PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 48 — 2009
Zarządzanie finansami firm – teoria i praktyka

Dorota Gawrońska

Politechnika Śląska

OCENA EFEKTYWNOŚCI PROJEKTU INWESTYCYJNEGO NA PODSTAWIE INDEKSU ZYSKOWNOŚCI PI W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

1. Wstęp

Rozwój przedsiębiorstw jest realizowany przez wdrażanie projektów inwestycyjnych ze sfery rzeczowej. Każdy projekt jest wszechstronnie analizowany i będzie on realizowany tylko wtedy, gdy spodziewane korzyści będą wyższe od nakładów. W tym celu dokonuje się analizy wariantów inwestycyjnych pod względem ich efektywności [Pluta, Jajuga 1995]. Ze względu na różne czynniki determinujące rzeczywisty przebieg inwestycji poszczególne faktyczne wielkości mogą różnić się, odchylać od przyjętych, szacowanych mniej lub bardziej subiektywnie wielkości w rachunku jej opłacalności. W procedurach obliczeniowych używa się takich kategorii, jak: wydatki inwestycyjne, stopa zwrotu z inwestycji (zysk, nadwyżka finansowa, dochód), dochód, okres obliczeniowy, wartość końcowa rezydualna, stopa procentowa (dyskontowa), stopa wzrostu [Pomykalska, Pomykalski 2007]. Jest wiele modeli szacowania opłacalności projektów inwestycyjnych. Jeden z nich to indeks zyskowności PI (*Profitability Index*).

2. Indeks zyskowności PI

Wskaźnik PI jest jedną z metod oceny projektów inwestycyjnych. Podstawową wielkością jest tutaj iloraz (indeks) dodatniego strumienia gotówki (*cash inflows*) do ujemnego strumienia gotówki (*cash outflows*). Przy wartości tego indeksu większej od jedności wariant inwestycyjny jest efektywny, ponieważ dodatni strumień przeważa nad ujemnym strumieniem gotówki. Przy wartości indeksu mniejszej od jedności wartości ujemne strumienia przeważają nad dodatnimi – wtedy taki projekt inwestycyjny jest odrzucany, ponieważ jego przyjęcie przyniesie straty.

Model ten może być stosowany do wyboru jednego z kilku możliwych projektów. Wybiera się wówczas ten projekt, dla którego PI osiąga wartość maksymalną. Wartość tego wskaźnika liczymy następująco [Pluta 2000]:

$$PI = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{CIF_t}{(1+d)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{COF_t}{(1+d)^t}}, \tag{1}$$

gdzie: d – wartość stopy dyskontowej,
CIF_t – strumienie dodatnie gotówki (dochody) w okresie t,
COF_t – ujemne strumienie gotówki (nakłady inwestycyjne) w okresie t,
T – czas trwania inwestycji.

W klasycznym podejściu obliczenie parametrów finansowych inwestycji rzeczowych bazuje na wartościach ostrych i pewnych. Niedoskonałością powyższego wskaźnika finansowego jest bazowanie na stałej wartości stopy dyskontowej w kolejnych etapach inwestycji oraz na przyjęciu dyskretnych wartości przepływów finansowych. Wydaje się, że zasadne byłoby uwzględnienie niepełnej informacji co do wartości przepływów finansowych i stopy dyskontowej w kolejnych okresach trwania inwestycji, tym bardziej że inwestycje planowane są zazwyczaj na długi okres . Celem niniejszej pracy będzie przedstawienie wyboru najbardziej opłacalnego projektu na podstawie wskaźnika PI z uwzględnieniem rozmytych wartości przepływów pieniężnych oraz stopy dyskontowej.

3. Określenie wskaźnika PI na podstawie rozmytych wartości przepływów finansowych i stopy dyskontowej

Zakłada się, że przy określaniu ocen bierze udział E ekspertów, którzy oceniają N projektów inwestycyjnych. Określony zostaje zbiór badanych projektów P:

$$P = \{P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_N\},\ i = 1,.., N, \tag{2}$$

oraz zbiór ekspertów M:

$$M = \{M_1, M_2, \ldots, M_j, \ldots, M_E\}\ j = 1,.., E. \tag{3}$$

Zadaniem jest znalezienie takiego projektu inwestycyjnego, dla którego osiągnięte zostanie maksimum oceny wskaźnika PI. Przyjmuje się jako okres trwania inwestycji T.

3.1. Ocena stopnia zaufania do ekspertów

Ważność każdego eksperta jest dana w postaci liczby rozmytej (typu LR) *Vj*. Reprezentacja *LR* jest charakteryzowana przez trzy parametry: m, α, β, co zapisuje się jako $A = (m, \alpha, \beta)$ [Łachwa 2001]. Parametr m jest liczbą rzeczywistą zwaną wartością średnią (*mean value*), α, β są odpowiednio „rozrzutem" lewostronnym i prawostronnym (*left and wright spreads*), L i R zaś to ustalone funkcje bazowe, zwane też funkcjami odniesienia (*reference function, shape function*).

Liczba *Vj* określona jest charakterystyczną trójką (m_{Vj}, α_{Vj}, β_{Vj}), gdzie α_{Vj}, $\beta_{Vj} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (przedział określony przez inwestora określający niepewność co do precyzji tego określenia), m_{Vj} to ustalona wartość – najbardziej oczekiwana przez inwestora bądź średnia liczona zgodnie ze wzorem (4), a funkcje L i R określone są wzorem (5). Inwestor, dokonując oceny v, traktuje ją jako „około v_j^{mod}", przy czym swoją niepewność co do precyzyjnego określenia wyraża w postaci wielkości [$v_j^{\min}, v_j^{\max}$].

$$v_j^{\text{mod}} = \frac{v_j^{\min} + v_j^{\max}}{2}, \tag{4}$$

$$L(v_j) = R(v_j) = \begin{cases} 0 & dla \quad v_j < m_{Vj} - \alpha_{Vj} \\ 1 - |v_j| & dla \quad m_{Vj} + \beta_{Vj} \geq v \ \geq m_{Vj} - \alpha_{Vj}. \\ 0 & dla \quad v_j > m_{Vj} + \beta_V j \end{cases} \tag{5}$$

Funkcja przynależności ważności eksperta $\mu_{Vj}(vj)$ jest następująca:

$$\mu_{Vj}(v_j) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{Vj} - v_j}{\alpha_{Vj}}\right) & dla \quad v_j < m_{Vj} \\ 1 & dla \quad m_{Vj} = v_j \quad . \\ R\left(\dfrac{v_j - m_{Vj}}{\beta_{Vj}}\right) & dla \quad v_j > m_{Vj} \end{cases} \tag{6}$$

Zakłada się, że ważności ekspertów są określone na przedziale [0,1], co związane z warunkiem, że suma zaufania do ekspertów musi wynosić 1. Otrzymujemy wtedy warunek na wagi określające zaufanie do poszczególnych ekspertów:

$$\sum_{j=1}^{E} V(j) = 1. \tag{7}$$

Ponieważ mamy do czynienia z sumą liczb rozmytych, należy dokonać defuzyfikacji. Spośród wielu metod najbardziej wiarygodną w tym zagadnieniu jest metoda środka ciężkości, przypisująca funkcji przynależności liczbę rzeczywistą, określającą współrzędną środka ciężkości pola pod wykresem funkcji. Stosując metodę środka ciężkości, obliczamy środek ciężkości dla każdej liczby Vj:

$$V(j) = \frac{\int_0^1 v_j \cdot \mu_{Vj} dv_j}{\int_0^1 \mu_{Vj}(v_j) dv_j}, \tag{8}$$

a następnie sprawdzamy warunek (7). W przypadku niespełnienia tego warunku należy ponownie dokonać oceny zaufania do ekspertów.

3.2. Określenie oceny wskaźnika PI

Przepływy pieniężne i stopa dyskontowa określane są jako zmienne rozmyte typu LR. Eksperci dokonują oceny dodatnich, ujemnych strumieni pieniężnych oraz stopy dyskontowej. Ze względu na przyjęcie zmiennych, które określają przepływy pieniężne i stopę dyskontową, jako zmienne rozmyte typu LR przyjmuję liczby rozmyte określające dodatnie strumienie pieniężne CIF_{ijt}, ujemne strumienie pieniężne COF_{ijt} oraz stopę dyskontową D_{ijt_z}. Ekspert dokonuje oceny, podając przedział określający niepewność co do precyzji tego określenia (α, β); dodatkowo można podać wartość najbardziej oczekiwaną m.

Ocena dodatnich strumieni pieniężnych CIF_{ijt} i-tego projektu przez j-tego eksperta w czasie t jest modelowana za pomocą liczby rozmytej typu LR o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_{CIFijt}(cif_{ijt}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{CIFijt} - cif_{ijt}}{\alpha_{CIFijt}}\right) & dla \quad cif_{ijt} < m_{CIFijt} \\ 1 \quad dla \quad cif_{ijt} = m_{CIFijt} & \\ R\left(\dfrac{cif_{ijt} - m_{CIFijt}}{\beta_{CIFijt}}\right) & dla \quad cif_{ijt} > m_{CIFiijt} \end{cases}, \tag{9}$$

gdzie CIF_{ijt} określone jest charakterystyczną trójką ($m_{CIF_{ijt}}, \alpha_{CIF_{ijt}}, \beta_{CIF_{ijt}}$) oraz gdzie $\alpha_{CIF_{ijt}}, \beta_{CIF_{ijt}} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (przedział określony przez eksperta $[cif_{ijt}^{\min}, cif_{ijt}^{\max}]$ wyrażający jego niepewność), $m_{CIF_{ijt}}$ to wartość ustalona przez eksperta jako najbardziej prawdopodobna bądź wartość liczona ze wzoru (10) w przypadku niepodania tej wartości przez eksperta, L i R zaś to ustalone funkcje bazowe (11).

$$cif_{ijt}^{\text{mod}} = \frac{cf_{ijt}^{\min} + cf_{ijt}^{\max}}{2}, \tag{10}$$

$$L(cif_{ijt}) = R(cif_{ijt}) = \begin{cases} 0 & dla \quad cif_{ijt} < m_{CIF_{ijt}} - \alpha_{CIF_{ijt}} \\ 1 - \left|cif_{ijt}\right| & dla \quad m_{CIF_{ijt}} + \beta_{CIF_{ijt}} \geq cif_{ijt} \geq m_{CIF_{ijt}} - \alpha_{CIF_{ijt}}. \\ 0 & dla \quad cif_{ijt} > m_{CIF_{ijt}} + \beta_{CIF_{ijt}} \end{cases} \tag{11}$$

Biorąc pod uwagę powyższe założenia, można przyjąć, że:

$$cif_{ijt}^{\min} = m_{CIF_{jit}} - \alpha_{CIF_{ijt}} \tag{12}$$

$$cif_{ijt}^{\max} = m_{CIF_{ijt}} + \beta_{CIF_{ijt}}. \tag{13}$$

Ocena ujemnych strumieni pieniężnych COF_{ijt} *i*-tego projektu przez *j*-tego eksperta w czasie t jest modelowana za pomocą liczby rozmytej typu LR o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_{COFijt}(cof_{ijt}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{COFijt} - cof_{ijt}}{\alpha_{COFijt}}\right) & dla \quad cof_{ijt} < m_{COFijt} \\ 1 \quad dla \quad cof_{ijt} = m_{COFijt} \\ R\left(\dfrac{cof_{ijt} - m_{COFijt}}{\beta_{COFijt}}\right) & dla \quad cof_{ijt} > m_{COFiijt} \end{cases}, \tag{14}$$

gdzie COF_{ijt} określone jest charakterystyczną trójką (m_{COFijt}, α_{COFijt}, β_{COFijt}) oraz gdzie α_{COFijt}, $\beta_{COFijt} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (przedział określony przez eksperta $[cof_{ijt}^{\min}, cof_{ijt}^{\max}]$, wyrażający jego niepewność), m_{COFijt} to wartość ustalona przez eksperta jako najbardziej prawdopodobna bądź w przypadku braku jej podania liczona ze wzoru (15), *L* i *R* zaś to ustalone funkcje bazowe (16):

$$cof_{ijt}^{\text{mod}} = \frac{cof_{ijt}^{\min} + cof_{ijt}^{\max}}{2} \tag{15}$$

$$L(cof_{ijt}) = R(cof_{ijt}) = \begin{cases} 0 & dla \quad cof_{ijt} < m_{COF_{ijt}} - \alpha_{COF_{ijt}} \\ 1 - \left| cof_{ijt} \right| & dla \quad m_{COF_{ijt}} + \beta_{COF_{ijt}} \geq cof_{ijt} \geq m_{COF_{ijt}} - \alpha_{COF_{ijt}} \\ 0 & dla \quad cof_{ijt} > m_{COF_{ijt}} + \beta_{COF_{ijt}} \end{cases}. \quad (16)$$

Biorąc pod uwagę powyższe założenia, można przyjąć, że:

$$cof_{ijt}^{\min} = m_{COF_{jit}} - \alpha_{COF_{ijt}}, \quad (17)$$

$$cof_{ijt}^{\max} = m_{COF_{ijt}} + \beta_{COF_{ijt}}. \quad (18)$$

Ocena stopy dyskontowej D_{ijt_z} i-tego projektu j-tego eksperta w czasie t_z jest modelowana za pomocą liczby rozmytej typu LR o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_{D_{ijt_z}}(d_{ijt}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{D_{ijt_z}} - d_{ijt}}{\alpha_{D_{ijt_z}}}\right) & dla \quad d_{ijt} < m_{D_{ijt_z}} \\ 1 & dla \quad d_{ijt} = m_{D_{ijt_z}} \\ R\left(\dfrac{d_{ijt} - m_{D_{ijt_z}}}{\beta_{D_{ijt_z}}}\right) & dla \quad d_{ijt} > m_{D_{ijt_z}} \end{cases}, \quad (19)$$

gdzie D_{ijt_z} określone jest charakterystyczną trójką ($m_{D_{ijt_z}}$, $\alpha_{D_{ijt_z}}$, $\beta_{D_{ijt_z}}$) oraz gdzie $\alpha_{D_{ijt_z}}$, $\beta_{D_{ijt_z}} > 0$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne (określone przez eksperta jako wyraz niepewności $[d_{ijt_z}^{\min}, d_{ijt_z}^{\max}]$), $m_{D_{ijt_z}}$ to wartość ustalona przez eksperta bądź liczona ze wzoru (20), L i R zaś to ustalone funkcje bazowe (21).

$$d_{ijt_z}^{\text{mod}} = \frac{d_{ijt_z}^{\min} + d_{ijt_z}^{\max}}{2}, \quad (20)$$

$$L(d_{ijt}) = R(d_{ijt}) = \begin{cases} 0 & dla \quad d_{ijt} < m_{D_{ijt_z}} - \alpha_{D_{ijt_z}} \\ 1 - \left| d_{ijt} \right| & dla \quad m_{D_{ijt_z}} + \beta_{D_{ijt_z}} \geq d_{ijt} \geq m_{D_{ijt_z}} - \alpha_{D_{ijt_z}} \\ 0 & dla \quad d_{ijt} > m_{D_{ijt_z}} + \beta_{D_{ijt_z}} \end{cases}. \quad (21)$$

Zważywszy na przyjęte założenia odnośnie do przedziału wartości podanej przez eksperta, otrzymujemy:

$$d_{ijt}^{\min} = m_{D_{ijt_z}} - \alpha_{D_{ijt_z}}, \tag{22}$$

$$d_{ijt}^{\max} = m_{D_{ijt_z}} + \beta_{D_{ijt_z}}. \tag{23}$$

Mając określone wielkości strumieni pieniężnych czy ogólnie przepływów pieniężnych dla każdego eksperta, można wyznaczyć oceny rozmyte typu *LR* projektów inwestycyjnych $PI_{ij}(m_{PI_{ij}}, \alpha_{PI_{ij}}, \beta_{PI_{ij}})$, zgodnie ze wzorem:

$$PI_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{CIF_{ijt}}{\prod_{t_z=1}^{t}(1 + D_{ijt_z})}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{COF_{ijt}}{\prod_{t_z=1}^{t}(1 + D_{ijt_z})}}. \tag{24}$$

Na podstawie ocen CIF_{ijt}, COF_{ijt}, D_{ijt_z} wyznacza się dla każdego eksperta ocenę rozmytą wskaźnika PI_{ij} typu LR i opisaną charakterystyczną trójką $m_{PI_{ij}}$, $\alpha_{PI_{ij}}$, $\beta_{PI_{ij}}$, gdzie $\alpha_{PI_{ij}}$, $\beta_{PI_{ij}}$ to ustalone rozrzuty lewo- i prawostronne, a $m_{PI_{ij}}$ to wartość najbardziej prawdopodobna.

Funkcję przynależności $\mu_{PI_{ij}}$ liczby (pi_{ij}) można przedstawić następująco:

$$\mu_{PI_{ij}}(pi_{ij}) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_{PI_{ij}} - pi_{ij}}{\alpha_{PI_{ij}}}\right) & dla \quad pi_{ij} < m_{PI_{ij}} \\ 1 \quad dla \quad pi_{ij} = m_{PI_{ij}} \\ R\left(\dfrac{pi_{ij} - m_{PI_{ij}}}{\beta_{PI_{ij}}}\right) & dla \quad pi_{ij} > m_{PI_{ij}} \end{cases}. \tag{25}$$

Natomiast funkcje *L* i *R* określamy według formuł:

$$L(pi_{ij}) = R(pi_{ij}) = \begin{cases} 0 & dla \quad pi_{ij} < m_{PI_{ij}} - \alpha_{PI_{ij}} \\ 1 - \left| pi_{ij} \right| & dla \quad m_{PI_{ij}} + \beta_{PI_{ij}} \geq pi_{ij} \geq m_{PI_{ij}} - \alpha_{PI_{ij}} \\ 0 & dla \quad pi_{ij} > m_{PI_{ij}} + \beta_{PI_{ij}} \end{cases}. \quad (26)$$

W celu określenia wartości wskaźnika PI dla każdego eksperta oraz dla każdego projektu można posłużyć się wzorami na operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych typu *LR*, które są operacjami na opisanych trzech parametrach [Piegat 1999].

Mając określone wartości PI dla każdego eksperta, oblicza się ocenę łączną dla każdego projektu *i*.

3.3. Określenie oceny łącznej projektu względem wskaźnika PI

W celu określenia łącznej oceny projektu względem wskaźnika PI na podstawie ocen poszczególnych ekspertów należy wyznaczyć ważoną ocenę uwzględniającą zaufanie do poszczególnych:

$$PI_i = \frac{\sum_{j=1}^{E} V_j \cdot PI_{ij}}{\sum_{j=1}^{E} V_j}. \quad (27)$$

Poszukując maksymalnej wartości rozmytej kryterium PI dla każdego projektu ze zbioru *N*, należy dokonać jej defuzyfikacji, np. stosując metodę środka ciężkości. Uzyskujemy wtedy rzeczywistą wartość oceny projektu względem kryterium PI: *PI*(*i*). Optymalizacja sprowadza się wtedy do zadania poszukiwania rozwiązania, dla którego wartość oceny kryterium PI jest maksymalna:

$$PI(i) \rightarrow MAX \quad (28)$$

Maksymalna wartość PI(i) wyznaczy optymalny projekt ze względu na wskaźnik PI.

4. Podsumowanie

Informacja, na bazie której podejmuje się decyzje dotyczące inwestycji, jest nieprecyzyjna. Ogranicza to znacznie skuteczność i efektywność różnych metod projektowania, sterowania, modelowania, prognozowania itd. Dla tego typu informacji wykorzystywana jest teoria zbiorów rozmytych [Driankow, Hellendoorn, Reinfrank 1996].

Ocena efektywności inwestycji rzeczowych jest zadaniem skomplikowanym, ponieważ ma wskazać jak najlepsze rozwiązanie spośród proponowanych, w sytuacji kiedy nie są jeszcze dokładnie znane wszystkie potrzebne do podjęcia decyzji parametry finansowe. Dzięki przyjęciu rozmytości parametru stopy dyskontowej oraz przepływów pieniężnych w kolejnych okresach trwania inwestycji można dokładniej określić opłacalność projektu. Aby jednak dokonać głębszej analizy efektywności badanych projektów, należy wziąć pod uwagę również inne wskaźniki efektywności projektu, jak: NPV, IRR czy PB, i dopiero wtedy podjąć decyzję o przyjęciu bądź odrzuceniu projektu [Wilczek 2004].

Literatura

Chojcan J., *Zbiory rozmyte i ich zastosowanie*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2001.
Driankow D., Hellendoorn H., Reinfrank M., *Wprowadzenie do sterowania rozmytego*, WNT, Warszawa 1996.
Kacprzyk J., *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*, WNT, Warszawa 2001.
Kacprzyk J., *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa 1986.
Kurek W., *Efektywność inwestycji rzeczowych w gospodarce rynkowej*, UMCS w Lublinie, Rzeszów 1997.
Łachwa A., *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*, AOW Exit, Warszawa 2001.
Marcinek K., *Finansowa ocena przedsięwzięć inwestycyjnych przedsiębiorstw*, AE, Katowice 2000.
Piegat A., *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, AOW Exit, Warszawa 1999.
Pluta W. (red.), *Budżetowanie kapitałowe*, PWE, Warszawa 2000.
Pluta W., Jajuga T., *Inwestycje. Capital Budgeting – budżetowanie kapitałowe*, Fundacja Rozwoju Rachunkowości w Polsce, Warszawa 1995.
Pomykalska B., Pomykalski P., *Analiza finansowa przedsiębiorstwa*, PWN, Warszawa 2007.
Wilczek M.T., *Podstawy zarządzania projektem inwestycyjnym*, AE, Katowice 2004.

THE ASSESSMENT OF EFFICIENCY INVESTMENT PROJECT ON THE BASIS OF PROFITABILITY INDEX PI IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Summary

The article discusses the effectiveness index of the investment project PI. Because of uncertainty with regard to the future cash flow and discount rate changes in the next period of investment, those parameters were described as fuzzy variables. Such an approach to this topic enables taking into account changeability and uncertainty of these parameters . This results in a more accurate describing the profitability index PI.