

**Agnieszka Majewska**

Uniwersytet Szczeciński

## **WYKORZYSTANIE MODELU KMV DO OCENY RYZYKA NIEWYPŁACALNOŚCI NA PRZYKŁADZIE SPÓŁEK NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE**

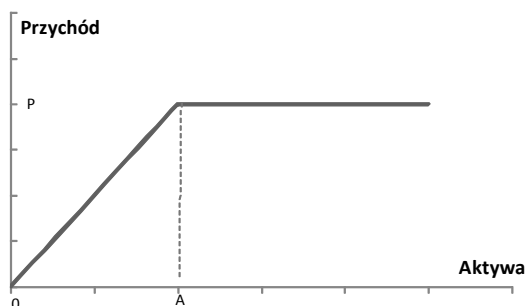
### **1. Wstęp**

Ryzyko kredytowe stanowi jedno z najważniejszych zagadnień w dziedzinie finansów. Wobec rozwijającego się rynku instrumentów pochodnych, dużej konkurencji firm, a w przypadku instytucji bankowych – konieczności spełnienia wymagań kapitałowych narzucanych przez Bank Rozliczeń Międzynarodowych, jego właściwy pomiar jest niezwykle ważny. Ogólnie ryzyko kredytowe utożsamiane jest z możliwością zajścia sytuacji, w której jedna ze stron umowy nie będzie zdolna do realizacji zobowiązań wynikających z zawartej transakcji.

Celem artykułu jest przedstawienie koncepcji pomiaru ryzyka kredytowego opartej na wycenie opcji. Została ona zaproponowana przez Roberta Mertona i należy do grupy modeli strukturalnych bazujących na analizowaniu struktury finansowej podmiotów gospodarczych. Podejście Mertona w praktyce określane jest jako model KMV. W modelu tym zakłada się, że wartość przedsiębiorstwa może być modelowana jako opcja kupna, dla której instrumentem bazowym jest wartość rynkowa aktywów spółki, natomiast cenę wykonania stanowią zobowiązania spółki w momencie ich wymagalności. Badanie empiryczne przeprowadzone zostanie na podstawie wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

### **2. Powiązanie opcji i pożyczek**

Pierwszą próbę zastosowania teorii wyceny opcji do określenia wartości obciążonych ryzykiem pożyczek i obligacji podjął w 1974 roku Robert Merton [Merton 1974, s. 449-470]. Opisał on równoważność przychodów banku z udzielonej pożyczki z przychodami wystawcy opcji sprzedaży na aktywa firmy, która podjęła pożyczkę. Wartość długu odpowiada więc krótkiej pozycji w opcji sprzedaży, co ilustruje rys. 1.



Rys. 1. Przychód banku z tytułu udzielonej pożyczki

Źródło: opracowanie własne.

Bank określa wartość długu wraz z odsetkami jako równą  $A$ . Udzielając pożyczki, może uzyskać całą kwotę ( $P = A$ ) lub wartość od  $0$  do  $A$ . Gdy firma posiada aktywa w wysokości powyżej  $A$ , brak jest przesłanek do niespłacania zadłużenia. Jednak w sytuacji spadku aktywów firmy poniżej tej wartości pojawiają się problemy z możliwością realizacji zobowiązań. Im wartość ta jest bliższa zeru, tym bank ponosi coraz większe straty. W skrajnym przypadku w wyniku bezpośrednich i pośrednich kosztów bankructwa (np. kosztów postępowania likwidacyjnego, prawnego) pożyczka może mieć nawet ujemną wartość nominalną.

Rozważania Mertona wpłynęły na wykształcenie się modeli strukturalnych ryzyka kredytowego. Opierają się one na strukturze finansowej podmiotu gospodarczego, która wiąże się z analizowaniem aktywów i pasywów. Opcje wykorzystywane są w nich jako pewna koncepcja teoretyczna, a nie jako rzeczywiście istniejący instrument finansowy. Jak podaje K. Jajuga [Jajuga K. (red.) 2007, s. 150], jej podstawą są następujące stwierdzenia:

- Wartość kapitału własnego odpowiada wartości pozycji długiej w opcji kupna, dla której walorem bazowym jest wartość aktywów przedsiębiorstwa.
- Wartość długu jest sumą wartości pozycji długiej w instrumencie dłużnym wolnym od ryzyka (np. obligacja zerokuponowa) oraz pozycji krótkiej w opcji sprzedaży dla waloru bazowego odpowiadającego wartości aktywów przedsiębiorstwa.

Ogólnie w modelach strukturalnych wykorzystuje się relacje, jakie występują między wartościami składników finansowych przedsiębiorstwa. Rozpatrując aktywa jako sumę zobowiązań i kapitału własnego, należy stwierdzić, że podmiotami finansującymi działalność firmy są wierzyciele i właściciele. Zgodnie z tym podziałem po uregulowaniu zobowiązań wierzycieli właścicielom przysługuje prawo do wartości aktywów netto. Jeżeli wykorzystana jest powyższa relacja, to wartość aktywów netto odpowiadać będzie kapitałowi własnemu:

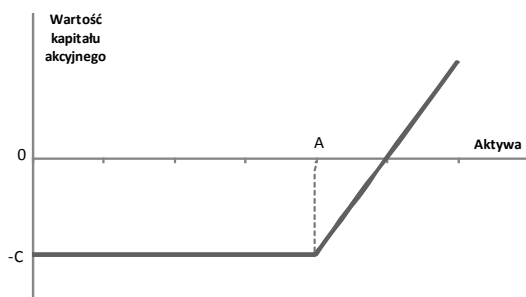
$$\begin{aligned} \text{aktywa} &= \text{zobowiązania} + \text{kapitał własny}, \\ \text{aktywa netto} &= \text{aktywa} - \text{zobowiązania} = \text{kapitał własny}. \end{aligned}$$

Im wartość rynkowa aktywów pomniejszona o rynkową wartość zobowiązań jest bliższa zero, tym ryzyko kredytowe jest wyższe. Aktywa netto stanowią bowiem pewien margines bezpieczeństwa i wskazują na istnienie określonej nadwyżki finansowej. Ryzyko kredytowe będzie zatem ściśle związane z tą kategorią. Kluczowym elementem jest więc prawidłowe oszacowanie wartości rynkowej aktywów netto, która w modelu KMV jest jedną z determinant określających ryzyko kredytowe.

### 3. Model KMV

Koncepcja Mertona w kolejnych latach była rozwijana i rozszerzana<sup>1</sup>. Na jej podstawie w 1989 roku firma Moody's KMV opracowała model monitorowania kredytu KMV EDF<sup>TM</sup>.

Pozwala on formułować i aktualizować prognozy odmowy zapłaty dla firm, których akcje znajdują się w obrocie publicznym. W odniesieniu do koncepcji Mertona zamiast analizowania przychodów banku z tytułu udzielonej pożyczki metodologię opcji wykorzystano do opisu spłaty pożyczki zaciągniętej przez przedsiębiorstwo z punktu widzenia akcjonariuszy firmy [Saunders 2001, s. 33-35]. Przychody właścicieli kapitału akcyjnego przedsiębiorstwa, które zaciągało dług, odpowiadać będą długiej pozycji w opcji kupna. Przedstawia to rys. 2.



Rys. 2. Przychód właścicieli kapitału akcyjnego

Źródło: opracowanie własne.

Wartość kapitału akcyjnego firmy zaciągającej pożyczkę może być pod względem rynkowym interpretowana jako dochód z nabycia opcji kupna aktywów firmy. Traktując kapitał akcyjny jako cenę opcji kupna, jego wartość można zapisać za pomocą następującej formuły:

$$E = f(A, \sigma_A, D, r, T), \quad (1)$$

gdzie:  $E$  – rynkowa wartość kapitału własnego,  
 $A$  – rynkowa wartość aktywów firmy,

<sup>1</sup> Rozbudowywaniem i dopasowaniem modelu Blacka-Scholesa do potrzeb ryzyka kredytowego zajmowali się m.in. S. Kealhofer [1998], O. Vašíček [1977].

- $\sigma_A$  – zmienność wartości aktywów firmy,
- $D$  – nominalna wartość zadłużenia,
- $r$  – stopa procentowa wolna od ryzyka,
- $T$  – horyzont czasowy niewypłacalności.

W powyższym modelu brak jest możliwości bezpośrednio określenia rynkowej wartości aktywów oraz ich zmienności. Wartości pozostałych zmiennych określane są bezpośrednio przez rynek. Rynkową wartość kapitału własnego wyznaczać będzie wartość akcji znajdujących się w obrocie na rynku kapitałowym. Cena wykonania odpowiadać będzie poziomowi zobowiązań w momencie ich zapadalności. W odniesieniu do czasu, w którym może dojść do odmowy zapłaty, w większości analiz przyjmuje się horyzont 1 roku, można jednak dowolnie ustalić jego długość.

Wybór o wykonaniu opcji, czyli spłaty długu, jest efektem ekonomicznej kalkulacji porównywania wartości aktywów i wysokości zobowiązań. W sytuacji, gdy wartość aktywów spadnie poniżej  $A$ , właściciele firmy nie będą w stanie ich uregulować. Przedsiębiorstwo stanie się niewypłacalne, a aktywa zostaną zwrócone pożyczkodawcom. Utrata zdolności płatniczej odpowiadać więc będzie posiadaniu opcji *out-of-the-money*, dla której brak jest ekonomicznych przesłanek realizacji. Oszacowanie prawdopodobieństwa braku wykonania opcji będzie równoznaczne z wyznaczeniem prawdopodobieństwa niewypłacalności firmy. Zgodnie z tymi rozważaniami głównym czynnikiem determinującym utratę zdolności płatniczej przedsiębiorstwa – przy założonym poziomie zobowiązań – jest wartość rynkowa aktywów oraz ich zmienność.

Model Blacka-Scholesa zakłada, że oprócz estymacji zmienności cen walorów bazowych wartości pozostałych zmiennych są możliwe do zaobserwowania na rynku. W przypadku wykorzystania modelu do oceny niewypłacalności firmy oprócz zmienności, w tym przypadku aktywów firmy, należy oszacować również ich wartość rynkową. Do wyznaczenia tych zmiennych wykorzystuje się następujące zależności:

1. Strukturalną relację między wartością rynkową akcji firmy i wartością rynkową jej aktywów.

2. Relację między zmiennością wartości aktywów i zmiennością kursów akcji.

Wartość rynkowa kapitału własnego według modelu wyceny opcji wynosi:

$$E = AN(d_1) - De^{-rT}N(d_2), \quad (2)$$

gdzie:  $N(d_i)$  – wartość dystrybuanty rozkładu normalnego dla  $d_1$  i  $d_2$ ,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{D}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{A}{D}\right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}} = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}.$$

Wykorzystując relację między zmiennością wartości kapitału własnego firmy ( $\sigma_E$ ) oraz zmiennością wartości aktywów firmy ( $\sigma_A$ ):

$$\sigma_E E = N(d_1)\sigma_A A, \quad (3)$$

po przyrównaniu równania (2) i (3) do zera, wartość rynkowa aktywów i ich zmienność wyznaczana jest iteracyjnie przez minimalizację następującego wyrażenia:

$$[AN(d_1) - De^{-rT}N(d_2) - E]^2 + [N(d_1)\sigma_A A - \sigma_E E]^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Po oszacowaniu  $A$  i  $\sigma_A$  określany jest punkt niewypłacalności. Zgodnie z metodologią Moody's KMV odpowiada on wartości wszystkich zobowiązań krótkoterminowych powiększonych o połowę wartości zobowiązań długoterminowych<sup>2</sup>:

$$A_{def} = D_S + 0,5D_L. \quad (5)$$

Jeśli mamy wyznaczony punkt niewypłacalności, to możliwe jest określenie prawdopodobieństwa niewypłacalności wyrażonego wzorem:

$$PD = N\left(\frac{\ln(A/A_{def})}{\sigma_E E/A}\right). \quad (6)$$

Do szacowania prawdopodobieństwa niewypłacalności neutralnego względem ryzyka, czyli zakładając, że aktywa firmy przynoszą taką samą stopę zwrotu jak instrumenty finansowe wolne od ryzyka, wykorzystuje się formułę [Delianedis, Geske 1998]:

$$PD_N = 1 - N(k), \quad (7)$$

gdzie:

$$k = \frac{\ln(A/D) + (r - \sigma_A^2/2)T}{\sigma_A \sqrt{T}}.$$

#### 4. Badanie empiryczne

Model KMV do wyznaczenia prawdopodobieństwa niewypłacalności wykorzystano dla spółek z sektora handel, które są lub były notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Analizowano okres od I kwartału 2003 roku do I kwartału roku 2008. Wyjątek stanowiły spółki, które ogłosiły upadłość. Dla nich uwzględniono cały okres notowań. Ze względu na zbliżony początek notowań spółek, które utraciły zdolność do realizacji swoich zobowiązań, do badania dodatkowo włączono spółkę Leta SA, pomimo że nie odpowiadała ona ustalonemu okresowi badań. Badanie prowadzono na koniec każdego z kwartałów. Analizowane spółki ujęto w tab. 1.

Przyglądając się datom pierwszych notowań, można zauważyć, że wśród analizowanych spółek były zarówno firmy, które mają już długą historię notowań giełdowych, jak i wprowadzone do obrotu w ostatnich latach. Prawdopodobieństwo niewypłacalności dla poszczególnych spółek, zgodnie z opisem teoretycznym, określono w następujących etapach:

<sup>2</sup> Zob. [Saunders 2001, s. 35]. Użytkownik modelu może również określić punkt niewypłacalności w inny sposób zgodny z teorią ekonomii.

1. Iteracyjne wyznaczenie rynkowej wartości aktywów oraz ich zmienności.
2. Wyznaczenie punktu niewypłacalności.
3. Określenie prawdopodobieństwa niewypłacalności neutralnego względem ryzyka.

Tabela 1. Spółki uwzględnione w badaniu

Spółka	Data pierwszego notowania (ostatniego)
AMPLI	14-10-1997
ATLANTA	10-01-2005
EFEKT	22-04-1993
FARMACOL	23-04-1999
INTERCARS	26-05-2004
PGF	17-02-1998
PROSPER	08-04-1999
STALPROFI	26-04-2000
TIM	16-02-1998
TORFARM	30-09-2004
VARIANT	11-07-2005
WANDALEX	29-11-2000
HOWELL	2000-11-17 (20-10-2004)
LETA	2001-04-18 (17-07-2002)
OCEAN COMPANY	2000-11-17 (10-03-2003)

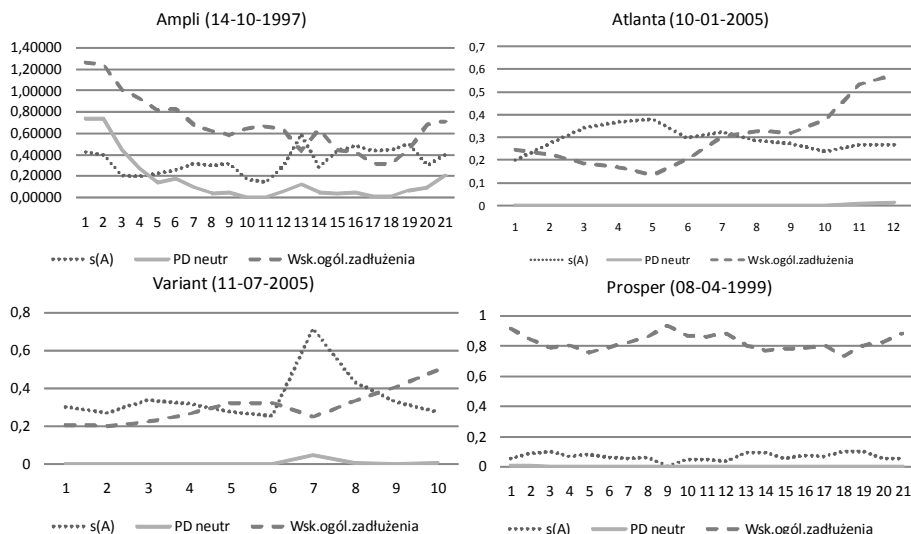
Źródło: opracowanie własne.

Zmienne, których wartości możliwe były bezpośrednio do zaobserwowania na rynku, to: wartość rynkowa kapitału własnego, wartość zadłużenia, stopa procentowa wolna od ryzyka. Wartość rynkowa kapitału własnego ustalona została na koniec poszczególnych kwartałów jako iloczyn kursu akcji i liczby akcji obrotu. Na podstawie kursów akcji oszacowano również zmienność wartości kapitału własnego. Do wyznaczenia użyto odchylenia standardowego logarytmicznych stóp zwrotu dla półrocznego okresu. Wielkość zadłużenia wyznaczona została na podstawie kwartalnych sprawozdań finansowych poszczególnych spółek jako suma zobowiązań krótko- i długoterminowych. Za stopę wolną od ryzyka przyjęto rentowność 52-tygodniowych bonów skarbowych. Prawdopodobieństwo niewypłacalności określone było dla rocznego okresu ( $T = 1$ ).

Wyniki przedstawiono na wykresach, na których oprócz prawdopodobieństwa niewypłacalności ujęto również zmienność rynkową wartości aktywów oraz wskaźnik ogólnego zadłużenia (stosunek zobowiązań ogółem do wartości aktywów). Ze względu na obszerny materiał empiryczny na wykresach zaprezentowano wyniki dla wybranych spółek: jedna notowana od przeszło dziesięciu lat, dwie od trzech, a trzy w wyniku ogłoszenia upadłości przestały być notowane na GPW.

W badaniu wyznaczono prawdopodobieństwo niewypłacalności bez zakładania sytuacji obojętności wobec ryzyka oraz przy założeniu, że każdy uczestnik rynku akceptuje stopę zwrotu z przeprowadzanych inwestycji na poziomie stopy wolnej od ryzyka. W większości przypadków prawdopodobieństwo neutralne względem ryzyka

było wyższe od prawdopodobieństwa oszacowanego bez uwzględniania stopy zwrotu z aktywów. Jedynie dla jednej spółki (Prosper) w całym analizowanym okresie PD było wyższe od  $PD_N$ , podczas gdy dla sześciu w całym okresie było niższe.



Rys. 3. Prawdopodobieństwa niewypłacalności dla wybranych spółek

Źródło: opracowanie własne.

Rozpatrując wyniki prawdopodobieństwa utraty zdolności płatniczej w odniesieniu do poziomów prawdopodobieństwa niewypłacalności i klas ryzyka, które podali P. Crosbie oraz J. Bohn [Crosbie, Bohn 2003, s. 8], zauważyć można, że dla większości spółek w badanych kwartałach wynik wskazywał na brak problemów finansowych. W tabeli 2 w odniesieniu do poszczególnych klas ryzyka przedstawiono liczbę kwartałów, dla których otrzymano dany wynik.

Tabela 2. Prawdopodobieństwa i odpowiadające im klasy ryzyka

Prawdopodobieństwo [%]	Klasa ratingu	AMPLI	ATLANTA	EFEKT	FARMACOL	INTERCARS	PGF	PROSPER	STALPROFI	TIM	TORFARM	VARIANT	WANDALE X	HOWELL	LETA	OCEAN COMPANY
< 0,02	AAA	0	10	8	16	13	13	13	9	13	7	6	11	1	0	0
0,03	AA	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0
0,07	A	1	0	2	0	0	2	1	3	0	2	0	3	1	0	0
0,18	BBB	0	0	1	1	0	1	1	3	0	0	0	2	0	0	0
0,7	BB	3	0	7	2	0	2	3	2	2	2	2	2	0	0	0
2	B	0	2	3	0	0	1	2	1	2	0	1	1	0	0	0
14	CCC	11	0	0	0	0	2	0	3	2	0	1	3	4	2	1
17	CC	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0
20	D	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
> 20		5	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	5	2	7

Źródło: opracowanie własne.

Szczegółowa analiza wyników uzyskanych dla poszczególnych spółek wskazuje, że większość z nich nie miała problemów ze spłatą zobowiązań. W przypadku podmiotów, które ogłosiły upadłość, można zauważyć wyraźny wzrost prawdopodobieństwa niewypłacalności do ponad 20%. Ma to swoje odzwierciedlenie w wysokich wartościach wskaźnika ogólnego zadłużenia. Dla tych spółek charakterystyczna jest również mała zmienność wartości rynkowej aktywów. Związane to było ze wzrostem zadłużenia tych firm.

Dla spółek o stabilnej sytuacji finansowej wzrost zmienności rynkowej wartości aktywów powodował wzrost prawdopodobieństwa niewypłacalności. W odniesieniu do tych firm można również zaobserwować ujemną zależność między zmiennością aktywów a wskaźnikiem ogólnego zadłużenia. W odniesieniu do analizy zmienności rynkowej aktywów jej poziom jest przede wszystkim uzależniony od zmienności kapitału własnego oraz zadłużenia firmy<sup>3</sup>. Należy przy tym zaznaczyć, że zmienność kapitału własnego może być wyznaczana za pomocą różnych metod estymacji. W zależności od zastosowanego podejścia można uzyskać różne wyniki, co z kolei wpłynie na rynkową wartość aktywów i ich zmienność, a w dalszej kolejności – na prawdopodobieństwo niewypłacalności.

## 5. Podsumowanie

Model KMV należy do grupy modeli opartych na strukturze kapitałowej firmy, a dokładnie na zmienności kapitału własnego i rynkowej wartości kapitału własnego. W przeciwieństwie do klasycznych modeli oceny ryzyka kredytowego nie uwzględniają kategorii księgowych, lecz jak wspomniano, wartości rynkowe. Ze względu na konieczność jej znajomości wartości rynkowej przedsiębiorstw model może być wykorzystywany wyłącznie w odniesieniu do spółek notowanych na giełdach papierów wartościowych. Informacje rynkowe wykorzystywane są do oceny niewypłacalności przez szacowanie rynkowej wartości aktywów przedsiębiorstwa oraz ich zmienności. Parametry te stanowią podstawę prawidłowego oszacowania prawdopodobieństwa niewypłacalności. W związku z tym, gdy ceny akcji nie stanowią rynkowej wartości przedsiębiorstwa, model nie powinien być stosowany.

W odniesieniu do warunków polskich istotnym ograniczeniem wykorzystania modelu KMV jest niski procent firm notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Dla większości przedsiębiorstw nie jest zatem możliwe wyznaczenie wartości rynkowej aktywów i ich zmienności. Dodatkowo do interpretacji model standardowo wykorzystuje prawdopodobieństwa niewypłacalności od 0 do 20%, które są właściwe dla gospodarki Stanów Zjednoczonych. Maksymalne określenie prawdopodobieństwa braku płatności na poziomie 20% w warunkach polskich

---

<sup>3</sup> Więcej na temat zależności między tymi zmiennymi w odniesieniu do spółek branży budowlanej można znaleźć w pracy [Wójciak 2007, s. 143-158].



wyduje się niedoszacowane. Wskazują na to wyniki uzyskane dla spółek, które ogłosiły upadłość. W modelu należałoby zatem uwzględnić dodatkowo ryzyko kraju.

## Literatura

- Crosbie P., Bohn J., *Modeling default risk – modeling methodology*, Mody's KMV Company 2003.
- Delianedis G., Geske R., *Credit risk and risk-neutral default probabilities: information about rating migrations and defaults*, Working Paper, Anderson Graduate School of Business, University of California, Los Angeles 1998.
- Gątarek D., Maksymiuk R., Krysiak R., Witkowski Ł., *Nowoczesne metody zarządzanie ryzykiem finansowym*, WIG-Press, Warszawa 2001.
- Jajuga K. (red.), *Zarządzanie ryzykiem*, PWN, Warszawa 2007.
- Kealhofer S., *Portfolio management of default risk*, KMV, San Francisco 1998.
- Merton R., *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*, "Journal of Finance", June 1974.
- Saunders A., *Metody pomiaru ryzyka kredytowego*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001.
- Vašiček O., *An equilibrium characterization of the term structure*, "Journal of Financial Economy", November 1977.
- Wójciak M., *Metody oceny ryzyka kredytowego*, PWE, Warszawa 2007.

## USING KMV MODEL TO CREDIT RISK ANALYSIS ON THE EXAMPLE OF COMPANIES QUOTED ON THE WARSAW STOCK EXCHANGE

### Summary

KMV model is an innovative forecasting model which is based on Merton's bond pricing model. It was developed by the KMV Corporation in 1989 due to the advent of innovative corporate debt products and credit derivatives. The KMV model calculates the Expected Default Frequency based on the firm's capital structure, the volatility of the assets returns and the current asset value. This model best applies to publicly traded companies for which the value of equity is market determined. The main goal of this paper is to show a utility of KMV Model in Polish market conditions.