PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 84
Ekonometria 27 2009

Agnieszka Marciniuk
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

NIELOSOWE MODELE NATYCHMIASTOWEJ STOPY PROCENTOWEJ I ICH ZASTOSOWANIE W KLASYCZNYCH UBEZPIECZENIACH ŻYCIOWYCH

Streszczenie: W artykule podjęto próbę zmiany klasycznego podejścia do stopy procentowej w ubezpieczeniach poprzez zastosowanie funkcji dyskontowania, która zależy od czasu, ale nie jest losowa. Funkcja dyskontująca utożsamiana jest z ceną obligacji zerokuponowej, którą można określić za pomocą natychmiastowej stopy procentowej. Przedstawiono cztery modele takiej stopy procentowej, a parametry funkcji oszacowano na danych rzeczywistych dotyczących stóp zwrotu z obligacji i bonów skarbowych. Następnie wyznaczone ceny obligacji zerokuponowych zastosowano do obliczania jednorazowych i okresowych składek netto, jak również drugiego momentu zwykłego zaktualizowanego świadczenia ubezpieczeniowego w przypadku ubezpieczenia na życie. Na zakończenie przedstawiono wnioski.

Słowa kluczowe: klasyczne ubezpieczenia na życie, składki, natychmiastowa stopa procentowa, cena obligacji zerokuponowej.

1. Wstęp

Tradycyjnie stopa procentowa w ubezpieczeniach traktowana jest jako wielkość, która nie zmienia się w ciągu całego okresu trwania ubezpieczenia (por. [Bowers i in. 1986]). Stopę procentową ustala się na wyraźnie niskim poziomie, aby gwarantowała wypłacalność firmy ubezpieczeniowej. Produkty ubezpieczeniowe, a w szczególności terminowe i bezterminowe ubezpieczenia na życie lub dożycie, a także ubezpieczenia mieszane, są produktami długoterminowymi. Zakładanie stałej stopy procentowej np. w ciągu 20 lat nie jest realne. Dlatego mniej więcej od końca lat 80. prowadzone są badania naukowe zmierzające do stosowania stochastycznych modeli stóp procentowych do obliczania wielkości dotyczących ubezpieczeń (por. np. [Carriere 2004; De Pooter 2007; Panjer, Bellhouse 1980]). Obecnie nie są one stosowane w praktyce ubezpieczeniowej.

W artykule przedstawiona jest zmiana klasycznego podejścia do stopy procentowej poprzez zastosowanie funkcji dyskontowania, która zależy od czasu, jednak nie jest losowa. W celu zaprezentowania modeli tej funkcji omówiono zarówno związek między funkcją dyskontującą a ceną obligacji zerokuponowej, jak i modele natychmiastowej stopy procentowej określonej za pomocą ceny obligacji zerokuponowej, estymację ich parametrów, a także zastosowanie do klasycznych ubezpieczeń życiowych.

2. Cena obligacji zerokuponowej i natychmiastowa stopa procentowa

Funkcja dyskontująca z chwili t_2 na chwilę $t_1 \le t_2$ $(t_1 \ge 0)$ jest zdefiniowana jako iloraz kapitału zainwestowanego w chwili t_1 do kapitału otrzymanego w chwili t_2. Jeśli K_t oznacza wielkość kapitału w chwili t, to

$$v_{t_1,t_2} = \frac{K_{t_1}}{K_{t_2}}.$$

Obligacja zerokuponowa jest to papier wartościowy sprzedawany z dyskontem, czyli po cenie niższej od nominalnej. Dochód z tej obligacji to różnica wartości nominalnej i ceny sprzedaży. Umownie przyjmuje się, że cena nominalna jest równa jednej jednostce pieniężnej, czyli gwarantuje ona właścicielowi wypłatę 1 j.p. w chwili T. Jeżeli przez $P_{t,T}$ oznaczy się cenę obligacji zerokuponowej w chwili t o terminie wykupu T $(0 \le t \le T)$, to $P_{T,T} = 1$. Po skorzystaniu z powyższego wzoru otrzymuje się:

$$v_{t,T} = \frac{K_t}{K_T} = \frac{P_{t,T}}{P_{T,T}} = \frac{P_{t,T}}{1} = P_{t,T}.$$

Stąd funkcja dyskontująca jest traktowana jak cena obligacji zerokuponowej.

Za pomocą ceny obligacji zerokuponowej definiuje się chwilową stopę terminową i natychmiastową stopę procentową, które zastosowane są do wyznaczenia wartości funkcji dyskontującej. Chwilowa stopa terminowa, nazywana krótko stopą *forward*, jest określona następującym wzorem (por. [Anderson i in. 1996]):

$$f_{t,T} = -\frac{\partial \ln P_{t,T}}{\partial T}, \ 0 \le t \le T. \tag{1}$$

Natychmiastowa stopa procentowa (stopa zwrotu, rentowność) jest zdefiniowana następująco:

$$R_{t,T} = -\frac{\ln P_{t,T}}{T - t}, \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

przy czym $T - t$ to dowolnie mały odcinek czasu i jest to czas, jaki pozostał do terminu wykupu obligacji.

Stopy te reprezentują oprocentowanie pożyczek zawieranych na pewien przyszły okres $[t,T]$, dlatego też zawierają więcej informacji niż stopy bieżące.

Natychmiastowa stopa procentowa jest to stopa zwrotu do terminu wykupu przy kapitalizacji ciągłej. Funkcję $R_{t,T}$ traktuje się jako funkcję zależną od tego czasu $T-t,$ a jej wykres nazywa się krzywą stopy zwrotu (krzywą rentowności, krzywą dochodowości). Proces ceny obligacji zerokuponowej, krzywa stopy zwrotu i proces chwilowej stopy terminowej są to równoważne sposoby opisania **struktury terminowej stóp procentowych** (czyli zależności stóp zwrotu od terminu wykupu (por. [Weron, Weron 1999]).

Krzywa rentowności przestawia zależność stóp zwrotu od terminu wykupu jedynie dla pewnej grupy obligacji, np. dla obligacji skarbowych o tym samym kuponie, obligacji zerokuponowych lub obligacji o stałym oprocentowaniu. Ze wzoru (2) wynika, że w celu oszacowania stopy zwrotu, należy obserwować rzeczywiste ceny obligacji zerokuponowych. Na rynku polskim występuje jednak niewielka liczba takich obligacji. Są to jedynie obligacje dwuletnie[1]. Na podstawie tak małej liczby obserwacji trudno wyznaczyć krzywą stóp zwrotu. Dlatego też krzywą $R_{t,T}$ przybliża się na podstawie wszystkich obligacji o stałym oprocentowaniu, a także na podstawie bonów skarbowych.

Zadanie polega na znalezieniu wzoru analitycznego na funkcję $R_{t,T}$. Stopę zwrotu $R_{t,T}$ można określić ze wzorów (1) i (2) za pomocą stopy *forward* w następujący sposób:

$$R_{t,T} = \exp\left(-\frac{1}{T-t} \int_t^T f_{t,s}\, ds \right). \tag{3}$$

Dalsza specyfikacja stopy procentowej $R_{t,T}$ polega więc na specyfikacji stopy $f_{t,T}$.

3. Modele natychmiastowej stopy procentowej

Z wykresu funkcji $f_{t,T}$ można odczytać wiele pożytecznych informacji dotyczących stóp procentowych (por. [Jaworski, Micał 2005; Weron, Weron 1999]). Jeżeli np. $f_{t,T}$ jest funkcją malejącą, to jest to informacja, że rynek oczekuje spadku stóp procentowych, gdy zaś jest ona funkcją rosnącą, to oznacza to, że rynek oczekuje wzro-

[1] Na przykład 12.05.2008 r. notowano na GPW następujące obligacje zerokuponowe: OK0709 o terminie wykupu 25.07.2009 r., OK0710 o terminie wykupu 25.07.2010 r., OK0808 o terminie wykupu 12.08.2008 r., OK1208 o terminie wykupu 12.12.2008 r. (por. [http://bossa.pl/notowania/o/ciagle/obligacje/]).

stu stóp procentowych w przyszłości. Jeżeli funkcja $f_{t,T}$ jest stała, to mówi się, że rynek jest w równowadze. Funkcja $f_{t,T}$ np. może posiadać jedno maksimum (tzw. garb), co oznacza, że rynek oczekuje spadku stóp procentowych w dalszej przyszłości, ale równocześnie jest duży popyt na papiery krótkoterminowe. Funkcja $f_{t,T}$ może mieć różnych kształt, może mieć więcej ekstremów. Modele stopy *forward* opisane w dalszej części opracowania mają współczynniki, które odpowiadają za stopy krótkoterminowe, średnioterminowe i długoterminowe.

Ważniejszymi propozycjami modeli stopy *forward* $f_{t,T}$ są: model Stoodleya, model Nelsona-Siegela, model Blissa oraz model Svenssona. Modele te opracowano na podstawie prac: [De Pooter 2007; Jajuga 2005; James, Webber 2000; Jaworski, Micał 2005; Weron, Weron 1999].

Model Stoodleya

Stopa *forward* określona jest funkcją o następującej postaci

$$f_{t,T} = p + \frac{s}{1 + re^{s(T-t)}},$$

gdzie p, r, s są to parametry, przy czym $p, r, s > 0$.

Ponieważ $\lim\limits_{T-t\to\infty} f_{t,T} = p$, parametr p jest interpretowany jako długoterminowa stopa procentowa. Krótkoterminowa stopa procentowa jest równa $f_{t,t} = p + \frac{s}{1+r}$. Funkcja Stoodleya $f_{t,T}$ jest ściśle malejącą funkcją czasu $T-t$.

Po skorzystaniu ze wzoru (3) stopa zwrotu jest określona następująco:

$$R_{t,T} = p + s - \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{1 + re^{s(T-t)}}{1+r}\right). \tag{4}$$

Model Nelsona-Siegela

Stopa *forward* jest określona następującym wzorem:

$$f_{t,T} = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right) + \beta_2 \frac{T-t}{\tau} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right),$$

gdzie $\tau > 0$, $\beta_0 \geq 0$, $\beta_0 + \beta_1 \geq 0$.

Ponieważ $\lim\limits_{T-t\to\infty} f_{t,T} = \beta_0$, parametr β_0 oznacza długoterminową stopę procentową. Parametr β_0 określa poziom krzywizny. Krótkoterminowa stopa procentowa jest równa $f_{t,t} = \beta_0 + \beta_1$. Parametr β_1 jest więc różnicą między stopą krótko- i długoterminową. Parametr ten określa stopień nachylenia krzywej. Parametr β_2 odpowiada za kształt krzywej.

Współczynnik $\exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right)$ stojący przy β_1 jest interpretowany jako składnik krótkoterminowy, który startuje z poziomu jeden, a później wykładniczo dąży do zera. Prędkość, z jaką ten współczynnik dąży do zera, określa parametr skali τ. Im mniejsza wartość τ, tym szybciej czynnik krótkoterminowy zbiega do zera.

Współczynnik $\frac{T-t}{\tau}\exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right)$ stojący przy β_2 jest interpretowany jako czynnik średnioterminowy. Współczynnik ten startuje z poziomu zerowego, rośnie przy średnim czasie, jaki pozostał do terminu wykupu, i ponownie zbiega do zera. Parametr τ określa, przy jakim czasie $T-t$ współczynnik ten osiąga maksimum. Im mniejsza wartość parametru τ, tym szybciej czynnik średnioterminowy osiąga maksimum i szybciej zbiega do zera.

Funkcja $f_{t,T}$ ma ekstremum równe $\beta_0+\beta_2\exp\left(\beta_1\beta_2^{-1}-1\right)$ w punkcie $T-t=\tau\left(1-\beta_2\beta_1^{-1}\right)$. Dla $\beta_2>0$ jest to maksimum, dla $\beta_2<0$ jest to zaś minimum.

Jeśli skorzysta się ze wzoru (3), to stopa zwrotu jest określona następująco:

$$R_{t,T}=\beta_0+\beta_1\frac{\tau}{T-t}\left(1-\exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right)\right)+ \\ +\beta_2\frac{\tau}{T-t}\left(1-\exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right)-\frac{T-t}{\tau}\exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right)\right). \tag{5}$$

Model Blissa

Stopa *forward* jest określona funkcją o następującej postaci:

$$f_{t,T}=\beta_0+\beta_1\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)+\beta_2\frac{T-t}{\tau_2}\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right),$$

gdzie $\tau>0,\ \beta_0\ge 0,\ \beta_0+\beta_1\ge 0.$

Model ten jest modyfikacją modelu Nelsona-Siegela. Różni się od niego jedynie tym, że występują dwa parametry skali τ_1 i τ_2. Funkcje stopy *forward* mają więc analogiczne własności, parametry zaś – analogiczną interpretację.

Po skorzystaniu ze wzoru (3) stopa zwrotu jest określona następująco:

$$R_{t,T}=\beta_0+\beta_1\frac{\tau_1}{T-t}\left(1-\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)\right)+ \\ +\beta_2\frac{\tau_2}{T-t}\left(1-\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right)-\frac{T-t}{\tau_2}\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right)\right). \tag{6}$$

Model Svenssona

Stopa *forward* jest określona w następujący sposób:

$$f_{t,T} = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) +$$
$$+\beta_2 \frac{T-t}{\tau_1} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{T-t}{\tau_2} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right),$$

gdzie $\tau > 0,\ \beta_0 \geq 0,\ \beta_0 + \beta_1 \geq 0.$

Model Svenssona jest modyfikacją modelu Nelsona-Siegela. Jednak jest wzbogacony o dodatkowe parametry β_3 i τ_2, co umożliwia większą elastyczność w modelowaniu krzywej (uwzględnienie większej liczby ekstremów). Parametry funkcji *forward* w obu modelach mają więc analogiczną interpretację, a funkcje − podobne własności.

Ponieważ w modelu występuje dodatkowy współczynnik $\frac{T-t}{\tau_2} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right)$ stojący przy parametrze β_3, to jest on traktowany jako drugi współczynnik średnioterminowy. Współczynnik ten, podobnie jak współczynnik średnioterminowy stojący przy parametrze β_2, startuje z poziomu zerowego, następnie rośnie i ponownie zbiega do zera. Parametr τ_2 określa, przy jakim czasie $T-t$ współczynnik ten osiąga maksimum oraz jak szybko zbiega do zera. Parametr τ_1 określa, przy jakim czasie $T-t$ współczynnik średnioterminowy stojący przy β_2 osiąga maksimum, określa także prędkość jego zbieżności do zera.

Po skorzystaniu ze wzoru (3) otrzymuje się:

$$R_{t,T} = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau_1}{T-t}\left(1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)\right) +$$
$$+\beta_2 \frac{\tau_1}{T-t}\left(1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) - \frac{T-t}{\tau_1}\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)\right) + \tag{7}$$
$$+\beta_3 \frac{\tau_2}{T-t}\left(1 - \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right) - \frac{T-t}{\tau_2}\exp\left(-\frac{T-t}{\tau_2}\right)\right).$$

Zaletą wszystkich przedstawionych modeli jest ich jawna postać, co pozwala na dopasowanie funkcji do danych empirycznych metodą najmniejszych kwadratów.

4. Estymacja parametrów modeli stopy zwrotu

W celu ilustracji zastosowania tych modeli przyjęto dane z 26.05.2008 r. Tego dnia odbył się przetarg na 13-, 26- i 52-tygodniowe bony skarbowe, na GPW notowano zaś 5- i 10-letnie obligacje o stałym oprocentowaniu. Dane stóp zwrotu z bonów skarbowych i obligacji przedstawione są w tab. 1.

Tabela 1. Dane stóp zwrotu z bonów skarbowych i obligacji o stałym oprocentowaniu z 26.05.2008 r.

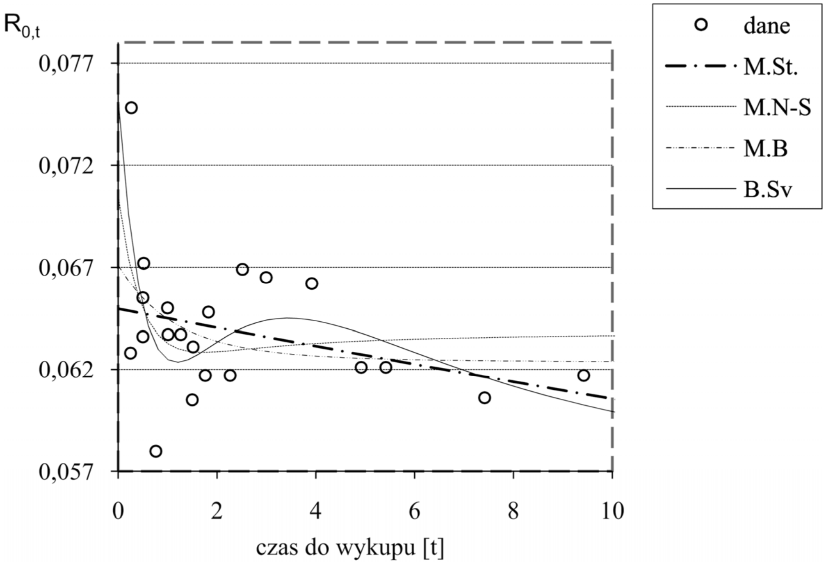
i	Seria	$T-t$	$R_{t,T}$	i	Seria	$T-t$	$R_{t,T}$
1	bon13	0,2493	0,0628	12	SP0310	1,7616	0,0617
2	SP0908	0,2658	0,0748	13	PS0310	1,8274	0,0648
3	bon26	0,4986	0,0636	14	SP0910	2,2658	0,0617
4	DS1109	0,4986	0,0655	15	SP1210	2,5151	0,0669
5	SP1208	0,5151	0,0672	16	PS0511	2,9945	0,0665
6	SP0309	0,7616	0,0580	17	PS0412	3,9178	0,0662
7	bon52	0,9973	0,0650	18	PS0413	4,9178	0,0621
8	DS0509	1,0083	0,0637	19	DS1013	5,4164	0,0621
9	SP0909	1,2658	0,0637	20	DS1015	7,4164	0,0606
10	DS1110	1,4986	0,0605	21	DS1017	9,4219	0,0617
11	SP1209	1,5151	0,0631				

Źródło: [http://bossa.pl/notowania/o/ciagle/obligacje/].

Na podstawie tych danych empirycznych parametry funkcji $R_{t,T}$ można oszacować metodą najmniejszych kwadratów. Minimalizowana jest suma $\sum_{i=1}^{21}\left(R_{t,T}^{i}-R_{t,T}\right)^{2}$, gdzie $R_{t,T}$ określone jest wzorem (4) w przypadku modelu Stoodleya, wzorem (5) − w modelu Nelsona-Siegela, wzorem (6) − w modelu Blissa, zaś wzorem (7) − w przypadku modelu Svenssona. Do uzyskania wartości parametrów wykorzystano, podobnie jak w poprzednim przykładzie, pakiet Solver stanowiący dodatek do programu Excel. Uzyskano następujące parametry:

- model Stoodleya: $p = 0,0397,\ r = 1,458,\ s = 0,0621,$
- model Nelsona-Siegela: $\beta_0 = 0,0639,\ \beta_1 = 0,0066,\ \beta_2 = -0,0117,\ \tau = 0,4979,$
  $\beta_0 = 0,0623,\ \beta_1 = 0,0048,\ \beta_2 = -0,0118,$
- model Blissa: $\tau_1 = 0,7064,\ \tau_2 = 1,3982,$
- model Svenssona: $\beta_0 = 0,0544,\ \beta_1 = 0,0209,\ \beta_2 = -0,058,$
  $\beta_3 = 0,0606,\ \tau_1 = 0,7,\ \tau_2 = 1,3473.$

Na wykresie na rys. 1 przedstawione są aproksymujące krzywe stóp zwrotu dla modeli Stoodleya (M.St), Nelsona-Siegela (M.N-S), Blissa (M.B) i Svenssona (M. Sv), a także dane stóp zwrotu.



Rys. 1. Wykres krzywej rentowności dla danych z tab. 1

Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie na rys. 1 widać, że najlepiej dopasowana jest funkcja Svenssona. Minimalizowana suma kwadratów odległości w tym przypadku jest najmniejsza i wynosi 0,000148. Funkcja ta ma dwa ekstrema. Jej wykres przebiega bliżej danych dla różnych terminów wykupu. Funkcja ta wraz ze wzrostem czasu dąży do wartości długoterminowej stopy procentowej równej $\beta_0 = 0,0544$. W przypadku modelu Nelsona-Siegela i Blissa suma kwadratów odległości jest większa niż w modelu Svenssona. Dla modelu Nelsona-Siegela wynosi ona 0,000175, a dla modelu Blissa − 0,000205. Wartości, jakie przyjmuje funkcja Nelsona-Siegela, najpierw maleją, a później rosną w kierunku wartości długoterminowej stopy procentowej, która jest równa $\beta_0 = 0,0639$. Funkcja Blissa to funkcja malejąca, a wraz ze wzrostem czasu staje się bardziej zbliżona do wartości długoterminowej stopy procentowej równej $\beta_0 = 0,0623$. Najgorzej dopasowana jest funkcja Stodleya (funkcja nie ma ekstremów). Suma kwadratów odległości w przypadku tego modelu wynosi 0,000202. Wartość ta jest nieco niższa od wartości sumy kwadratów odległości w przypadku modelu Blissa. Funkcja Stoodleya maleje w kierunku wartości długoterminowej stopy procentowej, równej p = 0,034, czyli o ponad 2% niższej od najniższej wartości zaobserwowanej danej.

W kolejnym punkcie wyznaczone krzywe stóp zwrotu zastosowano do obliczania składek w przypadku terminowego ubezpieczenia na życie.

5. Jednorazowa i okresowa składka netto na przykładzie ubezpieczenie na życie

Okresowe ubezpieczenie na życie jest zawierane na n lat. Każdy rok, w którym życie ubezpieczonego objęte jest ochroną, dzielony jest na $m \geq 1$ $\left(m \in \mathbf{N}\right)$ podokresów o równej długości[2] (półrocza, kwartały, miesiące, tygodnie itd.). Świadczenie w wysokości 1 jednostki pieniężnej wypłacane jest na koniec $m-$ tej części roku, w której nastąpi śmierć ubezpieczonego. Jeżeli $m=1$, to świadczenie jest płatne na koniec roku śmierci ubezpieczonego (klasyczne ubezpieczenie na wypadek śmierci). Gdy rok jest dzielony na m części, wówczas przez $K_x^{(m)}$ oznacza się zmienną losową określającą dalszy czas trwania życia osoby w wieku x mierzony w podokresach roku, czyli $K_x^{(m)} \in \{0,1,\ \ldots,\ m\cdot n, \ldots\}$.

Zaktualizowana wielkość świadczenia zależna od funkcji dyskontującej i zmiennej losowej $K_x^{(m)}$ ma następującą postać (por. [Marciniuk 2004]):

$$Z = \begin{cases} v_{0,K_x^{(m)}+1} & dla \quad K_x^{(m)} = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\cdot n-1, \\ 0 & dla \quad K_x^{(m)} = m\cdot n, m\cdot n+1, \ldots \end{cases}$$

Jeśli skorzysta się z własności warunkowej wartości oczekiwanej postaci $E(X)=E(E(X\,|\,Y))$, to otrzymuje się k-ty moment zwykły zmiennej losowej Z w następującej postaci:

$$E\left(Z^k\right) = \sum_{t=1}^{m\cdot n-1} v_{0,t}^k \cdot P\left(K_x^{(m)}=t\right) = \sum_{t=1}^{m\cdot n-1} P_{0,t}^k \cdot P\left(K_x^{(m)}=t\right),$$

przy czym ostatnia równość wynika z zależności $v_{0,t} = P_{0,t}$.

Prawdopodobieństwo $P\left(K_x^{(m)}=t\right)$ oznacza, że osoba w wieku x przeżyje t podokresów i umrze w ciągu kolejnego podokresu roku. Prawdopodobieństwa tego nie można odczytać bezpośrednio z tablic trwania życia, gdyż są one konstruowane dla całkowitego wieku. Znane są reguły przybliżania prawdopodobieństwa ułamkowego części roku (np. rozkład śmierci w ciągu roku jest jednostajny (por. [Bowers i in. 1986])). Prawdopodobieństwo to w ogólnym przypadku określone jest wzorem (por. [Marciniuk 2004]):

[2] Podział na równe części jest umowny, gdyż np. podział na 12 części oznacza, że rok jest podzielony na miesiące, które są jednak równej długości.

$$P\left(K_x^{(m)}=t\right)={}_{[t/m]}p_x\left({}_{(t\div m)}p_{x+[t/m]}-{}_{(t\div m)+(1/m)}p_{x+[t/m]}\right),$$

gdzie $[t/m]$ oznacza całkowitą liczbę lat, $(t\div m)$ zaś – ułamkową część roku.

Jeśli rozkład śmierci w ciągu roku jest jednostajny, to wzór ten ma postać:

$$P\left(K_x^{(m)}=t\right)=\frac{1}{m}\,{}_{[t/m]}p_x\cdot q_{x+[t/m]}.$$

W dalszej części artykułu przyjmuje się, że rozkład śmierci w ciągu roku jest jednostajny.

Jednorazowa składka netto $A_{x:\overline{n}|}^{1(m)}$ z zasady równoważności jest równa $E(Z)$, czyli

$$A_{x:\overline{n}|}^{1(m)}=E(Z)=\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m\cdot n-1}P_{0,t}\cdot{}_{[t/m]}p_x\cdot q_{x+[t/m]}. \tag{8}$$

Drugi moment zwykły zaktualizowanej wielkości świadczenia ${}^2A_{x:\overline{n}|}^{1(m)}$ jest określony następująco (por. [Bowers 1986]):

$${}^2A_{x:\overline{n}|}^{1(m)}=E\left(Z^2\right)=\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m\cdot n-1}P_{0,t}^2\cdot{}_{[t/m]}p_x\cdot q_{x+[t/m]}\,. \tag{9}$$

Okresową składkę netto wyznacza się z zasady równoważności mówiącej o tym, że w chwili zerowej przeciętne składki płacone przez cały okres ubezpieczenia lub do momentu śmierci równoważą przeciętną wielkość świadczenia, jaką będzie musiał pokryć ubezpieczyciel w przyszłości. Ogólnie składka P wyznaczana jest w następujący sposób:

$$P=\frac{bE(Z)}{E(Y)},$$

gdzie wielkość $E(Z)$ oznacza jednorazową składkę netto za ubezpieczenie, zgodnie z którym wypłacane jest świadczenie w wysokości b, $E(Y)$, jest to zaś wartość aktuarialna renty płatnej z góry.

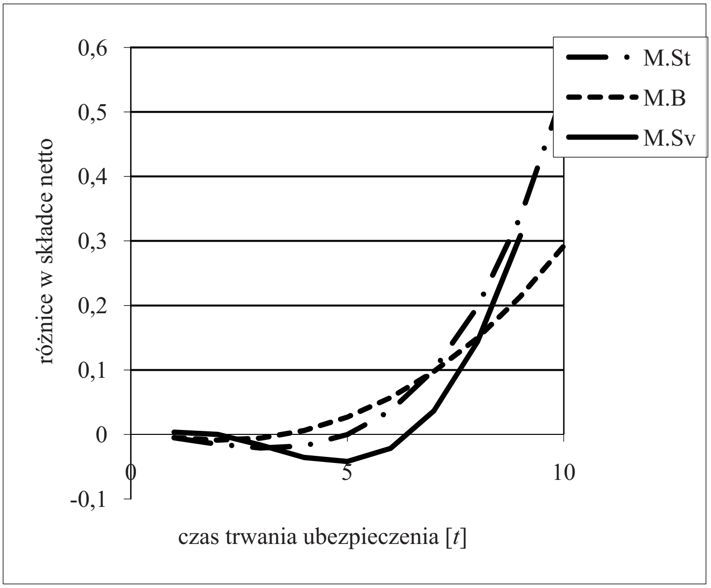
Jeżeli rozkład śmierci w ciągu roku jest jednostajny, to wartość aktuarialna renty płatnej z góry m razy w roku w wysokości $\frac{1}{m}$ jest określona następująco (por. [Marciniuk 2004]):

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}=E(Y)=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m\cdot n-1}P_{0,\frac{t}{m}}\cdot{}_{[t/m]}p_x\left(1-(t\div m)q_{x+[t/m]}\right). \tag{10}$$

Składka płatna przez n lat m_1 razy w roku w wysokości $P_{x:\overline{n}|}^{(m,m_1)}$ za n-letnie ubezpieczenie na wypadek śmierci ze świadczeniem płatnym w wysokości 1 j.p. na koniec m-tej części roku, w której umiera ubezpieczony, jest obliczana ze wzoru o postaci (por. [Bowers i in. 1986]):

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m,m_1)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1(m)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m_1)}}. \tag{11}$$

W dalszej części tekstu przedstawione są przykłady ilustrujące zastosowanie modeli natychmiastowej stopy procentowej z wykresu na rys. 1 w celu wyznaczenia jednorazowej i okresowej składki netto.



Rys. 2. Różnice w wysokości jednorazowe składki netto w stosunku do składki w przypadku modelu Nelsona-Siegela

Źródło: opracowanie własne.

Ilustracja dotyczy obliczenia wartości składki netto, a także odchylenia standardowego zaktualizowanej wielkości świadczenia w n-letnim ubezpieczeniu na życie dla 30-letniej kobiety. Świadczenie wypłacane jest w wysokości 10 000 zł na koniec roku śmierci. Składka $A_{x:\overline{n}|}^{1(1)}$ obliczona jest ze wzoru (8) dla $m = 1$ oraz $n = 1, 2, \dots, 10$, gdyż parametry dla wszystkich modeli otrzymane są dla danych o najdłuższym terminie wykupu równym 9,42. Prawdopodobieństwa ${}_t p_x$ określane są na podstawie tablic trwania życia dla kobiet ogółem z 2000 r. (por. [Ostasiewicz 2003]). Różnice w wysokości składek są jednak niewielkie, rzędu kilku groszy, przy sumie ubezpieczenia 10 000 zł, dlatego też na wykresie na rys. 2 przedstawione są różnice w wysokości składek w stosunku do modelu Neslona-Siegela. Wartości ujemne wskazują, że składka w przypadku modelu Nelsona-Siegela jest większa, zaś wartości dodatnie, że jest ona mniejsza.

Do danych najlepiej dopasowana jest funkcja Svenssona. W tym przypadku składka jest najniższa (dla $n \leq 7$). Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że w kolejnych latach wartości składki zaczynają się rozbiegać, choć w modelu Blissa wartości są porównywalne z wartościami składki w przypadku modelu Nelsona-Siegela. Składki w przypadku modelu Svenssona i Stoodleya są porównywalnej wysokości, jednak są one o kilkanaście złotych wyższe od pozostałych. Dla n = 10 różnice w wysokości składek są rzędu 0,55 gr. Dla większych n najniższa jest składka w modelu Nelsona-Siegela, co spowodowane jest tym, że w przypadku tego modelu wartość długoterminowej stopy procentowej jest najwyższa i równa 6,39% (składki obliczane przy wyższej stopie procentowej są niższe).

Odchylenie standardowe zmiennej losowej Z jest obliczane ze wzoru:

$$\sigma(Z) = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{{}^2A_{x:\overline{n}|}^{1(1)} - \left(A_{x:\overline{n}|}^{1(1)}\right)^2},$$

przy czym ${}^2A_{x:\overline{n}|}^{1(1)}$ wyznaczone jest ze wzoru (9). Różnice w wysokości $\sigma(Z)$ nie są znaczące, dlatego też wartości odchylenia standardowego zmiennej Z nie są prezentowane na wykresie. Wnioski są analogiczne jak dla $E(Z) = A_{x:\overline{n}|}^{1(1)}$.

W tabeli 2 przedstawiono jednorazowe składki w przypadku modelu Stoodleya, gdy świadczenie ubezpieczeniowe wypłacane jest na koniec roku $(m=1)$, na koniec półrocza $(m=2)$, na koniec kwartału $(m=4)$, na koniec miesiąca $(m=12)$ lub na koniec dnia $(m=365)$, w którym umiera ubezpieczony. W przypadku pozostałych modeli wyniki są analogiczne.

Wartości składki są najmniejsze dla m = 1, ale im większe m, tym różnice pomiędzy wartościami dla poprzedniego m są mniejsze. Wraz ze wzrostem długości trwania ubezpieczenia różnice te maleją. Różnice między składką dla m = 12 i m = 36 są mniejsze niż w przypadku m = 1 i m = 365. Na przykład, gdy świadczenie wypłacane jest na koniec dnia, składka jest jedynie o ok. 0,24-0,26% wyższa od składki płaconej za ubezpieczenie z wypłatą na koniec miesiąca oraz o 3-3,2% wyższa od składki płaconej za ubezpieczenie z wypłatą na koniec roku. Składki, gdy świadczenie wypłacane jest wcześniej niż na koniec roku, w którym umiera ubezpieczony, nie są znacznie wyższe od składek płaconych za ubezpieczenie z wypłatą świadczenia na koniec roku.

Z praktycznego punktu widzenia dla ubezpieczyciela wygodniej jest, gdy świadczenie wypłacane jest najwcześniej na koniec miesiąca, w którym umiera ubezpieczony. Również uposażony nie zawsze jest w stanie dostarczyć niezbędne dokumenty w dniu, w którym umiera ubezpieczony.

Tabela 2. Składka netto w ubezpieczeniu na życie na *n* lat ze świadczeniem płatnym na koniec *m*-tej części roku w przypadku modelu Stoodleya dla danych z tabeli

n	*m* = 1	*m* = 2	*m* = 4	*m* = 12	*m* = 365
1	4,2814	4,3513	4,3866	4,4102	4,4217
2	8,6564	8,7966	8,8674	8,9149	8,9379
3	13,0173	13,2266	13,3324	13,4032	13,4376
4	17,5112	17,7908	17,9320	18,0266	18,0725
5	22,1849	22,5364	22,7139	22,8329	22,8906
6	27,0753	27,5011	27,7160	27,8601	27,9300
7	32,2116	32,7142	32,9679	33,1379	33,2204
8	37,6778	38,2610	38,5555	38,7528	38,8485
9	43,5420	44,2106	44,5480	44,7742	44,8839
10	49,8029	50,5612	50,9440	51,2005	51,3249

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 wyznaczone są składki okresowe: roczne, półroczne, kwartalne, miesięczne i dzienne dla kobiety w wieku 30 lat w przypadku ubezpieczenia na życie na *n* lata ze świadczeniem płatnym na koniec roku, w którym ubezpieczona umrze, również dla modelu Stoodleya. Składki obliczone są ze wzoru (11), przy czym wartości aktuarialne renty życiowej − ze wzoru (10). Ze względu na niewielkie różnice między wartościami aktuarialnym renty płatnej raz w roku bądź częściej wielkości te nie są prezentowane. Natomiast wnioski są analogiczne, jak w przypadku składek jednorazowych i rocznych.

Tabela 3. Wysokość rocznej składki netto płatnej z góry przez *n* lat *m* razy w roku w tej samej wysokości w przypadku modelu Stoodleya

n	*m* = 1	*m* = 2	*m* = 4	*m* = 12	*m* = 365
1	9371,39	9524,02	9601,45	9653,49	9678,78
2	4537,62	4611,04	4648,29	4673,32	4685,48
3	2930,22	2977,33	3001,22	3017,28	3025,08
4	2129,24	2163,26	2180,51	2192,10	2197,73
5	1650,72	1676,94	1690,23	1699,17	1703,50
6	1333,36	1354,41	1365,09	1372,26	1375,74
7	1108,01	1125,40	1134,23	1140,15	1143,03
8	940,10	954,78	962,22	967,22	969,65
9	810,42	823,02	829,40	833,69	835,77
10	707,47	718,41	723,96	727,68	729,49

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 4 przedstawiono wartości składek dla wszystkich modeli dla dwóch okresów ubezpieczenia, mianowicie dla $n = 4$ i $n = 8$.

Tabela 4. Wysokość rocznej składki netto płatnej z góry przez $n = 4$ i $n = 8$ lat m razy w roku w tej samej wysokości

Model	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$	$m = 365$
$n = 4$					
Stoodleya	2129,24	2163,26	2180,51	2192,10	2197,73
Nelsona-Siegela	2125,26	2159,31	2176,58	2188,18	2193,81
Blissa	2131,55	2165,40	2182,56	2194,08	2199,67
Svenssona	**2118,08**	**2152,69**	**2170,237**	**2181,99**	**2187,70**
$n = 8$					
Stoodleya	940,10	954,78	962,22	967,22	969,65
Nelsona-Siegela	**925,15**	**940,03**	**947,59**	**952,66**	**955,13**
Blissa	932,14	946,88	954,35	959,38	961,82
Svenssona	943,08	957,86	965,35	970,37	972,80

Źródło: opracowanie własne.

Dla $n = 4$ najniższa jest składka w przypadku modelu Svenssona, najwyższa zaś − w przypadku modelu Blissa. Gdy $n = 8$, wówczas najniższa jest składka w przypadku modelu Nelsona-Siegela, a najwyższa − w przypadku modelu Svenssona. Różnice między składkami nie są duże. Różnice między najwyższą składką (model Blissa) a najniższą (model Svenssona) wynosi ok. 0,55% dla $n = 4$, zaś między najwyższą składką dla $n = 8$ (model Svenssona) a najniższą (model Nelsona-Siegela) wynosi ok. 1,85% dla $m = 365$. Ponieważ w przypadku modelu Nelsona-Siegela długoterminowa stopa procentowa dla rozpatrywanych danych jest najwyższa, dla wzrastającego n składka jest najniższa.

6. Podsumowanie i wnioski

W artykule zastosowano cenę obligacji zerokuponowej do wyznaczania składek netto na przykładzie ubezpieczenia na życie. Cena obligacji zerokuponowej określona jest za pomocą natychmiastowej stopy procentowej. Przedstawione są cztery modele takiej stopy procentowej, tj. model Stoodleya, Nelsona-Siegela, Blissa i Svenssona. W celu ilustracji zastosowań omówionych modeli metodą najmniejszych kwadratów oszacowano parametry funkcji stopy procentowej na podstawie rzeczywistych danych stopy zwrotu z cen 5- i 10-letnich obligacji o stałym oprocentowaniu oraz bonów skarbowych 13-, 26- i 52-tygodniowych. Najlepiej do danych dopasowany jest model Svenssona, a najgorzej − model Stoodleya.

Z przedstawionych przykładów wynika, że składki w pierwszych 10 latach (taki jest maksymalny termin wykupu obligacji) mają podobną wysokość. Składka w pierwszych siedmiu latach przyjmuje najmniejszą wartość w przypadku modelu Svenssona, a w kolejnych latach − w modelu Nelsona-Siegela. Najwyższa składka jest w przypadku modelu Stoodleya. Wraz ze wzrostem okresu ubezpieczenia wartość składki staje się zbliżona do wartości składki obliczonej przy założeniu stałej stopy procentowej równej długoterminowej stopie procentowej. Długoterminowa stopa procentowa dla przedstawionych danych jest najwyższa w odniesieniu do modelu Nelsona-Siegela, dlatego też składka w tym przypadku jest najniższa. Wnioski te są analogiczne do odchylenia standardowego zaktualizowanej wielkości świadczenia. Dla ubezpieczeń długoterminowych (np. na 30 lat), gdy danych jest mało i dotyczą one jedynie krótkich terminów (np. do 10 lat), wielkości aktuarialne (tj. składki, odchylenie standardowe zaktualizowanych wielkości świadczeń, renty, rezerwy) powinny być wyznaczane przy stałej stopie procentowej równej wartości długoterminowej stopy procentowej, a wynikającej z modelu natychmiastowej stopy procentowej.

W modelu, w którym składka jest najniższa, najniższe jest też odchylenie standardowe zaktualizowanej wielkości świadczenia. Teoretycznie firma ubezpieczeniowa mogłaby wybrać model, w którym składka jest wysoka, jednak w takiej sytuacji firma musi się liczyć z tym, że ryzyko straty jest większe, gdyż oprócz składki większe jest odchylenie standardowe zaktualizowanej wielkości świadczenia. Różnice w wysokości składki i odchylenia standardowego zaktualizowanej wielkości świadczenia dla poszczególnych modeli natychmiastowej stopy procentowej nie są znaczące. Każdy z tych modeli może być zastosowany do obliczeń wartości aktuarialnych, jednak najlepiej do zaprezentowanych danych dopasowany jest model Svenssona (jest to model najbardziej elastyczny i często stosowany).

Z przedstawionych ilustracji wynika również, że przy podziale roku na więcej niż 12 części (czyli miesięcy) wartości składek nie różnią się istotnie od wartości składek otrzymanych przy podziale roku na miesiące. Z praktycznego punktu widzenia składka powinna być pobierana, a renta wypłacana maksymalnie 12 razy w roku. Świadczenie ubezpieczeniowe z kolei może być wypłacane uposażonemu najwcześniej na koniec miesiąca, w którym umiera ubezpieczony. Nie ma sensu zbyt częste dokonywanie wpłat i wypłat.

Literatura

Anderson N., Breedon F., Deacon M., Derry A., Murphy G., *Estimating and Interpreting the Yield Curve*, John Wiley & Sons, Chichester 1996.

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois 1986.

Carriere J.F., *Martingale valuation of cash flows for insurance and interest models*, „North American Actuarial Journal" 2004, vol. 8, no 3, s. 1-16.

De Pooter M., *Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models*, working paper, 2007.

Deelstra G., *Long-term returns in stochastic interest rate models: applications*, „Astin Bulletin" 2000, vol. 30, no 1, s. 123-140.

http://bossa.pl/notowania/o/ciagle/obligacje/.

Jajuga K., *Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych – wyzwanie dla ekonometrii*, [w:] *Ekonometryczne modelowanie i prognozowanie wzrostu gospodarczego*, Fundacja Rozwoju Uniwersytetu Gdańskiego, Sopot 2005.

James J., Webber N., *Interest Rate Modelling*, John Wiley & Sons, New York 2000.

Jaworski J., Micał M., *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, Poltext, Warszawa 2005.

Marciniuk A., *Składki ubezpieczeń na życie ze świadczeniem płatnym na koniec podokresu roku śmierci ubezpieczonego*, [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, AE, Wrocław 2004.

Ostasiewicz S., *Składki w wybranych typach ubezpieczeń życiowych*, AE, Wrocław 2003.

Panjer H.H., Bellhouse D.R., *Stochastic modeling of interest rates with application to life contingencies*, „The Journal of Risk and Insurance" 1980, vol. 47, no 1, s. 91-110.

Svensson L.E.O., *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*, working paper 1994, 4871, s. 1-17.

Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1999.

NONRANDOM MODELS OF INSTANTANEOUS INTEREST RATE AND THEIR APPLICATION IN CLASSICAL LIFE INSURANCE

Summary: In the article a discounting function, which is not random but which depends on time is applied to the net premiums' calculation in the case of classical life insurance. The discounting function is treated as a price of a zero-coupon bond which is defined using the yield to maturity. Four models of such an interest rate are presented, the parameters of which are estimated on the basis of the treasury bonds' and treasury bills' yield to maturity. Then the calculated prices of the zero-coupon bonds are applied to calculate single and annual net premiums, as well as the second moment of the present value of the benefit. At the end the summary and the results are presented.