

Paweł Kliber

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

ESTYMACJA SKOKÓW CEN AKCJI NA GIELDZIE PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE

1. Wstęp

W standardowym podejściu do modelowania cen akcji przyjmuje się założenie o normalności rozkładu stóp zwrotu. Oznacza to, że ceny akcji podlegają geometrycznemu ruchowi Browna. Normalność rozkładu zakłada się np. w klasycznej teorii portfelowej [Markowitz 1952] czy przy wycenie opcji metodą Blacka-Scholesa [Black, Scholes, 1973].

Wiadomo jednak, że faktycznie rozkłady stóp zwrotu nie są normalne. Obserwuje się zjawiska takie, jak grube ogony i wysoka kurioza. Ma to istotne znaczenie w praktyce. Modele oparte na rozkładzie normalnym mogą niedoszacowywać ryzyka.

Na możliwość uwzględnienia skoków w modelowaniu cen akcji zwrócono uwagę już w artykule [Meron 1976]. Jednak wykrywanie skoków stało się możliwe dopiero po pojawieniu się możliwości technicznych do obróbki danych wysokiej częstotliwości. Pierwsze dobre testy do wykrywania skoków pojawiły się dopiero na początku XXI w. w pracach Barndorffa-Nielsena i Shepharda. Od tej pory pojawiło się kilka nowych propozycji.

W artykule będą zastosowane metody wykrywania skoków do analizy indeksu giełdowego WIG20 i jego dwóch spółek niefinansowych, które mają największy udział w indeksie: PKN Orlen i TP SA. Próbuje wyznaczyć, jakie znaczenie mają skoki w kształtowaniu się cen tych walorów (jak często występują skoki i jaki mają udział w zmienności). Oprócz tego, postaramy się stwierdzić, czy skoki są specyficzne dla danego waloru, czy raczej dotyczą całego rynku.

Artykuł składa się z sześciu punktów. W punkcie drugim będą przedstawione testy, jakimi posłużono się dalej. Część trzecia zawiera informacje o danych użytych do badania. W części czwartej zostaną zaprezentowane wyniki dotyczące liczby dni sesyjnych ze skokami, a w części piątej – dotyczące rozkładu wykrytych skoków. Część szósta zawiera wnioski.

2. Model i metoda testowania

Wszystkie testy skoków zakładają, że ceny podlegają procesowi dyfuzji ze skokami, tzn. logarytmy cen akcji można opisać następującym równaniem:

$$dy_t = \alpha_t dt + \sigma_t dW_t + J_t dq_t, \quad (1)$$

gdzie: W jest procesem Wienera, q to proces Poissona, J_t to niezależne i zmienne losowe o jednakowym rozkładzie reprezentujące wielkość skoków. Jeśli dryf α i zmienność σ są deterministyczne, to y jest procesem Lévy'ego o skończonej aktywności¹. W przedstawionych dalej testach skoków α i σ mogą być jednak także procesami stochastycznymi. Co więcej, dozwolony jest efekt dźwigni (korelacji między procesem generującym zmienność y a zmiennością w procesie σ).

Większość testów skoków posługuje się estymatorami wariancji kwadratowej. Jest to granica $\sum (y_{t_i} - y_{t_{i-1}})^2$ przy $t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$ 0 (zob. np. [Protter 2005]). Wariancja kwadratowa procesu y oznaczana jest symbolem $[y]$. W przypadku procesu (1) wariancję kwadratową można podzielić na dwie części: $[y] = [y^c] + [y^d]$, gdzie $[y^c]$ jest wariancją kwadratową ciągłej części procesu, zaś $[y^d]$ to wariancja kwadratowa skoków ($[y^d] = \sum_{t \leq T} (\Delta y_t)^2 = \sum_{t \leq T} J_t^2 1_{\{dq_t \neq 0\}}$). Testowanie obecności skoków sprowadza się zatem do testowania, czy $[y] = [y^c]$.

Do estymacji wariancji kwadratowej można posłużyć się zmiennością zrealizowaną i biwariancją (zob. [Barndorff-Nielsen, Shephard 2004; Barndorff-Nielsen, Shephard 2006]). Załóżmy, że obserwujemy proces (1) w odstępach czasu h . Obserwacje te oznaczamy przez $y_{h,i}$. Niech $r_{h,i} = y_{h,i} - y_{h,i-1}$ oznacza (logarytmiczne) stopy zwrotu cen. Wariancja zrealizowana dla pewnego okresu (np. dla dnia) to

$$RV_h = \sum_{i=1}^N r_{h,i}^2, \quad (2)$$

gdzie: N oznacza liczbę obserwacji w ciągu tego okresu (np. jeżeli mamy dane godzinne i ceny obserwujemy od 9:00 do 16:00, to $N = 7$). Biwariancję definiuje się wzorem:

$$BPV_h = \sum_{i=2}^N |r_{h,i-1}| |r_{h,i}|. \quad (3)$$

Pokazano, że gdy $h \rightarrow 0$, to $RV_h \rightarrow [y]$ oraz $BPV_h \rightarrow 2[y^c]/\pi$, to $RV_h - BPV_h$ jest nieobciążonym estymatorem wariancji kwadratowej skoków $[y^d]$.

Korzystając z tych dwóch statystyk, Bardorff-Nielsen i Shephard zaproponowali 3 testy:

¹ Zob. np. [Cont, Tankov 2004].

- różnicowy, oparty na statystyce

$$BNS_d = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\Omega_q}} (RV_h - BPV_h), \quad (4)$$

- logarytmiczny:

$$BNS_l = \frac{[y^c] \sqrt{N}}{\sqrt{\Omega_q}} (\ln RV_h - \ln BPV_h), \quad (5)$$

- ilorazowy:

$$BNS_r = \frac{[y^c] \sqrt{N}}{\sqrt{\Omega_q}} \left(1 - \frac{BPV_h}{RV_h} \right). \quad (6)$$

Przy tym Ω_q to kwartyczność definiowana jako $\Omega_q = \left(\frac{\pi}{4} + \pi - 5 \right) \int_0^T \sigma_s^2 ds$.

Udowodniono [Barndorff-Nielsen, Shephard 2006], że rozkładem granicznym tych statystyk jest standardowy rozkład normalny. Wyniki symulacji Monte Carlo pokazują, że testy mają dość dużą moc wykrywania skoków już dla ok. 70 obserwacji.

Oprócz testów opartych na biwariancji istnieje też druga grupa bazująca na statystyce *swap variance*:

$$SwV_h = 2 \sum_{i=1}^N \left(e^{r_{h,i}} - 1 - r_{h,i} \right). \quad (7)$$

Statystyka ta została wprowadzona w artykule [Jiang-Oomen 2008] i mierzy nadwyżkę (lub niedobór) powstały przy zabezpieczaniu delta-hedgigowym instrumentu o wypłatach równych logarytmowi z końcowej ceny akcji. Podobnie jak poprzednio, tak i w tym przypadku możliwe są trzy testy oparte na 3 różnych statystykach:

- test różnicowy:

$$JO_d = \frac{N}{\sqrt{\Omega_{sw}}} (SwV_h - RV_h), \quad (8)$$

- test logarytmiczny:

$$JO_l = \frac{[y^c] N}{\sqrt{\Omega_{sw}}} (\ln SwV_h - \ln RV_h), \quad (9)$$

– test ilorazowy:

$$JO_r = \frac{[y^c]N}{\sqrt{\Omega_{sw}}} \left(1 - \frac{RV_h}{SwV_h} \right), \quad (10)$$

przy czym $\Omega_{sw} = \frac{\mu_6}{9} \int_0^T \sigma_s^3 ds$, gdzie $\mu_6 = 8\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)/\sqrt{\pi}$. Podobnie jak w przypadku testów opartych na biwariancji, tak i tu rozkładem granicznym jest standardowy rozkład normalny, jednak w przeciwieństwie do tamtych testów – obszar odrzuceń jest dwustronny.

Przedstawione testy pozwalają jedynie stwierdzić, czy w jakimś okresie (np. w ciągu dnia) miał miejsce skok lub wystąpiły skoki. Nie można dokładnie określić momentu skoków, ich liczby, wielkości ani znaku. Momenty skoków można wyznaczać np. metodami falkowymi (zob. np. [Wan 1995] lub [Fan, Wan 2007]). My jednak posłużymy się metodą ekonometryczną z artykułu [Lee, Mykland 2006]. Jest ona oparta na statystyce

$$l_{h,i} = \frac{r_{h,i}}{\sqrt{BPV_{K,i}}}, \quad (11)$$

gdzie:

$$BPV_{K,i} = \frac{1}{K-2} \sum_{j=i-K+2}^{i-1} |r_{h,j}| |r_{h,j-1}|, \quad (12)$$

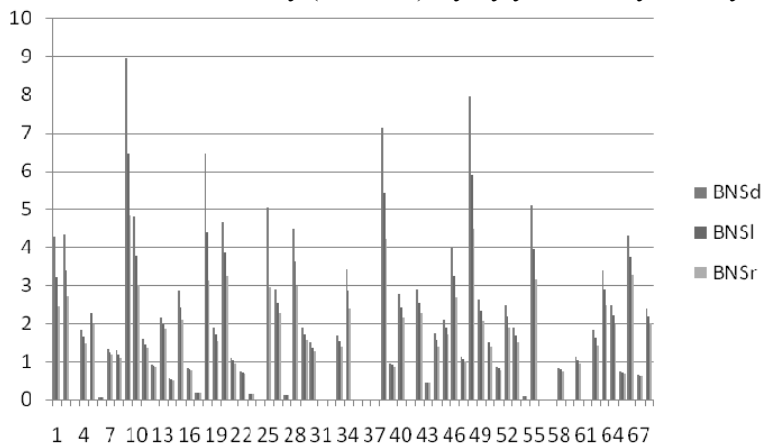
przy czym K musi być wybrane przez stosującego test. Statystyka $l_{h,i}$ ma rozkład graniczny $N(0,1)$.

3. Dane

Do badań posłużyliśmy się notowaniami indeksu WIG20 oraz dwóch największych spółek niefinansowych wchodzących w jego skład: PKN Orlen SA i TP SA. Ceny były kwotowane w odstępnie 1 minuty od godziny 9:10 do 16:10. Na podstawie tego obliczono stopy zwrotu, 1-, 5-, 10- i 20-minutowe, pomijając zwroty nocne. Dane dotyczyły 68 dni sesyjnych, od 27 maja do 29 sierpnia 2008 r. Po przeprowadzeniu obliczeń okazało się, że dane dotyczące zwrotów 1- i 5-minutowych są zbyt zanieczyszczone szumem związanym z mikrostrukturą rynku. Dopiero przy danych 10-minutowych uzyskano stabilność – otrzymane wyniki były bardzo zbliżone do wyników dotyczących niższych częstotliwości. Z tego powodu dalej prezentujemy tylko wyniki uzyskane na podstawie danych 10-minutowych.

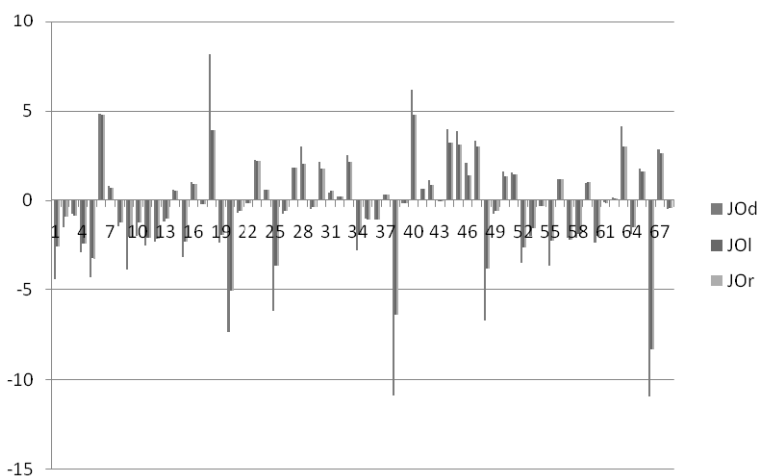
4. Wyniki – liczba dni ze skokami

Dla wszystkich trzech instrumentów przeprowadzono opisane wcześniej testy. Dla każdego dnia sesyjnego obliczono wartości statystyk testowych na podstawie 10-minutowych stóp zwrotu. Rysunki 1 i 2 przedstawiają te statystyki dla kolejnych dni sesyjnych dla indeksu WIG20. Następnie przy poziomie istotności 0,01 w odniesieniu do każdego dnia osobno sprawdzono, czy miał miejsce skok (skoki). Tabela 1 przedstawia wykrytą liczbę dni ze skokami dla każdego testu i każdego waloru. Warto odnotowania jest to, że ostatnie dwa testy (JO_l i JO_r) wykryły skoki w tych samych dniach.



Rys. 1. Statystyki BNS_d , BNS_l i BNS_r dla kolejnych dni sesyjnych dla WIG20

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Statystyki JO_d , JO_l i JO_r dla kolejnych dni sesyjnych dla WIG20

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Wyniki testów – liczba dni w których wykryto skoki (poziom ufności 0,99)

| Test | WIG20 | PKN | TP SA |
|-----------------|-------|-----|-------|
| BNS_d | 24 | 31 | 31 |
| BNS_l | 19 | 27 | 28 |
| BNS_r | 15 | 24 | 24 |
| JO_d | 22 | 25 | 20 |
| JO_l | 15 | 15 | 14 |
| JO_r | 15 | 15 | 14 |
| Wszystkie BNS | 15 | 24 | 24 |
| Wszystkie JO | 15 | 15 | 14 |
| Wszystkie testy | 7 | 11 | 10 |

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2. Wspólne skoki dla indeksu i spółek (test JO_l poziom istotności 0,99)

| Spółka | Liczba skoków |
|--------------------|---------------|
| WIG20 | 15 |
| PKN | 15 |
| TP SA | 14 |
| WIG20 i PKN | 5 |
| WIG20 i TP SA | 4 |
| WIG20, PKN i TP SA | 3 |

Źródło: obliczenia własne.

Aby sprawdzić, jaka część skoków wynika z ruchów całego rynku, a jaka jest idiosynkratyczna dla waloru, wyznaczyliśmy liczbę dni, w których miały miejsce skoki w więcej niż jednym walorze. Wyniki przedstawia tab. 2. Do wskazania dni ze skokami posłużyliśmy się tu testem opartym na statystyce JO_l , który jak się wydaje, najlepiej wskazuje skoki. Jak widać w tabeli, większość skoków jest idiosynkratyczna. Spośród odpowiednio 15. i 14. skoków PKN i TP SA jedynie 5. i 4. były skokami wspólnymi z indeksem WIG20. Jedynie 3 skoki były wspólne dla wszystkich trzech walorów.

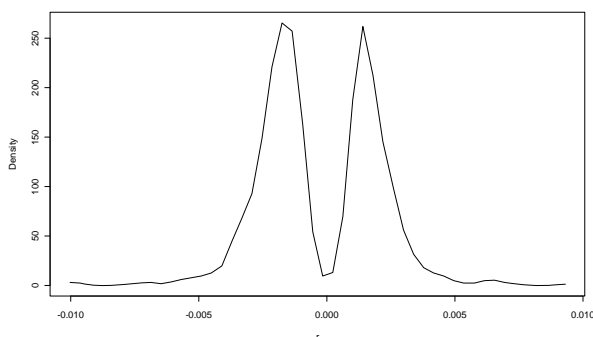
5. Wyniki – rozkład skoków

Aby wyznaczyć rozkład wielkości skoków, posłużyliśmy się testem opartym na statystyce $l_{h,i}$ ze wzoru (11). Podobnie jak w poprzednim punkcie, tak teraz zastosowaliśmy dane 10-minutowe. Przy obliczeniu ruchomej biwariancji $BPV_{K,i}$ wzięliśmy $K = 20$. Znając dokładne miejsca skoków, mogliśmy wyodrębnić stopy zwrotu odpowiadające skokom. Na tej podstawie mogliśmy wyznaczyć rozkład wielkości skoków (rys. 3 przedstawia rozkład skoków dla WIG20 estymowany metodą kernelową) oraz obliczyć wariancję kwadratową skoków. Tabela 3 zawiera wyniki dotyczące wariancji kwadratowej skoków i jej udziału w całkowitej wariancji kwadratowej procesu cen.

Tabela 3. Wariancja kwadratowa, wariancja kwadratowa skoków i udział wariancji kwadratowej skoków w całkowitej wariancji kwadratowej procesu cen

| Spółka | WIG20 | PKN | TP SA |
|-----------------------------|---------|---------|---------|
| Wariancja kwadratowa | 0,00433 | 0,01613 | 0,01059 |
| Wariancja kwadratowa skoków | 0,01097 | 0,03501 | 0,02707 |
| Udział skoków | 39,43% | 46,08% | 39,13% |

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Rozkład wielkości skoków dla WIG20

Źródło: opracowanie własne.

Najważniejszym wnioskiem z tab. 3 jest to, że skoki mają duży udział w wariancji kwadratowej procesu cen. Udział ten w przypadku PKN sięga prawie połowy, a w przypadku pozostałych dwóch walorów przekracza jedną trzecią. Z kolei rys. 3 pokazuje, że znaczna część skoków to skoki małe (najmniejsze skoki nie są wykrywane w oszacowaniach – stąd „szczyrba” w okolicach zera). Dokładniejsza analiza pokazuje jednak, że zdarzają się (rzadko) skoki o ekstremalnie dużych wielkościach – przekraczających 10 odchyleń standardowych procesu. To one mają duży wpływ na rozkład stóp zwrotu oraz na udział skoków w wariancji kwadratowej.

Warte odnotowania jest też to, że choć znaleziono stosunkowo mało wspólnych skoków walorów (tab. 2), to skoki te były stosunkowo duże; i tak: skoki wspólne dla wszystkich trzech walorów stanowią 11,2% wariancji kwadratowej PKN, 6,3% zmienności TP SA i 9,0% zmienności WIG20. Skoki wspólne z indeksem stanowią 22,1% zmienności PKN i 14,0% zmienności TP SA.

6. Wnioski

Wnioski z przeprowadzonych badań można streścić w następujących czterech punktach.

1. Skoki stanowią istotną część procesu cen akcji. Najmniej czułe testy wykryły skoki w ponad 20% dni sesyjnych (przy wysokim poziomie ufności wynoszą-

cym 0,99). Mają też duży udział w zmienności cen. Stanowią ponad jedną trzecią wariancji kwadratowej procesu.

2. Znaczna większość skoków jest idiosynkratyczna. Jedynie niewielka ich część jest wspólna dla całego rynku. Te wspólne skoki są jednak najsilniejsze i najbardziej wpływają na zmienność.

3. W procesie cen najwięcej jest skoków niewielkich, jednak występują też bardzo duże skoki (o wielkościach sięgających dziesięciokrotności odchylenia standardowego), które mają istotny wpływ na zmienność i rozkład stóp zwrotu.

4. W związku z tym przy ocenie ryzyka inwestycyjnego, budowie portfela czy wycenie instrumentów pochodnych nie wystarczy posłużyć się standardowymi modelami opartymi na rozkładzie normalnym. Brak uwzględnienia skoków cen powoduje niedoszacowanie ryzyka.

Literatura

- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N., *Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation*, "Journal of Financial Econometrics" 2006, 4, s. 1-30.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N., *Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps*, "Journal of Financial Econometrics" 2004, 2, s. 1-48.
- Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities*, "Journal of Political Economy" 1973, 81, s. 637-654.
- Cont R., Tankov P., *Financial modelling with jump processes*, Chapman & Hall, 2004.
- Fan J., Wan Y., *Multi-scale jump and volatility analysis for high-frequency financial data*, "Journal of American Statistical Association" 2007, 102, s. 1349-1362.
- Jiang G.J., Oomen R.C.A., *Testing for jumps when asset prices are observed with noise - a swap variance approach*, "Journal of Econometrics" 2008, vol. 144, s. 352-370.
- Lee S.S., Mykland P.A., *Jumps in real-time financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics*, Technical Report no 566, Department of Statistics, University of Chicago, Chicago 2006.
- Mandelbrot B.B., Hudson R.L., *Fraktale und Finanzen*, Piper, 2005.
- Markowitz H.M., *Portfolio selection*, "Journal of Finance" 1952, 7, s. 77-91.
- Merton R., *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, "Journal of Financial Economics" 1976, 3, s. 125-144.
- Protter P.E., *Stochastic integration and differential equations*, Springer, 2005.
- Wang Y., *Jump and sharp cusp detection via wavelets*, "Biometrika" 1995, 82, s. 385-397.

ESTIMATION OF JUMPS OF STOCK PRICES ON THE WARSAW STOCK EXCHANGE

Summary

In the article the author deals with the detection and analysis of jumps in the index WIG20 and its two main components. With the tests of Barndorff-Nielsen and Shephard as well as tests of Jiang and Oomen he detects days in which jumps occur. Then using the Lee and Mykland test he classifies some returns as jumps. This allows him to calculate the distribution of the jumps and their share in total volatility of price processes. He also considers the question how many jumps are common to the market and how many are stock-specific.