

Małgorzata Rószkiewicz

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

WIZUALIZACJA DANYCH NOMINALNYCH ORAZ RÓŻNEGO TYPU DANYCH PORZĄDKOWYCH W PROCEDURZE SKALOWANIA OPTYMALNEGO

Skalowanie optymalne należy do grupy metod, które wywodzą się z zaproponowanej w 1933 r. przez Richardsona i Kudera procedury określonej wtedy przez jej autorów mianem *Method of Reciprocal Averages* (za: [Nishisato 1994]). Z zaproponowanego wówczas rozwiązania, które umożliwiało przedstawienie w układzie współrzędnych danych nominalnych, rozwinęła się szeroka grupa metod i technik analitycznych odnoszących się do wizualizacji danych niemierzalnych. Wszystkie te metody bazują na własności określonej w algebrze macierzy, którą określa się jako dekompozycję macierzy według wartości osobliwych. Reguła ta przedstawiana na ogół w zapisie macierzowym (por. [Walesiak, Gatnar 2009, s. 386]) dla macierzy zdefiniowanej jako $F = [f_{ij}]$ może być również przybliżana następującą dekompozycją liniową [Nishisato 1978] :

$$f_{ij} = \frac{f_i \cdot f_j}{f_{..}} \left[1 + \rho_1 y_{i1} x_{j1} + \rho_2 y_{i2} x_{j2} + \dots + \rho_k y_{ik} x_{jk} \right], \quad (1)$$

gdzie: ρ_k jest k -tą największą wartością osobliwą, y_{ik} jest i -tym elementem wektora osobliwego y_k dla wierszy macierzy, x_{jk} zaś jest j -tym elementem wektora osobliwego x_k dla kolumn macierzy.

Jeśli macierz jest tablicą empirycznego rozkładu dwuwymiarowego, to wektory osobliwe mogą być traktowane jako wektory wag dla kategorii zmiennych zestawionych odpowiednio w wierszach i kolumnach tablicy. Kolejne elementy powyższej dekompozycji liniowej nazwane są rozwiązaniami, przy czym wartość 1 odnosi się do tzw. rozwiązania trywialnego, gdy zmienne zestawione odpowiednio w wierszach i kolumnach tablicy są statystycznie niezależne. Z tego powodu kombinacja liniowa wartości osobliwych bywa również określana mianem dekompozycji macierzy reszt, czyli macierzy, która pozostaje z tablicy danych po wyodrębnieniu z niej rozwiązania trywialnego.

Innym dobrze znanym ujęciem dekompozycji według wartości osobliwych są formuły transformacji, które Nishisato [1980] określił jako relacje dualne:

$$y_{ik} = \frac{1}{\rho_k} \frac{\sum_j f_{ij} x_{jk}}{f_{.i}} \quad \text{oraz} \quad x_{jk} = \frac{1}{\rho_k} \frac{\sum_i f_{ij} y_{ik}}{f_{.j}}. \quad (2)$$

Wagi y_{ik} oraz x_{jk} określane są mianem unormowanych wag (*normed weights*) [Nishisato 1980] lub standaryzowanych współrzędnych (*standard coordinates*) [Greenacre 1984]. Jeśli zaś przemnoży się je przez wartość osobliwą ρ_k , to otrzymuje się wagi zwane wagami rzutowania (*projected weights*) [Nishisato 1980] bądź określane mianem głównych współrzędnych (*principal coordinates*) [Greenacre 1984].

Odstępstwa od tych ogólnych reguł, które określa się w literaturze jako reguły skalowania optymalnego lub skalowania dualnego, mogą wynikać z różnych celów i prowadzić do modyfikacji bazowej procedury. Modyfikacje te dotyczą kryterium optymalizacji. Proponowane rozwiązania najczęściej polegają na:

- określeniu wektorów wag \mathbf{x}_k i \mathbf{y}_k tak, by uzyskać maksymalną korelację między danymi ważonymi przez te wagi,
- określeniu wag \mathbf{x}_k tak, by suma kwadratów międzywierszowych porównań była jak największa, oraz określeniu wag \mathbf{y}_k tak, by międzykolumnowa suma kwadratów była jak największa, w odniesieniu do całkowitej sumy kwadratów,
- określeniu tych obu systemów wag tak, by regresja ważonych kategorii kolumn względem ważonych kategorii wierszy i ważonych kategorii wierszy względem ważonych kategorii kolumn była zbieżna do liniowej,
- określeniu tych obu systemów wag tak, by standaryzowane różnice między obserwowanymi f_{ij} i teoretycznymi $\frac{f_{.i} f_{.j}}{f} \cdot \rho \cdot y_{ik} x_{jk}$ były jak najmniejsze.

Wszystkie te strategie prowadzą do identycznego zestawu rozwiązań, które można ogólnie zapisać jako triadę: (ρ_k, y_{ik}, x_{jk}) . Matematyczne dowody można znaleźć w pracach Nishisato [1980; 1994], Greenacre [1984] oraz w Gifi [1990]. Jak podkreśla Nishisato [1994], powyższy zbiór reguł jest adekwatny dla macierzy zestawiającej dane dowolnego typu, procedurę zdefiniowaną relacjami dualnymi zaś uznano za wyczerpującą podbudowę dla wielowymiarowej analizy danych niemierzalnych [Meulman 1998].

W większości przypadków dekompozycja macierzy danych ogranicza się do dwóch pierwszych rozwiązań, co pozwala dokonać wizualizacji danych odnoszących się do kategorii wierszy i kolumn w dwuwymiarowym układzie współrzędnych. Położenie wszystkich kategorii lub obiektów w tym układzie określają wartości wag \mathbf{x}_k i \mathbf{y}_k . W zależności od tego, jak konstruowana jest tablica danych, pełniąca funkcję macierzy F , inne będą charakterystyki rozwiązania, do których zalicza się¹:

- całkowitą liczbę nietrywialnych rozwiązań, $T(sol)$,

¹ Oznaczenia za [Nishisato 1994].

- całkowitą zawartość informacji w tzw. macierzy reszt, czyli gdy usunie się rozwiązanie trywialne, $T(\text{inf})$,
- zakres, w jakim konkretne rozwiązanie odtwarza całkowitą zawartość informacji macierzy reszt δ_k .

Poniżej przedstawiono zasady postępowania umożliwiające przeprowadzenie procedury skalowania optymalnego, a które odnoszą się do konstrukcji macierzy $F = [f_{ij}]$ na podstawie wyników pomiarów nominalnych i porządkowych. Wyróżniono dwu- i wielowymiarowy pomiar nominalny, pomiar nominalny polegający na rozsortowywaniu zbioru obiektów w grupy podobne oraz pomiar porządkowy o charakterze rangowym i odnoszący się do porównań parami.

Dane nominalne w układzie dwuwymiarowym

Skalowanie optymalne w przypadku danych nominalnych zestawionych w tablicy kontyngencji o wymiarach $n \times m$ jest tożsame z procedurą klasycznej analizy korespondencji [Stanimir 2005, s. 21-29; Walesiak, Gatnar 2009, s. 382-390], gdyż rozkład empiryczny w tym przypadku wprost definiuje macierz F . W pierwszym etapie następuje wyznaczenie liczebności oczekiwanych (teoretycznych), przy założeniu niezależności obu zestawionych w tablicy zmiennych (tzw. rozwiązanie try-

wialne). Na tej podstawie wyznacza się tablicę reszt $\left[f_{ij} - \frac{f_{i.}f_{.j}}{f_{..}} \right]$ która jest dekomponowana na niezależne składowe, czyli na kolejne rozwiązania. Tablica ta może być całkowicie wyjaśniona przez co najwyżej $[\min\{n,m\} - 1]$ rozwiązań (składowych).

Dane nominalne w układzie wielowymiarowym

W przypadku danych nominalnych pochodzących ze skal złożonych n określa liczbę wielowariantowych pozycji skali, numerowanych według $j = 1, 2, \dots, n$, z których każda ma m_j opcji wyboru. Wyniki pomiaru mogą być przedstawione w systemie zmiennych zero-jedynkowych dla każdej opcji wyboru każdej pozycji skali, wyznaczających tzw. macierz znaczników (por. [Stanimir 2005, s. 41-44; Walesiak, Gatnar 2009, s. 390-392]). Wymiary tablicy określone są przez liczbę wierszy odpowiadającą liczbie obserwacji N oraz liczbę kolumn $(m - n)$, gdzie $m = \sum_{j=1}^n m_j$. Dla

tak przetransformowanej macierzy danych istnieje również tzw. trywialne rozwiązanie oraz możliwa jest jej dekompozycja według wartości osobliwych. Tablica reszt może być wyjaśniona przez co najwyżej $\min\{(m - n), N - 1\}$ rozwiązań.

W tym miejscu warto wspomnieć, że w przypadku nominalnych skal złożonych możliwe są procedury, które mogą prowadzić do rozwiązania zdeterminowanego przez badacza. Macierz znaczników F tworzą bowiem macierze F_j zestawiające w systemie zero-jedynkowym odpowiedzi wszystkich respondentów wobec opcji każdej z n pozycji skali złożonej. Jeśli jedną z tych macierzy, np. F_s , przemnożymy przez stałą k , to im większa to będzie wartość, tym silniej pierwsze rozwiązanie bę-

dzie determinowane przez wyróżnioną w ten sposób macierz F_s . Wówczas w procedurze skalowania optymalnego warunek maksymalizacji średniej wewnątrzklasowej korelacji staje się warunkiem maksymalizacji korelacji między wyróżnioną w ten sposób pozycją skali opisaną macierzą F_s (np. zmienne opisujące ściśle określone wybory konsumenckie) i pozostałymi pozycjami. Procedura skalowania o tak zadanej klasyfikacji odpowiada procedurze analizy dyskryminacji dla danych jakościowych [Nishisato 1994]. Taka modyfikacja skalowania optymalnego w przypadku nominalnych skal złożonych prowadzi do zbudowania klasyfikacji, w której punktem odniesienia staje się wyróżniona stałą k pozycja skali.

W procedurach wizualizacji danych pochodzących z pomiaru na nominalnych skalach złożonych często uznaje się te skale za skale typu likertowskiego i kolejnym kategoriom przyporządkowuje wartości liczbowe, na ogół kolejne liczby naturalne. Pozwala to na wykorzystanie procedury głównych składowych do zredukowania wymiarów analizy, co z kolei umożliwia prezentację danych w dwuwymiarowym układzie współrzędnych. Warto zatem podkreślić różnice między skalowaniem optymalnym i procedurą głównych składowych, tym bardziej że obie metody mogą być stosowane w przypadku pomiarów na skalach porządkowych, o czym będzie mowa dalej. W procedurze skalowania optymalnego dane są prezentowane według kategorii odpowiedzi wybieranych przez respondentów, a jednostką analizy jest opcja wybierana przez respondenta w przypadku każdej pozycji skali złożonej. W procedurze głównych składowych jedynie pozycje skali (a nie ich opcje) są obiektami analizy (zmienne, a nie ich wartości). Celem metody głównych składowych jest skonstruowanie ważonej kombinacji pozycji skali (zmiennych) o największej zawartości informacji, mierzonej wariancją. Celem procedury skalowania optymalnego jest skonstruowanie takiej ważonej kombinacji poszczególnych opcji odpowiedzi w ramach poszczególnych pozycji skali, by maksymalizować ich liniowe korelacje. Zasadnicza różnica tkwi w tym, że procedura głównych składowych opiera się na relacjach liniowych między analizowanymi pozycjami skali, skalowanie optymalne zaś uwzględnia faktycznie występujące relacje, które liniowe być nie muszą. Warto podkreślić, że w metodzie głównych składowych nieliniowe zależności są odrzucane i dlatego metoda ta zwana jest również analizą liniową. W procedurze skalowania optymalnego zarówno liniowe, jak i nieliniowe zależności są uwzględniane w procedurze maksymalizowania liniowej korelacji.

Dane pochodzące z sortowania zbioru obiektów

Do pomiarów nominalnych zalicza się również pomiary polegające na porównywaniu obiektów i subiektywnym ich pogrupowaniu w podzbiory w zależności od oceny ich podobieństwa. W takiej sytuacji możliwe są wielorakie rozwiązania. W tego typu pomiarach nie wiadomo bowiem *a priori* ani, ile grup obiektów podobnych wyróżni każdy z respondentów, ani ile z nich uzna za identyczne. Ta swoboda oceny przekłada się na uzyskiwane wyniki, z których ustalone są jedynie wartości graniczne, czyli maksymalna liczba grup, jaką może wskazać respondent, a która

odpowiada liczbie ocenianych obiektów, oraz minimalny i maksymalny rozmiar każdej grupy, które wynoszą odpowiednio zero oraz wielkość zbioru ocenianych obiektów. Oznacza to, że w sytuacjach skrajnych respondent może wyróżnić tyle grup, ile jest obiektów, przypisując każdy obiekt do jednej grupy, co odpowiada sytuacji braku postrzegania jakiegokolwiek podobieństwa między ocenianymi obiektami. Może również wyróżnić tylko jedną grupę, do której przypisze wszystkie oceniane obiekty, uznając je za podobne, pozostałe zaś teoretycznie możliwe grupy będą puste. Takane [1980] wykazał, że można dokonać transformacji macierzy tak gromadzonych obserwacji do postaci odpowiadającej nominalnym skalom złożonym, a następnie przekształcić wyniki pomiaru do macierzy znaczników. Wymiar analizy wyznaczy wówczas maksymalna liczba grup możliwa dla każdego obiektu oraz liczba respondentów. Tym samym charakterystyki rozwiązania skalowania optymalnego w tym przypadku są identyczne z przedstawionymi wyżej. Warto zaznaczyć, że z racji pełnej swobody wyboru przez respondentów sposobu grupowania może wystąpić potrzeba wyznaczania więcej niż dwuwymiarowego rozwiązania, by zagwarantować odtworzenie znacznej części informacji zawartej w danych wyjściowych. Jest to pewien mankament posługiwania się tego typu danymi, gdyż rozwiązanie uzyskiwane w tym przypadku nie zawsze można ograniczyć do dwóch wymiarów, co uniemożliwi wizualizację danych wyjściowych.

Dane rangowe

W przypadku gdy pomiar polega na nadaniu rang n obiektom, od 1 do n (bez powtórzeń i przy założeniu, że liczba obiektów n jest mniejsza od liczby respondentów N), macierz obserwacji zawiera wartości porządkowe. Gdyby nie występowały indywidualne różnice w ujawnionych preferencjach, wystawiane oceny byłyby identyczne i takie jak ocena średnia dla obiektu. Występowanie indywidualnych różnic skutkuje określoną strukturą wielowymiarowej obserwacji. By umożliwić wizualizację tego typu danych w skalowaniu optymalnym, rekomenduje się przekształcenie obserwowanych danych w tzw. wskaźniki relatywnej popularności dla każdego obiektu ocenianego przez każdego respondenta. Przekształcenie dokonywane jest według formuły:

$$e_{ij} = n + 1 - 2R_{ij}, \quad (3)$$

gdzie: R_{ij} – ranga nadana i -temu obiektowi ocenianemu przez j -tego respondenta.

Macierz $\mathbf{E} = [e_{ij}]$ określa się mianem tablicy dominacji [Nishisato 1996]. Takie przekształcenie gwarantuje, że suma wskaźników e_{ij} dla każdego respondenta wynosi zero, wszystkie wartości tych wskaźników mieszczą się w przedziale $(-(n-1); (n-1))$. Przekształcenie to skutkuje sumowaniem się transformowanych rang w wierszach macierzy \mathbf{E} do tej samej wartości. Ma to swoje implikacje w przebiegu procedury numerycznej przez takie określenie rozkładów brzegowych macierzy \mathbf{E} , które uwzględnia, iż wyniki zestawione w tej macierzy powstają z dokonania $(n-1)$ porów-

nań każdego obiektu z pozostałymi $(n - 1)$ obiektami. Głównym celem procedury w przypadku skalowania tego typu danych jest ustalenie odpowiednich wag dla respondentów, odpowiednich w tym sensie, by wariancja ważonych średnich była największa. Wartości wyskalowane dla obiektów uzyskuje się zaś jako średnie ich zróżnicowanie ważne przez wagi nadane respondentom.

Ponieważ macierz danych wyjściowych zestawia respondentów i oceniane rangowo obiekty, zatem dla tego typu danych istnieje ścisła formuła wizualizacji [Nishisato 1996]. Położenie respondentów określają unormowane wagi, położenie obiektów zaś główne współrzędne. W przestrzeni całkowitej otrzymuje się taką konfigurację, że wobec każdego respondenta najbliższym położony jest ten obiekt, który był przez niego rangowany jako pierwszy, następnie ulokowany jest ten obiekt, który był przez niego rangowany jako drugi itd. (po wszystkich respondentach i po wszystkich obiektach). Ulokowanie respondentów wobec ocenianych obiektów na jednym wykresie umożliwia pomiar odległości poszczególnych respondentów od ocenianych przez nich obiektów. W pomiarze tym porównuje się wagi unormowane z głównymi współrzędnymi. Odległości te umożliwiają zbudowanie rankingu wynikającego z przestrzeni rzutowania, a następnie jego porównanie z rankingiem zapisanym w danych wyjściowych. W ten sposób można dokonać oceny stopnia zbieżności każdego rozwiązania z danymi wyjściowymi.

Greenacre i Torres-Lacomba [1999] wykazali, że możliwa jest również inna transformacja danych empirycznych pochodzących z pomiarów porządkowych, w wyniku której uzyskuje się rozwiązanie skalowania optymalnego całkowicie zbieżne z analizą korespondencji. Transformacja ta polega na skonstruowaniu swego rodzaju „odbicia lustrzanego” danych empirycznych według rekordów, co określa się często mianem ocen „anty-ekspertów” (por. [Stanimir 2005, s. 109]). Wartości te wyznacza się jako oceny o całkowicie przeciwnym porządku do ocen wystawionych badanym obiektom przez kolejnych respondentów. W ten sposób każdy respondent uzyskuje swoją przeciwwagę w macierzy danych. Różnica w tym podejściu sprowadza się do tego, że utworzona macierz, w przeciwieństwie do macierzy dominacji, nie zawiera wartości ujemnych.

Dane z porównań parami

W pomiarze polegającym na porównaniach parami respondent wskazuje preferowany przez niego obiekt z każdej pary. Dla n obiektów tworzone są wszystkie $n(n - 1)/2$ możliwe pary, które są prezentowane N respondentom. Zbierane tą drogą dane mają z matematycznego punktu widzenia tę samą strukturę co dane pochodzące z oceny przez N respondentów n obiektów w systemie rangowania. Zatem charakterystyki procedury są identyczne z przedstawionymi wyżej. Jedyna różnica polega na tym, że w pomiarze rangowym respondent musi dokonać uporządkowania wszystkich obiektów w jednym szeregu, w pomiarze porównań parami zaś respondent musi dokonać wyborów, które są nieprzechodnie. W rezultacie dla i -tego respondenta i pary obiektów (X_j, X_k) definiowana jest funkcja [Nishisato 1978]:

$${}_i f_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X_j > X_k \\ 0 & \text{jeśli } X_j = X_k \\ -1 & \text{jeśli } X_j < X_k \end{cases} \quad (4)$$

Macierz dominacji powstaje jako układ wierszowo-kolumnowy, gdzie wiersze odnoszą się do poszczególnych respondentów, kolumny zaś do badanych obiektów, a poszczególne jej elementy wyznaczone są z warunku:

$$e_{ij} = \sum_{k=1, k \neq j}^n {}_i f_{jk} \quad (5)$$

gdzie: e_{ij} jest liczbą przypadków, gdy i -ty respondent preferuje X_j nad X_k , pomniejszoną o liczbę przypadków, gdy respondent preferuje inne obiekty niż X_j .

By podsumować opisane wyżej przypadki, w tab. 1 zestawiono charakterystyki rozwiązań, które uzyskuje się w procedurze skalowania optymalnego wyróżnionych wyżej typów danych empirycznych. Jak wspomniano na wstępie, zasadnicze różnice w skalowaniu optymalnym danych niemierzalnych sprowadzają się bowiem do odmienności w kształtowaniu się całkowitej zawartości informacji w macierzy reszt, całkowitej liczby rozwiązań nietrywialnych oraz w stopniu odtwarzania całkowitej informacji przez k -te rozwiązanie.

Tabela 1. Charakterystyki rozwiązań skalowania optymalnego w zależności od rodzaju danych empirycznych pochodzących z pomiarów nominalnych i porządkowych

Typ danych poddanych skalowaniu optymalnemu	Całkowita liczba nietrywialnych rozwiązań $T(sol)$	Całkowita zawartość informacji w macierzy reszt $T(Inf)$	Stożek odtwarzania całkowitej informacji przez k -te rozwiązanie δ_k
Dane nominalne zestawione w tablicy kontyngencji o wymiarach $n \times m$	$\min\{n, m\} - 1$	$\sum_{k=1}^{\min\{n, m\}-1} \rho_k^2 = \frac{\chi^2}{f_t}$	$\rho_k/T(Inf)$
Dane nominalne pochodzące ze skal złożonych	$\min\{(m - n), N - 1\}$	$\sum_{k=1}^{m-n} \rho_k^2 = \frac{\sum_{j=1}^n m_j}{n} - 1 = \bar{m} - 1$	$\rho_k/T(Inf)$
Dane pochodzące z sortowania	$\min\{(m - n), N - 1\}$	$\sum_{k=1}^{m-n} \rho_k^2 = \frac{\sum_{j=1}^n m_j}{n} - 1 = \bar{m} - 1$	$\rho_k/T(Inf)$
Dane rangowane	$n - 1$	$\frac{n + 1}{3(n - 1)}$	$\rho_k/T(Inf)$
Dane pochodzące z porównań parami	$n - 1$	$\frac{n + 1}{3(n - 1)}$	$\rho_k/T(Inf)$

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Nishisato 1993, s. 617-629].

Podsumowanie

Przedstawione sposoby pozyskiwania danych, które pochodzą z pomiarów zarówno nominalnych, jak i porządkowych, mogą z powodzeniem być wykorzystane w procedurze skalowania optymalnego, umożliwiając ich wizualizację. Mocną stroną tej procedury jest to, że nie filtruje ona zależności pod kątem liniowości, a ponadto pozwala zadawać klasyfikację obiektów w zależności od postawionych celów badawczych. Warto podkreślić, że istota procedury polega na zbudowaniu tablicy liczebności z danych wyjściowych, by w dalszej kolejności dokonać jej dekompozycji według wartości osobliwych, co jest drogą do transformacji danych wielowymiarowych w przestrzeń dwuwymiarową i ich wizualizacji. Wielkości stanowiące elementy tablicy liczebności mogą być definiowane w różny sposób, czyli nie tylko jako liczby wyróżnionych przypadków, lecz również jako dominacje.

Literatura

- Coombs C.H., *A Theory of Data*, John Wiley, New York 1964.
- Cronbach L.J., *Coefficient Alpha and the Internal Structure of Tests*, „Psychometrika” 1951 no 16, s. 297-334.
- Gifi A., *Nonlinear Multivariate Analysis*, John Wiley, New York 1990.
- Greenacre M.J., *Theory and Application of Correspondence Analysis*, Academic Press, London 1984.
- Greenacre M.J., Torres-Lacomba A., *A Note on the Dual Scaling of Dominance Data and Its Relationship to Correspondence Analysis*, Working Paper, Barcelona, Department d’Economia I Empresa, Universitat Pompeu Fabra, 1999, no 430.
- Lord F.M., *Some Relations between Guttman’s Principal Components of Scale Analysis and Others Psychometric Theory*, „Psychometrika” 1958 no 23, s. 291-296.
- Meulman J.J., *Review of W.J. Krzanowski and F.H.C. Marriott “Multivariate Analysis: Part I. Distributions, Ordinations and Inference”*, „Journal of Classification” 1998 no 15, s. 297-298.
- Nishisato S., *Optimal Scaling of Paired Comparison and Rank Order Data: an Alternative To Guttman’s Formulation*, „Psychometrika” 1978 no 43, s. 263-271.
- Nishisato S., *Analysis of Categorical Data: Dual Scaling and Its Application*, University of Toronto Press, Toronto 1980 [maszynopis powielany].
- Nishisato S., *On Quantifying Different Types of Categorical Data*, „Psychometrika” 1993 no 58, s. 617-629.
- Nishisato S., *Elements of Dual Scaling*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum, New York 1994.
- Nishisato S., *Gleaning in the Field and Dual Scaling*, „Psychometrika” 1996 no 61, s. 559-599.
- Nishisato S., *Geometric Perspective of Dual Scaling for Assessment of Information in Data*, [w:] *New Development in Psychometrics*, H. Yanai, A. Okada, K. Shigemasa, Y. Kano, J.J. Meulman (red.), Springer-Verlag, Tokyo 2003, s. 453-463.
- Stanimir A., *Analiza korespondencji jako narzędzie do badania zjawisk ekonomicznych*, AE, Wrocław 2005.
- Takane Y., *Analysis of Categorizing Behavior*, „Behaviormetrika” 1980 no 8, s. 75-86.

van de Velden M., *Dual Scaling and Correspondence Analysis: A History and French Sociological Perspectives*, [w:] *Correspondence Analysis in the Social Sciences*, M. Greenacre, J. Blasius (red.), Academic Press, London 2000, s. 128-137.

Walesiak M., Gatnar E. (red.), *Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.

VISUALIZATION OF CATEGORICAL DATA IN PROCEDURE OF OPTIMAL SCALING

Summary

The paper focuses on the topic of optimal scaling of categorical data – the method of building the quantitative representation of qualitative experiences. The main goal of non-metric data visualization is to extract as much information as possible from linear and nonlinear relations among variables. Optimal scaling is a method to accomplish this goal by assigning optimal spaced weights to variables. The paper presents some examples of transformation categorical data (nominal and ordinal) to the procedure of optimal scaling.