

**Helena Jasiulewicz**

Politechnika Wroclawska

## **MODEL ZAUFANIA HACHEMEISTRA JAKO MODEL REZERWY TYPU IBNR**

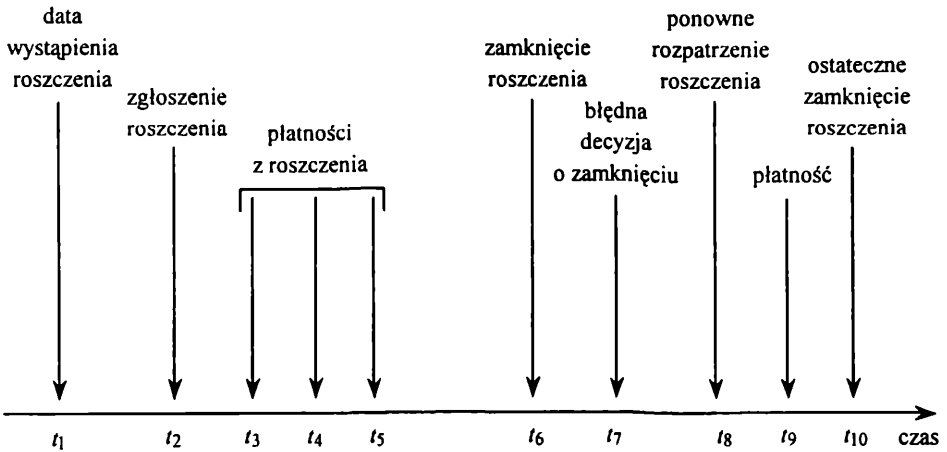
### **1. Wstęp**

Wśród ubezpieczeń majątkowych jest wiele rodzajów, w których roszczenia powstałe w danym roku nie są w pełni zrealizowane w tym roku. Najczęściej dotyczy to ubezpieczeń od odpowiedzialności cywilnej i ubezpieczeń od skutków nieszczęśliwych wypadków. W tym pierwszym przypadku przyczyną opóźnień w całkowitej wypłacie roszczenia są długotrwałe procedury legislacyjne, rozstrzygające o należnych wypłatach dla danego roszczenia. W drugim przypadku na ogół przyczyną opóźnień realizacji roszczenia są trudności w dokładnym oszacowaniu wielkości tego roszczenia. Przykładowe rozliczenie pojedynczego roszczenia przedstawiono na rys. 1.

Płatności dokonywane w ciągu kolejnych lat z tytułu zaszłego roszczenia pochodzą ze zgromadzonych składek w roku powstania roszczenia. W związku z tym należy zarezerwować odpowiednie kwoty na zaspokojenie tych wypłat przez z góry określony czas, np. przez  $I$  lat. Rezerwy te noszą nazwę rezerw na roszczenia zaszłe, ale nie rozliczone. Skrótowa nazwa tych rezerw to rezerwy typu IBNR (ang. *Incurring But Not Reported*) lub rezerwy typu RBNS (ang. *Reported But Not Settled*).

Prognozowanie rezerw typu IBNR odbywa się na podstawie danych z przeszłości, przedstawianych w postaci tzw. trójkąta *run-off* (tab. 1).

W tabeli 1 obserwacje  $x_{ij}$  są realizacjami zmiennych losowych  $X_{ij}$  przedstawiających wielkość wypłaty z tytułu roszczenia powstałego w roku  $i$ , a dokonanej po  $j$  latach od początku roku, w którym to roszczenie powstało, gdzie  $i, j = 1, 2, \dots, I$  oraz  $i + j - 1 \leq I$ . Obserwacje  $x_{ij}$  o własności  $i + j - 1 = k$ , znajdu-



Rys. 1. Realizacja pojedynczego roszczenia

Źródło: na podstawie [6].

Tabela 1. Obserwacje w postaci trójkąta *run-off*

Rok powstania roszczenia	Kolejne lata realizacji roszczenia						
	1	2	...	$j$	...	$I-1$	$I$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1,I-1}$	$x_{1,I}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2,I-1}$	
⋮	...						
$I-1$	$x_{I-1,1}$	$x_{I-1,2}$					
$I$	$x_{I1}$						

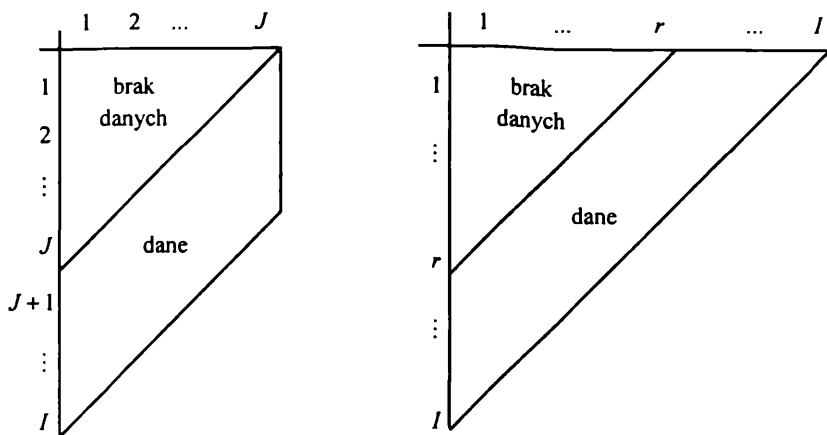
Źródło: opracowanie własne.

jące się na prostej równoległej do przekątnej kwadratu, są płatnościami dokonanymi w roku kalendarzowym  $k$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots, I$ . Obserwacje  $x_{ij}$  mogą przedstawiać również skumulowaną wielkość wypłaty z tytułu roszczenia powstałego w roku  $i$ , a wypłacanego przez  $j$  kolejnych lat. Zwykle w tej interpretacji stosuje się

oznaczenie  $c_{ij}$  w miejsce dotychczasowego  $x_{ij}$ , gdzie  $c_{ij} = \sum_{k=1}^j x_{ik}$ . Przejście z jed-

nych oznaczeń do drugich jest jednoznaczne i banalne. Na podstawie obserwacji z górnego lewego rogu tabeli należy prognozować pozostałą część tabeli, czyli uzupełnić trójkąt do kwadratu.

Oprócz obserwacji danych w postaci trójkąta *run-off*, spotyka się dane w postaci tabel, których schematy umieszczone są na rys. 2. Dodatkowo, liczby danych w kolumnach nie muszą być takie same, analogicznie dla wierszy.



Rys. 2. Zbiory obserwacji

Źródło: na podstawie [6].

Metody wyznaczania rezerw IBNR na podstawie trójkąta *run-off* są takie same jak dla danych przedstawionych na powyższych rysunkach. Przedstawione poniżej metody są oparte na danych w postaci trójkąta *run-off*.

## 2. Metody wyznaczania rezerw typu IBNR

### 2.1. Metody *chain-ladder*

Od dawna są stosowane liczne metody wyznaczania rezerw typu IBNR, znane pod nazwą metod *chain-ladder*. Pokróćce zostanie przedstawiony ich opis i kolejne etapy ich rozwoju.

#### **Klasyczna metoda *chain-ladder***

Zakłada się, że zmienna losowa  $X_{ij}$  jest iloczynem dwóch liczb

$$X_{ij} = m_i e_j.$$

Parametr  $m_i$  odzwierciedla wpływ roku postania roszczenia (wpływ  $i$ -tego wiersza), parametr  $e_j$  odzwierciedla wpływ  $j$ -tej kolumny. Przyjmuje się, że wypłata dokonana w roku  $j$  z tytułu roszczenia powstałego w roku  $i$  stanowi pewien stały procent tego roszczenia dla każdego  $i$ . Dokładniejsze wyjaśnienie tego założenia jest następujące. Niech  $m_i$  oznacza kwotę roszczenia powstałego w roku  $i$ , zaś  $m_i e_1, m_i e_2, \dots$  oznaczają kolejne wypłaty z tytułu tego roszczenia  $m_i$ . Można to interpretować tak,

że w roku  $j$ -tym wypłacona kwota stanowi  $e_j \cdot 100\%$  roszczenia  $m_i$ . Procentowy udział kwoty wypłacanej w roku  $j$  w roszczeniu jest stały dla każdego roku powstania roszczenia. Estymatory nieznanymi parametrów  $m_i$  oraz  $e_j$  wyznacza się metodą sum brzegowych. Liczba lat  $I$  realizacji roszczenia została ustalona tak, żeby całkowicie wypłacić roszczenie w tym okresie. Zatem sensownie jest założyć, że

$$m_1 e_1 \cdot 100 + m_1 e_2 \cdot 100 + \dots + m_1 e_I \cdot 100 = m_1,$$

czyli

$$e_1 + e_2 + \dots + e_I = 1.$$

Wprowadźmy oznaczenia na sumy brzegowe obserwacji po kolumnach i wierszach z tabeli 1 według wzorów:

$$R_i = \sum_j x_{ij}, \quad K_j = \sum_i x_{ij}.$$

Rozwiązując układy równań

$$R_i = \sum_j m_i e_j,$$

$$K_j = \sum_i m_i e_j,$$

otrzymuje się estymatory  $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_I, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_I$ . Gdy są wyznaczone estymatory  $\hat{m}_i, \hat{e}_j$ , to po prostu przyjmuje się, że

$$\hat{X}_{ij} \approx \hat{m}_i \hat{e}_j$$

dla  $i + j - 1 > I$ .

### Stochastyczne modele *chain-ladder*

1. Zmienne losowe  $X_{ij}$  przedstawione w klasycznej metodzie poszerza się o składniki losowe  $R_{ij}$  w następujący sposób:

$$X_{ij} = m_i e_j + R_{ij}, \quad E R_{ij} = 0.$$

2. Następnym krokiem powyższej metody jest zastąpienie stałej  $m_i$  przez zmienną losową  $M_i$  niezależną od zmiennej losowej  $R_{ij}$ , tzn.

$$X_{ij} = M_i e_j + R_{ij}, \quad M_i, R_{ij} - \text{zmienne niezależne, } E R_{ij} = 0.$$

3. W dalszej modyfikacji modelu, stałą  $e_j$  łączy się ze zmienną losową  $R_{ij}$  w jedną zmienną losową  $Y_{ij}$  w następujący sposób:

$$X_{ij} = M_i Y_{ij}.$$

Zakłada się, że zmienne losowe  $M_i$  oraz  $Y_{ij}$  są zmiennymi losowymi niezależnymi oraz wartość oczekiwana  $E Y_{ij} = y_j$  dla każdego  $i$ . Ponadto zakłada się, że zmienne losowe  $Y_{ij}$  oraz  $Y_{ik}$  są nieskorelowane dla  $j \neq k$ . Wszystkie zmienne losowe  $M_i$  mają taką samą wartość oczekiwaną.

4. Najbardziej ogólnym modelem jest model multiplikatywny postaci

$$E X_{ij} = m_i e_j \gamma_k, \quad i + j - 1 = k,$$

gdzie parametry  $m_i$ ,  $e_j$  mają interpretację taką jak w klasycznej metodzie *chain-ladder*, a parametr  $\gamma_k$  oznacza wpływ przekątnej  $k = i + j - 1$ , czyli roku kalendarzowego  $k$ . Estymatory nieznanymi parametrów  $m_i$ ,  $e_j$ ,  $\gamma_k$  wyznacza się metodą największej wiarygodności. Gdy są wyznaczone estymatory  $\hat{m}_i$ ,  $\hat{e}_j$ ,  $\hat{\gamma}_k$ , to po prostu przyjmuje się, że

$$\hat{X}_{ij} \approx \hat{m}_i \hat{e}_j \hat{\gamma}_k$$

dla  $i + j - 1 > I + 1$  oraz  $k = i + j - 1$ .

Przy założeniu, że zmienne  $X_{ij}$  mają rozkłady należące do dyspersyjnej wykładniczej rodziny rozkładów, estymatory uzyskane metodą największej wiarygodności są takie same jak estymatory uzyskane znacznie prostszymi metodami wykorzystującymi uogólnione modele liniowe (zob. [3; 5]). Obszerne omówienie tej klasy rozkładów znajduje się w książce [2]. Do tej rodziny należą m.in.: rozkład normalny, odwrotny rozkład normalny, rozkład gamma, odwrotny rozkład gamma, rozkład Poissona, rozkład ujemnie dwumianowy.

## 2.2. Podejście bayesowskie

Dalszym krokiem wyznaczania rezerw typu IBNR jest wprowadzenie zmiennej losowej  $\Theta_i$  opisującej strukturę ryzyka w  $i$ -tym roku powstania roszczenia, tak charakterystycznej dla teorii zaufania (*credibility theory*). Niech dla  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}),$$

$$\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in_i}).$$

Indeksy  $n_i$  zmieniają się tak, żeby  $x_{ij}$  były znane. Na przykład dla  $i = 1$ , indeks  $n_i = n = I$ . Zakłada się, że rozkład  $\mathbf{X}_i$  zależy od nieznanego parametru  $\theta_i$  będącego realizacją zmiennej losowej  $\Theta_i$ , a nieznaną wektor losowy  $\mathbf{Y}_i$  nie zależy od zmiennej losowej  $\Theta_i$ . Ponadto przyjmuje się następujące założenia.

1. Dla każdego  $i$ , zmienne losowe  $\mathbf{X}_i$  można przedstawić wzorem

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{Y}_i b(\theta_i), \text{ tzn. } X_{ij} = Y_{ij} b(\theta_i),$$

gdzie funkcja  $b(\cdot)$  jest nieznaną funkcją rzeczywistą, określona na wartościach zmiennej losowej  $\Theta_i$ .

2. Dla każdego  $i$ , wartość oczekiwana zmiennej losowej  $\mathbf{Y}_i$  jest stała,

$$E \mathbf{Y}_i = \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

a macierz kowariancji zmiennej losowej  $\mathbf{Y}_i$  jest macierzą diagonalną,

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_i) = \text{diag}[c_1, \dots, c_n].$$

3. Pary  $(\Theta_1, \mathbf{X}_1)$ ,  $(\Theta_2, \mathbf{X}_2)$ , ...,  $(\Theta_n, \mathbf{X}_n)$  są niezależne oraz  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$  mają jednakowe rozkłady.

Przy tych założeniach, jak pokaże poniższe wyprowadzenie, współrzędne wektora losowego  $\mathbf{X}_i$  są dodatnio skorelowane, co jest intuicyjnie akceptowalne.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}_i) &= E(\text{Cov}(\mathbf{X}_i | \Theta_i)) + \text{Cov}(E(\mathbf{X}_i | \Theta_i)) = \\ &= E\left( (b(\Theta_i))^2 \right) \text{Cov}(\mathbf{Y}_i | \Theta_i) + \text{Cov}(b(\Theta_i)) \mathbf{Y} \mathbf{Y}' = \\ &= E\left( (b(\Theta_i))^2 \right) \text{Cov}(\mathbf{Y}_i) + \text{Var}(b(\Theta_i)) \mathbf{Y} \mathbf{Y}'. \end{aligned}$$

Problemem jest oszacowanie  $E(X_{ij} | \Theta_i)$  dla nieobserwowalnych  $X_{ij}$ . Przy przyjętych założeniach

$$E(X_{ij} | \Theta_i) = E(Y_{ij} b(\Theta_i) | \Theta_i) = y_j b(\Theta_i).$$

Nieznaną losową wartość parametru  $b(\Theta_i)$  szacuje się za pomocą estymatorów zaufania (*credibility*), (zob. [1]). Natomiast nieznaną wartość wektora  $E \mathbf{Y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  wyznacza się tak jak w metodach *chain-ladder*, tzn.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n E X_{ij} = \sum_{j=1}^n E Y_{ij} E b(\Theta_i) = \sum_{j=1}^n y_j c, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = \sum_{i=1}^N E X_{ij} = c y_j. \quad (2)$$

Za stałą  $c$  można przyjąć wartość 1 albo podstawić  $y_j$  w miejsce  $c y_j$ . Podejście bayesowskie można zastosować również do obserwacji z wagami. Dla każdej klasy ryzyka o numerze  $(i, j)$  oprócz obserwacji  $x_{ij}$  dana jest nieujemna liczba  $w_{ij}$  zwana wagą.

### Przykłady obserwacji z wagami

1. Niech

$S_{ij}$  – całkowita kwota roszczenia w klasie  $(i, j)$ ,

$w_{ij}$  – całkowita liczba roszczeń w klasie  $(i, j)$ .

Wówczas  $X_{ij} = S_{ij}/w_{ij}$  oznacza przeciętną wielkość pojedynczego roszczenia w klasie  $(i, j)$ .

2. Niech

$S_{ij}$  – całkowita liczba roszczeń w klasie  $(i, j)$ ,

$w_{ij}$  – całkowita liczba polis w klasie  $(i, j)$ .

$X_{ij} = S_{ij}/w_{ij}$  – przeciętna liczba roszczeń z polisy.

Więcej przykładów obserwacji z wagami znajduje się w pracy [4]. Dla danych z wagami w podejściu bayesowskim, do wyznaczenia rezerwy na roszczenia IBNR, należy w miejsce  $X_{ij}$  podstawić  $S_{ij}/w_{ij}$ . Do wyznaczenia estymatora zaufania dla  $b(\theta_i)$  przy danych  $x_{ij}$  i  $w_{ij}$  wykorzystana się model zaufania Hachemeistra.

## 3. Model Hachemeistra

### 3.1. Określenie modelu

Istnieje funkcja wektorowa  $\mathbf{b}(\cdot)$  wymiaru  $q \times 1$  oraz istnieją znane macierze  $\mathbf{Y}_i$  wymiaru  $n_i \times q$  rzędu  $q < n_i$ , takie że dla  $i = 1, 2, \dots, N$

$$E(\mathbf{X}_i | \theta_i) = \mathbf{Y}_i \mathbf{b}(\theta_i). \quad (3)$$

Istnieje nieujemna funkcja  $s^2(\cdot)$ , taka że  $E s^2(\theta_i) < \infty$  oraz istnieją znane macierze diagonalne wymiaru  $n_i \times n_i$

$$\mathbf{W}_i = \text{diag}[w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in_i}],$$

takie że

$$\text{Cov}(\mathbf{X}_i | \Theta_i) = s^2(\Theta_i) \mathbf{W}_i^{-1}.$$

Pary  $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), (\Theta_2, \mathbf{X}_2), \dots, (\Theta_n, \mathbf{X}_n)$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, zmienne losowe  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N$  są niezależne o jednakowych rozkładach.

Nieznane parametry struktury ryzyka w portfelu oznaczmy przez:

$$\begin{aligned} \beta &= E\mathbf{b}(\Theta_i), \\ \Lambda &= \text{Cov}(\mathbf{b}(\Theta_i)), \\ \varphi &= E s^2(\Theta_i). \end{aligned}$$

### 3.2. Estymator zaufania w modelu Hachemeistra

**Twierdzenie 1.** Estymator zaufania parametru  $\mathbf{b}(\Theta_i)$  jest postaci

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{Z}_i \hat{\mathbf{b}}_i + (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_i) \beta, \quad (4)$$

a jego macierz błędu jest równa

$$\tilde{\mathbf{R}}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_i) \mathbf{Y}_i,$$

gdzie dla  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_i &= \Lambda \mathbf{Y}_i \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_i (\varphi \mathbf{I} + \Lambda \mathbf{Y}_i \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_i)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{b}}_i &= (\mathbf{Y}_i \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_i)^{-1} \mathbf{Y}_i \mathbf{W}_i \mathbf{X}_i. \end{aligned}$$

Tabela 2. Obserwacje z wagami

Grupy polis	Lata ubezpieczenia			
	1	2	...	$n$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n_1}$
	$w_{11}$	$w_{12}$	...	$w_{1n_1}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n_2}$
	$w_{21}$	$w_{22}$	...	$w_{2n_2}$
⋮	⋮	⋮		⋮
$N$	$x_{N1}$	$x_{N2}$	...	$x_{Nn_N}$
	$w_{N1}$	$w_{N2}$	...	$w_{Nn_N}$

Źródło: opracowanie własne.

Estymator  $\hat{\mathbf{b}}_i$  jest ważonym estymatorem uzyskanym metodą najmniejszych kwadratów. Natomiast estymator zaufania  $\tilde{\mathbf{b}}_i$  jest najlepszym bayesowskim estymatorem liniowym. W modelu Hachemeistra dysponuje się poniższą tabelą danych (tab. 2).

Postacie estymatorów parametrów struktury  $\varphi, \beta$  oraz  $\Lambda$  ryzyka w populacji, są podane w poniższym twierdzeniu.

**Twierdzenie 2.** Nieobciążonymi estymatorami parametrów struktury  $\varphi, \beta$  oraz  $\Lambda$  są odpowiednio estymatory



$$\hat{\varphi}_N = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i \hat{\mathbf{b}}_i) \mathbf{W}_i (\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}_i \hat{\mathbf{b}}_i)}{\sum_{i=1}^N (n_i - q)}, \quad (5)$$

$$\hat{\beta}_n = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{F}_i = \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{Z}_j \right)^{-1} \mathbf{Z}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$$\hat{\Lambda}_N = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_N + \mathbf{J}_N) - \hat{\beta}_N \hat{\beta}'_N, \quad (7)$$

gdzie

$$\mathbf{J}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i (\hat{\mathbf{b}}_i \hat{\mathbf{b}}'_i - \hat{\varphi}_N (\mathbf{Y}_i \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_i)^{-1}). \quad (8)$$

Estymatory powyższe są estymatorami zgodnymi, gdy  $N \rightarrow \infty$ .

### 3.3. Adaptacja estymatorów zaufania Hachemeistra dla $b(\theta_i)$

Niech  $n = I$ ,  $N = I$  oraz

$$\begin{aligned} T_i &= \{j \in \{i = 1, 2, \dots, n\} : x_{ij} - \text{znane}\}, \\ t_i &= |T_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ K_j &= \{i \in \{i = 1, 2, \dots, N\} : x_{ij} - \text{znane}\}, \\ k_j &= |K_j|, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

gdzie symbol  $|A|$  oznacza liczbę elementów zbioru  $A$ .

W modelu Hachemeistra należy przyjąć  $q = 1$ ,  $n_i = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Macierz  $\mathbf{Y}_i$  we wzorze (3) jest wektorem składającym się ze współrzędnych  $y_j$  wektora  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  takich, że  $j \in T_i$ . Współrzędne wektora  $\mathbf{Y}$  wyznacza się metodą sum brzegowych według wzorów (1) i (2). Wówczas  $E(X_{ij} | \theta_i) = y_j b(\theta_i)$  dla  $i \in K_j$  oraz  $j \in T_i$ .

Dla ustalonego  $j$  sumy po  $i$  bierze się dla  $i \in K_j$ . Wówczas estymator zaufania Hachemeistra dla parametru losowego  $b(\theta_i)$  dany wzorem (4) jest postaci:

$$\tilde{b}(\theta_i) = Z_i \hat{b}_i + (1 - Z_i) \beta, \quad (9)$$

gdzie  $Z_i, \hat{b}_i, \beta$  są liczbami. Ostatecznie wzór (3) ma postać:

$$E(\mathbf{X}_i | \Theta_i) \approx \mathbf{Y}_i (Z_i \hat{b}_i + (1 - Z_i) \beta). \quad (10)$$

## 4. Przykład liczbowy

### 4.1. Dane

Dane do przykładu zostały wygenerowane z rozkładów normalnych podanych poniżej. Najpierw generujemy liczby  $v_{ij} \sim N(20j, 10)$ , obcięte do wartości dodatnich i zaokrąglone do całkowitych. Następnie wagi  $w_{ij}$  otrzymujemy ze wzoru

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{n-j+1} v_{ik}.$$

Analogicznie generujemy  $x_{ij}$ , z tym że  $v_{ij} \sim N(100j, 10)$ . Następnie  $x_{ij}$  wyznacza się według wzoru

$$x_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{w_{ij}} \sum_{k=1}^{n-j+1} v_{ik}, & \text{gdy } w_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } w_{ij} = 0. \end{cases}$$

Tabela 3. Obserwacje  $x_{ij}$  z wagami  $w_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	5,27 537	5,25 405	5,18 291	4,89 205	4,29 139	4,17 71	8 12
2	4,60 612	4,51 467	4,24 351	4,09 243	4,44 136	4,40 72	
3	5,01 560	5,18 409	5,13 296	5,16 198	5,01 125		
4	4,87 573	4,83 436	4,90 309	5,04 201			
5	5,26 539	5,30 401	5,27 288				
6	4,98 555	5,12 405					
7	5,49 507						

Tabela 4. Zaobserwowana całkowita wypłata  $s_{ij}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	2828	2125	1508	1002	596	296	98
2	2814	2106	1487	993	604	321	
3	2803	2120	1518	1022	626		
4	2790	2104	1514	1014			
5	2834	2127	1518				
6	2765	2074					
7	2782						

Źródło: opracowanie własne.

Źródło: opracowanie własne.

W przykładzie przyjęto  $n = N = 7$ . Obserwacje  $x_{ij}$  wraz z wagami  $w_{ij}$  są podane w tab. 3, w której liczby w wierszu górnym oznaczają  $x_{ij}$ , a w wierszu dolnym  $w_{ij}$ . W tabeli 4 podane są przeciętne całkowite wypłaty  $s_{ij} = x_{ij}w_{ij}$ .

#### 4.2. Wyniki prognozowane

Na podstawie danych z tabeli 3 otrzymano:

$$Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = (5,05, 5,02, 4,92, 4,76, 4,57, 4,28, 8,17),$$

$$\hat{b} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4, \hat{b}_5, \hat{b}_6, \hat{b}_7) =$$

$$= (1,0332, 0,8994, 1,0297, 0,9815, 1,0534, 1,0007, 1,0862),$$

$$Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7) = (0,92, 0,93, 0,92, 0,92, 0,90, 0,88, 0,79),$$

$$\phi = 9,33,$$

$$\Lambda = 0,0028,$$

$$\beta = 1,0103.$$

W tabeli 5 podane są prognozy  $\tilde{x}_{ij}$  metodą *chain-ladder*. W nawiasach są podane zaobserwowane  $x_{ij}$ . Przeciętny kwadratowy błąd globalny  $e(\tilde{x})$  dla 500 powtórzeń jest otrzymany według wzoru

Tabela 5. Prognoza  $\tilde{x}_{ij}$  metodą *chain-ladder*

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	5,05 (5,27)	5,02 (5,25)	4,92 (5,18)	4,76 (4,89)	4,57 (4,29)	4,28 (4,17)	8,17 (8,17)
2	5,05 (4,60)	5,02 (4,51)	4,92 (4,24)	4,76 (4,09)	4,57 (4,44)	4,28 (4,40)	8,17
3	5,05 (5,01)	5,02 (5,18)	4,92 (5,13)	4,76 (5,16)	4,57 (5,01)	4,28	8,17
4	5,05 (4,87)	5,02 (4,83)	4,92 (4,90)	4,76 (5,04)	4,57	4,28	8,17
5	5,05 (5,26)	5,02 (5,30)	4,92 (5,27)	4,76	4,57	4,28	8,17
6	5,05 (4,95)	5,02 (5,12)	4,92	4,76	4,57	4,28	8,17
7	5,05 (5,49)	5,02	4,92	4,76	4,57	4,28	8,17

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Prognoza  $\hat{x}_{ij}$  metodą Hachemeistra

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	5,21 (5,27)	5,17 (5,25)	5,07 (5,18)	4,91 (4,89)	4,71 (4,29)	4,42 (4,17)	8,42 (8,17)
2	4,58 (4,60)	4,55 (4,51)	4,46 (4,24)	4,32 (4,09)	4,14 (4,44)	3,89 (4,40)	7,41
3	5,19 (5,01)	5,16 (5,18)	5,05 (5,13)	4,89 (5,16)	4,69 (5,01)	4,41	8,40
4	4,97 (4,87)	4,94 (4,83)	4,84 (4,90)	4,68 (5,04)	4,49	4,22	8,03
5	5,30 (5,26)	5,26 (5,30)	5,16 (5,27)	4,99	4,79	4,50	8,57
6	5,06 (4,98)	5,03 (5,12)	4,92	4,77	4,57	4,29	8,18
7	5,41 (5,49)	5,37	5,26	5,09	4,89	4,59	8,74

Źródło: opracowanie własne.

$$e(\tilde{x}) = \frac{1}{28 \cdot 500} \sum_{i \in K_j} \sum_{j \in T_i} \sum_{k=1}^{500} (x_{ij}^{(k)} - \tilde{x}_{ij}^{(k)})^2$$

Błąd globalny estymacji  $\tilde{x}_{ij}$  wynosi  $e(\tilde{x}) = 0,1409$ .

W tabeli 6 podane są prognozy  $\tilde{x}_{ij}$  metodą Hachemeistra. W nawiasach są podane zaobserwowane  $x_{ij}$ . Przeciętny kwadratowy błąd globalny  $e(\hat{x})$  dla 500 powtórzeń jest otrzymany według wzoru

$$e(\hat{x}) = \frac{1}{28 \cdot 500} \sum_{i \in K_j} \sum_{j \in T_i} \sum_{k=1}^{500} (x_{ij}^{(k)} - \hat{x}_{ij}^{(k)})^2.$$

Błąd globalny estymacji  $\hat{x}_{ij}$  wynosi  $e(\hat{x}) = 0,0783$ .

Zaobserwowano, mimo że estymator zaufania Hachemeistra jest najlepszym nieobciążonym estymatorem, że przyjmując współczynniki zaufania  $Z_i = 1$  zamiast dokładnych, prognozy w sposób zasadniczy nie ulegają zmianie. Natomiast dla  $Z_i = 1$  znakomicie upraszczają się obliczenia. Nie ma potrzeby stosowania iteracyjnego wyznaczania  $Z_i$  oraz  $\Lambda$ .

W tabeli 7 podane są prognozy  $\bar{x}_{ij}$  metodą Hachemeistra dla współczynników zaufania równych 1. W nawiasach są podane zaobserwowane  $x_{ij}$ . Przeciętny kwadratowy błąd globalny  $e(\bar{x})$  dla 500 powtórzeń jest otrzymany według wzoru

Tabela 7. Prognoza  $\bar{x}_{ij}$  metodą Hachemeistra dla  $Z_i = 1$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	5,22 (5,27)	5,18 (5,25)	5,08 (5,18)	4,92 (4,89)	4,72 (4,29)	4,43 (4,17)	8,44 (8,17)
2	4,54 (4,60)	4,51 (4,51)	4,42 (4,24)	4,28 (4,09)	4,11 (4,44)	3,85 (4,40)	7,35
3	5,20 (5,01)	5,17 (5,18)	5,06 (5,13)	4,90 (5,16)	4,70 (5,01)	4,41	8,41
4	4,96 (4,87)	4,92 (4,83)	4,82 (4,90)	4,67 (5,04)	4,48	4,21	8,02
5	5,32 (5,26)	5,28 (5,30)	5,18 (5,27)	5,01	4,81	4,51	8,60
6	5,06 (4,98)	5,02 (5,12)	4,92	4,76	4,57	4,29	8,17
7	5,49 (5,49)	5,45	5,34	5,17	4,96	4,65	8,87

Źródło: opracowanie własne.

$$e(\bar{x}) = \frac{1}{28 \cdot 500} \sum_{i \in K} \sum_{j \in I_i} \sum_{k=1}^{500} (x_{ij}^{(k)} - \bar{x}_{ij}^{(k)})^2.$$

Błąd globalny estymacji  $\bar{x}_{ij}$  wynosi  $e(\bar{x}) = 0,0762$ .

### 4.3. Estymacja dla przeciętnej całkowitej wypłaty $s_{ij}$

Przeprowadzono również obliczenia  $\tilde{s}_{ij} = w_{ij}\tilde{x}_{ij}$ ,  $\hat{s}_{ij} = w_{ij}\hat{x}_{ij}$ ,  $\bar{s}_{ij} = w_{ij}\bar{x}_{ij}$  w celu porównania ze znanymi przeciętnymi całkowitymi wypłatami  $s_{ij}$  (górny lewy trójkąt). Dla każdej estymacji podano globalny przeciętny błąd kwadratowy odpowiednio  $e(\tilde{r})$ ,  $e(\hat{r})$ ,  $e(\bar{r})$ . Wyniki estymacji dla kolejnych metod są umieszczone w tab. 8, 9 i 10. Liczby w nawiasach oznaczają znane przeciętne całkowite wypłaty  $s_{ij}$  w klasie  $(i, j)$ .

Tabela 8. Estymacja  $\tilde{s}_{ij}$  metodą *chain-ladder*

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	2712,80 (2828)	2031,58 (2125)	1430,36 (1508)	975,63 (1002)	634,54 (596)	304,22 (296)	98 (98)
2	3091,68 (2814)	2342,59 (2106)	1725,27 (1487)	1156,47 (993)	620,84 (604)	312,78 (321)	
3	2828,99 (2803)	2051,65 (2120)	1454,93 (1518)	942,31 (1022)	570,63 (626)		
4	2894,66 (2790)	2187,09 (2104)	1518,83 (1514)	956,59 (1014)			
5	2722,90 (2834)	2011,52 (2127)	1415,61 (1518)				
6	2803,73 (2765)	2031,58 (2074)					
7	2561,24 (2782)						

Źródło: opracowanie własne.

Błąd globalny estymacji  $e(\hat{r}) = 18,8082$  wynosi  $e(\tilde{r}) = 48,7124$ .

Tabela 9. Estymacja  $\hat{s}_{ij}$  metodą Hachemeistra

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	2798,08 (2828)	2095,45 (2125)	1475,32 (1508)	1006,30 (1002)	654,48 (596)	313,78 (296)	101 (98)
2	2804,26 (2814)	2124,81 (2106)	1564,88 (1487)	1048,96 (993)	563,12 (604)	283,71 (321)	
3	2908,66 (2803)	2109,43 (2120)	1495,91 (1518)	968,85 (1022)	586,70 (626)		
4	2847,95 (2790)	2151,79 (2104)	1494,32 (1514)	941,15 (1014)			
5	2856,64 (2834)	2110,31 (2127)	1485,14 (1518)				
6	2808,97 (2765)	2035,38 (2074)					
7	2741,83 (2782)						

Źródło: opracowanie własne.

Błąd globalny estymacji  $\hat{s}_{ij}$  wynosi  $e(\hat{r}) = 18,8082$ .

Tabela 10. Estymacja  $\bar{s}_{ij}$  metodą Hachemeistra dla  $Z_i = 1$ 

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	2802,24 (2828)	2099,02 (2125)	1477,83 (1508)	1008,01 (1002)	655,60 (596)	314,31 (296)	101,00 (98)
2	2780,64 (2814)	2106,91 (2106)	1551,70 (1487)	1040,12 (993)	558,38 (604)	281,32 (321)	
3	2913,05 (2803)	2112,61 (2120)	1498,16 (1518)	970,31 (1022)	587,58 (626)		
4	2841,10 (2790)	2146,61 (2104)	1490,72 (1514)	938,89 (1014)			
5	2868,21 (2834)	2118,86 (2127)	1491,15 (1518)				
6	2805,70 (2765)	2033,01 (2074)					
7	2782,00 (2782)						

Źródło: opracowanie własne.

Błąd globalny estymacji  $\bar{s}_{ij}$  wynosi  $e(\bar{r}) = 17,5897$ .

## 5. Wnioski

1. Metoda wyznaczania rezerw IBNR z wykorzystaniem estymatora Hachemeistra dała znacznie lepsze rezultaty w sensie globalnego błędu średniokwadratowego niż metoda *chain-ladder*.

2. Gdy w estymatorze zaufania Hachemeistra przyjąć  $Z_i = 1$ , to wyniki estymacji są porównywalne z wynikami, gdy  $Z_i$  są dokładnie wyliczone. Można ten fakt wytłumaczyć tym, że w całej populacji jest niewiele obserwacji w stosunku do obserwacji dotyczących pojedynczego roku i branie ich pod uwagę nie zmienia zasadniczo uzyskiwanych wyników estymacji.

## Literatura

- [1] De Vylder F., *Estimation of IBNR claims by credibility*, „Insurance: Mathematics and Economics” 1982, no. 1, s. 35-40.
- [2] Jasiulewicz H., *Teoria zaufania*, AE, Wrocław 2005.
- [3] Jasiulewicz H., *Zastosowanie uogólnionych modeli liniowych do problemów IBNR*, Prace Naukowe AE w Katowicach (w druku).
- [4] Jasiulewicz H., *Składki zaufania uwzględniające wagę kontraktów*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1108, AE, Wrocław 2106, s. 318-333.
- [5] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2002.
- [6] Taylor G., *Loss Reserving*, Kluwer, Boston 2000.

## HACHEMEISTER CREDIBILITY MODEL AS A RESERVE MODEL OF THE IBNR TYPE

### Summary

An important theoretical and practical issue for insurance companies is calculation of the level of reserves for the claims originating in a particular year but cannot be finalized in the year (IBNR). In this paper, the Hachemeister credibility model and its adaptation to solve the IBNR problem are presented. The approach proposed above does not require rigorous assumptions concerning the distributions of the claims. Furthermore, using simulated data, forecasts obtained by this model will be compared to alternative methods of setting the reserve level.