PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 117
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek 2010

Anna Szymańska
Uniwersytet Łódzki

SZACOWANIE STAWEK SKŁADKI W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH OC DLA ASYMETRYCZNEGO ROZKŁADU WIELKOŚCI SZKÓD

Streszczenie: W pracy przedstawiono zastosowanie estymatorów bayesowskich do taryfikacji *a posteriori* w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC. Składki netto wyznaczono za pomocą zasady wartości oczekiwanej oraz zasady kwantyla rzędu ε. Porównano otrzymane stawki składek dla rozkładu wielkości szkód typu Pareto.

1. Wstęp

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC składki są wyznaczane w dwóch etapach. Pierwszy to obliczenie składki podstawowej na podstawie czynników *a priori* (obserwowalnych czynników ryzyka, takich jak na przykład rodzaj i rok produkcji samochodu, pojemność silnika, wiek i płeć kierowcy), drugi etap to taryfikacja *a posteriori* (historia szkodowości kierowcy). Zatem w pierwszym etapie ubezpieczyciel wyznacza składkę podstawową, a w drugim etapie szacuje, ile procent stawki podstawowej powinien płacić indywidualny kierowca [Lemaire 1995].

Teoretycznie istnieje wiele możliwych taryfikacji *a posteriori*. Towarzystwa ubezpieczeniowe najczęściej stosują systemy bonus-malus, w których podstawą taryfikacji jest liczba szkód spowodowana przez ubezpieczonego w przeszłości. Premią za rok bezszkodowej jazdy jest 10-procentowa zniżka w stosunku do składki podstawowej, karą za spowodowanie co najmniej jednej szkody w roku – 10-procentowa zwyżka.

Celem pracy jest prezentacja metod taryfikacji *a posteriori*, w której podstawą nie jest liczba spowodowanych szkód, ale wielkość tych szkód. W tym przypadku duże znaczenie ma asymetria rozkładu. W pracy porównano stawki składek szacowane na podstawie wartości oczekiwanej wielkości szkód oraz kwantyla rzędu 0,5 wielkości szkód dla rozkładu wielkości szkód typu Pareto. Stawki składki oszacowano za pomocą estymatorów bayesowskich.

2. Szacowanie stawek składki netto na podstawie wartości oczekiwanej wielkości szkód

Niech X_j będzie zmienną losową oznaczającą wielkość roszczeń w roku j dla danej polisy oraz $(X_1, X_2,\ldots,X_t)$ – wektorem obserwacji wielkości roszczeń przez t lat dla danej polisy. Niech rozkład zmiennej losowej X_j zależy od parametru θ. Zakłada się, że parametr ryzyka θ ubezpieczonego jest taki sam przez cały okres trwania ubezpieczenia i jest realizacją zmiennej losowej Θ.

Załóżmy, że zmienne losowe X_j dla ustalonego $\Theta = \theta$ są niezależne i mają jednakowe wartości oczekiwane oraz że ubezpieczeni generują straty niezależnie od siebie.

Niech X_{t+1} będzie nieznaną wielkością szkód w roku $t + 1$ dla polisy opisanej wektorem obserwacji $(X_1, X_2, \ldots, X_t)$, który można oszacować za pomocą estymatora bayesowskiego.

Niech zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem θ o funkcji gęstości postaci:

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0. \tag{1}$$

Jeżeli parametr Θ jest zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrami α i β, o funkcji gęstości postaci:

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta\theta}\theta^{\alpha-1}, \alpha > 0, \beta > 0, \theta > 0, \tag{2}$$

to zmienna losowa X ma rozkład Pareto z parametrami α i β, o funkcji gęstości postaci:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}}, x > 0. \tag{3}$$

Estymatory parametrów α i β, wyznaczone metodą momentów, odpowiednio wynoszą:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2S_x^2}{S_x^2 - \overline{x}^2} \text{ i } \tilde{\beta} = \overline{x}\frac{S_x^2 + \overline{x}^2}{S_x^2 - \overline{x}^2}, \tag{4}$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią wielkością roszczeń w portfelu, S_x^2 wariancją wielkości roszczeń w portfelu [Domański 2000].

Rozkład *a posteriori* parametru Θ jest więc rozkładem gamma o parametrach $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ postaci:

$$\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + t \quad \text{i} \quad \hat{\beta} = \tilde{\beta} + \sum x_j . \tag{5}$$

Estymator bayesowski parametru Θ, przy założeniu kwadratowej funkcji straty postaci $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$ (gdzie $a = d(x)$ jest funkcją decyzyjną), jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* wielkości szkód [Krzyśko 1997] i ma postać:

$$E\left(X_{t+1} \middle| X_1, ..., X_t\right) = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha} - 1} = \frac{\tilde{\beta} + \sum x_j}{\tilde{\alpha} + t - 1} . \tag{6}$$

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC indywidualna składka netto w okresie $t + 1$ wynosi:

$$m(\theta) = (EX) \cdot (E\Lambda) \cdot b_{t+1}(k_1, ..., k_t) , \tag{7}$$

gdzie $m(\theta)$ – indywidualna składka netto w okresie $t + 1$, (EX) – wartość oczekiwana wielkości pojedynczej szkody, $(E\Lambda)$ – wartość oczekiwana liczby szkód, $b_{t+1}(k_1, ..., k_t)$ – stawka szacowanej składki [Lemaire 1995].

Przyjmując w równaniu (7), że $EX = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha} - 1}$ oraz $E\Lambda = 1$, mamy:

$$m(\theta) = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha} - 1} \cdot b_{t+1}(x_1, ..., x_t) . \tag{8}$$

Stąd kierowca, który po t latach zgłosił roszczenia wielkości $\sum_{j=1}^{t} x_j$, powinien płacić stawkę szacowanej składki równą:

$$b_{t+1}(x_1, ..., x_t) = \frac{\tilde{\alpha} - 1}{\tilde{\beta}} m(\theta) \cdot 100\% . \tag{9}$$

Indywidualna składka netto, szacowana według zasady wartości oczekiwanej, powiększona o dodatek bezpieczeństwa Q, wynosi:

$$m(\theta) = (1 + Q) E\left(X_{t+1} \middle| X_1, ..., X_t\right) = (1 + Q) \frac{\tilde{\beta} + \sum x_j}{\tilde{\alpha} + t - 1} . \tag{10}$$

Na podstawie wzorów (9) i (10) kierowca, który po t latach zgłosił roszczenia w wysokości $\sum_{j=1}^{t} x_j$ w roku $t + 1$, powinien płacić stawkę składki równą:

$$b_{t+1}(x_1,...,x_t)=(1+Q)\frac{(\tilde{\alpha}-1)(\tilde{\beta}+\sum x_j)}{\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}+t-1)}\cdot 100\%. \tag{11}$$

Przyjmując Q = 0 mamy:

$$b_{t+1}(x_1,...,x_t)=\frac{(\tilde{\alpha}-1)(\tilde{\beta}+\sum x_j)}{\tilde{\beta}(\tilde{\alpha}+t-1)}\cdot 100\%. \tag{12}$$

3. Szacowanie stawek składki netto na podstawie mediany wielkości szkód

Niech zmienna losowa wielkości szkód ma rozkład Pareto o funkcji gęstości postaci (3). Przyjmijmy, że funkcja straty jest postaci:

$$L(\theta,a)=\left|\theta-a\right|. \tag{13}$$

Bayesowskim estymatorem parametru Θ względem funkcji straty opisanej wzorem (14) jest mediana rozkładu *a posteriori* parametru Θ [Krzyśko 1997]:

$$Me=\hat{\beta}\left(\sqrt[\hat{\alpha}]{2}-1\right). \tag{14}$$

Indywidualna składka netto w okresie $t+1$ wynosi:

$$m(\theta)=\tilde{\beta}\left(\sqrt[\tilde{\alpha}]{2}-1\right)\cdot b_{t+1}(x_1,...,x_t). \tag{15}$$

Stąd kierowca, który po t latach zgłosił roszczenia wielkości $\sum_{j=1}^{t}x_j$, powinien płacić stawkę szacowanej składki równą:

$$b_{t+1}(x_1,...,x_t)=\frac{1}{\tilde{\beta}\left(\sqrt[\tilde{\alpha}]{2}-1\right)}m\left(\theta\right)\cdot 100\%. \tag{16}$$

Indywidualna składka netto szacowana według zasady percentylu wynosi:

$$m(\theta)=\hat{\beta}\left(\sqrt[\hat{\alpha}]{2}-1\right)=\left(\tilde{\beta}+\sum x_j\right)\left(\sqrt[\tilde{\alpha}+t]{2}-1\right). \tag{17}$$

Na podstawie wzorów (16) i (17) kierowca, który po t latach zgłosił roszczenia w wysokości $\sum_{j=1}^{t}x_j$ w roku $t+1$, powinien płacić stawkę składki równą

$$b_{t+1}(x_1,...,x_t)=\frac{\left(\tilde{\beta}+\sum x_j\right)\left(\sqrt[\tilde{\alpha}+t]{2}-1\right)}{\tilde{\beta}\left(\sqrt[\tilde{\alpha}]{2}-1\right)}\cdot 100\%. \tag{18}$$

4. Zastosowania

W przeprowadzonym badaniu oceniono stawki składek oszacowane za pomocą estymatorów bayesowskich dla składek wyznaczanych klasyczną metodą wartości oczekiwanej (wzór 12) oraz metodą percentylu (wzór 18). Badanie przeprowadzono dla rozkładu Pareto o parametrach zbliżonych do danych rzeczywistych na rynku ubezpieczeń komunikacyjnych OC. Przyjęto założenie, że kierowca, który w pierwszym roku ubezpieczenia spowoduje szkody nie większe niż 3 tys. zł, w następnym roku zostanie ukarany 10-procentową zwyżką składki – co jest zbliżone do warunków rynkowych.

Tabela 1. Stawka składki netto $b_{t+1}(x_1, ..., x_t)$ w roku $t + 1$*

Suma roszczeń S (w tys. zł)	t = 1	2	3	4	Suma roszczeń S (w tys. zł)	t = 1	2	3	4
Poniżej 3	110	77	59	48	8–9	224	156	120	97
3–4	129	90	69	56	9–10	243	169	130	105
4–5	148	103	79	64	10–11	262	182	140	114
5–6	167	116	89	72	11–12	281	196	150	122
6–7	186	130	99	81	12–13	300	209	160	130
7–8	205	143	110	89	powyżej 13	319	222	170	138

* w zależności od czasu trwania ubezpieczenia t i sumy $S = \sum_{j=1}^{t} x_j$ roszczeń zgłoszonych w latach 1, ..., t dla składek wyznaczanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej. Parametry rozkładu wielkości szkód (EX = 4,9535; DX = 5,2745; α = 2,3; β = 2,8; $x_{0,5}$ = 3,7681)

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Stawka składki netto $b_{t+1}(x_1,...,x_t)$ w roku $t + 1$*

Suma roszczeń S (w tys. zł)	t = 1	2	3	4	Suma roszczeń S (w tys. zł)	t = 1	2	3	4
Poniżej 3	110	82	66	55	8–9	224	167	134	111
3–4	129	97	77	64	9–10	243	182	145	121
4–5	148	111	88	74	10–11	262	196	156	130
5–6	167	125	100	83	11–12	281	210	168	140
6–7	186	139	111	92	12–13	300	224	179	149
7–8	205	153	122	102	powyżej 13	319	238	190	159

* w zależności od czasu trwania ubezpieczenia t i sumy $S = \sum_{j=1}^{t} x_j$ roszczeń zgłoszonych w latach 1, ..., t dla składek wyznaczanych za pomocą zasady percentylu. Parametry rozkładu wielkości szkód (EX = 4,9535; DX = 5,2745; α = 2,3; β = 2,8; $x_{0,5}$ = 3,7681)

Źródło: obliczenia własne.

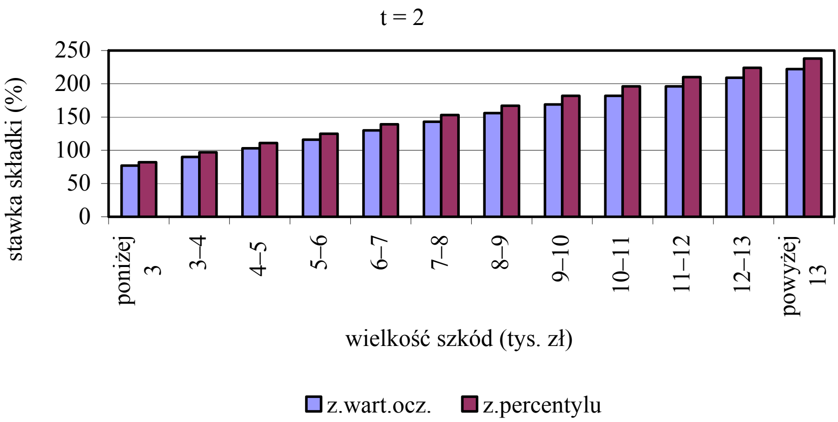
W tabeli 3 zamieszczono razem dane z tabel 1 i 2.

Tabela 3. Stawka składki netto $b_{t+1}(x_1, ..., x_t)$ w roku $t + 1$

$\sum_{j=1}^{t} x_j$ (w tys. zł) \ t	1		2		3		4	
	zasada wartości oczekiwanej	zasada percentylu	zasada wartości oczekiwanej	zasada percentylu	zasada wartości oczekiwanej	zasada percentylu	zasada wartości oczekiwanej	zasada percentylu
Poniżej 3	110	110	77	82	59	66	48	55
3–4	129	129	90	97	69	77	56	64
4–5	148	148	103	111	79	88	64	74
5–6	167	167	116	125	89	100	72	83
6–7	186	186	130	139	99	111	81	92
7–8	205	205	143	153	110	122	89	102
8–9	224	224	156	167	120	134	97	111
9–10	243	243	169	182	130	145	105	121
10–11	262	262	182	196	140	156	114	130
11–12	281	281	196	210	150	168	122	140
12–13	300	300	209	224	160	179	130	149
Powyżej 13	319	319	222	238	170	190	138	159

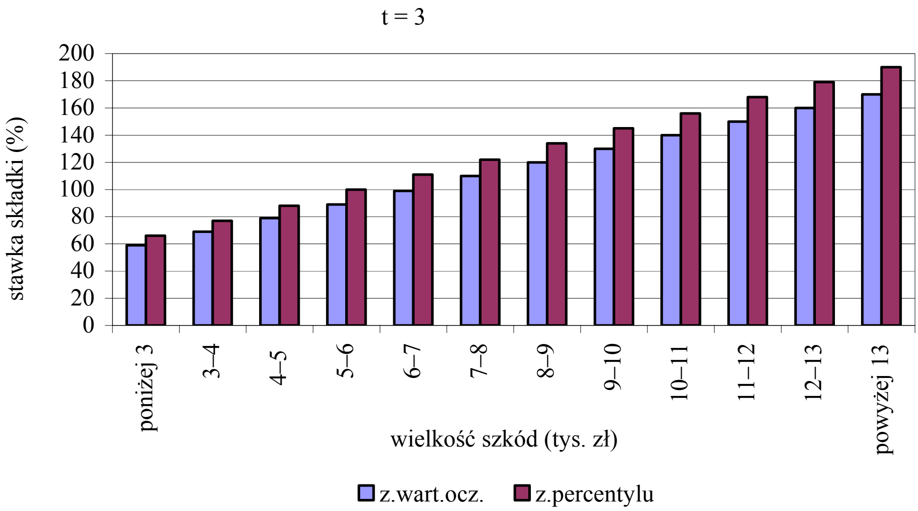
* w zależności od czasu trwania ubezpieczenia t i sumy $\sum_{j=1}^{t} x_j$ roszczeń zgłoszonych w latach 1, ..., t dla składek wyznaczanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej oraz zasady percentylu. Parametry rozkładu wielkości szkód (EX = 4,9535; DX = 5,2745; $\alpha = 2,3$; $\beta = 2,8$; $x_{0,5} = 3,7681$).

Źródło: obliczenia własne.



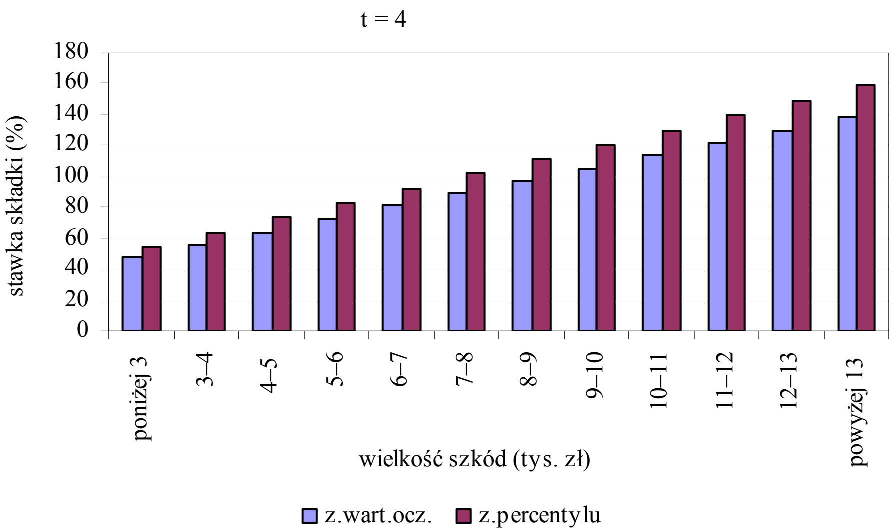
Rys. 1. Stawka składki netto w roku $t + 1$ w zależności od czasu trwania ubezpieczenia t i sumy roszczeń zgłoszonych w latach 1, ..., t
dla składek wyznaczanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej oraz zasady percentylu

Źródło: badania własne.



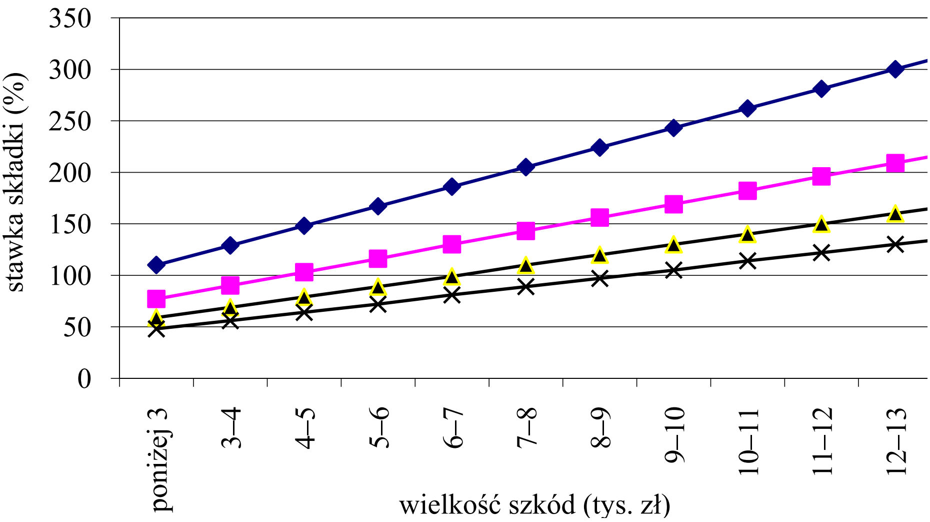
Rys. 2. Stawka składki netto w roku $t + 1$ w zależności od czasu trwania ubezpieczenia t
i sumy roszczeń zgłoszonych w latach 1, ..., t
dla składek wyznaczanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej oraz zasady percentylu

Źródło: badania własne.



Rys. 3. Stawka składki netto w roku $t + 1$ w zależności od czasu trwania ubezpieczenia t
i sumy roszczeń zgłoszonych w latach 1, ..., t
dla składek wyznaczanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej oraz zasady percentylu

Źródło: badania własne.



Rys. 4. Stawka składki netto w roku $t + 1$ w zależności od czasu trwania ubezpieczenia t i sumy roszczeń zgłoszonych w latach 1, ..., t
dla składek wyznaczanych za pomocą zasady wartości oczekiwanej

Źródło: badania własne.

5. Wnioski

W pracy zamieszczono wyniki badania tylko dla jednego rozkładu Pareto, jednak wyniki badań dla rozkładu Pareto o innych parametrach zbliżonych do danych rzeczywistych dają podobne rezultaty. We wszystkich przypadkach stawki składek są wyższe dla składek szacowanych za pomocą zasady percentylu – tutaj kwantyla rzędu 0,5. Różnica pomiędzy stawkami składek uzyskanymi za pomocą wykorzystywanych metod, wzrasta wraz ze wzrostem t, co widać wyraźnie na wykresach 1–3. Zatem im dłuższa historia szkodowości ubezpieczonego, tym większe różnice w stawkach składek uzyskiwanych badanymi metodami. Jednak w przypadku obu metod stawki maleją wraz ze wzrostem t (patrz wykres 4). Jest to prawidłowa ocena kierowcy przez system – kierowca, który w dłuższym czasie powoduje szkody o danej wysokości, jest karany niższą zwyżką niż kierowca, który powoduje takie same szkody w krótszym czasie. Przeprowadzone badanie dowodzi, że asymetria rozkładu powinna być uwzględniana przy szacowaniu składek oraz stosowanym systemie zwyżek i zniżek.

Literatura

Domański Cz., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.
Krzyśko M., *Statystyka matematyczna*, cz. 2, Wydawnictwo UAM, Poznań 1997.
Lemaire J., *Bonus-malus systems in automobile insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

PREMIUM RATES ESTIMATION
IN CAR LIABILITY INSURANCE CR
FOR ASYMMETRIC DISTRIBUTION OF THE SIZE OF DAMAGES

Summary: The paper presents an application of Bayesian estimators to posterior tariff classification in car liability insurance CR. Net premiums are determined by means of the expected value and the quantile of the order & rule. Premium rates determined for the Pareto type distribution of damages are compared.