PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 60 — 2009
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

**Jan Acedański**

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

# PROGNOZOWALNOŚĆ PREMII AKCYJNEJ W WARUNKACH ADAPTACYJNEGO UCZENIA SIĘ

## 1. Wstęp

W ostatnich latach obserwuje się intensywny rozwój badań na styku makroekonomii i finansów w ramach modeli DSGE (*Dynamic, Stochastic General Equilibrium*). Modele te, bazujące na solidnych założeniach mikroekonomicznych i koncepcji racjonalnych oczekiwań [Muth 1961], są w stanie poprawnie odwzorowywać zarówno dynamikę agregatów makroekonomicznych, jak i zachowanie się zmiennych finansowych. Jednak wnioski wypływające z tych modeli, mówiące, że nie jest możliwe prognozowanie przyszłych realizacji premii akcyjnej za pomocą bieżących wartości zagregowanych wskaźników finansowych, są sprzeczne z wynikami badań empirycznych[1].

Celem pracy jest pokazanie, że niewielkie odstępstwa od założenia o racjonalnych oczekiwaniach mogą prowadzić do prognozowalności premii akcyjnej. Do tego celu wykorzystano standardowy model Jermanna [Jermann 1998], w którym przy wyznaczaniu cen akcji koncepcję racjonalnych oczekiwań zastąpiono założeniem o adaptacyjnym uczeniu się (*adaptive learning*). Jego istotą jest to, że jednostki nie znają dokładnie mechanizmu kształtowania się cen akcji, ale uczą się go na podstawie wcześniejszych doświadczeń.

Przypuszcza się, że wprowadzenie do modelu mechanizmu adaptacyjnego uczenia się przy wyznaczaniu cen akcji prowadzi do wzrostu wariancji oczekiwanej premii akcyjnej, co z kolei zwiększa możliwość prognozowania nadwyżkowych stóp zwrotu. Jednocześnie jednak inne charakterystyki zmiennych finansowych nie ulegają istotnym zmianom.

[1] Co prawda, w literaturze nie ma zgody co do poprawności stosowanych w tym celu metod ekonometrycznych ani możliwości wykorzystania prognozowalności w praktyce inwestycyjnej, jednak większość autorów zgadza się z twierdzeniem, że w szeregach czasowych nadwyżkowych stóp zwrotu z akcji o niskiej częstotliwości istnieje niewielki prognozowalny składnik (por. artykuły zamieszczone w numerze 21(4) „Review of Financial Studies" z 2008 r. poświęconym w całości zagadnieniu prognozowalności stóp zwrotu).

Drugi punkt artykułu omawia krótko związki przedstawionych badań z literaturą światową. Trzeci zawiera opis modelu Jermanna oraz sposób doboru wartości parametrów. W czwartej części przedstawiono sposób wyznaczania cen akcji w przypadku racjonalnych oczekiwań i adaptacyjnego uczenia się. Kolejna część zawiera wyniki badań prognozowalności premii akcyjnej w modelu RE oraz AL. Pokazana jest tam również dekompozycja współczynnika korelacji między premią akcyjną a wskaźnikiem DP wskazująca na przyczynę prognozowalności w modelu AL. Ostatni punkt stanowi podsumowanie pracy.

## 2. Związki pracy z literaturą światową

Koncepcje uczenia się stosowane były wielokrotnie do opisu zachowania się rynków finansowych. Jednak zazwyczaj badania prowadzone były w ramach modeli równowagi cząstkowej (zob. np. [Timmermann 1996; Adam, Marcet, Nicolini 2008]). Jedną z niewielu prac analizujących zachowanie się zmiennych finansowych w modelach równowagi ogólnej z adaptacyjnym uczeniem się jest praca [Carceles-Poveda, Giannitsarou 2008]. Autorki rozważały między innymi klasyczny model realnego cyklu koniunkturalnego, w którym odstępstwa od racjonalnych oczekiwań dotyczyły wyłącznie zachowania się sfery makroekonomicznej. Ceny akcji kształtowane były racjonalnie. Stwierdziły one, że przy takich założeniach wypływające z modelu wnioski dotyczące zmiennych finansowych, również odnośnie do prognozowalności premii akcyjnej, bardzo niewiele różniły się od wyników dla klasycznego modelu z racjonalnymi oczekiwaniami.

Niniejsza praca różni się od poprzedniej w dwóch aspektach. Po pierwsze przyjęto w niej, że założenie o racjonalnych oczekiwaniach obowiązuje przy wyznaczaniu dynamiki zmiennych makroekonomicznych, natomiast konsumenci uczą się jedynie mechanizmu kształtującego ceny akcji. To właśnie rynek akcji dostarcza bowiem najsilniejszych dowodów na odstępstwa od hipotezy racjonalnych oczekiwań. Poza tym uchylenie założenia o racjonalności w prognozowaniu dynamiki zmiennych makroekonomicznych nie zmienia istotnie prezentowanych w pracy wyników. Stosując podobne podejście w ramach modelu równowagi cząstkowej, autorzy pracy [Adam, Marcet, Nicolini 2008] pokazali, że może ono prowadzić do wielu zgodnych z obserwacjami wniosków: prognozowalności premii akcyjnej, dużej inercji wskaźnika dywidenda/cena (DP) czy nadmiernej zmienności stóp zwrotu z akcji w stosunku do zmienności stóp wzrostu dywidend (*excess volatility*).

Standardowy model RBC wzbogacony został o sztywności realne oraz przyzwyczajenia konsumpcyjne. Dzięki temu jest on w stanie poprawnie odwzorowywać przeciętny poziom stopy zwrotu z akcji oraz stopy wolnej od ryzyka, a także dynamikę podstawowych agregatów makroekonomicznych.

## 3. Model Jermanna

W modelu reprezentatywny konsument maksymalizuje w każdym okresie funkcję oczekiwanej użyteczności z przyzwyczajeniami:

$$U_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(C_{t+i}, C_{t+i-1}),$$

gdzie funkcja chwilowej użyteczności $u(C_t, C_{t-1})$ ma postać:

$$u(C_t, C_{t-1}) = \frac{(C_t - \chi C_{t-1})^{1-\nu} - 1}{1-\nu}.$$

$E_t$ jest operatorem wartości oczekiwanej obliczanej ze względu na informacje dostępne w okresie $t$, $C_t$ oznacza poziom konsumpcji w okresie $t$, parametr $\beta$ jest współczynnikiem dyskontowym, $\chi$ reguluje siłę przyzwyczajeń, natomiast $v$ określa wklęsłość funkcji użyteczności.

Konsument czerpie dochody z trzech źródeł: pracy $W_tN_t$ , przy czym $W_t$ oznacza stawkę płacy, a $N_t$ – odsetek czasu poświęcony na pracę, inwestycji w akcje $S_{t-1}(P_t + D_t)$, gdzie $S_t$ oznacza liczbę posiadanych akcji, a $P_t$ i $D_t$ − odpowiednio cenę akcji i wysokość wypłaconej dywidendy oraz jednookresowych, zerokuponowych obligacji $S^f_{t-1}$, które w okresie zapadalności zawsze generują wypłatę równą 1, a w okresie poprzednim kupowane są z dyskontem po cenie $P^f_{t-1}$. Konsument wydaje dochody na konsumpcję oraz na zakup nowych akcji i obligacji. Ograniczenie budżetowe ma więc postać:

$$W_tN_t + S_{t-1}(P_t + D_t) + S^f_{t-1} = C_t + S_tP_t + S^f_t P^f_t .$$

Produkcję reprezentatywnego przedsiębiorstwa będącego własnością konsumentów opisuje neoklasyczna funkcja produkcji Cobba-Douglasa:

$$Y_t = Z_t K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{1-\alpha}.$$

Jako czynniki produkcji wykorzystywane są praca $N_t$ oraz kapitał $K_t$. $Z_t$ jest stochastycznym szokiem technologicznym mającym charakter procesu autoregresyjnego z zakłóceniami o rozkładzie normalnym i odchyleniem standardowym równym $\sigma_z$:

$$\ln Z_t = \rho \ln Z_{t-1} + \varepsilon_t, \;\; 0 < \rho < 1, \;\; \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_z).$$

$A_t$ jest deterministycznym postępem technicznym:

$$A_t = \gamma A_{t-1},$$

gdzie $\gamma$ jest stopą wzrostu gospodarczego.

Akumulacja kapitału przez przedsiębiorstwo odbywa się zgodnie z równaniem:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + \Phi(I_t / K_t)K_t,$$

gdzie $\delta$ jest stopą deprecjacji kapitału, a $\Phi(K_t / I_t)$ – wklęsłą funkcją inwestycji o postaci:

$$\Phi(I_t / K_t) = \frac{\omega_1}{1-1/\xi}\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^{1-1/\xi} + \omega_2 .$$

Parametr $\xi$ determinuje koszty instalacji nowego kapitału. Gdy $\xi = \infty$, koszty nie występują i wtedy $\Phi(K_t / I_t) = K_t / I_t$. Im $\xi$ jest mniejsze, tym wyższe nakłady inwestycyjne są konieczne do zwiększenia zasobu kapitału o jednostkę. Wartości parametrów $\omega_1 = (\gamma - 1 + \delta)^{1/\xi}$ oraz $\omega_2 = (\gamma - 1 + \delta) / (1 - \xi)$ gwarantują, że w punkcie równowagi modelu koszty dostosowań nie będą występować, tzn. $\Phi(\overline{I} / \overline{K}) = \overline{I} / \overline{K}$ [Heer, Maussner 2005].

W każdym okresie przedsiębiorstwo decyduje o wielkości zatrudnienia oraz nakładach inwestycyjnych, maksymalizując swoją wartość w oczach właściciela, co jest równoznaczne z maksymalizacją strumienia zdyskontowanych dywidend:

$$V_t = \max_{N_t, I_t, K_t} E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty} M_{t+i/t}(Y_{t+i} - W_{t+i}N_{t+i} - I_{t+i})\right] = \max_{N_t, I_t, K_t} E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty} M_{t+i/t} D_{t+i}\right],$$

przy czym czynnikiem dyskontującym jest krańcowa stopa substytucji międzyokresowej:

$$M_{t+i/t} = \frac{\partial U_t / \partial C_{t+i}}{\partial U_t / \partial C_t} = \beta^i \frac{u_1'(C_{t+i}, C_{t+i-1}) + \beta E_{t+i} u_2'(C_{t+i+1}, C_{t+i})}{u_1'(C_t, C_{t-1}) + \beta E_t u_2'(C_{t+1}, C_t)} = \beta^i \frac{\Lambda_{t+i}}{\Lambda_t} .$$

W powyższym wzorze $u'_j$ oznacza pochodną funkcji $u$ ze względu na $j$-tą zmienną. Stawka płac równa jest krańcowej produktywności pracy:

$$W_t = (1-\alpha) Z_t K_t^{\alpha} (A_t N_t)^{-\alpha} .$$

W stanie równowagi podaż netto obligacji musi być równa 0, ponieważ zakłada się, że konsumenci są zarówno emitentami, jak i nabywcami obligacji. Dodatkowo przyjmuje się, że przedsiębiorstwo nie emituje nowych akcji i finansuje nakłady inwestycyjne jedynie z zatrzymanych przychodów. Liczba akcji zostaje znormalizowana do 1. Stąd:

$$S_t^f = 0, \quad S_t = 1 .$$

Jednocześnie ograniczenie budżetowe konsumenta przyjmuje prostszą postać:

$$W_t N_t + D_t = C_t .$$

Kapitał $K_t$, konsumpcja $C_{t-1}$ oraz szok technologiczny $Z_{t-1}$ są zmiennymi stanu modelu. Są one podstawą podejmowania decyzji przez podmioty i wraz z wartością składnika losowego $\varepsilon_t$ decydują jednoznacznie o zachowaniu się składowych modelu w okresie $t$.

Rozwiązanie uzyskane metodą loglinearyzacji [Heer, Maussner 2005] można przedstawić w postaci dwóch równań:

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{M}\mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{W}\varepsilon_t, \tag{1}$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_t & \hat{d}_t & \hat{y}_t & \hat{i}_t \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\lambda \\ \mathbf{M}_d \\ \mathbf{M}_y \\ \mathbf{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_{t-1} & \hat{k}_{t-1} & \hat{z}_{t-1} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} W_\lambda \\ W_d \\ W_y \\ W_i \end{bmatrix} \varepsilon_t = \mathbf{M}_x \mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{W}_x \varepsilon_t, \tag{2}$$

gdzie:

$$\mathbf{s}_t = \begin{bmatrix} \hat{c}_t & \hat{k}_t & \hat{z}_t \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_t & \hat{d}_t & \hat{y}_t & \hat{i}_t \end{bmatrix}^T, \ \hat{x}_t = \tilde{x}_t - \overline{x} = \ln \tilde{X}_t - \ln \overline{X}.$$

Równanie (1) opisuje ewolucję zmiennych stanu $\mathbf{s}_t$, natomiast (2) określa zależności między pozostałymi zmiennymi modelu zawartymi w wektorze $\mathbf{x}_t$ a zmiennymi stanu. Elementy macierzy $\mathbf{M}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{M}_x$ oraz $\mathbf{W}_x$ są funkcjami parametrów modelu. Wszystkie zmienne modelu przedstawione są w postaci logarytmicznych odchyleń od stanu równowagi oznaczonego kreską. Ich wartości można więc interpretować jako procentowe odchylenia od stanu równowagi.

Okresem w modelu jest kwartał. Parametry dobierane są w taki sam sposób jak w pracy [Jermann 1998]. Część z nich ($\gamma$, $\alpha$, $\delta$, $\nu$, $\sigma_z$) jest ustalana na podstawie wyników badań empirycznych dla gospodarki USA. Pozostałe ($\beta$, $\rho$, $\xi$, $\chi$) dobierane są metodą dopasowywania momentów (*matching moments*), tzn. ich wartości ustalane są tak, by wybrane symulowane momenty z modelu racjonalnych oczekiwań były zbliżone do ich odpowiedników w rzeczywistości. Wartości parametrów zestawiono w tab. 1.

Tabela 1. Wartości parametrów modelu

| Wyszczególnienie | Kalibracja | | | | | Metoda dopasowywania momentów | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Parametr | $\gamma$ | $\alpha$ | $\delta$ | $\nu$ | $\sigma_z$ | $\beta$ | $\rho$ | $\xi$ | $\chi$ |
| Wartość | 1,005 | 0,36 | 0,0136 | 5 | 0,0105 | 1,0093 | 0,995 | 0,1367 | 0,7106 |

Źródło: opracowanie własne.

## 4. Ceny akcji oraz obligacji

Cenę zerokuponowej, jednookresowej, pozbawionej ryzyka obligacji można wyznaczyć ze wzoru [Cochrane 2005]:

$$P_t^f = E_t(M_{t+1/t}).$$

Korzystając z równań (1-2) i własności rozkładu logarytmiczno-normalnego, w warunkach racjonalnych oczekiwań $P_{t-1}^f$ można zapisać jako [Acedański 2008b]:

$$P_t^f = \exp\left(\ln(\beta\gamma^{-\nu}) + (\mathbf{M}_\lambda \mathbf{M} - \mathbf{M}_\lambda)\mathbf{s}_{t-1} + (\mathbf{M}_\lambda \mathbf{W} - W_\lambda)\varepsilon_t + 0{,}5\sigma_z^2 W_\lambda^2\right).$$

Cena akcji dana jest ogólnym wzorem [Cochrane 2005]:

$$P_t = E_t(M_{t+1/t}(P_{t+1}^{(PR)} + D_{t+1})),$$

gdzie $P_{t+1}^{(PR)}$ to prognozowana cena akcji w okresie $t$ + 1. Subskrypt ($PR$) dodano w celu podkreślenia, że przedmiotem zainteresowania w pracy jest sposób, w jaki jednostki prognozują zachowanie się cen akcji w przyszłości. Zakłada się, że wartości pozostałych zmiennych prognozowane są na podstawie racjonalnych oczekiwań.

W warunkach racjonalnych oczekiwań do prognozowania zachowania się zmiennych jednostki wykorzystują poprawny model opisujący faktyczną ewolucję danej zmiennej. W takim przypadku cena akcji jest rozwiązaniem równania różnicowego:

$$P_t^{(RE)} = E_t(M_{t+1/t}(P_{t+1}^{(RE)} + D_{t+1})). \tag{3}$$

Ma ono postać [Acedański 2008b]:

$$P_{t+1}^{(RE)} = \overline{P}^{(RE)} + \mathbf{M}_p^{(RE)}\mathbf{s}_t + W_p^{(RE)}\varepsilon_{t+1}, \tag{4}$$

gdzie składniki $\overline{P}$, $\mathbf{M}_p^{(RE)}$, $W_p^{(RE)}$ są znanymi konsumentom, skomplikowanymi funkcjami parametrów modelu.

Rozważając model z adaptacyjnym uczeniem się, założono, że jednostki znają postać funkcyjną równania (4), lecz nie znają wartości jego parametrów: poziomu przeciętnego $\overline{P}$ oraz macierzy determinującej „fundamentalne" odchylenia od poziomu przeciętnego $\mathbf{M}_p^{(RE)}$:

$$P_{t+1}^{(AL)} = \overline{P}_{t-1}^{(AL)} + \mathbf{M}_{p\,t-1}^{(AL)}\mathbf{s}_t + W_p^{(RE)}\varepsilon_{t+1}. \tag{5}$$

Parametrów tych uczą się, szacując je na podstawie wcześniejszych obserwacji za pomocą rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów zadanej równaniami (*constant gain algorithm* [Carceles-Poveda, Giannitsarou 2008; Evans, Honkapohja 2001]):

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_{t-1} + g\left(\begin{bmatrix}1 & \mathbf{s}_t^T\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}1 & \mathbf{s}_t^T\end{bmatrix} - \mathbf{R}_{t-1}\right), \tag{6}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_t = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1} + g\mathbf{R}_t^{-1}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{s}_t^T\end{bmatrix}^T \left(P_t^{(AL)} - \begin{bmatrix}1 & \mathbf{s}_t^T\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1}\right), \tag{7}$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_t = \begin{bmatrix}\overline{P}_t^{(AL)} & \mathbf{M}_{pt}^{(AL)}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\overline{P}_t^{(AL)} & M_{ct}^{(AL)} & M_{kt}^{(AL)} & M_{zt}^{(AL)}\end{bmatrix}^T$. Metoda ta równoważna jest z ważoną metodą najmniejszych kwadratów, przy czym im starsza jest obserwacja, tym mniejszą otrzymuje wagę. Parametr $g$ reguluje szybkość „zapominania". Gdy obserwacja najnowsza otrzymuje wagę 1, wówczas obserwacja sprzed $k$ okresów otrzymuje wagę równą $(1 - g)^k$. Cena akcji w modelu adaptacyjnego uczenia się dana jest więc wzorem:

$$P_t = E_t(M_{t+1/t}(P_{t+1}^{(AL)} + D_{t+1})). \tag{8}$$

Przy danych cenach akcji, obligacji oraz dywidendach łatwo wyznaczyć stopy zwrotu akcji oraz obligacji.

Premia akcyjna $EP_{t+h/t} = R_{t+h/t} - R^f_{t+h/t}$ rozumiana jest jako różnica między skumulowaną $h$-okresową stopą zwrotu z akcji $R_{t+h/t} = R_{t+1} \cdot R_{t+2} \cdot \ldots \cdot R_{t+h}$ a odpowiadającą jej skumulowaną stopą zwrotu z obligacji $R^f_{t+h/t} = R^f_{t+1} \cdot R^f_{t+2} \cdot \ldots \cdot R^f_{t+h}$.

## 5. Wyniki

W celu zbadania wpływu uczenia adaptacyjnego na prognozowalność premii akcyjnej symulowano opisany w części 3 model, przy czym ceny akcji wyznaczano najpierw przy założeniu racjonalnych oczekiwań, zgodnie ze wzorami (3)-(4), a następnie przy założeniu racjonalnych oczekiwań, wykorzystując wzory (5)-(8). Prognozowalność badano, metodą najmniejszych kwadratów szacując parametry modelu:

$$EP_{t+h/t} = a_h + b_h DP_t, \tag{9}$$

przy czym $DP$ oznacza współczynnik dywidenda/cena akcji, a horyzont $h$ równy był 4, 12 i 20 kwartałów.

Wyniki badań zawiera tab. 2. Obserwowana w rzeczywistości prognozowalność przejawia się w istotnych statystycznie współczynnikach kierunkowych linii regresji (9) przyszłych wartości premii akcyjnej względem aktualnych wartości wskaźnika $DP$. Prognozowalność jest wyraźniejsza wraz ze wzrostem horyzontu prognozy. $R^2$ wzrasta z poziomu 0,09 dla $h$ = 1 do poziomu 0,32 dla $h$ = 5 lat.

Podobnych relacji nie obserwuje się w przypadku modelu z racjonalnymi oczekiwaniami (RE). Wartości parametrów, choć zbliżone do obserwowanych, nie są w żadnym przypadku statystycznie istotne. Średnie wartości statystyki $t$-Studenta nie przekraczają 1. Także współczynniki $R^2$ są mniej więcej o rząd wielkości mniejsze od obserwowanych w rzeczywistości. Wprowadzenie uczenia adaptacyjnego (AL) poprawia wnioski modelu w zakresie prognozowalności. Wartości statystyki $t$-Studenta wzrastają dość wyraźnie, choć jedynie dla $h$ = 20 współczynniki kierunkowe są, średnio rzecz biorąc, statystycznie większe od 0 na poziomie istotności 0,1. Wartości $R^2$ są mniej więcej dwukrotnie wyższe niż w modelu RE.

Różnice są jeszcze bardziej widoczne, jeżeli analizowane są dłuższe szeregi czasowe. W modelu RE przy 1000 obserwacji istotność parametrów nie zmienia się. W modelu AL natomiast średnie wartości statystyk $t$-Studenta dla wszystkich horyzontów wskazują na istotność współczynnika kierunkowego, natomiast wartości $R^2$ są teraz mniej więcej pięciokrotnie wyższe niż w modelu RE.

Należy też zauważyć, że wyniki przedstawione w tab. 2 uzyskano przy niewielkich wartościach $g$ = 0,023, co oznacza, że obserwacje sprzed 30 kwartałów otrzymują dwukrotnie mniejszą wagę od obserwacji bieżących. W przypadku większych wartości *g* prognozowalność premii akcyjnej byłaby większa.

Tabela 2. Wyniki badania prognozowalności premii akcyjnej*

| Wyszczególnienie | $n$ | $\hat{b}_4$ | $\hat{b}_{12}$ | $\hat{b}_{20}$ | $R^2_4$ | $R^2_{12}$ | $R^2_{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dane | 240 | 2,5 (2,62) | 11,0 (3,62) | 23,2 (6,05) | 0,11 | 0,21 | 0,35 |
| RE | 240 | 3,8 (0,64) | 9,2 (0,82) | 16,0 (0,95) | 0,03 | 0,03 | 0,04 |
| AL | 240 | 4,6 (0,95) | 12,9 (1,38) | 23,4 (1,58) | 0,04 | 0,07 | 0,09 |
| RE | 1000 | 2,4 (0,83) | 5,1 (0,93) | 8,4 (1,01) | 0,01 | 0,01 | 0,01 |
| AL | 1000 | 2,6 (1,59) | 7,3 (2,34) | 13,6 (2,71) | 0,03 | 0,04 | 0,05 |

* W tabeli zawarte są szacunki współczynników kierunkowych oraz wartości $R^2$ modelu (9) dla $h$ = 4, 12, 20. Podaną w nawiasach istotność parametrów szacowano uwzględniając poprawkę na heteroskedastyczność i autokorelację składników losowych. $n$ oznacza liczbę obserwacji. Dane dotyczą rynku finansowego USA w okresie 1947-2006 i pochodzą ze strony internetowej prof. R. Shillera. Dla modeli RE oraz AL ($g$ = 0,023) podano średnie wyników dla 1000 symulacji.

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 zestawiono podstawowe symulowane momenty zmiennych finansowych dla obu modeli. Są one zbliżone do siebie, co pokazuje, że model z uczeniem adaptacyjnym generuje prognozowalność premii akcyjnej bez pogorszenia własności modelu w innych ważnych wymiarach. Co więcej, wyższa stopa zwrotu z akcji w modelu AL i związany z nią wyższy poziom premii akcyjnej wskazują, że docelowy poziom premii akcyjnej równy około 8% może być osiągnięty przy niższych wartościach współczynników awersji do ryzyka lub kosztów inwestycji, co zbliża je do wartości odpowiadających rzeczywistości.

Tabela 3. Momenty stopy zwrotu z akcji oraz stopy wolnej od ryzyka w modelach*

| Wyszczególnienie | $E(R_t)$ | $\sigma(R_t)$ | $E(R^f_t)$ | $\sigma(R^f_t)$ |
|---|---|---|---|---|
| Dane | 8,84 | 15,39 | 0,86 | 2,46 |
| RE | 9,41 | 26,85 | 1,22 | 23,67 |
| AL | 10,83 | 29,11 | 1,22 | 23,67 |

* Wyniki dla danych rocznych podane w procentach. Ceny akcji oraz dywidendy dotyczą indeksu S&P 500. Pozbawione ryzyka obligacje utożsamiane są z 90-dniowymi bonami skarbowymi. Dane obejmują okres 1947-2006 i pochodzą ze strony internetowej prof. R. Shillera. Dla modeli RE oraz AL ($g$ = 0,023) podano średnie wyników dla 1000 symulacji po 240 okresów każda.

Źródło: opracowanie własne.

Przyczyną, dla której w modelu AL pojawia się prognozowalność zrealizowanej premii akcyjnej, jest zwiększona zmienność oczekiwanej premii akcyjnej. Pokazuje to równanie:

$$\rho(EP_{t+1}, DP_t) = \rho(E_t(EP_{t+1}) + W_{EP}\varepsilon_{t+1}, DP_t) \propto \rho(E_t(EP_{t+1}), DP_t)\left(\frac{\sigma(E_t(EP_{t+1}))}{\sigma(EP_{t+1})}\right)^2. \quad (10)$$

Jeżeli składnik losowy $\varepsilon_{t+1}$ zrealizowanej premii akcyjnej nie jest skorelowany z wartościami wskaźnika $DP_t$, to korelacja między zrealizowaną premią akcyjną $EP_{t+1}$ a $DP_t$ jest proporcjonalna do korelacji między oczekiwaną premią akcyjną $E_t(EP_{t+1})$ a wskaźnikiem $DP_t$ oraz względnej zmienności oczekiwanej premii akcyjnej w stosunku do premii zrealizowanej.

Tabela 4. Dekompozycja współczynnika korelacji pomiędzy zrealizowaną premią akcyjną a wskaźnikiem DP*

| Wyszczególnienie | $n$ | $\rho$ | $k$ | $n$ | $\rho$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| RE | 240 | 0,97 | 0,04 | 1000 | 0,95 | 0,05 |
| AL | | 0,25 | 8,53 | | 0,40 | 9,47 |

* $\rho$ oznacza współczynnik korelacji liniowej Pearsona między oczekiwaną premią akcyjną a wskaźnikiem DP: $\rho(E_t(EP_{t+h}), DP_t)$, $k$ – iloraz $\sigma(E_t(EP_{t+h}))/\sigma(EP_{t+h})$ wyrażony w procentach. Podano średnie wartości dla 1000 symulacji.

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 4 przedstawiono wartości poszczególnych składowych dekompozycji (10). W przypadku modelu RE zmienność oczekiwanej premii akcyjnej w stosunku do premii zrealizowanej jest praktycznie równa 0, stąd prognozowalność jest bardzo słaba, nawet mimo bardzo silnej zależności między oczekiwaną premią akcyjną a wskaźnikiem DP. Współczynnik korelacji liniowej Pearsona przekracza 0,95. W modelu z adaptacyjnym uczeniem odchylenie standardowe oczekiwanej premii akcyjnej stanowi prawie 10% odchylenia standardowego premii zrealizowanej, czyli jest mniej więcej 200-krotnie wyższe niż w modelu RE. To jest przyczyną znaczącego wzrostu prognozowalności premii akcyjnej, nawet pomimo wyraźnie niższego współczynnika korelacji $\rho$, który nie przekracza 0,4. Duża zmienność oczekiwanej premii akcyjnej w modelu AL jest efektem zarówno wahań parametrów determinujących $E_t(EP_{t+1})$ spowodowanych uczeniem się, jak i większej wrażliwości oczekiwanej premii akcyjnej na wahania zmiennych stanu.

## 6. Podsumowanie

W pracy pokazano, że zastąpienie hipotezy racjonalnych oczekiwań założeniem o adaptacyjnym uczeniu się jednostek może prowadzić do większej prognozowalności premii akcyjnej, co jest szczególnie widoczne przy długich szeregach czasowych, choć dla przyjętego parametru $g$ efekt prognozowalności nie był tak silny, jak obserwowany w rzeczywistości. Fakt, że podmioty uczą się mechanizmu kształtującego ceny akcji, generuje istotne wahania oczekiwanej premii akcyjnej: mniej więcej 200 razy większe niż w modelu racjonalnych oczekiwań, co z kolei przekłada się na prognozowalność nadwyżkowych stóp zwrotu. Jednocześnie jednak odstępstwa od racjonalnych oczekiwań są na tyle niewielkie, że nie powodują istotnych zmian pozostałych wniosków wypływających z modelu.

Prezentowane wyniki dotyczą modelu Jermanna oraz algorytmu uczenia *constant gain – recursive least squares*. W komplementarnej pracy [Acedański 2008a] pokazano, że większość tych wniosków jest prawdziwa dla innych modeli oraz innych algorytmów uczenia się. Szczególnie algorytmy wykorzystujące metodę najmniejszych kwadratów powodują duże wahania oczekiwanej premii akcyjnej, niezależnie od modelu, i w efekcie zwiększają wyraźnie prognozowalność premii akcyjnej.

## Literatura

Acedański J., *Ceny akcji w wybranych modelach makroekonomicznych w warunkach uczenia się podmiotów*, referat wygłoszony na konferencji „Innowacje w finansach i ubezpieczeniach – metody matematyczne, ekonometryczne i informatyczne", Ustroń, 19-20.11.2008a.

Acedański J., *Wpływ zmian strukturalnych w gospodarce na cenę i poziom ryzyka oraz ceny aktywów*, manuskrypt, AE Katowice 2008b, http://web2.ae.katowice.pl/jaced/publ.htm.

Adam K., Marcet A., Nicolini J., *Stock market volatility and learning*, manuskrypt 2008.

Carceles-Poveda E., Giannitsarou C., *Asset pricing with adaptive learning*, "Review of Economic Dynamics" 2008, vol. 11(3).

Cochrane J., *Asset pricing. Revised edition*, Princeton University Press, Princeton-Oxford 2005.

Evans G., Honkapohja S., *Learning and expectations in macroeconomics*, Princeton University Press, Princeton, Oxford 2001.

Heer B., Maussner A., *Dynamic general equilibrium modelling. Computational methods and applications*, Springer, Berlin-Heidelberg 2005.

Jermann U., *Asset pricing in production economies*, "Journal of Monetary Economics" 1998, vol. 41(2).

Muth J., *Rational expectations and the theory of price movements*, "Econometrica" 1961, vol. 29.

„Review of Financial Studies" 2008, vol. 21(4).

Timmermann A., *Excess volatility and predictability of stock prices in autoregressive dividendmodels with learning*, "Review of Economic Studies" 1996, vol. 63.

## EQUITY PREMIUM PREDICTABILITY UNDER ADAPTIVE LEARNING

### Summary

The paper shows that replacing the rational expectations hypothesis by an adaptive learning scheme within a standard DSGE Jermann's model significantly improves its ability to generate equity premium predictability. The effect appears due to increase in volatility of expected equity premium. Other important conclusions of financial variables remain virtually unchanged.