

Tadeusz Czernik, Daniel Iskra

Akademia Ekonomiczna w Katowicach

JEDNOOKRESOWY EFEKT PAMIĘCI MODELOWANY TRZYSTANOWYM PROCESEM MARKOWA. ANALIZA INSTRUMENTÓW NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE

1. Wstęp

Współczesne finanse zdeterminowane są przez zagadnienia związane z zarządzaniem ryzykiem. Szczególny nacisk położony jest na modelowanie finansowych szeregów czasowych oraz doskonalenie miar ryzyka.

Modelowanie zależności między kolejnymi wartościami szeregu notowań giełdowych stanowi jedno z fundamentalnych zagadnień analizy szeregów czasowych [3; 10; 12].

W pracy zaproponowano modelowanie efektu pamięci wielostanowym procesem Markowa [2; 4; 6; 8], w którym stan rynku określony jest znakiem ostatniej logarytmicznej stopy zwrotu. Podejście to stanowi modyfikację modeli typu Threshold. W pracach [5; 11; 13; 14] autorzy rozważyli nieliniowe modele z jednym lub kilkoma przełączającymi poziomami. Ponieważ rozkład analizowanych wielkości zależy od stanu (reżimu), możemy w tym przypadku stwierdzić, że w szeregach czasowych rozważanych wielkości występuje pamięć. Zaproponowane w przywoływanych pracach podejście zakłada określoną postać czynników losowych. Ponadto w pracy [1] wykazano także, że modele przełącznikowe mogą również imitować długą pamięć.

W prezentowanym artykule przeprowadzono analizę pamięci dla instrumentów notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie (akcje i indeksy).

2. Efekt pamięci modelowany wielostanowym procesem Markowa

Dla każdego instrumentu wyróżniono trzy stany I :

- „minus” (-1) – gdy ostatnia odnotowana logarytmiczna stopa zwrotu ma znak ujemny (spadek ceny);

- „zero” (0) – gdy ostatnia odnotowana logarytmiczna stopa zwrotu jest równa zero (brak zmian ceny);
- „plus” (+1) – gdy ostatnia odnotowana logarytmiczna stopa zwrotu ma znak dodatni (wzrost ceny).

Wprowadzenie stanu „zero” autorzy uznali za uzasadnione, ponieważ występowanie stopy zerowej w historycznych notowaniach instrumentów jest statystycznie istotne. Poniżej przedstawiono statystyki odnoszące się do zerowej stopy zwrotu (wszystkie badania przeprowadzono z użyciem jednodniowych logarytmicznych stóp zwrotu, które w dalszej części pracy będą nazywane krótko stopami zwrotu) instrumentów notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie w okresie od 02.01.2003 r. do 21.07.2008 r. Badaniem objęto 73 instrumenty, dla których szczegółowe informacje zostaną przedstawione w części poświęconej symulacji. W tabeli 1 podano kwantyle liczby zerowych stóp zwrotu.

Tabela 1. Odsetek zerowych stóp zwrotu analizowanych instrumentów

Minimum	0,00%
Wartość kwartyli	
Kwartyl I	7,25%
Kwartyl II	10,11%
Kwartyl III	12,41%
Maksimum	20,73%

Źródło: opracowanie własne.

Jak widać, istniały spółki, które miały nawet 20% stóp zerowych, a połowa badanych instrumentów miała więcej niż 10,11% stóp zerowych. Jedynymi instrumentami, które nie miały żadnych stóp zerowych, były indeksy.

Zdefiniujmy pamięć: mówimy, że nie występuje efekt pamięci, jeżeli rozkłady stóp zwrotu w każdym stanie nie są istotnie różne od rozkładów w pozostałych stanach. Jeżeli przynajmniej dwa rozkłady stóp zwrotu będą istotnie różne od siebie, to mówimy, że występuje efekt pamięci.

Przedstawiona definicja pamięci nie stanowi novum. Na przykład w teście Breuscha-Godfrey'a [9] testuje się istotność współczynnika przy r_{t-1} , odrzucenie H_0 oznacza, że rozkład r_t zależy od r_{t-1} . Ważną różnicą jest brak założenia o rozkładzie czynnika losowego.

Testując istotność różnic rozkładów w stanach I , dla każdej pary rozkładów otrzymujemy empiryczne p -value – wielkość ściśle związaną z poziomem ufności testu. Im mniejsza wartość p -value, tym większa wiarygodność stwierdzenia o istotnej różnicy rozkładów. Wprowadzając wielkość Tp -value (*Total p-value*):

$$Tp - value = \min_{j=1,2,3} (p - value_j), \quad (1)$$

gdzie: j – oznacza parę rozkładów (w przypadku trzech stanów możliwe jest utworzenie trzech par rozkładów),

$p\text{-value}_j$ – oznacza $p\text{-value}$ j -tej pary rozkładów,

możemy stwierdzić, że proces o mniejszej wartości $Tp\text{-value}$ wykazuje „silniejszą” pamięć.

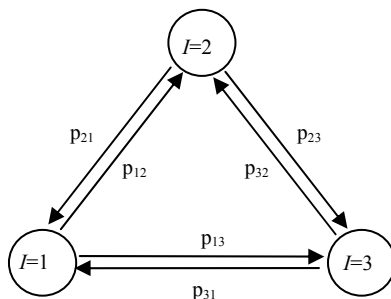
Niech $R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}$ oznacza proces logarytmicznej stopy zwrotu, $I_t = \text{sign}(R_t)$

– proces określający stan rynku, a funkcję $\text{sign}(x)$ definiujemy na potrzeby pracy następująco:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Przez $\pi^{(n)} = [p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}]$ oznaczono wektor z prawdopodobieństwami przebywania rynku w chwili $n\Delta t$, w stanach odpowiednio -1 , 0 , $+1$, tzn. $p_1^{(n)} = P(I^{(n)} = -1)$, $p_2^{(n)} = P(I^{(n)} = 0)$, $p_3^{(n)} = P(I^{(n)} = +1)$. Wektor $\pi^{(0)}$ określający stan początkowy jest wektorem, którego współrzędne składają się z jednej jedynki i samych zer (stan jest wielkością obserwowalną, determinowany jest znakiem ostatniej stopy).

W celu poprawy przejrzystości pracy przenumerowano stany (dokonano transformacji $I \rightarrow I + 2$). Po tej transformacji stan -1 jest stanem 1, stan 0 – stanem 2, stan $+1$ jest stanem 3.



Rys. 1. Zbiór stanów i przejść

Źródło: opracowanie własne.

Macierz przejścia P ma postać:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie:

$$p_{ij} = P\left(I^{(n+1)} = j / I^{(n)} = i\right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (4)$$

Z własności procesów Markowa wynika, że [2; 4; 6]:

$$\pi^{(m+n)} = \pi^{(m)} P^n. \quad (5)$$

Proces $R^{(n)}$ jest procesem Markowa z ciągłą przestrzenią stanów, tzn.

$$\begin{aligned} P\left(R^{(n)} \in (r, r + dr) / R^{(n-1)}, R^{(n-2)}, \dots, R^{(0)}\right) = \\ = P\left(R^{(n)} \in (r, r + dr) / R^{(n-1)}\right) = dF_{R^{(n)}}\left(r / R^{(n-1)}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

W rozważanym modelu prawdopodobieństwo $P\left(R^{(n)} \in (r, r + dr) / R^{(n-1)}\right)$ zależy nie tyle od dokładnej wartości stopy $R^{(n-1)}$, ile od jej znaku $I^{(n-1)} = \text{sign}\left(R^{(n-1)}\right) + 2$, stąd wzór (6) zapiszemy jako:

$$P\left(R^{(n)} \in (r, r + dr) / R^{(n-1)}, R^{(n-2)}, \dots, R^{(0)}\right) = dF_{R^{(n)}}\left(r / I^{(n-1)}\right) = dF_R\left(r / I^{(n-1)}\right), \quad (7)$$

gdzie F_R jest dystrybucją logarytmicznej stopy zwrotu. Rozkład F_R opisuje zmienną losową mieszaną, z atomem w punkcie $R = 0$ (rozkład w każdym stanie dzieli się na część ciągłą i dyskretną w punkcie zero – część dyskretną w zerze należy wyróżnić z tego samego powodu, co stan zero, czyli dużą liczbę stóp zerowych).

Dystrybucję logarytmicznej stopy zwrotu po n okresach można zapisać w postaci:

$$F_R\left(R^{(n)} = r\right) = \begin{bmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & p_3^{(0)} \end{bmatrix} P^n \begin{bmatrix} F_R(r / I = 1) \\ F_R(r / I = 2) \\ F_R(r / I = 3) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Proces $S^{(n)}$ nie jest procesem Markowa, jednak rozszerzając przestrzeń stanów do procesu dwuwymiarowego:

$$X^{(n)} = \left[S^{(n)}, I^{(n)} \right], \quad (9)$$

otrzymujemy proces Markowa.

Szereg historycznych logarytmicznych stóp zwrotu dzielono na trzy części: rozkład „minus”, „zero” i „plus”. To, do którego rozkładu zaliczano stopę zwrotu, zależało od znaku stopy o jeden okres wcześniejszej. Każdy z tych trzech rozkładów składał się z części ciągłej i części dyskretnej w zerze (atom w punkcie zero). Następnie sprawdzano, czy rozkłady te istotnie się różnią parami od siebie. Można utworzyć trzy pary rozkładów. Dla każdej pary przeprowadzano dwa testy. Pierwszy test Kolmogorowa-Smirnowa [15] sprawdzał, czy występują istotne różnice między ciągłymi częściami testowanej pary rozkładów. Drugi test, test wskaźnika struktury [15], używany był do testowania istotnych różnic między dyskretnymi częściami testowanej pary rozkładów. Jeżeli uzyskana wartość Tp -value będzie mniejsza od 0,05, to uznano, że rozkłady te istotnie różnią się od siebie i występuje efekt pamięci.

Ze względu na niedostateczną liczbę danych pominięto testowanie własności Markowa (uwzględniając dwuokresową pamięć, należałoby skonstruować 27 rozkładów).

3. Analiza rynku

W dalszej części artykułu zamieszczono wyniki badań symulacyjnych sprawdzających występowanie pamięci modelowanej wielostanowym procesem Markowa dla instrumentów notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Badaniom poddano instrumenty notowane między 02.01.2003-21.07.2008, których średnia liczba notowań na rok w badanym okresie wynosiła minimum 250, oraz te same instrumenty o krótszym okresie notowań od 03.01.2005 do 21.07.2008. Ponieważ wyniki dla obu długości szeregów stop zwrotu są podobne, w artykule zostaną zaprezentowane wyniki dotyczące dłuższego szeregu stóp zwrotu. Dane pobrano z serwisu www.bossa.pl. Jeżeli spółka nie była w pewnym dniu notowana, to uzupełniano brakującą wielkość za pomocą technik interpolacyjnych (interpolacja funkcją wykładniczą – oprocentowanie złożone). Do badania weszły 73 następujące instrumenty:

Tabela 2. Skrótów nazw (www.bossa.pl) spółek spełniających warunki dopuszczające daną spółkę do badań

01NFI	BBICAPNFI	IMPEXMET	MOSTALZAB	SWIG80
04PRO	BBIDEVNFI	INGBSK	MWIG40	SYGNITY
05VICT	BBIZENNFI	JUPITER	NFIEMF	TPSA
06MAGNA	BORYSZEW	KABLE	ODLEWNIE	VISTULA
08OCTAVA	BRE	KETY	ORBIS	WIG20
13FORTUNA	BUDIMEX	KGHM	PEKAO	WIG-BANKI
14ZACH	BZWBK	KOPEX	PGF	WIG-BUDOW
ABG	CERSANIT	KREDYTB	PKNORLEN	WIG-INFO
ADVADIS	COMARCH	KREZUS	POLIMEXMS	WIG-PL
AGORA	DEBICA	LENTEX	PROCHNIK	WIG-SPOZYW
ALMA	ECHO	MIDAS	RAFAKO	WIG-TELEKOM
AMICA	ELBUDOWA	MIESZKO	RELPOL	WIG
ASSECOPOL	FORTE	MILLENNIUM	STALEXP	WILBO
ATLANTIS	GROCLIN	MNI	SWARZEDZ	
BANKBPH	HANDLOWY	MOSTALEXP	SWIECIE	

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 przedstawiono strukturę istotnych różnic między poszczególnymi rozkładami badanych instrumentów. Liczba istotnych różnic mieści się w przedziale od 0 (brak pamięci) do 6 (różnice w 3 parach części ciągłych i 3 parach części dyskretnych).

Tabela 3. Liczba istotnych różnic między rozkładami

Liczba istotnych różnic	Liczba instrumentów	Odsetek instrumentów
0	6	8,22
1	13	17,81
2	27	36,99
3	16	21,92
4	8	10,96
5	3	4,11
6	0	0,00

Źródło: opracowanie własne.

Instrumentów, które nie wykazywały pamięci, było mniej niż 10%; najwięcej spółek wykazywało 2 lub 3 istotne różnice. W tabeli 4 przedstawiono zestawienie istotnych różnic między parami rozkładów z uwzględnieniem podziału na istotne różnice między ciągłymi i dyskretnymi częściami rozkładów.

Tabela 4. Liczba istotnych różnic pomiędzy rozkładami (części ciągłe i dyskretnie)

Liczba istotnych różnic między składowymi	Ciągłymi		Dyskretnymi	
	liczba	odsetek	liczba	odsetek
0	32	43,84	19	26,03
1	28	38,36	5	6,85
2	10	13,70	49	67,12
3	3	4,11	0	0,00

Źródło: opracowanie własne.

Można zauważyć, że w tab. 4 częściej występują istotne różnice między dyskretnymi częściami rozkładów.

W pracy dla porównania zbadano również występowanie autokorelacji pierwszego rzędu stóp zwrotu [7]. W celu przetestowania autokorelacji użyto testu Breuscha-Godfrey'a [9]. Okazuje się, że w większości przypadków, jeżeli występuje autokorelacja, to wykrywana jest również pamięć. Istniało jednak sporo spółek, które wykazywały pamięć, a autokorelacja była u nich nieistotnie różna od zera. W tabeli 5 zawarto informacje na temat występowania autokorelacji pierwszego rzędu i efektu pamięci.

Tabela 5. Statystyki występowania autokorelacji pierwszego rzędu w stosunku do statystyki występowania pamięci w spółkach lub jej braku (ilościowe)

Liczba instrumentów	Z pamięcią	Bez pamięci	Suma
Z autokorelacją	36	2	38
Bez autokorelacji	31	4	35
Suma	67	6	73

Źródło: opracowanie własne.

Jak widać, w tab. 5 tylko 2 spółki z 38, w których wykryto autokorelacje, nie miały jednocześnie pamięci. Natomiast 31 spółek posiadało pamięć, a autokorelacja stóp zwrotu w tych spółkach była nieistotnie różna od zera. Można pokusić się o stwierdzenie, że pamięć modelowana opisywanym w pracy wielostanowym procesem Markowa jest pamięcią w szerszym sensie niż pamięć modelowana autokorelacją pierwszego rzędu.

Jak wynika z tab. 3, ponad 90% badanych instrumentów wykazuje pamięć. Nasuwa się jednak pytanie, czy część zdiagnozowanych przypadków pamięci nie jest efektem przypadkowym (efekt pamięci pozornej). Może się okazać, że po losowym rozdzielaniu szeregu stóp zwrotu na trzy części (o proporcjach takich jak w rozkładach: „minus”, „zero” i „plus”) model również będzie wykazywał pamięć. W pracy rozważono ten aspekt, przeprowadzono 400 losowych podziałów szeregu stóp. W tabeli 6 podano wyniki przeprowadzonych symulacji dotyczące trzech poziomów istotności 0,1, 0,05, 0,02.

Tabela 6. Pamięć pozorna w poszczególnych instrumentach

Pozorna pamięć			
Poziom istotności	0,1	0,05	0,02
Średni odsetek pozornych pamięci	33,11%	18,58%	7,97%
Odchylenie standardowe odsetka pozornych pamięci	12,96%	7,46%	3,39%

Źródło: opracowanie: własne.

Do bezpośredniego porównania wyników występowania pamięci między rozkładami, w których losowo przydzielano stopy zwrotu, a pamięcią między rozkładami „minus”, „zero” i „plus” należy wziąć z tab. 6 wyniki dotyczące poziomu istotności $\alpha = 0,05$ (dla takiego poziomu badano istotne różnice między rozkładami „minus”, „zero” i „plus”). Jak widać, efekt pozornej pamięci stanowi około 20% przypadków. Z tabeli 6 można wywnioskować także, że co piąta spółka wykazująca pamięć może mieć pamięć pozorną.

Z powyższych rozważań wynika, że w szeregach stóp zwrotu instrumentów notowanych na GPW w Warszawie występuje pamięć modelowana wielostanowym procesem Markowa (dokładniej: trzystanowym).

4. Podsumowanie

Zaproponowane podejście do modelowania pamięci szeregów czasowych stanowi ciekawą alternatywę dla nieliniowych modeli typu Threshold. Nie jest ono jednak pozbawione wad. W celu oszacowania rozkładów musimy dysponować odpowiednio liczną próbą. Częściowym rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie bardziej efektywnych metod estymacji rozkładów bądź danych wysokiej częstotliwości.

W pracy rozważono model z pamięcią jednookresową. Wprowadzenie zależności wielookresowej jest naturalne – należy rozszerzyć przestrzeń stanów. Niestety skutkuje to zapotrzebowaniem na większą liczbę danych, co w zaproponowanym podejściu praktycznie uniemożliwia jego aplikację.

Zaproponowany model może być również zastosowany w prognozowaniu cen instrumentów finansowych i analizie wartości zagrożonej portfela inwestycyjnego.

Literatura

- [1] Diebold F.X., Inoue A., *Long memory and regime switching*, Technical Working Paper Series, National Bureau of Economic Research, 2000.
- [2] Gillespie D.T., *Markov processes. An introduction for physical scientists*, Academic Press INC., San Diego 1992.
- [3] Granger C.W.J., Ding Z., *Varieties of long memory models*, "Journal of Econometrics" 1996, 73, 61-77.
- [4] Haberman S., Pitacco E., *Actuarial models for disability insurance*, CRC Press LLC, Boca Raton, Florida 2000.
- [5] Hess M.K., *What drives Markov regime-switching behavior of stock markets? The Swiss case*, "International Review of Financial Analysis" 2003, 12, 527-543.
- [6] Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.
- [7] Koško M., Osińska M., Stempińska J., *Ekonometria współczesna*, Wydawnictwo „Dom Organizatora”, Toruń 2007.
- [8] Kowalenko I.N., Kuzniecowa N.J., Szurienkova W.M., *Procesy stochastyczne*, PWN, Warszawa 1989.
- [9] Kufel T., *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL*, PWN, Warszawa 2007.
- [10] Lo A.W., *Long-term memory in stock market prices*, "Econometrica" 1991, vol. 59, no 5, 1279-1313.
- [11] Narayan P.K., *The behaviour of US stock prices: evidence from a threshold autoregressive model*, "Mathematics and Computers in Simulation" 2006, 71, 103-108.
- [12] Pagan A., *The econometrics of financial markets*, "Journal of Empirical Finance" 1996, 3, 15-102.
- [13] Shively P.A., *The nonlinear dynamics of stock prices*, "The Quarterly Review of Economics and Finance" 2003, 43, 505-517.
- [14] Yang Y.-L., Chang Ch.-L., *A double-threshold GARCH model of stock market and currency shocks on stock returns*, "Mathematics and Computer in Simulation" 2008, 79, 458-474.
- [15] Wywił J., *Wprowadzenie do wnioskowania statystycznego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2004.

ONE-CYCLE MEMORY EFFECT MODELLED BY MULTI-STATE MARKOV PROCESS. THE ANALYSIS OF INSTRUMENTS QUOTED ON THE WARSAW STOCK EXCHANGE

Summary

The proposed approach to modelling time series memory is an interesting alternative for non-linear models of Threshold type. This approach has some drawbacks. To estimate the distribution we have to have appropriately numerous trial. A partial solution to this problem is the application of more effective methods of estimation of distribution or data of high frequency.

The model with one-cycle memory is discussed in the article. The introduction of multi-cycle relationship is natural. The space of states should be extended. Unfortunately it results in the demand for the higher number of data which in the proposed approach in practice makes its application impossible.

The proposed model can be also used in forecasting the prices of financial instruments, analysis of endangered value of financial portfolio.