

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



100100359387

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

T O M I
ZESZYT 2
ROK 1952

WYDAWNICTWO
ZAKŁADU BADANIA DRGAŃ I ZAKŁADU ELEKTRONIKI
W A R S Z A W A

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
POLSKA AKADEMIA NAUK
ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI

Tom I

Rok 1952

Zeszyt 2

SPIS TREŚCI

	str.
S. Węgrzyn: Przebiegi niestabilne w wielostopniowych wzmacniaczach oporowych o sprzężeniu pojemnościowym	81
L. Łukasiewicz: Wpływ zniekształceń liniowych na dokładność rozwiązań elektronowego analizatora równań różniczkowych	103
T. Zagajewski: Efekty nieliniowe w lampowych układach reaktancyjnych :	151

СОДЕРЖАНИЕ

Резюме на русском языке находится в конце каждой статьи

C. Венгрзын: Нестационарные процессы в многокаскадных реостатных усилителях с ёмкостной связью	101
Л. Лукашевич: Влияние линейных искажений на точность решений дифференциальных уравнений при помощи электронного анализатора	135
T. Загаевски: Нелинейные эффекты в реактивных лампах	171

CONTENTS

The english summary is given at the end of each paper

S. Węgrzyn. Transient phenomena in resistance-coupled multi-stage amplifiers	102
L. Łukasiewicz. The influence of linear distortion on the accuracy of electronic differential analyser	143
T. Zagajewski. Nonlinear phenomena in reactance valve circuits	175

ALL RIGHTS RESERVED by P. A. N.

Kolegium redakcyjne

profesorowie: J. Groszkowski (W-wa) — przewodniczący, J. L. Jakubowski (W-wa), B. Końorski (Łódź), I. Malecki (W-wa), P. Nowacki (W-wa), P. Szulkin (W-wa), St. Szpor (Gdańsk)

Redaktor techniczny W. Zwolakowski

Sekretariat redakcji i korekta L. Skorupka

Adres redakcji:

Warszawa, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki P. A. N.

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

T O M I

ZESZYT 2

ROK 1952



WYDAWNICTWO
ZAKŁADU BADANIA DRGAŃ I ZAKŁADU ELEKTRONIKI
W A R S Z A W A

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI
POLSKA AKADEMIA NAUK
ZAKŁAD BADANIA DRGAŃ I ZAKŁAD ELEKTRONIKI

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Profesorowie: J. Groszkowski (W-wa) — przewodniczący, J. L. Jakubowski (W-wa), B. Konorski (Łódź), I. Malecki (W-wa), P. Nowacki (W-wa), P. Szulkin (W-wa), St. Szpor (Gdańsk)

Redaktor techniczny W. Zwolakowski

Sekretariat redakcji i korekta L. Skorupka

Adres redakcji:

Warszawa, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki P. A. N.

Nr zam. 267/116 — Rękopis otrzymano. 16. 4. 1953 — Ark. druk. 6¹/₄ — Druk ukończono 7. 9. 1953
Nakład 1000 — Papier ilustr. kl. V. form. 70×100/16 — waga 70 g. — K-4-10287

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA, UL. FREDRY 10

Cena zł 18,—

S. WĘGRZYN

Przebiegi nieustalone w wielostopniowych wzmacniaczach oporowych o sprzężeniu pojemnościowym

Rękopis dostarczono 10. 9. 52

Streszczenie. W artykule przedstawiono obliczenie przebiegów nieustalonych powstających w poszczególnych stopniach wielostopniowego wzmacniacza oporowego o sprzężeniu pojemnościowym przy załączaniu (względnie wyłączaniu) na jego wejście napięcia sinusoidalnego. Załączanie sinusoidalnej siły elektromotorycznej na wejście wzmacniacza, rozpatruje autor jako zwarcie jednej z zespołu dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił elektromotorycznych. Metoda ta w odniesieniu do wzmacniaczy omawianego typu pozwala na uzyskanie dużej prostoty obliczeń oraz umożliwia przeprowadzanie obliczeń graficznie.

1. WSTĘP

Stany nieustalone zachodzące w czwórnikach liniowych charakteryzujemy przy pomocy tzw. funkcji przejścia [2], [4]. Jest to funkcja czasu $K(t)$ określająca przebieg napięcia na wyjściu danego czwórnika wywołany przyłożeniem na jego wejście napięcia równego zeru dla wszystkich momentów czasu mniejszych od zera i równego napięciu jednostkowemu dla wszystkich momentów czasu większych względnie równych zeru. Jeżeli na wejście czwórnika o znanej funkcji przejścia $K(t)$ załączymy w chwili $t=0$ napięcie stałe U_1 to przebieg napięcia $U_2(t)$ na wyjściu tego czwórnika będzie określony równaniem

$$U_2(t) = U_1 K(t).$$

Jeżeli załączane napięcie U_1 nie jest stałe lecz zmienne określone daną funkcją czasu $U_1(t)$, to napięcie wyjściowe możemy obliczyć przy pomocy całki Duhamela według relacji

$$U_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t U_1(\tau) K(t-\tau) d\tau. \quad (1)$$

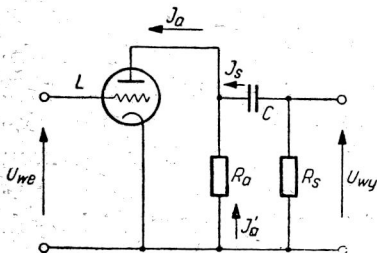


Wzór ten względnie jego forma symboliczna może być więc podstawą przy rozpatrywaniu przebiegów nieustalonych powstających w wielostopniowych wzmacniaczach oporowych o sprzężeniu pojemnościowym przy załączaniu na ich wejście napięć sinusoidalnych. Korzystanie z tego wzoru związane jest jednak w tym przypadku ze zmuśnymi obliczeniami matematycznymi prowadzącymi ponadto do wyrażień mało przydatnych do analizy i praktycznych obliczeń. Bardzo dogodnie jest natomiast stosowanie przy rozpatrywaniu przebiegów nieustalonych w wielostopniowych wzmacniaczach omawianego typu metody dwóch przeciwnych stanów ustalonych. Pozwala ona na uzyskiwanie rozwiązań w sposób szybki i prosty bez zatraćania przy tym sensu fizykalnego rozpatrywanego zjawiska.

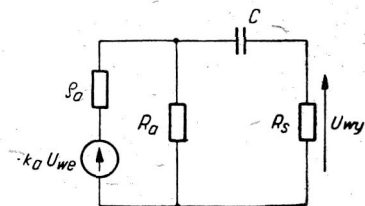
2. OPERATOROWE WYRAŻENIE WSPÓŁCZYNNIKA WZMOCNIENIA JEDNOSTOPNIOWEGO WZMACNIACZA OPOROWEGO O SPRĘŻENIU POJEMNOŚCIOWYM

Rozpatrzmy uproszczony schemat jednostopniowego wzmacniacza oporowego o sprzężeniu pojemnościowym przedstawiony na rys. 1.

Załóżmy, że w przedziale rozpatrywanych zmian napięcia siatkowego i odpowiadających im zmian prądu anodowego pracujemy na



Rys. 1. Uproszczony schemat jednego stopnia wzmacniacza oporowego o sprzężeniu pojemnościowym.



Rys. 2. Układ zastępczy jednego stopnia wzmacniacza z pominięciem pojemności międzyelektrodowych lampy.

prostoliniowej części charakterystyki lampy L , oraz że stałe napięcie ujemne siatkowe jest dostatecznie duże, zapewniające niepojawienie się w żadnym przypadku prądu siatkowego. Oznaczenia U_{we} , I_a , I_s , I'_a , U_{wy} i odpowiadające im zastrzałkowanie na rys. 1, odnoszą się kolejno do składowych zmiennych, a raczej do zmian napięcia wejściowego, napięcia wyjściowego, całkowitego prądu anodowego itd. Po-

prawnie należałoby wszędzie napisać ΔU_{we} , ΔI_a , ΔI_s , itd. Dla prostej opuszczamy te oznaczenia zaznaczając, że rozpatrujemy i układamy równania tylko odnośnie przyrostów poszczególnych wartości. Symbolika ta obowiązywać będzie również odnośnie układów rozpatrywanych w dalszej części pracy co już tam podkreślane nie będzie. Zaznaczamy, że rozpatrywać będziemy przebiegi i układy, dla których dopuszczalne jest pominięcie pojemności międzyelektrodowych. Posługując się obowiązującym wówczas układem zastępczym tego jednostopniowego wzmacniacza (rys. 2) otrzymamy na podstawie twierdzenia Thevenina [1] wprost

$$\bar{U}_{wy}(p) = -\bar{U}_{we}(p) S R_z \frac{R_s}{R_s + R_z + \frac{1}{pC}},$$

gdzie

$$R_z = \frac{\varrho_a R_a}{\varrho_a + R_a}.$$

W równaniu tym S oznacza nachylenie charakterystyki lampy L a ϱ_a jej opór wewnętrzny. Z tego równania możemy znaleźć operatorową formę stosunku napięcia wyjściowego do wejściowego. Stosunek ten nazywamy współczynnikiem wzmocnienia na stopień i oznaczamy przez \bar{K}_1 . Zatem operatorowo

$$\bar{K}_1(p) = -S R_z \frac{R_s}{R_s + R_z + \frac{1}{pC}} \quad (2)$$

względnie po przekształceniu

$$\bar{K}_1(p) = -S R_z \frac{R_s}{R_s + R_z} \frac{p}{p + \frac{1}{C(R_s + R_z)}}. \quad (3)$$

Oznaczając $k_0 = S R_z$ oraz $\alpha = \frac{1}{C(R_s + R_z)}$ otrzymamy ogólnie

$$\bar{K}_1(p) = -k_0 \bar{f}(p) \quad \text{gdzie} \quad \bar{f}(p) = \frac{R_s}{R_s + R_z} \frac{p}{p + \alpha}.$$

Ponieważ opór R_z jest zwykle mały w porównaniu z oporem R_s to wyrażenie na α i $\bar{f}(p)$ możemy uprościć i otrzymamy

$$\alpha = \frac{1}{C R_s}, \quad (4)$$

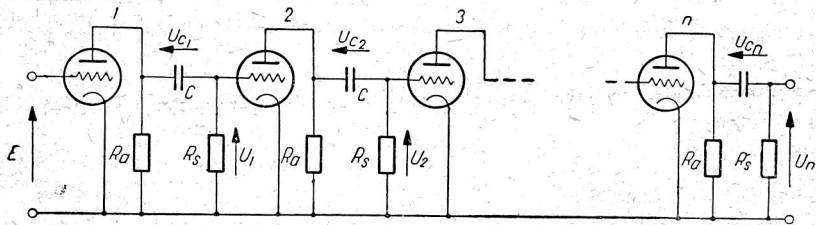
$$\bar{f}(p) = \frac{p}{p+\alpha}, \quad (5)$$

a więc ostatecznie

$$\bar{K}_1(p) = -k_0 \bar{f}(p) = -k_0 \frac{p}{p+\alpha}. \quad (6)$$

3. WZMACNIACZ WIELOSTOPNIOWY

Rozpatrzmy teraz jaka będzie forma operatorowa współczynnika wzmocnienia n -stopniowego wzmacniacza oporowego o sprzężeniu pojemnościowym, o wszystkich stopniach tego samego typu, przed-



Rys. 3. Uproszczony schemat n -stopniowego wzmacniacza oporowego o sprzężeniu pojemnościowym.

stawionego na rys. 3. Na podstawie wzoru (6) oraz uwzględniając zastrzałkowanie napięć U_1, U_2, \dots, U_n przedstawione na rys. 3, otrzymamy ogólnie

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1(p) &= -k_0 \frac{p}{p+\alpha} \bar{E}(p) \\ \bar{U}_2(p) &= -k_0 \frac{p}{p+\alpha} \bar{U}_1(p) \\ \bar{U}_3(p) &= -k_0 \frac{p}{p+\alpha} \bar{U}_2(p) \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{U}_n(p) &= -k_0 \frac{p}{p+\alpha} \bar{U}_{n-1}(p). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Z równań tych otrzymamy

$$\bar{U}_n(p) = \left(-k_0 \frac{p}{p+\alpha} \right)^n \bar{E}(p)$$

względnie

$$\frac{\bar{U}_n(p)}{\bar{E}(p)} = \left(-k_0 \frac{p}{p+\alpha} \right)^n. \quad (8)$$

Ten stosunek napięcia wyjściowego do wejściowego nazywamy współczynnikiem wzmocnienia wzmacniacza n -stopniowego i oznaczamy przez K_n (indeks n oznacza n stopni).

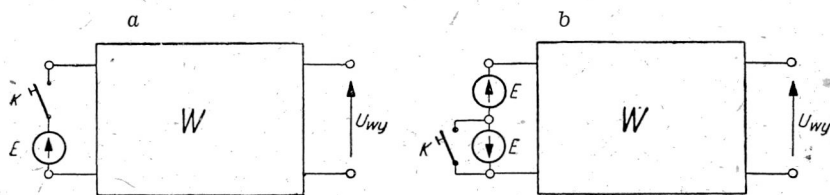
Zatem w formie operatorowej

$$\bar{K}_n(p) = \left(-k_0 \frac{p}{p+\alpha} \right)^n. \quad (9)$$

4. ZAŁĄCZANIE NAPIĘCIA SINUSOIDALNEGO NA WZMACNIACZ n -STOPNIOWY O JEDNAKOWYCH STOPNIACH

Załączanie jakiejś siły elektromotorycznej o przebiegu periodycznym, na dowolny czwórnik liniowy pasywny, możemy rozpatrywać jako wyłączenie jednej z zespołu dwóch równych sił elektromotorycznych, pracujących przeciw sobie jak to pokazano na rys. 4.

Przebieg napięcia (rys. 4a) spowodowany zamknięciem wyłącznika K (załączenie siły elektromotorycznej E) będzie oczywiście iden-

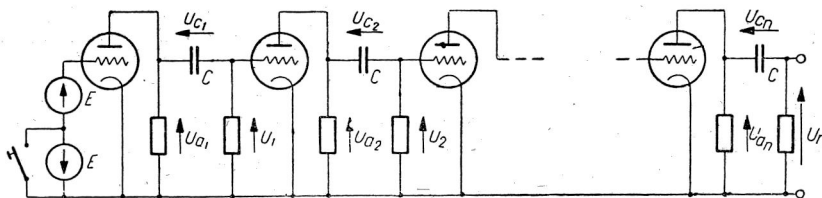


Rys. 4. Załączanie periodycznej siły elektromagnetycznej na pasywny liniowy czwórnik W możemy zastąpić zwarcie jednej z dwóch pracujących przeciw sobie sił elektromagnetycznych.

tyczny z przebiegiem napięcia na wyjściu czwórника (rys. 4b) przy załączeniu wyłącznika K' (zwarcie jednej z dwóch pracujących przeciw sobie sił elektromotorycznych). Oczywiście oba czwórnik W (rys. 4a i 4b) są identyczne. Przed załączeniem wyłącznika K' w obwodzie (rys. 4b) wypadkowe napięcie na wejściu czwórника, wywołane pracą dwóch generatorów, jest równe zero. Ponieważ czwórnik (rys. 4a) jest pasywny więc napięcie na jego wejściu jest też równe zero. Stan ten możemy jednak rozpatrywać dla każdego elementu czwórника jako sumę dwóch równych lecz przeciwnie skierowanych stanów ustalonych (mamy tu oczywiście na myśli napięcia i prądy

w poszczególnych elementach). Zwierając jeden z tych dwóch generatorów spowodujemy przerwanie stanu ustalonego, który on wymusza, i wywołamy zaburzenie spowodowane wyładowaniem się poszczególnych cewek i kondensatorów czwórnika W . Całkowity więc stan nieustalony spowodowany załączeniem na wejście danego czwórnika W siły elektromotorycznej $E(t)$ będzie sumą stanu ustalonego wywołanego tą siłą elektromotoryczną i zaburzenia wywołanego zwarcie równej i przeciwnie skierowanej, która pracowała na dany czwórnik już przy stanie ustalonym przed momentem zwarcia.

W przypadku załączania sinusoidalnej siły elektromotorycznej na wielostopniowy wzmacniacz oporowy o sprzężeniu pojemnościowym,



Rys. 5. Załączanie siły elektromagnetycznej na wzmacniacz rozpatrywane jako zwarcie jednej z dwóch przeciw sobie pracujących sił elektromotorycznych. Zastrzałkowano tylko napięcia wymuszone w stanie ustalonym przez załączaną siłę elektromotoryczną.

metoda ta daje duże uproszczenia. Odnośny schemat pokazany jest na rys. 5. Na rysunku tym zastrzałkowano tylko napięcia wymuszone w stanie ustalonym przez niezwieraną (załączaną) siłę elektromotoryczną. Rozpatrzmy jakie zależności występują między napięciami na poszczególnych elementach pojedynczego stopnia. W dalszych rozważaniach operować będziemy nie napięciami $U_n(t)$ ale stosunkiem $\frac{U_n(t)}{k_0^n}$. Stosunek ten nazwiemy napięciem zredukowanym i oznaczać będziemy przez $U'_n(t)$. Nazwa ta i oznaczenie odnosić się będzie zarówno do wielkości symbolicznych, operatorowych jak i rzeczywistych. W każdym z tych przypadków, aby przejść z wartości zredukowanej na niezredukowaną, należy pomnożyć tę pierwszą przez współczynnik k_0 w potęgę równej liczbie kolejnej stopnia, którego napięcia rozpatrujemy. Odnośny wykres topograficzny dla zredukowanych wartości maksymalnych napięć przedstawiony jest na rys. 6.

U'_{cn} — jest to zredukowana wartość napięcia na kondensatorze sprzęgającym pomiędzy $n+1$ a n -tym stopniem,

U'_{n-1} — jest to zredukowana wartość napięcia na siatce lampy n -tego stopnia,

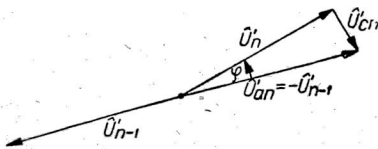
U'_{an} — jest to zredukowana wartość napięcia anodowego n -tego stopnia.

Napięcia te U'_{an} i U'_{n-1} są sobie równe i przeciwnie skierowane, a zatem $U'_{an} = -U'_{n-1}$. Odnośnie napięć U_n i U'_{cn} jak widać z rys. 6 obowiązują

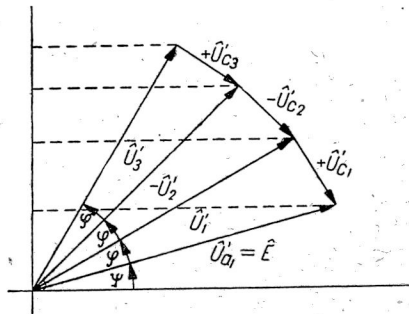
$$U'_{cn} = U'_{an} \sin \varphi,$$

gdzie: $\varphi = \arctg \frac{1}{\omega R_s C}$

$$U_n = U'_{an} \cos \varphi.$$



Rys. 6. Wykres topograficzny zredukowanych wartości napięć dla pojedynczego stopnia wzmacniacza.



Rys. 7. Wykres topograficzny napięć zredukowanych dla wzmacniacza czterostopniowego.

Wykres topograficzny dla kilku stopni wzmacniacza przedstawiony jest na rys. 7. Sporządzony on jest dla momentu czasu $t=0$ (moment włączenia) i przy założeniu przebiegu załączanej siły elektromotorycznej $E(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Przedstawia więc stan ustalony w momencie załączania wywołany przez siłę elektromotoryczną równą i przeciwnie skierowaną, to znaczy $-E_m \sin(\omega t + \psi)$.

Z wykresu tego możemy znaleźć, jakie wartości napięć ustalonych są na poszczególnych kondensatorach rozpatrywanego układu wzmacniającego w chwili $t=0$. Odnośnie amplitud wartości zredukowanych otrzymujemy wprost

$$\left. \begin{aligned} U'_{c1} &= E_m \sin \varphi \\ U'_{c2} &= E_m \sin \varphi \cos \varphi \\ U'_{c3} &= E_m \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ &\dots \dots \dots \\ U'_{cn} &= E_m \sin \varphi \cos^{n-1} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dla obliczenia natomiast wartości chwilowych, odpowiadających czasowi $t=0$, musimy znaleźć rzuty poszczególnych promieni wykresu topograficznego (rys. 7) na oś urojoną. Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} U'_{c1}(0) &= -E_m \sin \varphi \cos(\varphi + \psi) \\ U'_{c2}(0) &= E_m \sin \varphi \cos(2\varphi + \psi) \\ U'_{c3}(0) &= -E_m \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos(3\varphi + \psi) \\ &\dots \dots \dots \\ U'_{cn}(0) &= (-1)^n E_m \sin \varphi \cos^{n-1} \varphi \cos(n\varphi + \psi), \end{aligned}$$

zaś dla wielkości niezredukowanych, ogólnie

$$U_{cn}(0) = (-1)^n k_0^n E_m \sin \varphi \cos^{n-1} \varphi \cos(n\varphi + \psi). \quad (11)$$

Takie napięcia są zatem na poszczególnych kondensatorach rozpatrywanego wzmacniacza w chwili $t=0$. Po zwarcu siły elektromotorycznej zaczną się te kondensatory wyładowywać, każdy w swoim obwodzie R_z, R_s, C . Przy tym zaburzenie wywołane w pierwszym stopniu wyładowaniem się kondensatora C naładowanego do napięcia $U_{c1}(0)$, zostanie wzmocnione przez drugą lampę tak, że zaburzenie w drugim stopniu będzie już sumą zaburzenia wywołanego wyładowaniem się w obwodzie drugiego stopnia kondensatora o pojemności C naładowanego do napięcia $U_{c2}(0)$ oraz wzmocnionego i przeniesionego do tego obwodu przez drugą lampę zaburzenia pierwszego obwodu. Analogicznie zaburzenie w trzecim stopniu będzie sumą zaburzenia spowodowanego wyładowaniem się w obwodzie R_z, R_s, C kondensatora naładowanego do napięcia $U_{c3}(0)$, oraz wzmocnionego i przeniesionego do tego obwodu przez trzecią lampę zaburzenia w drugim stopniu, który, jak już powiedzieliśmy, był sumą zaburzenia własnego i poprzedniego stopnia.

Zatem w pierwszym stopniu napięcie zaburzeniowe $U_{z1}(t)$ będzie wywołane wyładowaniem się w obwodzie R_z, R_s, C kondensatora C naładowanego do napięcia $U_{c1}(0)$. Odnośne równanie operatorowe dla pierwszego obwodu będzie:

$$\bar{U}_{1z}(p) = -U_{c1}(0) \frac{R_s}{R_z + R_s + \frac{1}{pC}},$$

względnie po przekształceniu i wprowadzeniu poprzednio stosowanych oznaczeń

$$\bar{U}_{1z}(p) = -U_{c1}(0) \frac{R_s}{R_s + R_z} \frac{p}{p + \frac{1}{C(R_s + R_z)}} = -U_{c1}(0) \bar{f}(p),$$

gdzie

$$\bar{f}(p) = \frac{R_s}{R_z + R_s} \cdot \frac{p}{p + \alpha},$$

a

$$\alpha = \frac{1}{C(R_s + R_z)},$$

a uwzględniając założenie, że opór R_z jest mały w porównaniu z oporem R_s można przyjąć

$$\bar{f}(p) = \frac{p}{p + \alpha},$$

$$\alpha = \frac{1}{CR_s}.$$

Napięcie zaburzeniowe $U_{2z}(t)$ w drugim stopniu będzie już wywołane nie tylko wyładowaniem się kondensatora C , naładowanego do napięcia $U_{c2}(0)$, ale również napięciem anodowym spowodowanym napięciem zaburzeniowym $U_{1z}(t)$, a zatem równym $-k_0 U_{1z}(t)$, gdzie $k_0 = SR_z$. Dla drugiego stopnia otrzymamy zatem zależność

$$\bar{U}_{2z}(p) = [\bar{U}_{a2}(p) - U_{c2}(0)] \bar{f}(p)$$

czyli

$$\bar{U}_{2z}(p) = -k_0 \bar{U}_{1z}(p) \bar{f}(p) - U_{c2}(0) \bar{f}(p),$$

a ponieważ $\bar{U}_{1z}(p) = -U_{c1}(0) \bar{f}(p)$ to ostatecznie

$$\bar{U}_{2z}(p) = k_0 U_{c1}(0) \bar{f}^2(p) - U_{c2}(0) \bar{f}(p).$$

Rozumując analogicznie odnośnie stopnia trzeciego otrzymamy

$$\bar{U}_{3z}(p) = [-k_0 \bar{U}_{2z}(p) - U_{c3}(0)] \bar{f}(p),$$

względnie po wstawieniu wartości $\bar{U}_{2z}(p)$

$$\bar{U}_{3z}(p) = -k_0^2 U_{c1}(0) \bar{f}^3(p) + k_0 U_{c2}(0) \bar{f}^2(p) - U_{c3}(0) \bar{f}(p)$$

i ogólnie dla n -tego stopnia

$$\bar{U}_{nz}(p) = \sum_{v=1}^n k_0^{n-v} f(p)^{n-v+1} U_{cv}(0) (-1)^{n-v+1}. \quad (12)$$

Uwzględniając ogólnie zachodzącą zależność pomiędzy wartościami zredukowanymi a niezredukowanymi

$$U_{cv}(0) = U'_{cv}(0) k_0^v \quad (13)$$

otrzymamy

$$\bar{U}_{nz}(p) = k_0^n \sum_{v=1}^n f(p)^{n-v+1} U'_{cv}(0) (-1)^{n-v+1}, \quad (14)$$

względnie dla zredukowanej wartości

$$\bar{U}'_{nz}(p) = \sum_{v=1}^n f(p)^{n-v+1} U'_{cv}(0) (-1)^{n-v+1}. \quad (15)$$

Jest to ostateczna forma operatorowa podająca przebieg zredukowanego napięcia na oporze siatkowym w n -tym stopniu wzmacniacza, wywołanego zwarcie jednej z załączonych na wejście sił elektromotorycznych. Przejście z tej formy operatorowej na formę czasową jest już proste ze względu na znaną zależność [3], [5]

$$\left(\frac{p}{p+\alpha} \right)^n \triangleq \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \right] = e^{-\alpha t} L_{n-1}(\alpha t), \quad *)$$

*) Autor posługuje się rachunkiem operatorowym opartym na przekształceniu Carsona w postaci

$$\bar{f}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Przekształcenie to podporządkowuje funkcji zmiennej rzeczywistej $f(t)$ funkcję zmiennej zespolonej $\bar{f}(p)$. Poziomą kreskę nad funkcją zmiennej p dajemy dla odróżnienia jej od funkcji zmiennej t .

Jeżeli pomiędzy funkcjami $\bar{f}(p)$ i $f(t)$ zachodzi zależność określona powyższym przekształceniem to mówimy, że funkcja $\bar{f}(p)$ jest funkcją operatorową odpowiadającą funkcji $f(t)$ co zapisujemy w następujący sposób [6]:

$$\bar{f}(p) \triangleq f(t).$$

W literaturze stosuje się również rachunek operatorowy oparty na przekształceniu Laplace'a w postaci

$$\bar{f}_L(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

gdzie

L_{n-1} — oznacza tzw. wielomian Langerre'a.

Uwzględniając te zależności możemy napisać

$$U'_{nz}(t) = \sum_{v=1}^n e^{-\alpha t} L_{n-v}(\alpha t) U'_{cv}(0) (-1)^{n-v+1}. \quad (16)$$

Wzór (16) podaje nam przebieg zredukowanego napięcia zaburzeniowego na oporze siatkowym w n -tym stopniu wzmacniacza, przy załączeniu na wejście napięcia sinusoidalnego. Występujące w tym wzorze napięcia $U'_c(0)$ są to chwilowe zredukowane wartości napięć na poszczególnych kondensatorach w momencie włączania, wywołane w stanie ustalonym przez równą i przeciwnie skierowaną siłę elektromotoryczną niż włączana. Całkowite napięcie nieustalone będzie sumą napięcia zaburzeniowego $U'_{nz}(t)$ i napięcia ustalonego $U'_{nu}(t)$. Z wykresu topograficznego przedstawionego na rys. 7 możemy znaleźć, że dla n -tego stopnia zredukowana wartość napięcia ustalonego będzie wynosiła

$$U'_{nu}(t) = (-1)^n E_m \cos^n \varphi \sin(\omega t + n\varphi + \psi).$$

Zatem całkowite napięcie nieustalone będzie w tym stopniu miało przebieg

$$U'_n(t) = (-1)^n E_m \cos^n \varphi \sin(\omega t + n\varphi + \psi) + \sum_{v=1}^n e^{-\alpha t} L_{n-v}(\alpha t) U'_{cv}(0) (-1)^{n-v+1}.$$

Jest to wartość napięcia zredukowanego; dla przejścia na wartość rzeczywistą wystarczy ją tylko pomnożyć przez k_0^n .

5. ZNAJDOWANIE PRZEBIEGÓW NAPIĘĆ NIEUSTALONYCH METODĄ GRAFICZNĄ

W poprzednim rozdziale wykazaliśmy, że napięcie nieustalone w dowolnym stopniu wzmacniacza może być rozpatrywane jako suma napięcia ustalonego i napięcia zaburzeniowego. Wykazaliśmy

Modyfikacja Carsona polega więc na pomnożeniu przekształcenia Laplace'a przez p . Jeżeli zatem funkcja $\bar{f}_L(p)$ jest przekształceniem Laplace'a, a funkcja $\bar{f}(p)$ przekształceniem Carsona funkcji $f(t)$ to pomiędzy funkcjami $\bar{f}_L(p)$ i $\bar{f}(p)$ zachodzi relacja

$$\bar{f}(p) = p\bar{f}_L(p).$$

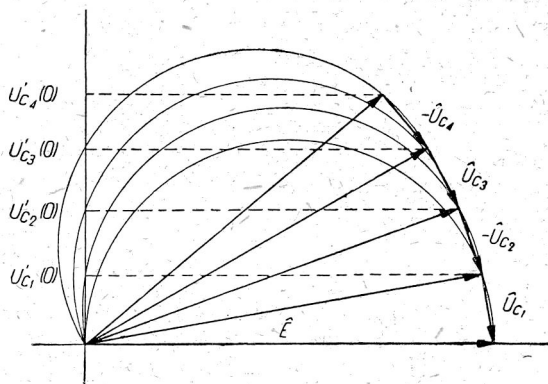
przy tym, że operatorowo napięcia zaburzeniowe można przedstawić w postaci

$$\bar{U}'_{nz}(p) = \sum_{v=1}^n f(p)^{n-v+1} U'_{cv}(0) (-1)^{n-v+1},$$

gdzie $U'_{cv}(0)$ — zredukowana wartość napięcia ustalonego na kondensatorze n -tego stopnia odpowiadająca chwili załączania. Pokazaliśmy również (rys. 7), że poszczególne napięcia $U'_{cv}(0)$ mogą być łatwo znalezione metodą wykreślną. Na rys. 8 przedstawiamy jeszcze raz tę konstrukcję (pominając zbędne już teraz oznaczenia) dla czterech stopni wzmacniacza i przy przyjęciu fazy włączania $\psi = 0$.

Występująca we wzorze (15) funkcja operatorowa jest jak pokazaliśmy typu

$$\left(\frac{p}{p+\alpha}\right)^n.$$



Rys. 8. Uproszczony wykres topograficzny napięć zredukowanych dla wzmacniacza cztero-stopniowego.

Odpowiadająca jej funkcja czasowa ma postać

$$f_n(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \right] = e^{-\alpha t} L_{n-1}(\alpha t).$$

Wartości tej funkcji dla n od 1 do 5 wynoszą:

$$n=1, \quad f_1(t) = e^{-\alpha t},$$

$$n=2, \quad f_2(t) = (1 - \alpha t) e^{-\alpha t},$$

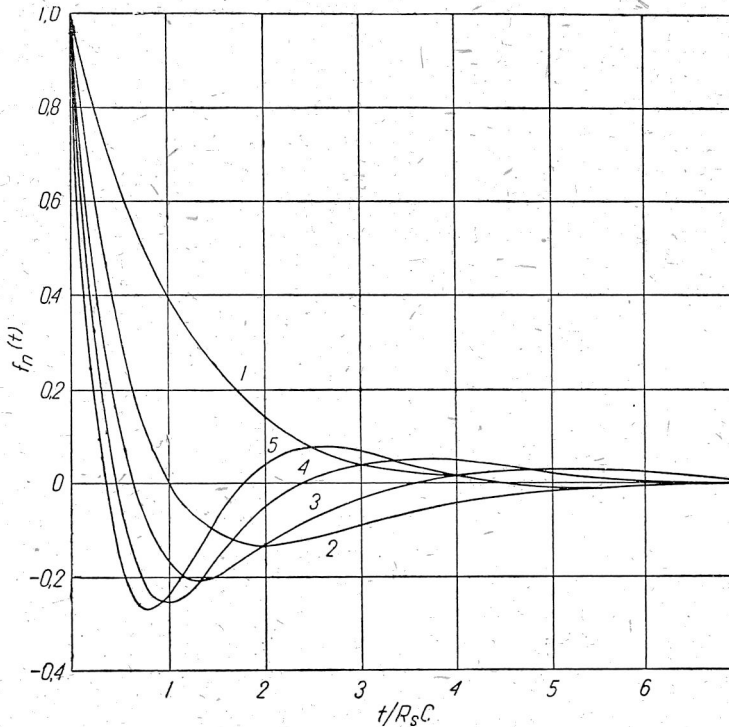
$$n=3, \quad f_3(t) = \left(1 - 2\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} \right) e^{-\alpha t},$$

$$n=4, \quad f_4(t) = \left(1 - 3\alpha t + \frac{3}{2}\alpha^2 t^2 - \frac{1}{6}\alpha^3 t^3 \right) e^{-\alpha t},$$

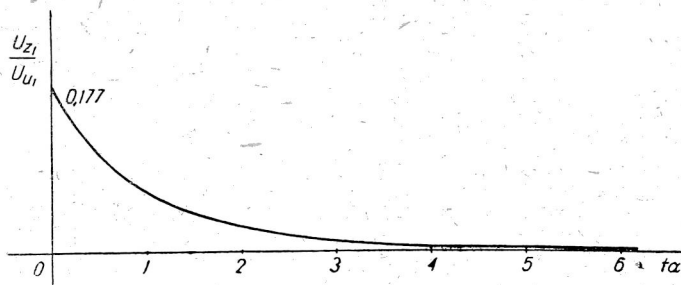
$$n=5, \quad f_5(t) = \left(1 - 4\alpha t + 3\alpha^2 t^2 - \frac{2}{3}\alpha^3 t^3 + \frac{1}{24}\alpha^4 t^4 \right) e^{-\alpha t}.$$

Dla ułatwienia obliczeń przedstawione są na rys. 9 przebiegi tej funkcji dla wartości n od 1 do 5 [5], [4]. Na osi odciętych odmierzane są wartości $\alpha t = \frac{t}{R_s C}$, to znaczy wartości stosunku czasu do stałej czasowej pojedynczego stopnia.

Dla otrzymania więc na przykład napięcia zaburzeniowego w pierwszym stopniu (na siatce drugiej lampy) mnożymy funkcję

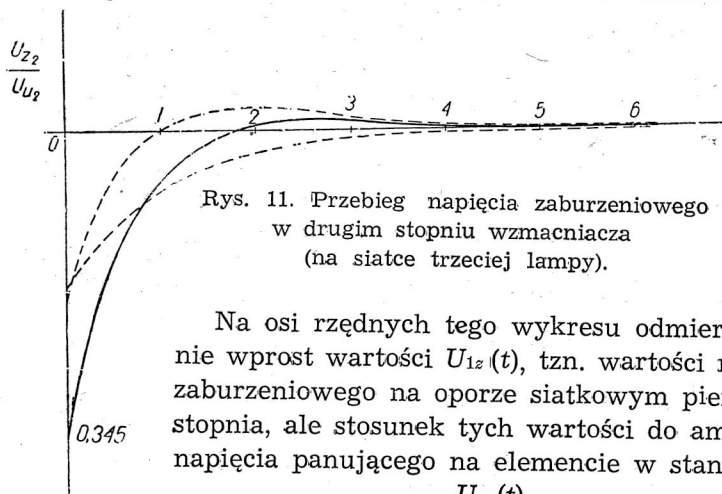


Rys. 9. Przebieg funkcji $f_n(t) = e^{-at} L_{n-1}(at)$ dla różnych wartości n .



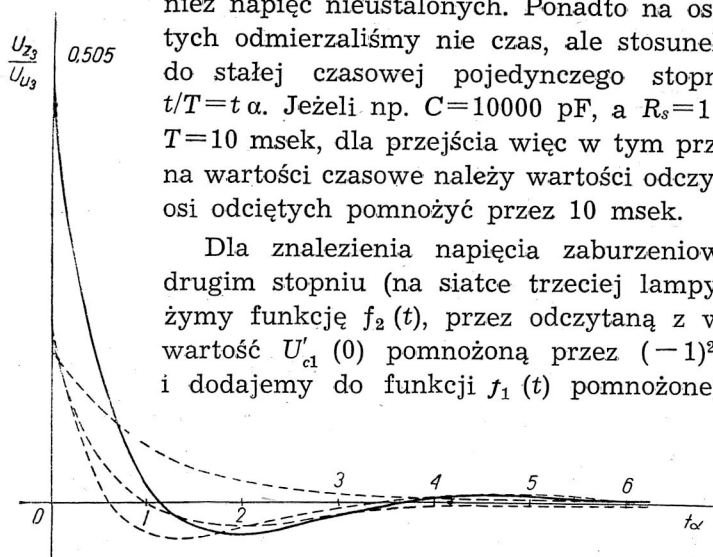
Rys. 10. Przebieg napięcia zaburzeniowego w pierwszym stopniu wzmacniacza (na siatce drugiej lampy).

$f_1(t)$ wprost przez znaną z wykresu wartość $U'_{c1}(0)$ pomnożoną przez $(-1)^{1-1+1} = -1$. Otrzymany przebieg pokazany jest na rys. 10.



Rys. 11. Przebieg napięcia zaburzeniowego w drugim stopniu wzmacniacza (na siatce trzeciej lampy).

Na osi rzędnych tego wykresu odmierzaliśmy nie wprost wartości $U_{1z}(t)$, tzn. wartości napięcia zaburzeniowego na oporze siatkowym pierwszego stopnia, ale stosunek tych wartości do amplitudy napięcia panującego na elemencie w stanie ustalonym tzn. stosunek $\frac{U_{1z}(t)}{U_{1mu}}$. Identycznie postępować będziemy odnośnie w dalszej części przedstawionych przebiegów zaburzeniowych napięć siatkowych pozostałych stopni jak również napięć nieustalonych. Ponadto na osi odciętych odmierzaliśmy nie czas, ale stosunek czasu do stałej czasowej pojedynczego stopnia tzn. $t/T = t\alpha$. Jeżeli np. $C = 10000$ pF, a $R_s = 1$ M Ω , to $T = 10$ msek, dla przejścia więc w tym przypadku na wartości czasowe należy wartości odczytane na osi odciętych pomnożyć przez 10 msek.



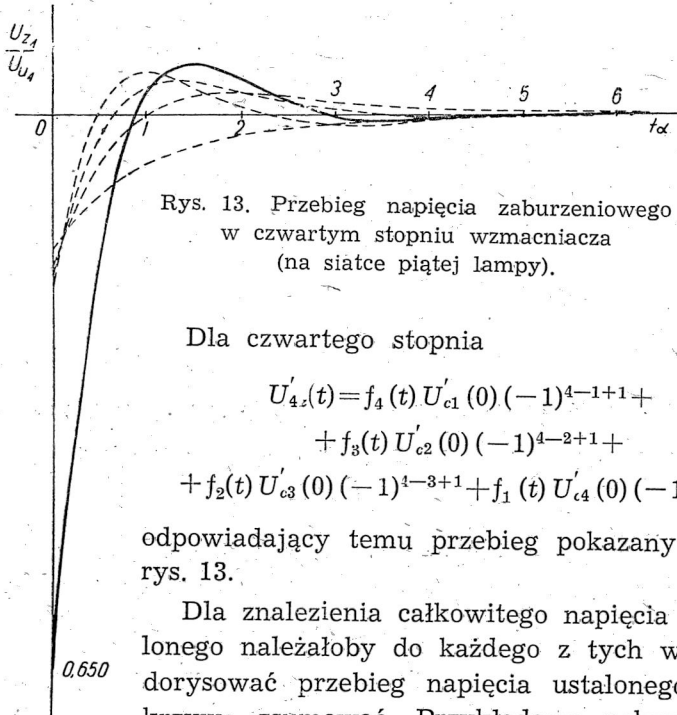
Rys. 12. Przebieg napięcia zaburzeniowego w trzecim stopniu wzmacniacza (na siatce czwartej lampy).

wartość $U'_{c2}(0)$ i pomnożoną przez $(-1)^{2-2+1} = -1$. Otrzymana krzywa pokazana jest na rys. 11.

Analogicznie dla trzeciego stopnia

$$U'_{3z}(t) = f_3(t)U'_{c1}(0)(-1)^{3-1+1} + f_2(t)U'_{c2}(0)(-1)^{3-2+1} + f_1(t)U'_{c1}(0)(-1)^{3-3+1}$$

czemu odpowiada przebieg pokazany na rys. 12.



Rys. 13. Przebieg napięcia zaburzeniowego w czwartym stopniu wzmacniacza (na siatce piątej lampy).

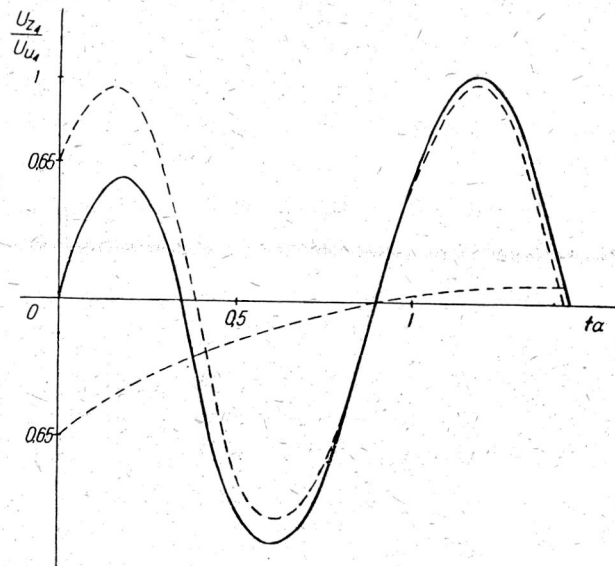
Dla czwartego stopnia

$$U'_{4z}(t) = f_4(t)U'_{c1}(0)(-1)^{4-1+1} + f_3(t)U'_{c2}(0)(-1)^{4-2+1} + f_2(t)U'_{c3}(0)(-1)^{4-3+1} + f_1(t)U'_{c4}(0)(-1)^{4-4+1}$$

odpowiadający temu przebieg pokazany jest na rys. 13.

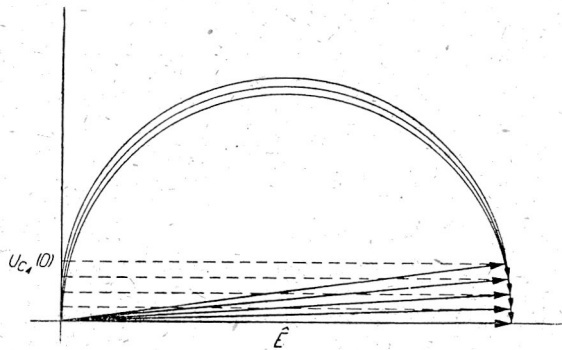
Dla znalezienia całkowitego napięcia nieustalonego należałoby do każdego z tych wykresów dorysować przebieg napięcia ustalonego i obie krzywe zsumować. Przykładowo pokazane jest to na rys. 14 odnośnie stopnia czwartego dla przypadku $R_s = 1 \text{ M}\Omega$, $C = 10000 \text{ pF}$, przy częstotliwości załączanej siły elektromotorycznej $f = 100 \text{ c/s}$, oraz przy założeniu $\psi = 0$. Z wykresu tego możemy odczytać, że w tym przypadku zniekształcenia pierwszych amplitud wynoszą 0,62; 1,12; 1,05.

Przedstawiona metoda nie tylko ułatwia obliczenie względnie znalezienie graficzne napięć zaburzeniowych występujących w poszczególnych stopniach wzmacniacza, ale uwidacznia również pewne zależności ogólne. I tak np. łatwo zauważyć, że im większa jest częstotliwość załączanego napięcia tym mniejsze są napięcia zaburzeniowe występujące w poszczególnych stopniach wzmacniacza. Wynika to bezpośrednio z „konstrukcji graficznej“ wartości początko-



Rys. 14. Przebieg napięcia nieustalonego w czwartym stopniu wzmacniacza dla przypadku $\frac{1}{\alpha} = 10$ msek, $\psi = 0$, $f = 100$ c/s.

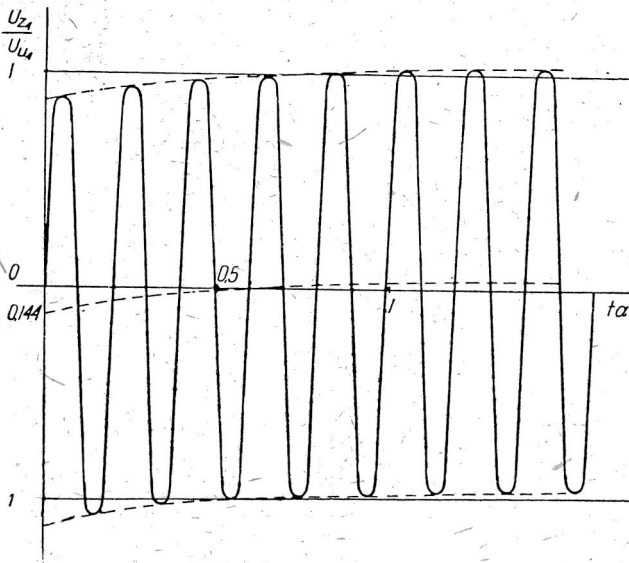
wej napięć zaburzeniowych. Im większa bowiem częstotliwość załączanego napięcia tym mniejsze wartości napięć ustalonych, wy-



Rys. 15. Uproszczony wykres topograficzny napięć zredukowanych dla wzmacniacza czterostopniowego dla przypadku $\frac{1}{\alpha} = 10$ msek, $f = 500$ c/s, $\psi = 0$.

stępujących na kondensatorach sprzęgających, a więc tym mniejsza wartość początkowa napięcia zaburzeniowego. Przykładowo poka-

zано na rys. 15 i 16 rozwiązanie graficzne dla tego samego co poprzednio wzmacniacza, $1/\alpha=10$ msek, również przy przyjęciu fazy początkowej $\psi=0$, ale przy założeniu pięciokrotnie większej często-



Rys. 16. Przebieg napięcia nieustalonego w czwartym stopniu wzmacniacza dla przypadku $1/\alpha=10$ msek, $\psi=0$, $f=500$ c/s.

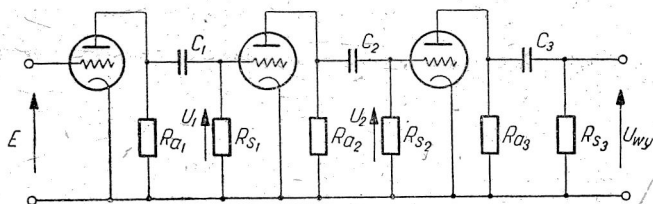
tliwości załączanego napięcia. Zniekształcenia pierwszych amplitud wynoszą w tym przypadku 0,89; 1,1; 0,93; 1,07.

6. ZAŁĄCZANIE NAPIĘCIA SINUSOIDALNEGO NA WIELOSTOPNIOWY WZMACNIACZ OPOROWY O SPRZEŻENIU POJEMNOŚCIOWYM I NIEJEDNAKOWYCH STOPNIACH

Pokazano poprzednio, w rozdziałach 4 i 5 na przykładzie wzmacniaczy o jednakowych stopniach, metoda znajdowania przebiegu nieustalonego może być również stosowana w przypadku wzmacniaczy o niejednakowych stopniach.

Rozpatrzmy np. wzmacniacz trójstopniowy pokazany na rys. 17. Znajdujemy początkowo chwilowe wartości napięć w stanie ustalonym wymuszane przez równą i przeciwnie do załączanej skierowaną

siłę elektromotoryczną, występujące na kondensatorach C_1, C_2, C_3 . Niech one wynoszą w momencie załączania $U_{c1}(0), U_{c2}(0), U_{c3}(0)$. Załączane zatem w chwili $t=0$ napięcie $E(t)$ na wejście wzmacniacza spowoduje zaburzenie wywołane wyładowaniem się każdego z kondensatorów C_1, C_2, C_3 w swoim obwodzie R_z, C, R_s . Oznaczmy



Rys. 17. Uproszczony schemat wzmacniacza trójstopniowego o sprzężeniu pojemnościowym o niejednakowych stopniach.

odwrotności stałych czasowych tych obwodów przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Napięcie zaburzeniowe na siatce drugiej lampy wywołane będzie tylko wyładowaniem się kondensatora C_1 , zatem

$$\bar{U}_{1z}(p) = -U_{c1}(0) \frac{p}{p + \alpha_1}.$$

Napięcie zaburzeniowe na siatce trzeciej lampy będzie wywołane wyładowaniem się kondensatora C_2 i przeniesionym przez drugą lampę zaburzeniem z pierwszego obwodu, zatem

$$\bar{U}_{2z}(p) = k_{01} U_{c1}(0) \frac{p}{p + \alpha_1} \cdot \frac{p}{p + \alpha_2} - U_{c2}(0) \frac{p}{p + \alpha_2}.$$

Analogicznie zaburzeniowe napięcie wyjściowe

$$\begin{aligned} \bar{U}_{wyz}(p) = & -k_{02} k_{03} U_{c1}(0) \frac{p}{p + \alpha_1} \cdot \frac{p}{p + \alpha_2} \cdot \frac{p}{p + \alpha_3} + \\ & + k_{03} U_{c2}(0) \frac{p}{p + \alpha_2} \cdot \frac{p}{p + \alpha_3} - U_{c3}(0) \frac{p}{p + \alpha_3}. \end{aligned}$$

Przejdzie z tej formy operatorowej na czasową jest już proste ze względu na znaną zależność [4]

$$\prod_{k=1}^n \frac{p}{p + \alpha_k} \triangleq \sum_{k=1}^n A_k e^{-\alpha_k t}$$

przy czym

$$A_k = \frac{(-\alpha_k)^{n-1}}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n (\alpha_r - \alpha_k)}.$$

W naszym przypadku otrzymamy np. następujące przebiegi napięć zaburzeniowych w poszczególnych stopniach

$$\begin{aligned} U_{1z}(t) &= -U_{c1}(0) e^{-\alpha t}, \\ U_{2z}(t) &= k_{01} U_{c1}(0) \left[\frac{-\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{-\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] - U_{c2}(0) e^{-\alpha_2 t}, \\ U_{wyz}(t) &= -k_{02} k_{03} U_{c1}(0) \left[\frac{\alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t}}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)} + \frac{\alpha_2^2 e^{-\alpha_2 t}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_3^2 e^{-\alpha_3 t}}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)} \right] + k_{03} U_{c2}(0) \left[\frac{-\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_3 - \alpha_2} + \frac{-\alpha_3 e^{-\alpha_3 t}}{\alpha_2 - \alpha_3} \right] + \\ &\quad - U_{c3}(0) e^{-\alpha_3 t}. \quad (17) \end{aligned}$$

Całkowite napięcie stanu nieustalonego otrzymamy jak poprzednio jako sumę stanu ustalonego i obliczonych napięć zaburzeniowych.

7. WYŁĄCZANIE WIELOSTOPNIOWEGO WZMACNIACZA SPOD NAPIĘCIA SINUSOIDALNEGO

Rozpatrując poprzednio przypadek załączania przedstawiliśmy powstające wówczas napięcie nieustalone jako sumę napięcia ustalonego i napięcia zaburzeniowego, którego przebieg obliczaliśmy jako przebieg napięcia pochodzącego od wyłączenia równej, lecz przeciwnie niż załączana skierowanej siły elektromotorycznej. Wyprowadzone zatem poprzednio wzory na przebieg napięcia zaburzeniowego, wywołanego załączeniem na wzmacniacz SEM, mogą być wykorzystane wprost dla obliczeń przebiegu napięcia nieustalonego występującego przy wyłączeniu. Dla przypadku wszystkich stopni jednakowych otrzymamy zatem z wzoru (16)

$$\begin{aligned} U'_{nz}(t) &= - \sum_{v=1}^n e^{-\alpha t} L_{n-v}(\alpha t) U'_{cv}(0) (-1)^{n-v+1} = \\ &= \sum_{v=1}^n e^{-\alpha t} L_{n-v}(\alpha t) U'_{cv}(0) (-1)^{n-v}, \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie $U'_{cv}(0)$ — zredukowane wartości napięcia na poszczególnych kondensatorach w chwili wyłączenia. W przypadku wzmacniacza

o różnych stałych czasowych poszczególnych stopni, możemy wykorzystać dla obliczenia przebiegów nieustalonych, wywołanych wyłączeniem działającego na wzmacniacz napięcia, przedstawiony poprzednio wzór (17).

8. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona metoda pozwala na uzyskanie w prosty sposób ogólnych wzorów określających przebiegi napięć zaburzeniowych w wielostopniowych wzmacniaczach oporowych o sprzężeniu pojemnościowym. Przy przeprowadzaniu obliczeń nie zatracą się sensu fizykalnego rozpatrywanego zjawiska; dużą zaletą jest również to, że część tych obliczeń można przeprowadzić graficznie. Przedstawiona metoda jest również dogodnym narzędziem przy dyskusji warunków zaburzeń w poszczególnych stopniach wzmacniacza. Dla wykazania tego zwróćmy uwagę na parę wniosków wynikających bezpośrednio z przeprowadzonych wywodów. I tak np. na podstawie wykresu topograficznego zredukowanych napięć w stanie ustalonym możemy od razu zorientować się co do wielkości początkowych wartości napięć zaburzeniowych, a więc i przepięć w poszczególnych stopniach wzmacniacza. Na osi urojonej tego wykresu odczytujemy bowiem wprost początkowe wartości napięć zaburzeniowych. Rozpatrując np. przypadek dla którego obowiązuje wykres topograficzny przedstawiony na rys. 7 widzimy, że im dalszy stopień wzmacniacza, tym większe wartości początkowe występującego w nim napięcia zaburzeniowego.

Ogólnie można również zauważyć (co omówiono już szczegółowo w rozdziale piątym), że im większa częstotliwość załączanego napięcia tym mniejsze napięcia zaburzeniowe w poszczególnych stopniach wzmacniacza. Wynika to stąd, że im większa częstotliwość załączanego napięcia, tym mniejsze napięcia występujące na kondensatorach sprzęgających w stanie ustalonym, a więc mniejsze wartości początkowe napięć zaburzeniowych.

WYKAZ LITERATURY

1. Krug K. A. — *Osnovy Elektrotechniki* — 1946, Moskwa-Leningrad.
2. Lurie O. B. — *Niestacjonarnyje processy w szirokopołosnych usilitielach s obratnoj swiazju* — *Żurnal Tiejniceskoj Fizyki*, t. XIX, Nr 8, 1949.
3. Pogorzelski W. — *Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a*. 1950, Warszawa.

4. Valley G. E., Wallman H. (Editors) — Vacuum tube amplifiers — 1948, New York — Toronto — London.
5. Wagner K. W. — Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik — 1940, Leipzig.
6. Węgrzyn S. — Rachunek operatorowy w zastosowaniu do obliczeń przebiegów nieustalonych w obwodach elektrycznych o stałych skupionych — 1949, Gliwice.

С. ВЕНГРЖЫН

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МНОГОКАСКАДНЫХ РЕОСТАТНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ С ЕМКОСТНОЙ СВЯЗЬЮ

Резюме

В статье представлен расчёт нестационарных процессов, возникающих в отдельных каскадах реостатного усилителя с ёмкостной связью при включении (или выключении) синусоидальных напряжений на его входе. Включение электродвижущей силы на входе усилителя автор рассматривает как короткое замыкание одной из комплекса двух равных, но противоположно направленных электродвижущих сил. Процесс нестационарного напряжения на любой ступени усилителя можно тогда рассчитать как сумму напряжения вызванного включаемой электродвижущей силой в стационарном режиме и напряжения возмущения, вызванного коротким замыканием электродвижущей силы равной включаемой, но направленной противоположно. Эти напряжения возмущения вызываются разрядом связывающих конденсаторов в их контурах R_z , R_s , C , причём напряжение возмущения в первом каскаде вызвано только разрядом связывающего конденсатора этого каскада; напряжение возмущения второго каскада является уже суммой напряжения возмущения вызванного разрядом связывающего конденсатора второго каскада и усиленного и перенесенного в этот каскад напряжения возмущения в первом каскаде. Вообще напряжение возмущения в любом каскаде является суммой собственного возмущения и усиленных возмущений перенесенных из предыдущих каскадов.

Метод этот в применении для исследования названного типа даёт большую простоту расчётов, а также возможность графического исполнения этих расчётов.

S. WĘGRZYN

TRANSIENT PHENOMENA
IN RESISTANCE-COUPLED MULTI-STAGE AMPLIFIERS

Summary

The paper presents an analysis of transient phenomena arising in any stage of a multi-stage resistance-coupled amplifier when applying (or removing) a sinusoidal driving voltage. The author treats applying on of an input E. M. F. as short-circuiting one of two equal electromotive forces of opposite sign. The transient voltage in any amplifier stage can thus be determined as a sum of two components: one due to the applied steady state E. M. F. and the transient voltage due to the short-circuiting of the opposite E. M. F. The latter is caused by the discharge of the coupling capacitors in the corresponding circuits R_z , R_s , C . The transient voltage in the first stage is due only to the discharge of the coupling capacitor in this stage, whereas in the second stage the transient voltage is made up of the component due to the discharge of the coupling capacitor of this stage as well as of the amplified transient voltage of the first stage. Generally, the transient voltage of any stage is the sum of its own transient voltage and of the amplified transient voltages of the preceding stages. The method presented simplifies the determination of transient behaviour of the discussed type of amplifier circuits and offers a possibility of performing the computations graphically.

L. ŁUKASZEWICZ

Wpływ zniekształceń liniowych na dokładność rozwiązań elektronowego analizatora równań różniczkowych

Rękopis dostarczono 28. 10. 52

Streszczenie. Tematem pracy jest zbadanie wpływu zniekształceń liniowych układów sumujących i całkujących elektronowego analizatora równań różniczkowych zwyczajnych na dokładność rozwiązań w przypadku równań liniowych, jednorodnych i o współczynnikach stałych. Zagadnienie to zostało rozpatrzone przy zupełnie ogólnych założeniach i uwzględnieniu błędów powstałych na skutek niedokładnego dobrania współczynników badanego równania. Znalezione warunki dostatecznie i praktycznie biorąc konieczne, jakie musi spełniać funkcja charakteryzująca przenoszenie układów liczących na to, aby błąd otrzymanego wyniku nie przekraczał podanej z góry wielkości. Przez nadanie tym warunkom postaci łatwo stosowalnej w praktyce uzyskano wskazówki budowy elektronowych układów liczących, potrzebne do uzyskania żądanej dokładności przy możliwie małych kosztach. Na zakończenie wyniki uzyskane na drodze teoretycznej porównano z danymi doświadczalnymi.

1. WSTĘP

Zasada działania analizatora równań różniczkowych oparta jest na założeniu idealnego przenoszenia układów liczących [1]¹⁾. Tymczasem przenoszenie układów rzeczywistych obarczone jest nieścisłościami, wśród których tzw. zniekształcenia liniowe grają w analizatorach szczególnie ważną rolę. Zniekształcenia nieliniowe mają na ogół znaczenie drugorzędne, gdyż używane powszechnie ujemne sprzężenie zwrotne czyni ich wielkość pomijalnie małą. Z tego względu konieczność niedopuszczenia do zbyt dużych błędów po-

¹⁾ Zasada ta zostanie bliżej objaśniona w rozdziale 2. Dane bardziej szczegółowe podane są np. w książce „Elektriceskije modieli“ L. Gutenmachera, Moskwa 1949. W książce tej podano przeszło 100 pozycji literatury uczonych radzieckich, z których wiele dotyczy analizatorów równań różniczkowych.

wstałych na skutek zniekształceń liniowych stanowi jeden z najważniejszych czynników, decydujących o przyjęciu lub odrzuceniu danego układu, wyborze lamp i wartości elementów. Dlatego też znajomość istotnych zależności pomiędzy zniekształceniami liniowymi a dokładnością wyników posiada podstawowe znaczenie przy projektowaniu analizatorów równań różniczkowych. Znajomość ta pozwala w szczególności na opracowanie metod kompensacji błędów, dzięki którym można osiągnąć duże dokładności wyników przy użyciu stosunkowo prostych środków.

Zadawalające rozwiązanie tych zagadnień nie zostało dotąd opublikowane w dostępnej autorowi literaturze. Przeciwnie, ze wzmianek różnych autorów [3] na ten temat zdaje się wynikać, że nie dysponowali oni dostatecznie opracowaną teorią. Wielu z nich daje wyraz przekonaniu, że należy dążyć do możliwie szerokiej wstęgi przenoszenia o płaskiej charakterystyce, co jest w dużym stopniu nieścisle. W pracy A. Macnee [2] na temat wpływu zniekształceń liniowych na dokładność rozwiązań rozważone zostały tylko przypadki najprostsze, nie obejmujące przypadków najbardziej interesujących, gdy przez odpowiednie kompensacje wpływ ten można wielokrotnie zmniejszyć. Na ogół jednak w publikowanych dotąd pracach na temat analizatorów ten tak ważny temat zostawał całkowicie pominięty. Celem pracy niniejszej jest uzupełnienie tej luki przez dostatecznie ogólne i pełne opracowanie omawianych wyżej zagadnień.

2. UŻYTA SYMBOLIKA I POJĘCIA WSTĘPNE

2.1. Operator różniczkowy

W pracy niniejszej używać będziemy symboliki operatorowej, której znaczenie określa następująca definicja.

Definicja. Niech dane będą dwa dowolne wielomiany:

$$\begin{aligned} Q(z) &= a_0 z^n + \dots + a_n, \\ R(z) &= b_0 z^m + \dots + b_m, \end{aligned} \quad (1)$$

przy czym chociaż jeden ze współczynników wielomianu $R(z)$ jest różny od zera. Niech dalej funkcja $u(t)$ będzie określona i n -krotnie różniczkowalna w pewnym dowolnym przedziale L . Wówczas każda funkcję $v(t)$, spełniającą w tym przedziale równanie

$$b_0 \frac{d^m}{dt^m} v(t) + \dots + b_m v(t) = a_0 \frac{d^n}{dt^n} u(t) + \dots + a_n u(t) \quad (2)$$

będziemy oznaczali jednym i tym samym symbolem

$$v(t) = \frac{Q(p)}{R(p)} u(t). \quad (3)$$

W przypadku gdy $R(z) \equiv 1$, będziemy zamiast $\frac{Q(p)}{1} u(t)$ pisać $Q(p) u(t)$.

Z powyższej definicji otrzymujemy z łatwością

$$p u(t) = \frac{d}{dt} u(t), \quad \frac{1}{p} u(t) = \int u(t) dt + c, \quad \frac{p}{p} u(t) = u(t) + c.$$

W dalszym ciągu korzystać będziemy z następującego twierdzenia ¹⁾.

Twierdzenie. Niech $Q(z)$ będzie dowolnym wielomianem bez pierwiastków wielokrotnych. Wówczas każde rozwiązanie równania

$$Q(p) u(t) = 0 \quad (4)$$

można wyrazić w postaci

$$u(t) = \sum C_k e^{\lambda_k t},$$

gdzie λ_k przedstawiają kolejno wszystkie pierwiastki równania $Q(z) = 0$, c_k zaś są to pewne stałe.

Równanie $Q(z) = 0$ nazywamy równaniem charakterystycznym równania (4).

Wszystkie dalsze rozważania pracy poniższej ograniczymy do przedziału $0 \leq t \leq T$; ponadto założymy, że wszystkie rozpatrywane funkcje są ciągłe w tym przedziale i dostatecznie wiele razy różniczkowalne wewnątrz tego przedziału.

2.2. Sieci elektryczne liniowe ²⁾

Symbolika określona w poprzednim rozdziale nadaje się szczególnie dobrze do wyrażania zależności w sieciach elektrycznych liniowych. Tak np. prąd $i(t)$ oraz napięcie $u(t)$ w kondensatorze o pojemności C bądź w cewce o indukcyjności L związane są odpowiednio równaniami:

$$u(t) = \frac{1}{pC} i(t) \quad \text{bądź} \quad u(t) = pL i(t).$$

¹⁾ Dowód tego twierdzenia można znaleźć w każdym podręczniku, zawierającym elementy teorii równań różniczkowych.

²⁾ Uzasadnienie podanych w tym rozdziale zależności znaleźć można w każdym obszerniejszym podręczniku teorii prądów zmiennych.

Ogólnie biorąc, w sieciach liniowych związek między prądem i napięciem w danej gałęzi wyraża się zależnością

$$u(t) = Z(p) i(t),$$

gdzie operator $Z(p)$ otrzymujemy z funkcji wyrażającej impedancję tej gałęzi $Z(i\omega)$ przez zastąpienie wielkości $i\omega$ symbolem p .

Rozpatrzmy teraz sieć elektryczną składającą się z elementów skupionych i liniowych, a więc np. z oporów, kondensatorów, cewek i lamp elektronowych pracujących w liniowym zakresie swoich charakterystyk. Załóżmy, że w sieci tej wyróżnić można kolejno $n+1$ ($n \geq 1$) różnych biegunów, z których n pierwszych oznaczymy jako bieguny wejściowe (wejścia), pozostały zaś jako biegun wyjściowy (wyjście). Umówmy się dalej, że wszystkie rozpatrywane napięcia są odniesione do pewnego ustalonego potencjału, np. potencjału ziemi. Niech wreszcie sieć ta ma tę właściwość, że gdy napięcia na wszystkich biegunach wejściowych są stale równe zeru, to również napięcie na biegunie wyjściowym jest stale równe zeru. Wówczas, jeśli na wejścia takiej sieci przyłożymy kolejno napięcia o przebiegach $u_1(t), \dots, u_n(t)$, to napięcie na wyjściu wyrazi się wzorem

$$u_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^n W_k(p) u_k(t),$$

gdzie $W_k(z)$ są to pewne funkcje wymierne zmiennej z o współczynnikach rzeczywistych, zależne jedynie od rodzaju sieci, a więc niezależne od napięć $u_k(t)$.

Dowód tego twierdzenia opiera się na tym, że przebiegami napięć w określonych powyżej sieciach rządzą układy równań różniczkowych liniowych o współczynnikach stałych i rzeczywistych, w których to układach $u_1(t) \dots u_n(t)$ występują jako funkcje wzbudzające.

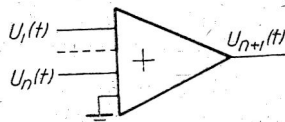
Operatory $W_k(p)$ otrzymać możemy z funkcji $W_k(i\omega)$, określających przenoszenie w stanie ustalonym napięć sinusoidalnych o częstotliwości $f = \omega/2\pi$, przez położenie symbolu p zamiast wielkości $i\omega$.

2.3. Układy sumujące i całkujące

Układy sumujące i całkujące elektronowych analizatorów równań różniczkowych należą do klasy sieci, scharakteryzowanych w rozdziale poprzednim.

W układach sumujących, których symbol przedstawia rys. 1, w przypadku idealnego ich działania napięcie wyjściowe w funkcji napięć wejściowych powinno wynosić

$$u_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^n b_k u_k(t), \quad (5)$$



Rys. 1. Symbol układu sumującego.

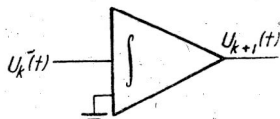
gdzie b_k są to pewne z góry dobrane parametry stałe. W rzeczywistości jednak wielkości b_k umiemy dobrać tylko z ograniczoną dokładnością, funkcje zaś charakteryzujące przenoszenie różnią się nieco od stałych. Tak więc ściśle biorąc, na wyjściu układu sumującego otrzymujemy napięcie

$$u_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^n b_k (1 + s_k) [1 + S(p)] u_k(t),$$

gdzie $b_k (1 + s_k)$ przedstawia rzeczywistość dobraną wielkość zamiast b_k , $b_k (1 + s_k) [1 + S(z)]$ zaś — rzeczywistość istniejące funkcje charakteryzujące przenoszenie. W dalszym ciągu zakładamy będziemy stałe, że wszystkie funkcje $S_k(z)$ są identyczne i równe $S(z)$, a więc, że

$$u_{n+1}(t) = [1 + S(p)] \sum_{k=1}^n b_k (1 + s_k) u_k(t). \quad (6)$$

Jak wynika z poprzedniego rozdziału, funkcja $S(z)$ jest funkcją wymierną o współczynnikach rzeczywistych.



Rys. 2. Symbol układu całkującego.

Podobnie w układach całkujących, których symbol przedstawia rys. 2, w przypadku idealnego ich działania napięcie wyjściowe powinno wynosić

$$u_{k+1}(t) = \frac{1}{pT} u_k(t). \quad (7)$$

Wielkość $\frac{1}{T}$ nazywa się parametrem całkowania.

W rzeczywistych układach całkujących napięcie wyjściowe jest

$$u_{k+1}(t) = \frac{1}{pT} (1 + c_{k+1}) [1 + C_{k+1}(p)] u_k(t), \quad (8)$$

gdzie wielkość $(1 + c_{k+1})/T$ przedstawia rzeczywistość dobrany parametr, funkcja zaś $(1 + c_{k+1}) [1 + C_{k+1}(z)]/zT$ — rzeczywistość istniejąca

funkcję charakteryzującą przenoszenie. W dalszym ciągu zakładając będziemy, że wszystkie funkcje $C_{k+1}(z)$ rozpatrywanych układów całkujących są identyczne i równe $C(z)$. Funkcja ta, podobnie jak $S(z)$, jest funkcją wymierną o współczynnikach rzeczywistych.

Kres górny $|s_k|$ oraz $|c_k|$ jest w praktyce wyznaczony dokładnością używanych oporów, potencjometrów oraz kondensatorów i wynosi przeciętnie od 0,1% do 2%, a więc jest liczbą znacznie mniejszą od jedności. Również kres górny $|S(z)|$ oraz $|C(z)|$ w pewnym obszarze z powinien być mały w porównaniu z jednością, jak to wyniknie z dalszych rozważań niniejszej pracy.

Zjawisko odkształcenia się napięcia wyjściowego wskutek tego, że $S(z)$ i $C(z)$ nie są identycznie równe zero, określamy mianem *zniekształceń liniowych*, funkcje zaś te — *funkcjami określającymi zniekształcenia liniowe*.

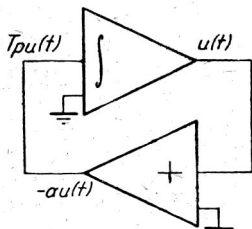
Zadaniem niniejszej pracy jest określenie warunków, jakie muszą spełniać funkcje określające zniekształcenia liniowe układów sumujących i całkujących na to, aby otrzymać dostateczną dokładność uzyskiwanych rozwiązań.

2. 4. Przykłady

Podamy teraz dwa przykłady objaśniające zasadę działania elektronowego analizatora równań różniczkowych oraz ilustrujące wpływ niedokładnego ustawienia parametrów i zniekształceń liniowych na dokładność otrzymywanych rozwiązań.

Weźmy pod uwagę równanie

$$\left(p + \frac{\alpha}{T}\right)u(t) = 0 \quad (9)$$



Rys. 3. Schemat układu do rozwiązywania równania (9).

Ważnym jest, aby napięcie wejściowe układu całkującego wynosiło $Tpu(t)$, napięcie zaś wyjściowe układu sumującego wynosi — $\alpha u(t)$. Ponieważ oba te napięcia muszą być równe, otrzymujemy równanie (9).

Jeżeli w chwili $t=0$ było $u(0) = U$, to

$$u(t) = Ue^{-\alpha \frac{t}{T}}$$

Założmy teraz, że układ sumujący działa w dalszym ciągu idealnie, natomiast przenoszenie układu całkującego wyraża się wzorem

$$u_2(t) = \frac{1}{pT} (1+c) (1+ap) u(t).$$

W przypadku tym zakładając jak poprzednio $u(0) = U$, otrzymamy przebieg napięcia wyrażony funkcją

$$\ddot{u}(t) = U e^{-\alpha' \frac{t}{T}},$$

gdzie

$$\alpha' = \frac{1+c}{1+\alpha(1+c)a} \alpha.$$

Widzimy więc, że niedokładne dobranie współczynnika oraz istnienie zniekształceń liniowych w układzie całkującym mogą posiadać jakościowo ten sam wpływ, a mianowicie powodować odkształcenie się pierwiastka równania charakterystycznego równania

(9) z wartości $\frac{-\alpha}{T}$ na $\frac{-\alpha'}{T}$

W przypadku tym możemy więc błąd spowodowany zniekształceniami liniowymi podciągnąć pod błąd spowodowany niedokładnością dobrania współczynnika α , zakładając np.

$$\frac{1+c}{1+\alpha(1+c)a} = 1+c'$$

w miejsce zaś współczynnika α został dobrany współczynnik $\alpha(1+c')$ i traktując sprawę tak, jak gdyby układ całkujący działał idealnie,

Rozpatrzmy teraz równanie

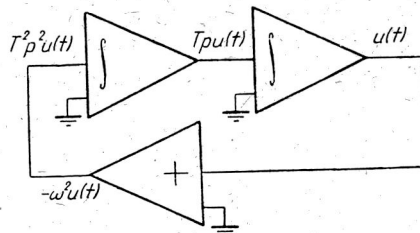
$$\left(p^2 + \frac{\omega^2}{T^2}\right) u(t) = 0 \quad (10)$$

dla rozwiązania którego zestawiono układy liczące jak na rys. 4. Założmy, że układy całkujące przenoszą idealnie, natomiast układ sumujący przesyła według zależności

$$u_2(t) = -\omega^2 (1+ap) u_1(t) \quad (|a| \ll T).$$

Wówczas przy warunkach początkowych $u(0) = U$, $u'(0) = 0$ zamiast dokładnego rozwiązania równania (10):

$$u(t) = U \cos \omega \frac{t}{T}$$



Rys. 4. Schemat układu służącego do rozwiązywania równania (10).

otrzymujemy napięcie o przebiegu równym w przybliżeniu

$$\tilde{u}(t) = U e^{-\frac{1}{2} a \frac{\omega^2}{T^2} t} \cos \omega \frac{t}{T}.$$

W przypadku tym pierwiastek charakterystyczny równania (10) odchylił się z wielkości $\lambda = i \frac{\omega}{T}$ na $\lambda + \Delta\lambda = i \frac{\omega}{T} - \frac{1}{2} a \frac{\omega^2}{T^2} = i \frac{\omega}{T} \left(1 + i \frac{a \omega}{2 T} \right)$. Możemy stąd wyciągnąć dwa wnioski:

- a) Przyrost $\Delta\lambda$ nie da się sprowadzić, jak w przypadku poprzednim, do błędu nastawienia współczynnika ω^2 lub parametru układu całkującego $\frac{1}{T}$. Otrzymana funkcja jest więc rozwiązaniem w pewnym sensie jakościowo innego równania;
- b) Nawet bardzo mała wartość a może spowodować znaczny błąd. Przyjmijmy np. $\omega = 2\pi \cdot 10$, co odpowiada dziesięciu oscylacjom sinusoidy w ciągu rozpatrywanego okresu (por. rys. 7); wówczas przy $a = 0,0001 T$, a więc „stałej czasu błędu“ mniejszej dziesięć tysięcy razy od czasu trwania tego okresu, po czasie $t = T$ amplituda drgań zmniejszy się o blisko 20%.

Jak z tego widać, zniekształcenia liniowe mogą spowodować znaczne błędy o szczególnie niekorzystnym charakterze.

2. 5. Symbol $O^2(z_1 \cdots z_n)$

Aby dalsze rozważania ograniczyć do istotnych własności pewnych wyrażeń, wprowadzimy następujący symbol, wzorowany na znanym symbolu O .

Definicja. Każdą funkcję $\varphi(z_1 \dots z_n)$, którą przy pewnym naturalnym n można przedstawić w postaci

$$\sum_{i, j=1}^n a_{ij} (z_1 \cdots z_n) z_i z_j, \quad (11)$$

gdzie współczynniki a_{ij} dążą do skończonej granicy, gdy którakolwiek ze zmiennych z dąży do zera, oznaczać będziemy jednym i tym samym symbolem

$$\varphi(z_1 \cdots z_n) = O^2(z_1 \cdots z_n). \quad (12)$$

Jako przykład zastosowania powyższego symbolu przytoczymy następującą modyfikację formuły przybliżonej Newtona, z której korzystać będziemy w przyszłości.

Twierdzenie. Załóżmy, że funkcja $\varphi(z)$ oraz $\varepsilon(z)$ posiadają rozwinięcie Taylora w pewnym otoczeniu punktu λ , punkt $\lambda + \Delta\lambda$ należy również do tego otoczenia oraz spełnione są zależności:

$$\varphi(\lambda) = 0, \quad \varphi'(\lambda) \neq 0 \quad (13)$$

$$\varphi(\lambda + \Delta\lambda) + \varepsilon(\lambda + \Delta\lambda) = 0.$$

Wówczas:

$$\Delta\lambda = -\frac{\varepsilon(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} + O^2[\Delta\lambda; \varepsilon'(\lambda)]. \quad (14)$$

Dowód. Na podstawie przyjętych założeń mamy:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda + \Delta\lambda) + \varepsilon(\lambda + \Delta\lambda) &= \varphi(\lambda) + \varepsilon(\lambda) + [\varphi'(\lambda) + \varepsilon'(\lambda)]\Delta\lambda + \\ &+ [\varphi''(\lambda) + \varepsilon''(\lambda)]\frac{(\Delta\lambda)^2}{2} + \dots, \end{aligned}$$

a więc

$$0 = \varepsilon(\lambda) + \varphi'(\lambda)\Delta\lambda + \varepsilon'(\lambda)\Delta\lambda + O^2(\Delta\lambda)$$

Mamy stąd

$$\Delta\lambda = -\frac{\varepsilon(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} - \frac{\varepsilon'(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}\Delta\lambda + O^2(\Delta\lambda)$$

a uwzględniając, że

$$-\frac{\varepsilon'(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}\Delta\lambda + O^2(\Delta\lambda) = O^2[\varepsilon'(\lambda); \Delta\lambda]$$

otrzymujemy bezpośrednio wzór (11). Z wzoru tego wynika, że gdy wielkości $|\Delta\lambda|$ oraz $|\varepsilon'(\lambda)|$ są dostatecznie małe, to $\Delta\lambda$ równa się w przybliżeniu $-\varepsilon(\lambda)/\varphi'(\lambda)$. W przypadku tym wielkość $\Delta\lambda$ nazywać będziemy *odchyleniem się pierwiastka λ pod wpływem funkcji $\varepsilon(z)$* .

3. ZASADNICZE TWIERDZENIA TEORII

3.1. Założenia ogólne

W pracy niniejszej będziemy rozpatrywali wpływ zniekształceń liniowych na dokładność rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych liniowych jednorodnych o współczynnikach stałych. Zniekształcenia nieliniowe pominiemy w rozważaniach; w praktyce nie odgrywają one większej roli, gdyż silne ujemne sprzężenia zwrotne czynią ich wielkość znikomo małą.

Można wykazać, że niezbyt wielkie zniekształcenia liniowe powodują błędy dwójakiego rodzaju. Pierwszy polega na tym, że do rozwiązania przybywają nowe składniki. Okazuje się jednak, że przy

wyłącznym używaniu układów całkujących i sumujących z pominięciem układów różniczkujących składniki te albo tak szybko znikają wobec tłumiącego działania układów całkujących na oscylacje wysokiej częstotliwości, albo tak wolno narastają, że istnienie ich nie ma praktycznego znaczenia. Dlatego też zajmować się będziemy jedynie błędami drugiego rodzaju, spowodowanymi odchyleniem się pierwiastków λ charakterystycznego równania danego równania o pewne wielkości $\Delta\lambda$.

Dla uproszczenia rachunków będziemy badali wpływ zniekształceń liniowych na jeden tylko składnik rozwiązania. Ścisłej mówiąc, przyjmować będziemy stale, że wartości początkowe dla danego równania są tak dobrane, że rozwiązanie można wyrazić w postaci¹⁾:

$$u(t) = U \operatorname{Re} \{ e^{\lambda t + i\varphi} \} = U e^{\frac{\alpha t}{T}} \cos \left(\omega \frac{t}{T} + \varphi \right), \quad (15)$$

gdzie U , α , ω , φ oznaczają pewne wielkości stałe rzeczywiste, przy czym $U \neq 0$. Powyższe rozwiązanie nazywać będziemy rozwiązaniem odpowiadającym pierwiastkowi równania charakterystycznego

$\lambda = \frac{1}{T} (\alpha + i\omega)$ danego równania.

Zgodnie z umową w rozdziale 1.1 wszystkie równania będziemy rozpatrywali w przedziale $0 \leq t \leq T$.

3.2. Określenie błędu δ

Niech ścisłym rozwiązaniem rozpatrywanego równania różniczkowego będzie funkcja

$$u(t) = U \operatorname{Re} \{ e^{\lambda t + i\varphi} \} = U e^{\frac{\alpha t}{T}} \cos \left(\omega \frac{t}{T} + \varphi \right). \quad (16)$$

Przypuśćmy dalej, że równanie to rozwiązywaliśmy na analizie torze i jako rozwiązanie otrzymaliśmy napięcie o przebiegu

$$\tilde{u}(t) = U \operatorname{Re} \{ e^{(\lambda + \Delta\lambda)t + i\varphi} \} = U e^{(\alpha + \Delta\alpha)\frac{t}{T}} \cos \left[(\omega + \Delta\omega) \frac{t}{T} + \varphi \right]. \quad (17)$$

Otrzymane więc rozwiązanie obarczone jest pewnym błędem; powodem tego błędu jest to, że zamiast dokładnej wartości $\lambda = \frac{1}{T} (\alpha + i\omega)$

¹⁾ Symbole $\operatorname{Re}(z)$ oraz $\operatorname{Im}(z)$ oznaczają odpowiednio współrzędną rzeczywistą i współrzędną urojoną liczby zespolonej z . Mamy więc $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$.

pierwiastka równania charakterystycznego danego równania różniczkowego otrzymuje się wartość różniącą się od λ o $\Delta\lambda = \frac{1}{T}(\Delta\alpha + i\Delta\omega)$.

Wielkość błędu jaki popełnia się przyjmując zamiast funkcji $u(t)$ funkcję $\tilde{u}(t)$ można określić bardzo różnorodnie. Pożądanym jest jednak aby definicja wielkości błędu spełniała następujące warunki:

1. Wielkość ta powinna wyrażać się za pomocą jednej tylko liczby rzeczywistej, którą oznaczać będziemy przez δ .
2. Znajomość δ oraz funkcji $\tilde{u}(t)$, którą założymy ograniczoną i nie równą identycznie zeru, powinna wystarczać, aby dla każdego t można było podać granicę (skończoną) przedziału, w którym zawiera się $u(t)$.

Warunki te spełniałaby następująca definicja

$$\delta = \frac{\text{kres górny } |\tilde{u}(t) - u(t)|}{\text{kres górny } |\tilde{u}(t)|} \quad (18)$$

jednak przy użyciu tej definicji uzyskalibyśmy wzory bardzo skomplikowane. Dlatego też definicję tę nieco zmienimy, co pozwoli na znaczne uproszczenie rachunków.

Definicja. Jeżeli funkcje $u(t)$ i $\tilde{u}(t)$ wyrażają się wzorami (16) i (17), wówczas błędem, jaki popełnia się przyjmując zamiast funkcji $u(t)$ funkcję $\tilde{u}(t)$, będziemy nazywali wielkość δ określoną wzorem

$$\delta = \frac{\text{kres górny } |\tilde{u}(t) - u(t)|}{\text{kres górny } |Ue^{(\alpha + \Delta\alpha)\frac{t}{T}}|} \quad (19)$$

Przy zachodzeniu powyższej równości można też powiedzieć, że funkcja $\tilde{u}(t)$ różni się od funkcji $u(t)$ nie więcej niż o δ .

W przypadku $\omega = \Delta\omega = 0$ obydwie definicje pokrywają się ze sobą; gdy $\omega \neq 0$, różnica polega na tym, że w mianowniku przyjmuje się kres górny „obwiedni drgań“ zamiast kresu górnego samych drgań.

Twierdzenie. Przy definicji danej wzorem (18) jest

$$\delta \leq T |\Delta\lambda| + O^2(\Delta\lambda). \quad (20)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\text{kres górny } |\operatorname{Re}\{Ue^{(\lambda + \Delta\lambda)t + i\varphi}\} - \operatorname{Re}\{Ue^{\lambda t + i\varphi}\}|}{\text{kres górny } |Ue^{(\alpha + \Delta\alpha)\frac{t}{T}}|} = \\ &= \frac{\text{kres górny } |U| \cdot |\operatorname{Re}\{e^{(\lambda + \Delta\lambda)t + i\varphi}(1 - e^{-\Delta\lambda t})\}|}{\text{kres górny } |U| \cdot |e^{(\alpha + \Delta\alpha)t}|} \leq \end{aligned}$$

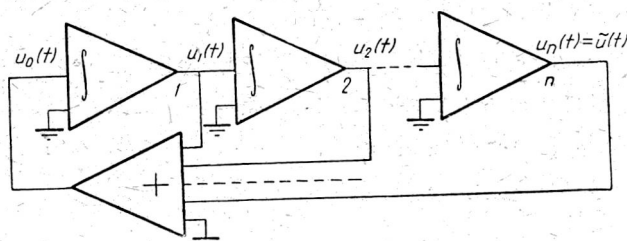
$$\begin{aligned} &\leq \frac{\text{kres g\o rny } |e^{(\lambda+\Delta\lambda)t}| \cdot |1 - e^{-\Delta\lambda t}|}{\text{kres g\o rny } |e^{(\lambda+\Delta\lambda)t}|} \leq \\ &\leq \text{kres g\o rny } |1 - e^{-\Delta\lambda t}| \leq |\Delta\lambda| T + O^2(\Delta\lambda). \end{aligned}$$

3.3. Określenie pseudo rozwiązania. Odchylenie się pierwiastka λ na skutek niedokładnego dobrania parametrów

Twierdzenie I. Załóżmy, że w celu rozwiązania równania

$$\left[p^n + \frac{b_1}{T} p^{n-1} + \dots + \frac{b_n}{T^n} \right] u(t) = \varphi(p) u(t) = 0. \quad (21)$$

zestawiliśmy układ, przedstawiony na rys. 5, w którym układy liczące nie dają zniekształceń liniowych, tj. $S(z) \equiv C(z) \equiv 0$; wobec



Rys. 5. Schemat układu służącego do rozwiązywania równania (21).

tego błędy powstają wyłącznie na skutek niedokładnego dobrania parametrów, przy czym $|s_k| < 1$ oraz $|c_k| < 1$. Przy tych założeniach rzeczywisty przebieg napięcia $\tilde{u}(t)$ będzie spełniać równanie

$$\left[p^n + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} p^{n-k} (1 + s_k) (1 + c_1) \dots (1 + c_k) \right] \tilde{u}(t) = 0. \quad (22)$$

Dowód. Przy oznaczeniach przyjętych na rys. 5, stosownie do wzorów (6) i (8) i wobec $S(z) \equiv C(z) \equiv 0$ mamy

$$u_{k+1}(t) = \frac{1}{pT} (1 + c_{k+1}) u_k(t) \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (23)$$

oraz

$$u_0(t) = - \sum_{k=1}^n b_k (1 + s_k) u_k(t). \quad (24)$$

Z równania (23) otrzymujemy

$$u_k(t) = \frac{pT}{1+c_{k+1}} u_{k+1}(t) = \frac{(pT)^{n-k}}{(1+c_{k+1}) \cdots (1+c_n)}.$$

Podstawiając powyższe wartości do wzoru (24) otrzymujemy jako równanie różniczkowe funkcji $\tilde{u}(t) = u_n(t)$ równanie przedstawione wzorem (21).

Przyjmijmy teraz następującą definicję.

Definicja. Pseudo-rozwiazaniem z dewiacją κ ($\kappa > 0$) równania danego wzorem (21) będziemy nazywali każde rozwiązanie równania, danego wzorem (22), gdy spełniane są warunki

$$|s_k| < \kappa, \quad |c_k| < \kappa, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

Ponieważ parametry równań możemy dobierać w analizatorze jedynie z ograniczoną dokładnością, gdyż są one z zasady wyznaczone za pośrednictwem odpowiednich wielkości fizycznych (np. stosunkiem oporów), przeto o przebiegach uzyskanych za pomocą analizatora przy założeniu braku wszelkich zniekształceń powiedzieć możemy w ogólności tylko tyle, że przedstawiają one pseudo-rozwiazania zadanych równań. Pseudo-rozwiazania te tym lepiej zbliżają się do rozwiązań, im mniejsza jest dewiacja κ , czyli stała występująca w nierównościach (25).

Twierdzenie II. Jeżeli równanie (22) funkcji $\tilde{u}(t)$ napiszemy w postaci

$$[\varphi(p) + \varepsilon(p)] \tilde{u}(t) = 0 \quad (26)$$

to uwzględniając równanie (21) otrzymamy

$$\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} z^{n-k} (s_k + c_1 + \dots + c_k) + O^2(s_1 \dots s_n c_1 \dots c_n). \quad (27)$$

Dowód, którego rachunkowe szczegóły pominiemy, polega na porównaniu równań (21), (22) i (26).

Twierdzenie III. Przyjmijmy założenia twierdzenia I i załóżmy dodatkowo, że szukamy rozwiązania, odpowiadającego pierwiastkowi równania charakterystycznego λ dla którego $\varphi'(\lambda) \neq 0$ (por. rozdział 3.1). Wówczas odchylenie się $\Delta\lambda$ pierwiastka równania charakterystycznego λ spowodowane niedokładnym dobraniem parametrów wynosi:

$$\Delta\lambda = -\frac{1}{\varphi'(\lambda)} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} (s_k + c_1 + \dots + c_k) + O^2(s_1 \dots s_n c_1 \dots c_n). \quad (28)$$

Dowód, którego rachunkowe szczegóły pominiemy, polega na zastosowaniu równości (14) w przypadku gdy $\varphi(z)$ określone jest przez równanie (21) $\varepsilon(z)$ zaś — przez równanie (27).

3. 4. Twierdzenie o odchyleniu się pierwiastka λ wskutek zniekształceń liniowych

Twierdzenie. Załóżmy, że w celu rozwiązania równania (21) zestawiliśmy układ przedstawiony na rys. 5 i szukamy rozwiązania odpowiadającego pierwiastkowi równania charakterystycznego λ , przy czym $\varphi'(\lambda) \neq 0$ oraz λ nie jest biegunem ani funkcji $S(z)$ ani $C(z)$. Załóżmy dalej, że parametry układów liczących udało się nam ustawić zupełnie dokładnie, tzn. $s_k = c_k = 0$, wobec czego uwzględniamy jedynie błędy spowodowane zniekształceniami liniowymi. Przy tych założeniach otrzymamy odchylenie się pierwiastka λ o wielkość

$$\Delta\lambda = \lambda C(\lambda) \frac{\lambda^n}{\varphi'(\lambda)} + S(\lambda) + O^2[S(\lambda)C(\lambda)S'(\lambda)C'(\lambda)\Delta\lambda]. \quad (29)$$

Dowód. Przy oznaczeniach przyjętych na rys. 5 mamy więc

$$u_{k+1}(t) = \frac{1}{pT} [1 + C(p)] u_k(t)$$

oraz

$$u_0(t) = - \sum_{k=1}^n b_k [1 + S(p)] u_k(t).$$

Wzory powyższe mają formalnie tę samą budowę co wzory (23) oraz (24) z tą różnicą, że zamiast stałych s_k oraz c_k występują symbole $S(p)$ oraz $C(p)$. Stosując więc podobne przekształcenia jak w rozdziale 3.3 otrzymujemy analogiczne do wzoru (22)

$$\left\{ p^n + \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} p^{n-k} [1 + S(p)] [1 + C(p)]^k \right\} \tilde{u}(t) = [\varphi(p) + \varepsilon(p)] \tilde{u}(t) = 0$$

oraz analogicznie do wzoru 27)

$$\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} z^{n-k} [S(z) + kC(z)] + O^2[S(z)C(z)].$$

Stosując teraz równanie (14) otrzymujemy

$$\Delta\lambda = \frac{-1}{\varphi'(\lambda)} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} [S(\lambda) + kC(\lambda)] + O^2[S(\lambda)C(\lambda)S'(\lambda)C'(\lambda)\Delta\lambda].$$

Wobec $\varphi(\lambda) = O$ i przy oznaczeniach jak w równaniu (21) zachodzą następujące równości:

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} = \varphi(\lambda) - \lambda^n = -\lambda^n, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} &= n \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} - \sum_{k=1}^n (n-k) \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} = \\ &= -n\lambda^n - \lambda [\varphi'(\lambda) - n\lambda^{n-1}] = -\lambda\varphi'(\lambda). \end{aligned} \quad (31)$$

W oparciu o powyższe związki otrzymujemy już łatwo wzór (29).

Jednym z ciekawszych wniosków udowodnionego powyżej twierdzenia jest to, że $\Delta\lambda$ zależy od wartości $S(z)$ i $C(z)$ tylko w punkcie λ występującym w rozwiązaniu, a nie zależy np. od zachowania się tych funkcji w pewnym „pasmie przenoszenia“. Następnie ze wzoru (29) widzimy, że błąd spowodowany funkcją $C(z)$ zależy tylko od λ , spowodowany zaś funkcją $S(z)$ zależy tylko od λ i $\varphi'(\lambda)$, a poza tym błędy te nie zależą od parametrów równania.

3.5. Twierdzenie o błędzie spowodowanym odchyleniem się pierwiastka λ na skutek zniekształceń liniowych

Twierdzenie. Przyjmijmy założenia twierdzenia rozdziału 3.4 oraz załóżmy dodatkowo, że λ leży w określonym obszarze B zmiennej z oraz że w obszarze tym przy pewnych liczbach dodatnich δ_s oraz δ_c spełnione są nierówności

$$|zS(z)| < \delta_s, \quad |zC(z)| < \delta_c. \quad (32)$$

Otrzymana wówczas za pomocą analizatora funkcja $\tilde{u}(t)$ różni się od ścisłego rozwiązania równania (21) nie więcej niż o wielkość

$$\delta_c + \left| \frac{\lambda^{n-1}}{\varphi'(\lambda)} \right| \delta_s + O^2[S(\lambda)C(\lambda)S'(\lambda)C'(\lambda)\Delta\lambda]. \quad (33)$$

Dowód tego twierdzenia wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedniego paragrafu oraz wzoru (20).

U w a g a.

Warunki (32) byłyby również konieczne dla zachowania tezy twierdzenia, gdybyśmy przyjęli, że wielkość $\lambda^{n-1}/\varphi'(\lambda)$ przy danym λ może przyjmować dowolne wartości za wyjątkiem 0 w zależności od obioru funkcji $\varphi(z)$. Ponieważ w praktyce wielkość ta może rzeczywiście przyjmować szeroki zakres wartości, wobec tego w praktyce możemy przyjąć warunki (32) również za konieczne.

3.6. Twierdzenie o błędzie spowodowanym odchyleniem się pierwiastka λ na skutek jednoczesnego wpływu błędów dobrania parametrów i zniekształceń liniowych

Twierdzenie poprzedniego rozdziału nie uwzględnia tego, że często błąd spowodowany zniekształceniami liniowymi można sprowadzić do błędu dobrania parametrów, jak np. w pierwszym przykładzie rozdziału 2.4. Dlatego też uzupełnimy go twierdzeniem następującym, które pozwoli w wielu przypadkach na uniknięcie nieuzasadnionych w praktyce ograniczeń.

Twierdzenie. Załóżmy, że w celu rozwiązania równania

$$\left[p^n + \frac{b_1}{T} p^{n-1} + \dots + \frac{b_n}{T^n} \right] u(t) = \varphi(p) u(t) = 0 \quad (34)$$

zestawiliśmy układ przedstawiony na rys. 5 i rozpatrujemy jedynie rozwiązanie odpowiadające pierwiastkowi λ , przy czym λ leży w określonym obszarze B płaszczyzny z . Załóżmy dalej, że układ sumujący i układy całkujące przenoszą według wzorów (6) oraz (8) przy czym stałe s_k i c_k oraz funkcje $S(z)$ i $C(z)$ spełniają w obszarze B przy pewnych liczbach dodatnich δ_s , δ_c , κ_1 , κ_2 , ($\kappa_1 + \kappa_2 < 1$) następujące nierówności:

$$|s_k| < \kappa_1, \quad |c_k| < \kappa_1, \quad (35)$$

$$\operatorname{Re}\{S(z)\} < \kappa_2, \quad |\operatorname{Re}\{C(z)\}| < \kappa_2, \quad (36)$$

$$T|z\operatorname{Im}\{S(z)\}| < \delta_s, \quad T|z\operatorname{Im}\{C(z)\}| < \delta_c. \quad (37)$$

Otrzymana wówczas za pomocą analizatora funkcja $\tilde{u}(t)$ różni się od pewnego pseudo-rozwiązania z dewiacją $\kappa_1 + \kappa_2$ równania (34) nie więcej niż o wielkość

$$\delta_c + \left| \frac{\lambda^{n-1}}{\varphi'(\lambda)} \right| \delta_s + O^2(\Delta x), \quad (38)$$

gdzie symbol Δx oznacza zespół wielkości

$$\Delta x = [s_1 \dots s_n c_1 \dots c_n \operatorname{Re} \{S(\lambda)\} \operatorname{Re} \{C(\lambda)\} S(\lambda) C(\lambda) S'(\lambda) C'(\lambda) \Delta\lambda_1 \Delta\lambda_2]. \quad (39)$$

Znaczenie liczb $\Delta\lambda_1$ i $\Delta\lambda_2$ podane zostanie w dowodzie.

Dowód. Odchylenie się $\Delta\lambda$ pierwiastka charakterystycznego λ wskutek błędów dobrania parametrów i zniekształceń liniowych wynosi

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & \frac{-1}{\varphi'(\lambda)} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} [s_k + c_1 + \dots + c_k + S(\lambda) + kC(\lambda)] + \\ & + O^2 [s_1 \dots s_n c_1 \dots c_n S(\lambda) C(\lambda) S'(\lambda) C'(\lambda) \Delta\lambda]. \end{aligned} \quad (40)$$

Wzór ten możemy otrzymać za pomocą tych samych przekształceń jakie wykonaliśmy w rozdziale 3.1 w celu uzyskania zależności (28) z tą tylko różnicą, że zamiast wzorów wyjściowych (23) i (24) zastosować należy podobne formalnie wzory (6) i (8).

Rozłóżmy we wzorze (34) wielkości $S(\lambda)$ i $C(\lambda)$ na składowe rzeczywiste i urojone, oznaczmy

$$s'_k = s_k + \operatorname{Re} \{S(\lambda)\}, \quad c'_k = c_k + \operatorname{Re} \{C(\lambda)\};$$

następnie rozłóżmy $\Delta\lambda$ na dwa składniki $\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = \Delta\lambda$ przy czym pierwszy składnik określimy wzorem

$$\Delta\lambda_1 = \frac{-1}{\varphi'(\lambda)} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} (s'_k + c'_1 + \dots + c'_k) + O^2 (s'_1 \dots s'_n c'_1 \dots c'_n), \quad (41)$$

gdzie O^2 przedstawia tę samą funkcję co funkcja O^2 we wzorze (28). Jak wynika z podanej w rozdziale 3.3 definicji i twierdzenia III odchylenie się $\Delta\lambda_1$, pierwiastka λ prowadzi do pseudo-rozwiązania z dziewięcią $\nu_1 + \nu_2$ równania (34), gdyż na podstawie (35) i (36)

$$|s'_k| < \nu_1 + \nu_2, \quad |c'_k| < \nu_1 + \nu_2.$$

Ze wzorów (40) i (41) obliczamy

$$\Delta\lambda_2 = \Delta\lambda - \Delta\lambda_1 = \frac{-1}{\varphi'(\lambda)} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{T^k} \lambda^{n-k} [i\operatorname{Im} \{S(\lambda)\} + ik\operatorname{Im} \{C(\lambda)\}] + O^2(\Delta x),$$

gdzie Δx jest symbolem, który jest dany wyrażeniem (39). Stosując przekształcenia (31) i (32) otrzymujemy

$$\Delta\lambda_2 = \lambda i\operatorname{Im} \{C(\lambda)\} + \frac{\lambda^n}{\varphi'(\lambda)} i\operatorname{Im} \{S(\lambda)\} + O^2(\Delta x). \quad (42)$$

Stosownie do wzoru (20) funkcja powstała z rozwiązania równania (34) wskutek odchylenia się pierwiastka charakterystycznego λ o wielkość $\Delta\lambda = \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2$ różni się od funkcji powstałej z tego rozwiązania wskutek odchylenia się pierwiastka λ o wielkość $\Delta\lambda_1$ nie więcej niż

$$T |\Delta\lambda_2| + O^2(\Delta\lambda_2) \leq \delta_e + \left| \frac{\lambda^{n-1}}{\varphi'(\lambda)} \right| \delta_s + O^2(\Delta x),$$

przy czym powyższą nierówność uzyskaliśmy na podstawie (37) i (42). Ponieważ jednak, jak wykazaliśmy poprzednio, odchylenie się pierwiastka λ o wielkość $\Delta\lambda_1$ prowadzi do pseudo-rozwiązania równania (34), tym samym otrzymujemy tezę twierdzenia.

U w a g a.

Podobnie jak dla twierdzenia rozdz. 3.5 można okazać, że warunki (35), (36) i (37) przy zachowaniu innych założeń są w pewnym sensie konieczne dla zachowania tezy powyższego twierdzenia. Weźmy np. równanie

$$\left[\left(p^2 + \frac{\omega_1^2}{T^2} \right) \left(p^2 + \frac{\omega_2^2}{T^2} \right) \right] u(t) = \varphi(p) u(t) = 0 \quad (43)$$

i jego rozwiązanie odpowiadające pierwiastkowi $\lambda = i \frac{\omega_1}{T}$:

$$u(t) = U \cos \omega_1 \frac{t}{T}.$$

Można wykazać, że błędy dobrania parametrów oraz części rzeczywiste $S(\lambda)$ i $C(\lambda)$, a więc wielkości, które nie wyprowadzają poza pseudo-rozwiązania równania (43), wpływają jedynie na zmianę wielkości ω_1 . Części urojone $S(\lambda)$ i $C(\lambda)$ powodują natychmiast to, iż otrzymana na analizatorze funkcja różni się od wszystkich pseudo-rozwiązań równania (43) o wartość nie mniejszą niż

$$T \left| \lambda \operatorname{Im} \{C(\lambda)\} + \frac{\lambda^n}{\varphi'(\lambda)} \operatorname{Im} \{S(\lambda)\} \right| + O^2(\Delta x),$$

gdzie pod znak O^2 należy podstawić zespół zmiennych danych wyrażeniem (39).

Przyjmując, że wielkość

$$\frac{\lambda^{n-1}}{\varphi'(\lambda)} = \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (44)$$

może przyjmować przy każdym ω_1 dowolne wartości rzeczywiste z wyjątkiem zera w zależności od obioru ω_2 , otrzymalibyśmy warunki (37) jako konieczne dla zachodzenia tezy twierdzenia. Ponieważ w praktyce wielkość (44) może przyjmować istotnie bardzo szeroki zakres wartości w zależności od obioru ω_2 , wobec tego w praktyce możemy przyjąć warunki (37) również jako konieczne.

4. ZASTOSOWANIE ZASADNICZYCH TWIERDZEŃ TEORII DO OSZACOWANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW LAURENTA FUNKCJI $S(z)$ I $C(z)$

4.1. Określenie zadań rozdziału 4

Zadaniem rozdziału 4 jest podanie w praktycznej formie i zgodnie z praktyką warunków, przy których spełnione są założenia twierdzenia rozdz. 3.5. lub twierdzenia rozdz. 3.6, a więc warunków na to, aby otrzymane błędy nie przekraczały określonej z góry wielkości. Przede wszystkim wyznaczony został obszar B , do którego powinniśmy i możemy stosować te twierdzenia. Następnie nierówności (32) lub (36) i (37) zastąpiono nierównościami, jakie powinny spełniać współczynniki rozwinięcia Laurenta funkcji $S(z)$ oraz $C(z)$, przez co uzyskano związki łatwo stosowalne w praktyce. Tak więc osiągnięto praktyczne wskazówki na to, aby teza twierdzenia rozdz. 3.5 lub teza twierdzenia rozdz. 3.6. została zachowana.

4.2. Wyznaczenie obszaru praktycznej stosowalności teorii

Do danych określających zakres stosowalności danego analizatora należy określenie takiego obszaru płaszczyzny zmiennej zespolonej, w którym powinny znajdować się pierwiastki równania charakterystycznego rozpatrywanego równania różniczkowego, jeżeli chcemy, aby błąd rozwiązania nie był zbyt duży.

Rozpatrzmy rozwiązanie, odpowiadające pierwiastkowi $\lambda = \frac{1}{T}(\alpha + i\omega)$, tj. funkcję

$$u(t) = U e^{\alpha \frac{t}{T}} \cos\left(\omega \frac{t}{T} + \varphi\right).$$

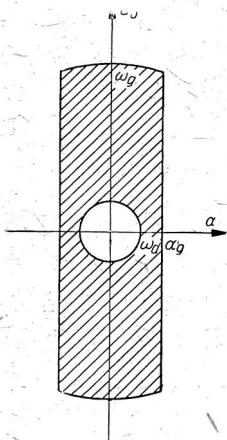
Jak widać, wielkość α wyznacza nam szybkość narastania oscylacji (przy $\alpha > 0$) lub szybkość ich tłumienia (przy $\alpha < 0$). Wielkość $f = \omega/2\pi$ oznacza ilość oscylacji w czasie od 0 do T .

W praktyce zakres stosowalności analizatora ograniczamy do rozwiązań o niezbyt wygórowanej ilości oscylacji i o niezbyt wielkiej szybkości narastania. Stosownie do tego przyjmujemy obie liczby dodatnie ω_g oraz α_g (omega górne oraz alfa górne) i dalsze rozważania ograniczymy do obszaru ograniczonego nierównościami

$$|\alpha + i\omega| \leq \omega_g \quad \text{i} \quad \text{jednocześnie} \quad |\alpha| \leq \alpha_g.$$

Przykładowo ω_g może wynosić 100, α_g zaś 2.

Nierówność $|\alpha| \leq \alpha_g$ ma na celu głównie ograniczenie α od góry, o ile bowiem α jest znacznie mniejsze od zera, to jak łatwo wywnioskować z równania (19) błąd staje się pomijalnie mały. Przypadku tego rozpatrywać nie będziemy, w celu zaś uproszczenia rachunków ograniczamy α również od dołu.



Rys. 6 Obszar B (zakreskowany), do którego odniesione są założenia rozdziału 4.

Drugim czynnikiem, ograniczającym obszar rozważań jest kwestia praktycznej przydatności wyrażeń (33) oraz (38). Wyrażenia te zależą od bliższej nie wypisanej wielkości O^2 i dlatego praktyczna ich wartość ogranicza się do przypadków gdy $|O^2|$ jest dostatecznie małe. Na to jednak, biorąc ogólnie, potrzeba w szczególności aby moduły wielkości $S(\lambda)$ i $C(\lambda)$ były dostatecznie małe.

Niestety, funkcje określające zniekształcenie w większości układów liczących posiadają bieguny w bliskim otoczeniu początku układu. Dlatego też z rozważań naszych wykluczmy pewne otoczenie początku układu o promieniu ω_d (omega dolne), wewnątrz którego $|S(z)|$ i $|C(z)|$ przybierają znacznie większe wartości. Ścisłych reguł, według których należy wyznaczać ω_d teoria poniższa nie podaje, nie jest to jednak specjalnie ważne, gdyż wyniki końcowe (podane w rozdz. 4. 4) można wyrazić bez użycia ω_d .

Reasumując, dalsze rozważania ograniczymy do obszaru B zmiennej z , określonego nierównościami

$$\begin{aligned} |\alpha + i\omega| &= |zT| \geq \omega_d, \\ |\alpha + i\omega| &\leq \omega_g \quad |\alpha| \leq \alpha_g, \\ (0 < \omega_d < \alpha_g < \omega_g). \end{aligned} \quad (45)$$

Obszar ten pokazano na rys. 6.

4.3. Założenia ogólne dotyczące funkcji $S(z)$ oraz $C(z)$

W dalszym ciągu przyjmiemy kilka założeń dotyczących funkcji $S(z)$ oraz $C(z)$. Założenia te są w praktyce warunkami koniecznymi na to, aby układy liczące nadawały się do zastosowań.

Z twierdzenia rozdz. 3.5 wynika, że na to, aby w obszarze B danym przez równanie (45) błędy spowodowane zniekształceniami liniowymi były niewielkie, np. rzędu paru procent, konieczne jest aby moduły $S(z)$ i $C(z)$ były w tym obszarze odpowiednio mniejsze od jedności. Warunek ten pociąga za sobą w praktyce, że funkcje $S(z)$ i $C(z)$ są ograniczone w pierścieniu

$$\omega_a \leq |\alpha + i\omega| \leq \omega_g, \quad \left[z = \frac{1}{T} (\alpha + i\omega) \right]. \quad (46)$$

Ponieważ $S(z)$ i $C(z)$ są ponadto funkcjami wymiernymi o współczynnikach rzeczywistych, jak to uzasadniono w rozdz. 2.3, możemy je przedstawić w pierścieniu (46) w postaci szeregu Laurenta o współczynnikach rzeczywistych¹⁾. Wobec tego, że dalsze rozważania dotyczące $S(z)$ i $C(z)$ będą zupełnie podobne, wspomniane szeregi oznaczać będziemy jednym i tym samym symbolem

$$S(z), \quad C(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n. \quad (47)$$

Warunek, że moduły $S(z)$ i $C(z)$ mają być w obszarze B znacznie mniejsze od jedności, pociąga za sobą w praktyce również i to, że szereg (47) jest w tym obszarze szybko zbieżny, tzn. wyrazy jego maleją b. szybko wraz ze wzrostem $|n|$. Z tego względu dla oszacowania błędów wystarczy uwzględnić w tym szeregu tylko kilka wyrazów o niewielkim $|n|$.

W dalszym ciągu przyjmować będziemy stale $a_0 = 0$. Nie ogranicza to ogólności rozważań, ponieważ w przypadku gdy w rozwinięciu np. $S(z)$ jest $a_0 \neq 0$ oraz $a_0 \neq -1$, wówczas funkcję $1 + S(z)$ możemy przedstawić w postaci:

$$1 + S(z) = (1 + a_0) \frac{1 + S(z)}{1 + a_0} = (1 + a_0) [1 + \bar{S}(z)],$$

gdzie wyraz \bar{a}_0 rozwinięcia Laurenta funkcji $\bar{S}(z)$ w pierścieniu (46) równa się zeru. Możemy więc w tym przypadku jako funkcję określić

¹⁾ Opis własności szeregu Laurenta, będącego uogólnieniem szeregu Taylora, znaleźć można w każdym podręczniku funkcji analitycznych.

lającą przenoszenie przyjąc $1 + \bar{S}(z)$, czynnik zaś $(1 + a_0)$ włączyć do błędu dobrania parametrów. Podobną zależność otrzymamy dla $C(z)$.

Reasumując, przyjmować będziemy w dalszym ciągu, że funkcje $S(z)$ i $C(z)$ są rozwijalne w pierścieniu (46) w szereg Laurenta (47), w którym $a_0 = 0$, powstałe zaś wyrazy maleją bardzo szybko wraz ze wzrostem $|n|$.

4.4. Oszacowanie współczynników Laurenta funkcji $S(z)$ i $C(z)$

Założmy, że rozpatrujemy rozwiązanie równania

$$\left[p^n + \frac{b_1}{T} p^{n-1} + \dots + \frac{b_n}{T^n} \right] u(t) = \varphi(p) u(t) = 0 \quad (48)$$

odpowiadające pierwiastkowi λ , leżącemu w obszarze B , określonym w rozdz. 4. 2, przy czym $\varphi'(\lambda) \neq 0$. Założmy dalej, że w tym celu zestawiliśmy układy liczące, których przenoszenie określają wzory podane w rozdz. 2. 3, funkcje zaś $S(z)$ i $C(z)$ spełniają warunki wypowiedziane w rozdz. 4. 3. Przy tych założeniach rozpatrzmy cztery następujące przypadki, które w praktyce wyczerpują niemal wszystkie spotykane możliwości.

Przypadek I.

Szeregi Laurenta funkcji $S(z)$ i $C(z)$ są tak szybko zbieżne, że wystarczy uwzględnić jedynie wyrazy o współczynnikach a_{-1} oraz a_1 , wpływ zaś powstałych wyrazów jest pomijalny. Jeżeli przy tym

$$s_k = c_k = 0, \quad |Ta_{-1}| < \delta, \quad \left| Ta_{-1} - \frac{\omega_g^2}{T} a_1 \right| < \delta, \quad (49)$$

gdzie δ oznacza δ_s lub δ_c w zależności od tego czy rozpatrujemy układ sumujący, czy całkujący, wówczas otrzymana za pomocą analizatora funkcja różni się od rozwiązania równania (48) nie więcej niż o wielkość

$$\delta_c + \left| \frac{\lambda^{n-1}}{\varphi'(\lambda)} \right| \delta_s + O^2 \left[S(\lambda) C(\lambda) S'(\lambda) C'(\lambda) \Delta \lambda \delta_s \delta_c \frac{\alpha}{\omega_g} \right]. \quad (50)$$

Dowód. Jeżeli w rozwinięciach Laurenta funkcji $S(z)$ i $C(z)$ pominiemy (tj. założymy równe zero) wszystkie współczynniki z wyjątkiem a_{-1} oraz a_1 , wówczas w obszarze B otrzymamy

$$T \left| z \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right| = T \left| a_{-1} + a_1 z^2 \right| = T \left| a_{-1} + a_1 \frac{(\alpha + i\omega)^2}{T^2} \right| \leq \\ \leq \left| a_{-1} - \frac{\omega^2}{T} a_1 \right| + \left| \frac{\alpha^2}{T} a_1 \right| + 2 \left| \frac{\alpha\omega}{T} a_1 \right|.$$

Pierwszy składnik otrzymanej sumy w przedziale $0 \leq \omega^2 \leq \omega_g^2$ osiąga maksimum przy $\omega = 0$ lub $\omega^2 = \omega_g^2$, które to maksimum ze względu na (49) jest mniejsze od δ . Składnik ten jest więc w przedziale $\omega_d^2 \leq \omega^2 \leq \omega_g^2$ tym bardziej mniejszy od δ . Dwa pozostałe składniki na zasadzie otrzymanego z nierówności (49) oszacowania

$$|a_1| < 2 \frac{\delta T^2}{\omega_g^2}$$

można zapisać jako $O^2 \left(\frac{\alpha}{\omega_g}; \delta \right)$. W ten sposób

$$T \left| z \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right| < \delta + O^2 \left(\frac{\alpha}{\omega_g}; \delta \right).$$

Jeżeli powyższą nierówność napiszemy osobno dla $S(z)$ i osobno dla $C(z)$, a następnie zastąpimy nimi nierówności (32), wówczas na zasadzie twierdzenia rozdz. 3. 5 otrzymamy nierówność (33) z tą różnicą, że pod znak O^2 należy wprowadzić jeszcze wielkość $\frac{\alpha}{\omega_g}$, δ_s oraz δ_c , a to daje już bezpośrednio tezę dowodzonego twierdzenia.

Przypadek II.

Szeregi Laurenta funkcji $S(z)$ i $C(z)$ są tak szybko zbieżne, że wystarczy uwzględnić jedynie wyrazy o współczynnikach a_{-1} , a_1 , a_2 , a_3 , wpływ zaś pozostałych wyrazów jest pomijalny. W przypadku tym górna granica przenoszenia częstotliwości jest na ogół niższa niż w przypadku I, co prowadzi w praktyce do mniejszych kosztów wykonania układów liczących. Załóżmy ponad to, że za pomocą odpowiednich elementów korekcyjnych udało się nam skompensować wpływ współczynnika a_1 , tj. osiągnęliśmy $a_1 = 0$. Jeśli przy tym

$$|Ta_{-1}| < \delta, \quad (51)$$

$$\left| Ta_{-1} \pm 2 \frac{\alpha_g \omega_g^2}{T^2} + \frac{\omega_g^4}{T^3} a_3 \right| < \delta, \quad (52)$$

$$\left| Ta_{-1} \pm \frac{\alpha_g \omega_g^2}{T^3} a_2 \right| < \delta, \quad (53)$$

$$|s_k| < \kappa_1, \quad |c_k| < \kappa_1, \quad (54)$$

$$|Re \{S(z)\}| < \kappa_2, \quad |Re \{C(z)\}| < \kappa_2, \quad (55)$$

wówczas otrzymana za pomocą analizatora funkcja różni się od pewnego pseudo-rozwiązania z dewiacją $\kappa_1 + \kappa_2$ równania (48) nie więcej niż o wielkość

$$\delta_c + \left| \frac{\lambda^{n-1}}{\varphi'(\lambda)} \right| \delta_s + O^2 \left(\Delta x \delta_s \delta_c \frac{\alpha}{\omega_g} \right), \quad (56)$$

gdzie Δx dane jest wzorem (39).

Dowód. Postępując podobnie jak w dowodzie przypadku I otrzymujemy:

$$\begin{aligned} T \left| zJm \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right\} \right| &= T \left| zJm \{ a_{-1} z^{-1} + a_2 z^2 + a_3 z^3 \} \right| = \\ &= \left| \frac{(\alpha + i\omega)\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right| \left| T a_{-1} - 2 \frac{\alpha\omega^2}{T^2} a_2 + \frac{\omega^4}{T^3} a_3 - \left(2 \frac{\alpha^3}{T^2} a_2 + \frac{3\alpha^4 + 2\alpha^2\omega^2}{T^3} a_3 \right) \right| \leq \\ &\leq \left| T a_{-1} - 2 \frac{\alpha\omega^2}{T^2} a_2 + \frac{\omega^4}{T^3} a_3 \right| + O^2 \left(\frac{\alpha}{\omega_g} \right). \end{aligned}$$

Wykażemy teraz, że przy zachodzeniu nierówności (51), (52) i (53) maksimum wartości osiąganych w obszarze B przez wyrażenie

$$\left| T a_{-1} - 2 \frac{\alpha\omega^2}{T^2} a_2 + \frac{\omega^4}{T^3} a_3 \right| \quad (57)$$

jest mniejsze od liczby δ . Zauważmy najpierw, że w obszarze B przy ustalonym ω wyrażenie (57) osiąga maksimum przy $\alpha = \alpha_g$ lub $\alpha = -\alpha_g$. Gdy założymy $\alpha = \alpha_g$, to maksimum wyrażenia (57) w przedziale $0 \leq \omega^2 \leq \omega_g^2$ jest osiągnięte albo na jednym z krańców, albo wewnątrz tego przedziału. Gdy jest osiągnięte na jednym z krańców przedziału, to na podstawie (51) i (52) wartość jego jest mniejsza od δ . Dla zbadania przypadku, gdy maksimum jest osiągnięte wewnątrz przedziału, przyrównajmy do zera pochodną funkcji stojącej między znakami bezwzględnej wartości w wyrażeniu (57) wziętą względem ω przy $\alpha = \alpha_g$. Otrzymujemy z łatwością, że przypadek ten zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$0 < \frac{a_2}{a_3} \alpha_g T < \omega_g^2,$$

a wówczas maksimum wyrażenia (57) przy $\alpha = \alpha_g$, jest osiągnięte przy

$$\omega_1^2 = \frac{a_2}{a_3} \alpha_g T,$$

wartość zaś tego maksimum wynosi

$$\left| T a_{-1} - \frac{\omega_1^2}{\omega_g^2} \frac{\alpha_g \omega_g^2}{T^3} a_2 \right|.$$

Na podstawie (51), (53) oraz $(\omega_1^2/\omega_g^2) < 1$ stwierdzamy łatwo, że otrzymana wielkość jest mniejsza od δ . Podobny wynik otrzymujemy zakładając $\alpha = -\alpha_g$. Tym samym wykazujemy, że w przypadku II w obszarze B

$$T \left| z \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right\} \right| < \delta + O^2 \left(\frac{\alpha}{\omega_g} \right).$$

Jeżeli powyższą nierówność napiszemy osobno dla $S(z)$ i $C(z)$, a następnie zastąpimy nimi nierówności (37), wówczas otrzymamy też twierdzenia rozdz. 3.6 z tą różnicą, że pod znak O^2 należy jeszcze wprowadzić wielkości δ_s , δ_c oraz α/ω_g . Wynik ten daje już bezpośrednio teżę dowodzonego twierdzenia.

U w a g a.

Gdybyśmy w przypadku II oparli się nie na twierdzeniu z rozdz. 3.6, lecz na twierdzeniu z rozdz. 5.5, to otrzymane wówczas ograniczenia wielkości współczynników byłyby znacznie ostrzejsze. Tak np. gdy $a_{-1} = a_3 = 0$, to warunki (52), (53) i (55) sprowadzają się do:

$$|a_2| < \frac{\delta}{2\alpha_g} \cdot \frac{T^2}{\omega_g^2}, \quad (58)$$

$$|a_2| < \kappa_2 \cdot \frac{T^2}{\omega_g^2}, \quad (59)$$

podczas gdy opierając się na twierdzeniu rozdz. 3.5 otrzymalibyśmy

$$|a_2| < \frac{\delta}{\omega_g} \cdot \frac{T^2}{\omega_g^2}, \quad (60)$$

czyli po prawej stronie nierówności wielkość zmniejszoną $\frac{\omega_g}{2\alpha_g}$ razy

w stosunku do (58) lub $\frac{\kappa_2}{\delta} \omega_g$ razy w stosunku do (59). Ponieważ

dzielniki te są w praktyce dość duże, np. rzędu dwudziestu, otrzymalibyśmy warunek wyrażający ograniczenie zbyt daleko idące wobec istnienia błędów doborania parametrów. Jak z tego widać, uwzględnienie w rozważaniach błędów doborania parametrów, np. przez wprowadzenie pojęcia pseudo-rozwiązania, jest z punktu widzenia praktyki konieczne.

Przypadek III.

Szeregi Laurenta funkcji $S(z)$ i $C(z)$ są szybko zbieżne, że wystarczy uwzględnić jedynie wyrazy o współczynnikach $a_{-2} a_{-1}$ oraz a_1 , wpływ zaś pozostałych wyrazów jest pomijalny. W przypadku tym dolna granica przenoszenia częstotliwości jest na ogół wyższa niż w przypadku I, co prowadzi w praktyce do mniejszych kosztów wykonania układów liczących. Załóżmy ponadto, że przy pomocy odpowiednich elementów korekcyjnych udało się nam skompensować wpływ współczynnika a_{-1} , tj. osiągnęliśmy $a_{-1} = 0$. Jeśli przy tym

$$\left| T^2 \frac{a_{-2}}{\omega_d} \right| < \delta, \quad (61)$$

$$\left| \omega_g^2 \frac{a_1}{T} \right| < \delta, \quad (62)$$

to otrzymana przy pomocy analizatora funkcja różni się od rozwiązania równania (48) nie więcej niż o wielkość

$$\delta_c + \left| \frac{\lambda^{-1}}{\varphi'(\lambda)} \right| \delta_s + O^2 \left[S(\lambda) C(\lambda) S'(\lambda) C'(\lambda) \delta_s \delta_s \frac{\omega_d}{\omega_g} \right]. \quad (63)$$

Dowód. Uwzględniając przyjęte założenia otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} T \left| z \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right| &= T \left| a_{-2} z^{-1} + a_1 z^2 \right| \ll \left(\frac{\omega_d}{|\alpha + i\omega|} + \frac{|\alpha + i\omega|^2}{\omega_g^2} \right) \ll \\ &\ll \left(1 + \frac{\omega_d}{\omega_g} \right) \delta = \delta + O^2 \left(\frac{\omega_d}{\omega_g} \delta \right). \end{aligned}$$

Pisząc otrzymaną nierówność osobno dla $S(z)$ i osobno dla $C(z)$ i zastępując nimi nierówności (32) w twierdzeniu rozdz. 3. 5, otrzymujemy nierówność (33) z tą różnicą, że pod znak O^2 należy wprowadzić jeszcze wielkości δ_s , δ_c oraz ω_d/ω_g . Wynik ten daje już bezpośrednio tezę dowodzonego twierdzenia.

Warunek (61) można też podać w innej postaci. W rozdz. 4. 2 wspominaliśmy, że rozważania nasze mają praktyczny sens tylko wtedy, gdy w rozpatrywanym obszarze B funkcja oznaczona w wyrażeniu (32) symbolem O^2 jest dostatecznie mała. Na to jednak potrzeba w szczególności, aby liczby

$$\left| S \left(\frac{\omega_d}{T} \right) \right| = V_s, \quad \left| C \left(\frac{\omega_g}{T} \right) \right| = V_c \quad (64)$$

były odpowiednio mniejsze od jedności. Przyjmując założenie rozpatrywanego przypadku i pomijając wielkość $a_1 \frac{\omega_d}{T}$ jako znikomo małą, otrzymujemy z (64)

$$\left| \frac{a_{-2}}{\omega_d^2} T^2 \right| = V, \quad (65)$$

gdzie V oznacza V_s lub V_c w zależności od tego rozpatrujemy $S(z)$, czy $C(z)$.

Z zależności (61) i (65) otrzymujemy następującą nierówność

$$|a_{-2} T^2| < \frac{\delta^2}{V}. \quad (66)$$

Warunki (61) i (66) mają charakter raczej przybliżonego oszacowania, gdyż trudno jest ustalić dokładną wartość ω_d lub V , jaką należy przyjąć w tych wzorach. Ponieważ jednak na zasadzie wzoru (29) wpływ funkcji $a_{-2} z^{-2}$ jest znaczny tylko dla bardzo małych z , przedstawia przypadki w praktyce zazwyczaj mało interesujące, przeto posiadanie ścisłego wzoru do oszacowania a_{-2} nie wydaje się konieczne.

Przypadek IV.

Szeregi Laurenta funkcji $S(z)$ i $C(z)$ są tak szybko zbieżne, że wystarczy uwzględnić jedynie wyrazy o współczynnikach a_{-2} , a_{-1} , a_1 , a_2 , oraz a_3 , wpływ zaś pozostałych wyrazów jest pomijalny. Załóżmy ponadto, że przy pomocy odpowiednich elementów korekcyjnych osiągnęlibyśmy $a_{-1} = a_1 = 0$. Jeśli przy tym

$$\left| T^2 \frac{a_{-2}}{\omega_d} \right| < \delta, \quad \left| 2 \frac{\alpha_g \omega_g^2}{T^2} a_2 - \frac{\omega_g^4}{T^3} a_3 \right| < \delta, \quad \left| \frac{\omega_g^4}{T^3} a_3 \right| < \delta, \quad (67)$$

$$|s_k| < \kappa_1, \quad |c_k| < \kappa_1, \quad |Re\{S(z)\}| < \kappa_2, \quad |Re\{C(z)\}| < \kappa_2, \quad (68)$$

wówczas otrzymana przy pomocy analizatora funkcja różni się od pewnego pseudo-rozwiązania z dewiacją $\kappa_1 + \kappa_2$ o wielkość nie większą niż

$$\delta_c + \left| \frac{\lambda^{n-1}}{\varphi'(\lambda)} \right| \delta_s + O^2(\Delta x \delta_s \delta_c \frac{\alpha}{\omega_g} \frac{\omega_d}{\omega_g}). \quad (69)$$

Dowód, analogiczny do dowodów w poprzednich przypadkach, pomijamy. Pierwszą z nierówności (67) możemy zastąpić nierównością (66).

U w a g a.

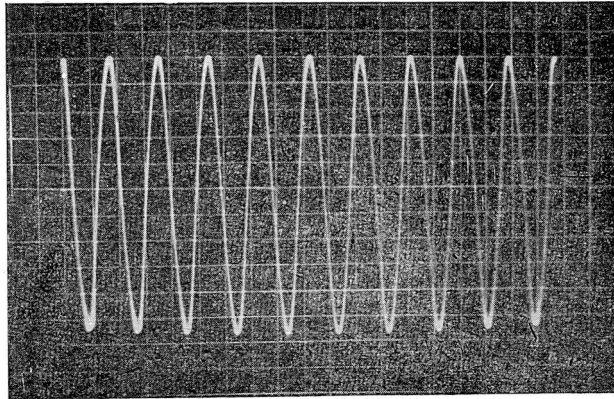
W rozdziale niniejszym podaliśmy szereg warunków dostatecznych, przy spełnieniu których zachodzą odpowiednie twierdzenia. Opierając się jednak na uwagach podanych w rozdziałach 3.5 i 3.6 można uzasadnić, że wymienione warunki są w praktyce również konieczne dla prawdziwości tych twierdzeń.

5. DANE DOŚWIADCZALNE I ZASTOSOWANIA PRAKTYCZNE

5.1. Porównanie wyników z danymi doświadczalnymi

W oparciu się między innymi o przedstawioną w pracy niniejszej teorię zaprojektowano, a następnie zbudowano układy sumujące i całkujące, które w użyciu dawały błędy nie większe niż przewidziane w niniejszej pracy. Gdy natomiast wprowadzono sztucznie określone zniekształcenia liniowe, otrzymano błędy rozwiązania zgodne ilościowo z przewidzianymi w przedstawionej teorii. W szczególności przeprowadzono następujące dwa doświadczenia.

Doświadczenie I.



Rys. 7. Oscylogram funkcji $u(t) = U \cos 2\pi 10 \frac{t}{T}$

Zestawiono precyzyjnie działające układy w celu rozwiązania równania

$$\left(p^2 + \frac{\omega^2}{T^2}\right)u(t) = 0; \quad u(0) = U; \quad u'(0) = 0 \quad (70)$$

i otrzymano niemal dokładnie przebieg

$$u(t) = U \cos \omega \frac{t}{T}. \quad (71)$$

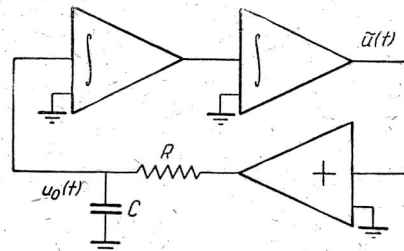
Przebieg ten, przy $\omega = 2\pi \cdot 10$ przedstawiony został na rys. 7; przedziałem zmienności t jest, jak wiemy, $0 \leq t \leq T$.

W dalszym ciągu na wyjściu układu sumującego włączono układ R—C jak to przedstawia rys. 8. Wobec tego przenoszenie układu sumującego łącznie z układem R—C wyraża się teraz wzorem

$$u_0(t) = -\omega^2 \frac{1}{1+pRC} \tilde{u}(t),$$

a więc dla

$$|z| < \frac{1}{RC}$$



Rys. 8. Układ doświadczalny I.

$$1+S(z) = \frac{1}{1+zRC} = 1 - zRC + O^2(zRC).$$

Na podstawie wzoru (29) obliczamy $\Delta\lambda$ dla $\lambda = i \frac{\omega}{T}$ pomijając wszędzie wyrazy O^2 :

$$\Delta\lambda = \frac{(i\omega)^2}{2i\omega T} \left(-RC \frac{i\omega}{T} \right) = \frac{RC}{T^2} \frac{\omega^2}{2}.$$

Tak więc funkcja otrzymana za pomocą analizatora powinna mieć teraz niemal dokładnie postać

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= U e^{\frac{RC}{2T} \omega^2 \frac{t}{T}} \cos \omega \frac{t}{T} = \\ &= U \left(1 + \frac{RC}{2T} \omega^2 \frac{t}{T} \right) \cos \omega \frac{t}{T} + O^2 \left(\omega^2 \frac{RC}{2T} \cdot \frac{t}{T} \right). \end{aligned}$$

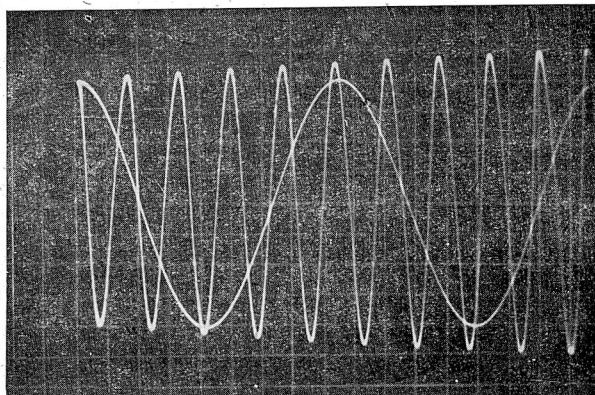
W doświadczeniu dano $RC = 1,25 \cdot 10^{-4}T$, wobec czego przy $\omega = 2\pi \cdot 10$ oraz $\omega = 2\pi \cdot 2$ otrzymać powinniśmy odpowiednio przebiegi

$$\tilde{u}(t) = U \left(1 + 0,25 \frac{t}{T} \right) \cos 2\pi \cdot 10 \frac{t}{T} + O^2 \left(0,25 \frac{t}{T} \right)$$

oraz

$$\tilde{u}(t) = U \left(1 + 0,01 \frac{t}{T} \right) \cos 2\pi \cdot 2 \frac{t}{T} + O^2 \left(0,01 \frac{t}{T} \right).$$

Rzeczywiście otrzymane przebiegi przedstawiono na rys. 9, gdzie obie krzywe znajdują się na jednym oscylogramie. Jak można stwierdzić, otrzymane wyniki doświadczalne w przypadku tym pokrywają się w zupełności z przewidywaniami teoretycznymi.

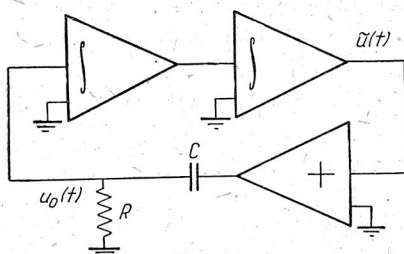


Rys. 9. Otrzymane przebiegi w doświadczeniu I.

Z przeprowadzonych powyżej obliczeń i doświadczenia można wysnuć praktyczny wniosek, że wpływ tzw. pojemności szkodliwych wzrasta wraz z kwadratem częstotliwości drgań $f = \omega/2\pi$.

Doświadczenie II.

Podobnie jak poprzednio zestawiono precyzyjnie działające układy w celu rozwiązania równania



Rys. 10. Układ doświadczalny II.

$$\left(p^2 + \frac{\omega^2}{T^2}\right) u(t) = 0,$$

$$u(0) = U, \quad u'(0) = 0$$

i otrzymano niemal dokładnie przebieg

$$u(t) = U \cos \omega \frac{t}{T}$$

przedstawiony na rys. 7. Następnie na wyjście układu sumującego załączono układ R—C jak pokazano na rys. 10. Wobec tego prze-

noszenie układu sumującego łącznie z układem $R-C$ wyraża się wzorem

$$u_0(t) = -\omega^2 \frac{pRC}{1+pRC} \ddot{u}(t),$$

a więc dla $|z| > \frac{1}{RC}$

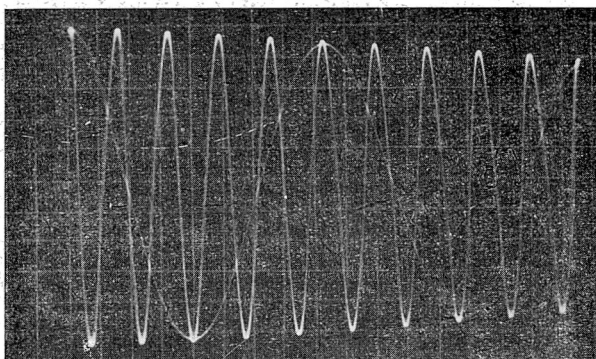
$$1+S(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{zRC}} = 1 - \frac{1}{zRC} + O^2\left(\frac{1}{zRC}\right).$$

Na podstawie wzoru (29) obliczamy $\Delta\lambda$ dla $\lambda = i\frac{\omega}{T}$ pomijając wszędzie wyrazy O^2 :

$$\Delta\lambda = \frac{(i\omega)^2}{2i\omega T} \frac{T}{(-RCi\omega)}.$$

Tak więc funkcja otrzymana przy pomocy analizatora powinna mieć niemal dokładnie postać:

$$\ddot{u}(t) = Ue^{-\frac{t}{2RC}} \cos \omega \frac{t}{T} = U\left(1 - \frac{t}{2RC}\right) \cos \omega \frac{t}{T} + O^2\left(\frac{t}{2RC}\right).$$



Rys. 11. Otrzymane przebiegi w doświadczeniu II.

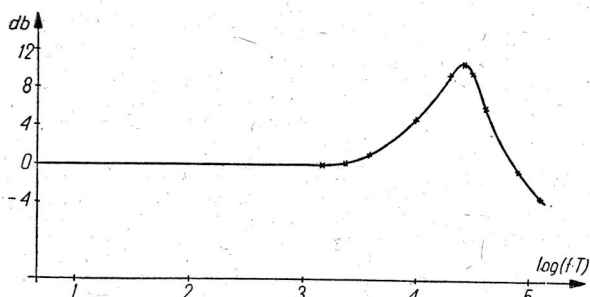
W doświadczeniu dano $RC = 2T$, wobec czego przy $\omega = 2\pi \cdot 10$ oraz $\omega = 2\pi \cdot 2$ powinniśmy otrzymać odpowiednio przebiegi:

$$\ddot{u}(t) = U\left(1 - 0,25 \frac{t}{T}\right) \cos 2\pi \cdot 10 \frac{t}{T} + O^2\left(0,25 \frac{t}{T}\right)$$

oraz

$$\ddot{u}(t) = U \left(1 - 0,25 \frac{t}{T} \right) \cos 2\pi \cdot 2 \frac{t}{T} + O^2 \left(0,25 \frac{t}{T} \right).$$

Na rys. 11 przedstawiono rzeczywiste przebiegi. Jak widzimy, zmiana obwiedni amplitudy nie zależy od częstotliwości drgań, a wielkość tej zmiany jest zgodna z przewidywaniami teoretycznymi.



Rys. 12. Charakterystyka przenoszenia częstotliwości układu sumującego.

Z przeprowadzonych powyżej obliczeń i doświadczenia można wysnuć praktyczny wniosek, że wpływ kondensatorów sprzęgających jest niezależny od częstotliwości.

Na zakończenie wspomnimy o wyniku zdjęcia charakterystyki przenoszenia wielkich częstotliwości jednego z precyzyjnie działających układów sumujących. Charakterystykę tę przedstawiono na rys. 12. Jak widać, wykazuje ona przy wyższych częstotliwościach wzniesienie o przeszło 10 dB, a więc nie jest ona w żadnym razie „płaska“. Tym samym okazano doświadczalnie, co zresztą nie było trudno przewidzieć na podstawie przedstawionej teorii, że dążenie wielu konstruktorów do możliwie płaskiej charakterystyki przenoszenia częstotliwości jest nieuzasadnione.

5.2. Zastosowanie opracowanej teorii przy projektowaniu układów sumujących i całkujących

Wyniki przedstawionej pracy znalazły pełne zastosowanie przy projektowaniu, a następnie przy zestrzajaniu układów sumujących i całkujących.

Dla opracowywanego układu obliczano najpierw funkcję $S(z)$ lub $C(z)$. Następnie znajdowano dla nich współczynniki rozwinięcia

Laurenta i sprawdzano czy spełnione są warunki podane w przypadku I rozdz. 4. 4. Na ogół okazywało się, że jeden z wyrazów a_{-1} lub a_1 wymaga kompensacji. W tym celu wprowadzono do układu dodatkowe elementy w taki sposób, aby dla nowootrzymanej funkcji $S(z)$ lub $C(z)$ dany wyraz w rozwinięciu Laurenta był równy zeru. Następnie sprawdzano czy dalsze współczynniki spełniają warunki podane w odpowiednim dalszym przypadku rozdz. 4. 4.

Posługując się powyższą metodą opracowano układy, które pozwalały na uzyskanie dużej dokładności pomimo użycia stosunkowo prostych środków. Wynik ten bez znajomości przedstawionej teorii nie byłby prawdopodobnie osiągnięty.

Praca niniejsza jest skrótem dysertacji przedstawionej Radzie Wydziału Łączności Politechniki Warszawskiej w celu uzyskania stopnia doktora. Przy ostatniej redakcji autor korzystał z wielu cennych rad i wskazówek prof. dra inż. J. Groszkowskiego i prof. dra S. Turskiego, za co składa Im w tym miejscu serdeczne podziękowanie. Wyniki przedstawionej pracy były referowane po raz pierwszy na seminarium Grupy Aparatów Matematycznych Państwowego Instytutu Matematycznego w maju 1951 roku.

WYKAZ LITERATURY

1. Gutenmacher L. — *Elektricheskie modeli* — 1949, Moskwa.
2. Macnee A. — *Some limitations on the accuracy of electronic differential analyser* — P. I. R. E., marz. 1952, s. 303.
3. Meneley C. A., Morrill C. D. — *Linear electronic analog computer design* — Proc. of the National Electronics Conference, t. 5, 1949, s. 48.

Л. ЛУКАШЕВИЧ

ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОННОГО АНАЛИЗАТОРА

Резюме

Темой настоящего труда является исследование влияния линейных искажений суммирующих и интегрирующих элементов электронного анализатора обыкновенных дифференциальных уравнений на точность решений однородных линейных уравнений с посто-

янными коэффициентами. Вопрос этот рассмотрен при совершенно общих предпосылках и при учёте погрешностей вследствие неточного подбора коэффициентов исследуемого уравнения. Найдены достаточные и практически необходимые условия, которым должна удовлетворять функция, характеризующая передачу счётных элементов, так чтобы погрешность полученного результата не превышала заранее заданной величины. Благодаря представлению этих условий в форме легко применимой в практике, получены указания для построения электронных счётных моделей, необходимые для получения требуемой точности при наименьшей их стоимости.

Теоретически полученные результаты сравнены с опытными данными.

Удовлетворительное решение этих вопросов до сих пор не было опубликовано в доступной автору литературе. Из различных заметок на эту тему можно, как кажется, заключить, что не существует еще достаточно разработанная теория этого вопроса. Многие авторы¹⁾ выражают мнение, что следует стремиться к возможно широкой полосе передачи с плоской характеристикой, что в значительной степени неточно. В труде А. Макни²⁾ на тему влияния линейных искажений на точность решений — рассмотрены только простейшие случаи, не заключающие более интересных, в которых при помощи соответственных компенсаций влияние линейных искажений могло бы быть многократно уменьшено. Вообще в работах касающихся анализаторов опубликованных до сих пор этот так важный вопрос совершенно не поднимался. Целью настоящей работы является заполнить этот пробел при помощи довольно общей и полной разработки вышеобсуждаемых вопросов.

В настоящем труде употреблены следующие оперативные символы, значение которых выяснено в следующем определении:

Определение: Даны два любых многочлена (1), причём по крайней мере один из коэффициентов $R(z)$ не равен нулю. Затем пусть функция $u(t)$ определена и n -раза дифференцирована в некотором любом интервале L . Тогда каждую функцию $v(t)$ в этом интервале уравнения (2) мы будем обозначать одним и тем же символом (3).

¹⁾ Нпр. С. А. Meneley, С. D. Morrill, op. cit.

²⁾ А. Macnee, op. cit.

Символы эти особенно удобны для выражения зависимостей в линейных электрических сетях, в особенности когда желательно получить результаты не зависящие от первоначальных значений.

Вообще говоря — зависимость между током и напряжением в данном ответвлении линейной сети выражается зависимостью $u(t) = Z(p)i(t)$ в которой оператор $Z(p)$ получается из функции выражающей импеданс ветви $Z(i\omega)$, в которой величина $i\omega$ заменена символом p .

В суммирующих элементах, которых символ представлен на рис. 1, в случае их идеального действия — напряжение на выходе в функции выходных напряжений выражено формулой (5), в которой b_k — некоторые заранее подобранные постоянные параметры. Однако величины b_k мы в действительности можем подобрать только с ограниченной точностью, а функции характеризующие передачу несколько отличаются от постоянных.

Далее предположено, что на выходе суммирующей системы получаем напряжение (6), где $b_k(1+s_k)$ представляет величину действительно подобранную вместо b_k , $b_k(1+s_k)[1+S(z)]$ — действительную функцию, характеризующую передачу. Точно также и в интегрирующих элементах, которых символ представлен на рис. 2, в случае их идеального действия напряжение на выходе должно равняться (7). В действительных интегрирующих элементах напряжение на выходе равно (8), где величина $(1+c_{k+1})/T$ представляет действительно подобранный параметр, а функция $(1+c_{k+1})[1+C_{k+1}(z)]/T$ действительную функцию, характеризующую передачу. Далее предположено, что все функции $C_{k+1}(z)$ рассматриваемых интегрирующих элементов тождественны и равны $C(z)$. Функции $S(z)$, $C(z)$ соизмеримы с действительными коэффициентами.

Явление искажения выходного напряжения вследствие того, что $S(z)$ и $C(z)$ тождественно не равняются нулю, мы называем линейными искажениями, самые же функции — определяющими линейные искажения.

Задачей настоящей работы является определение условий, которым должны отвечать функции определяющие линейные искажения суммирующих и интегрирующих элементов, чтобы точность получаемых решений была достаточна.

Влияние линейных искажений и неточности задания параметров на точность получаемых решений пояснено двумя примерами в главе 2. 4.

Чтобы ограничить дальнейшие рассуждения существенными свойствами некоторых выражений, введён следующий символ, для которого примером служит известный символ O' .

Определение. Каждую функцию $\varphi(z_1 \dots z_n)$, которая при некотором действительном n может быть представлена в виде (11), и в которой коэффициенты a_{ij} стремятся к конечному пределу, когда одна из переменных стремится к нулю, мы будем обозначать одним и тем же символом (12).

Как пример применения вышесказанного символа приведено следующее видоизменение приближительной формулы Ньютона, которой мы пользуемся в дальнейшем исследовании.

Теорема. Положим, что функции $\varphi(z)$ и $\varepsilon(z)$ могут быть разложены в ряд Тейлора в некоторой области точки λ , что точка $\lambda + \Delta\lambda$ также лежит в этой области и что соблюдена зависимость (13). В таком случае соблюдена также и зависимость (14). Величину $\Delta\lambda$ мы называем отклонением корня λ под влиянием функции $\varepsilon(z)$.

В настоящей работе рассмотрено влияние линейных искажений на точность решений обыкновенных, дифференциальных, линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. В рассуждениях мы ограничились только погрешностями, вызванными отклонением корней λ характеристического уравнения данного уравнения на известную величину $\Delta\lambda$.

Для упрощения расчётов исследовано влияние линейных искажений на одну только составляющую решения выражений (15), соответствующую характеристическому корню $\lambda = \frac{1}{T}(a + i\omega)$ данного уравнения.

Затем приведено следующее определение погрешности решения δ .

Определение. Если функции $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ выражены формулами (16) и (17) (высший предел), то погрешность, вызванную принятием функции $u(t)$ вместо функции $\tilde{u}(t)$, мы назовём величиной δ , выраженной формулой (19).¹⁾

Это определение приблизительно соответствует определению (18), но это последнее привело бы нас к очень сложным формулам; принимая же определение (19), мы получаем обозначение (20).

В главе 3.3 рассмотрено влияние неточности задания параметров уравнения на отклонение корня λ . Доказана следующая теорема:

¹⁾ Kres górny=высший предел

Теорема. Положим, что для решения уравнения (21) составлена модель, представленная на рис. 5, в которой счётные элементы не дают линейных искажений, т. е. $S(z) \equiv C(z) \equiv 0$, вследствие чего погрешности возникают исключительно от неточности задания параметров, причём $|s_k| < 1$ и $|c_k| < 1$.

При этих предпосылках действительная кривая напряжения будет удовлетворять уравнению (22).

На основании [этой последней теоремы принято следующее определение:

Определение. Псевдо-решением с отклонением κ уравнения данного формулой (21) называем каждое решение уравнения данного формулой (22), если соблюдены условия (25).

Так как в анализаторе мы можем подбирать параметры уравнений только с некоторой ограниченной точностью, ибо они определяются в принципе посредством соответственных физических величин (нпр. отношением сопротивлений), то о процессах полученных при помощи анализатора, предполагая полное отсутствие линейных искажений, мы можем лишь в общем сказать, что они являются псевдо-решениями заданных уравнений. Псевдо-решения тем ближе подходят к действительным решениям, чем меньше отклонение κ , т. е. постоянная выступающая в неравенствах (25).

Отклонение $\Delta\lambda$ характеристического корня, вызванное неточным заданием параметров дано в формуле (28).

В главе 3.4 рассмотрено влияние линейных искажений на отклонение корня характеристического уравнения данного уравнения. Доказана следующая теорема:

Теорема (глава 3.4). Положим, что для решения уравнения (21) составлена модель, представленная на рис. 5, и что мы ищем решение соответствующее корню характеристического уравнения λ , причём $\varphi'(\lambda) \neq 0$ а λ не является полюсом функций $S(z)$ и $C(z)$. Положим далее, что параметры счётных элементов нам удалось подобрать совершенно точно, так что $s_k = c_k = 0$ и, следовательно, мы учитываем только погрешности, вызванные линейными искажениями.

В этих условиях отклонение корня λ выражается формулой (29).

Одним из интересных выводов этой теоремы является то, что $\Delta\lambda$ зависит от значений $S(z)$ и $C(z)$ только в точке λ , выступающей в решении, но не зависит нпр. от состояния этих функций в той или иной полосе частоты.

На основании (20) и (29) доказана в главе 3.5 следующая теорема:

Теорема (глава 3.5). Сохраняя предпосылки теоремы главы 3.4, предположим кроме того, что λ находится в определенной области B переменной z , а также что в этой области при некоторых положительных значениях δ_s и δ_c соблюдены неравенства (32). Тогда полученная при помощи анализатора функция $\tilde{u}(t)$ отличается от точного решения (21) не более чем на величину (33).

В практике условия (32) также необходимы для исполнения тезиса теоремы.

Теорема главы 3.5 не учитывает того, что погрешность вызванная линейными искажениями часто может быть сведена к погрешности задания параметров.

В главе 3.6 исследована ошибка в решении, вызванная вследствие одновременного влияния погрешностей задания параметров и линейных искажений. Доказана следующая теорема:

Теорема (глава 3.6). Положим, что для решения уравнения (34) мы составили модель, представленную на рис. 5 и рассматриваем лишь решение, соответствующее корню λ , причём λ находится в определённой области B плоскости z . Затем положим, что суммирующий элемент и интегрирующие элементы переносят по формулам (6) и (7), причём постоянные s_k и c_k , а также функции $S(z)$ и $C(z)$ удовлетворяют в области B неравенствам (35), (36) и (37) при некоторых положительных числах δ_s ; δ_c ; κ_1 ; κ_2 ; ($\kappa_1 + \kappa_2 < 1$). Тогда полученная при помощи анализатора функция $\tilde{u}(t)$ отличается от некоторого псевдо-решения уравнения (34) с отклонением $\kappa_1 + \kappa_2$ не более чем на величину (38), в которой символ Δx обозначает комплекс величин (39).

Как и для теоремы гл. 3.5 можно доказать, что сделанные предположения в практических условиях также необходимы для исполнения тезиса теоремы главы 3.6.

В 4-ой главе приведены в практической форме условия удовлетворяющие практическим данным, при которых соблюдены предположения теоремы главы 3.5 или теоремы главы 3.6, следовательно условия, при которых полученные погрешности не превышают заранее определённых величин.

Прежде всего определена при помощи неравенств (45) область B (рис. 6) переменной $z = \frac{1}{T}(\alpha + i\omega)$, к которой будут относиться дальнейшие соображения. Далее предположено, что в этой об-

ласти функции $S(z)$ и $C(z)$ могут быть представлены в форме рядов Лорента (47), в которых $a_0=0$. В практике предположения эти несколько не ограничивают общности соображений. При этих предположениях рассмотрено, каким ограничениям должны быть подчинены коэффициенты рядов (47), чтобы погрешность, вызванная линейными искажениями, не была бы больше заранее заданной величины. В соображениях этих выделены следующие 4 случая, которые в практике исчерпывают почти все встречающиеся возможности.

I. Ряды Лорента функции $S(z)$ и $C(z)$ сходятся так быстро, что достаточно учитывать только члены с коэффициентами a_{-1} и a_1 а влиянием остальных членов можно пренебречь. Если при этом возникают зависимости (49), где δ обозначает δ_s или δ_c , в зависимости от того рассматриваем ли мы суммирующий или интегрирующий элемент, то полученная при помощи анализатора функция отличается от решения уравнения (48) не более чем на величину (50). Предыдущие зависимости мы доказываем на основании теоремы гл. 3.5.

II. Ряды Лорента функции $S(z)$ и $C(z)$ сходятся так быстро, что достаточно учесть только члены с коэффициентами a_{-1} , a_1 , a_2 , a_3 , а влиянием остальных членов можно пренебречь. В этом случае верхний предел передачи частоты вообще ниже чем в I случае, что в практике дает возможность изготовления более дешевых счётных моделей. Предположим кроме того что при помощи соответственных поправочных элементов нам удалось компенсировать влияние коэффициента a_1 , иначе говоря, получить $a_1=0$. Если при этом возникают зависимости (51), (52), (54) и (55), тогда полученная при помощи анализатора функция отличается от некоторого псевдо-решения с отклонением $\varkappa_1 + \varkappa_2$ уравнения (48) не более чем на величину (56), где Δx выражается по формуле (39). Доказательство предыдущей зависимости мы выводим на основании теоремы главы 3.6.

Если бы мы во II случае основывались на теореме главы 3.5 а не главы 3.6, то полученные при этом ограничения величин коэффициентов были бы более резкими. Так напр., если $a_{-1}=a_3=0$, то условия (52), (53) и (55) сводятся к условиям (58) и (59). Если же будем основываться на теореме главы 3.5 — то получим (60), т. е. с правой стороны неравенства величину в $\frac{\omega_g}{2\alpha_g}$

раз меньше в сравнении с (58), или в $\frac{\kappa_2}{\delta} \omega_g$ раз меньше в сравнении с (59).

Так как в практике эти делители довольно велики, нпр. ок. 20, то мы получим условие слишком больших ограничений вследствие наличия погрешностей от неточного задания параметров. Отсюда мы видим что учёт погрешностей от неточного задания параметров в наших рассуждениях, нпр. введением понятия псевдо-решений, является необходимым с практической точки зрения.

III. Ряды Лорента функций $S(z)$ и $C(z)$ сходятся так быстро, что достаточно учесть только члены с коэффициентами a_{-2} , a_{-1} , a_1 влиянием же остальных членов можно пренебречь. В этом случае нижний предел передачи частоты вообще выше чем в I случае, что в практике даёт возможность изготовления более дешёвых счётных систем: Предположим кроме того, что при помощи соответственных поправочных элементов нам удалось компенсировать влияние коэффициента a_{-1} , иначе говоря получить $a_{-1} = 0$. Если при этом возникают неравенства (61) и (62), то полученная при помощи анализатора функция отличается от решения уравнения (48) не более чем на величину (63).

Условие (61) имеет характер приблизительной оценки, так как трудно точно установить величину ω_a , которую следует принять в этой формуле. Однако ввиду того, что на основании формулы (29) — влияние функций $a_{-2} z^{-2}$ значительно только при очень малых z , что в практике мало интересно, установление точной формулы для оценки a_{-2} не оказывается необходимым.

IV. Ряды Лорента для функций $S(z)$ и $C(z)$ сходятся так быстро, что достаточно учитывать только члены с коэффициентами a_{-2} , a_{-1} , a_1 , a_2 , a_3 влиянием же остальных членов можно пренебречь. Предположим кроме того, что нам удалось при помощи соответственных элементов получить $a_{-1} = a_1 = 0$. Если при этом возникают неравенства (67) и (68), то полученная при помощи анализатора функция отличается от некоторого псевдо-решения с отклонением $\kappa_1 + \kappa_2$ на величину не больше чем (69).

Приведенные в главе 4.4 условия в практике являются также необходимыми для исполнения заданных теорем.

В заключении результаты полученные теоретически сравнены с опытными данными. Для решения уравнения (70) были созданы точно действующие счётные системы и процесс (71) (рис. 7) был воспроизведён почти точно (71) (рис. 7).

Затем, при помощи простых систем $R-C$ были введены искусственные линейные искажения, как это показано на рис. 10. Полученные процессы (рис. 9 и 11) вполне соответствовали расчётам. Снята также характеристика передачи больших частот одного из точно действующих суммирующих элементов (рис. 12). Как видно из этой характеристики, при больших частотах возникает повышение больше чем на 10 децибелов, следовательно, эта характеристика ни в каком случае не может быть названа „плоской“. Последнее доказывает на опыте, что впрочем можно было предвидеть на основании представленной теории, что стремление многих конструкторов к возможно плоской характеристике передачи частоты — необосновано.

Настоящий труд представлен Совету Отдела Связи Варшавского Политехнического Института, как диссертация для получения докторской степени.

Автор выражает глубокую благодарность проф. д-ру Я. Грошковскому и проф. д-ру С. Турскому за многие ценные советы и указания по редактировании труда.

Результаты представленного труда огавариваемы были впервые на семинаре Группы Математических Аппаратов Государственного Математического Института в мае месяце 1951 года.

L. ŁUKASZEWICZ

THE INFLUENCE OF LINEAR DISTORTION ON THE ACCURACY OF ELECTRONIC DIFFERENTIAL ANALYSERS

Summary

The purpose of this paper is to determine the influence of linear distortion in adders and integrators on the accuracy of solutions of ordinary linear homogeneous differential equations solved by means of electronic differential analysers. The problem is considered under the most general assumptions taking into account the inaccurate setting of coefficients. Necessary and practically sufficient conditions have been found for the transfer function of analyser units in order to keep the errors below a certain predetermined value. These conditions being given in a form suitable for practical application present a useful indication for the most economical design of

electronic computing systems. Finally the theoretical results are compared with experimental data.

To the author's knowledge no satisfactory solution of this problem has yet been published. Several authors [1] postulate that best conditions are obtained with maximum bandwidth and flat frequency response. This opinion has been proved to be incorrect. A. Macnee [2] in his paper on the influence of linear distortion on the accuracy of solutions of electronic differential analysers considered only the simplest cases and omitted the most interesting ones when the effect of linear distortion can be greatly reduced by suitable compensation. This important subject, however, has been in most cases completely omitted in the published literature concerning differential analysers. The purpose of this paper is to fill the existing gap by working out a sufficiently general and comprehensive treatment of the subject.

The symbols of applied operational calculus are explained by the following definition:

Definition: Let be given two arbitrary polynomials (1) with at least one of the coefficients of the polynomial $R(z)$ being different from zero. Further let the function $u(t)$ be determined and n -times differentiable within a given arbitrary interval L . The any function $v(t)$ satisfying the equation (2) in this interval will be denoted by one and the same symbol (3).

Symbols adopted above are particularly well suited to express the relations in linear electrical networks, especially when results independent of the initial conditions are desirable. The relationship between the voltage and current in a given branch of the network is, generally, expressed by the relation $u(t) = Z(p) i(t)$, where the operator $Z(p)$ has been derived by substituting the quantity $i\omega$ by the symbol p in the impedance function $Z(i\omega)$ peculiar for this branch of the network.

In adders symbolised in fig. 1 the output-voltage of the output voltage function for the ideal case is given by the formula (5), the b'_k being predetermined fixed parameters. In fact, however, we are un able to fix the quantities b_k accurately and the transfer functions differ from the constant ones. Further, it has been assumed that at the output of the adders we receive the voltage given by (6), where $b_k(1+s_k)$ represents the really chosen quantity instead of b_k and $b_k(1+s_k)[1+S(z)]$ — the actual transfer function. Similarly, the out-

put voltage for the ideally operating integrators shown in fig. 2 should be given by (7). In real integrators, however, this output voltage is equal to (8), where the quantity $(1+c_{k+1})/T$ represents the really chosen parameter and the function $(1+c_{k-1}) [1+C_{k+1}(z)]/T$ is a really existing transfer function. Further, it has also been assumed that all functions $C_{k+1}(z)$ of the integrators considered are identical and equal to $C(z)$. The functions $S(z)$ and $C(z)$ are the rational functions with real coefficients.

The phenomenon of output-voltage distortion due to the functions $S(z)$ and $C(z)$ being not identically equal to zero we call a linear distortion and the functions themselves — the linear distortion defining function. The purpose of this paper is to establish which conditions are to be satisfied by these functions in order to secure a satisfactory accuracy of solutions.

Two examples are given in sec. 2.4 to illustrate the influence of linear distortion and inadequate setting of the parameters on the accuracy of results.

In order to restrict further considerations to essential properties of certain expressions the following symbol has been introduced which is analogous to the well known symbol O .

Definition: Every function $\varphi(z_1 \dots z_n)$, which may be expressed for a certain natural number n by (11), where the coefficients a_{ij} tend to a definite limit as any one of the variables tends to zero, will be denoted by one and the same symbol (12). As an example of the application of this symbol a modified Newton's approximation formula is shown and used further in the text.

Theorem. Let us suppose that the functions $\varphi(z)$ and $\varepsilon(z)$ have Taylor's series expansions in a certain region of the point λ , the point $\lambda + \Delta\lambda$ belongs to that region and that the relation (13) is fulfilled. Then the relations (14) are satisfied. The quantity $\Delta\lambda$ is termed the deviation of the root λ due to the influence of the function $\varepsilon(z)$.

In this paper a study has been made of the influence of linear distortion on the accuracy of solutions of ordinary homogeneous linear differential equations with constant coefficients. Only the errors caused by the deviations of the roots λ of the characteristic equation of the given differential equation by a quantity $\Delta\lambda$ have been considered. In order to simplify the computations the influence of linear distortion on only one component of the solution (shown by

15) has been examined. This component corresponds to the characteristic root $\lambda = \frac{1}{T}(\alpha + i\omega)$ of the given equation.

The following definition of the solution error δ has been introduced.

Definition: If the functions $u(t)$ and $\tilde{u}(t)$ are expressed by (16) and (17), then the error δ we make by applying the function $\tilde{u}(t)$ is described by the expression (19)¹.

The definition given above is similar to that of (18), but the application of the latter would lead to more complicated formulae. By means of the definition (19) the estimation (20) has been obtained.

In sec. 3.3 the influence of inaccurate setting of equation parameters upon the deviation of the root λ has been considered. The following theorem has been proved:

Theorem. Suppose that in order to find the solution of the equation (21) a system was arranged as shown in fig. 5 in which the computing units do not cause linear distortion, i.e. $S(z) \equiv C(z) \equiv 0$ and errors occur only as a consequence of inaccurate setting of the parameters. Further $|s_k| < 1$ and $|c_k| < 1$. Under these assumptions the real voltage function will satisfy the equation (22).

On the basis of this theorem the following definition has been worked out:

Definition: Given that the equations (25) are satisfied, any solution of the equation (22) will be called a pseudo-solution with a deviation \varkappa of an equation given by the formula (21).

We may consider the results obtained by means of an analyser, under the assumption of the absence of linear distortion, as a pseudo-solution of given equations, because the setting of the parameters in an analyser can only be of limited accuracy, owing to the fact that the parameters are usually determined by means of different physical quantities (e.g. different resistance ratios).

The lesser the deviation \varkappa , (i.e. a constant in the inequalities (25)) the better the approximation of the pseudo-solutions to the true solutions.

The deviation $\Delta\lambda$ of the characteristic root λ caused by the inaccurate setting of the parameters is expressed by (28).

In sec. 3.4 the influence of linear distortion upon the deviation of the λ root of the characteristic equation of the given differential equation has been examined. The following theorem has been proved:

¹) Kres górny = the upper bound.

Theorem (sec. 3.4). Let us assume the scheme shown in fig. 5 in order to find the solution of equation (21). We proceed then to find the solution corresponding to the root λ of the characteristic equation given that $\varphi'(\lambda) \neq 0$ and that λ is neither a pole of function $S(z)$ nor of $C(z)$. Further let us assume accurate setting of the parameters of the computing units, i.e. $s_k = c_k = 0$, so that we consider only errors due to the linear distortion. Under these assumptions the deviation of the root λ is expressed by (29).

One of the more interesting conclusions of this theorem is that $\Delta\lambda$ depends upon the values of $S(z)$ and $C(z)$ only at the point λ appearing in the solution, but does not depend upon the behaviour of these functions within any frequency band.

On the basis of (20) and (29) the following theorem has been proved in sec. 3.5:

Theorem (sec. 3.5). As an additional assumption to those given in theorem sec. 3.4 we add the following one: let λ be placed within the determined region B of the variable z and let the inequalities (32) be satisfied for certain positive numbers δ_s and δ_c in this region. Then the function $\tilde{u}(t)$ obtained by means of the analyser differs from the exact solution of the equation (21) by not more than by the quantity (33).

In practice, the conditions (32) are also necessary to satisfy the thesis of the theorem.

The theorem stated in sec. 3.5 does not consider that the error caused by linear distortion can often be reduced to the error of choosing the parameters. The error of solution caused by the simultaneous influence of the errors in setting the parameters and due to linear distortion has been examined in sec. 3.6 and the following theorem proved:

Theorem (sec. 3.6). Let us assume a computing system as shown in fig. 5 adopted in order to solve the equation (34). Only the solution which corresponds to the root λ will be considered, where λ is a fixed point within the region B on the plane z . Let us further assume that the adder and the integrators transfer according to formulae (6) and (7) respectively and the constants S_k and C_k together with the functions $S(z)$ and $C(z)$ satisfy the inequalities (35), (36), (37) for certain positive numbers δ_s , δ_c , κ_1 , κ_2 , ($\kappa_1 + \kappa_2 < 1$), within the region B . Then the function $\tilde{u}(t)$ produced by the analyser differs from a certain pseudo-solution with a deviation $\kappa_1 + \kappa_2$ of the equa-

tion (34) by not more than the quantity (38), where the symbol Δx denotes the quantities given by (39).

Similarly to theorem of sec. 3.5 it may be shown that the assumptions made are necessary in order that the thesis of the theorem of sec. 3.6 may be satisfied in practical conditions.

The conditions satisfying the assumptions of the theorems proved in sec. 3.5 and in sec. 3.6 and securing that the errors do not exceed a certain predetermined limit are stated in sec. 4 in accordance with experience and in a practical form. First of all, the region B of the variable $Z = \frac{1}{T}(\alpha + i\omega)$, being the object of further considerations, has been defined by the inequalities (45) (fig. 6). Further, it has been assumed for this region that the functions $S(z)$ and $C(z)$ may be expanded into Laurent's series with $a_0 = 0$. Such assumptions do not restrict practically the generality of our considerations. It has also been considered under these assumptions, which are the necessary restrictions of the coefficients of the series given by (47) in order that the errors resulting from linear distortion may not exceed a predetermined quantity. When examining the problem the following four cases have been distinguished, which deal with nearly all possibilities encountered in practice.

I. The Laurent's series of the function $S(z)$ and $C(z)$ so rapidly converge that it will be sufficient to consider only the terms with coefficients a_{-1} and a_1 and the influence of the remaining terms may be neglected. If at the same time the relations (49) are holding, then the function obtained by means of an analyser will differ from the solution of the equation (48) by not more than the quantity (50). In the above relations δ stands for δ_s or δ_c , δ_s — in the case of an adder, δ_c — in the case of an integrator). The proof has been based on the theorem in sec. 3.5.

II. The Laurent's series expansions of the functions $S(z)$ and $C(z)$ converge so rapidly that all terms except those with the coefficients α_1, a_1, a_2, a_3 may be neglected. In this case the upper limit of the transmitted frequency is generally lower than that in the case I, which reduces the cost of computing units. Let us assume further that the coefficient a_1 has been compensated, by means of suitable correcting elements, i.e. we have $a_1 = 0$. Now if the relations (51), (52), (54) and (55) coexist, then the function obtained by means of the analyser differs from a certain pseudo-solution with a deviation

$a_1 + \kappa_2$ of the equation (48) by not more than the quantity (56), where Δx is expressed by (39). The proof is based on the theorem in sec. 3.6.

If this proof were based on the theorem in sec. 3.5 instead of the theorem in sec. 3.6, then the limits imposed on the values of the coefficients would be more stringent. Thus, when $a_1 = a_3 = 0$, then the conditions (52), (53) and (55) are reduced to (58) and (59) while on the basis of the theorem in sec. 3.5 we would have obtained (60), i.e. the right side of the inequality would be $\frac{\omega_g}{2 \alpha_g}$ — times smaller in relation to (58) or $\frac{\kappa_2}{\delta} \omega_g$ — times smaller in relation to (59).

As these divisors are in reality quite large, e.g. about twenty we would obtain a too stringent condition in view of the existence of the parameters setting errors. It follows from the afore said that in practice the consideration of parameters setting errors is necessary e.g. by introducing the conception of a pseudo-solution.

III. The Laurent's series of the functions $S(z)$ and $C(z)$ so rapidly converge that we need only consider the terms with coefficients a_{-2} , a_{-1} and a_1 and the influence of the remaining terms may be neglected. In this case the lower limit of the transmitted frequency is generally higher than that in the case I, which in practice reduces the cost of computing units. Let us assume also that it has been possible to compensate for coefficient a_{-1} by means of correcting elements the i.e. $a_{-1} = 0$. Now, if the inequalities given by (61) and (62) coexist, then the function obtained by means of the analyser will differ from the solution of equation (48) by not more than by the quantity (63).

The conditions (61) is an approximate estimation, because it is difficult to determine an exact value of ω_d which should be used in this formula. It follows from formula (29) that the influence of the function $a_{-2}z^{-2}$ is considerable only for very small values of z — which are of little interest — therefore no exact formula for the estimation of a_{-2} is required.

IV. The Laurent's series of the functions $S(z)$ and $C(z)$ so rapidly converge that it will be sufficient to consider only the terms with coefficients a_{-2} , a_{-1} , a_1 , a_2 and a_3 ; the remaining terms may be neglected. In addition let us assume that we obtained $a_{-1} = a_1 = 0$ by means of suitable correcting elements. Now if the inequalities (67) and (68) coexist, the function obtained by means of the analyser will

differ from a certain pseudo-solution with deviation $\varkappa_1 + \varkappa_2$ by a quantity not greater than (69).

In practice, the conditions given above in sec. 4.4 are indispensable to satisfy the necessary theorems.

Finally, the theoretical results have been compared with the experimental data. Systems with high degree of accuracy have been built to obtain the solution of equation (70) and a nearly exact shape of equation (71) has been achieved (see fig. 7). Then some artificial linear distortions have been introduced by means of simple R—C networks, as shown in fig. 8 and 10. The results obtained are shown in fig. 9 and 14. They agree with previous calculations. Afterwards the frequency characteristic of one of the precision adders was taken.

It is evident from fig. 12 that a gain of above 10 dB occurs at higher frequencies in the characteristic and it is therefore by no means „flat“. In this way it has been proved that the tendency of many designers to attain a possibly flat frequency characteristic is unjustified.

This paper is a dissertation presented at the Warsaw Technical University for acquiring the degree of Ph. D. The author wishes to acknowledge the guidance and help of Prof. J. Groszkowski, D. Eng. and Prof. S. Turski, Ph. D. at the final preparation of this paper. The paper was read for the first time in May 1951 at the discourse held by the section of Mathematical Apparatus of the State Institute of Mathematics, Warsaw.

621.396.619.13:621.385.13.094.3

T. ZAGAJEWSKI

Efekty nieliniowe w lampowych układach reaktancyjnych*Rękopis dostarczono 30. 12. 52*

Streszczenie. Praca omawia wpływ nieliniowości charakterystyki lampy na oporność zespoloną lampowych układów reaktancyjnych. Wpływ ten wyraża się zależnością oporności zespolonej układu od wartości sinusoidalnie zmiennego napięcia anodowego i siatkowego (efekt pierwotny) oraz od wartości i fazy składowych harmonicznych tych napięć (efekt wtórny). Wykonane pomiary wykazują istnienie obu tych efektów, powodujących zmianę oporności urojonej układu rzędu kilkudziesięciu procent. Wpływ efektów nieliniowych można znacznie zmniejszyć przez zastosowanie pewnych układów, dających automatyczną kompensację lub ujemne sprzężenie zwrotne.

1. WSTĘP

Lampowe układy reaktancyjne są obecnie powszechnie stosowane w wielu urządzeniach telekomunikacyjnych i przemysłowych; są to bowiem układy przedstawiające dla prądu zmiennego reaktancję o charakterze pojemnościowym lub indukcyjnym, której wartość można łatwo zmieniać w szerokich granicach przez zmianę punktu pracy lampy. Tę możliwość zmiany reaktancji wykorzystuje się do modulacji częstotliwości w urządzeniach nadawczych, do automatycznej regulacji częstotliwości generatorów lampowych [1] [3], do automatycznego równoważenia układów mostkowych prądu zmiennego [2] itd. W większości przypadków analizę tych układów reaktancyjnych przeprowadza się metodą liniową, tzn. zakładając liniowy przebieg charakterystyki prądu anodowego lampy reaktancyjnej. Zakrzywienie tej charakterystyki uwzględnia się tylko przy dyskusji zniekształceń w modulatorach reaktancyjnych częstotliwości [4]; zazwyczaj jednak prace te ograniczają się do omówienia zniekształceń, wywołanych periodyczną zmianą reaktancji rezonansowego ob-

wodu generatora, przy założeniu prostoliniowej zależności nachylenia charakterystyki lampy od napięcia siatki.

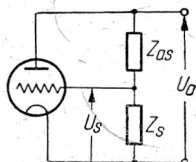
Celem niniejszej pracy jest rozpatrzenie wpływu nieliniowości charakterystyki lampy na pracę układu reaktancyjnego. Jest to zagadnienie ważne ze względu na zastosowanie tych układów w urządzeniach pomiarowych oraz ze względu na możliwości wykorzystania uzyskanych wyników do wytłumaczenia pewnych właściwości układów lampowych ze sprzężeniem zwrotnym, np. wzmacniaczy i generatorów.

2. LINIOWY EFEKT REAKTANCYJNY

Zakładamy liniowy przebieg charakterystyki lampy wzmacniającej, który można wyrazić dla przebiegów zmiennych wzorem

$$\hat{I}_a = S_1 \hat{U}_s + \frac{1}{\rho} \hat{U}_a. \quad (1)$$

Lampa pracuje w układzie reaktancyjnym (rys. 1), w którym sprzężenie zwrotne otrzymuje się z dzielnika napięcia złożonego z dwóch elementów \hat{Z}_{as} i \hat{Z}_s ; wielkość sprzężenia zwrotnego wyrażamy stosunkiem podziału napięcia



Rys. 1. Układ reaktancyjny ze sprzężeniem zwrotnym.

$$\hat{w}_1 = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_a} = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} = w_{1r} + jw_{1i} \quad (2)$$

wielkość tę nazywamy, podobnie jak w generatorach, współczynnikiem sprzężenia zwrotnego.

Jeżeli do anody lampy doprowadzimy zmienne napięcie sinusoidalne \hat{U}_a , to napięcie siatkowe będzie równe

$$\hat{U}_s = \hat{w}_1 \hat{U}_a,$$

prąd zaś anodowy wyrazi się wzorem

$$\hat{I}_a = S_1 \hat{w}_1 \hat{U}_a + \frac{1}{\rho} \hat{U}_a = \left(S_1 \hat{w}_1 + \frac{1}{\rho} \right) \hat{U}_a.$$

Stąd obliczamy zastępczą oporność zespoloną lampy reaktancyjnej

$$\hat{Z}_{a0} = \frac{\hat{U}_a}{\hat{I}_a} = \frac{1}{S_1 \hat{w}_1 + \frac{1}{\rho}}, \quad (3)$$

lub jej przewodność zespoloną

$$\hat{Y}_{a0} = \frac{1}{\varrho} + S_1 \hat{w}_1 = \left(\frac{1}{\varrho} + S_1 w_{1r} \right) + j S_1 w_{1i}. \quad (4)$$

Podobnie oblicza się współczynnik strat lampy reaktancyjnej

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\frac{1}{\varrho} + S_1 w_{1r}}{S_1 w_{1i}} = \frac{K w_{1r} + 1}{K w_{1i}}. \quad (5)$$

Z wzoru (4) wynika, że lampę reaktancyjną można przedstawić układem trzech zastępczych przewodności (rys. 2), mianowicie dwóch przewodności rzeczywistych: $\frac{1}{\varrho}$ oraz $S_1 w_{1r}$ i jednej przewodności urojonej $S_1 w_{1i}$.

Przy zastosowaniu lamp o dużej oporności wewnętrznej (lampy wielosiatkowe) można pominąć wielkość $\frac{1}{\varrho}$, wobec czego przewodność zespolona wyrazi się wzorem uproszczonym

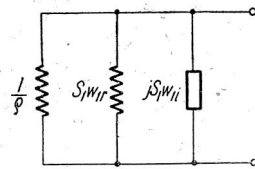
$$\hat{Y}_{a0} \cong S_1 \hat{w}_1 = S_1 w_{1r} + j S_1 w_{1i}, \quad (6)$$

współczynnik zaś strat będzie równy

$$\operatorname{tg} \delta_0 \cong \frac{w_{1r}}{w_{1i}}. \quad (7)$$

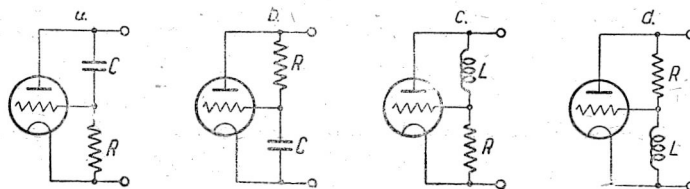
Z wzorów tych wynika, że przewodność urojona układu reaktancyjnego zależy od składowej urojonej współczynnika sprzężenia zwrotnego oraz od nachylenia charakterystyki lampy, natomiast kąt stratności układu zależy głównie od kąta przesunięcia fazowego współczynnika sprzężenia zwrotnego oraz w niewielkim stopniu od stałych lampy. „Dobry“ układ reaktancyjny, czyli układ o małym kącie stratności, można uzyskać przez zastosowanie dzielnika napięcia, który daje przesunięcie fazowe bliskie 90° .

W praktyce stosuje się najczęściej dzielniki napięcia złożone z oporu i kondensatora (rys. 3a i b) lub z oporu i cewki indukcyjnej (rys. 3c i d); układy a i d dają reaktancję pojemnościową lampy, natomiast układy b i c dają reaktancję indukcyjną. Układy te będziemy dalej oznaczać skrótem literowym podającym budowę dzielnika napięcia w kierunku od anody do katody; np. układ a, mający konden-



Rys. 2. Układ zastępczy przewodności rzeczywistych i urojonych liniowego układu reaktancyjnego.

sator pomiędzy anodą i siatką oraz opór między siatką i katodą, będziemy nazywać układem CR , układ b będziemy oznaczać jako układ RC itd.



Rys. 3. Typowe układy reaktancyjne ze sprzężeniem zwrotnym: a. układ typu CR , b. układ typu RC , c. układ typu LR , układ typu RL .

Wzory służące do obliczania tych typowych układów podano w tablicy 1.

Współczynniki liniowe układów reaktancyjnych.

Tablica 1

Układ :	CR	RC	LR	RL
$\hat{w} =$	$\frac{\omega^2 R^2 C^2 + j \omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$	$\frac{1 - j \omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$	$\frac{R^2 - j \omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2}$	$\frac{\omega^2 L^2 + j \omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2}$
$w_1 =$	$\frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$	$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$	$\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$
$\beta =$	ωCR	$-\frac{1}{\omega CR}$	$\frac{R}{\omega L}$	$\frac{\omega L}{R}$
$\hat{Y}_{ao} =$	$\frac{1}{\delta} + \frac{S \beta^2}{1 + \beta^2} + j \frac{S \beta}{1 + \beta^2} \cong \frac{S \beta^2}{1 + \beta^2} + j \frac{S \beta}{1 + \beta^2}$			
$tg \delta_0 =$	$\beta + \frac{1 + \beta^2}{K \beta} \cong \beta$			

3. PIERWOTNY EFEKT NIELINIOWY W UKŁADACH REAKTANCYJNYCH

Charakterystykę prądu anodowego lampy można wyrazić szeregiem potęgowym, który daje dostateczną dokładność przy ograniczeniu się do trzech pierwszych wyrazów

$$i_a = S_1 u_s + S_2 u_s^2 + S_3 u_s^3 + G_1 u_a + G_2 u_a^2 + G_3 u_a^3. \quad (8)$$

S_1 jest tu nachyleniem charakterystyki prądu anodowego w punkcie pracy, $G_1 = \frac{1}{\rho}$ jest przewodnością anodową lampy, a S_2, S_3, G_2, G_3 są nieliniowymi współczynnikami charakterystyki drugiego i trzeciego rzędu.

Jeżeli na anodę lampy wprowadzone jest napięcie sinusoidalnie zmienne

$$u_a = \bar{U}_a \sin(\omega t - \gamma_1) \quad (9)$$

wówczas na siatce pojawi się napięcie z dzielnika napięć, które można wyrazić wzorem

$$\hat{U}_s = \hat{w}_1 \hat{U}_a.$$

Ponieważ współczynnik sprzężenia zwrotnego jest równy

$$\hat{w}_1 = w_1 e^{j\gamma_1},$$

gdzie γ_1 jest kątem przesunięcia fazowego sprzężenia zwrotnego, to napięcie siatkowe wyrazi się wzorem

$$u_s = w_1 \bar{U}_a \sin \omega t. \quad (10)$$

Podstawiając wzory (9) i (10) do (8) otrzymujemy

$$i_a = S_1 w_1 \bar{U}_a \sin \omega t + S_2 w_1^2 \bar{U}_a^2 \sin^2 \omega t + S_3 w_1^3 \bar{U}_a^3 \sin^3 \omega t + \\ + G_1 \bar{U}_a \sin(\omega t - \gamma_1) + G_2 \bar{U}_a^2 \sin^2(\omega t - \gamma_1) + G_3 \bar{U}_a^3 \sin^3(\omega t - \gamma_1).$$

Po wykonaniu prostych przekształceń oraz po pominięciu wyrazów mniejszego rzędu otrzymuje się wyrażenie, z którego interesuje nas składowa zmienna prądu o częstotliwości podstawowej

$$i_{a1} = \left[S_1 w_1 \bar{U}_a + \frac{3}{4} S_3 w_1^3 \bar{U}_a^3 \right] \sin \omega t + \\ + \left[G_1 \bar{U}_a + \frac{3}{4} G_3 \bar{U}_a^3 \right] \sin(\omega t - \gamma_1).$$

Posługując się rachunkiem symbolicznym można obliczyć przewodność zespoloną układu reaktancyjnego.

$$\hat{Y}_{a1} = \frac{\hat{I}_{a1}}{\hat{U}_a} = \frac{\left[S_1 w_1 \bar{U}_a + \frac{3}{4} S_3 w_1^3 \bar{U}_a^3 \right] e^{j\omega t} + \left[G_1 \bar{U}_a + \frac{3}{4} G_3 \bar{U}_a^3 \right] e^{j(\omega t - \gamma_1)}}{\bar{U}_a e^{j(\omega t - \gamma_1)}}.$$

Wyrażenie to napiszemy w następującej postaci

$$\hat{Y}_{a1} = S_1 \hat{w}_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right] + G_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{G_3}{G_1} \bar{U}_a^2 \right]. \quad (11)$$

Dla lamp o dużej oporności wewnętrznej (dla pentod i lamp wielosiatkowych) można pominąć drugi wyraz powyższego wzoru; otrzymujemy

$$\hat{Y}_{ar} \cong S_1 \hat{w}_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right] = \hat{Y}_{a0} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right]. \quad (12)$$

Wzory (11) i (12) pokazują, że wskutek nieliniowego przebiegu charakterystyki lampy reaktancyjnej jej przewodność zespolona jest zależna od amplitudy zmiennego napięcia anodowego, przy czym jeżeli uwzględnia się trzy wyrazy szeregu potęgowego, wówczas zależność ta ma postać paraboli kwadratowej, a zmiany przewodności są proporcjonalne do kwadratu współczynnika sprzężenia zwrotnego w_1 . Przewodność zespolona wzrasta ze wzrostem napięcia \bar{U}_a , jeżeli stałe S_1 i S_3 mają jednakowe znaki, natomiast maleje jeżeli znaki ich są różne. W lampach o dużej oporności wewnętrznej współczynnik strat układu reaktancyjnego nie zależy od amplitudy napięcia \bar{U}_a (wzór 12), natomiast przy małej oporności wewnętrznej lampy kąten ten może ulegać zmianom w funkcji wartości napięcia anodowego (wzór 11).

Fizykalne wytłumaczenie zjawiska zmiany reaktancji w funkcji napięcia anodowego \bar{U}_a jest proste; składowa zmienna prądu anodowego o częstotliwości podstawowej nie zmienia się proporcjonalnie do wartości napięcia anodowego i siatkowego wskutek zakrzywienia charakterystyki lampy, a zatem lampa przedstawia reaktancję zależną od wartości tych napięć.

Można to także tłumaczyć zmianą średniego nachylenia charakterystyki lampy przy zmianie amplitudy napięcia anodowego i siatkowego, co wywołuje zmianę oporności rzeczywistej i urojonej lampy.

Efekt ten można by nazwać pierwotnym efektem nieliniowym, gdyż jest wywołany przez nieliniową zależność składowej zmiennej prądu anodowego od napięcia anodowego i siatkowego, wynikającą wprost z zakrzywienia charakterystyki lampy.

4. WTÓRNY EFEKT NIELINIOWY W UKŁADACH REAKTANCYJNYCH

Drugi efekt nieliniowy występuje w układach reaktancyjnych z lampą o charakterystyce nieliniowej, jeżeli napięcie anodowe (lub siatkowe) jest odkształcone (niesinusoidalne) i wyraża się wzorem

$$u_a = \bar{U}_{a1} \sin(\omega t - \gamma_1) + \bar{U}_{a2} \sin(2\omega t + \alpha_2 - \gamma_2) + \bar{U}_{a3} \sin(3\omega t + \alpha_3 - \gamma_3) + \dots \quad (13)$$

Współczynnik sprzężenia zwrotnego jest zwykle zależny od częstotliwości, a przeto dla dalszych rozważań musimy znać jego wartości dla częstotliwości podstawowej i dla jej harmonicznych:

$$\hat{w}_1 = \frac{\hat{U}_{s1}}{\hat{U}_{a1}} = w_1 e^{j\gamma_1},$$

$$\hat{w}_2 = \frac{\hat{U}_{s2}}{\hat{U}_{a2}} = w_2 e^{j\gamma_2}, \dots \quad \hat{w}_k = \frac{\hat{U}_{sk}}{\hat{U}_{ak}} = w_k e^{j\gamma_k}.$$

Uwzględniając współczynniki sprzężenia zwrotnego i ich kąty przesunięcia fazowego, można napisać wzór na napięcie siatkowe lampy reaktancyjnej

$$u_s = w_1 \bar{U}_{a1} \sin \omega t + w_2 \bar{U}_{a2} \sin(2\omega t + \alpha_2) + w_3 \bar{U}_{a3} \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots \quad (14)$$

Podstawienie wzorów (13) i (14) do równania prądu anodowego (8) daje — po wykonaniu potrzebnych przekształceń [5] — wyrażenie będące sumą wielu składowych harmonicznych, z których interesuje nas tylko składowa podstawowa. Pomijając w tym wyrażeniu pewne wyrazy jako o wiele mniejszego rzędu od pozostałych, dochodzimy w ten sposób do wzoru

$$\begin{aligned} \bar{I}_{a1} = & S_1 w_1 \bar{U}_{a1} \sin \omega t + \frac{3}{4} S_3 w_1^3 \bar{U}_{a1}^3 \sin \omega t + G_1 \bar{U}_{a1} \sin(\omega t - \gamma_1) + \\ & + \frac{3}{4} G_3 \bar{U}_{a1}^3 \sin(\omega t - \gamma_1) + S_2 w_1 w_2 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a2} \sin(\omega t + \alpha_2 + 90^\circ) + \\ & - \frac{1}{3} S_3 w_1^2 w_3 \bar{U}_{a1}^2 \bar{U}_{a3} \sin(\omega t + \alpha_3) + \dots \\ & + G_2 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a2} \sin(\omega t + \alpha_2 + \gamma_1 - \gamma_2 + 90^\circ) + \\ & - \frac{1}{3} G_3 \bar{U}_{a1}^2 \bar{U}_{a3} (\sin \omega t + \gamma_3 - \alpha_3) + \dots \quad (15) \end{aligned}$$

Pierwsze dwie grupy wyrazów przedstawiają składowe prądu, będące wynikiem pierwotnego efektu nieliniowego, omówionego w poprzednim rozdziale, pozostałe wyrazy przedstawiają składowe prądu wynikające z innego efektu nieliniowego, który można by nazwać efektem wtórnym. Składowe te powstają wskutek nieliniowości charakterystyk lampy przez wzajemne oddziaływanie pewnych składowych zmiennych napięcia anodowego lub siatkowego, np. skła-

dowej podstawowej z drugą harmoniczną, drugiej harmoniczej z trzecią itd.; tworzą się przy tym nowe składowe prądu o częstotliwości równej różnicy lub sumie częstotliwości współdziałających składowych napięcia (pewną analogię stanowią tzw. tony kombinowane spotykane w akustyce, we wzmacniaczach itd.). Składowe prądu mające częstotliwość podstawową zmieniają wartość składowej podstawowej prądu anodowego lampy reaktancyjnej, a więc i wartość jej przewodności zespolonej, którą obliczamy z (15) przechodząc na rachunek symboliczny wzorem

$$\hat{Y}_{aII} = \frac{\hat{I}_{aI}}{\hat{U}_{aI}} = \frac{\left[S_1 w_1 \bar{U}_{a1} + \frac{3}{4} S_3 w_1^3 \bar{U}_{a1}^3 \right] e^{j\omega t} + \left[G_1 \bar{U}_{a1} + \frac{3}{4} G_3 \bar{U}_{a1}^3 \right] e^{j(\omega t - \gamma_1)}}{\bar{U}_{a1} e^{j(\omega t - \gamma_1)}} +$$

$$+ \frac{S_2 w_1 w_2 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a2} e^{j(\omega t + \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} S_3 w_1^2 w_3 \bar{U}_{a1}^2 \bar{U}_{a3} e^{j(\omega t + \alpha_3)}}{\bar{U}_{a1} e^{j(\omega t - \gamma_1)}} + \dots$$

Uwzględniając wzór (11) można napisać

$$\hat{Y}_{aII} = \hat{Y}_{aI} + \left[S_2 w_1 w_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 + \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} S_3 w_1^2 w_3 \bar{U}_{a1}^2 \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 + \alpha_3)} + \dots \right. \\ \left. + G_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} G_3 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 + \gamma_3 - \alpha_3)} + \dots \right]. \quad (16)$$

Jak wynika z powyższego wzoru, wtórny efekt nieliniowy powoduje zmianę zespolonej przewodności lampy reaktancyjnej i to zarówno jej modułu jak i kąta fazowego. Zmiany te zależą od współczynników nieliniowych lampy, od współczynników sprzężenia zwrotnego, od amplitud poszczególnych składowych harmoniczných napięcia oraz od ich wzajemnego przesunięcia fazowego.

Efekt ten powinien być słabszy od efektu pierwotnego, co wynika z porównania wzoru (11) z wzorem (16). Wartość efektu wtórnego jest zależna od wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego dla częstotliwości podstawowej i dla harmoniczných, czyli od przebiegu tego współczynnika w funkcji częstotliwości. Efekt ten jest duży w tych układach, w których współczynnik sprzężenia zwrotnego wzrasta z częstotliwością, czyli w układach w których jest on większy dla częstotliwości harmoniczných niż dla częstotliwości podstawowej

$$w_1 < w_2 < w_3 < w_4 \dots$$

Do tego typu układów należą układy CR i RL w których współczynnik w_k wzrasta (rys. 4) z rzędem harmonicznej; oba te układy dają reaktancję pojemnościową.

Wtórny efekt nieliniowy powinien być mały w układach, w których współczynnik w_k maleje ze wzrostem rzędu harmonicznej

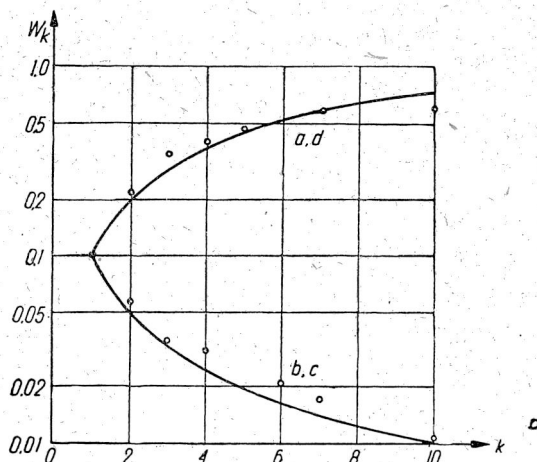
$$w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \dots,$$

taką własność mają np. układy typu RC oraz LR (rys. 4) (czyli oba układy o reaktancji indukcyjnej), co wynika z budowy dzielnika napięć sprzężenia zwrotnego, który przenosi napięcie z obwodu anody do obwodu siatki z tym mniejszą amplitudą, im większa jest ich częstotliwość. W wyniku tego wtórny efekt nieliniowy jest mały, albowiem względna

zawartość składowych harmoniczných napięcia na siatce jest tu mniejsza niż w obwodzie anodowym, przy czym maleje ona z rzędem harmonicznej.

Pewne wyrazy wzoru (16) są ujemne, co wskazuje na możliwość kompensacji efektu wtórnego przez odpowiedni dobór modułu i kąta przesunięcia fazowego współczynnika sprzężenia zwrotnego dla poszczególnych harmoniczných napięcia anodowego. Kompensację taką może ułatwić zastosowanie układów, w których współczynnik sprzężenia zwrotnego ma dla częstotliwości podstawowej inny znak przesunięcia fazowego niż dla częstotliwości harmoniczných.

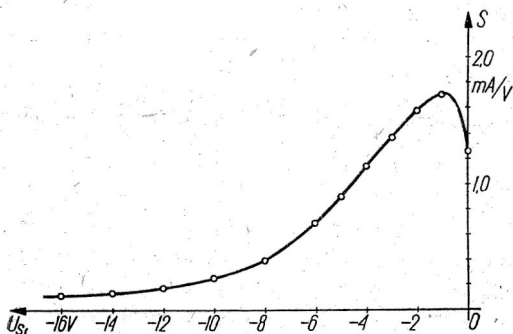
Powstaje w ten sposób układ pewnego rodzaju ujemnego sprzężenia zwrotnego, dzięki czemu powinny zmniejszyć się zmiany reaktancji układu w funkcji amplitudy składowych napięcia anodowego o częstotliwościach harmoniczných.



Rys. 4. Zależność współczynnika sprzężenia zwrotnego od rzędu harmonicznej (przy $w_1=0,10$) układu reaktancyjnego typu CR i RL (krzywe a i d) oraz układu typu RC i LR (krzywe b i c).

5. BADANIE EFEKTÓW NIELINIOWYCH

Wyniki rozważań powyższych sprawdzono na układach reaktancyjnych, w których użyto lampę 6L7 (heptoda). Na wstępie wyko-



Rys. 5. Zależność nachylenia charakterystyki heptody typu 6L7 od napięcia siatki pierwszej przy $U_{a0}=250$ V, $U_{s2}=U_{s4}=100$ V oraz $U_{s3}=-4$ V.

nano pomiary nachylenia charakterystyki tej lampy, których wynik przedstawiono na rys. 5 dla normalnych warunków pracy układu ($U_{a0}=250$ V, $U_{s2}=U_{s4}=100$ V, $U_{s3}=-4$ V). Charakterystykę tę można wyrazić szeregiem potęgowym przy czym dla typowych punktów pracy otrzymuje się następujące wzory:

a) dla $U_{s1}=-9,0$ V

$$S = \dot{S}_1 + S_2 \Delta u_{s1} + S_3 \Delta^2 u_{s1} = 0,28 + 0,10 \Delta u_{s1} + 0,0136 \Delta^2 u_{s1}, \quad (17)$$

b) dla $U_{s1}=-5,0$ V

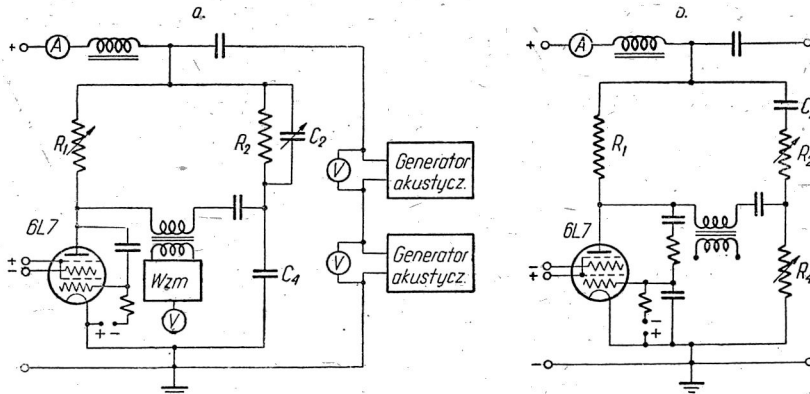
$$S = S_1 + S_2 \Delta u_{s1} + S_3 \Delta^2 u_{s1} + S_4 \Delta^3 u_{s1} = 0,88 + 0,492 \Delta u_{s1} - 0,0056 \Delta^2 u_{s1} - 0,0156 \Delta^3 u_{s1}. \quad (18)$$

Wzory te odtwarzają charakterystykę lampy z dokładnością wystarczającą do obliczeń.

Badania przeprowadzono dla dwóch najbardziej rozpowszechnionych układów reaktancyjnych, a mianowicie dla układów ze sprzężeniem oporowo-pojemnościowym typu CR oraz RC, z których pierwszy ma współczynnik sprzężenia zwrotnego wzrastający, drugi zaś — opadający ze wzrostem rzędu harmonicznej (rys. 4). Współczynnik sprzężenia zwrotnego obrano jednakowy dla obu układów; wynosił on 0,10 dla częstotliwości podstawowej równej 1000 c/s.

Pomiar właściwości układu przeprowadzono metodami mostkowymi ze względu na konieczność mierzenia składowej urojonej przewodności (pojemności lub indukcyjności), oraz kąta stratności układu reaktancyjnego. Do pomiaru pierwszego układu (typu CR), dającego reaktancję pojemnościową, użyto mostka Scheringa (rys. 6a), w któ-

rym tak dobrano wartości oporności, by otrzymać prawidłową pracę lampy. W tym celu opór R_1 , włączony w szereg z lampą, musi mieć oporność o wiele mniejszą od oporności wewnętrznej lampy (jego wartość była rzędu 1000Ω). Mostek zasilany jest napięciem stałym i zmiennym: napięcie stałe, doprowadzane poprzez dławik, służy do zasilania obwodu anodowego lampy, źródło zaś napięcia zmiennego



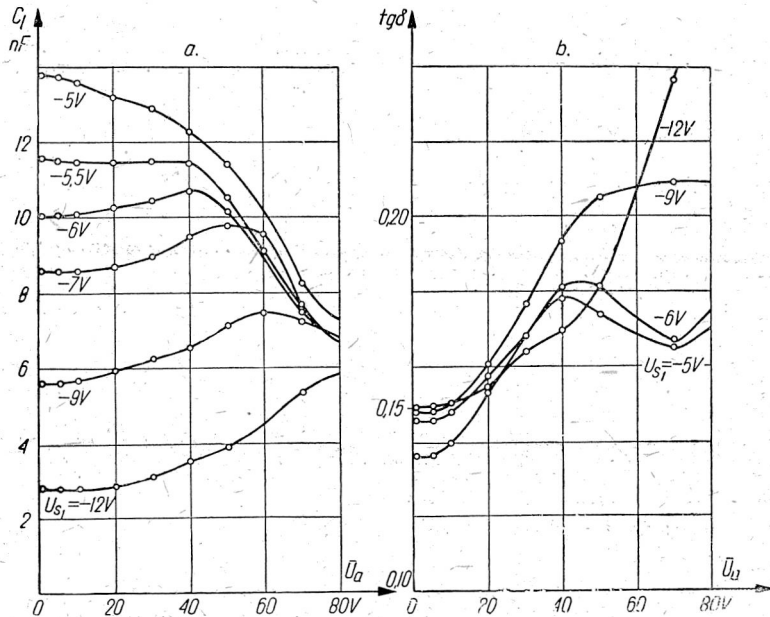
Rys. 6. Schematy układów mostkowych do pomiaru przewodności zespolonej układów reaktancyjnych: a. mostek Scheringa do badania układów o reaktancji pojemnościowej (układów typu CR lub RL), b. mostek Haya do badania układów o reaktancji indukcyjnej (układów typu RC lub LR).

zasila mostek pomiarowy przez kondensator blokujący. Napięcie zmienne pochodzi z dwóch generatorów akustycznych, z których jeden dostarcza napięcia o częstotliwości podstawowej 1000 c/s , drugi zaś daje napięcie harmoniczne o częstotliwości 2000 lub 3000 c/s ; odpowiedni stosunek częstotliwości obu napięć zmiennych oraz ich przesunięcia fazowe kontrolowane są za pomocą oscyloskopu katodowego.

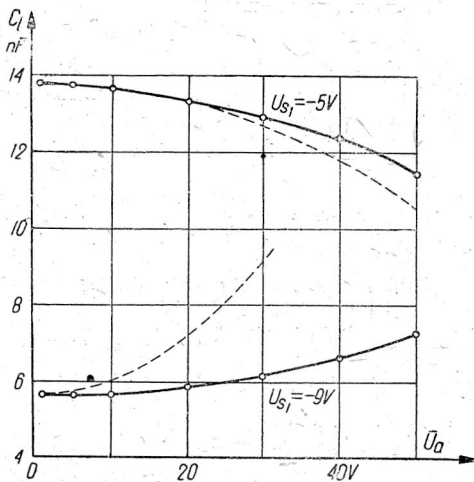
Pomiary drugiego układu reaktancyjnego (typu RC), który przedstawia reaktancję indukcyjną, przeprowadzono przy pomocy mostka Haya (rys. 6b); układ pomiarowy zestawiono podobnie jak poprzedni.

5.1. Pomiary pierwotnego efektu nieliniowego

Pierwsza seria pomiarów miała na celu sprawdzenie zależności wynikających z dyskusji pierwotnego efektu nieliniowego. Badania przeprowadzono przy zasilaniu układu reaktancyjnego sinusoidalnym napięciem zmiennym o częstotliwości 1000 c/s , mierząc przewodność



Rys. 7. Pojemność zastępcza (rys. a) oraz kąt stratności (rys. b) układu reaktancyjnego typu CR, przy różnych wartościach napięcia siatki pierwszej, w funkcji zmiennego napięcia anodowego.



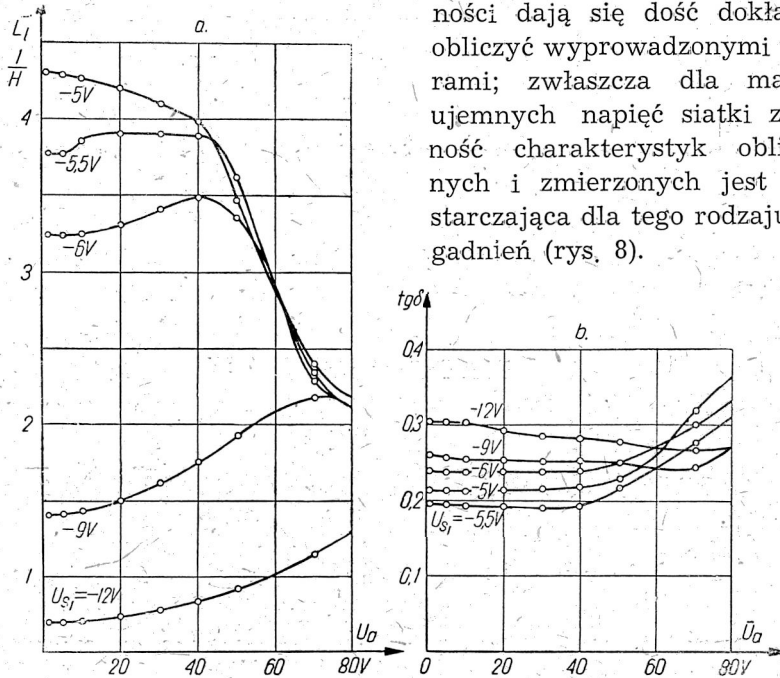
Rys. 8. Pojemność zastępcza układu reaktancyjnego typu CR w funkcji zmiennego napięcia anodowego: — wartości zmierzone, - - - - - wartości obliczone.

zespoloną układu dla różnych wartości zmiennego napięcia anodowego w granicach od 1 do 100 V (wartość skuteczna). Układ badano dla różnych punktów pracy lampy, zarówno na wklęsłej jak i na wypukłej części jej charakterystyki, aby uzyskać wszechstronny pogląd na zachowanie się lampy.

Wyniki badania układu typu RC podane są w postaci wykresu na rys. 7. W punktach pracy, leżących na wklęsłej części charakterystyki (napięcie ujemne większe od -6,0 V), pojemność układu

wzrasta przy wzroście zmiennego napięcia anodowego; jest to zgodne ze wzorem (11), gdyż w tym przypadku współczynniki S_1 i S_3 mają znaki jednakowe (wzór 17). W punkcie pracy leżącym na wypukłej części charakterystyki ($U_{s1} = -5,0$ V) występuje zjawisko odwrotne: krzywa zmian pojemności jest opadająca, również zgodnie ze wzorem (11), gdyż tutaj S_1 i S_3 mają różne znaki (wzór 18). Dla pośredniego położenia punktu pracy (w punkcie przegięcia charakterystyki) ($U_{s1} = -5,5$ V), krzywa jest prawie pozioma na dużym odcinku.

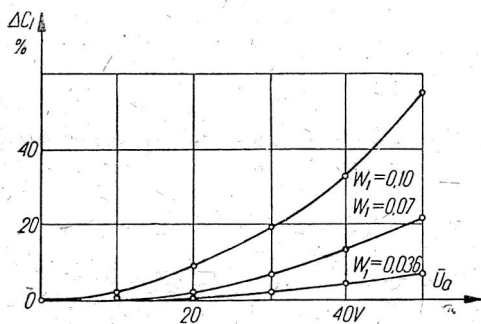
Przebiegi zmian pojemności dają się dość dokładnie obliczyć wyprowadzonymi wzorami; zwłaszcza dla małych ujemnych napięć siatki zgodność charakterystyk obliczonych i zmierzonych jest wystarczająca dla tego rodzaju zagadnień (rys. 8).



Rys. 9. Odwrotność zastępczej indukcyjności (rys. a) oraz współczynnik strat (rys. b) układu reaktancyjnego typu RC przy różnych wartościach napięcia siatki pierwszej w funkcji zmiennego napięcia anodowego,

Podobne pomiary wykonano w układzie typu RC; wyniki, przedstawione na rys. 9 są zupełnie podobne do omówionych powyżej (na rysunku tym na osi pionowej odcięte są wartości odwrotności indukcyjności układu jako wielkości proporcjonalnej do jego przewodności urojonej).

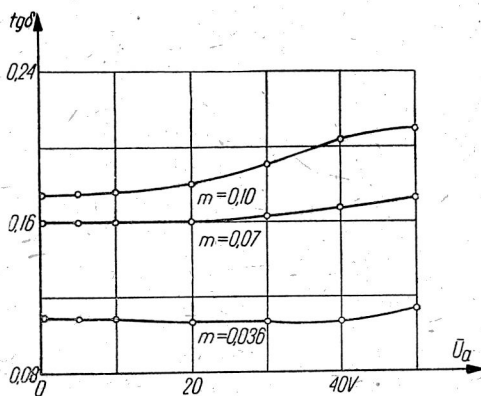
Następnie dokonano sprawdzenia wpływu wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego na wielkość pierwotnego efektu nieliniowego.



Rys. 10. Względne zmiany zastępczej pojemności układu reaktancyjnego typu CR w funkcji zmiennego napięcia anodowego przy różnych wartościach współczynnika sprzężenia zwrotnego (0,10; 0,07; 0,036).

zależności są prawie dokładnie parabolami kwadratowymi, co potwierdza prawidłowość wyprowadzonych wzorów.

We wszystkich omawianych powyżej pomiarach sprawdzano również wpływ wartości zmiennego napięcia anodowego na kąt stratności układu reaktancyjnego. Na ogół stwierdzono, że wzrasta on przy wzroście tego napięcia (rys. 7 i 9), przebiegi te są jednak nieregularne i trudne do obliczenia. Natomiast zależność współczynnika strat od współczynnika sprzężenia zwrotnego jest zupełnie wyraźna i zgodna z wzorem (4) i (5), a mianowicie kąt ten wzrasta z wartością w_1 (rys. 11); również zmiany kąta stratności w funkcji wartości zmiennego napięcia anodowego są tym większe, im większe jest w_1 .

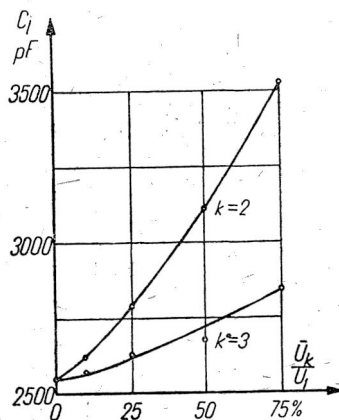


Rys. 11. Zależność kąta stratności układu reaktancyjnego typu CR od napięcia anodowego przy różnych wartościach współczynnika sprzężenia zwrotnego (0,10; 0,07; 0,036)

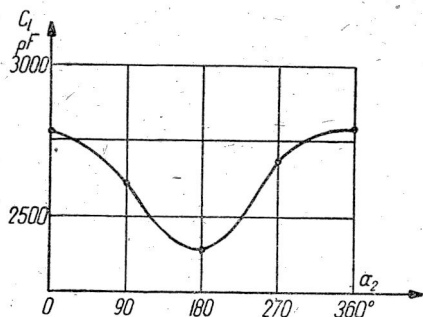
5.2. Pomiary wtórnego efektu nieliniowego

Wtórny efekt nieliniowy badano w układach przedstawionych na rys. 6, przy czym zasilanie mostka napięciem zmiennym odbywało się z dwóch generatorów akustycznych połączonych szeregowo, z których jeden dostarczał napięcia o częstotliwości podstawowej 1000 c/s, drugi zaś napięcia harmonicznego o częstotliwości 2000 lub 3000 c/s. Potrzebną częstotliwość i fazę generatora harmonicznego, kontrolowano oscyloskopem katodowym i utrzymywano przez regulację ręczną bez większych trudności.

Pomiary przeprowadzono na układach typu CR i RC, przy czym w pierwszym rzędzie sprawdzono zależność ich współczynnika sprzężenia zwrotnego od częstotliwości. Pomiar ten wykonano analizatorem harmonicznym, mierząc napięcie danej częstotliwości między katodą i anodą oraz pomiędzy katodą i siatką, przy zasilaniu układu



Rys. 12. Wpływ zawartości składowych drugiej i trzeciej harmonicznej napięcia anodowego na zastępczą pojemność układu reaktancyjnego typu CR.



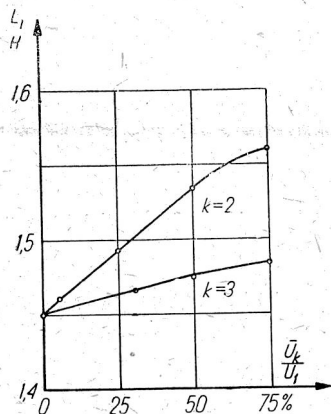
Rys. 13. Wpływ przesunięcia fazowego drugiej harmonicznej napięcia anodowego względem jego składowej podstawowej na zastępczą pojemność układu reaktancyjnego typu CR.

napięciem zmiennym o częstotliwości 1000, 2000, 3000... c/s. Uzyskane w ten sposób wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego naniesiono na rys. 4 dla porównania z obliczonymi wartościami; zgodność ich jest zupełnie wystarczająca.

Wyniki pomiarów układu typu CR podane są na rys. 12 i 13. Pierwsza seria pomiarów była wykonana przy zasilaniu układu napięciem o częstotliwości podstawowej 1000 c/s o stałej amplitudzie 20 V, oraz

napięciem o częstotliwości harmonicznej (2000 lub 3000 c/s), którego amplitudę zmieniano od 0 do 15 V przy utrzymaniu stałego

przesunięcia fazowego pomiędzy tymi napięciami. Otrzymuje się przy tym (rys. 12) prawie liniową zależność pojemności układu od amplitudy napięcia harmonicznego, przy czym nachylenie tych zmian jest znacznie większe (3-krotnie) dla drugiej harmonicznej niż dla trzeciej.



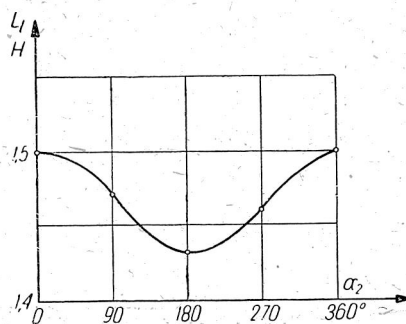
Rys. 14. Wpływ zawartości składowej drugiej i trzeciej harmonicznej napięcia anodowego na zastępczą indukcyjność układu reaktancyjnego typu RC.

miarów (rys. 14 i 15) są jakościowo takie same jak dla poprzedniego układu przy o wiele (około 6-krotnie) mniejszych procentowo zmianach indukcyjności w funkcji zawartości harmonicznych. Potwierdza to wyższość układów o zmniejszającym się w funkcji częstotliwości współczynnika sprzężenia zwrotnego nad układami o wzrastającym współczynnikiem w_k , przewidzianą w poprzednim rozdziale.

Liczbowe wartości efektu wtórnego są o wiele mniejsze od wartości efektu pierwotnego, niemniej jednak efekt ten może być szkodliwy w pewnych przypadkach, przy występowaniu silnie zniekształconego napięcia anodowego.

Drugą serię pomiarów wykonano przy stałych amplitudach napięcia podstawowego i harmonicznego, zmieniano natomiast kąt przesunięcia fazowego pomiędzy nimi w granicach od 0 do 360° . Wyniki przedstawione na rys. 13 wykazują cykliczną (prawie sinusoidalną) zależność zmian pojemności od kąta przesunięcia fazowego napięcia harmonicznego względem napięcia podstawowego, zgodnie ze wzorem (16).

Te same pomiary powtórzono w układzie typu RC, którego współczynnik sprzężenia zwrotnego maleje w funkcji częstotliwości. Wyniki po-



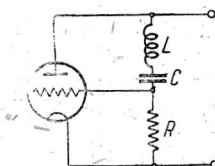
Rys. 15. Wpływ przesunięcia fazowego drugiej harmonicznej napięcia anodowego względem jego składowej podstawowej na zastępczą indukcyjność układu reaktancyjnego typu RC.

6. KOMPENSACJA EFEKTÓW NIELINIOWYCH

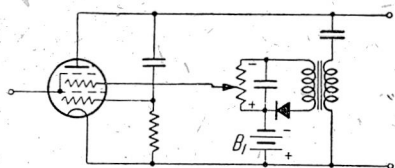
Efekt nieliniowy jest niepożądany w wielu układach reaktancyjnych, w których zależy na utrzymaniu stałej wartości impedancji układu, należy przeto rozpatrzyć metody jego kompensacji.

Pierwsza możliwość została częściowo omówiona w rozdziale 4; zastosowanie pewnego rodzaju ujemnego sprzężenia zwrotnego, polegającego na zmianie znaku kąta przesunięcia fazowego dla częstotliwości harmonicznych w stosunku do jego znaku dla częstotliwości podstawowej. Układ tego rodzaju powinien wykazywać mniejszy wpływ efektu wtórnego niż zwykły układ reaktancyjny.

Najprostszy taki układ przedstawiono na rys. 16; gałąź sprzężenia zwrotnego zawiera pomiędzy anodą i siatką cewkę indukcyjną L i kondensator C połączone szeregowo. Częstotliwość rezonansowa układu LC jest większa od częstotliwości roboczej, a więc dla częstotliwości rezonansowej układ sprowadza się do zwykłego układu typu CR , natomiast dla częstotliwości harmonicznych zastępuje oporność



Rys. 16. Układ reaktancyjny ujemnym sprzężeniem zwrotnym dla składowych harmonicznych.



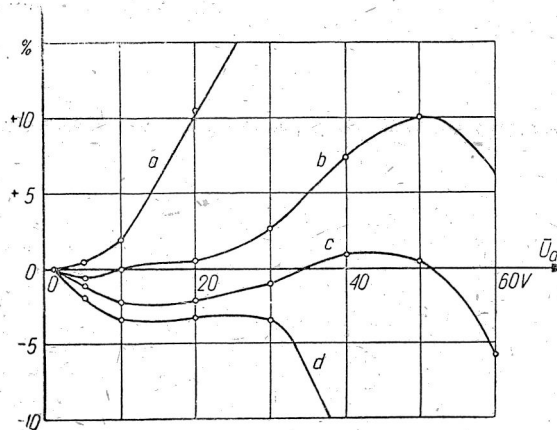
Rys. 17. Układ reaktancyjny z automatyczną kompensacją pierwotnego efektu nieliniowego przy pomocy zmiany napięcia siatki.

gałęzi „anoda — siatka“ jest indukcyjna, a zatem dla harmonicznych układ przypomina układ LR .

Pomiary wykonane na tym układzie potwierdziły przypuszczenia; wtórny efekt nieliniowy był bardzo mały, zmiana reaktancji układu wynosiła zaledwie $0,2 \div 0,3\%$ przy przyłożeniu na anodę lampy 25% napięcia drugiej lub trzeciej harmonicznej. Natomiast pierwotny efekt nieliniowy jest w tym układzie nieco większy niż w układzie zwykłym, a przeto stosowanie układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym nie daje właściwie w tym przypadku korzyści.

Pierwotny efekt nieliniowy można tłumaczyć zmianą średniej wartości nachylenia lampy przy zmianie amplitudy jej napięcia wzbudzenia; np. przy pracy na dolnym zakrzywieniu charakterystyki zwiększenie amplitudy napięcia wzbudzenia powoduje wchodzenie

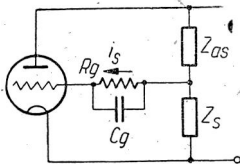
w obszar o większym nachyleniu, czyli następuje zwiększenie jego średniej wartości. Można temu przeciwdziałać przez odpowiednie



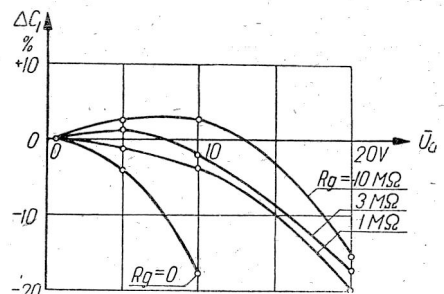
Rys. 18. Zmiany zastępczej pojemności układu reaktancyjnego typu CR w funkcji zmiennego napięcia anodowego: a. układ bez kompensacji, b, c, d. układy z coraz silniejszą kompensacją pierwotnego efektu nieliniowego w układzie z rys. 17.

anodowym. W ten sposób przy wzroście zmiennego napięcia anodowego i siatkowego następuje wzrost ujemnego napięcia siatki trzeciej, co samoczynnie kompensuje zmianę nachylenia lampy.

Wyniki badania układu kompensacyjnego podano na rys. 18;



Rys. 19. Układ reaktancyjny z oporem siatkowym.



Rys. 20. Zmiany zastępczej pojemności układu reaktancyjnego typu CR w funkcji zmiennego napięcia anodowego przy różnych wartościach oporu siatkowego.

górna krzywa przedstawia procentowe zmiany pojemności układu reaktancyjnego bez kompensacji, dalsze krzywe, położone coraz niżej,

przesunięcie punktu pracy w obszar o mniejszym nachyleniu, tak by średnia jego wartość pozostała bez zmiany. Można to przeprowadzić automatycznie, np. przez zastosowanie ujemnego napięcia siatki, uzależnionego od wartości zmiennego napięcia anodowego, np. w układzie przedstawionym na rys. 17; trzecia siatka heptody dostaje stałe ujemne napięcie z baterii B_1 oraz napięcie z prostownika zasilanego zmiennym napięciem

przedstawiają zmiany tej pojemności przy coraz większym stopniu kompensacji. Uzyskana poprawa jest bardzo znaczna, gdyż o ile bez kompensacji zmianą napięcia od 0 do 20 V powoduje zmianę pojemności o 10,4%, w granicach 0÷50 V o 44%, to z kompensacją można utrzymać pojemność z dokładnością $\pm 1\%$ w zakresie napięć od 0 do 23 V, w granicach zaś $\pm 2,5\%$ w zakresie napięć od 0 do 52 V.

Samoczynną kompensację pierwotnego efektu nieliniowego można uzyskać również za pomocą oporu zabocznikowanego kondensatorem i włączonego w obwód siatki (rys. 19). Prąd siatki zależny od zmiennego napięcia siatki (a więc i od zmiennego napięcia anody) powoduje przesunięcie punktu pracy lampy przy wszelkich zmianach napięcia anodowego, np. jego wzrost powoduje wzrost ujemnego napięcia siatki. W ten sposób można uzyskać samoczynną kompensację pierwotnego efektu nieliniowego przy pracy na wklęsłej części charakterystyki lampy; wymaga to jednak pracy lampy z prądem siatki.

Wyniki badania takiego układu, przeprowadzonego przy różnych wartościach oporu siatkowego, przedstawiono na rys. 20. Przez odpowiedni dobór oporu siatkowego (np. 3 M Ω) można osiągnąć samoczynną kompensację, jednak w dość wąskim obszarze amplitud napięcia anodowego (do ok. 10 V), o wiele węższym, niż za pomocą automatyki z oddzielnym prostownikiem.

Działanie prądu siatki nie ogranicza się tylko do wytwarzania ujemnego napięcia, czyli do przesuwania punktu pracy lampy; nie należy bowiem zapominać o tym, że prąd siatki jest silnie odkształcony. Prąd ten wytwarza na oporności obwodu „katoda — siatka” spadek napięcia silnie odkształcony, obfitujący w harmoniczne, co zmienia wartość współczynnika sprzężenia zwrotnego zarówno dla częstotliwości podstawowej jak i dla harmonicznych. Pojawienie się prądu siatki zmienia więc poważnie własności układu reaktancyjnego, co nie ma jednak praktycznego znaczenia, gdyż układy reaktancyjne pracują zazwyczaj bez prądu siatki. Zjawisko to wymaga natomiast szczególnego uwzględnienia w generatorach lampowych ze sprzężeniem zwrotnym, które zawsze pracują z prądem siatki.

7. WNIOSKI

Przy uwzględnieniu nieliniowości charakterystyki prądu anodowego lampy można wyodrębnić dwa efekty, powodujące zmianę reaktancji i współczynnika strat układu reaktancyjnego:

1. Pierwotny efekt nieliniowy, powstający wskutek zmiany średniego nachylenia charakterystyki lampy przy zmianie wartości zmiennego napięcia anodowego. Efekt ten powoduje wzrost lub zmniejszenie reaktancji w funkcji napięcia anodowego wg paraboli kwadratowej, przy tym zmiany te są proporcjonalne do kwadratu współczynnika sprzężenia zwrotnego.

Skutki tego efektu można zmniejszyć przez pracę przy małym zmiennym napięciu anodowym, przez dobór odpowiedniego punktu pracy lampy reaktancyjnej lub przez dobór małej wartości współczynnika sprzężenia zwrotnego. Możliwe jest również stosowanie automatycznej kompensacji tego efektu za pomocą układów regulacyjnych.

2. Wtórny efekt nieliniowy, pojawiający się przy istnieniu napięć harmoniczných w obwodzie anodowym, jest wynikiem powstawania składowych o częstotliwościach różnicowych poszczególnych składników, a mających częstotliwość równą częstotliwości podstawowej. Efekt ten daje również zmiany reaktancji i kąta stratności układu reaktancyjnego, zależne od współczynników nieliniowych lampy, od współczynnika sprzężenia zwrotnego dla podstawowej i harmoniczných, oraz od przesunięcia fazowego pomiędzy poszczególnymi składowymi napięciami.

Znaczne zmniejszenie efektu wtórnego można uzyskać przez zastosowanie układu o malejącym w funkcji częstotliwości współczynnikiem sprzężenia zwrotnego, np. układów typu RC lub LR , oraz za pomocą układów z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.

Oba te efekty nieliniowe poważnie wpływają na właściwości układów reaktancyjnych, a przeto nie można ich pomijać przy rozpatrywaniu tych układów. Podobne efekty mogą występować również w innych układach o sprzężeniu zwrotnym, np. we wzmacniaczach lub generatorach lampowych, zagadnienie to wymaga szczegółowego opracowania.

WYKAZ LITERATURY

1. Drobów S. A. — Radiopieredajuszczije ustrojstwa — 1951, Moskwa.
2. Mayo C. G. — An electronic Wagner earthing device — *Muirhead Technique*, t. I, Nr 1, 1947, s. 6.
3. Smirienin B. A. — Sprawocznik po radiotiechnice — 1950, Moskwa.
4. Winlund E. S. — Drift analysis of the Crosby frequency — modulation transmitter circuit — *P. I. R. E.*, t. XXIX, Nr 7, 1941, s. 390.
5. Zagajewski T. — Analiza pracy generatorów samowzbudnych etoda współczynników nieliniowych — *Prace P. I. T.*, t. II, Nr 3, 1951, s. 1.

Т. ЗАГАЕВСКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В РЕАКТИВНЫХ ЛАМПАХ

Резюме

Целью настоящего труда является исследование влияния нелинейности характеристики лампы на полную проводимость реактивных ламп с обратной связью (рис. 1). Принимая кривую характеристики лампы за линейную, мы получим для полной проводимости такой лампы формулу

$$\hat{Y}_{a0} = \frac{1}{\varrho} + S_1 \hat{w}_1 = \left(\frac{1}{\varrho} + S_1 w_{1r} \right) + j S_1 w_{1i} \quad (1)$$

где

$$w_1 = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_d} = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} = w_{1r} + j w_{1i} = w_1 e^{j\gamma_1} \quad (2)$$

равно коэффициенту обратной связи.

Принимая, что нелинейная характеристика лампы выражается рядом

$$i_a = S_1 u_s + S_2 u_s^2 + S_3 u_s^3 + G_1 u_a + G_2 u_a^2 + G_3 u_a^3 \quad (3)$$

то, после приложения на анод синусоидального переменного напряжения с амплитудой \bar{U}_a — полная проводимость системы выразится формулой:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{a1} &= S_1 \hat{w}_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right] + G_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{G_3}{G_1} \bar{U}_a^2 \right] \cong \\ &\cong S_1 \hat{w}_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right] = \hat{Y}_{a0} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Формулы эти указывают нам, что полная проводимость реактивной лампы зависит от амплитуды переменного анодного напряжения, а именно — зависимость эта при принятых положениях является пропорциональной квадрату напряжения. Полная проводимость лампы возрастает вместе с амплитудой \bar{U}_a , если постоянные S_1 и S_3 имеют одинаковые знаки, и уменьшается, если знаки эти противоположны. Явление это, называемое первичным нелинейным эффектом, объясняется физически изменением средней крутизны характеристики лампы как функции величины анодного и сеточного напряжений, вследствие чего зави-

симось между силой тока и анодным напряжением лампы становится нелинейной, а полная проводимость лампы изменяется.

Дальнейший нелинейный эффект в реактивной лампе возникает в случае, если анодное напряжение лампы искажено, иначе говоря, если оно содержит гармонические составляющие, напр. :

$$u_a = \bar{U}_{a1} \sin(\omega t - \gamma_1) + \bar{U}_{a2} \sin(2\omega t + \alpha_2 - \gamma_2) + \bar{U}_{a3} \sin(3\omega t + \alpha_3 - \gamma_3) + \dots \quad (5)$$

Величину сеточного напряжения можно определить, если известна величина коэффициента обратной связи для основной частоты и для частоты гармоник

$$\hat{w}_1 = \frac{\hat{U}_{s1}}{\hat{U}_{a1}} = w_1 e^{j\gamma_1}, \quad \hat{w}_2 = \frac{\hat{U}_{s2}}{\hat{U}_{a2}} = w_2 e^{j\gamma_2}, \quad \hat{w}_k = \frac{\hat{U}_{sk}}{\hat{U}_{ak}} = w_k e^{j\gamma_k}.$$

Пользуясь этими формулами а также формулой (3), мы рассчитываем полную проводимость реактивной лампы

$$\hat{Y}_{aII} = \hat{Y}_{aI} + \left[S_2 w_1 w_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 + \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} S_3 w_1^2 w_3 \bar{U}_{a1}^2 \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 + \alpha_3)} + \right. \\ \left. + G_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} G_3 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 + \gamma_3 - \alpha_3)} + \dots \right] \quad (6)$$

которая следовательно зависит от величины и фазы гармонических составляющих анодного напряжения; влияние гармоник — называемое вторичным нелинейным эффектом — сильно зависит от величины коэффициента обратной связи и зависимости последнего от ряда гармоник. Эффект этот значителен в цепях в которых w_k возрастает вместе с рядом гармоники

$$w_1 < w_2 < w_3 < w_4 \dots;$$

напр. в системах CR и RL (рис. 3а и d) зависимость эта представлена на рис. 4.

Вторичный нелинейный эффект незначителен в системах с коэффициентом w_k , уменьшающимся вместе с рядом гармоники:

$$w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \dots;$$

напр. в системах RC и LR (рис. 3b и c) зависимость эта представлена на рис. 4.

Теоретические рассуждения проверены на опыте в реактивных лампах гептодах 6L7, которых крутизна характеристики пред-

ставлена на рис. 5. Коэффициенты S_1 и S_3 этой лампы имеют одинаковые знаки при $U_{g1} < -5,5 b$ и разные знаки при $U_{g1} > -5,5 b$.

Полная проводимость реактивных ламп была измерена при помощи моста Шеринга или Гая (рис. 6), которые были питаны двумя акустическими генераторами при напряжении с частотой 1000 гц, в одном из них и гармониками 2000 или 3000 гц в другом. Соотношение частот и фаза обоих напряжений были проверяемы при помощи катодного осциллоскопа. Первичный нелинейный эффект был исследован при питании системы синусоидальным напряжением 1000 гц; зависимость реактивной проводимости susceptанса (реактивной проводимостью) системы типа CR и RC представлены на рис. 7 и 9; проводимость эта возрастает вместе с величиной \bar{U}_a при значительных отрицательных U_{g1} , и уменьшается при $U_{g1} > -5,5 b$, а для $U_{g1} = -5,5 b$ она почти не сависит от \bar{U}_a . Это согласно с формулой (4), так как для $U_{g1} = -5,5 b$ происходит перемена знака постоянной S_3 .

Действительные кривые в достаточной степени согласны с величинами рассчитанными при помощи выведенных формул (рис. 8).

Влияние первичного нелинейного эффекта сильно зависит от коэффициента обратной связи; на рис. 10 представлены относительные ёмкостные перемены реактивных ламп при $\omega_1 = 0,036; 0,070$ и $0,10$, которые почти точно пропорциональны квадрату величины ω_1 .

Вторичный нелинейный эффект был исследован при питании системы двумя напряжениями: одним с частотой 1000 и другим с гармонической частотой 2000 или 3000 гц. Первые измерения были исполнены при постоянном сдвиге фаз между этими напряжениями, при возрастающей величине гармонического напряжения. В системе типа CR была получена почти линейная зависимость между susceptансом лампы и величиной гармонического напряжения (рис. 12), причём крутизна изменений для второй гармоники в трое больше чем для третьей. Результатом второй серии измерений, исполненной при постоянной амплитуде обоих напряжений и при изменении сдвига фаз между ними, была циклическая зависимость (рис. 13), согласная с формулой (6).

Те же измерения, исполненные на системе типа RC (которой коэффициент обратной связи уменьшается вместе с рядом гармоники) дали в результате схожие кривые (рис. 14 и 15), однако величины изменения были значительно (в 6 раз) меньше, что является доказательством превосходства систем этого типа.

Нелинейные эффекты во многих случаях вредны и они могут быть уменьшены при помощи соответственных поправочных систем. Первой возможностью является применение систем с отрицательной обратной связью для гармонических составляющих, а именно дающих для гармонических составляющих сдвиг фазы обратный по отношению к сдвигу фазы основной составляющей. Одна из таких систем представлена на рис. 16: ветвь обратной связи содержит систему последовательного резонанса LC , имеющего резонансную частоту больше, чем рабочая частота.

Таким образом система эта является системой типа CR для рабочей частоты, но типа RC для гармоничных частот; исследование этой системы показало, что вторичный нелинейный эффект её очень не велик (ок. $0,2\%$ при $U_2:U_1=0,25$), но первичный нелинейный эффект здесь сильнее, чем в обыкновенных системах.

Хорошие результаты даёт система автоматической компенсации первичного нелинейного эффекта при помощи перемены пункта работы лампы. Эффект этот мы достигаем, изменяя среднюю крутизну характеристики лампы, напр. на выпуклой части характеристики возникает увеличение её при увеличении амплитуды приложенного напряжения; итак, если возрастает анодное напряжение, то следует передвинуть пункт работы лампы в область с меньшей крутизной, напр. увеличивая отрицательное напряжение третьей сетки.

Рис. 17 представляет систему автоматической компенсации, в которой отрицательное напряжение третьей сетки зависит от переменного анодного напряжения, которое мы получаем от выпрямителя, питаемого анодным напряжением. Результаты действия этой системы представлены на рис. 18, в котором верхняя кривая даёт изменения ёмкости реактивной лампы без компенсации, а остальные кривые — изменения ёмкости при дальнейшем возрастании компенсации. Компенсация уменьшает изменения ёмкости с 10% на 1% в пределах анодного напряжения \bar{U}_a от 0 до 20 в.

Автоматическая компенсация первичного нелинейного эффекта получается также при помощи сеточного сопротивления (рис. 19), если система работает с сеточным током. При значительной величине сопротивления R_g (напр. 3 мегомы) получается отчётливая компенсация (рис. 20), однако в довольно узких пределах изменений анодного напряжения; система эта менее выгодна, чем система с компенсацией в третьей сетке.

T. ZAGAJEWSKI

NONLINEAR PHENOMENA IN REACTANCE VALVE CIRCUITS

Summary

This paper examines the influence of nonlinear valve characteristic on the admittance presented by the reactance valve circuits employing feedback (Fig. 1).

If a linear valve characteristic is assumed this admittance can be written as follows:

$$\hat{Y}_{a0} = \frac{1}{Q} + S_1 \hat{w}_1 = \left(\frac{1}{Q} + S_1 w_{1r} \right) + j S_1 w_{1i} \quad (1)$$

where

$$\hat{w}_1 = \frac{\hat{U}_s}{\hat{U}_a} = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_s + \hat{Z}_{as}} = w_{1r} + j w_{1j} = w_1 e^{j\gamma_1} \quad (2)$$

is the feedback factor.

If now a nonlinear valve characteristic determined by the following power series is assumed

$$i_a = S_1 u_s + S_2 u_s^2 + S_3 u_s^3 + G_1 u_a + G_2 u_a^2 + G_3 u_a^3 \quad (3)$$

then the admittance of the reactance valve circuit is defined by the following expression in case of the sinusoidally varying anode voltage with an amplitude \bar{U}_a

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{a1} &= S_1 \hat{w}_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right] + G_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{G_3}{G_1} \bar{U}_a^2 \right] \cong \\ &\cong S_1 \hat{w}_1 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right] = \hat{Y}_{a0} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{S_3}{S_1} w_1^2 \bar{U}_a^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

The above formulae under the assumptions made indicate a square relationship between the admittance of the reactance valve circuits and the amplitude of the anode voltage. It shows also that the admittance increases, when \bar{U}_a increases and S_1 , S_3 have the same signs. The opposite signs give a decrease of the admittance. This phenomenon called the primary nonlinear effect can be explained by the nonlinear relation between the anode voltage and the anode current, which leads to a variation of the average slope of the valve with varying anode and grid voltages, thus changing also the valve admittance.

Another nonlinear effect in the reactance valve circuits results from the distorted waveform of the anode voltage, which may contain for example the following harmonic components:

$$u_a = \bar{U}_{a1} \sin(\omega t - \gamma_1) + \bar{U}_{a2} \sin(2\omega t + \alpha_2 - \gamma_2) + \bar{U}_{a3} \sin(3\omega t + \alpha_3 - \gamma_3) + \dots \quad (5)$$

The value of the grid voltage can be determined, if the value of the feedback factor at the fundamental and harmonic frequencies are known

$$\hat{w}_1 = \frac{\hat{U}_{s1}}{\hat{U}_{a1}} = w_1 e^{j\gamma_1}, \quad \hat{w}_2 = \frac{\hat{U}_{s2}}{\hat{U}_{a2}} = w_2 e^{j\gamma_2}, \quad \hat{w}_k = \frac{\hat{U}_{sk}}{\hat{U}_{ak}} = w_k e^{j\gamma_k}.$$

Using the above formulae and the expression (3) the susceptance component of the admittance can be evaluated as

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{a11} = \hat{Y}_{a1} + [S_2 w_1 w_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 + \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} S_3 w_1^2 w_3 \bar{U}_{a1}^2 \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 + \alpha_3)} + \\ + G_2 \bar{U}_{a2} e^{j(\gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_2 + 90^\circ)} - \frac{1}{3} G_3 \bar{U}_{a1} \bar{U}_{a3} e^{j(\gamma_1 + \gamma_3 - \alpha_3)} + \dots]. \quad (6) \end{aligned}$$

This value of the susceptance depends upon the amplitude and phase of the anode voltage harmonic components; the influence of harmonics called the secondary nonlinear effect depends strongly upon the value of the feedback factor and its dependence on the order of the harmonic. This influence is pronounced in circuits with w_k increasing with the harmonic order.

$$w_1 < w_2 < w_3 < w_4 \dots$$

Fig. 4 represents the above relationship in *CR* and *RL* networks (Fig. 3 a, d).

The secondary nonlinear effect is small when w_k decreases with the harmonic order $w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \dots$. The same relationship for networks of the *RC* and *LR* type (Fig. 3 b, c) is represented by Fig. 4.

The above theoretical considerations were checked experimentally using a reactance valve circuit, with a 6L7 valve. The transconductance characteristic of it is shown in Fig. 5. The signs of the coefficients S_1 and S_3 are the same for $U_{g1} < -5,5$ V and opposite for $U_{g1} > -5,5$ V.

The admittance was measured with a Schering or Hay impedance bridge (Fig. 6) fed by two audio oscillators. One of them supplied

a 1000 c/s fundamental frequency voltage and the other one a voltage of a harmonic frequency of 2000 or 3000 c/s. The frequency ratio and the relative phases of these two voltages were checked by means of an oscilloscope.

The primary nonlinear effect was examined by the use of a 1000 c/s signal. The admittance characteristic of the *CR* and *RC* circuits represent Fig. 7 and 9. The admittance increases with increasing \bar{U}_a at large negative grid voltages, then decreases for $U_{g1} > -5,5$ V, being independent of \bar{U}_a at $\bar{U}_{g1} = -5,5$ V. It agrees with the formula (4) since at this value of U_{g1} the constant S_3 changes its sign. The characteristics evaluated by means of the above formula agree very closely with those obtained experimentally.

The influence of the primary nonlinear effect depends strongly upon the feedback factor. Fig. 10 represents relative variations of the capacitance of the reactance valve for $w_1 = 0,036; 0,070$ and $0,1$. These variations follow very closely the square law.

The secondary nonlinear effect was measured by means of two signals one at the fundamental frequency of 1000 c/s and the other at the harmonic frequency of 2000 or 3000 c/s. The first part of measurements was taken at a constant phase shift between the above two signals and for the steadily increasing value of the harmonic frequency signal

The *CR* network gives a nearly linear relation between the admittance of the valve and the amplitude of the harmonic voltage (Fig. 12). The slope of this characteristic in case of the second harmonic is about three times larger than in case of the third harmonic.

The other set of measurements performed at a constant voltage of both signals and when varying their relative phase angle showed (Fig. 13) a periodic relationship in agreement with the formula (6). The same measurement made for an *RC* network (the feedback factor of which decreases with increasing order of harmonic) gave similar results (Fig. 14 and Fig. 15) but with a much smaller amplitude of variation (6-fold) which proves the superiority of this type of network.

Suitable correcting networks reduce these — often very undesirable — nonlinear effects. One of the methods uses negative feedback for the harmonic components i. e. the opposite phase shifts for the fundamentals and harmonics. Such a circuit is shown in Fig. 16. The feedback loop contains a series *LC* resonant circuit, which ope-

rates at a frequency lower than its own resonance frequency. In such a case this circuit behaves like a CR network at the fundamental frequency and like an RC network at harmonic frequencies.

Measurement carried out on the above type of circuit showed a very small secondary nonlinear effect (0,2% for $U_2 : U_1 = 0,25$) but a more pronounced primary nonlinear effect, than in common circuits.

The automatic compensation of the primary nonlinear effect gives also satisfactory results. It is obtained by the variation of the operating point on the valve characteristic which results in the change of the average slope, e. g. on the convex part of the characteristic where the slope increases, when the amplitude of the applied signal increases. If the anode voltage increases, then the operating point has to be shifted towards the part of the characteristic having lower slope by, for instance, suitably increased third grid negative bias.

Fig. 17 represents such an automatically compensated arrangement. Here the negative bias supply for the third grid is obtained by rectification of the r. f. anode voltage. The performance of this circuit is illustrated by Fig. 18. The upper curve corresponds to the compensated circuit the lower curves define the amount of the capacitance variation for ever increasing compensation. It is evident therefore that the applied compensation reduces the capacitance variation from 10% to 1% for the variation of the anode voltage from zero to 20 V.

The automatic compensation of the primary nonlinear effect can be also obtained — in case of the grid current flow — by the use of the grid-leak resistance (Fig. 19). For sufficiently large values of this resistance (e. 3 M Ω) some amount of compensation (Fig. 20) is obtained, which holds only for a fairly narrow range of the anode voltage variations. This circuit therefore is much less useful than the previous one.



WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
4. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim lub francuskim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza obszerniejsze streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem terminologii w języku rosyjskim oraz angielskim lub francuskim.
5. Każda praca napisana w języku obcym powinna być zaopatrzona w obszerne streszczenie w języku polskim a także streszczenia w innych językach.
6. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy lub nazwisko autora.
7. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
8. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom lub numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN.



Cena 18.-zł