce. Cenzura pocztówkę zaakceptowała i wydano ją w nakładzie 1500 egzemplarzy. Jednakowoż uczestnicy kongresu statystycznego pocztówki tej nie otrzymali; zadecydował o tym organizator spotkania profesor Witold Klonecki – podpuszczony przez panie z otoczenia rektora Uniwersytetu Wrocławskiego. Na odwrocie był napis w języku polskim i angielskim informujący o rzeźbiarzu i czasie powstania rzeźby. W książce wydanej przez Springera jest zamieszczone to zdjęcie z obciętym łacińskim napisem o kościach, lecz z dokładnym opisem, gdzie ta płaskorzeźba się znajduje i kto jest jej autorem. Książka *Between Certainty and Uncertainty* jest we wszystkich ważniejszych bibliotekach świata – wielka i darmowa informacja o Wrocławiu; promuje ona naukę polską i jednocześnie miasto Wrocław. Ludomir Laudański słynął z właściwego, trafnego doboru ilustracji do swoich *felietów*. Pisał o wszystkim. O nieznanych powszechnie epizodach z życia uczonych, polityków, pisarzy i malarzy, o hiszpańskim winie zwanym Scherry, o znanej powszechnie grafice Pietera Bruegla starszego *Małe ryby są przysmakiem dużych ryb, et cetera, et cetera.* Jego poglądy krytyczne mieściły się zawsze w ramach zasady streszczającej się w pięknym włoskim powiedzeniu: *se non è vero, è ben trovato* – jeśli to nie jest prawdą, to jednakowoż jest pięknie pomyślane. Analogonem matematycznym grafiki Bruegla jest stożek z wpisaną kulą. Kula dzieli stożek na dwie części, lewą – zwężającą się do wierzchołka stożka i prawą – rozszerzającą się w nieskończoność. W każdą z tych części wpisane są kule styczne do siebie i do ścian stożka. Kule z lewej strony tworzą ciąg geometryczny o promieniach malejących do zera, z prawej zaś również tworzą ciąg geometryczny o promieniach tym razem rosnących do nieskończoności. Większa kula pożera mniejszą, tak jak większa ryba delektuje się małą na rysunku Bruegla. Jeżeli przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez jego oś przetniemy prostą przecinającą obie tworzące, to również stożek jest podzielony na dwie części i w każdą z tych części można, tak jak poprzednio, wpisywać ciągi kół, tylko tym razem pierwsza kula jest styczna do płaszczyzny przecinającej. Można jeszcze dalej ideę tę uogólniać; początkiem niech będzie dowolny trójkąt. Trójkąt wyznacza graniastosłup ortogonalny do płaszczyzny trójkąta. Każdy wierzchołek trójkąta jest jednocześnie wierzchołkiem stożka, którego tworzące są bokami przechodzącymi przez ten wierzchołek trójkąta. Mamy więc trzy różne stożki przecięte trzema płaszczyznami i te stożki na płaszczyznach wyznaczają trzy elipsy. Ogniska elips to punkty styczności wpisanych w stożek kul do ścian prostopadłościanu. Graniastosłup z trzema stożkami wychodzącymi z jego wierzchołków można traktować jako swego rodzaju wieżę światła.

Dużo *felietów* to niezwykle trafne recenzje książek oraz artykułów naukowych i popularnych. Lubił pisać o intelektualistach świata zachodniego – paputczikach: Bertrandzie Russelu, Jeanie-Paulu Sartrze i o żonie Sartra Simone de Beauvoir i wielu innych płatnych lub darmowych gloryfikatorach władzy sowieckiej. Panią Simon najwłaściwiej chyba ocenił Czesław Miłosz w swojej pięknej książce *Abecadło*; zainteresowanego czytelnika odsyłamy do małego, lecz wartościowego dzieła. Paputczicy uważali, że słowa radzieckiego hymnu są świętą prawdą.

Широка страна моя родная,
Много в ней лесов, полей и рек!
Я другой такой страны не знаю,
Где так вольно дышит человек.
От Москвы до самых до окраин,
С южных гор до северных морей
Человек проходит как хозяин
*Необъятной Родины своей.**

Pieśń ta, niewątpliwie napisana przez dobrego poetę – Renata Ibragimova – w swej istocie piękna, lecz brzmi ironicznie. Odwiedzający Związek Radziecki wiedzą, jak to było ze swobodą przemieszczania się po tym kraju i jakim gospodarzem swego kraju był obywatel Związku Radzieckiego, zwanego w skrócie Sojuzem. Zachodni chwalcy sprawiedliwego kraju, jakim był Związek Radziecki, wierzyli w słowa pieśni dosłownie. Szczerze lub za przywileje.

2. Matematyka jest nauką o strukturach matematycznych i jednocześnie gromadzi w abstrakcyjnej formie wiedzę o świecie fizycznym. Podstawowym pojęciem matematyki jest mnogość, czyli zbiór; drugim ważnym i już definiowalnym terminem jest pojęcie funkcji. Specjalne funkcje spełniające właściwe relacje to homomorfizmy i izomorfizmy; relacje to także zbiory. Jeśli funkcja f odwzorowuje zbiór X w Y, to obrazem zbioru X jest zbiór wartości tej funkcji w zbiorze Y; gdy X jest strukturą matematyczną i Y jest analogiczną strukturą, to f nazywa się homomorfizmem, gdy spełnia odpowiednie relacje właściwe tej strukturze. Jeżeli X i Y są zbiorami uporządkowanymi, to homomorfizm jest funkcją rosnącą.

Grupa filozofów wiedeńskich, znana pod nazwą Wiener Krise, próbowała w pierwszej połowie XX wieku określić przedmiot badań filozoficznych. Chcieli z filozofii uczynić naukę ścisłą podobną matematyce, fizyce i wszystkim naukom przyrodniczym. Wśród członków koła byli wybitni logicy, między innymi Kurt Goedel – autor głośnego twierdzenia o niezupełności każdej teorii zawierającej zbiór nieskończony, czyli arytmetykę. Dowód Goedla można streścić w słowach: dowodów w teorii zawierającej mnogość nieskończoną jest przeliczalnie wiele, natomiast zdań prawdziwych nieprzeliczalnie. W tekście, wzorując się nieco na Wiedeńczykach, określimy domenę wszystkich nauk; jest nią kategoria struktur matematycznych, które nazywać można strukturami wiedzy powstałymi z obserwacji świata fizycznego. Te struktury to paradygmaty, które z różnych powodów ulegają zmianie. Struktura jest rezultatem badań empirycznych. Empirycznie otrzymuje się relacje, które w strukturze stają się pojęciami pierwotnymi definiowanymi przez aksjomaty. Aksjomaty struktury są również zdaniami zaczerpniętymi z natury – prawdami indukcyjnymi. Kanony indukcji eliminacyjnej J.S. Milla są przykładem zdań indukcyjnych. Struktura wiedzy dopełniona jest regułami wnioskowania. Zasady wnioskowania to: reguła odrywania i reguła podstawiania. Jeżeli zdanie p jest prawdą i prawdą jest implikacja $p \geq q$, to na podstawie reguły odrywania otrzymuje się zdanie q, które jest również prawdą. Reguła podstawiania sprowadza się do interpretacji tautologii logicznych: za symbole zdań można podstawić dowolne zdania empiryczne, a wynikiem będzie nowe zdanie prawdziwe. Zakładamy, że logika świata materialnego jest dwuwartościowa i że mamy ją wrodzoną. To, co jest, jest bytem koniecznym, natomiast bytów przyszłych nie znamy; tworzy się je na zasadzie ekstrapolacji – są to scenariusze. Logika możliwości jest wielowartościowa, zwykle trójwartościowa, i ma charakter zbliżony do probabilistyki. Aksjomaty bywają różnorodne; struktury matematyczne mogą być wzajemnie wykluczające się: geometria euklidesowa i geometria Łobaczewskiego. Preferencja jednej struktury nad drugą jest rezultatem użyteczności. Kryterium użyteczności decyduje o wyborze. Jednakowoż cała nauka korzysta z dwóch zasadniczych aksjomatów. Pierwszy z nich mówi, że istnieje zbiór nieskończony, czyli taki, który jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym; aksjomat ten wprowadza ciągłość do dyskretnego świata przyrody – dyskretnego, bo utworzonego z atomów. Aksjomat drugi, rzecz nowa, mówi, że cały Kosmos jest jedynym *perpetuum mobile* – maszyną w ciągłym ruchu, samonapędzającą się. Materia tworzy przestrzeń, tę przestrzeń, w której się obracamy, ruch materii zaś definiuje czas. Tak więc przestrzeń i czas są niezmienne i wieczne.

3. Dana jest kategoria jednorodnych struktur matematycznych – relacje są tego samego typu; część tych struktur ma pewną własność P, a reszta tej własności nie ma. *Obraz struktury X jest inwariantny względem własności P*, jeśli obie struktury X i Y mają własność P lub obie nie mają tej własności, i gdy obraz ma ją, gdy obie struktury ją mają lub obraz nie ma jej, gdy obie struktury nie mają własności P. Jednorodna rodzina struktur matematycznych to taka, gdzie wszystkie struktury w tej rodzinie są tego samego rodzaju, mają analogiczne relacje je definiujące, jest uporządkowana; porządek w takiej rodzinie określa relacja preferencji, która jest zdefiniowana przez pojęcie włożenia jednej struktury w drugą. Struktura A wkłada się w strukturę B, jeśli istnieje homomorfizm struktury A w strukturę B taki, że struktura A jest izomorficzna ze swoim obrazem – podstrukturą struktury B. Jeśli utożsamimy struktury izomorficzne, to wprowadzona wyżej relacja preferencji porządkuje daną rodzinę struktur. W tym uporządkowanym zbiorze może istnieć lub nie struktura minimalna; jeśli istnieje, to jest wyznaczona jednoznacznie. W takim właśnie sensie mowa jest o minimalnych strukturach w artykule.

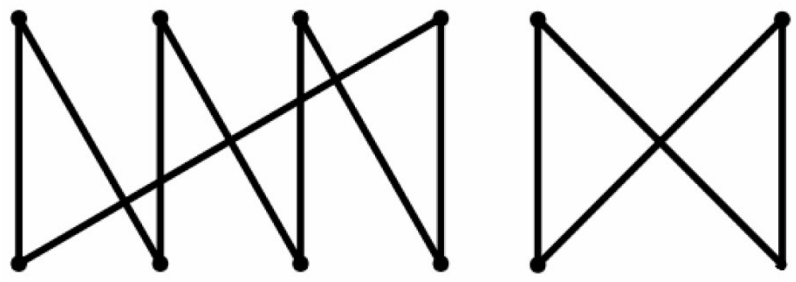
4. Zbiór uporządkowany X ma własność punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja rosnąca odwzorowująca X w X ma punkt stały. Zbiory uporządkowane mające własność fix punktu charakteryzuje się przez ich minimalne obrazy inwariantne; w dalszym ciągu mówimy o strukturach – zbiorach uporządkowanych – skończonych i niepustych.

Twierdzenie pozytywne. Zbiór uporządkowany X ma własność fix punktu wtedy i tylko wtedy, gdy jego minimalnym inwariantnym obrazem jest zbiór jednopunktowy.

Każdy obraz struktury mającej własność fix punktu ma również własność fix punktu. Własność fix punktu jest dziedziczna. Wynika stąd, że minimalnym inwariantnym obrazem struktury mającej własność fix punktu jest zbiór jednopunktowy.

Zbiór uporządkowany nazywa się koroną, gdy można go przedstawić w postaci macierzy o k kolumnach, gdzie $k \geq 2$, i n wierszach i gdy najniższy wiersz tworzą elementy minimalne, a najwyższy maksymalne tego porządku, a ponadto każdy element wiersza bezpośrednio wyższego dominuje tylko nad dwoma elementami wiersza niższego. Korony nie mają własności fix punktu, albowiem można je przekształcać cyklicznie z zachowaniem relacji porządku. Korona będąca macierzą o dwóch wierszach i trzech kolumnach przechodzi na koronę, czyli macierz o dwóch wierszach i trzech kolumnach: pierwsza kolumna na drugą, druga na trzecią i trzecia na pierwszą. Przy tym izomorfizmie nie ma punktu stałego. Obrazem struktury niemającej własności fix punktu może być zarówno zbiór mający własność fix punktu, jak i go niemający; obraz inwariantny nie ma własności fix punktu tak jak wyjściowa dziedzina.

Korony dwukolumnowe są minimalnymi obrazami zbiorów uporządkowanych niemających własności fix punktu. Minimalnym inwariantnym obrazem korony o dwóch wierszach i czterech kolumnach jest korona o dwóch wierszach i dwóch kolumnach (*vide* diagram Hassego: rys. 1). Szczyt budynku Panoramy Racławickiej we Wrocławiu jest koroną dwuwierszową o wielu kolumnach. Jest to struktura kołowa – obrót korony o jeden ząbek (trybek), przesunięcie o jedną kolumnę oznacza, że nie ma ona punktu stałego. Korona jest także harmonijką i aby otrzymać jej minimalny obraz, tę harmonijkę należy ścisnąć.



Rys. 1. Korona i jej minimalny obraz

Korony minimalne są uporządkowane liniowo. Korona jest mniejsza, gdy wkłada się poprzez funkcję rosnącą w koronę dwukolumnową większą – mającą więcej wierszy. Każdy niepusty zbiór koron dwukolumnowych ma więc element minimalny.

Twierdzenie negatywne. Skończony, niepusty zbiór uporządkowany X nie ma własności fix punktu wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego obrazów minimalnych tworzą korony dwukolumnowe. Wśród tych koron jest oczywiście korona minimalna i ta korona charakteryzuje zbiór (A. Smoluk (2016a)).

Jeżeli zbiór uporządkowany jest niespójny, czyli istnieją dwa elementy, których nie można połączyć drogą, to wtedy naturalnie ten zbiór nie ma własności fix punktu. Jego minimalnym obrazem jest zbiór dwupunktowy, w którym relacja porządku jest identycznością, czyli elementy tego zbioru są nieporównywalne. Jeżeli zbiór uporządkowany ma jeden punkt maksymalny lub jeden punkt minimalny, to ten zbiór ma własność fix punktu. Problem charakteryzacji uporządkowanych skończonych zbiorów postawił Ivan Rival w roku 1984. Inwariantne minimalne obrazy uporządkowanych zbiorów wprowadzone wyżej dają pełną odpowiedź na pytanie Rivala.

Skończony zbiór uporządkowany jest izomorficzny z odpowiednio dobranym zbiorem liczb naturalnych uporządkowanym przez relację podzielności. Krata jest takim zbiorem uporządkowanym, w którym zbiory dwuelementowe mają kres górny i kres dolny. W kracie skończonej zawsze istnieje tylko jeden element maksymalny i tylko jeden element minimalny. Supremum zbioru dwuelementowego to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb, a infimum to największy ich wspólny dzielnik; mówimy tu o skończonym zbiorze uporządkowanym izomorficznym z podzbiorem liczb naturalnych uporządkowanym przez relację podzielności. Semikrata jest strukturą matematyczną, w której każdy zbiór dwuelementowy ma supremum – jest to zbiór uporządkowany w prawo. Podobnie semikratą jest zbiór uporządkowany, w którym każdy podzbiór dwuelementowy ma kres dolny – jest to zbiór skierowany w lewo. Każda skończona semikrata i naturalnie krata ma własność fix punktu. Dowód tego twierdzenia jest oczywisty. Jeżeli bowiem dany jest ciąg malejący w skończonym zbiorze uporządkowanym, to ma on granicę w topologii dyskretnej – prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są sobie równe. Podobnie jest z ciągiem rosnącym. Jednocześnie warto zauważyć, że zasada indukcji matematycznej jest analogicznym twierdzeniem. W tym przypadku porządkiem jest funktor implikacji: jeśli p, to q. Ze zdania fałszywego wynika wszystko. Relacja porządku – *repetitio est mater studiorum* – jest dana przez implikację: zero jest elementem minimalnym – rodzina zdań fałszywych, a jedynka – zbiór zdań prawdziwych – elementem maksymalnym. Jeśli więc ciąg rośnie i pierwszym jego wyrazem jest element maksymalny, to wszystkie wyrazy tego ciągu są równe. Jest to najprostsze sformułowanie zasady indukcji matematycznej. Inny język i twierdzenie staje się oczywiste. Automorfizm zbioru uporządkowanego można traktować jako zmianę, reorganizację instytucji; jest to reorganizacja, przy której zależności hierarchiczne utrzymuje się, chociaż niektóre stanowiska mogą ulec likwidacji albo przesunięciu w górę lub w dół. Jeżeli struktura instytucji ma charakter semikraty, a tak jest przeważnie, to przy każdej zmianie organizacji zachowującej zależności hierarchiczne przynajmniej jedno stanowisko pozostanie nienaruszone. Jest to wniosek z twierdzenia o fix punkcie. Wspomniany wyżej izomorfizm korony o trzech kolumnach i dwóch wierszach jest formalnym ujęciem dobrze znanego zjawiska pod nazwą karuzela stanowisk.

5. Relacje to grafy, a grafy to sieci. Z każdą relacją określoną w zbiorze X jest jednoznacznie związana, generowana przez tę relację, preferencja. Preferencja ta jest iloczynem wszystkich preferencji zawierających daną relację – jest to więc najmniejsza preferencja zawierająca daną relację. Preferencja jest jakby iloczynem porządku i równoważności. Równoważność generowana przez preferencję jest relacją łączącą elementy wzajemnie związane: x preferuje y i y preferuje x. Jeżeli utożsamimy elementy równoważne, to otrzymamy porządek w zbiorze klas abstrakcji. Klasy abstrakcji to pełne sieci: każde dwa punkty są połączone. Dyskryminują one zbiór X; niepuste zbiory elementów równoważnych są uporządkowane. Cała wiedza, obecnych i przyszłych pokoleń, sprowadza się do porządków i równoważności. Materialne modele struktury zwanej koroną to: korona królewska, *corona muralis* wież i baszt zamkowych, rysunek na cylindrze werbla, znamię kwiatowe jabłka granatu – inny symbol władzy monarszej. Materia ożywiona i nieożywiona ma strukturę sieci. Wiedza o świecie fizycznym sprowadza się do relacji o określonych własnościach. Powtórzmy raz jeszcze: relacje to sieci, więc obrazowo można powiedzieć, że cała wiedza jest w sieci. Mandarynka to *Citrus reticulatus*. Sieć – *reticulatum* – przenika wszystkie organizmy żywe i materię nieożywioną: pierwiastki, skały, minerały, rośliny i zwierzęta, wodę i ruchliwy gaz. Stany świata są określone przez wypukłe kombinacje trzech czystych stanów – wierzchołków trójkąta natury: materii – *hyle*, formy – ducha (*spiritus*) albo kształtu – *morphe* i życia – *zoe* – *bios*.

6. Żyjemy w świecie map. Media nieustannie prowadzą nas w różne miejsca globu i kosmosu. Nie ma statystyki bez map. Mapa płaska jest specjalnym grafem skończonym planarnym. Kolorowanie mapy sprowadza się do kolorowania wierzchołków grafu. Kolorowanie jest zgodne, jeżeli wierzchołki połączone łukiem mają różne kolory. Liczbą chromatyczną $\chi(M)$ mapy M nazywa się najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do kolorowania zgodnego tej mapy. Wierzchołki grafu to państwa mapy, a łuki łączące państwa to granice. Mapa płaska jest jednocześnie mapą sferyczną: terminy „mapa sferyczna" i „mapa płaska" są synonimami. Mapy to grafy skończone. Państwo jest obszarem spójnym po odrzuceniu jego granic. Państwa sąsiednie mają wspólną granicę. Zakłada się, bez straty na ogólności, że granice są łukami gładkimi, spójnymi; gładkość oznacza, że istnieje ciągła pochodna. Punkt styku więcej niż dwóch państw jest wierzchołkiem mapy. Wierzchołki mapy można uważać za państwa, których się nie koloruje – ich powierzchnia jest zerowa. Taka definicja upraszcza redukcję map większych do mniejszych – ich obrazów. Państwa o wspólnym wierzchołku, ale bez wspólnej granicy nie są sąsiednie. Mapy są izomorficzne, gdy istnieje homeomorfizm sfery przeprowadzający jedną na drugą. Redukcja mapy jest jej obrazem. Mapa jest strukturą matematyczną – grafem. Redukcja mapy sprowadza się do trzech rodzajów operacji.

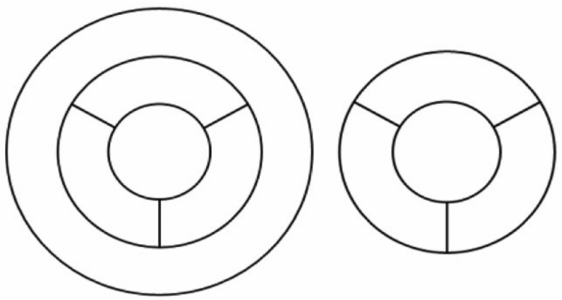
A. Ściągnięcie granicy do punktu.
B. Usunięcie granicy.
C. Ściągnięcie kraju do punktu.

Powszechnie znana prawda. Pełny graf pięciowierzchołkowy – każdy wierzchołek połączony jest z pozostałymi czterema wierzchołkami – nie jest grafem płaskim (planarnym).

W zbiorze państw mapy, którą można pokolorować co najwyżej czterema barwami, określona jest relacja kolorowej zgodności, zwana krótko konkordancją. Dwa państwa są w tej relacji wtedy i tylko wtedy, gdy przy każdym kolorowaniu co najwyżej czterema barwami mają kolory zgodne. Relacja konkordancji c(M) mapy M jest równoważnością. Redukcja inwariantna nie zmienia liczby chromatycznej mapy i typu relacji konkordancji; jeśli konkordancja jest tożsamością – każdy kraj jest tylko w tej relacji ze sobą, to po redukcji relacja konkordancji jest również identycznością, jeśli natomiast relacja konkordancji nie jest identycznością, to po redukcji również nią nie jest, jednakowoż jest to inna relacja. Jeśli liczba chromatyczna mapy nie przekracza trzech, to mapa ma tylko jeden minimalny inwariantny obraz: odpowiednio jeden kraj, dwa kraje, trzy kraje. Jeśli zaś liczba chromatyczna mapy to cztery, to są dwa minimalne inwariantne obrazy: $M_0 = \{A,B,C,D\}$ i $M = \{A,B,C,D,E\}$ (rys. 2): mapa z czterech państw, gdy relacja konkordancji jest identycznością – $c(M_0) = \{(A,A), (B,B), (C,C), (D,D)\}$ – i mapa pięciu państw, gdy relacja konkordancji nie jest identycznością – $c(M) =\{(A,A). (B,B), (C,C), (D,D), (E,E), (D,E), (E,D)\}$.

Fundamentalny lemat. Jeżeli dwa państwa mają wspólny wierzchołek, to nie są w relacji konkordancji.

Przykładem minimalnej mapy, dla której relacja konkordancji nie jest identycznością, jest mapa sferyczna złożona z dwóch państw okołobiegunowych oraz trzech państw równikowych graniczących pomiędzy sobą i z państwami biegunowymi.



Rys. 2. Obrazy minimalne map – liczba chromatyczna $\chi = 4$

Państwa równikowe zjadają trzy barwy, a do pokolorowania państw biegunowych potrzeba czwartej barwy. Państwa biegunowe są w relacji kolorowej zgodności – konkordancji.

Dowód lematu sprowadza się do uwagi, że każdą mapę, na której relacja konkordancji nie jest identycznością, redukuje się do minimalnej mapy pięciu państw. Jeśli państwa biegunowe mają wspólny wierzchołek, to mapa jest pełnym grafem pięciowierzchołkowym – przeczy to sferyczności tej mapy, bo bieguny są połączone odcinkiem wewnątrz sfery. Państwa o wspólnym wierzchołku nie są w relacji kolorowej zgodności.

Twierdzenie o czterech barwach. Do pokolorowania zgodnego mapy płaskiej wystarczą cztery barwy.

Dowód. Jeżeli twierdzenie jest fałszywe, to istnieje mapa o najmniejszej liczbie granic, której nie można zgodnie pokolorować czterema barwami. Na mapie tej ściągamy jedną granicę do punktu – wierzchołka. Tę nową mapę można już pokolorować czterema barwami. W zbiorze państw mapy zredukowanej istnieje relacja kolorowej zgodności. Państwa, pomiędzy którymi granicę ściągnięto do punktu, mają wspólny wierzchołek, a więc zgodnie z lematem nie są w relacji kolorowej zgodności. Wynika stąd, że można powrócić do stanu pierwotnego, czyli założenie, że istnieje mapa, której nie można pokolorować zgodnie czterema barwami, jest fałszem. Dowód został zakończony. Zobacz również (A. Smoluk (2016a), (2016b), (2020)).

7. Artykuł dedykowany Ludkowi, mistrzowi *felietu* i dalekich analogii, zakończyć wypada powołaniem się na wielką poezję. Nauka jest bowiem pięknem, dobrem i prawdą; niesie wiedzę użyteczną o świecie fizycznym. Tylko ludzie z urodzenia przynależni nauce, jak Ludomir Laudański, szukają piękna, dobra i prawdy dla nich samych, a nie z powodu ich użyteczności prognostycznej. Nauka jest poezją. Horacy w dziele *Ars poetica* zaleca łączenie użyteczności z pięknem. *Omne tulit punctum, qui miscuit utile dulci*. W nauce jest prawda i piękno formalne. Przy rzucie dwóch kości zbieramy wszystko, gdy kostka prawdy i piękna wskazuje szóstkę oraz kostka użyteczności i dobra również niesie szóstkę. Kwiat nauki pachnie dobrem i pożytkiem jak kwitnąca i brzęcząca rojem pszczół lipa. *Lux in tenebris lucet* [Ludek]!

** Rozległy jest mój kraj ojczysty,*
Dużo w nim lasów, pól i rzek!
Ja innego takiego kraju nie znam,
Gdzie tak swobodnie oddycha człowiek.
Od Moskwy do kresów,
Od południowych gór do północnych mórz,
Człowiek chodzi jak gospodarz
Nieograniczonej Ojczyzny swej.

Literatura

L. Laudański (2013). *Between Certainty and Uncertainty.* Heidelberg. Springer.

A. Smoluk (2016a). *Siedmiu z ekonometrii*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.

A. Smoluk (2016b). *A simple proof of the four-colors theorm*. Didactics of Mathematics 13(17), s. 35-38. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.

A. Smoluk (2020). *Twierdzenie o czterech barwach – najprostszy dowód.* Referat na 10 konferencji Dydaktyka Matematyki. Wrocław 2020.

7

Metrologia i statystyka. O złotej regule

Antoni Smoluk

Esej ma charakter wspomnieniowy, definicyjny i daje w końcu drobne uogólnienie znanej reguły 2/3 Janusza Łyki.

1. W Katedrze Statystyki Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu pracowałem 5 lat od roku 1964. W latach 1962-1965 współpracowałem z Janem Falewiczem, emerytowanym kierownikiem Katedry Statystyki. Poznałem go na odczytach Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego, organizowanych raz w miesiącu w pokoju Stanisławy Bartosiewicz. Z czasem stałem się jego konsultantem matematycznym, doradcą i konsulem. Prowadziliśmy korespondencję, mieszkał w Wiśle, na tematy naukowe związane z permutacjami i cyklami. Wiadomo, że każda permutacja jest iloczynem niezależnych cykli. Falewicz szukał cykli ekonomicznych – czasu zwrotu zainwestowanego kapitału. Czas zwrotu kapitału zależy od rodzaju gałęzi. Znajomość tych czasów jest podstawą decyzyjną dla wielu inwestorów. Jakoś tak dziwnie się dzieje, że problemem czasu zwrotu zajmuje się mało ekonomistów. Falewicz listy zwyczajne przesyłał w popularnych w owym czasie zielonych, tanich kopertach, pisane ołówkiem na zwykłej kartce papieru. Listy obszerniejsze, zawierające dłuższe rękopisy były przesyłane w szarych kopertach. Te koperty większego rozmiaru wykorzystywał po raz drugi; nicował koperty, w których otrzymywał z PWN zapowiedzi wydawnicze. Oszczędność i troska o naturę były dla niego celem zasadniczym, godnym pochwały i naśladowania. Czasy dzisiejsze to marnotrawstwo surowców, a szczególnie papieru. Jego listów miałem kilkanaście. Zostały one opublikowane wspólnie z korespondencją, jaką dysponowała Stanisława Bartosiewicz w „Pracach Naukowych" wydawanych przez Uczelnię. Z powodu tej publikacji wszystkie listy zaginęły, chyba w wydawnictwie podczas opracowania redakcyjnego. Nieodżałowana szkoda. Falewicz zajmował się głównie regresją, a regresja to funkcje korelacyjne, czyli iloczyn skalarny. Słowo regresja wymawiał, nieco sepleniąc, *regresia*. Sic! Falewicz miał referat na seminarium interdyscyplinarnym prowadzonym przez grupę Hugona Steinhausa. Towarzyszyłem mu, ale moja obecność była zbyteczna, bowiem Falewicz był również dobrym matematykiem – ukończył Politechnikę w Petersburgu. Po jego referacie na Politechnice Wrocławskiej pracownik tej uczelni zapytany o treść wystąpienia Falewicza odpowiedział krótko: *regresia*. Żył 75 lat;

urodził się w roku 1890 w Wilnie, a zmarł w 1965 w Wiśle. Był człowiekiem prawym. Napisał artykuł o cyklach w macierzy przepływów międzygałęziowych. Podałem krótki dowód, niecałe 3 strony, jednego z faktów, o których on pisał. Falewicz dołączył mnie jako współautora swego artykułu, a mój dowód, zasugerował opublikować jako niezależny artykuł, a nie jako suplement. Dbał o mój rozwój naukowy, pewnie jak nikt inny. Byłem mu szczerze oddany i traktowałem jak starszego kolegę, przyjaciela. Myślę, że i on uważał mnie za swego zwolennika i kolegę. Inteligencję swoich współpracowników sprawdzał na rysunkach będących rzutami figur geometrycznych. Z tych rzutów należało odgadnąć kształt figury. Testy te to rezultat studiów geometrii wykreślnej – swego rodzaju poezja geometryczna. Po jego śmierci Polskie Towarzystwo Ekonomiczne zorganizowało sesję naukową. Obrady odbywały się wysoko, na drugim lub trzecim piętrze północnej pierzei Rynku wrocławskiego. Na tym spotkaniu wygłosiłem krótki referat o liczbach Falewicza. Referat był chłodno przyjęty, albowiem skupiłem się na matematyce, nie podając ekonomicznego znaczenia tych liczb. Liczby Falewicza określają, ile jest permutacji utworzonych z cyklów jednakowej długości, chociaż w różnych permutacjach mogą to być cykle różne. Po zakończeniu seminarium poświęconego Falewiczowi niektórzy z uczestników poszli na wspólny obiad do Monopolu. Wtedy jeszcze za referaty konferencyjne płacono honorarium.

W Katedrze Statystyki było sporo członków Polskiej Zjednoczonej Partii Robotniczej. Ja również w 1965 roku stałem się członkiem tej przodującej organizacji. Na argumenty kolegów: *Twoje miejsce w partii! Nie zaśmiecaj środowiska uczciwych ludzi,* nie było siły. Z moim członkostwem jest tak jak z przeniesieniem stolicy z Krakowa do Warszawy. Po tej operacji króla Zygmunta Wazy potencjał intelektualny każdego z tych dwóch miast wzrósł wbrew prawom fizyki, ale zgodnie z regułami statystyki. Byłem najmłodszy, więc obwołano mnie grupowym. Jako *partorg* katedry byłem zobowiązany pisać raz w roku opinie wszystkim pracownikom Katedry – również kierownikowi. Katedra liczyła kilkanaście osób; opinii, nawet krótkich, trzeba było pisać sporo. Zadanie uprościłem sobie, przygotowując wzorcowy arkusz opinii. Każdy z pracowników w tym arkuszu wpisywał swoje imię i nazwisko, stopień naukowy lub tytuł, informował, czym się zajmuje i w jakim stanie są jego badania, pisał przymiotniki w rodzaju: zdolny, pracowity, wielki erudyta *et cetera*. Każdy więc miał opinię o sobie taką, jaką chciał. Władysław Bukietyński wielce pochwalił mój pomysł. Już w latach późniejszych, gdy nie byłem pracownikiem Katedry Statystyki, organizowałem sesję naukową związaną ze 100-leciem urodzin Włodzimierza Lenina. Sesja ta była naturalnie pod sztandarami czerwonymi partii, a referaty związane z pracami Lenina – twórcy pierwszego państwa ludu pracującego miast i wsi. Mój referat związany był ze statystyką – dotyczył danych statystycznych w pracach Lenina. Lenin wyciągnął właściwy wniosek z danych dostarczonych przez carską statystykę. Dostrzegł w nich te siły, które były zdolne obalić carat. Siła to jednorodne zbiory: duże zakłady przemysłowe i armia. Całą propagandę skupił na robotnikach i wojsku, pomijając rozproszoną biedotę wiejską. Referatu nie wygłaszałem. Po wejściu na podium ograniczyłem się do pytania: czym jest leninizm? Nastąpiła konsternacja, odpowiedzi nie było. Odpowiedź miałem, lecz jej publicznie nie ogłosiłem. *Leninizm to polityka aktualnie panującego biura politycznego, natomiast doktrynerstwo zawładnęło członkami poprzedniego* политбюра. W roku 1970 ukazało się wiele prac poświęconych Leninowi. Hasło „Lenin" było wszystkim. Publikowano dużo i bez większej wartości. *Lenin wędkuje nad Popradem. Przechodzący turysta pyta: – Jak biorą? – Paszoł won, odpowiada wódz Bolszewików.* Na stulecie Lenina ów turysta wydał dwutomowe dzieło zatytułowane: *Moje rozmowy z Leninem*. Субботник – to pomysł Lenina na darmową pracę w sobotnie popołudnie. *Czas – popołudnie sobota – a bluzy się lepią od potu*. Instytut Metod Rachunku Ekonomicznego Wyższej Szkoły Ekonomicznej we Wrocławiu wydał specjalny numer „Prac Naukowych" (Statystyka (1969)): zobowiązanie do uczczenia V Zjazdu PZPR – instytutowy Субботник. Inicjatorem była formalnie partia, lecz w istocie myśl wyszła od dyrektora instytutu; chciał mieć środki dyspozycyjne: przez żołądek do serca. Gość instytutu – profesor – dobrze potraktowany napisze niewątpliwie dziękczynną recenzję. Honoraria zasiliły konto dyrektorskie. Taki jest radosny początek „zjazdu" nauki polskiej do obecnego stanu. To historyczne wydarzenie jest niewątpliwie związane z powszechnymi w tamtych latach zobowiązaniami pracowników różnych zawodów. Uczeni radzieccy dla uczczenia kolejnej rocznicy Rewolucji Październikowej lub innego wydarzenia zobowiązywali się odkryć rzecz nową. W Instytucie Badań Jądrowych w Dubnej pod Moskwą deklaracje dotyczyły zwykle odkrycia nowej cząstki elementarnej. Z powodu tych odkryć powstała klasyfikacja niebytu cząstek elementarnych w kolejności rosnącej: *primo* – cząstki pewne, istniejące; *secundo* – cząstki wątpliwe; *terzio* – cząstki niemożliwe i *quarto* – cząstki elementarne odkryte w Dubnej. Zobowiązanie ma więc istotny wpływ na jakość odkrycia. Prawa nauki nie zależą od miejsca i czasu, wszędzie są jednakowe.

W latach mej przynależności do Katedry Statystyki w katedrze tej funkcjonował barek. Opiekunką barku była Urszula Królik – później zmieniła nazwisko; jej zadanie sprowadzało się do zaopatrzenia barku w alkohole: Jarzębiak, Starkę, Soplicę, Krupnik i innego rodzaju wyborne wódki. W barku, oprócz kieliszków i butelek z wódką, była skarbonka; obowiązywała samoobsługa. W skarbonce nigdy nie brakowało pieniędzy, interes doskonale się rozwijał; z barku korzystał też raz jeden z późniejszych rektorów Uniwersytetu Wrocławskiego. Kierownik Katedry Statystyki, profesor Zdzisław Hellwig, przeląkł się tego rozkwitu i barek zlikwidował.

2. Na Konferencji Polski Południowej w 2021 roku profesor Józef Pociecha mówił o paradygmatach statystycznych. Jego zdaniem paradygmat statystyczny to składnik losowy modelu ekonometrycznego, który jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, średniej zero i małym rozproszeniu. W swym wystąpieniu wspomniał o Kole Wiedeńskim i eksperymencie naukowym. *Wiener Kreise* – to grupa wiedeńskich logików, matematyków, ekonomistów i filozofów redukująca filozofię do nauki o świecie fizycznym. Jej podstawą jest eksperyment, a narzędziem logika – reguły wnioskowania. Filozofia jest nauką przyrodniczą, podobnie jak geologia, fizyka i matematyka. Członkowie Wiedeńskiego Koła szli nawet dalej: ograniczyli naukę do logiki – czysty logicyzm.

Logika jest nam dana przez Boga, wrodzona – z niej wypływa pełna wiedza. Wzorce do nauki wprowadził Thomas Kuhn w swej znanej książce *The Structure of Scientific Revolutions* – Struktura rewolucji naukowych – opublikowanej w 1962 roku. Wzorzec, czyli paradygmat, to zbiór hipotez i pojęć pierwotnych obowiązujących w nauce. Z formalnego punktu widzenia paradygmat jest tożsamy ze strukturą matematyczną. Teorie sprzeczne wewnętrznie nie przedstawiają żadnej wartości naukowej. Cenne natomiast mogą być paradygmaty wzajemnie się wykluczające, czyli sprzeczne między sobą, ale mające modele w świecie fizycznym – niesprzeczne wewnętrznie. Nowy paradygmat pojawia się wówczas, gdy stary okaże się albo sprzeczny wewnętrznie, albo jałowy treściowo – nie niesie już żadnych nowych informacji o rzeczywistości. Nowa hipoteza, nowy paradygmat to inne spojrzenie na naturę. Często wraca się do starych paradygmatów, a prawdziwy postęp polega na uogólnianiu paradygmatów, łączeniu kilku hipotez w jedną. Przykładem takiego spojrzenia na paradygmaty jest hipoteza mówiąca, że cały wszechświat jest jednym wielkim *Perpetuum Mobile.* Ta hipoteza scala w jedno dziesiątki obowiązujących obecnie hipotez fizycznych i kosmicznych.

Czym jest Statystyka? Czy jest to nauka? Jaką nauką jest Statystyka? Nauka jest zawsze o naturze, o świecie fizycznym. Co jest przedmiotem Statystyki? Przedmiotem Statystyki jest region, czyli mapa, a także skończone, jednorodne i duże zbiory związane z tym regionem. Pojęcia zbioru jednorodnego i dużego spróbujemy w dalszym ciągu objaśnić na przykładach. Nauka to układ nazw, aksjomaty i logika – reguły wnioskowania. Bez nazw nie ma wiedzy. Semantyka – prawda – jest w nazwie. Każda rodzina ma pojemnik na guziki. Sortowanie guzików jest czynnością monotonną, jednak guzicza taksonomia jest dobrym początkiem teorii mnogości i topologii. Nie jest to statystyka. Jednorodne rodziny, jakie się otrzymuje, mogą być już przedmiotem zliczeń statystycznych – parastatystyką. Dalsze pomiary cech przedmiotów definiujących daną klasę to uzupełnienie zliczeń statystycznych. Przeciętność to statystyka, anonimowość. Zawód uczonego jest dziś pospolitym zajęciem. W minionych wiekach uczony uchodził za górę – Mont Blanc – błyszczącą z daleka. Dziś każdy pagórek uchodzi za światowego mędrca. Nie jest wielką sztuką, by z internetowych legend spreparować referat na kolejną konferencję w Tel Awiwie, Seulu lub Rapa Nui. Sieci losowe to dzisiejszy świat, z nim żyjemy i z niego żyjemy. Podobnie jest z jakością życia i dziedziną znaną pod nazwą *Gender Studies.* Na te tematy są pieniądze i każdy z nas ma coś w tych dziedzinach do powiedzenia. Zwrot *pal go sześć i statystyka* jest adekwatnym podsumowaniem uczonych od wszystkiego i badań naszych czasów. Osoba już się nie liczy, jest pospolitą statystyczną jednostką – przeciętnym punktem populacji. Jest to nie tyle pagórek, ile kupa śmieci – górka saneczkowa. Wielki uczony sam się przedstawia jako *Chris from USA*, chociaż jest rodem z Wałbrzycha. Skacze z konferencji na konferencję, jest w ciągłym ruchu. Kolejny referat jest permutacją wcześniejszego wykładu. Należy do gatunku *profesor nie mam czasu*. Ma na twarzy przylepiony uśmiech, w ręku elegancki *briefcase*, a jego typową odpowiedzią na dowolne pytanie jest zwrot *nie mam czasu*.

Niewątpliwie technologia i nauka to autorzy dobrobytu, w jakim żyjemy. Statystyka jest organizacją zliczeń – określania liczby kardynalnej – zbiorów. Statystyka tworzy rodzaj kartoteki, banku danych o określonym regionie i nic więcej. Jest to więc organizacja podobna do bankowości, asekuracji, wojska, policji itd. W statystyce nie ma paradygmatów, bo nie jest to nauka. W statystyce są jedynie standardy i wzorce pomiarów. Te standardy i wzorce mają ułatwiać tworzenie większych zbiorów danych, scalanie jednorodnych regionów. Parametry statystyczne: średnia, mediana, moda i decyle, to wielkości dzielące niejednorodną populację na podzbiory jednorodne. Grecka wyspa Samos to około 480 km kwadratowych i 42 tysiące mieszkańców, a francuska wyspa Tahiti to 1000 km kwadratowych i około 180 tysięcy mieszkańców. Tych dwóch regionów, wewnętrznie przypuszczalnie jednorodnych, nie można scalać, albowiem wielkości scalone nie będą miały rozsądnej interpretacji. Wyspę Samos wybrano nie przypadkowo, bowiem tu urodził się Pitagoras, a Pitagoras jest nie tylko ojcem uczonych, lecz głównie twórcą iloczynu skalarnego. Iloczyn skalarny to forma kwadratowa, forma kwadratowa dodatnio określona zaś jest macierzą korelacyjną, a macierze korelacyjne to z kolei mniej lub bardziej udane modele. Przetwarzanie danych nie jest domeną statystyki, lecz konkretnych nauk korzystających ze statystycznych banków danych. Aczkolwiek świat dąży do unifikacji jednorodności – gospodarka i kultura amerykańska dominują: Samos z VI wieku B. C. (p.n.e.) i Samos dzisiejsze to również regiony niejednorodne. Tahiti i Samos dzieli duża odległość przestrzenna, natomiast Samos Polikratesa i dzisiejsze dzieli jeszcze większa odległość czasowa.

Zliczenie ziaren maku w dużym worku nie jest zadaniem łatwym. Tego typu pracę wykonuje się metodą próbkowania. Próbkowanie to postępowanie typu Monte Carlo, czyli procedura probabilistyczna, lecz nie statystyczna. Aby policzyć, ile jest ziaren w worku z makiem, należy pobrać kilkanaście prób po 10 ziaren z różnych miejsc tego worka, zważyć każdą z nich dokładnie, a następnie obliczyć średnią wagę próby. Aby oszacować liczbę ziaren, wystarczy zważyć cały worek i wykonać proste rachunki. Postępowanie takie ma charakter badawczy dla biologa czy ogrodnika wybierającego do swej uprawy odpowiedni gatunek maku. W podobny sposób geolog będzie szacował wielkość ziaren piasku na wybranej plaży. Czynność ta ma również charakter poznawczy, a nie jest tylko informacją dla plażowiczów, jakie obuwie nosić. Podstawą metod Monte Carlo jest prawo Gaussa mówiące, że średnie niezależnych pomiarów dążą do wartości rzeczywistej. Skuteczność metod Monte Carlo jest zadziwiająca. Skomplikowane obliczenia można otrzymać prosto, posługując się próbą losową. Metody te wypróbowano po raz pierwszy, gdy prowadzono badania nad bombą atomową. Niezawodnych metod wyboru próby jest tyle, ilu uczonych statystyków; każdy z nich proponuje bowiem sposób wyboru reprezentatywnej próby. Próba jest inną populacją, więc jej zliczanie to także statystyka – statystyka niższej próby.

Statystyka jest instytucją organizacyjną. Niewątpliwie pojawiają się w niej, jak wszędzie, elementy nauki. Działania te jednakowoż mają charakter czynności organizacyjnych, są jakby spacerem po regionie, opisują dziedzinę. Dobrym porównaniem jest działanie księgowego klasyfikującego wpływy i wydatki przedsiębiorstwa. Statystyka jest sztuką zliczania skończonych, jednorodnych, chociaż dużych zbiorów. Mak w worku i piasek na plaży – chociaż tworzą zbiory duże i jednorodne – nie są przedmiotem zainteresowań statystyki. Statystyka jest działem metrologii. Podobnie jest z bankowością i ubezpieczeniami. Bankowość jest fragmentem nauki o finansach, a ubezpieczenia to praktyczne wykorzystanie wiedzy o procentach. Jeśli samochody koloru czerwonego mają więcej wypadków niż samochody koloru białego, to ubezpieczenie białego jest tańsze, a czerwonego jest droższe. Mówi się w tym przypadku o statystyce wypadków. Nie jest to statystyka, lecz elementarna probabilistyka. Podstawą finansów jest przysłowie mówiące, że w *jednym koszyku nie trzyma się wszystkich jajek*; jest to popularne sformułowanie zasady dywersyfikacji. Metrologia to swego rodzaju analiza matematyczna. Jest to struktura matematyczna nazywana algebrą liniową; algebra ta, nad ciałem liczb rzeczywistych, jest generowana przez ustalony zbiór jednostek: centymetr, sekunda, dolar, kilogram masła itd. Jednostki tworzą komutatywną grupę wolną, a algebra jest generowana przez tę właśnie grupę. Jest to najkrótszy i najprostszy wykład metrologii w ujęciu ogólnym. Przy okazji warto wspomnieć o ubezpieczeniach emerytalnych. Może znajdzie się ktoś odważny i mądry, który opracuje system ubezpieczeń oparty na średniej płacy. Ubezpieczamy się tak, aby emerytura była wielokrotnością średniej płacy: pół średniej płacy, cała średnia płaca, dwie średnie płacy itd. Jakość życia emeryta zależy od stosunku jego renty – emerytury – do średniej płacy. Pomiar to nauka – wielka i trudna nauka. Dyktator Polikrates opanował Samos przy pomocy 15 hoplitów. Informacja o hoplitach nie ma charakteru statystycznego. Okrągły stół rycerzy króla Artusa to także zbiór jednorodny, ale także nie jest to statystyka. Sam król to jedynie *Primus inter pares*. Polikrates – dyktatorzy greccy byli dobrymi władcami – zlecił Eupalinosowi przebicie tunelu przez górę sprowadzającego źródlaną wodę do miasta. Tunel o długości 1036 metrów drążono z obu stron. Rzecz dzieje się w połowie VI wieku przed Chrystusem. Obie gałęzie tunelu, górna i dolna, spotkały się z błędem jednego metra. Gałąź górna była jeden metr nad gałęzią dolną. Różnicę tę można nawet uważać nie za błąd pomiaru, ale za celowy uskok zwiększający przepływ wody. Tunel jest 175 centymetrów wysoki. Nie trzeba tłumaczyć, jakich pomiarów użyto, by otrzymać tak precyzyjny rezultat. Korzystano niewątpliwie z twierdzenia Pitagorasa. Ten akwedukt na Samos jest jednym z cudów świata – większym osiągnieciem niż współczesne tunele alpejskie, tunel pod cieśniną La Manche czy japoński tunel Hokkaido.

Francuski encyklopedysta Jean le Rond d'Alembert podzielił wiedzę ludzką na trzy grupy: nauki pamięciowe – historia, nauki racjonalne – filozofia i przyrodoznawstwo związane z myśleniem i logiką, oraz na sztukę – związaną z estetyką, pięknem, czuciem i duszą. Statystyka w tej klasyfikacji należy częściowo do każdej z tych trzech grup, ale jej istotą jest sztuka, czyli działanie. Muzą statystyki jest jedna z trzech pierwszych muz, zwana Melete, opiekunka pracy, ćwiczenia, nauki i wszelkiego działania.

Jeśli założymy, a założenie to jest rozsądną hipotezą, że wszechświat jest przestrzenią polską, to obowiązuje zasada numerycznego opisu stanów natury. Przestrzeń polska jest zupełną metryczną przestrzenią ośrodkową; ośrodek to przeliczalny podzbiór gęsty, który można ustawić w ciąg. Dla każdego stanu natury, elementu przestrzeni polskiej, istnieje ciąg liczb jednoznacznie go definiujący. Jest nim ciąg odległości wybranego punktu od ośrodka. Taką numeryczną charakteryzację stanów natury nazywamy zasadą numerycznego opisu. Nie jest to jednak statystyka. Opis ilościowy nie jest statystyką. Statystyka jest rodzajem szufladki z kartotekami. Dane statystyczne, raz jeszcze to podkreślamy, to podstawa decyzji dla ludzi zarządzających regionem lub dane źródłowe, empiria dla nauk przyrodniczych. Demografia jest wiedzą o społeczeństwie silnie opartą na danych statystycznych, ale także nie jest to statystyka. Księgi parafialne urodzin i zgonów mają charakter szeregów czasowych. Stały się one początkiem poważnych spisów statystycznych. Statystyka jest więc instytucją dostarczającą materiały dla decyzji i badań podobnie jak piekarnie dostarczają chleb i bułki do sklepów. Niektórzy traktują statystykę jako naukę o decyzjach w warunkach niepewności. Naturalnie każda decyzja dotyczy przyszłości, przyszłość jest nieokreślona, więc wszystkie decyzje są w warunkach niepewności. Statystyka jest podstawą wielu decyzji, teorią decyzji jednak nie jest. Warto wspomnieć również o kłamstwie statystycznym. Wyróżnia się dwa rodzaje oszustw statystycznych. Podawanie danych błędnych, wziętych z powietrza jako wielkości spisowych, a po drugie – traktowanie pojedynczych zdarzeń jako wielkości statystycznych. Liczba wypadków na drogach może maleć, lecz kłamstwo statystyczne dowodzi, że tych wypadków jest coraz więcej. Codziennie, wielokrotnie wspomina się o zaszłych kolizjach na drodze. Jaskrawym przykładem kłamstwa statystycznego jest propaganda tak zwanej pandemii. Nie porównuje się liczby zgonów z okresem normalnym, lecz pojedyncze zgony z powodu grypy wynosi się do apokaliptycznych rozmiarów. W istocie nigdy nie ma pewności, co jest przyczyną śmierci.

Inna sprawa to hipotezy i testy statystyczne. Jest to naukowy kwiatek do statystycznej praktyki. Abstrakcyjne algebry Rosjanie pięknie nazywają Абстрактная чепуха; podobnym gatunkiem twórczości naukowej jest teoria hipotez statystycznych. Wartość poznawcza tej teorii jest żadna, bo testowanie hipotez statystycznych jest nauką o niczym. Jeden z młodych statystyków próbował testować hipotezę mówiącą, że rozkład nie ma średniej, czyli że średnia jest wielkością nieskończoną. Nie ma testów na nieskończoność. Nauka cała jest swego rodzaju testem aksjomatu nieskończoności. Podstawą matematyki jest aksjomat mówiący, że istnieje zbiór nieskończony. Z tego aksjomatu i innych jeszcze go uzupełniających wynika cała nauka. Ekonomiczna i techniczna skuteczność nauki potwierdza ten aksjomat. Test statystyczny jest wnioskowaniem w rodzaju: jeśli p, to q, i zdarzyło się właśnie q; na tej podstawie wnosi się, że powinno być prawdziwe zdanie p. Zdanie p jest niezależne od zdania q i może być zarówno prawdziwe, jak i nieprawdziwe. Te proste słowa rozwinięto w całą naukę o błędach pierwszego i drugiego rodzaju, hipotezach takich i owakich. Profesor Czesław Domański, gdy w podobnym duchu mówiłem na jakimś sympozjum o testach statystycznych, zgodził się ze mną, ale w rozmowie w cztery oczy radził, by tego nie powtarzać ze względu na studentów i młodzież statystyczną. Testy statystyczne to indukcja naturalna, empiryczna. Czym ona jest, najlepiej objaśnia kurczę Bertranda Russela. Kurczę przez sto kolejnych dni dostaje garść pszenicy, a gdy zjawia się sto pierwszego dnia po swoją porcję ziarna, idzie do garnka. Indukcja matematyczna jest zupełnie czymś innym. Jak bankowość jest wiedzą o bankach, tak statystyka jest wiedzą o urzędach statystycznych. Statystyka matematyczna jest częścią probabilistyki i podobnie jak cała probabilistyka jest nauką o niczym. Nie ma zdarzeń losowych, nie ma zdarzeń niezależnych. Ruch komara nad Odrą ma wpływ na dalekie czarne dziury Kosmosu.

3. Około roku 2000 w Katedrze Matematyki zajmowano się teorią preferencji i społecznym wyborem. Preferencja jest relacją zwrotną i przechodnią, a porządek jest taką preferencją, która jeszcze ponadto spełnia trzeci warunek – jest słabo asymetryczna: jeśli $a \leq b\ i\ b \leq a, to\ a = b$. Kenneth Arrow dostał w 1972 roku nagrodę Banku Szwecji imienia Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii, między innymi za twierdzenie o społecznym wyborze. Jeśli mamy skończoną populację preferencji – porządków, to jaka preferencja, porządek powinna obowiązywać całą grupę? Przy bardzo prostych warunkach okazuje się, że preferencja zbiorowa jest preferencją któregoś z członków grupy. Tego decydenta nazywa się dyktatorem. Gdy do warunków doda się, by preferencja zbiorowa nie była jedną z preferencji uczestników zbiorowości, wtedy preferencji grupowej nie ma. Albo jest dyktator, albo nie ma jednolitego poglądu na wybory członków grupy. Preferencje dotyczą towarów, poglądów politycznych, kolorów, smaków itd. Mamy więc skończony zbiór elementów X, który można uważać za towary konsumpcyjne. Parę elementów a i b nazywamy decyzją. Decyzja oznacza, że konsument woli towar b niż towar a, przedkłada towar b nad a. Każda decyzja w zbiorze wszystkich preferencji ma jakąś częstotliwość. Można ją uważać za prawdopodobieństwo lub procent uczestników mających takie właśnie upodobanie. Mając częstotliwości, wybiera się decyzje o maksymalnych częstotliwościach. Każda częstotliwość lub jej negacja jest nie mniejsza niż 1/2. Relacja decyzji maksymalnych byłaby porządkiem obowiązującym całą populację, gdyby była właśnie porządkiem. Relacja maksymalna może jednakowoż nie być porządkiem. Janusz Łyko (J. Łyko (2000)) zauważył, że jeżeli każda częstotliwość maksymalna jest większa od 2/3, to wtedy relacja maksymalna jest porządkiem, gdy wszystkie preferencje członków grupy są porządkami liniowymi. Liczba 2/3 jest wielkością uprzywilejowaną w geometrii (J. Łyko, A. Smoluk (2014)). Wystarczy wspomnieć, że w trójkącie równobocznym jedna trzecia wysokości to promień okręgu wpisanego, a 2/3 wysokości to promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Wielkość ta pojawia się również w życiu społecznym. Na Śląsku zbudowano trzy Kościoły Pokoju, do czasów dzisiejszych ocalały tylko dwa. Może to przypadek, może to reguła. Zdarza się tak często. Złota liczba:

$$\chi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

znana bardzo dobrze starożytnym Grekom – stąd oznaczenie od pierwszej litery słowa χρυσός oznaczającego złoto, spełnia równanie:

$$x^2 = 1 - x.$$

Liczba złota jest specjalnym prawdopodobieństwem, wynoszącym w przybliżeniu 62%, podczas gdy liczba Łyki to około 67%. Złote prawdopodobieństwo jest uprzywilejowane. Z podanego wyżej równania wynika, że kwadrat prawdopodobieństwa χ

równa się prawdopodobieństwu zdarzenia przeciwnego. Jeżeli dwa niezależne zdarzenia mają prawdopodobieństwo χ, to nie może zajść zdarzenie przeciwne. Semantyka to słowa i zawarta w nich treść, natomiast syntaksa to składnia – aksjomaty i reguły wnioskowania. Zdarzenia A i B należące do algebry Boola są względem prawdopodobieństwa p *superniezależne*, gdy $p(AB) \leq p(A)p(B)$, są *niezależne*, gdy $p(AB) = p(A)p(B)$, i są *subniezależne*, gdy $p(AB) \geq p(A)p(B)$. Jeżeli dwa subniezależne zdarzenia mają prawdopodobieństwo nie mniejsze niż χ, to ich część wspólna nie może być zdarzeniem przeciwnym. Część wspólna ma prawdopodobieństwo większe niż zdarzenie przeciwne. Liczba złota może zastąpić liczbę 2/3 w regule Łyki. Jest to najmniejsza dopuszczalna liczba, najmniejsze prawdopodobieństwo wymuszające, by relacja większościowa była liniowym porządkiem. Naturalnie każda liczba większa od liczby złotej również spełnia regułę gwarantującą porządek w zbiorze decyzji maksymalnych. Liczba złota w tym sensie jest wielkością optymalną. Granicą pomiędzy obszarem dającym wiedzę i obszarem, gdzie tej wiedzy nie ma (A. Maciuk, A. Smoluk (2018)). Uogólnienie rezultatu Janusza Łyki możliwe jest tylko przy dodatkowym założeniu. Założenie to oznacza, że decyzje maksymalne postaci ab i bc są subzależne, czyli częstotliwość zdarzeń A_{ab} i A_{bc} spełnia warunek:

$$p(A_{ab}A_{bc}) \geq p(A_{ab}) \cdot p(A_{bc}).$$

Zdarzenie A_{ab} jest zbiorem tych decydentów, którzy podejmują decyzje ab. Założenie o subzależności dotyczy jedynie decyzji maksymalnych ab i bc. Powstaje pytanie, czy istnieje relacja maksymalna spełniająca warunek subzależności, lecz niespełniająca dodatkowego warunku:

$$p(A_{ab}) > \chi,$$

która nie jest relacją porządku. Podobny przykład związany jest także z preferencjami. Przy preferencjach zakłada się, że częstotliwości są większe od χ, a relacja maksymalna nie jest preferencją.

Preferencję grupową można łatwo wprowadzić na innej drodze. Załóżmy, że decydenci są uporządkowani liniowo, wtedy każdemu towarowi a ze zbioru X jest przyporządkowany wektor $f(a)$ liczb naturalnych od zera do n, gdzie n jest liczbą wszystkich decydentów. Wektor $f(a) = (n_1, \dots, n_n)$, gdzie liczba naturalna n_i oznacza, że towar a n_i decydentów postawiło na i-tym miejscu; oczywiście $n_1 + \cdots + n_n) = n$. Zbiór wartości funkcji f jest naturalnie preferencją. Jest to preferencja typu Pareto w zbiorze N^n. Różnym towarom mogą odpowiadać takie same wektory pomiarowe liczb naturalnych. Tak określoną preferencję można uważać za wybór grupowy. Towary utożsamia się, gdy przyporządkowane im wektory liczb naturalnych są równe.

Esej jest dedykowany Katedrze Statystyki Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu na jej 70-lecie. Żyjemy lat 70 lub – gdy sił stanie – lat 80. I to jest właśnie statystyka. Dziękuję profesorowi Markowi Biernackiemu za pomoc w jego redakcji. Za niestandardowe, ekstremalne poglądy w nim wyrażone odpowiada tylko A.S.

Wrocław, w poniedziałek, 13 września 2021 roku.

Literatura

J. Łyko (2000). *Twierdzenie Arrowa a ordynacje*, [w:] A. Smoluk (red), *Elementy metrologii ekonomicznej*. Wydawnictwo AE we Wrocławiu, s. 165-168.

J. Łyko, A. Smoluk (2014). *Tema con variazioni, czyli o regule 2/3*, [w:] *Statystycy, ekonometrycy i matematycy Polski Południowej dla rozwoju badań społeczno-ekonomicznych*. Kraków. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, s. 43-55.

A. Maciuk, A. Smoluk (2018). *A golden ratio as a generalization of the 2/3 rule of Janusz Łyko*. Mathematical Economics 14(21), Wydawnictwo UE we Wrocławiu, s. 31-36.

Statystyka. (1969). Prace Naukowe nr 21. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Ekonomicznej we Wrocławiu.

8

Twierdzenie o czterech barwach

Antoni Smoluk

Artykuł jest dopełnieniem i uproszczeniem wcześniejszych prac (A. Smoluk (2016), (2017)); w tych pracach czytelnik znajdzie definicje, których tu nie powtarzamy. Jeżeli mapa *M* daje się zgodnie pokolorować czterema barwami, to w rodzinie krajów tworzących *M* istnieje relacja równoważności barwnej. Dwa kraje są równoważne barwnie – kolorowo, gdy przy każdym zgodnym kolorowaniu *M* czterema barwami oba mają ten sam kolor. Mapa jest nierozkładalna, gdy nie jest produktem map mniejszych; iloczyn ten jest inwariantny ze względu na kolorowanie (A. Smoluk (2016)).

Lemat 1. Jeżeli mapa jest prosta, to każde dwa kraje mają tylko jedną granicę.

Francja i Hiszpania mają dwie granice – dwa niespójne kawałki; Księstwo Andora przerywa granicę.

Lemat 2. Jeżeli dwa kraje mają wspólny wierzchołek, to nie są kolorowo równoważne.

Dowód. Jeżeli na danej mapie istnieje relacja kolorowej równoważności, to taką mapę można zredukować do mapy minimalnej. Redukcja nie zmienia liczby chromatycznej mapy i własności relacji kolorowej równoważności: relacja ta albo jest identycznością, albo nią nie jest. Jeśli jest identycznością, to żadne dwa kraje nie są kolorowo równoważne. Istnieje pięć typów minimalnych map zredukowanych: jedne kraj, dwa kraje, trzy kraje, cztery kraje i pięć krajów. Na czterech pierwszych typach map relacja kolorowej równoważności jest identycznością. Mapy, których liczba chromatyczna to cztery, dzielą się na dwie grupy: te, na których relacja kolorowej równoważności jest identycznością, i te pozostałe, na których nie jest. Jeżeli na *M* istnieją kraje różne równoważne kolorowo, to wtedy istnieją trzy kraje *A*, *B* i *C* mające każdy z każdym granicę oraz dwa kraje *X* i *Y* graniczące z *A*, *B* i *C*. Jeżeli kraje biegunowe *X* i *Y* mają wspólny wierzchołek, to wtedy mapa ta jest równoważna mapie z pięciu krajów, na której każdy kraj graniczy z każdym. Przeczy to twierdzeniu mówiącemu, że graf pięciopunktowy, w którym każdy wierzchołek jest połączony z każdym innym, nie jest grafem płaskim.

Mapa *M* nazywa się mapą trynitarną, gdy w każdym wierzchołku schodzą się tylko trzy kraje. Kolorowanie map czterema barwami redukuje się do kolorowania czterema barwami map trynitarnych, i to trynitarnych map prostych.

Twierdzenie. Trynitarną mapę prostą można pokolorować czterema barwami.

Dowód. Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla map prostych mających n granic. Niech mapa M ma $n+1$ granic. W wierzchołku trzech państw A, B i C jedną granicę ściągamy do punktu. Otrzymujemy mapę M_1 o wierzchołkach, w których schodzą się cztery kraje A, B, C i D, gdzie D leży pomiędzy A i B, naprzeciw kraju C. Mapa M_1 zgodnie z założeniem indukcyjnym daje się pokolorować czterema barwami. Z lematu drugiego wynika, że kraje A i B mają różne kolory. Można więc wrócić do sytuacji początkowej tak, że mapa M daje się pokolorować również czterema barwami. Jeżeli zaś mapa M_1 nie jest mapą prostą, to jest produktem dwóch map mniejszych. Pas rozcinający D, C i X może być ściągnięty do dwóch krajów, ponieważ kraje D i C mogą mieć ten sam kolor. Każdy z czynników produktów daje się zgodnie pokolorować czterema barwami, barwy zaś udaje się tak dobrać, by kraje A i B miały różne kolory. Można więc również w tym przypadku wrócić do sytuacji początkowej. Dowód został zakończony.

Uwaga. Jeżeli mapa M jest prosta i ma wierzchołek, w którym stykają się cztery kraje lub kraj o czterech granicach, to kolorowanie M redukuje się do kolorowania mapy mniejszej. Jeżeli na mapie prostej istnieje wierzchołek rzędu wyższego niż cztery, to kolorowanie tej mapy również redukuje się do kolorowania mapy prostszej.

Istota zgodnego kolorowania czterema barwami sprowadza się do barwienia prostych map trynitarnych.

Redukcja mapy oznacza zmniejszenie liczby jej granic. Dwie mapy są homomorficzne, gdy jedna powstaje z drugiej przez usunięcie kilku granic. Redukcja jest inwariantna, jeśli nie zmienia liczby chromatycznej mapy i typu relacji kolorowej zgodności: albo jest to relacja identycznościowa, albo nie jest identycznością. Istnieje więc, jak powiedziano na początku, pięć inwariantnych obrazów. Jeśli relacja kolorowej zgodności nie jest identycznością, to redukcja inwariantna pozostawia wybrane dwa kraje ciągle w relacji kolorowej zgodności. We wnętrzu każdego z tych dwu wybranych krajów wyróżnia się punkt – w jednym A, a w drugim B. Inwariantność oznacza, że te wybrane punkty zawsze należą do różnych państw będących w relacji kolorowej zgodności. Tak należy patrzeć na sformułowany wyżej lemat; tymi dwoma wybranymi krajami są kraje mające wspólny wierzchołek, gdyby takie kraje istniały. Wychodząc od minimalnego obrazu, w którym relacja kolorowej zgodności nie jest identycznością w stronę przeciwną do wyjściowej mapy M, dołączamy kolejno granice. Ten proces dołączania granic nie może sprawić, by kraje biegunowe miały wspólny wierzchołek. Wspólny wierzchołek mógłby się pojawić tylko przy ściąganiu niektórych granic do punktu.

Literatura

A. Smoluk (2016). *A simple proof of the four – colors theorem*. Didactis of Mathematics 13, s. 35-38.

A. Smoluk (2017). *Raz jeszcze o czterech barwach*. Didactis of Mathematics 14, s. 45-57.

9

Cosinus. Funkcje okresowe. Czas liniowy czy kolisty[1]?

Antoni Smoluk

Scientia nihil aliud est quam veritatis imago

Rzecz będzie o cosinusie, elipsie, etyce i estetyce. Esej jest rozwinięciem notki (A. Smoluk (2014)) i jej wersji angielskiej (A. Smoluk (2014a)). Jest to polemika z opiniami recenzentów. Recenzentów było czterech, których dla prostoty nazywam A, B, C i D. Trzy recenzje A, B, C były przygotowane dla redakcji *Ekonometrii* wydawanej przez profesora Józefa Dziechciarza we Wrocławiu, a recenzja D dla *Wariacji Metafizycznych* wydawanych w Utopii. Recenzje A i C były pozytywne, pozostałe dwie – negatywne. Recenzenci B i D uważają prackę za niegodną druku, a nawet szkodliwą. Naturalnie polemizuję tylko z recenzjami negatywnymi, a o pozytywnych wspominam mimochodem. Dla wygody czytelnika zamieszczam notkę o cosinusie bez zmian; kończy się ona epitafium. Opuszczono jedynie rysunek cylindra przeciętego płaszczyzną pod kątem 45 stopni z podpisem: *Monument sinusa*. Czy czas jest kołowy czy liniowy? Odpowiedź na to pytanie zależy od problemu. Einstein w szczytowym okresie swej kariery był ulubieńcem każdego salonu. – Profesorze! Czym różni się czas od wieczności? Pytanie platonicznej wielbicielki uczonego sprawia mistrzowi przyjemny kłopot. Z uśmiechem i zadumą objaśnia. – Różnica jest w jakości. Na odpowiedź mnie potrzeba czasu, a pani wieczności, by ją zrozumieć. Anegdota ta jest dobrym – choć może nieco ironicznym – wstępem do eseju o funkcjach okresowych i cosinusie. Główna myśl notki sprowadza się do zmiany dziedziny funkcji – powrotu do dalekich początków trygonometrii. Funkcja okresowa opisuje zjawiska periodyczne przyrody, zjawiska powtarzalne. Dziedziną funkcji okresowej jest więc okrągły zegar – czas kołowy. Czas

[1] W istocie nie ma potrzeby rozróżniania dziedziny funkcji okresowej będącej kołem od dziedziny będącej prostą. Są takie potrzeby praktyczne, by dziedziną była linia prosta, wtedy, gdy przykładowo badamy drganie struny lub koło, wtedy, gdy budujemy czasomierze. Autor promuje czas kolisty z tego powodu, że jest on powszechnie w środowisku polskich matematyków odrzucany, a właściwie mylony z czasem liniowym – trudna walka o zmianę przyzwyczajeń.

kołowy symbolizuje wieczność. Czas liniowy jest pochodną rozwoju naturalnego – wzrostu wykładniczego. Czas liniowy to Newton, Einstein i fizyka makro. Struna jest oczywiście linią prostą, a do opisu jej drgań służą harmoniki – funkcje okresowe. Czas liniowy jest dalszym postępem w nauce i poznaniu. W przyrodzie częściej spotykamy rzeczy okrągłe niż proste odcinki. Mariażem koła i prostej jest walec; spirale na walcu modelują czas rzeczywisty.

Funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, nazywa się krótko ciągiem; z tych samych powodów – precyzja i głęboka treść – funkcje okresowe potrzeba definiować inaczej niż dotychczas – krócej i jaśniej. Funkcja określona na kole, czyli funkcja, której dziedziną jest grupa koła, $T = \left\{e^{it}\colon\ t \in R\right\}$ nazywa się funkcją okresową. Multiplikatywna grupa T jest bowiem izomorficzna z addytywną grupą ilorazową $R/(2\pi Z)$ liczb rzeczywistych R, gdzie naturalnie $R/(2\pi Z)$ jest rodziną klas abstrakcji relacji równoważności $x = y$ (mod 2π). Jak wykresem funkcji $f: X \to Y$ jest podzbiór produktu $X \times Y$, tak wykres funkcji okresowej leży na cylindrze $T \times R$ lub – ogólniej – na $T \times Y$. Funkcje okresowe rozumiane tradycyjnie są funkcjami niezmienniczymi – automorfizmami – względem działania podgrupy addytywnej $\left\{2\pi k:\ k \in Z\right\}$ grupy R, gdzie Z jest grupą liczb całkowitych; orbita funkcji okresowej jest jednym punktem.

Uwaga. Wykresem funkcji cosinus $\left\{(e^{it}, \cos t) : t \in R\right\}$ jest elipsa

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

Widać to nieomal bezpośrednio. Funkcja f: $R^2 \to R$ dwóch zmiennych, określona wzorem $f(x, y) = x$, osiąga ekstrema warunkowe, pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$, w punktach: $A = (1, 0)$ – maksimum oraz $B = (-1, 0)$ – minimum. Naturalnie

$$\left\{(x, y) \in R^2\colon\ x^2 + y^2 = 1\right\} = \left\{(\cos t, \sin t)\colon\ t \in R\right\};$$

przecięcie płaszczyzny $z = x$, czyli zbioru

$$\left\{(x,\ y,\ x) \in R^3\colon\ (x, y) \in R^2\right\}$$

z cylindrem

$$\left\{(x, y, z) \in R^3\colon\ (x, y) \in R^2,\ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

w R^3, jest właśnie wykresem funkcji cosinus, a więc elipsą. Równanie tej elipsy, zapisane w nowych współrzędnych:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$
$$y' = y,$$
$$z' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

jest dane wyżej – primy pominięto; jest bowiem $z = x$, więc: $x' = \sqrt{2}\,x$, $y' = y$, $z' = 0$. Równania parametryczne zaś dane są wzorami:

$$x' = \sqrt{2}\,\cos t,\ y' = \sin t,\ z' = 0,\ t \in R.$$

Analogicznie, badając ekstrema warunkowe funkcji $g(x, y) = y$, przy tym samym warunku, widzimy, iż wykresem funkcji sinus jest elipsa

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Jest to obrócony o kąt $\frac{\pi}{2}$ wykres funkcji cosinus.

Funkcje $f(x, y) = x$ oraz $g(x, y) = y$ są naturalnie rzutami na pierwszą i drugą oś. Funkcja $h(x, y) = \max\{x, y\}$ nie jest projekcją, ale zasługuje na nazwę semiprojekcji. Nie jest to funkcja gładka – w punktach prostej $y = x$ nie ma pochodnej. Cztery punkty:

$$A = (0, 1),\ B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ C = (1, 0),\ D = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

są lokalnymi ekstremami warunkowymi h na zbiorze $x^2 + y^2 = 1$; w A i C funkcja h osiąga maksima, a w B i D – minima. Przecięcie cylindra wykresem funkcji h jest nową funkcją okresową – w połowie sinusem i w połowie cosinusem. Wykres tej funkcji nie jest tworem płaskim. Podobnie rzecz się ma, gdy zamiast h weźmiemy funkcję $j(x, y) = \min\{x, y\}$. Przykłady te niegładkich ciągłych funkcji okresowych typu *spline* – funkcji sklejanych – pokazują, jak produktywna dydaktycznie jest zmiana definicji funkcji okresowej. Ciągła funkcja okresowa $f \in C(T, R)$ jest przecięciem powierzchni $F \in C([-1, 1]^2, R)$ z cylindrem. Odwzorowanie przestrzeni Banacha $C([-1, 1]^2, R)$ w przestrzeń $C(T, R)$, które funkcji F przypisuje jej zawężenie do zbioru T, jest liniową surjekcją o normie 1; w obu przestrzeniach myślimy o normie Czebyszewa.

Wierzę, że wzmianka o wykresie funkcji sinus i definicji funkcji okresowej w ogólności będzie użyteczna dla nauczycieli – szczególnie tych, którzy widzą matematykę jako naukę o świecie fizycznym, dla których matematyka nie jest odmianą abstrakcyjnych wielowymiarowych szachów. Poznajemy to tylko, co istnieje. Nie ma nauki o niebycie. Przyjęcie grupy koła T za dziedzinę funkcji okresowej wyjaśnia istotę wszystkich przebiegów periodycznych w naturze: biologii, fizyce, ekonomii, kosmosie. W wirach powietrznych mieszkają przecie piękne panny – eteryczne wiły. Ruch wirowy jest powszechny. Jego istotą jest bowiem dążenie do równowagi. Czas ma naturę kołową – co jest, już było, co było – będzie. Jeśli celem szkoły jest wychowywanie, przekazywanie wiedzy i urabianie kultury naukowej, to niewątpliwie funkcje okresowe tak właśnie trzeba traktować. Stare nawyki jednak zmienia się opornie – tradycja jest stabilna. Sondaż wśród matematyków różnego szczebla, próba – z pewnością niereprezentatywna – liczyła kilkanaście osób, pokazał, że idea tu głoszona jest całkowicie obca dzisiejszym absolwentom wydziałów matematycznych. Nawet para – *nulla calamitas sola* – tytularnych profesorów matematyki, po dwóch dniach detalicznych objaśnień nie chwyciła, czym jest cosinus. Pomysł, z nieznanych mi powodów ostro zwalczany, jak szkodliwa i zła nauka, nie przystaje więc do stanu umysłów dzisiejszych matematyków. Może przeważa lęk przed nowym i prostym? Tak bywa u ludzi starszych – nie trzeba się uczyć, wystarcza rutyna. Moimi rozmówcami byli jednak w przewadze ludzie młodzi i bardzo młodzi. *Durnowo krysty, win kryczy pusty*. To dosadne przysłowie Rusinów lepiej pasuje do nas – rozpasanych w swej wolności – Polaków niż do dumnych Kozaków. Zawsze mamy swoje zdanie. Być może nawet ten esej jest tego przykładem. A ponadto już Arystoteles uważał, że *purus mathematicus* to *purus stupidus*. Pewnie coś w tym jest, bo mówi się, iż matka znanego matematyka żaliła się – chyba jednak z poczuciem dumy – sąsiadce: *mam trzech synów – dwóch normalnych i matematyka*. Pytanie, czy matematyk jest kimś urodzonym jak poeta, czy też jest z zawodem poświadczonym dyplomem, jest ciągle otwarty. Matematyka cechuje niewątpliwie wielkie poczucie sprawiedliwości, przestrzeganie zasady *fair play* i naturalnie praworządność. Rodzimy się matematykiem czy też zostajemy nim po odpowiednich studiach? – *Ja wiem lepiej – sinus jest linią falistą i niczym więcej*. Wójtów matematycznych skorych do takich wypowiedzi jest w naszej – polskiej – matematyce sporo. A przecież jest to stara idea – koło jako dziedzina funkcji okresowej – dobrze znana specjalistom od analizy Fouriera. Tytułem przykładu podam dwa cytaty. Najpierw z trudnej, choć popularnej książki *Kalejdoskop matematyczny* Hugona Steinhausa. „Gdy nawiniemy papier na świecę, potem przetniemy świecę ukośnie ostrym nożem i rozwiniemy papier, otrzymamy sinusoidę" (H. Steinhaus (1954), s. 234). Świeca Steinhausa warta jest gry – starań o zmianę programów nauczania matematyki i metod uczenia tego przedmiotu w polskich szkołach wszystkich szczebli: od przedszkola do uniwersytetu. Cytat drugi jest z równie pięknie napisanej książki – tym razem specjalistycznej; jest nim pierwsze zdanie wstępu Jean-Pierre'a Kahane'a do jego dzieła o szeregach Fouriera zbieżnych absolutnie (J.-P. Kahane (1970)). „Książka traktuje o funkcjach klasy A, czyli o funkcjach ciągłych na okręgu o absolutnie zbieżnym szeregu Fouriera". Steinhaus rozwija elipsę i pokazuje sinusoidę, Kahane zwija sinusoidę i otrzymuje elipsę, chociaż tego wyraźnie nie pisze. Jest więc sinusoida – linia falista, jest elipsa – sinus. Przestrzeń Banacha okresowych ciągłych funkcji na prostej jest izomorficzna i izometryczna z przestrzenią funkcji ciągłych na okręgu. *Repetitio est mater studiorum*. Dziedziną funkcji okresowej *ex definitione* jest grupa koła T. Definicja ta rozszerza się natychmiast na funkcje dwuokresowe określone na torusie T^2 i ogólnie na funkcje wielookresowe, których dziedziną jest produkt T^n. W tym jest cała sprawa. Można to uważać – mówiąc górnolotnie – za namiastkę nowego paradygmatu w teorii funkcji okresowych. Odrzućmy wygodną rutynę, a będzie lepiej, naturalniej, prościej. Może najwięcej zyska się zwolenników kołowej dziedziny funkcji okresowych, gdy poszerzymy wykład o przedstawioną tu myśl. Słuchacze (czytelnicy) sami zadecydują, co przyjąć za definicję. Pojawi się więcej modeli, teoria stanie się bogatsza, a wiedza szersza. Celem nauki jest wszak doskonałość.

August Kekulé, chemik niemiecki, twórca teorii budowy związków organicznych, w 1865 roku odkrył pierścieniową naturę benzenu i podał klasyczny dziś wzór strukturalny. Wzór ten powstał w sennej wizji, gdy zdrzemnął się przy biurku. Było to prawdziwe olśnienie. Podobnie rzecz ma się z elipsą i cosinusem. Elipsa jako wykres cosinusa pojawiła się we śnie. Zasługuje więc na uwagę i z tego powodu. Sny bywają prorocze. Jest to drobny przyczynek – *toutes proportions gardées* – do psychologii odkryć naukowych. Największym pomnikiem sinusa jest chyba wrocławska wieża niebiańska *Sky Tower*.

Z powodu cosinusowej batalii profesor Bolesław Kopociński wygotował fraszkę na wzór nagrobków hryciańskich; Hrycianki – to wieś koło Nowogródka. Żart w porę zawsze jest celny – trafia w sedno: czasem wspiera, innym razem rujnuje. Dziękuję w imieniu wszystkich sinusów i cosinusów bez względu na skutek.

Epitafium

Tut lażyt Anton Smaljuk,
Prafiessor wsjakich nauk.
Na miaso nie mieł wkusa,
A dumał o kasinusach.
Ho! ho! ho!
Szczoż wsiakim da taho?

Artykuł o cosinusie doczekał się, jak wspomniano, czterech recenzji. Dla *Wariacji Metafizycznych* (WM), organu *Pospólstwa Towarzyskiego Metafizyków* (PTM), opinię przygotował recenzent oznaczany dalej literą D. Ma ona niewątpliwe zalety, ma też wady. Z tego powodu załączamy ją w dodatku *in extenso*, by czytelnik poznał smak tej niezwykłej oceny – oceny dłuższej niż opiniowana notka. Pozostałe trzy: A, B, C, przygotowano na specjalnych arkuszach, z informacją, by opiniodawca oceniał w punktach; wyceny te powinien uzasadnić pięcioma zdaniami.

1. Problematyka (maksimum 20 punktów).
2. Metoda (maksimum 20 punktów).
3. Meritum (maksimum 50 punktów).
4. Forma (maksimum 10 punktów).

Pierwszy recenzent, nazwijmy go A, wycenił pracę na 81 punktów (15, 20, 40, 6). Drugi, B, na 30 punktów (5, 10, 10, 5), trzeci, C, na 80 punktów (15, 15, 40, 10).

Interesujące są opinie recenzenta B – żądano od niego przynajmniej pięciu zdań, więc w każdej sprawie akuratnie je dał. Przytoczę je z drobnymi zmianami językowymi niemającymi wpływu na treść.

O problematyce mówi: Problem definiowania pojęć matematycznych na różnych poziomach ogólności czy abstrakcji jest daleki od nowości. Cel pracy niejasny, bo wymogi głębi treści, jasności i krótkości stawiane przez autora definicjom formalnym są nieokreślone. Wolno wątpić, czy aparat pojęciowy wykorzystany dla określenia funkcji cosinus jest krótszy od siatki pojęciowej matematyki szkolnej. Praca ma charakter interdyscyplinarny: dotyczy matematyki, socjologii i historii nauki, a także ma fragmenty pseudofilozoficzne i literackie. Praca nie dotyczy żadnej znanej mi koncepcji ekonometrycznej.

O metodzie pisze: praca metodologicznie jest niejednorodna, zawiera sformalizowaną warstwę matematyczną i opis werbalny. W pierwszej wykorzystano metodę dedukcyjną. Nie budzi to zastrzeżeń. Wolno wątpić w naukowy charakter narracji słownej.

Treść merytoryczna: tytułowa propozycja jest interesująca, choć jej znaczenie dla matematyki jest znikome – rodzaj ciekawostki przyrodniczej. Fragmenty części werbalnej są bardziej ekspresją swobodnego strumienia świadomości niż tekstem naukowym. Potwierdza to logika autora – nie ma nauki o niebycie – bo status ontologiczny *pięknych panien – eterycznych wiłów* [kursywa recenzenta z wykrzyknikiem] jest nieokreślony. Skąd więc pomysł, by skierować pracę do czasopisma naukowego?

Forma opracowania: język pracy jest nierówny. Precyzji i elegancji wywodu formalnego nie towarzyszą podobne atrybuty części werbalnej. Pewne fragmenty tej ostatniej są językowo niepotrzebnie udziwnione i pretensjonalne. Wyklucza to intersubiektywną weryfikację całości pracy, co jest podstawowym warunkiem naukowego statutu. Zawartość *Epitafium* zdaje się naruszać sugerowaną przez redakcję zasadę anonimowości.

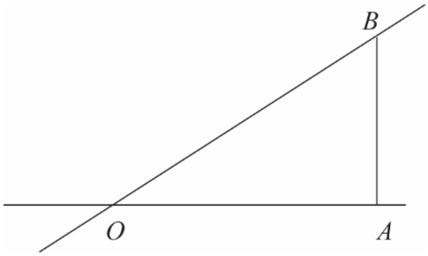
Zaiste *crazy logic!* Czy recenzent B zrozumiał pracę? Jeśli tak, to jego opinia jest koloru zielonego – oblana sosem *jalousie du métier.* I to można zrozumieć; właściwość ta charakteryzuje największych uczonych – pcha badania do przodu. Obowiązuje jednak obiektywizm, a nie niszczenie konkurenta. Mądry widzi wartość nowych propozycji, aczkolwiek może zazdrościć. Dlaczego ja tego wcześniej nie widziałem? Przecież to takie proste i piękne. Jeżeli jednakowoż B zrozumiał pracę, to tym, co napisał, wystawił sobie złe świadectwo moralne. Zaneguję, chociaż to dobre i wartościowe. Jeśli zaś nie zrozumiał, to nie powinien pisać – źle pisać. A widać, że nie zrozumiał; świadczy o tym jego wzmianka o teorii definiowania, eterycznych wiłach, ciekawostce przyrodniczej, jaką jest elipsa, oraz inne mądrości w rodzaju intersubiektywnej weryfikacji. Podstawą każdej definicji jest zawsze wielkie twierdzenie. Definicja sinusa jest oparta na twierdzeniu Talesa. Prawo Keplera jest dla opiniodawcy ciekawostką przyrodniczą. Ile takich ciekawostek jest w jego *dossier*? Ontyczność – egzystencjalność, stan ontyczny wspomnianych przeze mnie żartobliwie wiłów podobny jest do opiewanej powszechnie przez metafizyków flaszki Kleina, z której niewątpliwie recenzent pił swoje mądrości nie raz. Każdy artykuł naukowy winien, z szacunku dla czytelnika, być jednocześnie dziełem literackim. W pracy jest nauka, jest propaganda, jest żart i ironia. Autor wierzy, że mądry czytelnik będzie wiedział, co jest nauką, a co żartem. Żart – by praca lekko się czytała. *Sapienti sat*. Każde ważne odkrycie jest strumieniem świadomości – nagłym wylewem intuicji. W eseju jest więc, jak powiedziano, dedukcja, jest intuicja, jest przymrużenie oka. Ta różnorodność formy dotyczy jednej sprawy – idei okresowości przenikającej świat cały. Wykresem cosinusa jest elipsa. Czy to jest ciekawostką przyrodniczą? Tak! Jak najbardziej, ale jest to jednocześnie czysta nauka, czysta matematyka. Jest to prawo przyrody. To, co konieczne, jest więcej niż prawdą naukową, jest stanem natury.

Subtelne *jalouse de métier* jest zrozumiałe i nawet pożądane, lecz pospolita *Brotneid* jest pewnie grzechem. W recenzji czuje się raczej odór rynku rybnego – *Neid*; nie ma w niej przyjemnej woni Pól Elizejskich, jaką czuje się w *jalouse*. Recenzent D bije się z myślami, co postanowić – lepiej – jak ma uzasadnić wcześniej podjętą decyzję o odrzuceniu notki przesłanej mu do oceny. Naturalnie on wygrywa tę walkę i swoje myśli rozbija w pył tworzący wielki tuman kurzu zakrywającego główną myśl eseju – koło jest domeną funkcji okresowej.

Szczególnie dziękuję recenzentom A i C, którzy uznali artykuł za godny propagacji, dziękuję też tym pozostałym B i D, co go odrzucili. Ci ostatni dają mi łatwą okazję do pokazania postawy przeciwnej nauce. Nie pisze się złej opinii tylko dlatego, że recenzentowi praca się nie podoba; istotne jest meritum sprawy, a nie towarzyszące głównej idei myśli autora. Wszystko wolno, lecz nie wszystko jest dobre, nie wszystko prawem natury, nie wszystko buduje, nie wszystko jest zgodne ze zwykłym poczuciem etyki. Szemrane towarzystwo – to wspaniała instytucja. Eliptyczna wypowiedź recenzenta D o towarzystwie jest zadziwiająca. Powiedział więcej, niż gdyby wyłożył kawę na ławę. *Amicus Plato, amicus Socrates, sed magis amica veritas.* Przyjaciele recenzenta D są u niego przed prawdą. Prawda jest sprzedajną partnerką; kto więcej płaci, ten ma więcej prawdy. Zaprawdę przysłowia są wielką empiryczną mądrością ludzkości. Księga przysłów – to pouczająca kanoniczna księga Biblii. Szemrane towarzystwo. *Sic*! Fortyfikacja emocjonalna. Żaden argument nie przemawia. Ja wiem lepiej. Istnieje kategoria – wiem to z życia – matematycznych mędrców, którzy wszystko wiedzą. Mówisz takiemu, że własność A jest podrzędna względem własności B. – *Naturalnie, ja to dawno wiedziałem*. Jednakowoż, gdy zapytasz mędrka, dlaczego produkt nieskończony zbieżny do 0 jest rozbieżny, to albo zrobi tajemniczą minę i nic nie powie, albo da ci do zrozumienia, że to wyjątkowo trudna sprawa i on nie ma czasu na wyjaśnienie, a ty tego nigdy nie zrozumiesz. Typowy przykład *profesora „nie mam czasu”,* który zasłania swą wszechstronną pustą głębię rozlicznymi zajęciami. Jak mu powiesz, to on wcześniej wiedział, jak nie powiesz i pytasz, to on jest zajęty. Kilku takich mędrków doświadczyłem w swym długim życiu. Recenzent pisze, co wie, a nawet trochę więcej, niż wie. Nie moja rzecz osądzać jego wiedzę, to sprawa jego sumienia. Ja przetestowałem cosinusa na grupie chyba nawet liczniejszej niż 17 osób – ludzi z dyplomem magistra matematyki, doktora matematyki, doktora habilitowanego matematyki i profesora matematyki. Żaden z nich nie miał zielonego pojęcia o tym, że wykresem cosinusa, gdy dziedziną jest okrąg, jest właśnie elipsa. Ja też tego nie wiedziałem do chwili natchnionego snu, chyba w lutym 2013 roku. To nie Steinhaus mnie natchnął, chociaż jego *Kalejdoskop* czytałem wielokrotnie jak Biblię. Świeczka Steinhausa warta jest gry; zmiana definicji funkcji okresowej będzie procentować. Fragment o cięciu świecy był oczywistą prawdą. To samo jest także napisane w znanym podręczniku Fichtenholtza. Wniosek z tego jest następujący: nieuważnie czytamy dobre podręczniki akademickie. Propozycja eliptycznego nauczania i definiowania funkcji okresowych jest zupełnie czym innym niż rozrywki matematyczne. Kto się wywyższa, ten się poniża. *Odi et amo.* Każdy z nas jest kwadratem podzielonym na dwa prostokąty – czarny i biały. Czarnej strony, swojej także, nienawidzę; kocham część białą – dobrą. Każdy z nas jest trochę anielski, trochę diabelski. Nie powiększajmy zła pychą i pogardą. Nie zazdrośćmy innym darów, jakie mają od Boga, lecz prośmy o światło rozumu dla siebie. Nie piszę o sobie, bo taki wniosek wysnują niewątpliwie z tych słów głośni eksperci od logiki matematycznej, chociaż prawdą jest, że modlę się o poznanie dla siebie i zadufanych w sobie bliźnich. Przeczytajmy uważnie psalm XV, bo tam jest odpowiedź na pytanie: *Who may dwell on the holy mountain?* Kto zniszczył polską matematykę od góry do dołu – od uniwersytetu do przedszkola? To członkowie szemranego towarzystwa odpowiedzialni za pomysły w rodzaju *prostej zawartej w płaszczyźnie*. Prosta leży na płaszczyźnie jak kij na podłodze; laska nie jest zawarta w podłodze. Język szemranych matematyków jest niezwykły: laska jest częścią deski nawet wtedy, gdy leży na niej w poprzek, a sinus w żadnym razie nie jest elipsą, chociaż już Ptolemeusz wiedział, że jest. Ptolemeusz, który tak właśnie definiował funkcje kołowe. A wprowadził je, by łatwiej można było opisywać stan nieba. Nie tworzył szachów piętnastowymiarowych ani dowodu na 537 stron, którego naturalnie nie rozumie sam kompilator. Funkcje kołowe to natura. Ptolemeusz, jego lata życia mieszczą się w przedziale 90-180 naszej ery, zdefiniował sinusy dla kątów, a pytanie, czym jest sinus 100, było dla niego bez sensu. Dla rozrywki polecam zadać to pytanie tym, co wszystko wiedzą lepiej: ile jest właśnie sinus 100? Po przeczytaniu recenzji mogę powtórzyć po trzykroć przytoczone w eseju brutalne przysłowie. Z recenzji tej zieje, ciągle mowa o opinii D, bardzo to przykre, ordynarna zazdrość. *Jalousie de métier* jest szlachetną podnietą do rywalizacji. Nawet naturalistyczna zaś *Brotneid* jest zrozumiała i można ją usprawiedliwić. W recenzji panuje tylko pospolita zazdrość – grzech główny. *Mnie krowa zdechła, niech zdechnie sąsiadowi*. Tu nie chodzi o krowę. Niech zasycha polska matematyka. Pismo i recenzent usilnie się przykładają, by stało się to faktem. Jeśli już nie jest? Modlimy się do tego, co obce – z Paryża, Londynu lub Berlina. Jasne, że Kopenhaga jest ważniejsza niż Wrocław, a *Monthly* od szemranego periodyku. Amerykańską gazetę redagują ludzie mądrzy. Specjalistów od logiki, polskich wybitnych logików matematycznych uprzejmie informuję, że z tej wypowiedzi nic nie wynika o władzach umysłowych recenzenta i redakcji. Recenzent – wybitny specjalista od funkcji okresowych – dzieli potencjalnych czytelników eseju na dwie kategorie: mądrych jak on, co wszystko wcześniej wiedzieli, i resztę; ci ostatni też to wiedzieli, a nawet trochę więcej, tylko – jako rzecz błaha – wyleciało im to z trwałej pamięci.

Długość łuku elipsy wyraża się całką eliptyczną; przy okazji przypomnę, że długość jednej fali sinusoidy jest równa długości elipsy. Ta zbieżność wyników ma proste objaśnienie geometryczne. Przekrój kołowego walca płaszczyzną daje elipsę, a rozwinięcie walca przekształca tę elipsę w sinusoidę (G.M. Fichtenholz (1962), s. 152).

Każdy się może mylić. Recenzent jest człowiekiem, moim bliźnim. Jeśli jest uczciwy i widzi przedmiot, to zmieni zdanie. Nie wymagam przeprosin. Jeśli jest mądry po europejsku, to będzie do dnia sądnego twierdził, że pani Racja stoi po jego prawicy, a Prawda – jego najlepsza przyjaciółka – jada z nim obiady. Wójtów w Polsce jest dużo; w nauce jeszcze więcej niż w administracji, szczególnie w polskiej nauce. Recenzent lubi cudzysłowy, ja ich nie lubię, dlatego nie nałożyłem całej polskiej nauce o niczym korony cudzysłowu. Recenzent D niewątpliwie stara się pokazać, że jest *comme il faut*, że ocenia obiektywnie – jest bezstronny, a ponadto sądzi, że właśnie on poznał rzecz do końca i głęboko. To jest jedynie jego osobiste mniemanie; tekst zalatuje fałszem. Myśli mu się plączą, jak zawsze, gdy piszemy nieszczerze. Wariograf by to wskazał wyraźnie. *Ogólnie wykształcony zawodowy matematyk nie znajdzie w nim żadnych faktów i pomysłów...* Tak recenzent D widzi treść eseju. Przepytałem, jak wspomniano wyżej, 17 zawodowych matematyków wykształconych bardziej niż ogólnie i żaden nie miał pojęcia o tym, że cosinus jest elipsą. Recenzent też. W dawnych czasach były zawody – publiczne dyskusje filozoficzne i matematyczne. Światły recenzent popisuje się swymi zdolnościami i wielką ogólną wiedzą, a mnie obrał za worek treningowy. Może przecież wystąpić z otwartą przyłbicą i bronić prawdy, która nie potrzebuje obrony, bo zawsze jest na wierzchu. Ptolemeusz – to definicja kołowa sinusa, a Fourier – liniowa. W recenzji jest to przestawione. Czasem wygodniej tak, innym razem owak. Definicja liniowa sinusa to szereg potęgowy, a więc coś znacznie bardziej silnego niż koło i zwykły trójkąt – *wstawa* i *dostawa Śniadeckiego.* Definicja kołowa to właśnie definicja tradycyjna, szkolna, wywodząca się od Ptolemeusza przynajmniej. Wystarcza koło i trójkąt oraz twierdzenie Talesa. Piszę *explicite*, bo mędrkowie od matematyki o tym zapomnieli. Jeśli by szanowny recenzent to wiedział, to bez pardonu wygarnął by mnie, że o tym wie każde dziecko, a szczególnie wiedzą to dzieci w jego nadzwyczajnym otoczeniu. Szkoda jednakowoż tych dzieci, które są królikami doświadczalnymi, mającymi uzasadnić tezę recenzenta. Dziecko zawsze powie to, co chcemy; tutaj akurat mówią inaczej, niż oczekuje recenzent. W definicji kołowej widzą początek, szeregi potęgowe przyjdą później – na studiach. Tablica Mendelejewa zgrabnie łączy – w tym istota odkrycia – kołową okresowość – powtarzalne własności chemiczne z liniową dziedziną – rosnące liczby atomowe pierwiastków. Koło było na początku, a potwierdzają to nazwy funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych: arcus sinus, arcus tangens itd.; nazwy te oznaczają właśnie, że dziedzina jest kołem.

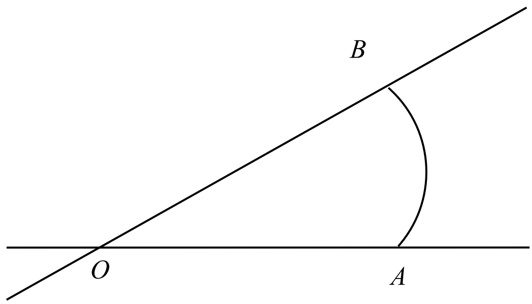


Rys. 1. Definicja sinusa. Tales

Smutno mi, że środowisko matematyków polskich jest tak bardzo karłowate. Dwa tysiące mędrków matematycznych z wszystkimi możliwymi tytułami przez piętnaście minut klaszcze na stojąco dlatego, że nic nie rozumie, bo naturalnie zrozumieć tego nie można, albowiem sam referent nie wie, co mówi. Nie ma to zresztą wielkiego znaczenia, o niczym można bowiem wszystko głosić. Smutno mi, Boże! Środowisko ludzi z dyplomem matematyki, dyplomem często bez wartości, bo kupionym, wyproszonym, protekcyjnym, jest zbiorowiskiem karłów moralnych. Jak widzą, że można, to zaraz hurmem skaczą na pochyłe drzewo, depczą, tłamszą, plują. Wzrok tych biedaków sięga butów ludzi normalnych. Wrocław jest szczególnie lubiany przez te, na ogół sympatyczne, stwory. Czarny jest stan naszej matematyki – merytoryczny i etyczny. Niska etyka, brak moralności i zasad pociąga za sobą niski poziom badań. Dawniej widziałem w matematykach ludzi prawych i sprawiedliwych, a ich zasady moralne były podstawą sprzeciwu wobec sinusoidalnej linii partii. Każdy rzeźnik kroi krakowską suchą – rozumie się kiełbasę – pod kątem 45°, bo takie plasterki mają estetyczny wygląd i lepiej się nimi obkłada bułeczkę. Cosinus definiują planety krążące po swoich orbitach. Jest to więc prawo nauki. W płaszczyźnie ekliptyki leży orbita ziemi; płaszczyzna równika niebieskiego – równoległa do płaszczyzny równika ziemskiego i przechodząca przez Słońce – wraz z płaszczyzną ekliptyki definiują współrzędne astronomiczne. Przesilenie zimowe to maksimum płaszczyzny równika nad ekliptyką, przesilenie letnie zaś to minimum płaszczyzny równika pod ekliptyką. Koło – dziedzina sinusa – leży na płaszczyźnie równika, a elongacje – wstawy – wyznaczają drogę Ziemi – wykres sinusa. Powtórzmy to raz jeszcze. Rzuty ortogonalne orbity Ziemi na płaszczyznę równika niebieskiego wyznaczają koło i niebieski cylinder. Każda elipsa jest sinusem pomnożonym przez odpowiednią stałą. Elongacje to odległości punktów orbity Ziemi od równika, czyli wartości sinusa. Orbitą Ziemi jest wykres sinusa. Piszę to i już słyszę matematycznych mędrców mówiących, że oni to wiedzieli od kołyski. Oczywiście niczego tu nie odkrywam. Wykres sinusa wykreśla bieg roczny Ziemi wokół Słońca. *À propos* kołyski – to też sinus, jak i wahadło zegara. Wycinanki, nie tylko łowickie, pokazują, że rulon papieru przecięty na ukos daje sinusoidę; podobnie z pnia drzewa ciętego w skos powstają eliptyczne podobrazia popularnych landszaftów. Przykłady można ciągnąć daleko. Jeśli sinus jest taki popularny, bez niego żyć trudno, to niezwykle smutny jest fakt, że ludzie z dyplomami magistrów od matematyki nie wiedzą, że wykresem sinusa jest elipsa. Tak niska jest ocena naszych studiów matematycznych. Uczymy bzdur w rodzaju flaszki Kleina, a nie uczymy matematyką pachnącego życia. Milczeć nie mogę, bo nie chcę obciążać sumienia grzechem zaniedbania. Prawdę trzeba głosić nawet wtedy, gdy cały świat jej przeczy. Terminy Śniadeckiego – wstawa, czyli sinus, to odcinek wertykalny, a dostawa, czyli cosinus – horyzontalny, są bardzo adekwatne, można nawet powiedzieć mnemotechniczne. Niestety, zwyciężyły nazwy międzynarodowe. Hipparchos wiedział, że stosunek długości łuku do promienia jest stały. Ta wielkość *ex definitione* jest kątem. Prawa geometrii były podstawą przy obliczaniu promienia Ziemi i długości południka. Raz jeszcze podkreślam, że funkcje, o których mowa, mają naturę kołową, a nie liniową. Wstawa jest wysokością Ziemi w danym jej punkcie orbity nad poziomem ekliptyki. Orbita jest elipsą, więc tor Ziemi jest sinusem. Wiedział o tym Kepler i wszyscy po nim, a nie wiedzą tego polscy matematycy. Ptolemeusz korzystał z dorobku Hipparchosa. Jego cykle i epicykle to koła, a więc wstawy Śniadeckiego. Dla Ptolemeusza sinus był cięciwą (rys. 3):

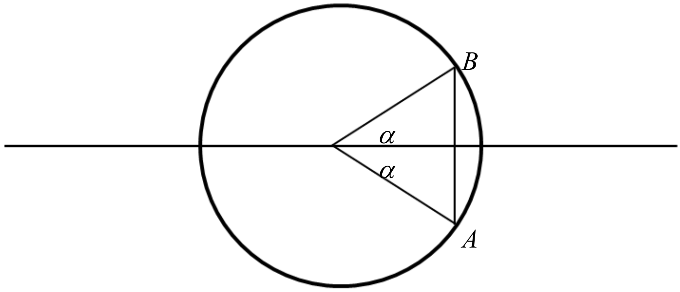
$$\text{cięciwa}\,(2\alpha) = 2\sin\alpha.$$

Okrąg jest dziedziną, a wykresem funkcji jest elipsa. Fourier to struna drgająca, a więc prosta jako dziedzina. Naturalną dziedziną jest linia prosta, gdy badamy ruch złożony: wzrost wykładniczy plus cykliczne nawroty.



Rys. 2. Definicja łuku – Archimedes

Stały stosunek łuku AB do promienia OA jest kątem mierzonym w radianach (rys. 2); stały stosunek boków, $\frac{AB}{OB} = \text{constans}$, jest sinusem kąta (rys. 1).



Rys. 3. Cięciwa i sinus – zatoka. Ptolemeusz

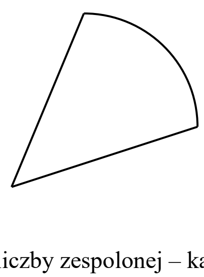
Lwowska anegdota o Gródku Jagiellońskim jest w Polsce popularna i adekwatna. Niezależnie od tego, co napiszesz, to źle napiszesz; twoja twarz mi się nie podoba. Ty przecież nie możesz uczynić tego dobrze. Piszę to ze wstydem. Wstyd hamuje chęć naprawy. Może choć jeden członek pseudomatematycznego klanu się nawróci. Liczy się prawda, a nie dobro szemranego towarzystwa wzajemnej adoracji. Istotnie esej nie jest lekturą dla mędrków; przeznaczony jest dla normalnej i światłej elity. Każda populacja dzieli się zawsze na trzy części: ciemni, normalni i mędrkowie. Ciemnych jest 1/6, normalnych 2/3 i mędrków 1/6. Esej jest przeznaczony dla ludzi normalnych. Każdy przymiotnik ma trzy stopnie jakości i tym stopniom odpowiadają trzy kategorie obiektów. W podziale tym klasy skrajne reprezentują podobny poziom i daleko – w metryce kołowej na prostej – schodzą się.

Im więcej modeli teorii, tym teoria bogatsza i poznanie głębsze.

Odcinki a i b są współmierne, jeśli istnieje odcinek c taki, że $a = mc$ i $b = nc$, gdzie m i n to liczby naturalne. Współmierność odcinków okazuje się liniową zależnością w przestrzeni liniowej liczb rzeczywistych R nad ciałem liczb wymiernych Q. Ta przestrzeń ma wymiar nieskończony; liczby niewymierne – pierwiastek kwadratowy z dwóch i pierwiastek kwadratowy z trzech – są w tej przestrzeni liniowo niezależne. Skończony zbiór kwadratów ma boki współmierne wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń liniowa, rozpięta na długościach boków tych kwadratów, ma wymiar jeden. W twierdzeniu tym mowa jest o podprzestrzeni liniowej w przestrzeni R nad ciałem liczb wymiernych Q. Podobnie patrzeć trzeba i na funkcje okresowe.

Jeśli mówimy o sinusie – wstawie, to argumenty mierzymy w stopniach, a gdy o sinusoidzie, to argumenty mają miano radianów. Ptolemeusz miał wstawy, które nazywał zatokami. Jego sinusy są cięciwami, a współczesne sinusy to połowy cięciw. Co można powiedzieć o przyjaciołach, którym robi się kanapki na wspólną wycieczkę? Kanapki z kilku gatunków najlepszych wędlin, doskonałego masła i własnego serca. Wycieczkowicze po otrzymaniu serdecznego poczęstunku natychmiast rzucają kanapki pierwszemu burkowi, który właśnie się nawinął przygnany zapachem. Podobnie zachowuje się redakcja WM w sprawie eseju o cosinusie: podtrzymuje wniosek recenzenta, chociaż jego opinia jest prokuratorskim aktem oskarżenia. Dajcie pracę, a ja udowodnię o niej każdą tezę: jest genialna, jest pustym bełkotem. Wynik zależy od pospolitego sądu o autorze, a nie od treści i formy jego pracy. Gdyby redaktorzy *Amerykańskiego Miesięcznika Matematycznego* byli na poziomie recenzenta i redakcji *Wariacji Metafizycznych*, to wspomniane przez recenzenta dwa artykuły autorów Apostola i Mnatsakaniana nigdy by się tam nie ukazały. Na szczęście pracują tam ludzie normalni, a nie polska elita szemranego towarzystwa.

Fourier to naturalnie linia prosta, a nie koło, bo struna jest odcinkiem łączącym dwa punkty. Ptolemeusz to koło, widać to na załączonych rysunkach. Koło jest istotą mnemotechnicznego wiersza, który pozwala uczniom łatwo określić znak funkcji trygonometrycznej w zależności od ćwiartki. Funkcja przyporządkowująca liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez cztery nie jest zdaniem recenzenta funkcją okresową w sensie kołowym. Jak najbardziej jest; z tym swoim pomysłem recenzent idzie dalej niż artykuł o cosinusie. Okresowość zależy od relacji równoważności generowanej na dziedzinie funkcji. Ograniczę się tylko do relacji równoważności w grupie generowanej przez podgrupę normalną. Jeżeli G jest grupą, której H jest podgrupą normalną, to zbiór klas abstrakcji G/H jest grupą ilorazową. Jeżeli funkcja f odwzorowuje zbiór G w zbiór Y, to f jest funkcją okresową względem podgrupy H wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja F z grupy ilorazowej G/H w Y, która dla każdego elementu g ze zbioru G spełnia warunek $F(g/H) = f(g)$, gdzie g/H jest klasą abstrakcji elementu g; inaczej mówiąc, funkcja f jest okresowa w sensie H, gdy przyjmuje stałe wartości na klasach abstrakcji relacji równoważności generowanej przez H. Funkcja modulo cztery wymieniona przez recenzenta jest funkcją okresową wówczas, gdy H jest podgrupą wielokrotności czwórki $\{4n: n \in Z\}$ w grupie liczb całkowitych Z. Grupa Z_4 jest izomorficzna z grupą T_4 pierwiastków czwartego stopnia z jedynki, która jest naturalnie podgrupą grupy T. Recenzent wszystko to pomieszał i grupę T_4 chce koniecznie umieścić na prostej, chociaż to jest naturalnie koło podzielone na cztery równe części. Liczby rzeczywiste mierzą długości, odległości; liczby zespolone mierzą kąty i pole wycinka koła. Pole S liczby zespolonej z różnej od 0 jest dane wzorem $S = \frac{1}{2}r^2 Arg(z)$, gdzie r oznacza moduł liczby z, natomiast $Arg(z)$ jest argumentem głównym tej liczby (rys. 4). Siłę i piękno pojęcia grupy widać w teorii Galois i właśnie w analizie Fouriera – teorii funkcji okresowych. Każdy element grupy generuje podgrupę cykliczną, taką jest podgrupa $4Z$, jego wielokrotności lub potęg. Każde koło zębate jest podgrupą w grupie T, a zegarmistrz – specjalistą od ruchów okresowych i funkcji periodycznych.



Rys. 4. Pole liczby zespolonej – kawałek tortu

Cosinusy kierunkowe to współczynniki Fouriera wektora jednostkowego. Niech wektor $x \in R^{n+1}$ ma normę jeden; x jest naturalnie kombinacją liniową bazy z wektorów jednostkowych e_i, a współczynniki tej kombinacji są iloczynami skalarnymi wektora x przez wektory bazowe, czyli współczynnikami Fouriera wektora x w bazie naturalnej. Oczywiście kwadrat długości wektora x równa się jeden i dalej równa się sumie kwadratów współczynników Fouriera wektora x. Jest to twierdzenie o zupełności bazy, czyli równość Parsevala lub też twierdzenie Pitagorasa w wielu wymiarach.

Grupa Z_4 liczb całkowitych modulo 4 i inne tego typu grupy Z_n – grupy ilorazowe $Z_n = Z/nZ$, są *par excellence* związane z kołem, a nie z prostą. Funkcja na Z jest okresowa w sensie podgrupy nZ wtedy i tylko wtedy, gdy jej warstwice wraz z dowolnym elementem zawierają klasę abstrakcji tego elementu. Mówiliśmy o tym wyżej w przypadku ogólnym dowolnej grupy G i jej podgrupy H. Recenzent D z nieznanych powodów widzi w grupach Z_n prostą, czyli porządek liniowy, nie zaś koło – czyli preferencję – i jego podział na równe części. Jednym słowem istnieje homomorfizm grupy Z_n w grupę koła T. To właśnie Fourier wyprostował czas i wprowadził czas liniowy potrzebny do opisu struny drgającej. Powtórzmy: Fourier to nie koło, lecz prosta. Poczynając od Archimedesa, funkcje okresowe mają za dziedzinę koło. Koło bowiem jest pojęciem naturalnym, a linia prosta matematycznym abstraktem.

Problem istnienia bytów matematycznych nie jest prosty. Grupa ilorazowa $T/\{1, -1\}$ naturalnie istnieje pod względem algebraicznym, jej byt topologiczny – każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z odcinkiem, jest wątpliwy, wręcz niemożliwy. Jest to bowiem jednowymiarowy odpowiednik butelki Kleina. W matematyce przyjmuje się, że zarówno rozmaitość Kleina, jak i jednowymiarowa przestrzeń rzutowa są bytami istniejącymi w naturze. Nie ma przecież nauki o tym, co nie istnieje. Eteryczne wiły dadzą się bowiem sprowadzić do naturalnych powszechnie w przyrodzie wirów. Wir jest albo dążeniem do stanu równowagi układu, albo burzeniem istniejącej równowagi. Wiry to liczby zespolone. Oznacza to, że liczby te istnieją w naturze – mierzą wiry. Czym jest liczba $1 + 1000^{1000!}$? Czy ta liczba istnieje? Co o niej wiemy? Jaki jest jej rozkład na czynniki pierwsze? Liczby tak duże oczywiście nie mają modeli w świecie fizycznym. Praktycznie tego typu liczbami nikt się nie zajmuje. Oczywiście aksjomaty peano implikują nieskończoną mnogość obiektów zwanych liczbami naturalnymi. Z punktu widzenia nauki i techniki zajmowanie się liczbami typu tysiąc do potęgi tysiąc silnia nie ma żadnego znaczenia i sensu. Takich liczb po prostu nie ma. Problemem dla metafizyków pozostaje zadanie: jak długa będzie taśma papieru, na której zapiszemy tę liczbę, przeznaczając na każdą cyfrę 1 cm. Ciąg (a_n), gdzie $a_n = 1 + 10^n$, symbolizuje nieograniczony wzrost wykładniczy; można go nazwać liczbą nieskończenie wielką – nieskończonością. Dalekim wyrazem tego ciągu jest wypisana wyżej liczba naturalna. Można więc utożsamić ją z nieskończonością. Ciąg (b_n), gdzie $b_n = 2^{-n}$, symbolizuje wykładniczy spadek; jest to wielkość nieskończenie mała. Takie wielkości można utożsamiać z fluksjami, chociaż fluksja jest funkcjonałem liniowym rozpatrywanym w otoczeniu zera. Butelka Kleina – jednostronny torus – istnieje tylko w myśli. Stan ontyczny wiłów jest więc podobny do stanu egzystencjalnego flaszki Kleina i Sfinksa. Wiły można jednak malować, Sfinksy nawet rzeźbić, a z butelką Kleina tego zrobić się nie da – można tylko o niej pomyśleć. Nie wszystko jednakowoż istnieje, co daje się pomyśleć. Niewykształcone metafizycznie bakterie nie wiedzą, że do zawekowanych słoików jest łatwy dostęp – wystarczy wejść do czwartego wymiaru, a tam zobaczymy, że zamknięte w słoiku konfitury są dostępne. W czterowymiarowej przestrzeni odkrycie pana Wecka traci swą moc. Magdeburskie kule, pompa próżniowa *et cetera* – wszystkie te odkrycia powstały z niewiedzy wynalazców o istnieniu czwartego wymiaru. Czym jest odległość mierzona piętnastoma miliardami lat świetlnych? Jest to promień kuli obejmującej kosmos. Nasza wyobraźnia i potrzeby poznawcze jak na razie nie sięgają tak daleko; promień kosmosu równa się więc w przybliżeniu 141 tysięcy trylionów kilometrów. Jeśli jednak promień kosmosu odniesiemy do wspomnianej wyżej nieznanej liczby, $1 + 1000^{1000!}$, to promień ten jest oczywiście zerem. Nauka szuka praw nauki i doskonałości w budowie świata. Hipoteza staje się prawem nauki dopiero po wielokrotnej empirycznej weryfikacji.

Funkcje okresowe to prawa natury; koła i elipsy istnieją w przyrodzie. Czy funkcje okresowe mają jakikolwiek związek z ekonometrią? Dwie trzecie ekonometrii dotyczy budowy modeli liniowych, a jedna trzecia zajmuje się badaniem okresowości. Oczywiście w modelach liniowych często występują także funkcje okresowe. Recenzent B, jak pisze, ma w tej sprawie inne poglądy. Liczby zespolone to kąty i obroty, a więc funkcje okresowe są immanentnie – naturalnie – związane z dziedziną zespoloną.

Przestrzeń wymiaru 4 występuje w ekonomii; jest nią rodzina koszyków czterotowarowych. Tworzą ją wektory (x_0, x_1, x_2, x_3), gdzie x_i oznacza procent wydatków na produkt mierzony i-tą jednostką będący strukturą wydatków rodziny. Jeżeli towary są mocno zagregowane, takie jak: wydatki na mieszkanie x_0, na żywność x_1, na odzież x_2, na samochód x_3, to układ (20%, 40%, 10%, 30%) oznacza realne wydatki ankietowanej rodziny na te cztery rodzaje agregatów. Jeśli dopuścimy piąty towar – wydatki na kulturę, wtedy wektor (30%, 30%, 10%, 20%, 10%), czyli rozkład (3/10, 3/10, 1/10, 2/10, 1/10), jest pewnym szacunkiem struktury wydatków w rodzinie. Naturalnie rozkład ten zależy od zarobków; im wyższe zarobki, tym waga zakupów przesuwa się w prawo, czyli rosną wydatki na dobra rzędu wyższego – edukację, kulturę, rozrywkę, bezpieczeństwo. Przestrzenie wielowymiarowe są więc użyteczne w nauce; nie jest to zatem narzędzie do manipulowania w metafizycznych spekulacjach. Duże agregaty mają pewną wartość informacyjną, jednak ich wartość poznawcza jest niewielka; dysagregacja, czyli rozdrobnienie, początkowo ma wartość poznawczą, by w końcu zamienić się w bezużyteczny chaos. Istnieje – jak zawsze złoty środek.

Funkcje okresowe można więc definiować na trzy sposoby. Zależy to od struktury dziedziny. Jeżeli w dziedzinie jest relacja równoważności, to funkcja jest okresowa, gdy klasy atrakcji tej relacji są zawarte w warstwicach. Wspomniano już o tym wyżej. Jeżeli dana jest grupa przekształceń dziedziny, to funkcja jest okresowa względem tej grupy, gdy jest funkcją automorficzną względem niej, czyli gdy superpozycje tej funkcji z funkcjami transformującymi dziedzinę nie zmieniają jej. Po trzecie wreszcie, była też już o tym mowa, funkcja jest okresowa, gdy dziedziną jest grupa, a okresowość odnosi się do jej podgrupy. Podgrupa generuje relację równoważności.

Nauka dotyczy zawsze spraw świata naszego. Terminy naukowe mają swoje odpowiedniki w języku codziennym. Funkcje okresowe, zwane także funkcjami kołowymi, cyklicznymi, opisują zjawiska powtarzalne. Ich dziedziną jest tarcza odpowiedniego zegara, czyli koło. *Non scholae*, *sed vitae discimus.* Wiedza ułatwia życie, przyczynia się do zwiększania wydajności mózgu i rąk. Nauka czysta – wiedza o niczym – jest metafizyką: bajką o rusałkach, cyklopie i złotym runie.

Literatura

G.M. Fichtenholz (1962). *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Tom II. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa.

J.-P. Kahane (1970). *Séries de Fourier absolument convergentes*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 50. Springer-Verlag. Berlin.

A. Smoluk (2014). *Wykres cosinusa jest elipsą*. Ekonometria 29(44), s. 57-61.

A. Smoluk (2014a). *The graph of the cosine is an ellipse*. Didactics of Mathematics 11(15), s. 59-64.

H. Steinhaus (1954). *Kalejdoskop matematyczny*. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych. Warszawa.

Suplement

Recenzja artykułu nadesłanego do *Wariacji Metafizycznych* [MW] *Antoni Smoluk*, Wykresem cosinusa jest elipsa, 4 strony formatu A4

1. Artykuł ma budowę jednoczęściową – podział kompozycyjny wyznaczają poszczególne akapity. W pierwszym akapicie artykułu Autor przedstawia główną ideę: „funkcje okresowe potrzeba definiować inaczej niż dotychczas – krócej i jaśniej". Bezpośrednio potem wprowadza definicję będącą kluczowym elementem pracy: „Funkcja określona na kole, czyli funkcja, której dziedziną jest grupa koła, $T = \{e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$, nazywa się funkcją okresową", wyjaśniając zaraz, że chodzi o grupę multiplikatywną izomorficzną z addytywną grupą ilorazową $\mathbb{R}/2\pi$ wyznaczoną przez relację równoważności $x = y \bmod 2\pi$. Podkreśla także, że „Jak wykresem funkcji $f : X \to Y$ jest podzbiór produktu $X \times Y$, tak wykres funkcji okresowej leży na cylindrze $T \times$ R, lub ogólniej $T \times Y$". Akapit drugi, wydzielony w formie uwagi, rozpoczyna się od wymienionego w tytule pracy stwierdzenia, że „Wykresem funkcji cosinus $\{(eit, \cos t) : t\ 2$ R$\}$ jest elipsa $X22 + Y2 = 1$". W dalszej części Autor przedstawia rozumowanie uzasadniające poprawność cytowanego stwierdzenia. Akapit trzeci, najkrótszy, to informacja, że wykresem analogicznie rozumianej funkcji sinus jest również (odpowiednia) elipsa. W akapicie czwartym Autor analizuje jeszcze dwa naturalne przykłady wykresów funkcji okresowych (ciągłych, ale nieróżniczkowalnych) określonych na okręgu. Kolejny – najobszerniejszy – akapit Autor rozpoczyna zdaniem „wierzę, że wzmianka o wykresie funkcji sinus i definicji funkcji okresowej w ogólności będzie użyteczna dla nauczycieli (...)". Na poparcie tego poglądu przytacza szereg argumentów o charakterze teoriopoznawczym, filozoficznym i społecznym (obyczajowym). Opisuje także reakcje matematyków, z którymi wcześniej prowadził dyskusje o przedstawionych wyżej ideach. Akapit piąty informuje o genezie pomysłu Autora: „Elipsa jako wykres cosinusa pojawiła się we śnie". Artykuł kończy fraszka autorstwa profesora Bolesława Kopcińskiego napisana, wedle słów Autora, „z powodu cosinusowej batalii".

2. Odnosząc się do zawartości pierwszych czterech akapitów recenzowanego artykułu, warto przytoczyć na początek jego fragment: „A przecież jest to stara idea – koło jako dziedzina funkcji okresowej – dobrze znana specjalistom od analizy Fouriera.

Tytułem przykładu podam dwa cytaty. Najpierw z trudnej popularnej książki *Kalejdoskop matematyczny* Hugona Steinhausa: «Gdy nawiniemy papier na świecę, potem przetniemy świecę ukośnie ostrym nożem i rozwiniemy papier, otrzymamy sinusoidę» (H. Steinhaus (1954), s. 234). Cytat drugi jest z równie pięknie napisanej książki – tym razem specjalistycznej; jest nim pierwsze zdanie wstępu Jean-Pierre'a Kahane'a do jego dzieła o szeregach Fouriera zbieżnych absolutnie (J.-P. Kahane (1970)). «Książka traktuje o funkcjach klasy A, czyli o funkcjach ciągłych na okręgu o absolutnie zbieżnym szeregu Fouriera»".

Na poparcie słów Autora warto przywołać jeszcze jedną, klasyczną już pozycję Steina i Shakarchiego: *Fourier analysis. An introduction* (E.M. Stein, R. Shakarchi (2003)) – ani popularna, ani specjalistyczna, bo skierowana do początkujących adeptów analizy harmonicznej. W paragrafie *Functions on the circle* tejże książki znajdujemy klarowne i zgrabne dydaktycznie wyjaśnienie związków między klasą okresowych funkcji określonych na prostej i klasą funkcji określonych na okręgu; wywód kończy zdanie: „In conclusion, functions on R that 2 – periodic, and functions on an interval of length 2_ that take the same value at its end-points, are two equivalent descriptions of the same mathematical objects, namely, functions on the circle".

Reasumując, należy stwierdzić, że idea postrzegania funkcji okresowej (określonej na prostej, nie zapominajmy o tym) jako tożsamej z funkcją na okręgu jest powszechnie znana i była prezentowana w literaturze w ujęciu zarówno fachowym, jak i popularnonaukowym. Warto dodać w tym miejscu, że Autor recenzowanego artykułu oczywiście nie jest pierwszym, który zainspirowany przykładem z *Kalejdoskopu* Steinhausa głębiej rozważa związki funkcji trygonometrycznych z elipsą wykreśloną na pobocznicy walca. By nie sięgać daleko wstecz, przywołajmy powszechnie dostępny popularyzatorski artykuł Apostola i Mnatsakaniana (T.M. Apostol, M.A. Mnatsakanian (2007)), por. też (T.M. Apostol, M.A. Mnatsakanian (2012)), który zaczyna się słowami: „In his delightful book Mathematical Snapshots, Steinhaus (...) describes the simple, engaging construction (...). Wrap a piece of paper around a cylindrical candle, and cut it obliquely with a knife. The cross section is an ellipse, which becomes a sinusoidal curve when unwrapped"; dokładną analizę wspomnianych związków znajdziemy w paragrafie 2, zatytułowanym „Unwrapping an ellipse from a circular cylinder".

3. Kolejne akapity omawianego artykułu nie mogą być przedmiotem recenzji. Stanowią one bowiem zbiór osobistych poglądów Autora i nie mają charakteru naukowego czy nawet popularnonaukowego. Poglądów z zasady nie recenzuje się. Można zgodzić się z nimi lub ewentualnie polemizować z Autorem. Tego jednak piszący te słowa nie mógł uczynić, gdyż nie taką wyznaczono mu rolę.

4. W tym miejscu mogłem zakończyć część krytyczną recenzji i przejść do podsumowania. Miałem jednak poczucie, że nie tego ode mnie oczekiwano. Wystawiając cierpliwość Redakcji na próbę, postanowiłem wykorzystać sprzyjające okoliczności i poddać główną ideę pracy szerszym konsultacjom z tymi, do których potencjalnie zdaje się być adresowana.

Nie chodzi przy tym o to – podkreślmy, że Autor definiuje funkcje okresowe jako funkcje określone na okręgu. Jak już napisano wyżej, rzecz jest *powszechnie* znana i akceptowana. Chodzi o sugestię, że definicja ta powinna być tą „generyczną", od której należy rozpoczynać poznawanie funkcji okresowych. Autor pisze bowiem: „Można to uważać – mówiąc górnolotnie – za namiastkę nowego paradygmatu w teorii funkcji okresowych. Odrzućmy wygodną rutynę, a będzie lepiej, naturalniej, prościej", a wcześniej stwierdza: „Wierzę, że wzmianka o wykresie funkcji sinus i definicji funkcji okresowej w ogólności będzie użyteczna dla nauczycieli (...)”. Właśnie te dwa ostatnie stwierdzenia postanowiłem poddać szerszej konsultacji.

Szczególny zbieg okoliczności sprawił, że omawiany artykuł otrzymałem do recenzji w trakcie semestru, w którym prowadziłem m.in. dwa przedmioty w bardzo silny sposób związane z teorią funkcji okresowych. Pierwszy przedmiot przeznaczony był dla młodych studentów matematyki specjalizujących się w jej zastosowaniach. Drugi przedmiot był uzupełniającym przedmiotem „ogólnouczelnianym”, na który zapisali się studenci z 16 kierunków studiów (w większości tzw. humanistycznych). Ponadto w ramach serii tzw. „zajęć otwartych” prowadziłem wykłady oraz warsztaty dla uczniów i nauczycieli szkół średnich, gimnazjalnych, a nawet podstawowych – zajęcia te, omawiające rolę matematyki w akustyce, muzyce i inżynierii dźwięku, w istotny sposób oparte były na pojęciu funkcji okresowej, stanowiły więc doskonałe okazje, by przedyskutować użyteczność i przyswajalność „fourierowskiej” definicji funkcji okresowej na wszystkich szczeblach szkolnictwa. Niezależnie od tego, z jakim gremium prowadzone były dyskusje, wnioski były podobne – pozwolę sobie przytoczyć tutaj dwa najczęściej wypowiadane.

Po pierwsze, „klasyczna” definicja funkcji okresowej nie wymaga od odbiorcy niemal żadnego przygotowania matematycznego; badanie (nawet ścisłe) funkcji okresowych w konwencjonalnym ujęciu można rozpocząć nawet w szkole podstawowej, mając do dyspozycji cztery podstawowe działania matematyczne. Natomiast aby posłużyć się definicją „fourierowską”, trzeba posiadać umiejętność precyzyjnego matematycznego opisywania okręgu i pozycjonowania na nim argumentów funkcji. Po drugie, definicja „fourierowska” w proponowanej postaci dyskryminuje funkcje dyskretne, określone na zbiorze liczb całkowitych, z natury bliskie niedoświadczonemu odbiorcy. No bo jak, dla przykładu, przy użyciu „fourierowskiej” definicji w *prosty* sposób sprawdzić, że funkcja przyporządkowująca liczbie całkowitej resztę z dzielenia przez 4 jest okresowa? „Klasyczne” ujęcie nie stwarza tu żadnych problemów. Moi rozmówcy, bez względu na wiek i doświadczenie matematyczne, doskonale wyczuwali intuicje leżące u podstaw definicji „fourierowskiej” – przecież to, co periodyczne, odbywa się „w kółko” – ale pozostawali na stanowisku, że podczas pierwszych rachunkowych zmagań z periodycznością dobrze jest dziedzinę „wyprostować”, by zjawiska trwały jednak „od-do i ponownie”.

5. Pora na konkluzję. Do jakiej grupy czytelników mógłby być skierowany recenzowany artykuł? Ogólnie wykształcony zawodowy matematyk nie znajdzie w nim żadnych faktów i pomysłów, z którymi nie zetknął się wcześniej, czy to w czasie studiów, czy też, gdyby pamięć zawiodła, w trakcie (nawet sporadycznego) przeglądania czasopism popularyzatorskich – choćby cytowanego *Monthly*. Czytelnik niewykształcony matematycznie będzie z pewnością skonfundowany faktem, że prostotę forsowanej tu definicji uzasadnia się, rozważając „grupę multiplikatywną izomorficzną z addytywną grupą ilorazową $R/2\pi$ wyznaczoną przez relacje równoważności $x = y$ mod 2_” i że oczywisty i naturalny fakt, że wykresem cosinusa jest elipsa „widać (...) nieomal bezpośrednio”; nieomal, bo wcześniej trzeba wiedzieć, jak napisać równanie (parametryczne) okręgu, walca i płaszczyzny. Konfuzja pogłębi się jeszcze po przeczytaniu dwóch ostatnich stron artykułu, bo zamiast rozważań merytorycznych, dowodzących (choćby tylko na gruncie dydaktyki matematyki) słuszności propagowanych idei, czytelnik znajdzie rodzaj eseju przedstawiającego poglądy i przekonania Autora. Jeśli już o poglądach mowa: może w artykule skierowanym do czytelników [*Wariacji Metafizycznych*] lepiej byłoby jako „pomnik cosinusa" wybrać kopenhaskie *Tycho Brahe Planetarium* zamiast wrocławskiego *Sky Tower*? – ale to oczywiście też tylko pogląd.

Niech wolno mi będzie przypomnieć, posiłkując się wydanym przez PWN *Popularnym słownikiem języka polskiego* (wybór słownika jest nieprzypadkowy), dwa wybrane znaczenia ważnego tutaj słowa: *towarzystwo* – 1. osoba lub wiele osób przebywających z kimś, spędzających razem czas; 2. organizacja, zgrupowanie ludzi mających wspólne cele.

Uważam, że zagadnienia poruszone w recenzowanym artykule mogą stanowić (i z pewnością wielokrotnie już stanowiły) znakomity temat przewodni rozmów i dyskusji prowadzonych w *towarzystwie matematyków* i miłośników matematyki – biorąc pod uwagę niekwestionowaną erudycję i swadę Autora, będą to zawsze inspirujące konwersacje. Nie widzę jednak wystarczających powodów, by artykuł ten upubliczniać w periodyku [*Towarzystwa Metafizycznego*].

T.M. Apostol, M.A. Mnatsakanian (2007). *Unwrapping Curves from Cylinders and Cones*. Amer. Math. Monthly, 114, s. 388-416.

T.M. Apostol, M.A. Mnatsakanian (2012). *New Horizons in Geometry.* MAA, Washington.

E.M. Stein, R. Shakarchi (2003). *Fourier Analysis. An Introduction.* Princeton University Press, Princeton and Oxford.

10

Topolog w tenisówkach, artysta Bronisław Knaster (1893-1980)

Antoni Smoluk

Rys. 1. Bronisław Knaster – profesor Leopoldinum

Bronisław Knaster urodził się 22 maja 1893 roku w Warszawie jako syn Ludwika – lekarza; ojciec zmarł po wojnie we Wrocławiu i jest pochowany na cmentarzu św. Wawrzyńca przy ul. Odona Bujwida we Wrocławiu. Na tym samym cmentarzu po latach spocznie i jego syn. Bronisław Knaster przed pierwszą wojną światową, od 1911 do 1914 roku, studiował w Paryżu medycynę. Znał dobrze języki rosyjski i francuski. Był przecież warszawiakiem, a Warszawa to główne miasto *Priwislanskawo Kraja.* Dla większości Rosjan Polska i dzisiaj jest nadwiślańską prowincją: *Kurica nie ptica – Polsza nie zagranica.* Pochodził z bogatej rodziny mieszczańskiej. W 1915 roku rozpoczął studia matematyczne na Uniwersytecie Warszawskim powołanym przez Niemców, którzy zajęli Warszawę. Wojnę odrodzonej Polski z Rosją bolszewicką w 1920 roku traktował poważnie. Było to śmiertelne zagrożenie dla młodego organizmu państwowego. Nie był typem *bon vivanta* z warszawskich kawiarni, lecz patriotą – mundurowym lekarzem frontowym. W 1923 roku doktoryzował się na polskim już Uniwersytecie Warszawskim u Stefana Mazurkiewicza. Jego praca doktorska była w głównym nurcie badań warszawskiej szkoły matematycznej utworzonej przez Wacława Sierpińskiego, Kazimierza Kuratowskiego, Zygmunta Janiszewskiego – również polskiego żołnierza.

Przestrzeń polska zawdzięcza swoją nazwę pracom ogłoszonym przez matematyków warszawskich w początku XX wieku. Jest to ośrodkowa zupełna przestrzeń metryczna. Tego typu przestrzenie topologiczne są ważne z przyczyn praktycznych. Rzeczywistość fizyczna jest właśnie takiej natury. Ośrodek to podzbiór przeliczalny – tak jak liczby wymierne. Ten przeliczalny ośrodek w przestrzeni polskiej jest zbiorem gęstym. Zupełność przestrzeni znaczy, że nie ma w niej dziur. Każdy punkt przestrzeni polskiej można dowolnie blisko podejść, wychodząc z gęsto położonego przeliczalnego ośrodka. Właśnie taka jest przyroda i taka jest natura naszej wiedzy. *Si non e vero, e bene trovato*. Aproksymacja jest podstawą doświadczenia – poznajemy, przybliżając obiekty mniej nieznane tymi lepiej poznanymi. Pierwiastek z dwóch jest ciągiem zbieżnym ułamków.

Pierwszą żoną Knastera była aktorka Maria Morska – prawdziwa *stella maris* – muza skamandrytów. Skamander to grupa poetów, literatów, ludzi sztuki i nauki powstała w Warszawie przez wspólny interes wybitnych poetów: Jana Lechonia, Antoniego Słonimskiego, Juliana Tuwima, Kazimierza Wierzejskiego i Jarosława Iwaszkiewicza. Łączyła ich piękna poezja Staffa i poematy Homera, a ponadto jako grupa mieli większą siłę przebicia w powojennej polskiej rzeczywistości. Grupa rozpadła się, gdy jej członkowie osiągnęli swój cel – zajęli decydującą pozycję w polskim PEN Clubie. Julian Tuwim za słowa *rżnij karabinem w bruk ulicy, bo twoja jest krew, a ich jest nafta* był pociągnięty do odpowiedzialności sądowej. Oskarżono go o sianie defetyzmu. Jest to zew buntu jak Lermontowa *Bielejet parus adinokij*. Aż trudno uwierzyć, że pieśń liryczną: *A może byśmy tak najmilsza wpadli na dzień do Tomaszowa*, napisał ten sam człowiek. Członkowie Skamandra różnili się istotnie w poglądach politycznych. W poezji Skamandrytów było piękno formalne, ale też zarzewie buntu. Po 1945 roku, gdy partia walczyła z poezją formalną, Tuwim pochylony nad kwiatem róży wzdychał: *Różo, różo – formalistko*. Poezja to głównie piękno i wzniosła myśl, a nie werble wzywające do boju. Skamandryci spotykali się w kawiarni Ziemiańskiej przy ulicy Mazowieckiej w Warszawie, blisko uniwersytetu i kredytowego towarzystwa ziemskiego – stąd pewnie nazwa kawiarni. Pięterko w Ziemiańskiej przeznaczone było dla wielkich skamandrytów. Kabaretem Skamandra została piwnica pod Pikadorem w niedalekim hotelu Europejskim. Pod pikadorem Morska recytowała skamandryckie produkcje. Bronisław Knaster czuł się współczłonkiem tej grupy. Poglądy skamandrytów były mu bliskie i swojskie (I. Krzywicka (2013)).

Ojciec Słonimskiego, wesoły lekarz, nazwał traktat kończący wojnę 1905 roku Rosji z Japonią *pokojem z japońskim obiciem*. Wezwany razu pewnego przez przyjaciół do chorej służącej zastał ją w łóżku. Widzi, że dziewczyna jest zdrowa jak rzepa. – *Pani jest zdrowa. – Tak doktorze, ale oni mnie nie płacą. – Dobry pomysł. Oni mnie także nie płacą, niech się pani posunie.* Jest tu pięknie zdefiniowany strajk polski – udawana choroba; jest jeszcze przestrzeń polska, procesja polska i słynna *Plica polonica* – powód do dumy narodowej. Procesję polską – gęsiego z zapalonymi gromnicami – rozpropagował Dolabella. Antoni odziedziczył po swym ojcu zdolności i błyskawiczną ripostę. Knaster uchodzi za autora krótkiej kalamburycznej nowelki. *Czy to pasztet zajęczy ten wie, co zje. Jeśli zajęczy, to nie zajęczy, a gdy nie zajęczy, to zajęczy.* Przypuszczalnie wiersz Staffa o deszczu jesiennym bijącym w szyby jęczące i drżące natchnął Knastera.

O szyby deszcz dzwoni, deszcz dzwoni jesienny
I pluszcze jednaki, miarowy, niezmienny,
Dżdżu krople padają i tłuką w me okno…
Jęk szklany… płacz szklany… a szyby w mgle mokną
I światła szarego blask sączy się senny…
O szyby deszcz dzwoni, deszcz dzwoni jesienny…

Jest to najprawdziwsza młodopolska sztuka dla sztuki. Skamander to Troja i Homer. Polskim Skamandrem jest Wisła, Wawel jest Troją, a Homerem Wernyhora. Stanisław Wyspiański to drugi nasz wieszcz.

Noc w mieście głęboka. Skamander połyska,
Wiślaną świetląc się falą.

Skamander to wspólnota interesów, aczkolwiek nieobca była skamandrytom idea sztuki dla sztuki. Knaster uczuciowo silnie związany z tą poetycką grupą był matematykiem typowo skamandryckim: uprawiał matematykę dla samej matematyki, czyli ćwiczył polot myśli. Bon mot Knastera koresponduje z przypisywaną Tuwimowi reklamą. *Maca tanio, bo w podwórzu.* Knaster kochał Skamander i skamandrytów. Knaster nie był poetą, lecz matematykiem, a matematyk to przecież więcej niż poeta. Jeden z uczniów Dawida Hilberta porzucił matematykę i zajął się poezją. Zdarzenie to Hilbert skomentował krótko – *Widocznie miał za małą wyobraźnię.* Na wielu grobach widzimy często wyryte słowa: profesor matematyki lub matematyk. Matematycy szczycą się swoim powołaniem. Wielu opozycjonistów przeciw rządom tyrańskim to ludzie będący matematykami. Droga od matematyki do prawdy i sprawiedliwości jest krótka.

Co wieczór wyruszałem, do popularnej wówczas Ziemiańskiej, w pobliżu placu Wareckiego… Kawiarnia była naturalnym środowiskiem artystów – miejscem wymiany poglądów.… Tak po latach w Paryżu wspominał Witold Gombrowicz dawną Warszawę. Na półpiętrze Ziemiańskiej, swoistym warszawskim Olimpie, mieli swoje stoliki skamandryci. Był to polski parnas, a jego członkowie intelektualną magnaterią. Ziemiańska była ogólnie dostępnym salonem Warszawy, w którym należało bywać, jeśli tylko miało się aspiracje artystyczne, naukowe lub literackie. Ogólnie znani goście Ziemiańskiej to oprócz skamandrytów generał Wieniawa, czyli Bolesław Długoszowski, i Franz Fischer – warszawski Falstaff; tłem tej elity literackiej, artystycznej i naukowej byli snobi z całej Polski – nasze swojskie *high society.* W Ziemiańskiej Adolf Nowaczyński zauważył, że Polska poezja pachnie cebulą. Ta wypowiedź zbulwersowała Słonimskiego. Przyganiał kocioł garnkowi. Podobnie jak z poezją jest i z matematyką. Hrabia Jan Mycielski uważał, że wybitni polscy matematycy to albo arystokraci, albo Żydzi. Matematyka polska pachnie więc również cebulą, ale i lawendą. Myślał pewnie o sobie i o innym hrabim – Jerzym Łosiu. Sam Mycielski wykładał teorię konsekwencji w ujęciu Alfreda Tarskiego. Pojęciami pierwotnymi jest tutaj rodzina zdań $\mathbb{S}$ określonej teorii i funkcja konsekwencji $\mathbb{C}$, która zbiorowi zdań przypisuje wszystkie konsekwencje, czyli zbiór zdań, które można z niego wydedukować. Teoria konsekwencji oparta jest na pięciu bardzo prostych aksjomatach, które dla wygody czytelnika przypomnę. Po pierwsze, funkcja konsekwencji jest rosnąca: większy zbiór – więcej konsekwencji. Po drugie, z pustego zbioru zdań nic nie wynika. Po trzecie, zbiór zdań jest podzbiorem swoich konsekwencji. Po czwarte, funkcja konsekwencji jest idempotentna – złożona sama z sobą nie zmienia się. Po piąte wreszcie, konsekwencją zbioru zawierającego dwa zdania sprzeczne jest rodzina wszystkich zdań $\mathbb{S}$. W Ziemiańskiej Nowaczyński wzniósł toast. *Nie byłoby Polski, gdyby nie Mickiewicz, nie byłoby Mickiewicza, gdyby nie Pan Tadeusz, nie byłoby Pana Tadeusza, gdyby nie Jankiel. Zdrowie Juliana Tuwima!* Tuwim wyzwany odpowiedział ironicznie. *Nie byłoby Mickiewicza, gdyby nie Pan Tadeusz, nie byłoby Pana Tadeusza gdyby nie Jankiel, nie byłoby Jankiela, gdyby nie cymbały. Zdrowie Adolfa Neuwerta.* Ziemiańska to arystokracja. Kabaret skamandrytów miał siedzibę w kawiarni Pod Pikadorem w piwnicy Hotelu Europejskiego. Pikador miał drażnić i niepokoić kołtunów. Rząd sowiecki dla podniesienia swego prestiżu zaprosił do odwiedzenia pierwszego państwa robotniczego afrykańskiego kacyka. Ten po zapoznaniu się z ideologią bolszewicką, gdy udało mu się szczęśliwie wrócić do swego plemienia, miał powiedzieć: *ja głupia król nie wiedzieć, że bolszewicy robić królom kai kai.* Anegdota ta przypuszczalnie wywoływała burzę śmiechu Pod Pikadorem. Kto ją wymyślił – Słonimski czy żona Knastera pani Morska? Knasterowie mieszkali w Warszawie przy ulicy Żurawiej. We Wrocławiu jest ulica Żurawia i niedaleko niej Orla. Knaster zamieszkał na parterze willi przy ulicy Orłowskiego daleko od Żurawiej i Orlej. Wróćmy jeszcze na ulicę Żurawią w Warszawie, gdzie u Knasterów była Anna z Lilpopów – żona Jarosława Iwaszkiewicza. Oczarowana żoną Knastera – Anną z Frenkielów – zwaną Niutą – wspomina: *jego*, Knastera, *sposób mówienia o niej to bezgraniczna czułość, chwilami jakby ojcowska – pokorne uwielbienie, adoracja, jaką otacza się tylko bóstwo.* Niuta miała piękne niebieskie oczy – *Анютиные глазки* – niezabudki. Ukończyła angielską szkołę średnią dla pensjonarek. Inteligentna, piękna i dobrze wykształcona – osoba nieprzeciętna w pełnym tego słowa znaczeniu. Słynne felietony Słonimskiego publikowane w „Wiadomościach Literackich" powstawały pod jej przemożnym wpływem. Brak felietonu oznaczał zepsuty telefon Niuty. W czasach towarzysza Wiesława Gomułki ukazała się książka o Skamandrze. Student mający pewne kłopoty z egzaminem u Knastera wziął pod pachę, niby przypadkowo, książkę o skamandrytach i siadając przed biurkiem Knastera u niego w domu, położył ją niedbale obok. Dzieło nie uszło uwagi egzaminatora; sprawdzanie wiadomości z topologii ograniczyło się do rozmowy o Skamandrze. Wynik egzaminu był pozytywny – nadużycie słabości profesora. Knaster drugą wojnę światową spędził we Lwowie. W czasach sowieckich był profesorem ukraińskiego uniwersytetu, a podczas niemieckiej niewoli był zatrudniony na hańbiącym stanowisku w instytucie Weigla (Instytut Badań nad Tyfusem Plamistym i Wirusami). Mieszkał wraz z żoną i jej przyjacielem przez cały okres pobytu w jednym pokoju. Tworzyli oryginalny trójkąt równoramienny, którego podstawą była Maria Morska. Zwierzenia Morskiej z tego okresu stały się po wojnie kanwą powieści Ireny Krzywickiej, z domu Goldberg, pt. *Zamurowany świat.* Morska zmarła po zakończeniu wojny w 1945 roku w Łodzi. Wojenny lwowski trójkąt rozpadł się.

Rys. 2. Stella Maris

W okresie międzywojennym Knaster prowadził w Warszawie seminarium z topologii. Znani ludzie nauki i sztuki często puszczają w obieg anegdoty o sobie. Dobra anegdota podnosi prestiż i przyczynia się do popularyzacji osoby: rodzaj kryptoautoreklamy. Z anegdot o sobie słyną warszawski tenor Wiesław Ochman i wrocławski matematyk Hugo Steinhaus. Przyjaciel Ochmana, kowal, miał prosić go o przywiezienie mu ze swoich artystycznych podróży – latał przecież po całym świecie – porządnego kowadła, bo w Polsce nie może go kupić. Steinhaus propagował dwie anegdoty. Prezesem Polskiej akademii nauk był człowiek zasłużony nie tyle dla nauki, ile dla przewodniej siły narodu – partii. Zdarzyło się, że Steinhaus nie mógł być obecny na jednym z plenarnych posiedzeń akademii. Prezes prosił go o usprawiedliwienie absencji. *Ja mogę łatwo usprawiedliwić nieobecność, lecz czym pan uzasadni swoją tu obecność* – tak właśnie miał odpowiedzieć Steinhaus. Druga anegdota jest w podobnym duchu. Do Wrocławia w listopadowy późny wieczór przyjechała delegacja uczonych z Kraju Rad. Z rektoratu telefonują, aby pojechał na dworzec ich przywitać. *Jestem co prawda przy zdrowych zmysłach, ale ciało mam wątłe i czuję się niezdrów. Gdyby było odwrotnie, pojechałbym niezwłocznie.* Tak naturalnie nie mógł odpowiedzieć prezesowi ani urzędnikowi z rektoratu, albowiem były to czasy, gdy nawet Steinhaus nie mógł sobie pozwolić na żartowanie z władzy. Anegdoty jednakowoż są celne i podkreślają, że Steinhaus, choć lojalny, trzymał dystans do samozwańczych partyjnych rządów. O Banachu tego nie można powiedzieć. Knaster przypuszczalnie nie wymyślał anegdot o sobie. W 1924 roku, świeżo po doktoracie, miał na kongresie matematycznym w Amsterdamie zaplanowany referat rewolucjonizujący matematykę. Koledzy mieszkający z nim w hotelu zamknęli go w pokoju w tym czasie, gdy w programie był jego referat. Do przewrotu w matematyce nie doszło. *Via* Kraków, od 1945 roku jest profesorem matematyki na jedynej wtedy uczelni wrocławskiej będącej połączeniem uniwersytetu i politechniki. Knaster nie był profesorem tytularnym. Stanowisko profesora dano mu na lwowskim (ukraińskim) uniwersytecie i z tego stanowiska zrobił tytuł naukowy. We Wrocławiu, w początkowym okresie, był kierownikiem jednej z czterech katedr matematycznych. Był również jednym z założycieli wrocławskiego czasopisma „Colloquium Mathematicum". Mazurkiewicz, promotor Knastera, sugerując wezwanie Knastera ze Lwowa do Polski po wojnie podał dwa argumenty: jest specjalistą od wydawnictw naukowych i również radzi sobie dobrze z propagacją czasopism i książek. Nie ma w tym piśmie wzmianki o jego walorach naukowych. Istotnie Knaster był wspaniałym redaktorem dzieł matematycznych i estetą – dbał o wygląd zewnętrzny książki: literacki język, głęboka treść i piękna szata. Greckie piękno bije z okładek serii *Monografie matematyczne.* Uniwersytet Wrocławski to kontynuacja jezuickiego Leopoldinum. Zarówno budynek akademii, jak i stowarzyszony z nią kościół to perełki architektury barokowej, sławiącej w rzeźbie i malarstwie zakon Ignacego Loyoli oraz Cesarstwo Austriackie.

Był topologiem i nauczycielem z powołania. Wykładał geometrię analityczną i topologię. Wykład geometrii analitycznej oparty na maszynopisie Marcelego Starka był zły, bo podręcznik Starka jest nieudaną książką – nieudane połączenie ścisłej dedukcji z intuicją. Wykłady z topologii – wzorowane na znanej książce Kazimierza Kuratowskiego – były lepsze pod każdym względem od rozważań geometrycznych. Jeśli matematyka jest organizmem, to mózgiem jego jest logika, sercem komutatywna półgrupa słów z alfabetem liczb pierwszych, czyli teoria liczb naturalnych, płucami – algebra liniowa, żołądkiem – aksjomaty i dane empiryczne, wątrobą – funkcje analityczne, nerkami zaś – analiza matematyczna i funkcjonalna. Kośćcem i tkanką całości jest teoria mnogości, topologia, porządki i wypukłość. Topologia jest we wszystkich działach matematyki, bo topologia wnosi do dyskretnych zbiorów ciągłość. Jeden zbiór, jeden dyskretny szkielet jest fundamentem wielkiej rodziny przestrzeni topologicznych. Zbiór jest jeden, natomiast topologii nieskończenie wiele, gdy zbiór jest nieskończony. Badał kontinua, czyli przestrzenie topologiczne spójne, będące podzbiorami domkniętymi i ograniczonymi przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej, niezawierające podzbioru równoważnego z kołem – częścią płaszczyzny ograniczoną przez okrąg.

Knaster w 1922 roku podał konstrukcję kontinuum dziedzicznie nierozkładalnego: przestrzeni topologicznej niebędącej sumą dwóch swoich podprzestrzeni równoważnych, czyli homomorficznych, z całą przestrzenią. Prostym przykładem kontinuum dziedzicznie nierozkładalnego jest okrąg. Okrąg jest sumą dwóch odcinków, ale odcinek nie jest równoważny okręgowi. Kontinuum dziedzicznie rozkładalne to odcinek. Każdy odcinek jest sumą nie tylko dwóch, ale dowolnej liczby odcinków. Odcinek jest dziedzicznie rozkładalny na dwie podprzestrzenie, trzy podprzestrzenie, cztery podprzestrzenie i tak dalej. Słynny dywan Sierpińskiego jest kontinuum dziedzicznie rozkładalnym na osiem części, ale również na piętnaście części, na dwadzieścia cztery części i tak dalej. Krzywa Knastera, zwana także pseudołukiem, oraz twierdzenie o nieprzeliczalnej rodzinie przedziałów otwartych to jego dwa główne wyniki. Przedziały otwarte to odcinki prostej bez końców, natomiast nieprzeliczalna rodzina to mnogość, której liczba kardynalna to alef 1. Rodzina przedziałów otwartych rozłącznych jest albo skończona, albo jest mnogością, której liczbą kardynalną jest alef 0. Alef zero to najmniejsza nieskończoność, natomiast alef jeden, ale trzeba w to wierzyć, jest drugą z kolei nieskończonością. Innych nieskończoności nie ma, a nawet i podane tutaj dwie też są wątpliwe. Jeśli uwierzymy w ich istnienie, to twierdzenie Knastera dowodzi się prosto. Każdy punkt prostej albo nie jest pokryty przez żaden przedział rodziny, albo jest pokryty przez skończoną liczbę przedziałów, albo jest pokryty przez nieskończoną rodzinę przedziałów. Jeśli ta nieskończona rodzina pokrywająca któryś punkt jest typu alef 1, to twierdzenie jest już udowodnione. A gdy jest skończona lub typu alef 0, to wyjściowa rodzina nie jest nieprzeliczalna – alef 0 razy alef 0 równa się alef 0.

Na siedemdziesiąte urodziny, w 1963 roku, Knaster dostał nagrodę państwową – najważniejsze polskie finansowe wyróżnienie. Nadano mu w 1955 roku Krzyż Oficerski Orderu Odrodzenia Polski; miał przyznane także inne odznaczenia. Nie był jednakowoż ulubieńcem władzy komunistycznej jak inny skamandryta – Jarosław. Jego drugą żoną była gospodyni prowadząca mu dom; Knaster nie miał własnych dzieci, tylko pasierbicę. Karykaturę Knastera rysował Jeśmianowicz; karykatura Jeśmianowicza nobilituje – Knaster należy do elity polskich matematyków trzeciej ćwierci dwudziestego wieku. Trzy najpiękniejsze audytoria Instytutu Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego noszą imiona Władysława Ślebodzińskiego, Hugona Steinhausa i Bronisława Knastera. Na uroczyste otwarcie instytutu zaproszono Knastera i Steinhausa. W największym audytorium, nawiasem mówiąc wtedy z błędem architektonicznym, bo źle zgrane linie wywoływały rozchwianie błędnika – zawroty głowy i mdłości, Steinhaus i Knaster znacząco spojrzeli na siebie: ten z nas nada swe imię tej sali, który pierwszy opuści ten świat. Wspomniany błąd architektoniczny później usunięto, zdejmując boazerię. Knaster i Steinhaus mają we Wrocławiu swoje ulice. Około roku 2016 we Wrocławiu przy ulicy Witkiewicza 11 otwarto restaurację pod nazwą Steinhaus; godłem jej została słynna karykatura Steinhausa mistrzowsko nakreślona przez Leona Jeśmianowicza. Specjalnością restauracji była kuchnia żydowska, lwowska i ulubiona potrawa Steinhausa – gicz cielęca. Restauracja krótko była czynna, bo po roku ją zamknięto i wystawiono lokal na sprzedaż. Byli kolegami i przyjaciółmi, jednak w tym związku Steinhaus miał głos decydujący. Jeśli Knaster twierdził, że każdy ma prawo do swego nazwiska, to Steinhaus wypowiedź tę uzupełniał: tylko w pierwszym przypadku. To on wybrał dla siebie piętro willi, by móc deptać po głowie Knastera. Knaster miał zdolności manualne – był typem złotej rączki. Prowadził również księgę buchalteryjną całego domu. Steinhaus takimi pracami pogardzał. Jerzy Łoś ze wszystkich matematyków wrocławskich po 1945 roku najwyżej cenił właśnie Bronisława Knastera. Uważał go za wybitnego matematyka tworzącego swoją szkołę topologiczną. Rok 2019 ogłoszono rokiem polskiej matematyki. Oby stał się rokiem odrodzenia. Francesco Albertini w swoim znanym przewodniku po Rzymie pisze: *Roma quanta fuit ipsa ruina docet*. Cytat ten dotyczy – *mutatis mutandis* – matematyki polskiej. Jaka była w Krakowie, Lwowie, Warszawie i Wilnie, świadczą resztki obecne w Toruniu, Poznaniu, Warszawie, Krakowie i we Wrocławiu.

10 sierpnia 2016 roku poprosiłem doktora Mieczysława K. o podanie pięciu najwybitniejszych wrocławskich matematyków po roku 1945. Bez zastanowienia wymienił cztery nazwiska: Władysław Ślebodziński, Kazimierz Urbanik, Czesław Nardzewski, Hugo Steinhaus, w tej właśnie kolejności; po chwili namysłu dodał do tej czwórki Edwarda Marczewskiego. Ślebodziński był promotorem jego rozprawy doktorskiej. Przypuszczalnie fakt ten, obok wkładu Ślebodzińskiego w teorię form różniczkowych, wpłynął na kolejność nazwisk. Z wymienionej piątki popiersie we wrocławskim ratuszu ma tylko Steinhaus. Przy ulicy Włodkowica pod numerem 11 jest restauracja Steinhaus, której godłem jest piękna karykatura tego matematyka zrobiona przez Leona Jeśmianowicza. Serwują tam dania kuchni żydowskiej i lwowskiej. Typy profesora Bolesława K. z 19 sierpnia 2016 roku w materii wrocławskich geniuszy matematycznych to: Marczewski, Nardzewski, Steinhaus, Ślebodziński, i również – po chwili zastanowienia – Urbanik na końcu. Porządek ustala wagi: pierwsze miejsce – pięć punktów, a za każde następne o jeden punkt mniej od poprzedniego. Jak widać, w obu odpowiedziach na ankietę zbiór osób jest ten sam, lecz inna kolejność, inna preferencja – relacja zwrotna i przechodnia. Wygenerowana łączna preferencja na pierwszym miejscu stawia Nardzewskiego i Ślebodzińskiego, którzy mają po siedem punktów, w środku jest Marczewski z sześcioma punktami, a zamykają listę Steinhaus i Urbanik, którzy mają po pięć punktów. Ta piątka wydaje się dobrze wybrana, bo dzieli się w sposób naturalny na trzy podzbiory. Nie jest to jednak jednorodny zespół uczonych związanych i zjednoczonych wspólną ideą, jak to było w szkole lwowskiej. Wybór sześciu najważniejszych wrocławskich matematyków jest zadaniem trudniejszym. W podręcznej szybkiej pamięci mamy tylko kilka nazwisk – trzy lub cztery. Powyższe preferencje nauczycieli akademickich uzupełnia, ożywia i rozszerza lista nauczyciela szkoły średniej – magister Lucyny N. Kolejno proponuje ona: Steinhausa, Urbanika, Marczewskiego, Nardzewskiego i Bronisława Knastera. 24 sierpnia 2016 roku ankietowano również profesora Ryszarda J. Proponuje on Rylla, Steinhausa, Marczewskiego, Knastera i Urbanika uznać za tych najważniejszych. Napisał on u Nardzewskiego piękną pracę magisterską, na poziomie rozprawy doktorskiej, poświęconej aksjomatycznej definicji zbioru wypukłego. Różnica wieku – około dziesięć lat – skutkuje nieznajomością Ślebodzińskiego; studenci uniwersytetu nie słyszeli o tym profesorze Politechniki. Cztery ankiety dają łączną preferencję obejmującą zbiór sześcioelementowy. Pierwsze miejsce zajmują Nardzewski i Steinhaus – po czternaście punktów, następnie Marczewski – dwanaście punktów, Urbanik – dziesięć, Ślebodziński – siedem i Knaster – trzy punkty. Pierwsza piątka jest widoczna, ale czy to ta właściwa? Kto jest szósty? Czy Knaster, a może Stanisław Hartmann lub Witold Wolibner? Zbiorowa preferencja odzwierciedla, mówiąc

dzisiejszym językiem handlowym, marketing własnej osoby. O *publicity* najbardziej dbali Nardzewski i Steinhaus; czynili to bardzo dyskretnie, ale skutecznie, jak widać. Steinhaus był niewątpliwie szpakami karmiony. Najmniej o wpływy troszczyli się Knaster i Ślebodziński. Wszystkich wymienionych tu matematyków karykaturował Leon Jeśmianowicz. Szczególnie piękna jest karykatura Edwarda Marczewskiego, w którego oczach zawsze błyszczały dwie iskierki. Marczewski wśród matematyków był arbitrem elegancji, salonowych manier i najlepszej kindersztuby. Jeśmianowicz karykaturował tylko wybitnych, więc jego karykatura uszlachetnia. W Instytucie Matematycznym Uniwersytetu trzy sale amfiteatralne noszą kolejno nazwiska: Marczewskiego, Steinhausa i Ślebodzińskiego. Steinhaus, Marczewski, Ślebodziński i Knaster mają we Wrocławiu swoje ulice.

Moja wielka piątka matematycznego Wrocławia to: Urbanik – pierwszy, później Steinhaus, dalej Knaster, po nim Ślebodziński i na końcu Marczewski. Porządek generowany przez te ankiety to następująca kolejność wyróżnionej szóstki: pierwszy Steinhaus z 18 punktami, drugi Urbanik z 15 punktami, trzeci Nardzewski ma 14 punktów, czwarty Marczewski 13, piąty jest Ślebodziński z 9 punktami i listę zamyka Knaster mający tylko 6 punktów. Ponad przeciętną, 25/2 punkta, zebrali: Steinhaus, Urbanik, Nardzewski i Marczewski; wydaje się, że jest to dobry, adekwatny wybór. W 2017 roku Uniwersytet Wrocławski wypuścił w języku angielskim afisz pt.: Matematycy Uniwersytetu Wrocławskiego w latach 1945-2017. Ten afisz to macierz 3x3 zdjęć legitymacyjnych z krótkimi notkami pod nimi. Są to kolejno według wierszy: Władysław Ślebodziński, Hugo Steinhaus, Bronisław Knaster, Witold Wolibner, Edward Marczewski, Stanisław Hartmann, Czesław Ryl-Nardzewski, Kazimierz Urbanik i Andrzej Hulanicki. Kolejność ta jest wyznaczona datą urodzenia, od najstarszego do najmłodszego. Najdłuższa notka jest pod zdjęciem Steinhausa, średnią długością wyróżniono Hartmanna, Nardzewskiego i Hulanickiego. Podpisy te w jakiś sposób dają wagę poszczególnym osobom. Można stąd nawet wnioskować, z jakiego kręgu wywodził się autor tego afisza.

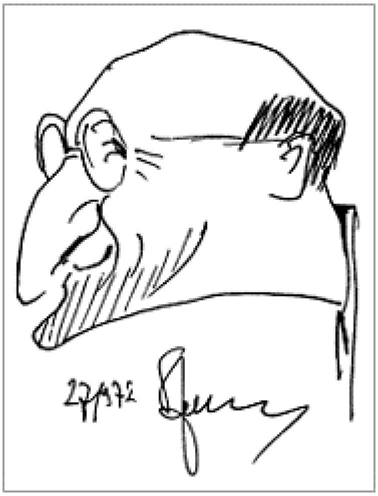
27 maja 2016 roku w piątek w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego odbyła się sesja naukowa poświęcona pamięci Czesława Rylla Nardzewskiego z okazji 90. rocznicy urodzin i upamiętnienia jego śmierci w 2015 roku. Pogrzeb na Cmentarzu Grabiszyńskim we Wrocławiu zgromadził 196 żałobników, jak dwukrotnie skrupulatnie przeliczył obecny rachunkowy pedant. W sesji naukowej uczestniczyło około sto osób. Wygłoszono cztery referaty. Dwa pierwsze miały charakter probabilistyczny, trzeci był swego rodzaju tańcem pokazującym, jak doskonali się wyniki, a ostatni – czwarty – dotyczył kategoryczności teorii naukowych. Pierwszy referent Nardzewskiego nazywał poufale Sławkiem i zachwycał się ósemką, która pojawiła się w twierdzeniu. Ósemka miała dla referenta religijny charakter; zapomniano, że podzbiorów w zbiorze trójelementowym jest osiem, zapomniano o ośmiu ewangelicznych błogosławieństwach, a powołano się na buddyjskie i chińskie powiązania. Referat drugi był kontrapunktem do wystąpienia pierwszego. Pierwszy profesor wszystko wiedział, lecz mało mówił, bo uważał że słuchacze nie pojmą głębi jego myśli. Drugi zaś przeciwnie,

skromnie uważał, że mało wie i jego wiedza jest raczej płytka, a słuchacze doskonale znają przedmiot, więc także się streszczał. W trzecim referacie raczej przetańczonym niż mówionym pojawiło się pojęcie twierdzenia w formie skończonej, idealnej, perfekcyjnej; prawo nauki jest właśnie takim twierdzeniem. To prawo nauki nie było wyraźnie widoczne; można go chyba streścić w fredrowskiej zasadzie: z kijka grubego da się wystrugać kijek cienki. Jeśli funkcja gruba jest ciągła, to istnieje funkcja cienka – również ciągła – zawarta w tej grubej. Kojarzy się to z patyczakiem Pinokio, wyrzeźbionym przez Carlo Collodiego. Rzeźbienie to odrzucanie części zbędnych. W działaniach na zbiorach sprowadza się to do ich iloczynu. Tak więc ultrafiltry wiążą się i z rzeźbami, i z selektorami. Czwarty referat dotyczył kategoryczności, czyli pytania, kiedy teoria ma jeden tylko model. Jeśli świat jest dostatecznie liczny, powiedzmy – liczy przedmiotów alef z indeksem 47, to każda teoria w tym świecie jest kategoryczna – takiego uniwersum zwyczajnie nie ma. Słuchaczowi tych referatów, niby-matematycznych, a więc naukowych, przychodziła uparcie do głowy książka Karola Marksa *Nędza filozofii – Misere de la philosophie*. Ale matematyka to twierdzenie Talesa, twierdzenie Pitagorasa i metoda wyczerpywania Archimedesa, a więc coś tak ważnego i pięknego, że te czarne myśli Marksa rozwiewało dzieło Boethiusa *Consolatio philosophiae*. Myśli, czarne i złe, jasne i dobre, zmieniały się jak w kalejdoskopie. Czterej wybitni specjaliści budowali pomnik Nardzewskiemu, przy okazji tworząc postumenty pod własne monumenty wokół pomnika swego nauczyciela. Po kawie serwowanej w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu w audytorium imienia Steinhausa odbyła się sesja wspomnieniowa zorganizowana przez Polskie Towarzystwo Matematyczne. Tutaj polerowano i woskowano wystawiony poprzednio pomnik Nardzewskiego. Naturalnie mówcy popisywali się zażyłą znajomością ze Sławkiem. Demonstrowano fotografie, z których najlepsza przedstawiała Sławka na tle kory starego dębu. Obrazki te, pomijając piękny dąb, pokazywały naturalnie matematyków ze środowiska wrocławskiego. Znaczenie osoby jest pochodną rzędu, który zajmuje na zdjęciu. Pierwszy szereg zarezerwowany był dla Steinhausa, Marczewskiego i Hartmanna. Na żadnym z tych zdjęć naturalnie autora nie było, więc nie odważył się zabrać głosu w sprawie tyczącej się świetlanej pamięci Sławka. Po raz pierwszy to nazwisko usłyszałem około roku 1957 na studiach matematycznych w Uniwersytecie Wrocławskim. Czesław Ryll Nardzewski, zwany krótko przez studentów Ryllem, uchodził za genialnego młodego uczonego rozwiązującego problemy matematyczne tak jak Aleksander Wielki węzeł gordyjski. Dla czwartego roku studiów zaproponowano wykład Rylla – chyba z teorii miary – na który naturalnie się zapisałem. Kurs ten jednak po dwóch lub trzech zajęciach przejął ktoś inny, z nieznanych dla studentów powodów. Z tych kilku zajęć nie pamiętam wiele; były to zajęcia zwyczajne, niebudzące jakichś specjalnych emocji. Kilka razy widziałem Rylla w kinie Warszawa w towarzystwie, pewnie, żony. Rozmawiałem z nim przez telefon w sprawie pobytu profesora Włodzimierza Odyńca we Wrocławiu, który wygłosił referat w Polskim Towarzystwie Matematycznym. Wykład ten pięknie wiązał zasadę dualności programowania liniowego z analizą Fouriera. Na odczycie tym miałem przyjemność siedzieć tuż za plecami Nardzewskiego. Miał włosy falowane, jakie często widzi się wśród ludzi uzdolnionych artystycznie – poetów, muzyków, uczonych. Ostatnie zdarzenie odnoszące się do Rylla znam z relacji swego młodszego kolegi, dziś znanego specjalisty od rachunkowości. Było to w czasach przejściowych trudności w zaopatrzeniu za towarzysza Gierka. Kolejka, więc mój kolega staje i dopiero wśród uczestników ogonka dowiaduje się, co tu dają. Otóż dają – jak na ówczesne warunki pięknie wydaną, luksusową niemal – jednotomową *Encyklopedię powszechną* Państwowego Wydawnictwa Naukowego. Książka kosztowała około trzystu złotych, a tych pieniędzy mój kolejkowicz nie miał przy sobie. Poprosił nieznanego sobie sąsiada o pożyczkę, a ten bez skrupułów dał mu pieniądze, naturalnie po wymianie adresów. Gdy kilka godzin później zwracał dług wierzycielowi, ten oświadczył: – Niepotrzebnie się pan fatygował, ja na zwrot tych pieniędzy wcale nie liczyłem. Niezwykłym wierzycielem był profesor zwyczajny Czesław Ryll Nardzewski (A. Smoluk (2016)). Tekst powyższy, pisany trzy lata temu, okazał się proroczy. W 2019 roku na grobie Nardzewskiego pojawiła się nowa granitowa stella z wyrytym twierdzeniem o istnieniu ciągłego i gładkiego selektora. Mutlifunkcja to 5 prostokątów o bokach różnej długości, równoległych i prostopadłych do osi układów współrzędnych, przylegających do siebie kawałkami dłuższych boków. Powstał z nich obszar spójny, pionowo wypukły. Selektor łączy punkt leżący na lewym, dłuższym boku pierwszego prostokąta z punktem leżącym na prawy dłuższym boku ostatniego prostokąta; jest to linia koloru czerwonego, wyróżniająca się na jasnym granicie. Zbiór wartości multifunkcji próbowano zacieniować. Naturalnie selektor jest granicą maksymalnego filtra multifunkcji. Jak na razie jest to chyba jedyne twierdzenie na płycie grobowej. Analiza Fouriera łączy się w sposób naturalny z teorią multifunkcji poprzez efekt Gibbsa i zbieżność wykresów funkcji w metryce Hausdorffa. Metryka Hausdorffa jest określona w przestrzeni podzbiorów zwartych płaszczyzny – tylko ten przypadek będzie nas interesować. Odległość Hausdorffa dwóch zbiorów zwartych płaszczyzny to większy z odstępów jednego zbioru od drugiego.

Hipoteza. Jeżeli funkcja f jest całkowalna z kwadratem na odcinku oraz sumy częściowe jej szeregu Fouriera są ciągiem zbieżnym w metryce Hausdorfa do multifunkcji M, to istnieje ciągły selektor multifunkcji M wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest ciągłą funkcją okresową.

Efekt Gibbsa pokazuje, jak natura radzi sobie z nieciągłością; funkcja zamienia się w multifunkcję i to z nadmiarem około 9% i niedomiarem tak samo 9% w punktach nieciągłości funkcji. W ten sposób rozwiązuje się problem znany pod groźną nazwą *horror vacui*.

Profesor – znawca prawa finansowego – Lesław Adam był lwowskim kolegą Steinhausa. Odwiedzał go również po wojnie we Wrocławiu. Steinhaus zajmował górną połowę willi na Biskupinie; na parterze było królestwo Knastera. W salonie u Knastera dywan był podwinięty, stała duża szkolna tablica. Na podłodze leżała gruba warstwa miału powstałego w wyniku wycierania na sucho tablicy. Pod ścianą, osypaną białym pyłem, widać było porzuconą niedbale 50-tomową wielką radziecką encyklopedię. Seminaria – zwane knasteriami – trwały kilka godzin. Jeden z uczestników w tym czasie systematycznie zdrowo drzemał. W przerwie żona Knastera częstowała kanapkami i herbatą. Przynosiła piramidę kanapek na dużej tacy. Tak podobno było na seminariach u Hilberta. Wracajmy jednak na górę do Steinhausa. Tu na dywanie siedzi gospodarz z Adamem i zabawiają się puszczaniem bąka. Naśladują chłopca ze znanego obrazu Chardina. Matematyk objaśnia prawnikowi mechanikę nieba bez dzieła Laplace'a – wystarcza mu wirujący bąk. W tanecznym ruchu frygi widać harmonię sfer niebieskich, a w jej szumie można usłyszeć muzykę niebiańską. Trzeba mieć tylko oczy i uszy Steinhausa.



Rys. 3. Knaster w oczach Jeśmianowicza

W domu przy ulicy Orłowskiego portretował Knastera Stanisław Kukla. Obraz jest dobry, lecz portret nieudany. Brakuje tego jednego rodzynka, po którym od razu widać, czyja to postać. Knaster na obrazie jest nierozpoznawalny – Kukla nie był Jeśmianowiczem. Portret przedstawia go siedzącego w piżamie przy oknie, za którym widać bujną zieleń. Przypuszczalnie był chory, obraz jest datowany i sygnowany: Kukla, 1960. Knaster miał pianino i był biegły w grze na tym instrumencie. Poznał Kuklę przez swą pasierbicę, która była uczennicą liceum plastycznego przy ulicy Piotra Skargi. W tym liceum nauczycielem był Kukla – uczył rysunku i malarstwa, a jego żona Gala w szkole tej uczyła języka francuskiego. Knasterowie i Kuklowie bywali u siebie. Pasierbica Knastera ukończyła wyższą szkołę wychowania fizycznego. Po studiach pracowała jako rehabilitantka. W swej pracy dyplomowej zajmowała się badaniem fizycznego rozwoju dzieci i młodzieży; naturalnie posługiwała się pojęciem liczby przybliżonej. Wielkości przybliżone to przedziały domknięte liczb rzeczywistych. Przy opracowywaniu danych pomagał jej nie ojczym, lecz kolega Knastera – specjalista od zastosowań. Tenże matematyk złożył nieco później swoją notkę o sekwencjach – badanie płci w kolejnych urodzeniach. W jego pracy wystąpiła wielkość przybliżona 0,150. Knaster – redaktor biuletynu wydawanego przez Wrocławskie Towarzystwo Naukowe – zakwestionował ten zapis: *Przecież wystarczy napisać 0,15.* Nazwy te są oczywiście różnymi oznaczeniami jednej liczby dokładnej. Jednakowoż nie była to liczba dokładna, lecz wielkość przybliżona oznaczająca przedział [1495/10.000, 1505/10.000], natomiast wielkość 0,54 przybliżona jest przedziałem [145/1000, 155/1000]. Stanisława Kuklę nazwano malarzem na uboczu; Bronisława Knastera można również uważać za matematyka na uboczu. Wystawę obrazów Kukli w muzeum miejskim anonsowano na afiszach: *Malarz na uboczu.* W albumie tej wystawy jest wspomniany wcześniej portret Knastera.

Wykładał, jak już wspomniano, na Uniwersytecie Wrocławskim geometrię analityczną dla pierwszego roku i topologię ogólną dla roku trzeciego. Zajęcia odbywały się na parterze w starym gmachu Politechniki Wrocławskiej. Robił wrażenie człowieka skromnego i surowego, o twarzy pociętej zmarszczkami i łysej głowie. Garnitur na nim zwisał, a na stopach miał białe tenisówki; zimą nosił meszty. Był mężczyzną słusznego wzrostu, około 183 cm, i odpowiedniej tuszy. Spełniał prawo Broca[1], mówiące, że wzrost w centymetrach równa się sto centymetrów, czyli jeden metr, plus waga w kilogramach pomnożona przez centymetr na kilogram. Wykład był zawsze z przerwą 15-minutową. W czasie pauzy spacerował zwykle z Andrzejem Lelkiem korytarzem okalającym dziedziniec budynku. Na którymś wykładzie jesienią 1955 roku dał prztyczka reżimowej propagandzie. – *Piszą o tysiącach wybudowanych mieszkań, ale nie podają, ile mieszkań wybudowano w tym czasie w Wiedniu.* Wypowiedź ta zaniepokoiła mnie; wiedziałem bowiem, czego się można spodziewać po władzy ludowej. Przypuszczalnie Knaster czuł już nadchodzącą odwilż; ja byłem jeszcze w strefie mrozu. Fałszowanie informacji – to standardowy zabieg propagandowy. Członkiem Związku Młodzieży Polskiej niestety nie byłem, chociaż cała moja klasa maturalna była zetempowska. W mojej studenckiej grupie ćwiczeniowej było więcej takich jak ja, ale przeważali oczywiście zetempowcy. Przyjaciel Andrzej Czylok – chyba najlepszy student na roku – nie był na jednym z zebrań ZMP. Koleżanka, zetempowski odpowiednik partor-ga grupy studenckiej, wezwała go na dywanik. Kazano mu usprawiedliwić swą nieobecność na tym przecież bardzo ważnym spotkaniu. Takie to były piękne i ciekawe czasy. Stąd mój niepokój po usłyszeniu słów profesora.

Knaster miał swoisty sposób egzaminowania; na egzaminie pisemnym dawał do rozwiązania pięć zadań, a kto je rozwiązał, podchodził do niego ze swoim wypracowaniem. Rzucał okiem na pracę i zadawał tylko jedno pytanie w rodzaju: *Jakim prawem fizycznym rządzi hiperbola?* Naturalnie myślał o prawie Boyle'a i Mariote'a. Pierwszych kilka osób otrzymywało ocenę bardzo dobrą lub dobrą, część dalszych wystarczającą, a cała reszta na końcu miała ocenę negatywną, niezależnie od jakości rozwiązań. Wówczas studenci z pokorą zgadzali się na ten niewątpliwie swojski rodzaj sprawdzania wiadomości: jeśli jesteś zdolny, działaj szybko i dobrze.

Moim ulubionym przedmiotem była topologia ogólna. Z racji tych zainteresowań w roku akademickim 1958/59 uczestniczyłem w seminarium z topologii. Seminarium

[1] Paul Broca – antropolog francuski.

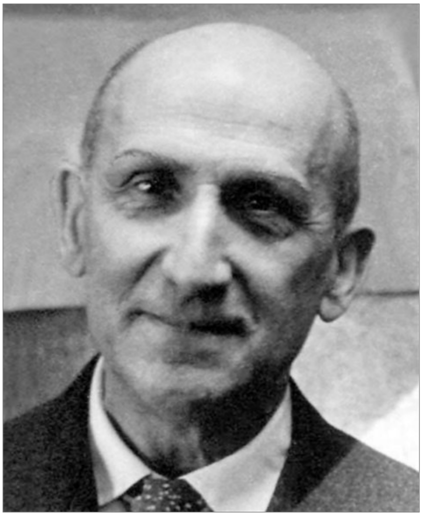
to odbywało się w mieszkaniu Knastera przy ulicy Orłowskiego 5. W salonie po lewej stronie od wejścia stała duża tablica na trójnogu w kształcie sztalugi. Dywan, z gatunku perskich, był podwinięty, a parkiet pod tablicą kryła gruba warstwa miału kredowego. Z uczestników tego seminarium, zwanego popularnie knasterium, pamiętam Jerzego Mioduszewskiego, Witolda Nitkę i Edwarda Piegata; chyba był także Roman Duda, Janusz Jerzy Charatonik i inni – łącznie około osiem osób. Knasterium z przerwą trwało cztery godziny. Jeden z uczestników po kwadransie zasypiał, a budził się, gdy pani Knasterowa wnosiła na dużej metalowej tacy piramidę kanapek. Taca w Getyndze była srebrna; taca Knasterowej także mogła być srebrna. Pod ścianą salonu obok drzwi wejściowych stały 52, a może i 53 tomy – z tomami uzupełniającymi – *Wielkiej radzieckiej encyklopedii.* Hasła matematyczne tej encyklopedii, niektóre pięknie opracowane, redagował sam wielki Andriej Kołmogorow. Na ostatnim roku, z przyczyn nieracjonalnych, opuściłem seminarium Knastera i przeniosłem się na seminarium z funkcji analitycznych prowadzone przez doktora Jana Zamorskiego, a firmowane przez profesora Witolda Wolibnera. Przyczyną mej decyzji był wspomniany przyjaciel Andrzej Czylok. Obaj mieliśmy być na wspólnym seminarium z topologii. Andrzej, tak wtedy sądziłem, okazał się nielojalny wobec mnie. Chciałem się więc z nim rozstać. Wydawało mi się, że mogę napisać dobrą pracę z każdej dziedziny. Wybrałem więc funkcje analityczne, bo w grupie seminaryjnej Jana Zamorskiego był drugi mój przyjaciel – Eugeniusz Szczepankiewicz; na to seminarium zapisali się także Stanisław Gacek, Włodzimierz Nalepa, Eugeniusz Sacała i Tadeusz Zieliński. Funkcje analityczne niewątpliwie stanowią ważny dział matematyki; są wątrobą organizmu, jakim jest matematyka, a topologia jest tylko jego tkanką łączną. Tak więc mimowolnie wybrałem lepiej.

Co jest trwałym osiągnięciem Knastera? Czy jest nim continuum dziedzicznie nierozkładalne i dowód lematu Spernera? Continuum Knastera jest konstrukcją piękną, mogącą konkurować z dywanem Sierpińskiego. Ekstremalną tą linią zachwycał się Kołmogorow wraz z wybitnym topologiem Pawłem Siergiejewiczem Aleksandrowem. Z polecenia tych dwóch radzieckich matematyków – sław światowych najwyższej klasy – Knaster został profesorem ukraińskiego uniwersytetu w Lwowie. Krzywa nierozkładalna to naturalnie rozważania metafizyczne, ale lemat Spernera to najprawdziwsza nauka: twierdzenie o rozkładzie sympleksu na podsympleksy. Czym jest sympleks? Jest to specjalny zbiór wypukły. W przestrzeni n-wymiarowej istnieje $n+1$ punktów wypukle niezależnych; oznacza to, że punkty nie leżą na rozmaitości liniowej wymiaru o jeden niższego niż przestrzeń. Wypukłą kombinacją punktów jest kombinacja liniowa, której współczynniki są nieujemne i sumują się do jedynki. Sympleks n-wymiarowy jest zbiorem wszystkich wypukłych kombinacji $n+1$ punktów wypukle niezależnych. Sympleks można podzielić na skończoną liczbę mniejszych podsympleksów. Punkty, które generują cały sympleks, nazywają się jego wierzchołkami. Zakładamy, że wierzchołki podstawowego sympleksu są ponumerowane od zera do n lub pomalowane różnymi barwami. Wierzchołki podsympleksów numerujemy albo kolorujemy zgodnie z regułą wypukłości. Jeżeli dany wierzchołek mniejszego sympleksu jest wypukłą kombinacją wierzchołków podstawowego sympleksu, to można mu nadać dowolny numer lub barwę tego wierzchołka podstawowego, przy którym jest współczynnik różny od zera. Po tych uwagach łatwo formułuje się twierdzenie Spernera.

Jeżeli sympleks jest rozbity na podsympleksy, których wierzchołki są numerowane zgodnie z regułą wypukłości, to istnieje podsympleks, którego wierzchołki mają różne numery lub różne kolory.

Lemat ten dowodzi się indukcyjnie ze względu na liczbę wierzchołków dodanych. Jeżeli nie ma podziału, czyli nie dodajemy żadnego wierzchołka, to lemat jest oczywiście prawdziwy. Załóżmy, że jest prawdziwy dla *k* dodanych punktów. Jeżeli dodamy jeszcze jeden punkt, to leży on albo we wnętrzu któregoś z podsympleksów, albo na którejś ścianie. W obu przypadkach lemat jest naturalnie prawdziwy. Szczegóły łatwe do uzupełnienia pomijamy.

Piętro willi, w której mieszkał Knaster, zajmował Hugo Steinhaus. Knaster uważał, i tego się domagał od innych, że jego nazwiska nie powinno się odmieniać zgodnie z regułami języka polskiego, tylko tak jak nazwisko prezydenta Egiptu Nassera. Miało więc być w dopełniaczu Knastera, a nie Knastra. Steinhaus zaś mówił, że *knaster* to tańszy gatunek fajkowego tytoniu i jako rzeczownik pospolity odmienia się podobnie jak inne tego rodzaju słowa: aster, majster *et cetera*. Oczywiście są wyjątki, np. *bokser.* Najlepszy gatunek tytoniu to *prymka*, od nazwy niemieckiej gatunku *prima sort*. Zdarzyło się, że gospodarz z Kretowiec – wsi koło Zbaraża – kupił najtańszy tytoń. W pudełku był jednakowoż najlepszy gatunek z dołączoną karteczką. *Jeśli młody kupił, niech dziękuje, a gdy stary, niech w …ę całuje.* Wykropkowane słowo jest najwłaściwszym rymem do Ukraińskiej Powstańczej Armii. Steinhaus kochał i tworzył wieloznaczne kalambury; *bon mot* to jego ulubiony rodzaj poetycki. Dla ciętej wypowiedzi potrafił poświęcić wiele. Cała Polska zna jego wieloznaczną i głęboką definicję ziemi: *Ziemia – kula u nogi.* Podobno Tuwim, gdy to usłyszał, klękał w pokorze przed Steinhausem, by złożyć mu hołd. W definicji Steinhausa słychać dźwięki buntowniczej pieśni rosyjskiej *Bradjaga: atiec twoj w dalokoj Sibiri dawno uż kandałami griemit.* Ziemia to materia: między duchem i materią pośredniczy matematyka – to słowa z płyty grobowej Steinhausa. W czasach międzywojennych, gdy Lwów był głośny na całym świecie z powodu osiągnięć matematycznych, zawitał tam wybitny matematyk francuski Henry Lesbegue. Całka Lesbegue'a była właśnie pośredniczką pomiędzy Banachem i Steinhausem. Steinhaus na Plantach Krakowskich usłyszał podczas spaceru dysputę dwóch młodzieńców, w której od czasu do czasu pojawiało się nazwisko matematyka francuskiego; rozmawiali o całce Lesbegue'a. Bez ceregieli przyłączył się do tej rozmowy; spotkanie to zadecydowało o przyszłości Banacha. Całka Lesbegue'a na początku XX wieku była trudnym matematycznym *novum* znanym tylko nielicznym. Banach stał się filarem najważniejszej polskiej szkoły naukowej – Lwowskiej Szkoły Analizy Funkcjonalnej. Wróćmy jednak do wizyty Lesbegue'a. Steinhaus przedstawił mu dziekana wydziału przyrodniczego, do którego były przypisane studia matematyczne. Dziekanem w owym czasie był profesor Stanisław Kulczyński, znany biolog, znawca roślinności torfowej i torfowisk. – *Oto nasz dziekan, jedyny biolog na świecie*, *który przeczytał książkę Hausdorffa o teorii zbiorów i na nieszczęście ją zrozumiał.* Co ta wypowiedź miała oznaczać? Był to chyba tylko *bon mot* i nic więcej. Kulczyński znał dobrze matematykę i stosował ją w swoich badaniach. Uważał, że ciągły rozwój przyrody jest naturalny i tłumaczy się zwyczajnie. Książka zaś Felixa Hausdorffa o głównych kierunkach teorii mnogości ma również swoją wartość naukową i dydaktyczną. Hausdorff jest jednym z twórców topologii – specjalnej geometrii – nauki o ciągłości i spójności. Jeszcze jeden popis słowny Steinhausa.



Rys. 4. Knaster z czasów Skamandra

Jeżeli w pierwszym akcie sztuki na ścianie wisi strzelba, to w ostatniej scenie aktu trzeciego strzelba ta wypali. Nadeszła chwila, by powrócić do prymki. Wielki Johann Wolfang von Goethe miał powiedzieć o Johannie Sebastianie Bachu: *nicht BACH aber SEE will nennst.* Wzorując się na Goethem – *toutes proportions gardées* – możemy powiedzieć o Knasterze: nie KNASTER, lecz PRYMKA winno być jego imię.

Literatura

I. Krzywicka (2013). *Wyznania gorszycielki.* Czytelnik.

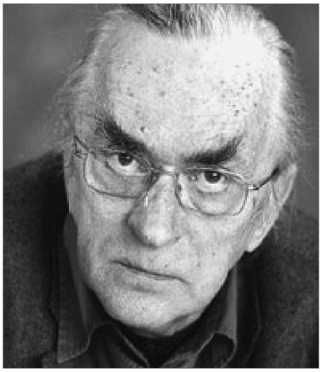
A. Smoluk (2016). *Refleksje i uwagi przy lekturze książki Mariusza Urbanka Genialni. Lwowska Szkoła Matematyczna.* Ekonometria 3(53), s. 146-161.

11

Chłopiec z papierosami, czyli Andrzej Stanisław Barczak (1939-2019)

Antoni Smoluk

Memoria bene peracte vitae sempitern est



Profesor Andrzej Barczak urodził się 4 lutego 1939 roku w Rudzie Śląskiej. Zmarł 21 maja 2019 roku w Katowicach. Jego pogrzeb odbył się 25 maja tegoż roku. Mszę żałobną odprawiono w parafialnym kościele św. Józefa Robotnika. Prawie wszyscy żałobnicy, a było ich około 200, przystąpili do komunii świętej. Nie było oficjalnych przemówień, a jedynie ksiądz w kazaniu wspomniał o dokonaniach zmarłego. Urnę z prochami złożono do grobu matki, w głównej alei pobliskiego parafialnego cmentarza.

Żyjemy wśród ludzi niezwykłych, wybitnych i przeważnie nie odczuwamy tego uprzywilejowania i wyróżnienia danego nam kaprysem losu. Odwrotna perspektywa zamienia pigmejów z krajów dalekich w olbrzymów, zaś swojskich gigantów skarla. Szuka się prawdy i wielkości het daleko, a nie widzi się skarbów pod ręką; zadziwiająca krótkowzroczność – szczególnie w Polsce popularna. Cały świat zna z Ewangelii smutną skargę Jezusa: nikt nie jest prorokiem we własnym kraju. Andrzej był.

Andrzej Barczak pojawił się po raz pierwszy w naszym życiu wczesną wiosną 1965 roku na seminarium inaugurującym słynną dziś serię Konferencji Polski Południowej. Chwila historyczna dla ekonometryków, matematyków i statystyków uczelni ekonomicznych z Katowic, Krakowa i Wrocławia. Od tej daty spotykaliśmy się już często na różnych zgromadzeniach; szczególnie ważne były zakopiańskie konferencje profesora Aleksandra Zeliasia. W Zakopanem był czas na rozmowy tyczące się nauki i sztuki, mieszkańców Podhala, a także wszystkich innych aktualnych spraw. Andrzej uwielbiał Podhale i zachwycał się góralską kulturą, pięknym folklorem, niezwykłym poczuciem godności ludzi gór. Nosił na piersiach wytłoczoną z blachy mosiężnej góralską ozdobę przypominającą parzenice i szarotki. Widział Podhale kolorowo jak ksiądz profesor Józef Tischner. W swoim czasie Elżbieta Stolarska rozczytywała się w pismach Tischnera i polecała je kolegom. Tischner był w modzie. Andrzej miał także – jak ksiądz Tischner – za przyjaciółkę mądrą gaździnę; mieszkał u niej i dzielił stół z gospodarzami. Z gaździną prowadził długie rozmowy, na wszystkie możliwe tematy. Kuchnię góralską uważał za jedną ze smaczniejszych. Górale to ludzie honoru, przepełnieni radością życia; przebywają wśród groźnej, potężnej, magicznej przyrody. Z kim przystajesz, takim się stajesz. Surowa natura wyrabia twardy charakter, zmusza do ciężkiej pracy i zachowania porządku. Górali cechuje umiłowanie prawdy i ciekawość; nieobcy jest im szacunek dla odmiennych poglądów i tolerancja. W góry zawsze ciągnął kwiat polskiej młodzieży – z Antonim Malczewskim i Juliuszem Słowackim na czele. Staszic w górach szukał bogactw naturalnych i minerałów, Andrzej – wrażeń estetycznych, spokoju i natchnienia. Wincenty Pol był poetą i geografem, a jego poemat *Pieśń o ziemi naszej* najpiękniejszą nauką geografii ojczystej.

W góry! W góry miły bracie!
Tam swoboda czeka na cię.
Na szałasy do pasterzy,
Gdzie ze źródła woda bieży,
Gdzie się serce sercem mierzy...

Pol był także twórcą metrologii serdecznej. W górach serce sercem mierzymy. Człowieka można zmierzyć tylko sercem; jak wszędzie, tak i w stosunkach międzyludzkich jest to wzorzec pomiaru. *Si vis amari – ama* (jeśli chcesz być kochany, kochaj). Za przyczyną Zbigniewa Pawłowskiego Andrzej pokochał również Kotlinę Kłodzką; było to miejsce ich wspólnych wędrówek.

Decydujący wpływ na jego życie mieli matka, żona i Zbyszek – profesor Zbigniew Pawłowski, przyjaciel, mistrz i kolega. Andrzej darzył go ojcowskim szacunkiem; chociaż byli w znakomitej komitywie, stale o Zbyszku mówił: mój profesor. Pierwszym autorytetem Andrzeja była jednak matka. Ze swą rodzicielką przez całe długie jej życie – żyła 102 lata, zmarła w 2004 roku – miał kontakt nadzwyczaj serdeczny. Pępowina duchowa nigdy nie została przecięta: każde dobre drzewo wydaje dobre owoce. Pawłowski – erudyta i światowiec – prowadził długie rozmowy ze starszą od siebie o 28 lat matką Andrzeja. Była osobą niezwykłą – doświadczoną przez życie; bogatą mądrością ludzi prostych doskonale uzupełniała szeroką wiedzę Pawłowskiego. Może były to zwierzenia z przeżytych ciężkich czasów? Andrzej był troskliwym synem, mężem i ojcem. Miał piękną, mądrą, dobrze wykształconą i skromną żonę; była jego Muzą, Aspazją i Egerią. *Vivat, crescat, floreat* – niech żyje, niech wzrasta, niech kwitnie. Miał z nią dwoje dzieci – Syna i Córkę. Syn jest nauczycielem akademickim, a córka zajmuje ważną pozycję w nauce francuskiej. Żona Mirosława ukończyła studia mikrobiologiczne na Uniwersytecie Łódzkim w 1978 roku. Po studiach pracowała najpierw w Katedrze Towaroznawstwa, a później Marketingu Akademii Ekonomicznej w Katowicach. Tu się doktoryzowała z towaroznawstwa. Całe swe życie oddała rodzinie: Andrzejowi, synowi, córce i matce Andrzeja. Ich ślub odbył się 29 czerwca 1969 roku. Andrzej zmarł 21 maja 2019 roku. Do jubileuszu złotych godów zabrakło im 39 dni, 13 + 13 + 13, czyli 6 tygodni bez trzech dni. Andrzej pamiętał o żonie i ze swych licznych podróży przywoził jej zawsze jakiś prezent – słoiczek utartej róży albo inny drobiazg. Była znacznie młodsza od niego i czasem żartobliwie mówił, że kiedyś będzie go woziła na wózku inwalidzkim; szlachetna prostolinijnością i cicha wielkością. Szczęśliwe chwile upływały im przy wspólnej wieczornej herbacie. Zawołanie „chwilo trwaj!” jest przywoływaniem nieskończoności szczęśliwej. *Si vis amari – ama!* (jeśli chcesz być kochanym – kochaj!).

Podstawą etyki jest estetyka – piękno fizyczne jest źródłem piękna duchowego.

Środowisko ekonometryków i statystyków polskich na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych było grupą solidarną i spójną pod względem zarówno naukowym, jak i towarzyskim. Było w tym gronie kilka osobistości – wybitnych postaci, nieprzeciętnych indywidualności, ludzi renesansu, z wrodzonym talentem, o szerokich horyzontach i wielkim umyśle; realna plejada gwiazd na ekonometrycznym niebie. Andrzej Barczak był człowiekiem trzymającym się starej zasady: *ne cede malis* – nie folguj złu, walcz o prawdę i słuszną sprawę. Uczony szuka prawdy, a nie blasku i sławy. *Amicus plato, sed magis amica veritas* – Platon jest przyjacielem, lecz większą przyjaciółką jest prawda. Ta zasada Arystotelesa była również regułą Andrzeja. Cechował się prawdomównością, rzetelnością w badaniach i pokorą. Nikt nie jest prorokiem we własnym kraju, a jednak zdarzają się wyjątki. Profesor Andrzej Barczak był zakochany w swej małej ojczyźnie – polskim zagłębiu węglowym i metalowym. Był tam powszechnie szanowany, a jego opinie służyły dobru regionu.

Dobre obyczaje wyniesione z domu propagował w środowisku naukowym. Był wielką indywidualnością całej śląskiej społeczności i wśród polskich ekonometryków. Inicjował i organizował sympozja i konferencje poświęcone regionowi śląskiemu. Zabierał publicznie głos we wszystkich ważnych sprawach Śląska; zasiadał w radach nadzorczych wiodących firm i doradzał w swoim czasie wojewodzie; był rotarianinem – członkiem ekskluzywnej instytucji międzynarodowej wspierającej różnorakie zbożne plany. Pewnie z tego powodu lokalny hierarcha żartobliwie nazywał go masonem. Andrzej z dumą nosił ongiś odznakę klubową w klapie, a koledzy wokół bardzo mu tego zaszczytu światowego zazdrościli. Swojską odmianą rotarian jest klub Polski Południowej – Kraków, Katowice, Wrocław − organizujący rotacyjnie swoiste konferencje.

Pisał cotygodniowe felietony w prasie lokalnej, w których poruszał ważne tematy: upadek uniwersytetów, prace magisterskie z taśmy, uczciwość i gospodarność. Problem szkolnictwa wyższego jest porównywalny z katastrofą globalnego ocieplenia i zmian klimatu. Felietony Andrzeja tematyką pozostające w centrum aktualnych spraw ukazywały się pod wspólnym supertytułem *Żabia perspektywa*. W jednym z nich pisał o hazardzie moralnym, o wystawianiu dobrej opinii na ryzyko.

Profesor Barczak piastował wiele ważnych funkcji akademickich. Długo pracował nad programami studiów ekonomicznych. Szczególnie dbał o matematykę i przedmioty pokrewne: statystykę, ekonometrię, badania operacyjne i logikę. Bez matematyki nie ma nauki; poziom nauki jest pochodną poziomu matematyki. Matematyka jest przecież nauką o świecie fizycznym, tyle że w abstrakcyjnej − uniwersalnej – formie. Izomorfizm jest istotą nauki i dydaktyki. Jednoczy modele w teorię. Jest więc matematyka nieprzypadkowo nazywana królową nauk. Czyżbyśmy zapomnieli o tym? Kontynuował studia, zainicjowane w środowisku katowickim przez Pawłowskiego, nad makromodelami i planowaniem gospodarczym. W Katedrze Ekonometrii Wyższej Szkoły Ekonomicznej w Katowicach była podręczna biblioteka, na której półkach Pawłowski gromadził literaturę obowiązującą pracowników. Wśród pism i książek znalazły się także „Zastosowania Matematyki" oraz „Przegląd Statystyczny". To właśnie lektura *Zastosowań Matematyki* dała Andrzejowi bardzo dobrą znajomość prac Steinhausa.

Słynął z szerokiego wykształcenia ogólnego i francuskiej kultury kulinarnej: niewyczerpane źródło pomysłów − żywy polihistor. Lubił kofeinę i nikotynę. Był człowiekiem spełnionym. Należał do grupy pasjonatów zainteresowanych wszystkim; lubił szczególnie muzykę i turystykę górską. Bywał często na koncertach w Śląskiej Filharmonii zaliczanej do najlepszych polskich instytucji muzycznych. Arbiter elegancji – w całym tego słowa znaczeniu. Cenił rzeczy porządne – z najwyższej półki – jak każdy solidny mężczyzna. Lubił ładne przedmioty oraz markowe zegarki i samochody. Jako jedyny w środowisku ekonometrycznym na lepsze okazje wkładał smoking i lakierki; nosił włosy spięte gumką w długi ogonek, nigdy ich nie strzygł. W ostatnich latach wrócił do natury; swoją miłość do przyrody skupił na ogrodzie działkowym. Bujność uprawianych tam kwiatów przynosiła mu wielką radość.

Znał się na winach; często bywał we Włoszech i wysoko cenił wina toskańskie. Lubił rozmowy o wszystkich markowych trunkach; degustacja jest nauką, a rozmowa – sztuką. W przefermentowanym soku gronowym jest niewątpliwie coś niezwykłego. W młodości był dobrze zapowiadającym się florecistą. Kochał polskie góry i Alpy; doskonały przewodnik po zakopiańskiej nekropolii – cmentarzu na Pęksowym Brzyzku – maleńkie poletko usiane grobami znakomitości. Leżałby tu i Karol Szymanowski, gdyby nie krakowska Skałka. W czasie zakopiańskich konferencji Aleksandra Zeliasia odwiedzał w towarzystwie kawiarnię przy Krupówkach. Lokal ten słynął z wybornych lodów.

Kolekcjonował małe dzwonki: mosiężne, spiżowe i porcelanowe. Alpejskie krowy noszą dzwonki na szyjach, a po ich dźwięku identyfikuje się właściciela. Rośliny górskie o fioletowych kwiatach w kształcie klosza zwane są dzwonkami. Popularny bułgarski winiak pity z tych kwietnych kieliszków smakuje niezwykle w towarzystwie przyjaciół i kolegów. Luksus, którym lubił się otaczać, był działaniem kompensującym trudne życie podczas wojny i zaraz po wojnie. Pochodził z rodziny robotniczej. Ojciec zmarł w 1945 roku, gdy Andrzej liczył zaledwie lat sześć. By pomóc matce w utrzymaniu domu, już jako dziecko sprzedawał na targu papierosy. Palił, by zwrócić uwagę na jakość towaru. Dziecko zaciągało się dymem nikotynowym dla reklamy w czasie, gdy o marketingu nie było mowy. W szkole dawał lekcje matematyki słabszym kolegom. Celem nauki jest piękno i doskonałość − nic więcej. Optyka Andrzeja była swoista jak każdego myślącego człowieka – z jego miejsca widać lepiej, ostrzej. On w swych felietonach zatrzymywał obrazy, których przeciętny obserwator nie widzi. Karl Mannheim, twórca socjologii wiedzy, wprowadził pojęcie perspektywizmu do teorii poznania. Socjologia jest nauką uwarunkowaną środowiskiem, perspektywą rodzinną i szkolną uczonego; poglądy grupy, do której się należy, determinują rzeczywistość. Miejsce urodzenia i wychowanie to archetypy wykute w naszej świadomości; od tych artefaktów nie możemy się w żaden sposób uwolnić. Felietony Andrzeja Barczaka niewątpliwie nawiązują do teorii Mannheima. Perspektywiczne spojrzenie to dobra zasada badawcza.

Misją uniwersytetu jest doskonałość i perfekcja. Doskonałości nie ma w dziełach ludzkich – doskonałość jest niedościgłym celem.

Był doktorem honorowym Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, otrzymał liczne odznaczenia, wyróżnienia, medale i ordery, był członkiem wielu stowarzyszeń naukowych i nie tylko. Należy podkreślić, że nie był członkiem rządzącej w Peerelu partii. Myślą przewodnią drogi życiowej Andrzeja była teza, że celem nauki jest doskonałość. Nie prawda, lecz właśnie doskonałość. Jednakowoż nie ma doskonałości bez prawdy; to, co doskonałe, musi być z konieczności prawdziwe. Prawa nauki to abstrakty odnoszące się do idealnej natury – przyroda jest zawsze zdeformowana. Prawda Arystotelesa trwa tylko chwilę, prawda naukowa − wiecznie. W doskonałości jest prawda; bez prawdy nie może być doskonałości. Doskonałość jest w niedoskonałości. Poszczególne elementy przyrody są skażone niedoskonałością, ale całość szczyci się doskonałą harmonią i pięknem. Tak jest z liśćmi drzewa, tak jest z gatunkami zwierząt, tak jest z każdym człowiekiem. W niedoskonałości jest piękno i doskonałość. Gdyby wszystkie kamienie były idealnie kuliste, świat byłby drażniący i monotonny. W różnorodności jest spokój i piękno. A więc celem nauki jest perfekcja.

Zrobił wiele dobrego, zarówno jako rotarianin, jak i jako profesor, dla swej małej ojczyzny i uczelni. Działał bezinteresownie. Uważał, że umiar jest cnotą. Przy dzieleniu należy pamiętać o bliźnim, nie brać wszystkiego dla siebie. Andrzej żył i pozwalał żyć innym. *Si vis amari – ama*. Napisał wiele recenzji prac doktorskich, rozpraw habilitacyjnych i książek profesorskich. Wybitnie przyczynił się do rozwoju kadry naukowej.

Potrafił śmiać się z siebie. Na jakimś śląskim mitingu, a było to w 2017 roku, gdy „żarła" go już straszna choroba, prowadzący spotkanie dziennikarz zapowiedział jego wystąpienie słowami: *teraz zabierze głos znany katowicki tetryk, przepraszam ekonometryk, profesor Andrzej Barczak.*

Był zwolennikiem eutanazji – w krytycznych sytuacjach; jeśli nie możesz znieść cierpienia, winieneś mieć prawo wyboru. Mówił o luksusowych szwajcarskich ośrodkach, gdzie przy lampce wina, z widokiem na Alpy, można przenieść się do lepszego świata. Ten szwajcarski Charon za swą usługę bierze nie obola, lecz sześć tysięcy franków.

Zaproszony przez profesora Józefa Hozera na konferencję mikroekonometryczną do Świnoujścia wymówił się brakiem czasu. W dniach konferencji trafił jednakowoż do Świnoujścia. Spotkał go tam profesor Hozer. Wpadłem, by odwiedzić żonę w sanatorium, powiedział. Wpadł jak śliwka w kompot – skwitował jego usprawiedliwienie Hozer.

W młodości został przyjęty przez Tadeusza Kotarbińskiego na dłuższą rozmowę. Prezes Polskiej Akademii Nauk dał mu wskazówki, których później trzymał się przez całe życie. Nauka jest powołaniem podobnie jak kapłaństwo, a szczerość, obiektywność i prawda są jedynymi obowiązującymi zasadami. Zwolennik brzytwy Ockhama – nie mnożył bytów bez potrzeby.

W 2018 roku odbyło się uroczyste odnowienie jego doktoratu. Był to drugi ważny jubileusz w jego życiu. Pierwszy obchodził w 2014 roku, gdy Katowice, Kraków i Wrocław świętowały 50-lecie głośnych konferencji Polski Południowej. On był jednym z czworga żyjących uczestników pierwszej z nich; trzeciego jubileuszu – złotych godów małżeńskich – już nie doczekał. Ciało zamiera – idea trwa. Pamięć dobrze przepędzonego życia jest wieczna.

Literatura

A. Smoluk (2016). *Siedmiu z ekonometrii*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.

12

Życie jest drogą – Zbigniew Pawłowski (1930-1951)

Antoni Smoluk

Lux in tenebris lucet

Zbigniew Pawłowski urodził się w listopadzie 1930 roku we Lwowie, a zmarł na początku sierpnia 1981 roku w Katowicach. Żył więc niecałe 51 lat. W tym roku, 2017, mija 36 lat od jego śmierci. Na życie człowieka nauki trzeba patrzeć z trzech stron. Po pierwsze z punktu widzenia teleologii. Celem nauki jest poznanie świata, doskonalenie człowieka i perfekcja tworzonych teorii. Po drugie, z metodologicznego punktu widzenia. Kartezjusz w swym dziele *Traktat o metodzie* wyróżnia trzy elementy gwarantujące sukces naukowy. Należą do nich dobra szkoła i wybitni nauczyciele, podróż zaokrąglająca zdobytą wiedzę po wiodących centrach intelektualnych świata i wreszcie praca, praca i praca. Bez myślenia, pisania i ciągłego przerabiania tekstu nie może powstać cenne dzieło. Trzeci punkt widzenia na pracę uczonego jest etyczny. Prawda i dobro są pojęciami współznaczącymi; jedno konotuje się z drugim. Nie można oddzielić dobra od prawdy ani prawdy od dobra; po rozwodzie prawda zamienia się w fałsz, a dobro w zło[1].

Ojciec Zbigniewa Pawłowskiego, Leopold, był doświadczonym bankowcem. Rodzina Pawłowskich, chociaż warszawska, zmieniała miejsce pobytu z powodu fachowej

[1] Esej powstał w kościuszkowskim 2017 roku. W roku 2019 minęło 38 lat od śmierci Zbigniewa Pawłowskiego; 38, to 19+19, czyli 19 lat XX-ego wieku i 19 lat XXI-ego wieku – piękna, jak zawsze, symetria. W tym roku, w maju, zmarł prof. Andrzej Barczak – pierwszy i najważniejszy uczeń Zbigniewa Pawłowskiego. Zbigniew Pawłowski jest mistrzem Andrzeja Barczaka; z tego powodu esej o nauczycielu poprzedza esej o jego najlepszym wychowanku. W czasie pisania kilka razy konsultowałem się z prof. Andrzejem Barczakiem; jest on w istocie współautorem.

wiedzy ojca; wysyłano go do różnych miast, aby nadzorować prace oddziałów banku centralnego. Z tego powodu Zbyszek urodził się we Lwowie, a naukę w szkole elementarnej rozpoczął w Poznaniu. Druga wojna światowa rzuciła całą rodzinę aż do Algierii; tutaj młody Pawłowski uczęszczał do gimnazjum francuskiego. Poznał dobrze język Corneille'a i przy okazji włoski. Wrócili w 1945 roku do Warszawy; przydzielono im mieszkanie na Mokotowie przy ulicy Narbutta. W Warszawie zdał maturę i rozpoczął studia w Szkole Głównej Planowania i Statystyki zlokalizowanej w pobliżu miejsca zamieszkania. Studiował statystykę, specjalizował się w statystyce matematycznej. Studia ukończył w 1954 roku. Napisał pracę magisterską u profesora Wiesława Sadowskiego; badał w niej popyt na oleje roślinne. Pracę podjął w Katedrze Statystyki kierowanej przez Wiesława Sadowskiego, późniejszego wieloletniego prezesa Głównego Urzędu Statystycznego. Odbył staż naukowy u profesora Hermana Wolda w Upsali. Wold, wybitny statystyk, był członkiem Szwedzkiej Akademii Nauk i komitetu przyznającego Nagrodę Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych. Zbyszek wrócił do Warszawy z gotową pracą doktorską o testach sekwencyjnych i ich zastosowaniach w badaniu jakości. Twórcą takiej metody badania jakości wyrobów jest Wold. Przy okazji przypomnę piękne twierdzenie Wolda tyczące się operatorów liniowych w przestrzeni Hilberta. Jeżeli operator liniowy jest automorfizmem, to jego orbity są albo translacyjne, albo rotacyjne. Orbita translacyjna to ciąg nieskończony bez początku i końca, a orbita rotacyjna to ciąg skończony – analogon koła zębatego. Ten podział orbit operatora dał podstawę teorii prognozy procesów stochastycznych. Translacje to niepewność i prognozy, a rotacje to nawroty i determinizm. Doktoryzował się w 1957 roku; jego praca była poświęcona testom sekwencyjnym Wolda stosowanym w badaniu jakości. Promotorem był profesor Sadowski. Udał się następnie do Cambridge, gdzie u profesora Richarda Stone'a zapoznał się z mikroekonometrią. Stone w 1984 roku dostał Nagrodę Nobla za pokazanie, jaki wpływ na dochód narodowy mają budżety rodzinne. Pawłowski tam zrozumiał, że mikroekonometria implikuje makroekonometrię. W Cambridge w głównym zarysie powstała praca habilitacyjna o popycie konsumpcyjnym. Habilitował się w warszawskiej Szkole Głównej Handlowej w 1962 roku. Jego rozprawę habilitacyjną recenzował Oskar Lange. Po habilitacji, jako docent, zwyczajem amerykańskim, opuszcza rodzimą uczelnię i obejmuje, po profesorze Ziomku, kierownictwo Katedry Statystyki w Wyższej Szkole Ekonomicznej w Katowicach. Z jego inicjatywy powołano na tej uczelni Katedrę Ekonometrii, której następnie został kierownikiem. Przez jedną kadencję był prorektorem do spraw nauki; lojalny wobec władzy komunistycznej, z konieczności członek PZPR. Uważał, że rewolucja to w pierwszym rzędzie przemiana duchowa, a nie rujnowanie organizmu społecznego. Wierzył, że polityka partii może się zmienić pod wpływem mądrych jej członków. W Szwecji widział więcej socjalizmu niż w ludowej Polsce. Rezydował w pokoju gościnnym, na drugim piętrze budynku, w którym urzędował. Pracownicy jego katedry mieli obowiązek studiowania bieżącej literatury. W podręcznej bibliotece dostępne były pisma: „Zastosowania Matematyki", „Przegląd Statystyczny" i inne. Pawłowski wyrabiał dobry obyczaj naukowy śledzenia literatury fachowej. Pracowników często delegował do Warszawy, gdzie w czytelni PAN-owskiej mogli studiować bogatą literaturę obcą.

Z jego inicjatywy powstała instytucja Konferencji Polski Południowej. Są to coroczne – trwające od 1965 roku do dziś – konferencje statystyków, ekonometryków i matematyków z uczelni ekonomicznych z Katowic, Krakowa i Wrocławia. Pierwszą konferencję zorganizowały Katowice, drugą Kraków, trzecią Wrocław; kolejne organizowane są cyklicznie. Po śmierci Pawłowskiego do nazwy konferencji Polski Południowej dodano podtytuł: Seminarium imienia Profesora Zbigniewa Pawłowskiego.

W 1967 roku Rada Państwa nadała mu tytuł profesora nadzwyczajnego, a po pięciu latach w 1972 roku – tytuł profesora zwyczajnego. Jego kariera naukowa przebiegała więc zgodnie z akademickim dobrym standardem – co pięć lat awans o jeden stopień: doktor, docent, profesor nadzwyczajny, profesor zwyczajny. Zasady tej starał się przestrzegać także w stosunku do młodszych kolegów, którzy próbowali skrócić ten bieg po stopniach. Był człowiekiem bardzo łagodnym, kulturalnym, ale i wymagającym. Jego język był piękny i literacki, nie używał słów pospolitych. Dostał dobrą kindersztubę w tradycyjnej rodzinie inteligenckiej. Opowiadał myśliwski dowcip o zajączku zatykającym uszy po niecelnym strzale – szczęśliwym dla zwierzyny; niezadowolony strzelec klął siarczyście. Jego matka była troskliwą opiekunką syna; kochał ją bardzo. Dom rodzinny Pawłowskich słynął z doskonałej kuchni.

Wspólnie z Oskarem Langem przeszczepił na grunt polski ekonometrię. Nauka ta pod jego wpływem weszła na trwałe do uczelni ekonomicznych i na wydziały ekonomiczne uniwersytetów. Promował młodych zdolnych, a jednocześnie kulturalnych adeptów ekonometrii i statystyki. Ledwie tolerował w nauce ludzi bez obycia i kultury. Ulubione pytania, które stawiał na konferencjach referentom, tyczyły się testowania hipotez statystycznych i własności estymatorów. Organizował, cieszące się wielkim powodzeniem, konferencje w Jeleniowie; ich tematyka dotyczyła prognoz, symulacji i modelowania oraz sterowania. Zapraszał na nie wybitnych specjalistów, którzy mieli przekazać swą wiedzę młodszym kolegom. Konferencje te odbywały się w rokokowym pałacu, którego dziedziniec zdobi rzeźba wspaniałego białego rumaka. Pałac, który w wyniku zaniedbań był w kompletnej ruinie, odbudowano, zachowując nieliczne ornamenty przecinkowe – rzadkość w naszej architekturze. Przy pałacu jest park – miejsce spacerów i dyskusji w czasie przerw konferencyjnych. Uczestnikiem tych konferencji był, młodziutki wówczas – może jeszcze student, obecny profesor zwyczajny Józef Hozer. Pawłowski lubił ludzi podobnych nieco do siebie. Był pragmatykiem.

Konferencje Polski Południowej miały zjednoczyć trzy ośrodki naukowe i stworzyć drugie po Warszawie centrum naukowe. Odniósł tutaj sukces; zespół statystyków ekonometryków i matematyków z uczelni z Katowic, Krakowa i Wrocławia po kilkunastu latach stał się najsilniejszą grupą w swej specjalności w Polsce. Lubił barok; darzył specjalnym uczuciem Kotlinę Kłodzką. Spędzał tutaj każdą wolną chwilę na wędrówkach samotnych lub w towarzystwie kolegi z katedry. Jego domem były koleje; żartowano, że zna na pamięć, liczący 700 stron, rozkład jazdy. Nie było to dalekie od prawdy, był bowiem konsultantem PKP przy układaniu rozkładu. Godziny odjazdów i przyjazdów pociągów mają wielki wpływ na życie społeczności mieszkającej wzdłuż linii kolejowej. Dobry rozkład oszczędza czas ludzi dojeżdżających do pracy; jest krwioobiegiem łączącym poszczególne regiony. Pawłowski miał bilet sieciowy ważny na każdy pociąg przez cały rok. W pociągu czasu nie marnował; pisał, redagował, recenzował, korygował. Mieszkał w Warszawie, pracował w Katowicach, ale zdarzało się, że do Wrocławia przyjeżdżał *via* Gdańsk i Szczecin. Lubił klasyczną muzykę, barokowych włoskich kompozytorów, Mozarta, Beethovena i całą plejadę niemieckich i francuskich muzyków; szczególnie uwielbiał włoskie *Belcanto*. Zdarzało się, że przez telefon serwował kolegom słynne arie. Znał muzykę, literaturę i sztukę. Nostalgiczna tęsknota za parową koleją, „pluszowymi" hotelami i restauracjami. Potrafił bez zająknięcia, pewnie wyniósł to z gimnazjum francuskiego, wymienić wszystkich marszałków Napoleona. Oprócz francuskiego i włoskiego znał dobrze język angielski. Korzystał także z literatury w innych językach. Nigdy nie afiszował się wiedzą ani koneksjami w świecie naukowym. Dobrze grał w brydża i organizował wieczorem sesje brydżowe – podczas swoich konferencji i Konferencji Polski Południowej. Był perfekcjonistą i tego wymagał od swoich współpracowników. Interesował się wygładzaniem danych statystycznych; szczególnie cieszyła go metoda prosta dająca trend o minimalnej średniokwadratowej krzywiźnie. Taką linię modeluje witka łozy przepleciona pomiędzy gwoździami będącymi odpowiednikami danych statystycznych. Interesowała go naturalna i adekwatna definicja układu cybernetycznego, obejmująca również modele ekonometryczne. Chciał wspomagać sterowanie procesami gospodarczymi. Obrady rozpoczynały się o godzinie 9.00 po śniadaniu, a wieczorem o 20.00 po kolacji był brydż. Mówił zawsze: dziewiąta zero zero, dwudziesta zero zero.

Mężczyzna słusznego wzrostu, 182 centymetry, budowy atletycznej, o twarzy szlachetnej i prostym nosie – zawsze elegancki – nosił początkowo modny płaszcz i odpowiedni kapelusz; później, już pod koniec życia, zmienił ten strój na beret i kurtkę. Kurtka była dwustronna, strona oficjalna miała błyszczący kolor zielonkawy, taki jak na piórach kaczorów, a strona turystyczna przypominała ubiór wojskowy. Spacerował po miejscu swoich konferencji z rękami założonymi na plecach i doglądał, czy wszystko jest zgodne z harmonogramem; wyglądał na gospodarza lustrującego swój majątek. Nosił złoty sygnet. Ten sygnet wyróżniał go w całym towarzystwie naukowym. Z czasem kilku jego kolegów zaczęło go naśladować i sprawiło sobie sygnety lub pierścienie z kamieniami. Pierścień jest symbolem wierności i zobowiązania. Tak więc snobizm ma również dobre strony. Obecny rok 2017 jest ogłoszony rokiem Kościuszki z powodu 200. rocznicy śmierci tego polskiego patrioty. W Krakowie usypano mu kopiec. Po ścieżkach tej symbolicznej mogiły Kościuszki na początku wiosny 1981 roku spacerowałem po raz ostatni ze Zbigniewem Pawłowskim. Ze szczytu kopca oglądaliśmy wiosenną panoramę okolicy, a nasze spotkanie zakończyło się herbatą w pobliskich kazamatach. Rozmowa nie kleiła się; obaj byliśmy zatroskani ówczesną sytuacją w Polsce: strajki, bójki, rozruchy uliczne. Kościuszko był człowiekiem sukcesu. Ukończył dobre studia wojskowe, w Ameryce jako wybitny specjalista od fortyfikacji awansował na generała. Życie prywatne miał nieudane. Podobnie jest z Pawłowskim. Jako uczony jest człowiekiem sukcesu. Jednak życie osobiste miał podobnie jak Kościuszko nieudane. Jego rodzice mieszkali w Warszawie, on rezydował w katowickiej samotni, a żona z córką mieszkały w Lublinie. Kościuszko starał się powstrzymać Polskę przed zejściem do grobu niewoli, a Pawłowski robił wszystko, by nauka polska mogła dorównać światowej. Umarł w swej katowickiej samotni w pierwszą niedzielę sierpnia 1981 roku po powrocie z Polanicy. Przyczyną śmierci był wylew krwi do mózgu. Spoczął w grobie swej matki na Cmentarzu Powązkowskim w Warszawie. Po śmierci w jego *dossier* znaleziono dokumenty świadczące o tym, że zamierzał ubiegać się o etat pracownika badawczego w ONZ. ONZ oprócz przyzwoitych warunków finansowych daje nieograniczone możliwości dostępu do wszelkiego rodzaju danych empirycznych. Warto o tym pamiętać. Pawłowski pozostawił znany podręcznik z ekonometrii używany do dziś.

Lubił słodycze, alkoholem nie gardził – kieliszek koniaku wystarczał mu na cały wieczór. Oprócz baroku i rokoka cenił także secesję. Jeśli tylko była okazja, zawsze wybierał hotele o jakichś akcentach secesyjnych. Jego ulubionym miejscem pobytu we Wrocławiu był Hotel Monopol, znany ongiś z wybornej kuchni i secesyjnych wnętrz. Pawłowski – przystojny, silnego charakteru mężczyzna był lubiany przez panie. On sam miał swoje preferencje w materii żeńskiej. Widział w kobiecie, podobnie jak Goethe, ducha ciągnącego mężczyzn w górę ku niebu. *Das Ewig-Weibliche zieht uns hinan.* Istotnie panie temperują mężczyzn i podciągają ich w stronę nieba. Darzył szczególnym szacunkiem subtelną i piękną docent Barbarę Ciepielewską. W katedrze ekonometrii w Katowicach zatrudnił trzy piękne, inteligentne i kulturalne dziewczyny, które nazywano aniołkami Pawłowskiego. Jeleniów – miejsce jego konferencji zachwalał także pod względem wypoczynkowym. Miejsce to przyciąga specyficznym magnetyzmem. Pawłowski przypisywał mu wielkie znaczenie: para małżeńska po nocy spędzonej w pałacu Jeleniowskim mogła być pewna pożądanego potomka. Sztuki współczesnej sprowadzającej się głównie do szoku unikał. Zdarzyło się, że wrocławscy gospodarze zabrali go na dramat Witkacego do Teatru Kalambur. Pawłowski przemęczył się do przerwy i wyszedł po angielsku do Monopolu; gospodarze męczyli się dalej ze zborsuczoną naturą autora dzieła.

Pod względem naukowym interesowały go w początkowym okresie prognozy, później zajął się modelowaniem ekonometrycznym, a w ostatnim okresie pod wpływem kolegów z instytutu wiedeńskiego IIASA – sterowaniem. IIASA to skrót nazwy International Institute for Applied Systems Analysis mieszczącego się na zamku Laxenburg pod Wiedniem. Prowadzono tu badania nad energią jądrową, wodą i demografią. Pawłowski pracował w sekcji demograficznej. W teorii prognozy wyróżnił punkty zwrotne; punkty zwrotne to dziś powszechnie znane giełdowe korekty. Jeśli kurs akcji rośnie, to inercja sprawia, że ich cena giełdowa przewyższa ich wartość rzeczywistą. Następuje korekta, czyli pojawia się trend spadkowy. Spadek też doprowadza do zaniżenia wartości, więc pojawia się korekta w górę. Taki proces albo się stabilizuje na cenie równowagi, albo destabilizuje kurs giełdowy. Wiedeń odwiedzał często i tam opublikował ostatnie swoje prace. Prognozy zawsze odgrywały ważną rolę, a szczególnie były pomocne w gospodarce planowej; modelowanie spełniało dwie role: poznawczą – był to bowiem rodzaj eksperymentu, i weryfikacyjną. Poprzez modelowanie sprawdzano jakość modelu. Sterowanie to ważna czynność w gospodarce planowej. Każdy układ cybernetyczny jest w jakiś sposób związany ze sterowaniem. Pawłowski poświęcił kilka swoich prac sterowaniu. Prace te rozdawał kolegom z krótką dedykacją: docentowi dr. hab. XY Z. Pawłowski i data. Był lakoniczny w wypowiedziach. Jeśli przesyłał list lub kartkę, to zwykle była to informacja na trzy linijki łącznie z pozdrowieniami. Nie pomijał należnych stopni i tytułów. Prace doktorskie i habilitacyjne oceniał na stopień. Podstawą oceny był rezultat, a nie osoba. Nie lubił familiarnej zażyłości. Kolegów, nawet tych, z którymi był na „ty", trzymał na dystans. Wszelkie kumoterstwo było mu obce.

Niestety dożyliśmy czasów, gdy dominuje wiedza gazetowa, także w nauce. O stopniach i tytułach decydują koneksje – odkrycia to rzadkie zdarzenia. Nauka jest jednak motorem postępu pomimo tej gorzkiej prawdy. *Lux mundi*.

Literatura

A. Smoluk (2016). *Siedmiu z ekonometrii*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.

13

Filadelfijski Litwin Marian Budrewicz (1944-1995)

Antoni Smoluk

Vita mortuorum in memoria vivorum est posita

Doktor nauk ekonomicznych Marian Budrewicz urodził się 3 maja 1944 roku w Odelsku, w okolicy Grodna, w rodzinie chłopskiej. Jego rodzinę, za czasów bolszewickich w 1952 roku, wywieziono do Kazachstanu; zaliczono ich bowiem do wrogich ustrojowi *pomieszczyków*. W 1956 roku pozwolono im wrócić do Polski; zamieszkali w Sokółce. W Sokółce Budrewicz ukończył szkołę podstawową i w 1962 roku – liceum. Bezpośrednio po maturze rozpoczął studia w Wyższej Szkole Ekonomicznej we Wrocławiu na Wydziale Gospodarki Narodowej; kontynuował je na Uniwersytecie Leningradzkim, który ukończył w 1968 r.; zaraz po studiach podjął pracę w Katedrze Matematyki Wyższej Szkoły Ekonomicznej we Wrocławiu, na stanowisku asystenta.

Napisał rozprawę doktorską *Matematyczne modele optymalizacji bieżącego planu asortymentowego w wielkich organizacjach gospodarczych*, pod kierunkiem docenta Władysława Bukietyńskiego. Obrona odbyła się w 1977 roku na Wydziale Zarządzania i Informatyki. W 1969 r. przeniósł się do Jeleniej Góry. Pracował w powołanym właśnie Wydziale Zamiejscowym Gospodarki Regionalnej i Turystyki. Był adiunktem od 1977 r., a od 1987 – starszym wykładowcą. Prowadził zajęcia dydaktyczne z matematyki i ekonometrii.

W 1991 roku przeszedł na rentę inwalidzką. Zmarł w Jeleniej Górze 26 stycznia 1995 r. Pochowano Go na cmentarzu w Jeleniej Górze. Nad grobem przemawiała prof. Danuta Strahl – Dziekan wydziału zamiejscowego w Jeleniej Górze.

Krótki okres pracy w Katedrze Matematyki, rok akademicki 1968/1969, był pod wpływem doktora Eugeniusza Szczepankiewicza; dr Szczepankiewicz był w tym czasie faktycznym kierownikiem Katedry Matematyki, albowiem prof. Rudolf Hohenberg chorował. Szczepankiewicz cel matematyki utożsamiał z transformacją formuł. Istotą matematyki jest zagadnienie równoważności słów w półgrupie. Budrewicz poszukiwał nowych klas funkcji korelacyjnych. Metodą badawczą jest tu algorytmiczne przekształcanie wzorów – sprawdzanie tożsamości; obliczano wielowymiarowe całki. Doktor Budrewicz, aczkolwiek po studiach ekonomicznych, był dobrze zaznajomiony z matematyką. Ukończył wszak prestiżową uczelnię radziecką; specjalizował się w cybernetyce.

Nazwisko Budrewicz jest w poemacie narodowym Mickiewicza (księga druga):

(…) *Terajewicza znałem, co idąc na dziki,*
Nie brał nigdy innego oręża prócz piki!
Budrewicza, co chodził z niedźwiedziem w zapasy.
Takich mężów widziały niegdyś nasze lasy!

Miszka – maskotka moskiewskiej olimpiady z 1980 r. Fot. M. Kosielińska

Niedźwiedź jest symbolem imperium rosyjskiego. Walka z niedźwiedziem może oznaczać przeciwstawienie się rosyjskiej ingerencji w nasze narodowe sprawy. Naturalnie *marucha* barankiem nie jest. Nawet łagodna olimpijska maskotka ma plastikowe pazury.

W 1979 roku, późnym latem, w domu wypoczynkowym w Zachełmiu było spotkanie akademickie przed rozpoczęciem nowego roku dydaktycznego. Dyskutowano, spacerowano, ucztowano. Ogórek jest pospolitą zakąską. Wieczorem, w salonie willi Różyckiego, Marian Budrewicz obnosił kryształową tacę z plasterkami kwaszonych ogórków i częstował nimi kolegów ze słowami *как в лучших домах Филадельфии*. Oczarował towarzystwo, a kwaśne warzywo stało się ekskluzywną potrawą. Wszak nadużycie nie zaprzecza użyciu. Frazę tę z *12 krzeseł* Ilfy i Pietrowa wypowiadał z nienagannym petersburskim akcentem. Surrealizm absolutnie realny. Obecny tam profesor Zdzisław Hellwig przypominał, że mózg pracuje pod wpływem cebionu. Szare komórki, wbrew powszechnej opinii, zużywają znacznie więcej energii niż mięśnie. Poczęstunek doktora Mariana pobudzał nasze mózgi, byśmy mogli dalej prowadzić dyskurs o zależności stochastycznej, modelach ekonometrycznych i prawach nauki.

Był uosobieniem litewskiego spokoju i dobra. Żył krótko. Jego droga z Odelska do Jeleniej Góry była długa i nawet ciernista; prowadziła przez Kazachstan, Sokółkę, Wrocław i Leningrad. Miał w sobie radość życia, która udzielała się otoczeniu.

Deine Zauber binden wieder,
Was die Mode streng geteilt.

14

Dalsze uwagi o książce *Genialni* Mariusza Urbanka

Antoni Smoluk

Książka Urbanka jest pochwałą lwowskiej atmosfery, jest dopełnieniem licznych publikacji Jerzego Janickiego poświęconych mieszkańcom tego grodu. Stanisław Nicieja zafascynowany ludźmi Lwowa, którzy zamieszkują już tylko Cmentarz Łyczakowski, pokochał to miasto pierwszą młodzieńczą miłością. On to właśnie, przeglądając encyklopedie i leksykony, zauważył, że 1/3 Polaków liczących się w naszej kulturze to mieszkańcy Lwowa. W tym jego spostrzeżeniu widać przejaw reguły 2/3 sformułowanej przez profesora Janusza Łykę, mówiącej o zasadniczej większości. Liczba 2/3 jest o tyle ważna w nauce i w języku potocznym, że zasługuje na odrębną nazwę; oznacza się ją zwykle grecką literą lambda – λ. Reguła 2/3 mówi, że populacja, która rządzi się demokratyczną zasadą większości głosów, ma wspólną preferencję zawsze wtedy, gdy każdą decyzję podejmuje większością przekraczającą 2/3. Zwykle 1/3 tworzy elitę, a podstawowa większość obejmuje 2/3 populacji. Profesor Nicieja, nie znając tej zasady, pięknie pokazał ją na przykładzie lwowskiej elity: intelektualnej, kulturalnej, gospodarczej, sportowej i wojskowej. Urbanek lubi Lwów, a jego książka sławi mieszkańców i matematyków tego miasta. Jestem również oczarowany Lwowem – jak Nicieja i wielu innych, chociaż urodziłem się poza Lwowem – na styku Podola i Wołynia. Mieszkańcy Lwowa cechują się pogodą ducha, humorem, gościnnością i dobrocią, ale także bohaterstwem, umiłowaniem wolności, nieprzeciętną inteligencją. W moim domu przechowywano w skrzyni, jak relikwię, książkę Heleny Zakrzewskiej *Dzieci Lwowa.* Była to moja pierwsza lektura, która wywarła wielki wpływ na mój stosunek do tego miasta i jego mieszkańców. W Kretowcach koło Zbaraża, w miejscu, gdzie się urodziłem, Lwów uchodził za metropolię, a jego mieszkańców uważano za światowców z wielkomiejskim sznytem. Obawiano się pojawiających się od czasu do czasu w okolicy Zbaraża łyczaków i lwowskich baciarów. Traktowano ich jak oszustów i drobnych złodziei. Osobiście odczułem niezwykłość mieszkańców Lwowa na trasie ze Zbaraża do Żar koło Żagania. Był grudzień 1945 roku i wywożono nas na ziemie po wiekach odzyskane. Nasz pociąg był nieszczęśliwy z tego powodu, że tym transportem jechali chłopi z Kretowiec. Wiadomo – mieszkańcy wsi po żniwach musieli mieć nadmiar żywności. Co kilkadziesiąt kilometrów pociąg stawał w polu i obsługa mówiła, że nie możemy dalej jechać, bo osie się grzeją. Kilkanaście dobrych razy musiano te osie chłodzić bimbrem, słoniną, mąką, kaszą, kurami i gęśmi. Zdarzyło się, gdyśmy stali z powodu nagrzanych osi, że torem obok nas przejechał inny transport wygnańców. Drzwi wagonów były pootwierane, stały w nich choinki, a ludzie śpiewali – być może kolędowali. *Kto to? A, to lwowiaki*. Odpowiedź ta była pełna podziwu i zazdrości. Ich pociąg pędził na zimnych osiach, a nasz stojący miał osie gorące, grożące zapaleniem. Mojżesz prowadził Izraelitów z Egiptu do Kanaanu 40 lat, mieszkańcy Kretowiec jechali do ziemi obiecanej przez ojca narodów Józefa tylko trzy tygodnie i trzy dni. Takie było moje pierwsze spotkanie z mieszkańcami grodu lwa.

Lwów jest czwartą stolicą świetlanej Rzeczpospolitej, po Krakowie, Warszawie i Wilnie. Tu był Zygmunt Stary i królowa Bona, tu była wojna kokosza, tu w katedrze nieszczęsny król Jan Kazimierz oddał Polskę w porękę Marii – matce naszego Zbawiciela.

Książka Urbanka kończy się obfitym skorowidzem nazwisk; wśród nich jest kilkadziesiąt osób wymienionych na ponad dziesięciu stronach książki. Oprócz matematyków i członków ich rodzin, ponad dziesięć razy wspomina się Adolfa Hitlera i Józefa Stalina. To w jakiś sposób charakteryzuje okres międzywojenny i wojenny we Lwowie. *À propos* powiązań rodzinnych i towarzyskich pamięta się, że Leon Chwistek był wielkim przyjacielem i Banacha, i Steinhausa; ożenionym z siostrą Steinhausa Olgą, której wspaniały portret jego pędzla można oglądać we Wrocławskim Muzeum Narodowym. Chwistek był logikiem, filozofem i przede wszystkim malarzem. Portret żony Olgi jest jednym z najlepszych polskich obrazów okresu międzywojennego. W dziele tym widać propagowany przez Chwistka strefizm kolorów; nade wszystko zachwyca ono urodą kobiecą i pochwałą mody lat dwudziestych ubiegłego wieku. Chwistek był także przyjacielem innego geniusza tamtych czasów – Stanisława Ignacego Witkiewicza. Witkiewicz prowadził ranking przyjaciół, a zagniewany z jakiegoś powodu umieścił Chwistka na końcu listy. Zły na kogo ze swego otoczenia, by go pognębić, mawiał: *umieszczam Cię po Chwistku.* Banach dla swego przyjaciela Chwistka podzielił wydział przyrodniczo-filozoficzny Uniwersytetu Lwowskiego, by utworzyć dla kolegi drugą na uniwersytecie Katedrę Logiki. Ponad dziesięć razy wspomina się nazwiska Hermana Auerbacha, Stefana Banacha, naturalnie Kazimierza Bartla, Marka Kaca, Bronisława Knastera, Antoniego Łomnickiego, Edwarda Marczewskiego, Stanisława Mazura, Johna von Neumanna, Władysława Orlicza, Stanisława Ruziewicza, Juliusza Schaudera, Wacława Sierpińskiego, Marcelego Starka, oczywiście Hugona Steinhausa, Włodzimierza Stożka, Andrzeja Turewicza i Stanisława Ulama. Mowa tu naturalnie tylko o matematykach. Do tego grona powinno się także zaliczać botanika Stanisława Kulczyńskiego; był on w swoim czasie rektorem Uniwersytetu Lwowskiego i uprawiał naukę na modłę matematyczną. Podstawą są zawsze aksjomaty, regułą wnioskowania dedukcja, a szuka się ogólnych twierdzeń i niezmienników. Był on przyjacielem Steinhausa i Banacha i pewnie pod ich wpływem ewolucje widział jako przejaw ciągłości. Lwowska szkoła matematyczna to genialny Banach i jego otoczka. Stefanowi Banachowi proponowano na doskonałych warunkach – sam mógł ustalić swą pensję – pracę w Stanach Zjednoczonych. Naturalnie propozycję odrzucił. *A my się ze Lwowa nie ruszym za próg, Ta mamciu, ta skaż mnie Bóg.* Druga polska szkoła matematyczna – warszawska – to Wacław Sierpiński i spółka.

Znany matematyk wrocławski, współpracownik Steinhausa, Jan Mycielski – wywodzący się z rodziny hrabiowskiej – obecnie żyjący w Stanach Zjednoczonych, specjalista od metamatematyki, logiki i teorii gier, zatroskany o rozwój polskiej matematyki po zniszczeniach drugiej wojny światowej zwykle mawiał z poczuciem dumy rodowej: polską matematykę głównie stworzyli arystokraci, jak on, i Żydzi – Polacy narodowości żydowskiej. Najwybitniejszy polski matematyk – Stefan Banach – brylant lwowskiej szkoły matematycznej – nie był ani żydem, ani arystokratą – pochodził z nizin społecznych. W książce Urbanka dużo miejsca poświęca się genealogii tego matematyka. Mówi się, że mógł być Żydem, Niemcem, lub zwyczajnie niewiadomo kim. Dzieciństwo Banacha przypomina wybitnego francuskiego matematyka wieku oświecenia Jeana d'Alamberta. D'Alambert był podrzutkiem, Banach także był podrzutkiem do obcej rodziny. Banach podobnie jak d'Alambert żył nauką. Dla niego matematyka była nauką o analogiach pomiędzy analogiami. Analogie to homomorfizmy struktur matematycznych. Wydaje się niewątpliwe, że przodkowie Banacha mieli geny niemieckie; świadczy o tym fizjonomia germańska. Jednakowoż bez względu na to, czy wywodził się on od Greków, czy od Żydów, był wybitnym matematykiem polskim – gwiazdą pierwszej wielkości na lwowskim i światowym firmamencie matematycznym. Książka Urbanka jest kroniką powiązań rodzinnych i towarzyskich matematyków, którzy w dwudziestoleciu międzywojennym przewinęli się przez Lwów. Pisze on o lwowskim środowisku naukowym i atmosferze panującej w tym niezwykłym mieście. Jednym z twórców szkoły matematycznej we Lwowie jest niewątpliwie Hugo Steinhaus. On wiedział, co jest niezbędnym warunkiem do uprawiania nauki. Troszczył się o byt materialny swoich podopiecznych; głównym forum lwowskich matematyków nie była księga szkocka, lecz założone przez Steinhausa i Banacha pismo *Argumenta Mathematica* – dowody matematyczne. Pismo to rozsławiło Lwów i polską matematykę. Steinhaus doskonale zdawał sobie sprawę z faktu, że matematyka jest nauką o świecie fizycznym – abstraktem fizyki, biologii, ekonomii, socjologii itd. Matematyka wieńczy piramidę naukową. Był przeciwny badaniom prowadzonym dla samych badań, których wyników nie można spożytkować dla dobra kraju. Uważał, że polscy uczeni nie powinni zajmować się pająkami na Gibraltarze, lecz tym, co dotyczy nas bezpośrednio. Oczywiście badanie pająków gibraltarskich jest nauką, jeśli tylko te stworzenia tam żyją. Przypuszczalnie Steinhaus przez pająki gibraltarskie rozumiał problemy metafizyczne odnoszące się do kulturotwórczej filozofii; nie były to dla niego byty fizyczne. Matematyka jest przecież nauką o świecie fizycznym, bo nie ma nauki o niczym, o niebycie. Pytanie, czy

$$\omega = 1 + 1000^{1000!},$$

słownie: liczba *jeden plus tysiąc do potęgi tysiąc silnia*, jest liczbą pierwszą, nie jest problemem naukowym. Jednak matematyka, i to nie tylko matematyka polska, roztrząsa powszechnie tego typu problemy. Odpowiedzi na powyższe pytanie nie ma i przypuszczalnie nigdy nie będzie, bo ta liczba nie istnieje w naturze. Jest to napis, czyli nazwa, bez sensu. Silnia jest iloczynem kolejnych liczb naturalnych. Z definicji zero silnia jest jedynką, a (n+1) silnia jest równa n silnia razy (n plus 1); tak więc sześć silnia równa się 720, bo 5 silnia to 120, a 120 razy 6 jest właśnie 720. Taka definicja nazywa się definicją indukcyjną; pojęcie definiowane dla liczby większej zależy od tego pojęcia zdefiniowanego już dla liczb mniejszych. Liczba ω jest dalekim wyrazem ciągu $a_n = 1 + 10^{n!}$, $n \in N$. Hipoteza – zapewne trudna, że w ciągu tym jest nieskończenie wiele liczb pierwszych, ma małą wartość poznawczą, a jej rozwiązanie należy do kategorii ciekawostek matematycznych. Zadanie dla zdolniejszych uczniów szkół średnich związanych z tym ciągiem jest z klasy łamigłówek informatycznych modnych dzisiaj. Należy bowiem udowodnić, że w ciągu (a_n) jest nieskończenie wiele liczb złożonych. Dodatkowa informacja, że są to liczby podzielne przez 7, jest wskazówką ułatwiającą rozwiązanie. Ciąg (a_n) jest wielkością nieskończenie wielką, której odpowiadają wielkości nieskończenie małe będące podstawą analizy matematycznej. Pająki w wypowiedzi Steinhausa pojawiły się przypuszczalnie pod wpływem ojca Stanisława Kulczyńskiego, który był arachnologiem – znawcą pająków.

Lwowska szkoła matematyczna to w skrócie trzy nazwiska: Antoni Łomnicki, Hugo Steinhaus i przede wszystkim Stefan Banach. Druga szkoła matematyczna w latach międzywojennych na ziemiach polskich była w Warszawie; tworzyli ją Wacław Sierpiński, Kazimierz Kuratowski i Zygmunt Janiszewski. Zasadniczym produktem szkoły lwowskiej jest pojęcie przestrzeni Banacha, a szkoły warszawskiej – przestrzeń polska. Przestrzenie polskie wywodzą się od Janiszewskiego. Przestrzeń jest światem, w którym żyją matematycy. W przestrzeni polskiej można mierzyć odległości pomiędzy elementami, nie ma w niej dziur – każdy ciąg stabilizujący się ma granicę – oraz istnieje ośrodek, który można uważać za dane empiryczne budujące przestrzeń. Przestrzenie bez ośrodka są mało użytecznymi abstraktami. Przestrzenie Banacha z ośrodkiem są oczywiście przestrzeniami polskimi, ale również istnieją przestrzenie Banacha, w których tego ośrodka brakuje, i wtedy nie są to już przestrzenie polskie. Obie te szkoły naukowe – lwowską i warszawską – łączył dość silny podkład topologii mnogościowej będącej naszą narodową specjalnością matematyczną okresu międzywojennego.

Po wojnie trójka matematyków lwowskich – Władysław Orlicz, Andrzej Alexiewicz i Jerzy Albrycht – stworzyła w Poznaniu silny ośrodek matematyczny. Po 1945 roku w Polsce nie powstała jednakowoż żadna licząca się szkoła naukowa w matematyce. Polska matematyka skończyła się w 1939 roku. Wpływ na taki stan miały niewątpliwie liczne reformy programowe trwające nieprzerwanie od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku do dziś. W matematyce polscy reformiści, na czele z Zofią Krygowską, wzorowali się na Francuzach. Banach nie wzorował się na nikim, więc cały świat naśladował jego właśnie. Odór reform Krygowskiej ciągle dusi polską matematykę. Chyba przyszedł czas, by wpuścić do szkolnictwa nieco świeżego powietrza, a wtedy polska matematyka może z peryferii naukowych wysunie się na czoło. Urbanek wyróżnia dwie cezury – 1939 i 1945 – grubą czcionką. W 1939 roku skończyła się głośna sława matematyki polskiej, a po 1945 roku dreptano w miejscu, tworząc matematyczny manieryzm i barok. Książka Urbanka nie ma podziału na rozdziały i paragrafy. Jest to dzieło niezwykłe; nie jest to powieść, nie jest to biografia, nie jest to historia, nie jest też to leksykon. Najbardziej przypomina notatnik – wypisy z dzieł popularnych traktujących o ludziach nauki związanych ze Lwowem. Główne ciało obejmuje 244 strony druku, a pozostałe strony to dodatki: rozmowa z Romanem Dudą, kalendarium, literatura, skorowidz. Autor sugeruje, że jest to historia Banacha, Mazura, Steinhausa i Ulama. Persony te tworzą osnowę dzieła, a jego wątkiem jest splot matematyki i kawiarnianych plotek. Powstała rzecz lekkostrawna, ciekawa – popularna lektura do poduszki, rodzaj smacznego bigosu informacyjnego. Autor zamieszcza tylko cztery fotografie tych właśnie matematyków. Ponadto dzieło ozdobione jest kilkunastoma starymi zdjęciami lwowskiej architektury i ulic. Jest to w zasadzie zebrany materiał do napisania dzieła literackiego lub książki popularyzującej naukę. Prócz wymienionych dat przełomowych w książce są tylko śródtytuły, ograniczające się do nazwiska osoby, o której autor w danym miejscu mówi. Te śródtytuły można traktować jako swego rodzaju dialog. Przypominają one napisy na taśmie filmowej. Autor jednakowoż unika dialogów, by nie być posądzonym o zmyślenia. Jego książka nie jest jednak oparta na studiach archiwalnych. Korzysta on głównie z pamiętnikarskiej i wspomnieniowej literatury, której spis uczciwie przytacza dla dobra czytelnika. Ponadto zamieszcza obszerne kalendarium ułatwiające lekturę i wzmacniające pamięć. Literatura jest podzielona na dwa działy: wydawnictwa książkowe i artykuły gazetowe. Język książki – potoczysty i nierażący – ma przyjemny aromat reportażu. W książce są liczne nawroty do hodowli insektów w instytucie Weigla w czasie okupacji niemieckiej. Był to sposób na przetrwanie, a nawet uratowanie życia. Opisy są jednak tak bardzo naturalistyczne, że czytelnik będzie się zżymał. Może jest to jego turpistyczny zabieg promocyjny? W tym miejscu nasuwa się pytanie, jak daleko człowiek ma prawo się spodlić w obawie przed śmiercią? Maksymilian Kolbe wybrał śmierć nie tylko dla ratowania bliźniego; gardził śmiercią, bo śmierć była wybawieniem przed upodleniem. Autor jakby chciał uzupełnić Parandowskiego *Alchemię słów*, lecz nie dorównuje mu językiem. *C'est le ton qui fait la chanson.* To słowo buduje nastrój i tworzy bohaterów. Ton książki Urbanka jest tabloidowy, daleki od dzieła literackiego. Powstała alchemia matematyczna bez matematyki.

Genialnych zamyka dodatek będący rozmową autora z profesorem Romanem Dudą. Czytając ten dialog, odnosi się wrażenie, że to autor książki jest profesorem matematyki, a Duda dziennikarzem. Wypowiedzi Urbanka są długie i fachowe, a odpowiedzi profesora popularne i zwyczajne. Czytelnik naturalnie z książki tej nie pozna osiągnięć matematyki polskiej.

Głośny stał się swego czasu zapisany w księdze szkockiej problem Mazura. Czego dotyczy pytanie Mazura, czytelnik z lektury się nie dowie. Problem jest trudny, ale jego rozwiązanie nie spowodowało przewrotu w nauce. Każda przestrzeń Banacha jest przestrzenią liniową, a w każdej przestrzeni liniowej istnieje baza algebraiczna. Przestrzeń liniowa to rodzina wektorów z działaniem dodawania oraz operacją ich wydłużania lub skracania. Mazur pyta, czy w każdej przestrzeni Banacha istnieje baza topologiczna.

Baza pozwala dla każdego wektora znaleźć jego rozkład spektralny względem wybranego układu jednostek – bazy. Problem bazy topologicznej łączy algebraiczne działania z ciągłością. Wiele lat później młody matematyk szwedzki Per Enflo podał przykład przestrzeni Banacha bez bazy topologicznej. Otrzymał za ten wynik niezwykłą nagrodę ufundowaną przez Mazura – żywą gęś. Baza algebraiczna generuje skończone koszyki dóbr – w interpretacji ekonomicznej, a baza topologiczna – nieskończone. W przestrzeniach wymiaru skończonego obie bazy są równoważne. Można więc powiedzieć, że w świecie wymiaru skończonego nie ma różnicy, czy myślimy o bazie topologicznej, czy o algebraicznej. Operacje, czyli operatory, to funkcje, które wektorom przypisują wektory, a funkcjonały to funkcje, które wektorom przypisują liczby; w ekonomii operatory są procesami technologicznymi – transformują jedne koszyki dóbr w inne, natomiast funkcjonały są całkami, cenami lub miarami. Baza topologiczna nie jest jednak bazą algebraiczną – istotna jest tu ciągłość. Autor czyni z Mazura poputczika sowietów i władzy ludowej. Nie należy jednak zapominać o czasach rządów pierwszych sowietów we Lwowie. Poputczikiem był Kulczyński, a także Banach, Steinhaus zaś oportunistą. Współczesnym wielbicielom prezydenta Rosji warto przypomnieć, że słowo poputczik i nazwisko prezydenta mają wspólną etymologię. Problematy, które zawiera księga szkocka, dotyczą głównie analizy funkcjonalnej i mają znacznie niższą rangę ideotwórczą niż słynne problemy Dawida Hilberta. Niepotrzebnie więc podnosi się tę pożyteczną książeczkę do rangi biblii naukowej.

Miasto to ludzie. Nie ma już pięknego, głośnego i rozśpiewanego Lwowa z lat dwudziestych i trzydziestych ubiegłego wieku. Jego mieszkańców wymordowano, wywieziono na Sybir lub wypędzono na zachód, na tak zwane Ziemie Odzyskane; jest to sowiecka realizacja starych projektów rosyjskich związania z sobą Polski na zawsze. Pozostała owdowiała architektura niszczona bezlitosnym czasem i bezmyślną eksploatacją. Lwów to jego mieszkańcy. *Nec dominus domo, sed domus domino honestanda*. Nie pan domem, lecz dom panem się szczyci. Nie ma już dawnego Lwowa, pozostały smutne budynki, ulice, puste place – nie ma dawnych mieszkańców i nie ma atmosfery radosnej, twórczej, która panowała w tym mieście od lat do 1939 roku. Nie ma Kawiarni Szkockiej, nie ma Hotelu Georgea ze wspaniałą kuchnią ulubioną przez Steinhausa, nie ma Tyliczkowej i jej jadłodajni, nie ma Szczepcia i Tońcia i wesołej lwowskiej fali. Nie ma dawnej luksusowej akademickiej ulicy. W 1939 roku, w czasie ostatnich beztroskich wakacji, można było widzieć na niej elegancką damę, której niespodziewanie pękła gumka od niewymownych. Prawdziwa lwowianka, jakby nigdy nic, wyjmuje jedną nogę, wyjmuje drugą nogę, bierze z gracją spadły *dessous*, strzepuje, chowa do torebki i kontynuuje spacer. Jest nawet zadowolona, że jedną czynność ma już z głowy. Lwów śmiał się i żartował; tragedia linoskoczka Muchy stała się kalamburową przypowieścią o wysokim domu i tęgiej jego właścicielce Tyliczkowej. Pokaz przejścia na dużej wysokości po linie przez ulicę rozpoczęty na domu Tyliczkowej zakończył się śmiercią śmiałka. *Linoskoczek Mucha wlazł na Tyliczkową i wyzionął ducha.* Oboje, Mucha i Tyliczkowa, pochodzenia prawdopodobnie czeskiego, są potwierdzeniem mieszanki narodów zamieszkującej Lwów. Plebejusz lwowski zaś w przetartych na siedzeniu sztanach świecił *lepetryką*. Bałak charakteryzował się wspaniałym słowotwórstwem, a pięknym tego przykładem jest *lepetryka* łącząca naturalnie elektrykę z częścią ciała zwaną żartobliwie sempiterną. Tęsknotę zaś Rusinów za ładem i harmonią panującą przed pierwszą wojną światową wyrażano w popularnym w przysłowiu *szto ta wojna narobyła*. Taki był właśnie dawny kochany Lwów.

Nowi właściciele Lwowa włożyli dużo wysiłku, by zacierać ślady polskości. Potężnej sile czołgów sowieckich oparły się jednak tytaniczne kolumny Cmentarza Orląt. Duch przecież jest silniejszy od materii, aczkolwiek kolumny świadczą o polskiej technologii budowlanej i uosabiają niezłomność lwowiaków.

Eksplozja matematyki lwowskiej nastąpiła po pierwszej wojnie światowej – po wielkiej wojnie. Był to bunt młodości przeciw starej klasycznej matematyce Eulera, Lagrange'a, Kauchego i Gaussa. Nauka – jak sztuka – szuka ciągle nowości i neguje dotychczasowe paradygmaty. Lwowiacy szukali podobieństw wśród podobieństw, analogii wśród analogii, homomorfizmów pomiędzy przestrzeniami homomorfizmów. Starsi zachęcali, młodsi fedrowali. W Warszawie powstała książka o produktach nieskończonych; jej autor – wybitny przedstawiciel szkoły warszawskiej – przypuszczalnie nie wiedział, że produkty nieskończone są tym samym co sumy nieskończone. Jeśli jednak wiedział, to jego dzieło jest rodzajem plagiatu. Teoria produktów nieskończonych jest nauką izomorficzną z teorią sumowania szeregów. Struktury te są izomorficzne, czyli identyczne z matematycznego punktu widzenia. We Lwowie coś takiego nie mogłoby się zdarzyć. Furda, srebro i złoto, wystarczy być młodym, zdolnym i matematykiem z kawiarni szkockiej; odniesiesz sukces, będzie liczący się wynik naukowy. Najważniejsze wyniki w matematyce osiągają ludzie młodzi – Galois żył tylko dwadzieścia jeden lat, a zostawił niebiańskie piękno w teorii grup – nauce o symetrii. Jego teoria mówi, że istnieją wielomiany, których pierwiastki, czyli miejsca zerowe, nie są pierwiastnikami. Czym jest pierwiastnik? Jest to liczba, jaką otrzymamy z liczb całkowitych przez kolejne wypełnianie następujących operacji: dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i wyciągania pierwiastków dowolnego stopnia. Galois pokazał, że istnieje wielomian, którego współczynniki są liczbami całkowitymi, a miejsca zerowe nie są pierwiastnikami. Nie ma więc wzoru (jego teoria mówi troszkę więcej) na obliczanie pierwiastków wielomianów z użyciem operacji algebraicznych i pierwiastkowania. Matematycy lwowscy stworzyli własną przestrzeń – przestrzeń Banacha, w której doskonale im się żyło; zasada odwzorowań zawężających Banacha jest podstawowym twierdzeniem gwarantującym zbieżność procesów iteracyjnych przy wszelkiego rodzaju obliczeniach. Może warto tu wyraźnie przypomnieć, że matematyczna równość nie jest identycznością, lecz równoważnością. Pół nie jest równe dwóm ćwiartkom, lecz tylko jest im równoważne. Idea ta jest związana z matematycznym problemem słów. Czego on dotyczy? Łatwo zrozumieć smak potrawy matematycznej na prostym przykładzie. Opisana niżej teoria wyda się zapewne pustym abstraktem, lecz jest – w różnorakich wersjach – istotą matematyki. Jest to abstrakcyjny opis wybranych symetrii kwadratu. Mówimy tu o półgrupie słów w alfabecie złożonym z dwóch liter: *a* i *b*. Teorię tę definiują trzy aksjomaty; pierwszy z nich mówi, że słowo *aa* jest równoważne słowu pustemu, drugi – że słowo *bb* też jest równoważne słowu pustemu, a trzeci – że słowa *ab* i *ba* są równoważne. Słowo puste oznacza transformację tożsamościową – identyczność, która jest jednością przy mnożeniu – superpozycji – przekształceń. W półgrupie słów Jan Morzymas widział istotę symetrii. Podstawowy problem współczesnej matematyki ma charakter literacki i sprowadza się do równoważności słów w półgrupie. Kiedy dwa słowa są równoważne w określonym ściśle sensie?

Steinhaus jest jednym z założycieli lwowskiej szkoły matematycznej; sam studiował matematykę w Getyndze. Uniwersytet Getyngeński jest uczelnią księcia matematyków – Gaussa. Można więc uważać, że także Gauss jest nauczycielem lwowskich matematyków z okresu między wielkimi wojnami. Steinhaus, stojąc przed pomnikiem Gaussa w Getyndze, mógł matematycznie spożytkować słynną wypowiedź Corregia: *Także ja jestem matematykiem.* Gauss przypuszczalnie nie znał teorii Galois, również Steinhaus mówił, że też jej nie zna. Z nieznanych powodów Steinhaus nisko cenił teorie grup, chociaż uważał – być może tylko dla popisu, który niewątpliwie lubił, że prawdziwy matematyk musi znać teorię Galoisa, i tym samym siebie uważał za fizyka. Czym jest teoria Galois? Istotą teorii Galois jest opisane wyżej pojęcie pierwiastnika. Pierwiastniki tworzą zbiór zamknięty ze względu na działania arytmetyczne oraz na pierwiastkowanie. Tworzą one obiekt zwany w matematyce ciałem, podobnie jak liczby wymierne, liczby rzeczywiste i liczby zespolone. *Repetitio est mater studio rum.* Teoria Galois mówi, że istnieje wielomian, którego współczynniki są pierwiastnikami, ale miejsca zerowe, czyli pierwiastki tego wielomianu, nie są już pierwiastnikami. Teoria ta nie ma większego znaczenia praktycznego, jednakowoż miała silny wpływ na teorię grup, która z kolei stanowi fundament fizyki atomowej i biologii molekularnej. Tu jednakowoż pragnę zaznaczyć, że przestrzeń Banacha jest jednocześnie grupą – łączy w jedno algebrę i geometrię. W przestrzeniach polskich nie ma struktury algebraicznej. Algebra jest nauką o działaniach, a istotą geometrii jest ciągłość. Najogólniejszą geometrią jest przestrzeń topologiczna – badanie spójności i ciągłości terenu. By nie zmuszać czytelnika do poszukiwań, przypomnę anegdotę tyczącą się Corregia. Malarz ten, stojąc przed obrazem Rafaela *Święta Cecylia,* miał zawołać: *Anche io sono pittore!* Także ja jestem malarzem! Corregio był więc dumny z tego, że był malarzem podobnie jak Rafael. Czuł się członkiem wspaniałej elity. Steinhaus miał odeprzeć zarzut o pysze i dumie matematyków słowami: *Może mają ku temu powody?* Znany jest slogan przypisywany Ulamowi mówiący, że z dwóch osób jednakowo przygotowanych do wykonania jakiejś czynności matematyk zawsze zrobi to lepiej. Ulam był rasowym matematykiem, inteligentnym nad miarę; ma on swój udział w budowie broni jądrowej. W obiegu krąży pojęcie ciągu Ulama; jest to ciąg będący probabilistycznym rozszerzeniem ciągu Fibonacciego. Ciąg Fibonacciego opisuje rozród królików, a ciąg Ulama jest próbą ścisłego opisu reakcji łańcuchowej.

Steinhaus jest autorem pięknie napisanej, trudnej książki popularnej *Kalejdoskop matematyczny*. Książka ta świadczy o jego niezwykłej kulturze naukowej. Matematyka jest wszędzie, ale nie każdy ją widzi: w podziale pól gospodarstw wiejskich, w locie muszki, w rozkroju kiełbasy krakowskiej, we wszelkiego rodzaju parkietach, także na ulicach, chodnikach i placach. Wrocławskie chodniki, ulice i place urągają matematyce i regułom estetyki. Widocznie władze naszego miasta uważają – zlikwidowano szkoły zawodowe – że kto nic nie potrafi robić, to jeszcze może brukować ulice, wrocławski Rynek i chodniki. Gdyby nie te chodniki i ulice, Wrocław istotnie mógłby stać się miastem pięknym – perłą Unii. Niedawno zrobiono nowe wejście na plac Solny od strony południowo-zachodniej. Projekt jest dobry, lecz wykonanie woła o pomstę do nieba. Szczególnie układ kamieni w murach oporowych bramujących schody jest amatorszczyzną w najgorszym tego słowa znaczeniu. W tym samym stylu – *opus horridum* – wykonano pomnik leśnika na Ślęży. Pomników i chodników nie robi się z cienkich wielkich płyt, bo one szybko pękają i rzecz nowa wygląda jak stara lub jeszcze gorzej. Pomniki symbolizują wieczność i należy je stawiać z grubych bloków granitu na solidnym fundamencie. Po wojnie mówiono, z ironicznym uśmiechem, że *u nas tiochnika bolszaja, no kultury niet.* Ten zwrot odnosi się jakoś do współczesnych wrocławskich brukarzy, którzy w granitowej płycie potrafią wyciąć symboliczne okienko – jak na ekranie komputera, ale nie wiedzą, że tego rodzaju wycinanki mają mało wspólnego z rzemiosłem układania chodników i sztuką parkietażu. *Vide* ulica Świdnicka koło hotelu Monopol, *vide* pomniki Chopina i Słowackiego. Piętą achillesową Wrocławia są jezdnie i chodniki, chodniki wyłożone kamieniem łupanym. Jak na stolicę kultury europejskiej zakrawa to na lekki skandal, bowiem dama w drogich pantofelkach po godzinnym spacerze po mieście wróci do hotelu boso z pokrwawionymi stopami. Kostka łupana jest dobra na turystyczne ścieżki w Karkonoszach, ale nie na chodniki w europejskim mieście. Steinhaus był wielkim miłośnikiem i znawcą języka polskiego, a jego aforyzm: *ziemia – kula u nogi,* poraża mnogością treści w trzech słowach.

Ulubioną tematyką polskich matematyków tamtego okresu była teoria mnogości – nauka o zbiorach, i topologia mnogościowa – rodzaj geometrii badającej ciągłość. Teoria mnogości – chociaż jest podstawą współczesnej matematyki – w jakiś sposób już się wyczerpała. Nikt na poważnie nie zajmuje się skalą alefów – ciągiem coraz większych nieskończoności. Alef zero to najmniejsza nieskończoność, alef jeden to następna nieskończoność i tak dalej. W naturze bytu zwanego nieskończonością przypuszczalnie nie ma. Jednak aksjomat o istnieniu nieskończoności jest podstawą matematyki i całej nauki współczesnej, matematyka bowiem jest szczytem piramidy naukowej, abstraktem ujmującym całą naukę. Użyteczność nieskończoności potwierdzają wspaniałe osiągnięcia nauki współczesnej: loty kosmiczne, łodzie podwodne, komputery *et cetera*. Mowa tu o nieskończoności aktualnej – bycie może nie tyle fizycznym, ile umysłowym. Namiastką tej nieskończoności jest inna nieskończoność oznaczająca praktycznie nieograniczoność. Jest to nieskończoność potencjalna – tylko możliwa. Wszystkie mnogości są skończone, lecz nie ma mnogości największej. Dziecko zapytane, czy mogą być różne nieskończoności, odpowiada bez wahania, że nieskończoność jest tylko jedna. Wydaje się, że zgodnie z sugestią czystego umysłu dziecięcego trzeba odrzucić całą skalę alefów i ograniczyć się tylko do dwóch koniecznych w nauce nieskończoności: dyskretnej – alef zero, i ciągłej – kontinum, alef jeden.

Banach mówił, że prawdziwy matematyk widzi analogię pomiędzy analogiami. Taką analogią jest słynne twierdzenie Banacha i Steinhausa o ciągu operatorów ograniczonym punktowo. Twierdzenie to jest wnioskiem twierdzeń szczegółowych: twierdzenia o ciągu sum harmonik, twierdzenia o ciągu wielomianów Lagrange'a i innych tego rodzaju wyników znanych wcześniej przed powstaniem analizy funkcjonalnej. W tym wypadku twierdzenie ogólne jest dość prostym – kawiarnianym – wnioskiem z twierdzeń szczegółowych; twierdzenia szczegółowe natomiast – wbrew nazwie – nie wynikają z twierdzenia ogólnego. W twierdzeniach szczegółowych należy pokazać to, co w twierdzeniu ogólnym przyjmuje się jako założenie. O tym właśnie trzeba pamiętać, oceniając osiągnięcia szkoły lwowskiej. Matematycy znają żartobliwą regułę Arnolda mówiącą, że jeśli jakiś wynik naukowy przypisany jest nazwisku, to zawsze jest to niewłaściwe imię. Jaskrawym tego przykładem w geografii jest ląd odkryty przez Krzysztofa Kolumba, nazwany jednakowoż Ameryką.

Przestrzenie Banacha są pojęciem ciągle żywym, natomiast przestrzenie polskie równie ważne jak przestrzenie Banacha są konikiem profesora Andrzeja Wieczorka, który większość swych prac rozpoczyna od zwrotu: *niech dana będzie przestrzeń polska.* Książka Urbanka jest użyteczna dla wszystkich miłośników Lwowa i swego rodzaju rozrywką dla matematyków. Książki pisze się dla pieniędzy, sławy lub z nudy. Banach napisał wiele podręczników bardzo średniej jakości – dla pieniędzy, których potrzebował na życie kawiarniane. Ten jego dorobek dydaktyczny zszedł na margines. Pozostała teoria operacji liniowych. Niezależnie od intencji autora *Genialnych* książkę należy ocenić wysoko i polecić ją miłośnikom Lwowa, matematykom i tym wszystkim, którzy dyskryminują nasz kraj, dzieląc ludzi na Polaków i Żydów. Polska jest jedna. Tytuł dzieła niewątpliwie ma charakter marketingowy i jest nieco na wyrost; jest pochwałą pokolenia, które odeszło już w przeszłość.

Post scriptum 2022

Recenzja książki Mariusza Urbanka powstała kilka lat wcześniej. Przed wojną w Polsce były dwie szkoły matematyczne – lwowska i warszawska. Głową szkoły warszawskiej był Wacław Sierpiński, a lwowskiej Hugon Steinhaus. Istotą matematyki jest izomorfizm. Izomorfizm to abstrakcja, a więc przyczyna tego, że matematyka jest traktowana powszechnie jako dziedzina trudna. Jednakowoż, matematyka jest wszędzie, a każdy jest matematykiem. Obiekty izomorficzne utożsamia się, stąd ciągi arytmetyczne i geometryczne. Z punktu widzenia matematyki, jest to jedno pojęcie pod dwiema różnymi nazwami. Praktyczne modele tej teorii mogą być różne. W banku, naturalnie, wolimy procent składany, a oprocentowanie zwykłe liniowe jest mniej interesujące. Sierpiński, chociaż zaliczany do wybitnych twórców matematyki, napisał obszerny traktat o produktach nieskończonych. Produkty nieskończone i sumy nieskończone to pojęcia izomorficzne. Mówiąc po prostu, Sierpiński przetłumaczył dzieło o sumowaniu szeregów na książkę o mnożeniu ciągów. Jeśli przydarzy się tak, że ktoś przetłumaczy książkę angielską na język polski i wyda pod swoim nazwiskiem, to oskarżany jest słusznie o plagiat. Przetłumaczenie dzieła z języka sum na język iloczynów uchodzi za pracę oryginalną. Steinhaus należał do elity intelektualnej Lwowa i odwiedzał elegancką i drogą restaurację George'a oraz równie ekskluzywną cukiernię Ludwika Zalewskiego. Banach lubił jadłodajnię Tylczkowej oraz kawiarnię Szkocką. W odróżnieniu od Steinhausa był swego rodzaju proletariuszem. Pochodził istotnie z tzw. nizin społecznych. Matematyk sowiecki Władimir Arnold, który później emigrował do Paryża, sformułował prawo głoszące, że każde odkrycie noszące czyjeś nazwisko, nazwane jest niewłaściwym imieniem. Jaskrawym przykładem tego jest Ameryka. Prawo to zwane jest zasadą Arnolda. Oczywiście, zasada Arnolda również dotyczy samego Arnolda, a także Banacha. Przestrzenie liniowe, zwane przestrzeniami Banacha, znane były na wiele lat przed Banachem. Banach, kierując się uwagą, z której był przypuszczalnie dumny, twierdził, że bada analogie pomiędzy analogiami. Konkretne przykłady przestrzeni liniowych unormowanych i zupełnych badał w przypadku ogólnym. Stąd właśnie wyrosła teoria operacji liniowych.

W nauce, matematyce i fizyce, wyróżnia się trzy typy pracy zbiorowej. Wypracowana przez fizyków kwantowych wspólna dyskusja, zwykle w górskim odosobnieniu, nad sensem proponowanych przez siebie pomysłów jest pierwszym rodzajem dobrej współpracy naukowej. W tych warunkach mogła powstać tzw. Kopenhaska interpretacja fizyki kwantowej i replika na nią – Kot Erwina Schrödingera. Drugi typ pracy zbiorowej stworzyli wybitni matematycy francuscy, znani pod wspólnym imieniem Nicolasa Bourbakiego. Bourbaki tworzył nową matematykę, albo nadawał nową formę starej matematyce. Pracowali również w ośrodkach rekreacyjnych, by w odosobnieniu dyskutować i wybrać najodpowiedniejszą formę dla klasycznych pojęć i twierdzeń. Na kolejne spotkanie, jeden z członków grupy, miał zlecenie, by opracować projekt kolejnego tomu matematyki. Dzieło to było podstawą do dyskusji i często zdarzało się, że odrzucano je, a zlecano komuś innemu opracowanie nowej wersji. Praca Bourbakiego to nowa era w historii matematyki. Wielotomowe dzieło jest miejscami niezwykle pięknym i prostym wykładem tej trudnej nauki, jaką jest matematyka. Warto podkreślić, że bourbakiści rachunku prawdopodobieństwa nie zaliczają do matematyki. Jest to bowiem fragment teorii miary, czyli funkcjonałów liniowych w przestrzeniach Banacha.

Trzecim typem zbiorowej pracy naukowej jest kawiarnia szkocka. Pracowano w oparach alkoholu, a postacią wiodącą był tylko Banach. W związku z tym, można pytać o jedno twierdzenie noszące dwa nazwiska – Banacha i Steinhausa. Twierdzenie to, podstawa analizy funkcjonalnej, uogólnia rezultat Henriego Lebesgue'a. Twierdzenie Lebesgue'a dotyczy zbieżności sum częściowych szeregów Fouriera. Uogólnienie zaproponowane przez Banacha i Steinhausa odnosi się do operatorów liniowych. Jeżeli ciąg operatorów liniowych w przestrzeni Banacha jest punktowo zbieżny, to jest zbieżny jednostajnie, czyli w normie. Zasadniczy wynik, wynik pierwotny otrzymał Lebesgue. Uogólnienie jest już działalnością wtórną, chociaż dotyczy analogii pomiędzy analogiami. Przy okazji warto zapytać o wkład Steinhausa w to twierdzenie. Dowód, niewątpliwie, podał sam Banach. Natomiast Steinhaus mógł zasugerować

Banachowi przeglądnięcie się w twierdzeniu Lebesgue'a. W książce szkockiej jest wspomniany wcześniej problem Mazura o bazach w przestrzeni Banacha. Rozwiązał go w 1972 roku młody wówczas matematyk Per Enflo. Dostał od Mazura, jako nagrodę, za rozwiązanie tego problemu żywą gęś. Z powodu surowych szwedzkich przepisów o wwozie zwierząt, gęś tę upieczono i zjedzono w Warszawie. Matematyka jest nauką o izomorfizmach. Problem Mazura można sformułować w języku izomorfizmów. Czy istnieją przestrzenie Banacha homeomorficzne, czyli izomorficzne w sensie geometrycznym, ale nie izomorficzne w sensie algebraicznym. Nie istnieje ciągły operator liniowy, utożsamiający obie te przestrzenie. Jeżeli takie dwie przestrzenie istnieją, to nie w każdej przestrzeni Banacha istnieje baza topologiczna. Z problemem Mazura jest związana własność aproksymacyjna przestrzeni liniowych unormowanych. Przestrzeń liniowa unormowana, ale niekoniecznie przestrzeń Banacha, ma własność aproksymacyjną, jeśli dla każdej liczby silni dodatniej r istnieje w tej przestrzeni podprzestrzeń wymiaru skończonego taka, że kula jednostkowa jest od niej oddalona mniej niż o r.

Fundamentem lwowskiej szkoły matematycznej jest nie Hugo Steinhaus lecz Wawrzyniec Żmurko. Jego prace drukowane po niemiecku i polsku, w swoim czasie, liczyły się jako ważne wyniki i podręczniki. Kilka razy otrzymał nagrodę w Paryżu i Londynie za wynaleziony przez siebie integrator oraz aparaty służące do kreślenia linii stożkowych – konografy. Był też pierwszym Polakiem, który piastował urząd kierownika Katedry Matematyki.

15

Epilog

Antoni Smoluk

BAŁAMUTY

Na Wyspach Bałamutach
Koty chodzą w butach;
Można tamże spotkać osła
Z mądrą głową pana posła,
A kura darmodajka
Ciągle znosi złote jajka.
Na wierzbach rosną gruszki,
Skoro tygrysy lubią i pietruszki.
Wieloryb choć stary,
Jest tej miary co skalary.
Tuczone są łososie
w naczelnika dźwięcznym nosie.
Naukowe wielkie szczury
Pędzą na szczyt złotej góry.
Słoń zaś w składzie porcelany
Jest tam wielce pożądany.
Bałamuty – z grubej rury
Spadły na szczyt szklanej góry.
Bałamuty złoty kraj,
Gdzie go szukać, gdzie jest raj?

Nonsensowna treść wiersza sugeruje limeryk, forma zaś quasi-limeryk lub antylimeryk. Jest to naturalnie przerobiona – *mutatis mutandis* – bajka Jana Brzechwy *Na wyspach Bergamutach*, właściwie to pastisz bajki Brzechwy. Pośredni cel Bałamutów to aktualizacja wiersza Brzechwy. Propozycje pierwowzoru chciano dopasować do fraz naszego języka. Mamy kota w butach, osły są naszym zwierzęciem nieomal domowym, kury niosą jajka złote; obiecujemy złote góry i gruszki na wierzbie. Nie ma na dębach jabłek ani gronostajowych czapek. Tygrysy lubią wszystko z powodu Kubusia

Puchatka. Wieloryby są największymi ssakami, a skalary zadomowiły się w akwariach. Mamy muchy w nosie, więc może być tam i łosoś. Stresujące są wyścigi szczurów; wierzymy w istnienie szklanych gór. Jest tu więc głównie żart, ironia i zawsze uśmiech. Bałamuty – swojski kraj.

Bajka wnet się spodobała z powodów czysto naukowych. W zbiorze pustym funkcja zdaniowa – predykat – poprzedzona kwantyfikatorem ogólnym jest zdaniem prawdziwym. Elementy zbioru pustego mają dowolne własności. Ze zdania fałszywego wynika wszystko: i prawda, i fałsz. Bałamuty są więc wirtualną rzeczywistością.