

Krzysztof Kontek¹

Artal Investments Sp. z o.o.²

FUNKCJA WZGLĘDNEJ UŻYTECZNOŚCI A STOSUNEK DO RYZYKA

Streszczenie: Niniejszy artykuł przedstawia wyjaśnienie wyników eksperymentów loteryjnych przy przyjęciu dwóch alternatywnych założeń: pierwszego, że ludzie rozpatrują zmiany majątku w sposób bezwzględny, oraz drugiego, że zmiany majątku są postrzegane w kontekście rozważanego problemu. Pierwsze założenie prowadzi do wyprowadzenia teorii perspektywy, drugie zaś do rozwiązania przypominającego funkcję użyteczności zaproponowaną przez Markowitza [1952]. Artykuł przedstawia argumenty za przyjęciem drugiego założenia i omawia stosunek do ryzyka wynikający z takiego modelu.

1. Wstęp

Historia funkcji użyteczności sięga początków XVIII w., kiedy to Bernoulli (1738) i Cramer (1728) zaproponowali ją dla rozwiązania paradoksu petersburskiego. Pierwszy z nich przyjął logarytmiczny, drugi zaś pierwiastkowy kształt funkcji użyteczności pieniędzy, co pozwoliło na uzyskanie skończonej wartości nieskończonego ciągu wypłat. Identyczną metodę wyceny loterii z wykorzystaniem funkcji użyteczności uzyskali von Neumann i Morgenstern (1944), wychodząc od rozważań dotyczących racjonalności wyborów. Wyprowadzona przez nich teoria oczekiwanej użyteczności stała się podstawową hipotezą współczesnej ekonomii. Kształtem funkcji użyteczności zajmowali się w późniejszym okresie m.in. Friedman i Savage (1948) oraz Markowitz (1952).

W latach 50. XX w. pojawiły się jednak wątpliwości, czy ludzie rzeczywiście dokonują racjonalnych wyborów w sensie NM. Przykładami takich odstępstw były m.in. paradoksy Allaisa (1953) i Ellsberga (1961). Wyniki tego typu eksperymentów behawioralnych doprowadziły do powstania nowych teorii określanych jako

¹ Autor dziękuje profesorowi Harry'emu Markowitzowi za cenne uwagi i korekty niniejszego tekstu, przekazane w prywatnej korespondencji i w czasie spotkania w sierpniu 2009 r. w San Diego, CA.

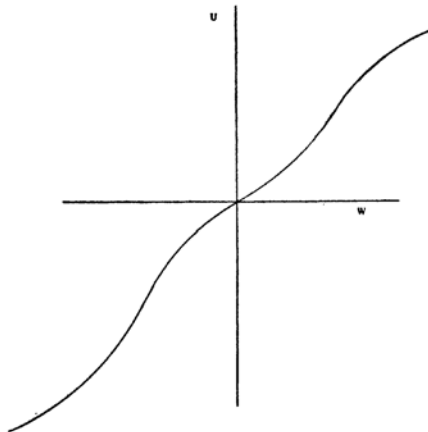
² Kontakt: ul. Chrościckiego 93/105, 02-414 Warsaw, Poland, e-mail: kontek@artal.com.pl, kkontek2000@yahoo.com.

non-expected utility theories, z których najślawniejsza stała się Teoria Perspektywy Kahnemana i Tversky'ego (1979) oraz jej kumulacyjna wersja (1992). Za ich powstanie Daniel Kahneman został uhonorowany Nagrodą Nobla w dziedzinie ekonomii w 2002 r.

Celem niniejszego artykułu jest pokazanie, że te same wyniki eksperymentów, które doprowadziły do wyprowadzenia Teorii Perspektywy, mogą prowadzić do zupełnie innego rozwiązania. Podstawową różnicą w obu podejściach jest sposób reprezentacji zmian majątku. O ile założy się, że zmiany te (czyli zyski i straty) są przedstawiane w sposób absolutny (czyli jako pewne kwoty pieniężne) o tyle analiza danych eksperymentalnych prowadzi do teorii perspektywy. Zakładając jednak, że zyski i straty są postrzegane w sposób względny (czyli jako części głównej wygranej), to rozwiązaniem jest krzywa względnej użyteczności, przypominająca swoim kształtem krzywą użyteczności zaproponowaną przez Harry'ego Markowitza w 1952 r.

2. Krzywa użyteczności Markowitza

Mimo dosyć powszechnego poglądu, że teoria perspektywy była pierwszą teorią tłumaczącą wyniki eksperymentów behawioralnych, należy zauważyć, że wiele przełomowych spostrzeżeń zostało przedstawionych przez Harry'ego Markowitza wiele lat przed jej powstaniem. W 1952 r. Markowitz opublikował dwa artykuły, z których pierwszy – *Portfolio Selection* – doprowadził go do teorii portfela i Nagrody Nobla w 1990 r., drugi zaś, mniej znany, to *The utility of wealth*, który przedstawiał jego hipotezę na temat krzywej użyteczności. Krzywa ta jest przedstawiona na rysunku 1.



Rys. 1. Krzywa użyteczności według hipotezy Markowitza z 1952 r.

Źródło: opracowanie własne.

Markowitz założył, że krzywa użyteczności powinna być rozpatrywana względem wartości majątku, co zostało później ujęte przez teorię perspektywy w postaci koncepcji zysków i strat. Markowitz zauważył także, że ludzie nie lubią gier symetrycznych (to znaczy takich, w których można wygrać albo przegrać taką samą kwotę pieniędzy), co doprowadziło go do wniosku, że lewa część krzywej powinna być bardziej stroma niż jej prawa część. Spostrzeżenie to, określane jako „generalna awersja do ryzyka”, stało się jednym z kluczowych postulatów teorii perspektywy.

Inne szczególnie podkreślane osiągnięcie teorii perspektywy, to znaczy pokazanie dlaczego ludzie kupują zarówno loterie, jak i ubezpieczenia, może być również wytłumaczone za pomocą funkcji użyteczności Markowitza. Wynika to z kształtu krzywej, która w pobliżu środka układu współrzędnych jest wklęsła dla strat (co tłumaczy zakup ubezpieczeń) oraz wypukła dla zysków (co tłumaczy zakup loterii). Dodatkowo funkcja Markowitza ma kształt podwójnego S z trzema punktami przegięcia, które wyznaczają cztery obszary stosunku do ryzyka (skłonność, awersja, skłonność, awersja). Do podobnych wniosków autorzy teorii perspektywy doszli dopiero w kumulacyjnej wersji tej teorii z 1992 r. Efekt ten został określony jako „poczwórny wzór stosunku do ryzyka” (*fourfold pattern of risk attitude*), przy czym wzór ten powstaje z kombinacji funkcji wartości i funkcji wag prawdopodobieństw, przez co nie jest on tak jednoznacznie widoczny jak w przypadku krzywej o kształcie podwójnego S.

Markowitz przyjął ponadto, że krzywa użyteczności jest ograniczona od dołu i od góry, co pozwoliło mu wyjaśnić paradoks petersburski, który nie jest wyjaśniony przez teorię perspektywy, ani w wersji z 1979, ani z 1992 r. Markowitz zajął się także dynamiką podejmowania decyzji, to znaczy wpływem kolejnych zdarzeń na wyniki następnych decyzji. Teoria Perspektywy jest pod tym względem teorią „statyczną”, to znaczy wyniki poprzednich wyborów nie mają wpływu na dalsze wybory.

Jak widać, Markowitz omówił w swoim artykule większość koncepcji, które zostały przedstawione w nieco innej postaci przez teorię perspektywy 27 i 40 lat później. Należy przy tym pokreślić, że teoria perspektywy nie odniosła się do wszystkich obserwacji Markowitza.

Mimo swoich zalet funkcja użyteczności, według hipotezy Markowicza, nie była w stanie wytłumaczyć wszystkich paradoksów behawioralnych wskazujących na naruszanie aksjomatów NM. Dlatego też została odrzucona przez Kahnemana i Tversky'ego. Jak się okazuje, wystarczy jedno dodatkowe założenie, aby funkcja użyteczności Markowitza mogła wytłumaczyć te paradoksy [Kontek 2009b]. Założenie to będzie przedstawione w dalszej części pracy.

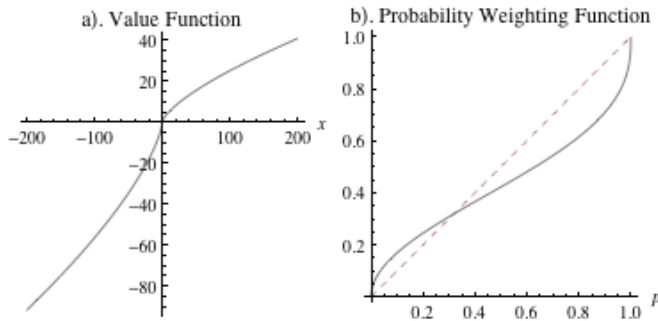
3. Bezwzględne postrzeganie zmian majątku

Przedstawmy sposób rozumowania Kahnemana i Tversky'ego, który doprowadził ich do powstania teorii perspektywy. W tym celu rozważmy proste, myślowe eksperymenty loteryjne podobne do tych, które były przez nich przeprowadzone w rzeczywistości.

Eksperymenty 1–3. Czy wolisz:

- 1) loterię 100 zł z $p = 0,5$ czy też pewną wypłatę 50 zł?,
- 2) loterię 200 zł z $p = 0,5$ czy też pewną wypłatę 100 zł?,
- 3) loterię 400 zł z $p = 0,5$ czy też pewną wypłatę 200 zł?

Analogiczne eksperymety mogą być powtórzone dla innych wartości wypłat w celu „przeskanowania” hipotetycznej krzywej użyteczności w szerokim zakresie kwot pieniężnych. Najczęstszą odpowiedzią na tego typu pytania jest wybór pewnej wypłaty, co prowadzi do wniosku, że ludzie charakteryzują się awersją do ryzyka w zakresie zysków. Dlatego też można założyć, że krzywa użyteczności jest wklęsła w tym zakresie. Podobne eksperymety dla strat prowadzą do stwierdzenia skłonności do ryzyka i wypukłej krzywej użyteczności. W rezultacie takiego podejścia otrzymuje się funkcję użyteczności (wartości) przedstawioną na rysunku 2.



Rys. 2. Funkcja wartości i funkcja wag prawdopodobieństw według teorii perspektywy

Źródło: opracowanie własne.

Rozważmy teraz inne eksperymety loteryjne.

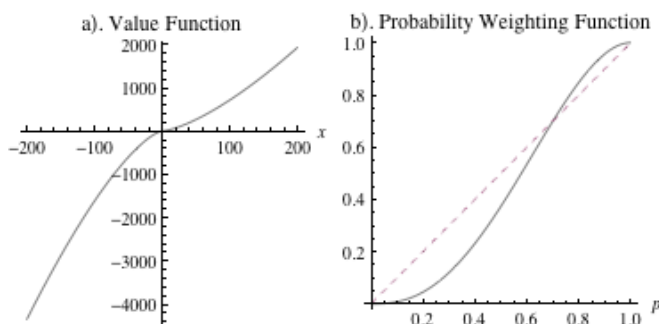
Eksperymenty 4–6. Czy wolisz:

- 4) loterię 500 zł z $p = 0,1$ czy też pewną wypłatę 50 zł?,
- 5) loterię 1 000 zł z $p = 0,1$ czy też pewną wypłatę 100 zł?,
- 6) loterię 2 000 zł z $p = 0,1$ czy też pewną wypłatę 200 zł?

W tych eksperymetach najczęstszą odpowiedzią jest wybór loterii, co oznaczałoby skłonność ludzi do ryzyka. Co interesujące, dzieje się tak dla tych samych kwot pewnych wypłat co w eksperymetach 1–3 (to znaczy dla 50 zł, 100 zł i 200 zł). Aby wyjaśnić to zjawisko można byłoby przyjąć, że ludzie mają awersję do ryzyka również w eksperymetach 4–6, jednak istnieje tu dodatkowy efekt związany z percepcją prawdopodobieństw. Efekt ten miałby polegać na nieliniowym postrzeganiu prawdopodobieństw i przeważaniu ich małych wartości. Efekt ten byłby przy tym na tyle silny, że dominowałby nad awersją do ryzyka zdeterminowaną przez krzywą użyteczności, a to by wyjaśniało ostateczny wybór loterii. Tego typu rozumowanie prowadzi do wykreślenia nieliniowej funkcji wag prawdopodobieństw,

jako drugiej funkcji niezbędnej do opisu eksperymentów. Krzywa ta jest przedstawiona na rysunku 3. Przedstawiony sposób rozumowania doprowadził do powstania teorii perspektywy i innych teorii zakładających istnienie nieliniowej funkcji wag prawdopodobieństw.

Przedstawione do tej pory wnioskowanie nie daje podstaw, aby odrzucić takie rozwiązanie. Załóżmy jednak, że podobne eksperymenty przeprowadzili inni naukowcy, którzy wyciągnęli wnioski w odwrotnej kolejności. Eksperymenty 4-6 mogą sugerować generalną skłonność do ryzyka w szerokim zakresie wypłat i wykupły kształt krzywej użyteczności dla zysków oraz wklęsły dla strat, co jest przedstawione na rysunku 2.



Rys. 3. Alternatywne wyjaśnienie eksperymentów 1-6

Źródło: opracowanie własne.

Z kolei awersja do ryzyka stwierdzona w eksperymentach 1-3 mogłaby być wytłumaczona za pomocą innej funkcji wag prawdopodobieństw, która by silnie niedoważała średnie prawdopodobieństwa (patrz rysunek 3). Tego typu wnioskowanie zakładałoby zatem również istnienie funkcji wag prawdopodobieństw obok funkcji użyteczności, ale funkcja ta miałaby odwrotny kształt niż ta przedstawiona na rysunku 2.

Oba otrzymane rozwiązania przedstawione na rysunku 2 i 3 miałyby identyczną zdolność opisywania wyników eksperymentów dając jednak zupełnie inne wytłumaczenie ludzkich zachowań. Rodzi się zatem uzasadnione pytanie czy w zakresie zysków ludzie mają generalnie awersję do ryzyka, a obszary skłonności do ryzyka powinny być opisane za pomocą funkcji wag prawdopodobieństw (jak podaje teoria perspektywy), czy może jednak ludzie mają generalnie skłonność do ryzyka, a obszary awersji do ryzyka powinny być opisane za pomocą innej funkcji wag prawdopodobieństw? Analogiczne pytania można postawić dla zakresu strat. Fakt, że zmiana kolejności wnioskowania wpływa na tak znacznie ostateczne wnioski, jest poważnym sygnałem, że przedstawione rozumowanie może być nieprawidłowe.

4. Względne postrzeganie zmian majątku

Przeprowadzone do tej pory rozumowania, prowadzące do koncepcji nieliniowej funkcji prawdopodobieństwa, zakładały bezwzględne traktowanie zmian majątku. Oznacza to, że zyski i straty były reprezentowane jako konkretne wypłaty pieniężne (50 zł, 100 zł i 200 zł). Właśnie w takiej formie są wyrażone zyski i straty w Teorii Perspektywy³. Jednakże ludzie postrzegają zmiany majątku w sposób względny⁴. Oznacza to, że zyski i straty są zazwyczaj rozważane w kontekście analizowanego problemu (*framing*). Wniosek ten nie jest nowy i był sformułowany przez samego Kahnemana i Tversky'ego w 1984 r., a więc 5 lat po powstaniu teorii perspektywy⁵. Mimo to bezwzględne traktowanie zmian majątku pozostało podstawowym założeniem kumulacyjnej teorii perspektywy z 1992 r.

Wyjaśnienie, że ludzie postrzegają zmiany majątku w sposób względny, bazuje na prawie Webera, które jest podstawowym prawem psychofizycznym. W pierwszej połowie XIX w. niemiecki badacz Ernst Weber przeprowadził eksperymenty mające na celu określenie minimalnej zauważalnej różnicy pomiędzy wagą przedmiotów i stwierdził, że różnica ta jest dwa razy większa w przypadku przedmiotu ważącego 2 kg niż w przypadku przedmiotu ważącego 1 kg. Doprowadziło go to do sformułowania prawa, że najmniejsza zauważalna różnica pomiędzy bodźcami jest w stałej proporcji do wielkości samego bodźca (Encyclopædia Britannica 2009):

$$\Delta S / S = k$$

gdzie ΔS jest najmniejszą zauważalną różnicą (*just noticeable difference*), S jest wartością bodźca, a k jest stałą. Prawo to działa z dobrą dokładnością w szerokim zakresie dla większości bodźców. Na przykład wartość k jest równa około 2% dla ciężarów, 4,8% dla głośności i 7,9% dla jasności. Wynika stąd, że określona zmiana ciężaru, na przykład o 0,2 kg, może być mocno odczuwalna, lekko odczuwalna lub w ogóle nieodczuwalna, w zależności od wartości samego bodźca. Oznacza to dalej, że stopień percepcji określonej zmiany bodźca nie może być zdefiniowany w sposób jednoznaczny, gdyż zależy on od kontekstu. Sposób działania prawa Webera dla wielkości finansowych może być pokazany na przykładzie:

Problem 1a: *Jaka jest najmniejsza kwota pieniędzy istotna dla osoby robiącej zakupy za blisko 100 zł?*

Będzie to prawdopodobnie kwota zbliżona do 1 zł (ale nie tak mała, jak 1 grosz). Osoba taka może na przykład rozważać zakup innego produktu tańszego o 1 zł.

³ Teoria perspektywy przyjmuje, że funkcja wartości jest zdefiniowana jako $v(x) = \lambda|x|^\alpha$, gdzie x jest zyskiem (lub stratą) wyrażonym w postaci określonej kwoty pieniędzy.

⁴ Należy tu wyraźnie odróżnić względne traktowanie majątku (co prowadzi do koncepcji zysków i strat) od względnego traktowania *zmian* majątku (czyli względnego traktowania zysków i strat).

⁵ Kahneman i Tversky [1984] podali, że: The topical organization of mental accounts leads people to evaluate gains and losses in relative rather than in absolute terms (podkreślenie autora).

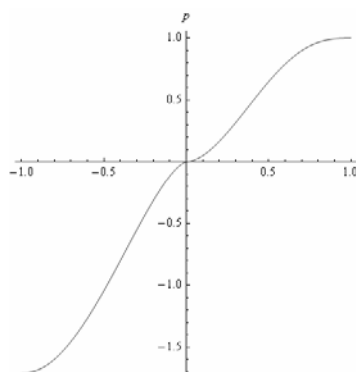
Problem 1b: *Jaka jest najmniejsza kwota pieniędzy istotna dla tej samej osoby kupującej dom za ok. 500 000 zł?*

Będzie to prawdopodobnie przynajmniej 1000 zł. Oferta zakupu domu za 479 538 PLN wydaje się trudna do wyobrażenia – oferta opiewająca na 480 000 zł jest o wiele bardziej prawdopodobna. Wynika stąd, że kwota 10 zł, istotna w pierwszym przypadku, jest zupełnie nieistotna w drugim.

Powyższy przykład pokazuje, że system mentalny człowieka adaptuje się do wielkości finansowych w taki sam sposób, jak system sensoryczny. W rezultacie najmniejsza zauważalna różnica kwot pieniężnych pozostaje w przybliżeniu stałą proporcją rozpatrywanych wielkości finansowych. Oznacza to, że rozpatrując projekty finansowe, inwestycje, loterie, można osiągnąć wielkość, która staje się punktem odniesienia w całym procesie myślowym powodując, że określona kwota pieniędzy (na przykład 10 zł) jest istotna lub nieistotna w zależności od kontekstu. Tego typu konkluzja stanowi fundamentalne odejście od teorii perspektywy traktującej zyski i straty w postaci konkretnych kwot pieniężnych.

5. Funkcja względnej użyteczności

W punkcie 3 przedstawiono, jak traktowanie zysków i strat w sposób bezwzględny prowadzi do koncepcji funkcji wag prawdopodobieństw. W niniejszym punkcie zostanie pokazane, że traktowanie zmian majątku w sposób względny prowadzi do innego rozwiązania.



Rys. 4. Funkcja względnej użyteczności wykreślona na podstawie przedstawionych eksperymentów

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki eksperymentów 1–6 mogą być wytłumaczone w odmienny sposób przy założeniu, że ludzie postrzegają wypłaty w stosunku do głównej płatności loterii. Zauważmy, że wszystkie eksperymenty 1–3 dotyczą przypadku, gdy pewna wypła-

ta stanowi połowę głównej płatności loterii. Można zatem stwierdzić, że ludzie mają awersję do ryzyka, gdy względna wypłata jest równa 0,5. Zatem krzywa względnej użyteczności jest wklęsła dla $r = 0,5$.

Podobnie eksperymenty 4–6 pokazują, że ludzie wykazują się skłonnością do ryzyka dla względnych płatności $r = 0,1$. Dlatego też krzywa względnej użyteczności powinna być wypukła dla tego punktu. Podobne rozumowanie pozwala na wykreślenie kształtu funkcji względnej użyteczności dla strat, co jest pokazane na rysunku 4. Użycie tej funkcji pozwala na wyjaśnienie wyników eksperymentów bez konieczności stosowania funkcji wag prawdopodobieństw.

Jak widać, otrzymana krzywa jest niezwykle zbliżona kształtem do funkcji użyteczności według hipotezy Markowitza z 1952 r. Jedyna zasadnicza różnica pomiędzy krzywymi jest taka, że funkcja względnej użyteczności jest wyrażona jako funkcja względnych wypłat, natomiast krzywa Markowitza – jako funkcja wypłat wyrażonych w sposób bezwzględny. To jednak wystarcza, aby funkcja ta była w stanie wyjaśnić wyniki eksperymentów behawioralnych, takich jak paradoks Allais'a [Kontek 2009b].

6. Podsumowanie

Artykuł przedstawia alternatywne wytłumaczenie wyników eksperymentów loteryjnych w stosunku do rozwiązania zaproponowanego przez teorię perspektywy. Przedstawione rozwiązanie zakłada traktowanie zmian majątku w sposób względny w odróżnieniu od teorii perspektywy przyjmującej ich bezwzględną percepcję. Względna percepcja zmian majątku bazuje na prawie Webera – jednym z podstawowych praw psychofizyki. Spostrzeżenie to zostało stwierdzone także przez **Kahnemana i Tversky'ego**.

Wprowadzenie podanego założenia do analizy wyników eksperymentów loteryjnych skłania do odrzucenia podejścia teorii perspektywy. Funkcja wag prawdopodobieństw – jedna z podstawowych koncepcji całej teorii perspektywy – staje się zbędna dla wytłumaczenia wyników eksperymentów. Założenie o względnym postrzeganiu zmian majątku prowadzi do jednoznacznego rozwiązania zbliżonego swoim kształtem do funkcji użyteczności zgodnie z hipotezą Markowitza [1952]. Artykuł wyraźnie rozgranicza oba podejścia, gdyż względne i bezwzględne postrzeganie wzajemnie się wykluczają. Oznacza to, że nie można jednocześnie twierdzić, iż ludzie postrzegają zmiany majątku w sposób względny (tak jak Kahneman i Tversky w 1984 r.) oraz że teoria perspektywy w poprawny sposób opisuje zachowanie ludzi (tak jak Kahneman i Tversky w 1979 i 1992 r.).

Podane rozwiązanie w jednoznaczny sposób pokazuje, że istnieją cztery obszary stosunku do ryzyka. Ludzie odznaczają się skłonnością do ryzyka dla małych względnych zysków i dużych względnych strat oraz awersją do ryzyka dla małych

względnych strat oraz dużych względnych zysków. Wniosek taki został wyciągnięty przez Markowitza już w 1952 r. i potwierdzony przez kumulacyjną teorię perspektywy w 1992 r.

Literatura

- Allais M., *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine*, „Econometrica” 1953, no. 21, s. 503–546.
- Bernoulli N., Bernoulli D., Cramer G., *Correspondence of Nicolas Bernoulli concerning the St. Petersburg Game*, 1953, s. 1713–1734, <http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Montmort/stpetersburg.pdf>.
- Ellsberg D., *Risk, ambiguity, and the savage axioms*, „Quarterly Journal of Economics” 1961, no. 75 (4), s. 643–669.
- Friedman M., Savage L.J., *The utility analysis of choices involving risk*, „Journal of Political Economy” 1948, s. 279–304.
- Kahneman D., Tversky A., *Choices, values and frames*, „American Psychologist” 1984, vol. 39, no. 4, s. 341–350.
- Kahneman D., Tversky A., *Prospect theory: An analysis of decisions under risk*, „Econometrica” 1979, no. 47, s. 313–327.
- Kontek K., *Absolute vs. relative notion of wealth changes*, MPRA Working Paper, 2009a, <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/17336/>, SSRN Working Paper, <http://ssrn.com/abstract=1474229>.
- Kontek K., *The illusion of irrationality*, MPRA Working Paper, 2009b, <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/19044/>, SSRN Working Paper, <http://ssrn.com/abstract=1519496>.
- Markowitz H., *The utility of wealth*, „Journal of Political Economy” 1952, vol. 60, s. 151–158.
- Neumann J. von, Morgenstern O., *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944.
- Tversky A., Kahneman D., *Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty*, „Journal of Risk and Uncertainty” 1992, Springer, vol. 5 (4), s. 297–323.
- Weber's law*, w: *Encyclopædia Britannica*. Retrieved, 11.08.2009, Encyclopædia Britannica online: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/638610/Webers-law>.

RELATIVE UTILITY FUNCTION AND RISK ATTITUDE

Summary: This paper discusses solutions derived from lottery experiments using two alternative assumptions: that people perceive wealth changes as absolute amounts of money; and that people consider wealth changes as a proportion of some reference value dependant on the context of the problem under consideration. The former assumption leads to the design of the Prospect Theory, the latter – to a solution closely resembling the utility function hypothesized by Markowitz (1952). This paper presents several crucial arguments for the latter approach and provides strong arguments for rejecting the Prospect Theory paradigm.