

A 19111

# GEODEZJA I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY  
TOM I ♦ ZESZYT 1-2

1 9 5 2



INSTYTUT GEODEZJI POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

# GEODEZJA I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY  
TOM I ♦ ZESZYT 1 - 2



1 9 5 2

---

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## KOLEGIUM REDAKCYJNE

Edward Warchałowski (przewodniczący), Jan Różycki (redaktor), Bronisław Dzikiewicz (zastępca redaktora), Zygmunt Kowalczyk, Henryk Leśniok, Franciszek Biernacki, Brunon Piasecki

Adres Redakcji: Zakład Geodezji Wyższej (Politechnika) Warszawa,  
Pl. Jedności Robotniczej 1

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1952

Nakład 700 egz.

Zamówienie z dn. 25.II.1952

Arkuszy wyd. 10 druk. 8

Druk ukończono w czerwcu 1952

Papier druk. sat. kl. V 70 g 70 x 100

3-B-21905

Zam. 176. Druk. „Prasa Demokratyczna—Nowa Epoka“ W-wa, Śniadeckich 16.



## *W sześćdziesiątą rocznicę urodzin Prezydenta RP Bolesława Bieruta*

18 kwietnia rb. obchodziliśmy uroczystie sześćdziesiątą rocznicę urodzin Pierwszego Obywatela RP Prezydenta Bolesława Bieruta.

Jak Polska długa i szeroka, zewsząd płynęły szczerze i gorące życzenia długich jeszcze lat pracy dla dobra narodu budującego nowe, sprawiedliwe i wolne od wyzysku życie. Dla uświetnienia tego pamiętnego dnia we wszystkich częściach kraju podejmowano i realizowano poważne zobowiązania produkcyjne. Podejmując zobowiązania jako formę wyrażenia swej wdzięczności i czci dla Pierwszego Obywatela Kraju masy pracujące, a wśród nich również naukowcy polscy, pragnęły podkreślić z naciskiem, że z pełnym zrozumieniem i w całej rozciągłości przyjęły i realizują hasło walki o budowę silnej i sprawiedliwej Polski codziennym znojnym wysiłkiem.

Bolesław Bierut zdobył sobie serca wszystkich prawdziwych patriotów dzięki wielkim zaletom charakteru i oddaniu sprawie narodowej. Robotnicy i chłopci, uczeni i artyści, nauczyciele i młodzież, partyjni i bezpartyjni z dumą i radością myślą o tym, że przewodzi im człowiek o wielkim harcie ducha, o rozległej wiedzy i głębokim umyśle, człowiek o stalinowskiej nieskazitelnosci ideowej.

Naród polski czci i kocha swego Prezydenta, gdyż widzi i wie, że On go prowadzi jedynie słuszną drogą do szczęśliwej, pokojowej, socjalistycznej przyszłości.

Ludzie nauki widzą ponadto w osobie Bolesława Bieruta wielkiego człowieka, pod którego przewodnictwem została dokonana głęboka rewolucja kulturalna i nadal trwa skuteczna walka o pełny rozkwit nauki poskiej w służbie i dla dobra całego narodu budującego podstawy socjalizmu.

Wprawdzie obecny rozkwit kultury i nauki polskiej jest ściśle związany z nowymi społeczno-politycznymi stosunkami w kraju, osobiste jednak zainteresowanie oraz stała opieka i troska Prezydenta Bieruta o sprawy nauki wywierają przemożny wpływ na tempo i kierunek jej rozwoju.

W liście skierowanym do uczestników Pierwszego Kongresu Nauki Polskiej Prezydent Bierut określił jej cele i zadania oraz wskazał drogę,

która w pełniejszym jeszcze niż dotychczas stopniu pozwoli nauce polskiej wprząc się w wielkie historyczne przeobrażenia, które przeżywa dziś cały naród polski.

„Nieustające i nie skrepowane niczym dążenia do poznania prawdy, walka nieugięta o udostępnienie tej prawdy masom pracującym swego narodu i całej ludzkości — oto najszczytniejsze, bojowe zadania nauki...

W wyniku dokonywających się u nas wielkich przeobrażeń społecznych w nowym świetle staje u nas problem upowszechnienia nauki, tzn. związania jej procesów rozwojowych z wysiłkiem nad podniesieniem poziomu sił wytwórczych i kultury całego narodu...

Cel i zadania nauki polskiej polegają dzisiaj w pierwszym rzędzie na tym, aby dopomóc narodowi wyzwolonemu z pęt wyzysku i tyranii kapitalistów swoich i obcych w szybkim zlikwidowaniu ponurej spuścizny zacołowania w produkcji, technice, w rozwoju jego sił wytwórczych, jak również w podniesieniu ogólnego poziomu jego kultury i warunków bytu“ — pisze Bolesław Bierut w liście do Kongresu, dając właściwą i prawdziwą ocenę zadań, które stoją obecnie przed nauką polską.

Według słów Bolesława Bieruta „nauka staje się wielką, niepokonaną, twórczą i przeobrażającą miliony ludzi siłą, gdy przenika do mas, gdy nie zamyka się i nie odgradza od mas, gdy potrafi utrzymać codzienną żywą łączność z pracą i życiem, z dążeniami i walką wyzwolenczą mas pracujących“.

Szczególnie ważne dla pracowników nauki są te słowa listu Prezydenta do Kongresu Nauki Polskiej, w których mówi On o nowych metodach i nowym stylu pracy badawczo-naukowej mającej przed sobą zaszczytne zadania odkrywania praw rozwoju przyrody i społeczeństwa, poznawania prawdy i walkę o udostępnienie jej masom pracującym swego narodu i całej ludzkości.

Zarówno słowa listu do Kongresu, jak i osobista troska Prezydenta o sprawy nauki świadczą o głębokim zrozumieniu roli, którą nauka powinna odegrać w budowie wspaniałej przyszłości narodu.

Dalszym, najmocniejszym potwierdzeniem uznania wielkiej roli nauki w budowie podstaw socjalizm ujest wprowadzenie spraw nauki do projektu Konstytucji Polskiej Rzeczypospolitej Ludowej.

Po raz pierwszy w ciągu naszych dziejów sprawy nauki znalazły wyraz w ustawie zasadniczej.

W zrozumieniu zadań stojących przed nauką polską i zaszczytnej roli, którą ma ona do odegrania w kształtowaniu nowego wolnego i szczęśliwego bytu narodu — naukowcy polscy przyjmują z wdzięcznością jasne i jedynie słuszne wskazania Prezydenta Bolesława Bieruta, wielkiego opiekuna nauki polskiej, i zapewniają o ścisłym wykonaniu Jego dalekowszrocznych wytycznych oraz składają Mu życzenia długich jeszcze lat pracy dla szczęścia narodu i wzrostu nauki polskiej.

## Od Redakcji

Zmiany ustrojowe w Polsce, przekształcającej się w szybkim tempie z zacofanego pod względem gospodarczym państwa kapitalistycznego w państwo socjalistyczne, tętniące młodym, twórczym i wolnym od ucisku życiem — stawiają nauce polskiej nowe zadania.

„Jak nigdy dotąd, stoją dziś w Polsce przed pracownikami nauki otworem olbrzymie możliwości pracy naukowej — pisał w swym liście Prezydent RP Bolesław Bierut do uczestników I Kongresu Nauki Polskiej.— Nigdy badania naukowe nie nabierały tak wielkiej wagi dla Narodu Polskiego jak właśnie dziś, w okresie gdy naród nasz tworzy swym wysiłkiem nową epokę twórczego życia, której pierwszym etapem i symbolem jest urzeczywistniany pomyślnie wielki nasz Plan 6-letni — plan gruntownej przebudowy i uwielokrotnienia sił wytwórczych Polski.“

Zadania stojące przed nauką polską są wielkie i zaszczytne, ponieważ służą całemu narodowi w jego pracy nad budową nowego socjalistycznego ustroju, w jego marszu ku lepszej przyszłości i w jego walce z zacofaniem hamującym ten marsz.

„Podstawowym zadaniem nauki w tym przełomowym okresie historycznym—pisze w zacytowanym liście Prezydent Bolesław Bierut—jest włączyć się mocniej, głębiej i wszechstronniej niż dotąd w ten twórczy i decydujący o znaczeniu Polski w świecie wysiłek narodu. Od Was tylko zależy, aby w warunkach nowego ustroju ujrzeć owoce swej pracy, aby widzieć, jak ona się przyczynia do szybkiego rozwoju naszego przemysłu i rolnictwa, naszej gospodarki i kultury, jak Wasza myśl twórcza pomaga likwidować nasze zacofanie, jak czyni pracę ludzką coraz wydajniejszą, jak wzbogaca i uszlachetnia życie człowieka.“

Wynikająca ze zmian ustrojowych planowa gospodarka socjalistyczna stawia również przed geodezją polską nowe i rozległe zadania.

Na podkreślenie zasługuje fakt, że służba geodezyjna — obok samodzielnym zadaniom, których wykonanie ma ogólnopaństwowe znaczenie — związana jest ściśle z szeregiem zasadniczych problemów gospodarki



państwowej warunkując właściwe ich przeprowadzenie pod względem technicznym i ekonomicznym. Oddaje ona wybitne usługi w planowaniu i realizacji budownictwa przemysłowego, w budowie dróg bitych, kolejowych i wodnych oraz systemów irygacyjnych, w odkrywczych badaniach geologicznych i eksploatacji złóż mineralnych; współdziała w przebudowie struktury gospodarki rolnej i współpracuje w racjonalnym jej prowadzeniu. To krótkie zestawienie nie wyczerpuje, rzecz jasna, całości zagadnienia.

Pomocą w wypełnieniu przez geodezyjną służbę Polski Ludowej stojących przed nią zadań są badawcze studia naukowe, które powinny coraz bardziej wiązać się z potrzebami praktyki na tym odcinku i z potrzeb tych wpływać.

Powołany do życia z inicjatywy Zespołu Organizacyjnego Komitetu Geodezyjnego PAN kwartalnik „Geodezja i Kartografia“, jako czasopismo naukowe — otwiera swoje łamy dla publikacji o charakterze naukowym z zakresu geodezji i kartografii oraz z dziedzin pokrewnych.

Główną bazę, na której czasopismo będzie opierało swoją działalność, stanowią geodezyjne instytuty i zakłady naukowe wyższych uczelni technicznych w Polsce oraz Geodezyjny Instytut Naukowo-Badawczy Głównego Urzędu Centralnego Geodezji i Kartografii.

Ze względu na łączność geodezji z innymi pokrewnymi jej naukami o Ziemi, jak geologia, geofizyka i geografia, konieczna jest wzajemna wymiana myśli naukowej wszystkich tych dyscyplin na łamach czasopisma — w zakresie zbieżnych ze sobą zagadnień.

Charakter naukowych badań geodezyjnych wymaga współpracy na tym polu z innymi krajami, a zwłaszcza ze Związkiem Radzieckim, którego przodująca nauka i technika oraz doświadczenie, bogate w płodne i konkretne osiągnięcia również na odcinku geodezji i kartografii państwowej, powinny się stać dla nas wzorem. Dlatego też czasopismo będzie korzystać z tych doświadczeń i osiągnięć zamieszczając omówienia niektórych publikacji naukowych oraz zapraszając wybitnych naukowców tych krajów do wymiany swych myśli i poglądów.

Ponadto łamy czasopisma stają otworem przed każdym twórczym talentem naukowym, który zechce dołożyć swą cegiełkę do gmachu polskiej nauki geodezyjnej.

Pragniemy, aby czasopismo wypełniło zakreślone sobie zadania, przyczyniając się do właściwego i słusznego rozwiązania szeregu problemów stojących przed państwową służbą geodezyjną i kartograficzną dla dobra całego narodu.

*Edward Warchałowski*

## Udział geodezji w budowie podstaw socjalizmu w Polsce

W miarę tego jak człowiek coraz pewniej czuł się gospodarzem na ziemi, sprawa poznania tego obiektu zagospodarowania stawała się bardziej istotnym i pilnym zagadnieniem, któremu w najodleglejszych już czasach poświęcano dużo uwagi i wysiłku. Nie podobna bowiem prowadzić najbardziej prymitywnej gospodarki, nawet w ramach małego zespołu rodowego lub plemiennego, bez zaznajomienia się z terenem, na którym to zagospodarowanie ma być zorganizowane i prowadzone. W miarę jak następowały zmiana i rozwój środków produkcji powodujące zmiany istniejących i powstawanie nowych ustrojów społecznych — znajomość terenu gospodarowania musiała być coraz bardziej dokładna i szczegółowa. Z tych to przyczyn nauka o ziemi, a w szczególności ta jej część, którą nazwano z grecka geodezją, sięga najdawniejszych okresów świadomego życia społeczeństwa organizującego się i zorganizowanego. Widzimy stąd, że powstanie tej nauki, jak powstanie innych nauk, jest nierozzerwalnie związane z realnymi potrzebami życia ludzkiego, a wobec tego rozwój tej nauki i jej zastosowanie w życiu gospodarczym zbiorowiska ludzkiego zależny jest od etapu rozwoju społecznego i form gospodarczych temu rozwojowi właściwych.

Ale nie tylko bezpośrednio użyteczne, dla każdego widoczne i zrozumiałe cele przyświecały rozumowi badawczemu człowieka; spostrzegając on coraz to nowe powiązania pomiędzy różnymi zjawiskami przyrody i starał się je wykorzystać dla ułatwienia sobie rozwiązania coraz to nowych zadań praktycznych. Stąd powstało powiązanie pomiędzy ziemią, a tzw. niebem, tj. otaczającymi nas we wszechświecie ciałami, co umożliwiło opanowanie zagadnienia żeglugi morskiej, wyznaczenie wymiarów ogólnych bryły ziemskiej, ustalenie jej formy kulistej i umiejscowienie jej we wszechświecie.

W ten sposób, przechodząc kolejno od bezpośrednio zaobserwowanych faktów, podnosimy się na następny, wyższy poziom nowych uogólnień. Tak tworzy się prawdziwa nauka: doświadczenia praktyczne stwarzają podstawę do zbudowania teorii uogólniających, które z kolei sto-

sujemy w praktyce kontrolując ich słuszność w ogniu nowych doświadczeń.

Geodezja należy właśnie do tych nauk, które towarzyszą człowiekowi w jego rozwoju społecznym i gospodarczym, i stanowi jedną z bardzo istotnych części współdziałających temu rozwojowi.

Jak wspomnieliśmy wyżej, istnieje dość ścisły związek i zależność między zastosowaniem zdobyczy naukowych w praktycznym życiu codziennym a aktualnym ustrojem społeczno-gospodarczym.

W ustrojach społecznych opartych na panowaniu jednych klas—uprzywilejowanych — nad innymi — upośledzonymi — stosowanie zdobyczy naukowych dopuszczane jest tylko o tyle, o ile przynoszą one wybitne korzyści klasie panującej, pasożytniczej i nie wymagają od niej żadnych ustępstw na rzecz wyzyskiwanych. W tych okresach rozwoju społeczeństw badawcza myśl ludzka, nie mając dostatecznego pokarmu realnego, kieruje się na manowce metafizycznych koncepcji i nie tylko nie przynosi korzyści, lecz staje się wręcz szkodliwa i powoduje zastój istotnego postępu.

Najbardziej charakterystycznym okresem pod tym względem było średniowiecze feudalne — z jego scholastyką, tym bezpłodnym szamotaniem się myśli ludzkiej dokoła irrealnych chimer.

Kapitalistyczny ustrój doskonale ocenił wartości, jakie mogłaby przynieść pozostająca na jego usługach nauka, i dlatego starał się całkowicie opanować zdobycze naukowe na wyłączny swój użytek i do swej wyłącznej dyspozycji, mając oczywiście na celu rozszerzenie i umocnienie swego panowania i coraz to kompletniejszy wyzysk klasy pracującej, pozbawionej środków produkcji.

W tym okresie rozwijają się tylko te kierunki naukowe i w takim tylko stopniu, w jakim to jest potrzebne dla celów ekspansji wielkokapitalistycznej. W każdym zaś razie szczerze ukrywa się wszystko to, co mogłoby spowodować zmianę sytuacji mas pracujących. Popiera się tylko te prace badawcze i rozpowszechnia się tylko takie wynalazki, które mogą wpłynąć na podniesienie zysków klas rządzących, kosztem wzrastającego coraz bardziej wyzysku mas pracujących.

Ale jak niegdyś mitologiczny Prometeusz przyniósł nędznej ludzkości wykradzony u bogów ogień, aby ulżyć tej ludzkości w jej bytowaniu i dać jej pewną niezależność od srogich bogów, tak i w życiu rzeczywistym nieprzerwanie pracująca myśl ludzka połączona z obserwacją otaczającego świata, powodowała rosnącą stale u szerokich mas klasy robotniczej i chłopów świadomość, że może istnieć inny ustrój, w którym praca nie będzie przekleństwem człowieka, lecz jednym z podstawowych praw i obowiązków społecznych. W tym nowym ustroju

każdy nowy wynalazek, każde usprawnienie będzie witane z entuzjazmem, jako coraz to nowe ułatwienie i ulżenie w pracy nad zdobyciem środków wyższego poziomu egzystencji. A stanie się to na skutek tego, że owoc trudu setek milionów nie pójdzie na potrzeby niewielu setek magnatów kapitału.

I ten stan nastąpił. Nastąpił na skutek zwycięskiej Rewolucji Październikowej r. 1917. Powstał kraj pozbawiony kapitalistów i obszarników, kraj, w którym zawrzała praca nad badaniami naukowymi, których następstwem jest wyzwolenie człowieka od nadmiernych wysiłków fizycznych i wykorzystanie wszystkich sił przyrody do służenia człowiekowi; kraj, w którym zrealizowano zasadę rozumnego i zgodnego z interesami całego narodu dokładnego planowania gospodarki, zabezpieczającej zaspokojenie wszystkich potrzeb ludności. I oto Związek Socjalistycznych Republik Rad staje się wzorem nowego układu społecznego, pozbawionego przeciwieństw klasowych i opartego na podstawach prawdziwej nauki.

Polska, która uzyskała ponownie niepodległość po obaleniu przemocą hitlerowskiej dzięki zwycięstwu i pomocy ZSRR, stanęła również na progu do tego nowego ustroju sprawiedliwości społecznej. I na tej nowej drodze musimy możliwie szybko zrobić takie postępy, aby — podobnie do kraju socjalizmu — stanąć na tak wysokim poziomie, na jakim stać winien kraj przodujący w rozwoju życia społecznego.

Ustaliliśmy wyżej tezę, że pewnemu rozwojowi społeczno-gospodarczemu odpowiada określony udział nauki w organizowaniu tego życia, a zatem i znaczenie rozwoju badań naukowych. Nie jest naszym zamiarem ani nie mamy możliwości ogarnąć na tym miejscu tego zagadnienia w całej jego rozciągłości. Zatrzymamy się jedynie na zaznaczonym na wstępie odcinku — udziale geodezji w organizacji życia gospodarczego.

Gospodarka człowieka oparta jest na tym, co mu może dać ziemia czy to w postaci produktów świata roślinnego i zwierzęcego, czy to w postaci materiałów surowcowych wydobywanych z wnętrza ziemi do przerobu ich na pożyteczne przedmioty użytkowe. W związku z tym należy zwrócić szczególną uwagę na dwa rodzaje produkcji, a mianowicie produkcję przemysłową i rolną — z uwzględnieniem bardzo ważnego czynnika usługowego, którego zadaniem jest zdobyte produkty i wytworzone przedmioty użytkowe rozprowadzić i oddać do użytku członków społeczeństwa.

W organizacji nowoczesnej uspołecznionej gospodarki rolnej geodezja zajmuje jedno z najpoważniejszych miejsc. Wyraża się ono, po pierwsze, w dokładnym zarejestrowaniu stanu faktycznego dotyczącego układu powierzchniowego jednostek gospodarczych, powiązanego z zazna-

zeniem stopnia przydatności do określonych kultur rolnych, po wtóre — w zaprojektowaniu wspólnie ze specjalistami w dziedzinie produkcji rolnej najkorzystniej opartej na naukowych przesłankach konfiguracji poszczególnych jednostek gospodarczych, wreszcie po trzecie, w przeprowadzaniu przeniesienia zaprojektowanych zmian w teren.

Ponadto powinna być zorganizowana stała obsługa, mająca na celu pomoc fachową w ustalaniu pól płodozmianowych oraz tych wszystkich zabiegów, które są związane z dokonywaniem pomiarów dla bieżących potrzeb gospodarczych danej jednostki rolnej lub zespołu tych jednostek, a w szczególności dla celów melioracji rolnych oraz racjonalnego ułożenia dróg dojazdowych na obszarze gospodarczym. Zakres ilościowy tych prac jest olbrzymi i wymaga bardzo licznego personelu o dobrym fachowym przygotowaniu, ponieważ stan obecny panujący u nas na wsi jest tak zacofany, jak gdybyśmy byli o jakąś co najmniej setkę lat opóźnieni w rozwoju. Uspołecznienie przemysłu i planowa jego rozbudowa — to pierwszy krok na drodze do budowy podstaw socjalizmu w Polsce. Dla dotrzymania kroku rozwijającemu się coraz potężniej przemysłowi konieczne jest przestawienie i przebudowa dotychczasowej struktury rolnej na gospodarke uspołecznioną opartą na produkcji przemysłu (maszyny rolnicze, traktory, nawozy sztuczne itp.). Pełne i właściwe przeprowadzenie zmiany struktury gospodarki rolnej wymaga sprawnego działania służby geodezyjnej państwa na tym odcinku.

Teoretycznie posiadamy w tym zakresie wszystkie możliwości, a przede wszystkim nowoczesną technikę, pozwalającą na szybkie przeprowadzanie zdjęć szczegółowych drogą fotogrametrii lotniczej na dużych obszarach z uwzględnieniem ewentualnie również i rzeźby terenu czy to drogą opracowań autogrametrycznych, czy też tachymetrii autoredukcyjnej lub stolikowej. Próby i doświadczenia w zakresie przebudowy struktury gospodarstw rolnych, jakie dotąd zostały przeprowadzone, wykazują, że personel geodezyjny, którym rozporządzamy, zadania te może wykonać z sukcesem. Należy jednak przewyciężyć jedną poważną przeszkodę, a mianowicie ogromną bezwładność wielowiekowego zacofania naszego chłopca, który wprost atawistycznie przejął od swoich ojców — stale oszukiwanych i wyzyskiwanych — nieufność do każdej nowości, do każdej zmiany, chociażby widział wszystkie korzyści, jakie ta zmiana daje. I w tym zagadnieniu geodeta, stale obcujący z ludnością wsi, może wykonać wielką pracę uświadamiającą, która niewątpliwie przyspieszy dokonanie przełomu wewnętrznego, a co za tym idzie osiągnięcie zasadniczego celu — socjalizmu.

Podkreślić należy z całą siłą, że zadanie, o którym mowa, jest zadaniem społecznym, tj. zadaniem mającym na celu dobro wszystkich

obywateli, a nie, jak to bywało dawniej, zadaniem interesu poszczególnego właściciela — obszarnika.

W wyniku zabiegów przebudowy struktury terenowej gospodarstw rolnych oraz leśnych, po wniesieniu jej na odpowiednie mapy, otrzymamy podstawowy usystematyzowany materiał do ogólnopaństwowego planowania w najwłaściwszy sposób całokształtu produkcji rolnej i leśnej, zgodnie z potrzebami państwowymi. Ponadto nadmienić wypada, że w przebudowanej strukturze rolnej geodezja ma dalsze zadania do spełnienia o charakterze ciągłym, mianowicie oddawać będzie poważne usługi przy prowadzeniu nowoczesnej gospodarki rolnej, opartej na zasadach socjalistycznych.

Niemniejszą rolę odgrywa geodezja w dziedzinie rozbudowy przemysłu. Najjaskrawiej widzi każdy, mało nawet zorientowany obywatel, ten udział geodezji w dziedzinie górnictwa — w szerokim znaczeniu tego wyrazu.

Przede wszystkim należy zwrócić uwagę na sprawę eksploatacji kopalni pożytecznych, jak węgla, rud itp. Bezpieczeństwo robót w kopalniach co najmniej w połowie zależy od prawidłowo działającej obsługi pomiarowej, a sama eksploatacja kopalni bez dokładnych pomiarów podziemnych w ścisłym nawiązaniu do nawierzchni byłaby niemożliwa. Skomplikowana sieć podziemnych chodników, wyrębów, szybów, pochylni itd. musi być w ścisły sposób wyznaczona oraz na mapach każdego poziomu i na ogólnych mapach kopalni dokładnie naniesiona. Od tego zależy nie tylko bezpieczeństwo pracy podziemnej, ale również tych obiektów budowlanych, które się znajdują nad terenami podkopanymi. Niewielkie nawet niedokładności w wyznaczeniu kierunku i położenia chodników pod ziemią mogą spowodować zapadnięcie się budowli naziemnych, pociągając jednocześnie poważne szkody również w kopalni przez uszkodzenie wyrębiska albo nawet jego całkowite zniszczenie. W gospodarce kapitalistycznej sprawy bezpieczeństwa w kopalniach stały na ostatnim planie, gdyż zdrowie i życie robotnika było bardzo tanie w oczach kapitalisty.

Obecnie zwrócono na tę sprawę szczególną uwagę, co jest naturalnym następstwem naszego ustroju społecznego, w którym najwyższą wartością jest człowiek pracy. Jeżeli zaś na tę sprawę spojrzymy z punktu widzenia ochrony dobra narodowego w ogóle, to państwo ludowe ze szczególną troską dba o racjonalne wykorzystanie zasobów złóż pożytecznych surowców, w przeciwieństwie do rabunkowej gospodarki kapitalistycznej; dlatego też powinny być zastosowane takie naukowo-techniczne zabiegi, które pozwoliłyby przewidzieć nastąpienie niejednej katastrofy, a dzięki temu nie dopuścić do jej powstania. A jednym

z najbardziej istotnych środków są właśnie stałe geodezyjne obserwacje nad ruchami skorupy ziemskiej na obszarze zagłębia górniczego.

Niemalą rolę odgrywają geodezyjne pomiary w dziedzinie poszukiwań geologicznych. Praca geologa — poszukiwacza złóż kopalin lub płynnych paliw — nie jest do pomyślenia bez posiłkowania się współczesnymi mapami szczegółowymi, na których geolog nanosi te dane geologiczne zewnętrzne, które w połączeniu z badaniami geofizycznymi oraz wierceniami pozwolą na wykrycie skrytych w głębi ziemi bogactw naturalnych.

Tu przypomnieć należy, że pewne elementy geofizyczne, jak dane magnetyczne oraz grawimetryczne, również wchodzi w orbitę pomiarów geodety.

Budowa nowoczesnych zakładów przemysłowych oraz rozbudowa istniejących już na potężne kombinaty wymaga — dla dokładnego ich zaprojektowania ogólnego i zaprojektowania szczegółowego oddzielnych elementów konstrukcyjnych — przede wszystkim bardzo dokładnej i szczegółowej dokumentacji terenowej, tzn. planów topograficznych miejsca budowy i najbliższego otoczenia. W czasie budowy, poczynając od zakładania fundamentów i murów nośnych, geodeta z najwyższą precyzją musi wyznaczać i kontrolować wznoszenie szkieletów budowli, aby konstrukcyjne elementy przygotowywane w różnych hutach mogły być w ten szkielet bez trudu i dodatkowych robót wpasowane. A wymagana jest tu dokładność do 2 — 3 centymetrów, a często nawet większa. Widzimy stąd, jak poważną i odpowiedzialną rolę odgrywa praca geodety przy tej podstawowej inwestycji w gospodarce państwa demokracji ludowej.

Niemniej ważną, a o wiele trudniejszą technicznie jest praca geodety podczas budowy wieżowców o dużej wysokości. Z niezwykłą precyzją należy utrzymać pionowość konstrukcji, badać równomierność osiadania filarów i nośnych ścian. Prace tego typu należą już właściwie do rzędu naukowych opracowań technicznych, wymagających specjalnego ujęcia dla każdego niemal poszczególnego przypadku.

Wielkie budowle hydrotechniczne mające na celu uregulowanie jednego z najważniejszych zagadnień gospodarki ogólnej — obrotu wodnego i wykorzystania energii wodnej — są oparte na dokumentacji geodezyjnej w okresie projektowania i budowy, a następnie stale kontrolowane po wybudowaniu w celu ustalenia zachodzących odkształceń w zaporach pod wpływem parcia wody. Zagadnienie to, należące również do finezyjnych obserwacji geodezyjnych, odgrywa rolę niezwykle ważną, ponieważ daje pełną gwarancję uniknięcia katastrofalnego pęknięcia zapory i zalania wielkich połaci kraju.

Kiedy mówimy o budowlach hydrotechnicznych, to nie możemy pominąć rozległych prac opartych całkowicie na opracowaniach geodezyjnych, a mianowicie budowy dróg wodnych i regulacji potoków. W planowanej gospodarce państwowej zagadnienie opanowania problemu bilansu wodnego oraz wykorzystania najtańszych dróg — wodnych szlaków — poza bezpośrednimi korzyściami komunikacyjnymi pozwala uniezależnić gospodarkę rolną od kaprysów meteorologicznych, suszy lub nadmiaru wilgoci. Zadania te zaczynają się i kończą na geodezji; zaczynają, bo na podstawie dokładnych współczesnych pomiarów geodezyjnych i otrzymanych na ich podstawie planów ustalamy projekty robót hydrotechnicznych, a kończą, bo przeniesienia projektu na teren dokonuje znowu geodeta.

Analogiczny stan rzeczy mamy przy projektowaniu i budowie dróg zarówno żelaznych, jak i kołowych. W przypadkach szczególnie trudnych samo projektowanie drogi żelaznej lub autostrady wykonuje się bezpośrednio w terenie, przy czym zastosowanie metod geodezyjnych ma tu szeroki zasięg.

Aby zakończyć pobieżny przegląd zastosowania metod geodezyjnych w budownictwie przemysłowym, zatrzymamy się jeszcze na najbardziej nowoczesnych budowlach podziemnej komunikacji, zwanych krótko „metro“. Budowa kolei podziemnej w miastach jest najbardziej trudnym zadaniem ze względu na konieczność wykonania podziemnego tunelu, w którym jednocześnie dokonuje się budowy samej kolei. Wydawałoby się, że zadanie to jest takie samo, jakie mamy w kopalniach. W rzeczywistości opracowanie metra wymaga znacznie większych precyzji w pomiarach geodezyjnych niż te, które są stosowane w górnictwie. Jeżeli sobie uprzytomnimy, że budowa odbywa się w gęsto zabudowanym mieście, że przekopy podziemne wykonywa się „na przebitkę“, tj. na spotkanie obu końców pewnego odcinka drogi, że spotkanie tych dwóch odcinków powinno się dokonać z dokładnością rzędu 1 cm — bo tego wymaga z góry zaprojektowana konstrukcja stalowych obręczy, stanowiących wewnętrzną obudowę kanału metra — to zrozumiemy całą trudność wytyczenia tej podziemnej trasy. O ile w kopalniach sieć podziemnych dróg musi być powiązana z nawierzchnią, to w przypadku metra powiązanie to musi być wykonane wielokrotnie dokładniej, za pośrednictwem wielu szybów umieszczonych w odpowiednich odległościach. A jeżeli podziemne pomiary muszą być niezwykle precyzyjne, to naziemne, na których tamte są oparte, muszą posiadać jeszcze większą dokładność. Można bez przesady stwierdzić, że powodzenie prac przy budowie metra zależy całkowicie od obsługi geodezyjnej tej budowy.



Rozpatrzyliśmy w skrócie te dziedziny gospodarki państwowej, które stanowią najważniejsze zagadnienia budowy podstaw państwa socjalistycznego, a w których geodezja odgrywa bardzo istotną rolę. Istnieją także takie dziedziny, gdzie geodezja jako nauka ma swe ogólne naukowo - techniczne zadania. Należą do nich następujące:

1. Uzbrojenie całego obszaru państwa w sieć podstawowych punktów pomiarowych, których położenie, tak w poziomie jak i w pionie, będzie ustalone z wysoką precyzją w oparciu o jednolite podstawy geodezyjne.
2. Opracowanie szczegółowej mapy państwa w skali dużej (1 : 10 000), jako podstawy do wykonania map dla poszczególnych zagadnień gospodarczych.
3. Opracowanie map w skalach drobniejszych, niezbędnych dla celów gospodarczych, szkolnictwa i użytku ogólnego.
4. Prowadzenie badań naukowych nad wyznaczeniem figury ziemi w obrębie terytorium państwa — w koordynacji z międzynarodowymi pracami w tej dziedzinie.
5. Prowadzenie badań i doświadczeń nad nowymi metodami pomiarów geodezyjnych w zastosowaniu do różnych potrzeb praktyki.
6. Współpraca z innymi krajami, a przede wszystkim ze Związkiem Radzieckim jako krajem o przodującej nauce i technice, w zagadnieniach naukowych i praktycznych oraz w dziedzinie ogólnych problemów geodezyjnych.

Omówimy te zadania pokrótce.

Zasadnicze ramy, w których mieści się cały materiał zdobyty przez szczegółowe pomiary w państwie to, po pierwsze — triangulacja podstawowa pierwszego rzędu, obejmująca kilkoma wieńcami trójkątów cały obszar państwa, po drugie — sieć drobniejszych trójkątów równomiernie pokrywających cały obszar państwa oparta na punktach triangulacji państwowej, wreszcie, po trzecie — zagęszczenie powyższej sieci punktami triangulacji szczegółowej służącej łącznie z triangulacją poprzedniego rodzaju do oparcia na nich bezpośrednich pomiarów szczegółowych, włączając w to i rzeźbę terenu. Podobnie ustalamy sieć punktów w stosunku do średniej powierzchni morza z możliwie najwyższą dokładnością, jako sieć niwelacji precyzyjnej pierwszego rzędu, uzupełnioną potem gęstą siecią punktów niwelacji drugiego rzędu. Prace te stanowią generalną podstawę dla wszystkich prac pomiarowych w państwie, słusznie więc powinny być wyłączone w oddzielną grupę i stanowić samoistny dział pracy państwowej. Po ostatniej wojnie na terenie Polski zastaliśmy tak różnorodny materiał dotyczący sieci triangulacyjnych i niwelacyjnych, że połączenie tego materiału w jedną całość odpowiadającą współczesnym wymaganiom techniki i pełne wykorzystanie dla celów gospo-

darczych — było niemożliwe bez przeprowadzenia szczegółowej analizy tego materiału, ustalenia warunków technicznych wzajemnego powiązania i uzupełnienia nowymi, na szeroką skalę zakrojonymi, pomiarami geodezyjnymi. Toteż do tej pracy państwo nasze przystąpiło niezwłocznie po zwycięstwie nad hitleryzmem. Zrealizowanie tego wielkiego zadania będzie ogromnym osiągnięciem państwa ludowego na odcinku geodezji i fundamentem pod dalsze prace naukowe i techniczne.

Opracowanie szczegółowej mapy gospodarczej kraju, w skali 1 : 10 000, stanowi jedno z najbardziej zasadniczych zadań geodezji w państwie ludowej demokracji budującej podstawy socjalizmu, ponieważ mapa taka jest najistotniejszym instrumentem do opracowywania najrozmaitszych planów gospodarczych.

Jeżeli na tej podstawowej mapie zostaną uwidocznione wszystkie dane odnoszące się do tego czy innego problemu gospodarczego, to w ten sposób uzyskany będzie pełny, przejrzysty obraz danego zagadnienia, tj. cenny podkład do wykonania właściwych prac planistycznych.

Mapa gospodarcza powinna spełnić zasadnicze zadanie przy lokalizacji środków produkcji i usług oraz w bieżącej gospodarce rolnej i leśnej.

W ustroju kapitalistycznym mapy ogólnopaństwowe w skalach dużych miały na celu tylko zadanie ochrony granic posiadłości prywatnych oraz zadanie wymiaru podatkowego.

Zagadnienie organizacji wydawnictw kartograficznych dla zaspokojenia licznych potrzeb życia, tak zbiorowego, jak i oddzielnych obywateli, należy również do ogólnych zagadnień, które powinny się znajdować w zakresie działania geodezyjnej służby państwowej, w ten bowiem tylko sposób obsługa społeczna na tym odcinku będzie stała na właściwym technicznym i naukowym poziomie.

Badania ogólnego kształtu bryły ziemskiej oraz jej skorupy, obok zadań naukowych, mają na celu przede wszystkim zadania praktyczne związane z zagadnieniami gospodarczymi państwa.

Z badań tych można wyciągnąć szereg praktycznych wniosków co do strukturalnego składu tej skorupy, to jest ewentualnej zawartości tych czy innych formacji materiałowych.

W tym względzie najbardziej celowymi są systematyczne badania grawimetryczne w połączeniu z odpowiednimi obserwacjami astronomiczno-geodezyjnymi, jak również obserwacjami magnetycznymi.

Badania te mają również bardzo istotne znaczenie w ustaleniu efektu nieznanych procesów zachodzących w skorupie ziemskiej, które wpływają na zmiany jej postaci geometrycznej, co oznaczamy wyrażeniem „oddychanie ziemi“. W tej mierze wielkie znaczenie mają wysoko precyzyjne pomiary niwelacyjne połączone z grawimetrią.

Stoją przed uczonymi geodetami i astronomami jeszcze inne ciekawe zagadnienia naukowe do rozwiązania, np. zagadnienie przypuszczalnych wzajemnych przesuwania się lądów, ruchów osi ziemi w przestrzeni i wiele innych.

Do rozwiązania tych wszystkich zagadnień trzeba stosować coraz to doskonalsze metody obserwacyjne, coraz to doskonalsze narzędzia. W tym celu muszą być stale przeprowadzane odpowiednie studia nad powiązaniem istniejącymi pomiędzy różnymi działami nauk i nad wykorzystywaniem osiągnięć w jednej z gałęzi wiedzy do zorganizowania badań w zastosowaniu do problemów należących do innych gałęzi nauk.

Jako przykład takich zastosowań może posłużyć próba wykorzystania fal świetlnych i elektromagnetycznych do precyzyjnego pomiaru długości, albo próba budowy bardzo czułych zegarów opartych na właściwości kwarcu do wysyłania wysokoczęstotliwych drgań.

Przedstawione wyżej zagadnienia, w których rozwiązywaniu geodezja odgrywa poważną i niezbędną rolę bądź usługową, bądź też samoistną, stanowią w organizowaniu społeczeństwa i państwa na zasadach usunięcia ze stosunków ludzkich wyzysku i ucisku — *poważny instrument osiągnięcia postawionego celu*.

Ten cel mieści się w krótkim słowie — socjalizm.

Geodezja jako nauka i technika w osiągnięciu tego celu ma do spełnienia czołowe i ważne zadania gospodarcze.

*Stefan Hausbrandt*

## Zagadnienie odwrócenia szeregu Taylora w ujęciu krakowianowym i kilka przykładów zastosowania tego zagadnienia do rachunków geodezyjnych

W wielu zagadnieniach geodezyjnych poszukujemy pewnego zespołu zmiennych niezależnych  $x, y, z$ , pozostających w związkach funkcyjnych ze znanymi wielkościami innego zespołu niezależnych wzajemnie zmiennych  $FGH$ . Bezpośrednie wyznaczenie wielkości  $x, y, z$  w funkcji wielkości  $FGH$  jest przy tym uciążliwe lub nawet niewykonalne ze względu na charakter zależności  $x(FGH), y(FGH), z(FGH)$ . Znane są natomiast przybliżone wartości poszukiwanych wielkości  $x, y, z$ , zaś różniczkowanie funkcyj  $F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z)$  względem zmiennych  $x, y, z$ , jak również obliczanie wartości tych funkcyj dla znanych wartości zmiennych trudności nie przedstawia.

Zagadnienia omówionego typu traktować można jako odwrócenie zagadnienia rozwijania funkcyj wielu zmiennych w szereg Taylora przy założeniu zaniedbywalności wyższych potęg przyrostów. Nadanie tym zagadnieniom jednolitej szaty formalnej przez zastosowanie rachunku krakowianowego Banachiewicza oraz zilustrowanie korzyści takiego ujęcia zarówno w dziedzinie pojęciowej, jak i w dziedzinie rachunku liczbowego, stanowi treść niniejszego artykułu.

Niech  $F(x, y, z), G(x, y, z), H(x, y, z)$  będą wzajemnie niezależnymi funkcjami zmiennych niezależnych  $x, y, z$ , przybierającymi w punkcie  $O(x_0, y_0, z_0)$  wartości  $F_0, G_0, H_0$ , zaś w punkcie  $P(x_p, y_p, z_p)$  wartości  $F_p, G_p, H_p$ . Niech przy tym punkty  $O$  i  $P$  położone będą dostatecznie blisko, aby można było drugie i wyższe potęgi przyrostków  $dx, dy, dz$  zamieniających wartości zmiennych w punkcie  $O$  na ich wartości w punkcie  $P$  uznawać za zaniedbywalne.

Łatwo zauważyć, że — o ile funkcje  $F, G, H$  są w otoczeniu punktu  $P$  rozwijalne w szereg Taylora — wartości przyrostków:

$$dx = x_p - x_0, \quad dy = y_p - y_0, \quad dz = z_p - z_0$$

wyznaczą równanie:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (F_p - F_o) \\ (G_p - G_o) \\ (H_p - H_o) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ H'_x & H'_y & H'_z \end{array} \right\}^{-1} \quad (1)$$

gdzie przez  $F'_i$ ,  $G'_i$ ,  $H'_i$  ( $i = x, y, z$ ) oznaczono wartości pochodnych cząstkowych danych funkcji w punkcie  $O$ .

Z założeń rozwijalności funkcji w szereg Taylora i zaniedbywalności wyższych potęg przyrostków  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  wynika:

$$\begin{aligned} F_p &= F_o + F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz \\ G_p &= G_o + G'_x dx + G'_y dy + G'_z dz \\ H_p &= H_o + H'_x dx + H'_y dy + H'_z dz \end{aligned} \quad (2)$$

co można też przy użyciu symboliki krakowianowej napisać pod postacią:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} F'_x & G'_x & H'_x \\ F'_y & G'_y & H'_y \\ F'_z & G'_z & H'_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (F_p - F_o) \\ (G_p - G_o) \\ (H_p - H_o) \end{array} \right\} \quad (2')$$

Ponieważ z założenia niezależności funkcji  $F(xyz)$ ,  $G(xyz)$ ,  $H(xyz)$  wynika, że wyznacznik funkcyjny („jakobian“):

$$\left| \begin{array}{l} F'_x & G'_x & H'_x \\ F'_y & G'_y & H'_y \\ F'_z & G'_z & H'_z \end{array} \right| = |J|$$

nie może być tożsamościowo zerem, przeto kwadratowy krakowian ostatniego równania — poza szczególnymi punktami spełniającymi równanie  $|J| = 0$  — posiadać będzie odwrotność („inwers“). Mnożąc równanie (2') przez transpozę tej odwrotności lub odwrotność transpozy otrzymamy, po przeprowadzeniu asocjacji z lewej strony równania, wzór (1).

Wzór (1) napisaliśmy dla wypadku trzech zmiennych. Będziemy bowiem ilustrować jego przydatność realizując takie rachunki geodezyjne, w których ilość zmiennych nie przekracza trzech.

Ogólniejsze ujęcie sprowadziłoby się do zasymbolizowania:

$$dx = dF \cdot \tau J^{-1} \quad (1')$$

i odpowiadającego wysłownienia: *krakowian kolumnowy różniczek zmiennych niezależnych równa się krakowianowi kolumnowemu różniczek funkcji pomnożonemu przez odwrotność transpozy krakowianu funkcyjnego*. (Przez „krakowian funkcyjny“ rozumiemy więc zespół o takim sa-

nym uszeregowaniu pochodnych jak w tabeli jacobianu: kolumnę wypełniają pochodne tej samej funkcji względem kolejnych zmiennych).

Wzór (1) można oczywiście ująć też w symbole algebry wyznaczkowej lub macierzowej, czego nie zrobiliśmy, uważając wysłowienie krakowianowe za najprostsze. Natomiast do obliczania odwrotności krakowianów posługiwać się będziemy w podanych dalej przykładach rachunkiem wyznaczkowym, obliczając elementy odwrotności krakowianu jako stosunki minorów<sup>1</sup> odpowiadającej tabeli wyznaczkowej do wartości wyznacznika (por. E. Warchałowski: Zastosowanie krakowianów w rachunku wyrównawczym, Warszawa 1938).

W wysłowieniu macierzy Cayleya równania (2) miałyby kształt

$$(dx \ dy \ dz) \cdot \begin{pmatrix} F'_x & G'_x & H'_x \\ F'_y & G'_y & H'_y \\ F'_z & G'_z & H'_z \end{pmatrix} = ((F_p - F_o) \ (G_p - G_o) \ (H_p - H_o)).$$

Stąd po prawostronnym pomnożeniu obu stron równania przez odwrotność macierzy funkcyjnej otrzymujemy:

$$(dx \ dy \ dz) = ((F_p - F_o) \ (G_p - G_o) \ (H_p - H_o)) \cdot \begin{pmatrix} F'_x & G'_x & H'_x \\ F'_y & G'_y & H'_y \\ F'_z & G'_z & H'_z \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ogólniejsze ujęcie wyrazi wzór:

$$\underline{dx} = \underline{dF} \cdot \underline{J}^{-1},$$

gdzie  $\underline{dx}$  i  $\underline{dF}$  są wierszowymi macierzami zestawionymi z różniczek zmiennych i różniczek funkcyj,  $\underline{J}$  zaś kwadratową macierzą funkcyjną.

Pozornie oba ujęcia: macierzowe i krakowianowe są równie wygodne, a nawet ujęcie macierzowe wydaje się wygodniejsze ze względu na zbędność pojęcia transpozycji we wzorze. W istocie tak nie jest i to z dwóch względów: 1) zestawienie odwrotności macierzy jest uciążliwsze ze względu na asymetrię w przyporządkowaniu elementów odwrotności elementom tabeli wyznaczkowej (element  $i^{\text{tego}}$  wiersza i  $j^{\text{tej}}$  kolumny odwrotności tworzy się tu dzieląc minor elementu  $i^{\text{tej}}$  kolumny i  $j^{\text{tego}}$  wiersza przez wartość wyznacznika), 2) wykonanie mnożenia określonego wzorem jest uciążliwsze z uwagi na przyporządkowanie w procesie mnożenia ele-

<sup>1</sup> Używamy tu i nadal terminu „minor“ wyznacznika na oznaczenie iloczynu wielkości  $(-1)^{i+k}$  przez wyznacznik, którego tabela powstaje przez skreślenie w tabeli danego wyznacznika  $i^{\text{tej}}$  kolumny i  $k^{\text{tego}}$  wiersza. Według ostatniej terminologii należałoby mówić o „algebraicznych dopełnieniach elementów wyznacznika“.

mentów wierszy jednego czynnika elementem kolumn drugiego. Interesujące uwagi na temat porównania krakowianów i macierzy znaleźć można w „Voies nouvelles dans le calcul scientifique“ S. Arenda (Ciel et terre 1941, Nr 12 Bruxelles) oraz w „Zasadach algebry wyższej“ W. Sierpińskiego (Warszawa 1946).

\* \* \*

Celem praktycznym równania (1) — jak zresztą większości równań operujących liczbami zespolonymi tego czy innego typu (krakowiany, macierze, wektory) — jest uwolnienie posługującego się równaniem od potrzeby przeprowadzania rozważań zarówno analitycznych jak i rachunkowych, dotyczących roli poszczególnych elementów zespołu w zsyntetyzowanym przez równanie procesie. Wynika stąd zaraz, że głównym warunkiem osiągnięcia korzyści praktycznych ze znajomości rozważanego równania aproksymacyjnego jest przyswojenie jego myśli przewodniej, pozwalające już bez trudności i dodatkowych rozważań przyporządkować treść napotykanym zagadnień obranej formie rozwiązania. Wiele zagadnień geodezyjnych daje się przy tym zinterpretować jako zamiana współrzędnych  $F, G, H$ , charakteryzujących jednoznacznie położenie punktu w pewnym układzie geometrycznym na współrzędne  $x, y, z$ , charakteryzujące w inny sposób położenie tegoż punktu w tymże układzie.

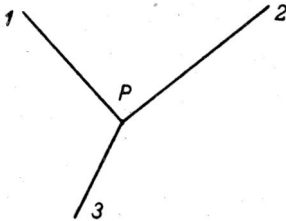
Przechodzimy do podania kilku przykładów, zilustrowanych też rachunkiem liczbowym, mających na celu naświetlenie sposobu stosowania krakowianowego równania aproksymacyjnego (1).

Podkreślamy, że rozwiązane w przykładach zagadnienia mają na ogół opinię trudnych pojęciowo i uciążliwych rachunkowo. Opinia ta przy krakowianowym ujęciu tematu staje się, jak zobaczymy, niesłuszna. Trudno byłoby też bez operowania pojęciem liczb zespolonych dostrzec bliskie pokrewieństwo pojęciowe tak np.: różnych zagadnień, jak liniowe wcięcie wprzód w przestrzeni trójwymiarowej i zadanie wyznaczenia azymutu metodą Hosmera-Krasowskiego (pierwszy i ostatni przykład).

Przykłady zostały uszeregowane wg stopnia trudności pojęciowych. Z tego względu zadanie rozwiązania czworoboku sferycznego, w którym dane są dwa boki, kąt między nimi zawarty, kąt przeciwległy mu i łącząca wierzchołki tych kątów przekątna, umieszczono na końcu. Pomimo bowiem że zadanie to rozwiązuje się przez wprowadzenie dwóch zmiennych, podczas gdy poprzedzające zadania wcięć w przestrzeni trójwymiarowej wymagają wprowadzenia trzech zmiennych, zadanie rozwiązania czworoboku jest trudniejsze pojęciowo z uwagi na różnorodność parametrów charakteryzujących układ.

Przykład 1. Wcięcie liniowe w przestrzeni trójwymiarowej

W zagadnieniu dane są współrzędne prostokątne  $X_i, Y_i, Z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) trzech punktów, długości odcinków  $l_1, l_2, l_3$  łączących te punkty z wyznaczanym przez wcięcie punktem  $P(x, y, z)$ , oraz „przybliżone wartości współrzędnych” tego punktu, tzn. współrzędne  $X_0, Y_0, Z_0$  punktu  $O(X_0, Y_0, Z_0)$ , położonego dostatecznie blisko punktu  $P$ , aby można drugie i wyższe potęgi przyrostków  $dx = X_p - X_0, dy = Y_p - Y_0, dz = Z_p - Z_0$  uznać za zaniedbywalne.



Rysunek 1

Poszukiwane są współrzędne punktu  $P$  lub przyrostki  $dx, dy, dz$ , które „zamienią współrzędne przybliżone na ostateczne”.

Jeżeli za funkcje  $F(xyz), G(xyz), H(xyz)$  przyjąć połowy kwadratów odległości między punktem wyznaczanym, a punktami danymi, tzn. jeżeli założyc

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \frac{1}{2}(X_1 - X)^2 + \frac{1}{2}(Y_1 - Y)^2 + \frac{1}{2}(Z_1 - Z)^2 \\ G(x, y, z) &= \frac{1}{2}(X_2 - X)^2 + \frac{1}{2}(Y_2 - Y)^2 + \frac{1}{2}(Z_2 - Z)^2 \\ H(x, y, z) &= \frac{1}{2}(X_3 - X)^2 + \frac{1}{2}(Y_3 - Y)^2 + \frac{1}{2}(Z_3 - Z)^2 \end{aligned}$$

otrzymamy po zróżniczkowaniu

$$\left( -\frac{\partial F}{\partial x} = x_1 - x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = y_1 - y \text{ itd.} \right)$$

i podstawieniu  $X_0, Y_0, Z_0$  na miejsce  $xyz$

$$\begin{Bmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ H'_x & H'_y & H'_z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta X_{01} & \Delta Y_{01} & \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} & \Delta Y_{02} & \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} & \Delta Y_{03} & \Delta Z_{03} \end{Bmatrix}$$

Ponieważ  $\begin{Bmatrix} (F_p - F_0) \\ (G_p - G_0) \\ (H_p - H_0) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (\Delta X_{01}^2 + \Delta Y_{01}^2 + \Delta Z_{01}^2 - l_1^2) \\ (\Delta X_{02}^2 + \Delta Y_{02}^2 + \Delta Z_{02}^2 - l_2^2) \\ (\Delta X_{03}^2 + \Delta Y_{03}^2 + \Delta Z_{03}^2 - l_3^2) \end{Bmatrix}$

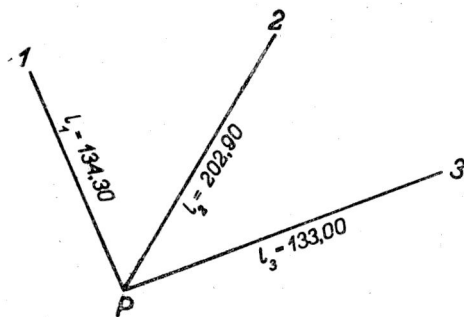
więc poszukiwane rozwiązanie zagadnienia wcięcia liniowego w przestrzeni trójwymiarowej wyrazi wzór:

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (\Delta X_{01}^2 + \Delta Y_{01}^2 + \Delta Z_{01}^2 - l_1^2) \\ (\Delta X_{02}^2 + \Delta Y_{02}^2 + \Delta Z_{02}^2 - l_2^2) \\ (\Delta X_{03}^2 + \Delta Y_{03}^2 + \Delta Z_{03}^2 - l_3^2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X_{01} & \Delta Y_{01} & \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} & \Delta Y_{02} & \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} & \Delta Y_{03} & \Delta Z_{03} \end{Bmatrix}^{-1} \quad (3)$$



Przykład liczbowy

$$\begin{array}{ll} X = 80 & X = 192 \\ Y = 116 & Y = 33 \\ Z = 42 & Z = 25 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} X_0 = 150 \\ Y_0 = 230 \\ Z_0 = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} X = 262 \\ Y = 184 \\ Z = 105 \end{array}$$

Odejmując wartości przybliżonych współrzędnych od wartości współrzędnych punktów stałych zestawimy krótkowian różnicowy:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta X_{01} & \Delta Y_{01} & \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} & \Delta Y_{02} & \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} & \Delta Y_{03} & \Delta Z_{03} \end{array} \right\} = \\ = \left\{ \begin{array}{ccc} -70 & -114 & -8 \\ 42 & -197 & -25 \\ 112 & -46 & 55 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{Ponieważ } \left\{ \begin{array}{l} (70^2 + 114^2 + 8^2 - 134.30^2) \\ (42^2 + 197^2 + 25^2 - 202.90^2) \\ (112^2 + 46^2 + 55^2 - 133.00^2) \end{array} \right\}^{1/2} = \left\{ \begin{array}{l} -38.24 \\ 14.80 \\ -2.00 \end{array} \right\}$$

rozwiązanie liczbowe zadania wymagać będzie realizacji równania:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} -38.24 \\ 14.80 \\ -2.00 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} -70 & -114 & -8 \\ 42 & -197 & -25 \\ 112 & -46 & 55 \end{array} \right\}^{-1}$$

Ponieważ tabelą minorów wyznacznika

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -70 & -114 & -8 \\ 42 & -197 & -25 \\ 112 & -46 & 55 \end{array} \right\}$$

jest, co łatwo obliczyć, tabela

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -11985 & -5110 & 20132 \\ 6638 & -2954 & -15988 \\ 1274 & -2086 & 18578 \end{array} \right\}$$

zaś wartość tego wyznacznika (można ją obrachować trzykrotnie mnożąc każdą z kolumn wyznacznika przez odpowiadającą jej kolejnością kolum-

nę tabeli minorów, co kontroluje zarówno zestawienie tabeli, jak i obliczenie wyznacznika) wynosi 1260434, mamy ostatecznie

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \frac{1}{1260434} \begin{pmatrix} -38.24 \\ 14.80 \\ -2.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11985 & -5110 & 20132 \\ 6638 & -2954 & -15988 \\ 1274 & -2086 & 18578 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.12 \\ -0.83 \end{pmatrix}$$

$$\text{skąd: } \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150.44 \\ 230.12 \\ 49.17 \end{pmatrix}.$$

Dla większej przejrzystości prowadziliśmy tu rachunek obliczenia odwrotności pełnocyfrowo, co w praktyce rachunkowej przeważnie nie jest potrzebne.

\* \* \*

Rozwiązanie zagadnienia wcięcia liniowego przy pomocy związku (3) można interpretować jako transformację współrzędnych  $F = \frac{1}{2} l_1^2$ ,  $G = \frac{1}{2} l_2^2$ ,  $H = \frac{1}{2} l_3^2$  określających położenie punktu P w stosunku do punktów znanych 1, 2, 3, których położenie z kolei scharakteryzowane jest w układzie współrzędnych prostokątnych XYZ, na współrzędne  $X_p$ ,  $Y_p$ ,  $Z_p$  określające położenie punktu P bezpośrednio w układzie współrzędnych prostokątnych XYZ.

Obraлиśmy jako współrzędne FGH połowy kwadratów odległości, a nie same odległości, ze względów praktyczno-rachunkowych: ujęcie to pozwoliło uniknąć pierwiastkowania i ograniczyć się do sumomnożeń, łatwiejszych w realizacji przy stosowanym obecnie rachunku maszynowym. Gdyby z tych czy innych względów wskazane było operowanie nie kwadratami odległości, ale samymi odległościami l, zmienilibyśmy określenie funkcji F, G, H, przyjmując

$$\begin{aligned} F(XYZ) &= +\sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2} \\ G(XYZ) &= +\sqrt{(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2} \\ H(XYZ) &= +\sqrt{(X_3 - X)^2 + (Y_3 - Y)^2 + (Z_3 - Z)^2}. \end{aligned}$$

Różniczkowanie tych związków daje

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{-2(X_1 - X)}{2\sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2}} = \text{itd.}$$

Będzie więc

$$F'_x = \frac{-\Delta X_{01}}{l_1} \quad F'_y = \frac{-\Delta Y_{01}}{l_1} \quad F'_z = \frac{-\Delta Z_{01}}{l_1} \quad \text{itd.}$$

Ponieważ przy tym

$$F_p - F_o = l_1 - \sqrt{\Delta X_{01}^2 + \Delta Y_{01}^2 + \Delta Z_{01}^2} = -\left(\sqrt{\Delta X_{01}^2 + \Delta Y_{01}^2 + \Delta Z_{01}^2} - l_1\right) \quad \text{itd.}$$

rozwiązanie możemy ostatecznie napisać pod postacią

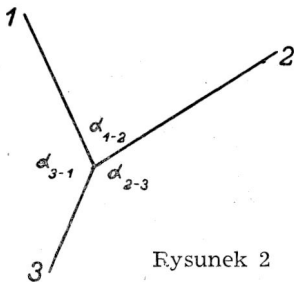
$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{\Delta X_{01}^2 + \Delta Y_{01}^2 + \Delta Z_{01}^2} - l_1\right) \\ \left(\sqrt{\Delta X_{02}^2 + \Delta Y_{02}^2 + \Delta Z_{02}^2} - l_2\right) \\ \left(\sqrt{\Delta X_{03}^2 + \Delta Y_{03}^2 + \Delta Z_{03}^2} - l_3\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\Delta X_{01}}{l_1} & \frac{\Delta Y_{01}}{l_1} & \frac{\Delta Z_{01}}{l_1} \\ \frac{\Delta X_{02}}{l_2} & \frac{\Delta Y_{02}}{l_2} & \frac{\Delta Z_{02}}{l_2} \\ \frac{\Delta X_{03}}{l_3} & \frac{\Delta Y_{03}}{l_3} & \frac{\Delta Z_{03}}{l_3} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3^1)$$

Droga rachunkowa jest, jak widać z porównania z wzorem (3), uciążliwsza od poprzednio obranej, ponieważ zamiast sum kwadratów występują pierwiastki, zamiast przyrostów współrzędnych — ilorazy tych przyrostów przez długości odcinków („cosinusy kierunkowe“). Wzór (3<sup>1</sup>) posiada jednak tę zaletę, że przez wyrażenie niewiadomych jako funkcji liniowych wartości obserwowanych pozwala na przeprowadzenie analizy dokładnościowej bez dodatkowych rachunków.

Również w wypadku spostrzeżeń nadliczbowych obranie za funkcje FGH... wartości wielkości obserwowanych bezpośrednio staje się najbardziej celowe.

#### Przykład 2. Wcięcie wstecz w przestrzeni trójwymiarowej

W zagadnieniu dane są współrzędne prostokątne  $X_i, Y_i, Z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) trzech punktów, kąty  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$  pod którymi z wyznaczanego przez wcięcie punktu P(xyz) widoczne są odcinki łączące kolejno po dwa dane punkty 1-2, 2-3, 3-1 (rys. 2). Znamy także „przybliżone wartości współrzędnych“ wyznaczanego punktu P, tzn. współrzędne  $X_0 Y_0 Z_0$  punktu  $O(X_0 Y_0 Z_0)$ , położonego dostatecznie blisko punktu P, aby można drugie i wyższe potęgi przyrostków  $dX = X_p - X_0, dY = Y_p - Y_0, dZ = Z_p - Z_0$  uważać za zaniedbywalne. Poszukiwane są współrzędne punktu P lub przyrostki  $dX, dY, dZ$ , które — używając utartego w geodezji wyślowienia — zamienią współrzędne przybliżone na ostateczne. Jest to znowu typowe zadanie na zamianę współrzędnych: położenie



jest to znowu typowe zadanie na zamianę współrzędnych: położenie

punktu P określone jest w przestrzeni przez trzy kąty, należy je wyznaczyć przez trzy odcinki. Za funkcje FGH możemy znów brać bądź same wielkości kątowe  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ , bądź też — jeżeli będzie to wygodniejsze w rachunku — pewne inne wyznaczone przez nie wielkości. Z chwilą dokonania wyboru funkcj F(XYZ), G(XYZ), H(XYZ) zadanie jest od strony pojęciowej rozwiązane. Dalsza praca sprowadza się do różniczkowania i przekształceń algebraicznych, mających na celu nadanie ostatecznej formie wzoru (1) postaci możliwie wygodnej w rachunku liczbowym.

Za funkcje FGH obierzemy kwadraty secansów kątów  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$ , pozwalające na stosunkowo przejrzysty rachunek zagadnienia wcięcia. Jeżeli bowiem weźmiemy zespół przyrostów współrzędnych prostokątnych

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \Delta X_{01} & \Delta Y_{01} & \Delta Z_{01} \\ \hline \Delta X_{02} & \Delta Y_{02} & \Delta Z_{02} \\ \hline \Delta X_{03} & \Delta Y_{03} & \Delta Z_{03} \\ \hline \end{array} \quad (4)$$

i oznaczymy przez  $S_{ik}$  sumę iloczynów elementów i<sup>tego</sup> wiersza tego zespołu przez odpowiadające im kolejnością elementy wiersza k<sup>tego</sup>, zaś przez  $R_{ik}$  odwrotność tej sumy iloczynów, a więc np.:

$$S_{12} = \Delta X_{01} \Delta X_{02} + \Delta Y_{01} \Delta Y_{02} + \Delta Z_{01} \Delta Z_{02}$$

$$\text{lub } R_{33} = \frac{1}{\Delta X_{03}^2 + \Delta Y_{03}^2 + \Delta Z_{03}^2} \text{ itp.}$$

wartości kwadratów secansów kątów widoczności wyraża wzory: <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Niech L ( $X_L, Y_L, Z_L$ ) będzie punktem na lewym ramieniu kąta  $\alpha$ , P ( $X_P, Y_P, Z_P$ ) punktem na prawym ramieniu kąta  $\alpha$ , wreszcie C ( $X_C, Y_C, Z_C$ ) punktem wierzchołkowym tego kąta. Oznaczając dla skrótowania symbolami  $\Delta X_L, \Delta Y_L, \Delta Z_L$  przyrosty wzdłuż lewego ramienia kąta, symbolami  $\Delta X_P, \Delta Y_P, \Delta Z_P$  przyrosty wzdłuż ramienia prawego (tzn. np.  $\Delta Y_L = Y_L - Y_C$  itp.) określmy  $\cos \alpha$ , stosując do trójkąta płaskiego L P C twierdzenie Carnota. Będzie  $\cos \alpha = \frac{\overline{LC}^2 + \overline{CP}^2 - \overline{LP}^2}{2 \cdot LC \cdot CP} =$

$$= \frac{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2 + \Delta Z_L^2 + \Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2 + \Delta Z_P^2 - (\Delta X_P - \Delta X_L)^2 - (\Delta Y_P - \Delta Y_L)^2 - (\Delta Z_P - \Delta Z_L)^2}{2 \sqrt{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2 + \Delta Z_L^2} \cdot \sqrt{\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2 + \Delta Z_P^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \Delta X_P \Delta X_L + 2 \Delta Y_P \Delta Y_L + 2 \Delta Z_P \Delta Z_L}{2 \sqrt{\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2 + \Delta Z_L^2} \sqrt{\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2 + \Delta Z_P^2}} \text{ . Stąd po odwróceniu}$$

i podniesieniu do kwadratu otrzymamy związek między kwadratem secansa kąta a przyrostami:  $\sec^2 \alpha = \frac{(\Delta X_L^2 + \Delta Y_L^2 + \Delta Z_L^2)(\Delta X_P^2 + \Delta Y_P^2 + \Delta Z_P^2)}{(\Delta X_L \Delta X_P + \Delta Y_L \Delta Y_P + \Delta Z_L \Delta Z_P)^2}$ , którego zastosowanie do kątów  $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$  daje przy umownych oznaczeniach wzory (5).

$$\boxed{\sec^2 a_{12} = \frac{S_{11} S_{22}}{S_{12}^2}, \sec^2 a_{23} = \frac{S_{22} S_{33}}{S_{23}^2}, \sec^2 a_{31} = \frac{S_{33} S_{11}}{S_{31}^2}} \quad (5)$$

lub  $\sec^2 a_{12} = S_{11} S_{22} R_{12}^2$ ,  $\sec^2 a_{23} = S_{22} S_{33} R_{23}^2$ ,  $\sec^2 a_{31} = S_{33} S_{11} R_{31}^2$ .  
Przyjmując:

$F(XYZ) = \sec^2 a_{12}$     $G(XYZ) = \sec^2 a_{23}$     $H(XYZ) = \sec^2 a_{31}$   
mieć więc będziemy np.:

$$F(XYZ) = \frac{[(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2] \cdot [(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2]}{[(X_1 - X)(X_2 - X) + (Y_1 - Y)(Y_2 - Y) + (Z_1 - Z)(Z_2 - Z)]^2} = \frac{S_{11} S_{22}}{S_{12}^2}$$

Obliczenie pochodnych cząstkowych funkcji FGH względem zmiennych XYZ i podstawienie  $X = X_0$ ,  $Y = Y_0$ ,  $Z = Z_0$  pozwoli na napisanie krakowianu funkcyjnego pod postacią: <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Jeżeli napiszemy funkcję F(xyz) w umownym skrócie  $F(xyz) = \frac{S_{11} S_{22}}{S_{12}^2}$ , gdzie wyraźnie  $S_{11} = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$ , dalej:  $S_{22} = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2$  oraz  $S_{12} = (x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1 - y)(y_2 - y) + (z_1 - z)(z_2 - z)$ , po czym zróżniczkujemy tę funkcję względem x otrzymamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\left( \frac{\partial S_{11}}{\partial x} S_{22} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x} S_{11} \right) S_{12}^2 - 2 S_{12} \frac{\partial S_{12}}{\partial x} S_{11} S_{22}}{S_{12}^2 S_{12}^2}$$

Ponieważ:

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x} = -2(x_1 - x), \quad \frac{\partial S_{22}}{\partial x} = -2(x_2 - x), \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial x} = (x - x_1) + (x - x_2)$$

po podstawieniu  $x = x_0$  i uwzględnieniu związków (5) będzie:

$$F'_x = \frac{(-2\Delta X_{01} S_{22} - 2\Delta X_{02} S_{11}) S_{12}^2 + 2 S_{11} S_{22} (S_{12} \Delta X_{01} + S_{12} \Delta X_{02})}{S_{12}^2 S_{12}^2}$$

czyli

$$F'_x = 2 \sec^2 a_{12_0} \left[ \frac{\Delta X_{01}}{S_{12}} - \frac{\Delta X_{01}}{S_{11}} + \frac{\Delta X_{02}}{S_{12}} - \frac{\Delta X_{02}}{S_{22}} \right]$$

lub

$$F'_x = 2 \sec^2 a_{12_0} [\Delta X_{01} (R_{12} - R_{11}) + \Delta X_{02} (R_{12} - R_{22})]$$

gdzie oznaczono  $R_{ik} = \frac{1}{S_{ik}}$ . Analogicznie będzie

$$G'_x = 2 \sec^2 a_{23_0} [\Delta X_{02} (R_{23} - R_{22}) + \Delta X_{03} (R_{23} - R_{33})]$$

$$H'_x = 2 \sec^2 a_{31_0} [\Delta X_{03} (R_{31} - R_{33}) + \Delta X_{01} (R_{31} - R_{11})]$$

Dalej

$$F'_y = 2 \sec^2 a_{12_0} [\Delta Y_{01} (R_{12} - R_{11}) + \Delta Y_{02} (R_{12} - R_{22})]$$

$$G'_y = 2 \sec^2 a_{23_0} [\Delta Y_{02} (R_{23} - R_{22}) + \Delta Y_{03} (R_{23} - R_{33})]$$

$$H'_y = 2 \sec^2 a_{31_0} [\Delta Y_{03} (R_{31} - R_{33}) + \Delta Y_{01} (R_{31} - R_{11})]$$

oraz

$$F'_z = 2 \sec^2 a_{12_0} [\Delta Z_{01} (R_{12} - R_{11}) + \Delta Z_{02} (R_{12} - R_{22})]$$

$$G'_z = 2 \sec^2 a_{23_0} [\Delta Z_{02} (R_{23} - R_{22}) + \Delta Z_{03} (R_{23} - R_{33})]$$

$$H'_z = 2 \sec^2 a_{31_0} [\Delta Z_{03} (R_{31} - R_{33}) + \Delta Z_{01} (R_{31} - R_{11})]$$

Łatwo sprawdzić, że otrzymany zespół wzorów można napisać w symbolice krakowianowej pod postacią

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ H'_x & H'_y & H'_z \end{array} \right\} = \\ & = -2 \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta X_{01} & \Delta Y_{01} & \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} & \Delta Y_{02} & \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} & \Delta Y_{03} & \Delta Z_{03} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \sec^2 a_{12_0} (R_{11} - R_{12}) & & \sec^2 a_{31_0} (R_{11} - R_{31}) \\ \sec^2 a_{12_0} (R_{22} - R_{12}) & \sec^2 a_{23_0} (R_{22} - R_{23}) & \\ & \sec^2 a_{23_0} (R_{33} - R_{23}) & \sec^2 a_{31_0} (R_{33} - R_{31}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

którą wykorzystujemy dalej w tekście głównym.

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \\ H'_x & H'_y & H'_z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \Delta X_{01} \Delta Y_{01} \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} \Delta Y_{02} \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} \Delta Y_{03} \Delta Z_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sec^2 a_{12_0} (R_{11} - R_{12}) & & \sec^2 a_{31_0} (R_{11} - R_{31}) \\ \sec^2 a_{12_0} (R_{22} - R_{12}) \sec^2 a_{23_0} (R_{22} - R_{23}) & & \\ & \sec^2 a_{23_0} (R_{33} - R_{23}) \sec^2 a_{31_0} (R_{33} - R_{31}) & \end{pmatrix}$$

lub:

$$-2 \begin{pmatrix} \Delta X_{01} \Delta Y_{01} \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} \Delta Y_{02} \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} \Delta Y_{03} \Delta Z_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_{11} - R_{12}) & & (R_{11} - R_{31}) \\ (R_{22} - R_{12}) & (R_{22} - R_{23}) & \\ & (R_{33} - R_{23}) & (R_{33} - R_{31}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sec^2 a_{12_0} \\ \sec^2 a_{23_0} \\ \sec^2 a_{31_0} \end{pmatrix}$$

Ponieważ  $\begin{pmatrix} (F_p - F_o) \\ (G_p - G_o) \\ (H_p - H_o) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sec^2 a_{12_0} - \sec^2 a_{12} \\ \sec^2 a_{23_0} - \sec^2 a_{23} \\ \sec^2 a_{31_0} - \sec^2 a_{31} \end{pmatrix}$  rozwiązanie zagadnienia

wciąża wstecz w przestrzeni trójwymiarowej wyrazi wzór

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sec^2 a_{12_0} - \sec^2 a_{12} \\ \sec^2 a_{23_0} - \sec^2 a_{23} \\ \sec^2 a_{31_0} - \sec^2 a_{31} \end{pmatrix}$$

$$\left[ \begin{pmatrix} \Delta X_{01} \Delta Y_{01} \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} \Delta Y_{02} \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} \Delta Y_{03} \Delta Z_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_{11} - R_{12}) & & (R_{11} - R_{31}) \\ (R_{22} - R_{12}) & (R_{22} - R_{23}) & \\ & (R_{33} - R_{23}) & (R_{33} - R_{31}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sec^2 a_{12_0} \\ \sec^2 a_{23_0} \\ \sec^2 a_{31_0} \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (6)$$

gdzie  $\sec^2 \alpha$  jest kwadratem secansa wartości kąta danej w zadaniu, a  $\sec^2 \alpha_0$  kwadratem secansa obliczonym z przybliżonych wartości współrzędnych w drodze wykonania nad wierszami tabeli przyrostów operacji rachunkowej, wyrażonej przez znany już wzór, który tu powtarzamy:

$$\sec^2 \alpha_{ik} = \frac{S_{ii} S_{kk}}{S_{ik}^2}$$

przy czym  $S_{ik}$  jest sumą iloczynów elementów i<sup>tego</sup> wiersza tabeli przyrostów przez odpowiadające porządkiem elementy k<sup>tego</sup> wiersza tej tabeli. Wielkości  $R_{ik}$  są odwrotnościami wielkości  $S_{ik}$ .

## Przykład liczbowy

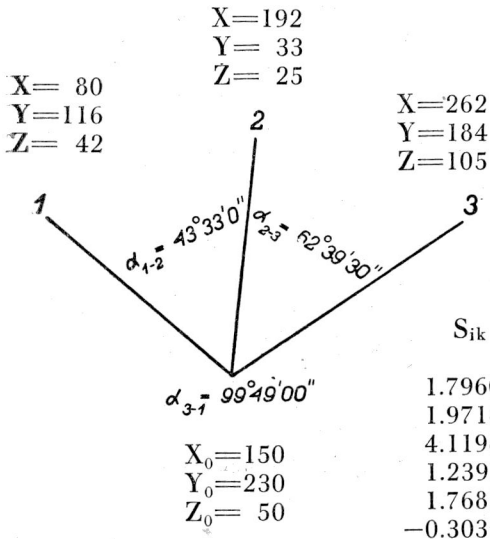


Tabela przyrostów (w jednostkach stukrotnie większych) ma postać:

-0.70	-1.14	-0.08
0.42	-1.97	-0.25
1.12	-0.46	0.55

$S_{ik}$	$R_{ik}$	$\sec^2 a_0$	$\sec^2 a$	$(\sec^2 a_0 - \sec^2 a)$
1.7960	0.5568	1.90308	1.90367	-0.00059
1.9718	0.5072			
4.1198	0.2427	4.74535	4.74039	0.00496
1.2391	0.8070			
1.7685	0.5654	34.45941	34.40146	0.05795
-0.3036	-3.2938			

Działanie, które mamy wykonać, wyraża teraz wzór

$$\begin{pmatrix} dY \\ dX \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000295 \\ 0.002480 \\ 0.028975 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -0.70 & -1.14 & -0.08 \\ 0.42 & -1.97 & -0.25 \\ 1.12 & -0.46 & 0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0496 & 3.8506 \\ -0.2645 & -0.5643 \\ -0.2416 & 3.8592 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.90308 & & \\ & 4.74535 & \\ & & 34.45941 \end{pmatrix} \right]$$

Realizując ten wzór znajdujemy kolejno:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000295 \\ 0.002480 \\ 0.028975 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -0.14581 & 0.46452 & 0.06216 \\ -0.50760 & 1.22281 & 0.00820 \\ 1.62688 & -6.16492 & 1.81451 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.90308 & & \\ & 4.74535 & \\ & & 34.45941 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} -0.000295 \\ 0.002480 \\ 0.028975 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.2775 & 0.8840 & 0.1183 \\ -2.4087 & 5.8027 & 0.0389 \\ 56.0613 & -212.4395 & 62.5269 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dalszy rachunek wymaga obliczenia odwrotności krakowianu. Ponieważ tabelą minorów wyznacznika:

$$\begin{pmatrix} -0.2775 & 0.8840 & 0.1183 \\ -2.4087 & 5.8027 & 0.0389 \\ 56.0613 & -212.4395 & 62.5269 \end{pmatrix}$$

jest, co łatwo bezpośrednio obrachować, tabela:

$$\begin{vmatrix} 371,09 & 152,79 & 186,40 \\ -80,41 & -23,98 & -9,39 \\ -0,6515 & -0,2741 & 0,5190 \end{vmatrix}$$

wartość zaś tego wyznacznika, obliczona trzykrotnie w drodze mnożenia każdej z kolumn tabeli wyznacznika przez odpowiadającą jej kolejnością kolumnę tabeli minorów — wynosi 54.16, mieć będziemy ostatecznie

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,000295 \\ 0,002480 \\ 0,028975 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 371,09 & 152,79 & 186,40 \\ -80,41 & -23,98 & -9,39 \\ -0,65 & -0,27 & 0,52 \end{pmatrix} \frac{1}{54,16} = \begin{pmatrix} -0,0058 \\ -0,0021 \\ -0,0012 \end{pmatrix}$$

$$\text{Stąd: } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 230 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,58 \\ -0,21 \\ -0,12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149,42 \\ 229,79 \\ 49,88 \end{pmatrix},$$

gdzie powróciliśmy do uprzednich jednostek, porzucając rachunek w jednostkach stukrotnie większych.

Zauważymy jeszcze, że rozwiązanie zagadnienia wcięcia wstecz niemal że nie komplikuje się pod względem rachunkowym, jeżeli wyrazić niewiadome jako funkcje liniowe spostrzeżeń, tzn. jeżeli za funkcje FGH obrać nie kwadraty secansów, ale bezpośrednio kąty.

Rozwiązanie ma wówczas postać:

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12_0} & -a_{12} \\ a_{23_0} & -a_{23} \\ a_{31_0} & -a_{31} \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \left[ \begin{pmatrix} \Delta X_{01} \Delta Y_{01} \Delta Z_{01} \\ \Delta X_{02} \Delta Y_{02} \Delta Z_{02} \\ \Delta X_{03} \Delta Y_{03} \Delta Z_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_{11}-R_{12}) & (R_{11}-R_{13}) \\ (R_{22}-R_{12})(R_{22}-R_{23}) \\ (R_{33}-R_{23})(R_{33}-R_{13}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cot g a_{12_0} \\ \cot g a_{23_0} \\ \cot g a_{31_0} \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (6')$$

gdzie  $a_{ik_0}$  jest wartością kąta obliczoną z przybliżonych współrzędnych znanym już wzorem, zaś  $a_{ik}$  wartością kąta uzyskaną z pomiaru.

Dowód słuszności wzoru (6') w oparciu o wzór (6) można przeprowadzić jak niżej, oznaczając przez  $dx$  krakowian kolumnowy niewiadomych, przez  $\Delta \sec^2$  krakowian kolumnowy różnic kwadratów secansów oraz przez  $a, b, c$  znawiasowane krakowiany wzoru (6); mamy

$$dx = \frac{1}{2} d \sec^2 [a b c]^{-1} = \frac{1}{2} d \sec^2 [(a b) c]^{-1} = \frac{1}{2} d \sec^2 [(a b)]^{-1} c^{-1},$$

gdzie zastąpiliśmy odwrotność iloczynu przez iloczyn odwrotności, co z uwagi na istnienie odwrotności jest możliwe.

Mamy jednak dla każdego kąta  $a$ :  $d \sec^2 a = 2 \sec^2 a \operatorname{tg} a \cdot da$ .



Będzie więc

$$d \sec^2 a = 2 \begin{Bmatrix} da_{12} \\ da_{23} \\ da_{31} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sec^2 a_{12} \operatorname{tg} a_{12} & & \\ & \sec^2 a_{23} \operatorname{tg} a_{23} & \\ & & \sec^2 a_{31} \operatorname{tg} a_{31} \end{Bmatrix} = 2 da t$$

gdzie przez  $da$  oznaczyliśmy krakowian różniczek kątów odpowiadających różniczkom kwadratów secansów, przez  $t$  zaś krakowian przekątny ostatniego równania. Podstawienie do otrzymanego uprzednio wzoru na  $dx$  daje

$$dx = da \cdot t [(ab)^{-1} c^{-1}] = da [(ab)^{-1} c^{-1} t] = da [(ab)^{-1} (t c^{-1})],$$

gdzie nie odróżniamy krakowianów przekątnych  $c$   $t$  od ich transpoz. Mamy jednak

$$t c^{-1} = \begin{Bmatrix} \sec^2 a_{12} \operatorname{tg} a_{12} & & \\ & \sec^2 a_{23} \operatorname{tg} a_{23} & \\ & & \sec^2 a_{31} \operatorname{tg} a_{31} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sec^2 a_{12} & & \\ & 1/\sec^2 a_{23} & \\ & & 1/\sec^2 a_{31} \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} \operatorname{cotg} a_{12} & & \\ & \operatorname{cotg} a_{23} & \\ & & \operatorname{cotg} a_{31} \end{Bmatrix}^{-1}$$

co przy oznaczeniu  $C_1$  krakowianu przekątnego cotangensów pozwala napisać ostatnie równanie pod postacią:  $dx = da [(ab)^{-1} c_1^{-1}] = da [abc_1]^{-1}$  identyczną z wzorem (6').

Podkreślaliśmy już, omawiając wcięcie liniowe, że wyrażenie niewiadomych w funkcji liniowej spostrzeżeń pozwala na prostą analizę dokładnościową. Rozwiązując np. obrany wyżej przykład liczbowy na wcięcie wstecz wzorem (6<sub>1</sub>) otrzymalibyśmy (szczegóły rachunku pomijamy)

$$\begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0001648 \\ 0.0002715 \\ -0.0001454 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1239 & 510 & 622 \\ -1363 & -407 & -159 \\ 240 & 101 & -191 \end{Bmatrix},$$

gdzie różniczki kątów wyrażone są w mierze radialnej. Wynika stąd zaraz, że przy wartości błędu średniego obserwacji kątowej  $m_0$ , błędy średnie współrzędnych  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  wyniosą:

$$m_x = m_0 \sqrt{1239^2 + 1363^2 + 240^2} = 1857 m_0$$

$$m_y = m_0 \sqrt{510^2 + 407^2 + 101^2} = 660 m_0$$

$$m_z = m_0 \sqrt{622^2 + 159^2 + 191^2} = 670 m_0.$$

Jest też od razu widoczne, że w danym układzie obserwacyjnym pierwsza i druga obserwacja wymagają dużo większej pieczołowitości niż trzecia,

gdyż elementy trzeciego wiersza ostatniego krakowianu są stosunkowo niewielkie. Konkretnie np. błąd 2", tj. w mierze radialnej 0,00001 — popełniony w pierwszej obserwacji zniekształci niewiadomą  $x$  o 0,01239 jednostek, podczas gdy taki sam błąd w obserwacji trzeciej zniekształci tę niewiadomą o 0,00240 jednostek itp. Tego rodzaju analizy, możliwe do przeprowadzenia przed dokonaniem obserwacji, o ile parametry charakteryzujące dany układ obserwacyjny są w przybliżeniu znane, stanowi mogą niewątpliwie dużo cenniejszą broń w walce o najwyższą dokładność od wielokrotnego powtarzania obserwacji.

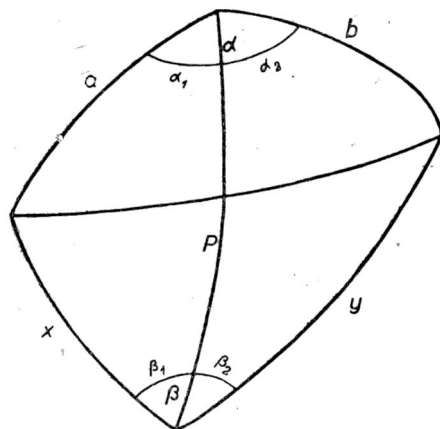
\* \* \*

### Przykład 3. Rozwiązanie czworoboku sferycznego

Na koniec rozpatrzmy zagadnienie rozwiązania czworoboku sferycznego, w którym dane są dwa przyległe boki  $a$  i  $b$ , kąt prawoskrętny  $\alpha$  między bokiem  $b$  i  $a$ , przeciwległy mu kąt  $\beta$  oraz łącząca wierzchołki kątów  $\alpha$  i  $\beta$  przekątna  $p$ .

Czworobok będziemy uważali za rozwiązany z chwilą obliczenia wartości boków  $x$  i  $y$  przylegających odpowiednio do boków  $a$  i  $b$  (rys. 3), przy czym wartości przybliżone  $x_0$ ,  $y_0$  uważamy za znane. Wyznaczenie pozostałych elementów czworoboku sprowadza się z chwilą określenia  $x$  i  $y$  do stosowania najprostszych równań trygonometrii sferycznej.

Aby obrane wielkości  $x$  i  $y$  można uważać za zmienne niezależne, musimy z pięciu wielkości danych, determinujących w jednoznaczny sposób czworobok sferycz-



Rysunek 3

ny, obrać dwie za funkcje  $F(xy)$ ,  $G(xy)$ , kierując się oczywiście przy wyborze możliwie najprostszą postacią związków funkcjonalnych  $FG$ .

Przyjmijmy za funkcje  $FG$  kąty  $\alpha$  i  $\beta$ , których wielkości dają się łatwo uzależnić od zmiennych  $x$ ,  $y$ , jeżeli traktować kąty  $\alpha$  i  $\beta$  jako sumy kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  lub  $\beta_1$  i  $\beta_2$  zawartych odpowiednio między przekątną i bokami (rys. 3). Mamy więc np. przyjmując najprostszy związek cosinusowy

$$F(xy) = \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \arccos \frac{\cos x - \cos a \cos p}{\sin a \sin p} + \\ + \arccos \frac{\cos y - \cos b \cos p}{\sin b \sin p}$$

$$G(xy) = \beta = \beta_1 + \beta_2 = \arccos \frac{\cos a - \cos p \cos x}{\sin p \sin x} + \\ + \arccos \frac{\cos b - \cos p \cos y}{\sin p \sin y}$$

Różniczkowanie daje

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1} \cdot \sin a \sin p} = \frac{\sin x}{\sin \alpha_1 \sin a \sin p}$$

lub:  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sin \beta_1 \sin p}$ , analogicznie  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sin \beta_2 \sin p}$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} \cdot \frac{\cos p \sin x \cdot \sin p \sin x - \sin p \cos x (\cos a - \cos p \cos x)}{(\sin p \sin x)^2} = \\ = \frac{-1}{\sin \beta_1} \left( \cotg p - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos a - \cos p \cos x}{\sin p \sin x} \right) = \frac{-\cotg p - \cotg x \cos \beta_1}{\sin \beta_1}$$

Ostatecznie tedy mieć będziemy

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\cotg x \cos \beta_1 - \cotg p}{\sin \beta_1}, \quad \text{analogicznie} \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\cotg y \cos \beta_2 - \cotg p}{\sin \beta_2}$$

Oznaczając jak zawsze przez  $dx$   $dy$  poszukiwane przyrostki obranych zmiennych otrzymamy więc

$$\left\{ \begin{array}{l} dx \\ dy \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ \beta - (\beta_1 + \beta_2) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \beta_1 \sin p} \\ \frac{\cotg x \cos \beta_1 - \cotg p}{\sin \beta_1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \beta_2 \sin p} \\ \frac{\cotg y \cos \beta_2 - \cotg p}{\sin \beta_2} \end{array} \right\}^{-1}$$

Można to też napisać pod nieco przejrzystszą postacią, której identyczność ze znalezionym wzorem łatwo sprawdzić

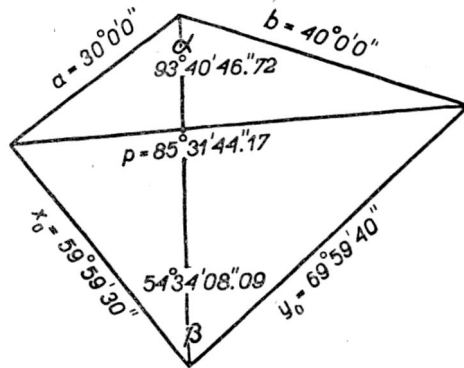
$$\left\{ \begin{array}{l} dx \\ dy \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ \beta - (\beta_1 + \beta_2) \end{array} \right\} \left[ \left[ \begin{array}{l} 1/\sin \beta_1 \\ 1/\sin \beta_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} 1/\sin p \\ 1/\sin p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \cotg x_0 & \cotg p \\ 1 & \cos \beta_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \cotg y_0 & \cotg p \\ 1 & \cos \beta_2 \end{array} \right] \right]^{-1} \quad (7)$$

Wartość kątów  $\alpha_1$   $\alpha_2$   $\beta_1$   $\beta_2$  liczyć tu należy oczywiście z dokładnością danych wyjściowych głównych, pomimo że zależne są one od wielkości

xy znanych z dokładnością dużo niższego rzędu. Jeżeli wzory cosinusowe będą za mało dokładne (kąty bliskie 0 lub  $\pi$ ), stosować należy wzory tangensowe lub sinusowe. Są to wszystko szczegóły rachunku. Istotę postępowania stanowi wyznaczenie kątów  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$  z trójkątów o trzech znanych bokach, obliczenie różnic między wartościami kątów  $\alpha$  i  $\beta$  danych w zadaniu a ich wartościami uzyskanymi z rozwiązania trójkątów  $\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2$  oraz wyznaczenie poprawek do przybliżonych wartości boków  $x_0 y_0$  w drodze zrealizowania mnożenia krakowianowego (7).

Przykład liczbowy

	cos	sin	cotg
a	0.8660254	0.5000000	
b	0.7660444	0.6427876	
p	0.0779556	0.9969568	0.0781936
x	0.5001260	0.8659527	0.5775442
y	0.3421113	0.9396595	0.3640801



Obliczenie kątów daje:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\cos x - \cos p \cos a}{\sin p \sin a} = 0.8678700 \quad \alpha_1 = 29^\circ 47' 16''.60$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\cos y - \cos p \cos b}{\sin p \sin b} = 0.4406679 \quad \alpha_2 = 63^\circ 51' 12''.59$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 93^\circ 38' 29''.19$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\cos a - \cos p \cos x}{\sin p \sin x} = 0.9579765 \quad \beta_1 = 16^\circ 40' 09''.35$$

$$\cos \beta_2 = \frac{\cos b - \cos p \cos y}{\sin p \sin y} = 0.7892560 \quad \beta_2 = 37^\circ 53' 02''.28$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 54^\circ 33' 11''.63$$

Mamy więc

$$\alpha - (\alpha_1 + \alpha_2) = 93^\circ 40' 46''.72 - 93^\circ 38' 29''.19 = 137''.53,$$

oraz:

$$\beta - (\beta_1 + \beta_2) = 54^\circ 34' 08''.09 - 54^\circ 33' 11''.63 = 56''.46$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 137.53 \\ 56.46 \end{Bmatrix}$$

$$\left[ \begin{Bmatrix} 3.48618 \\ 1.62849 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00305 \\ 1.00305 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.57754 & 0.07819 \\ 1 & 0.95798 \\ 0.36408 & 0.07819 \\ 1 & 0.78926 \end{Bmatrix} \right]^{-1} \begin{matrix} 0.47508 \\ \text{Wartości wy-} \\ \text{znaczników są:} \\ 0.20916 \end{matrix}$$

Dalszy rachunek daje

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 137.53 \\ 56.46 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.49681 & 1.63346 \\ 1.65621 & 0.34061 \end{Bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{Bmatrix} 137.53 \\ 56.46 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.34061 & -1.65621 \\ -1.63346 & 3.49681 \end{Bmatrix} \frac{1}{1.51430} = \begin{Bmatrix} 29.97 \\ 20.04 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie znajdujemy

$$x = 59^\circ 59' 30'' + 29''.97 = 59^\circ 59' 59''.97$$

$$y = 69^\circ 59' 40'' + 20''.04 = 70^\circ 00' 00''.04$$

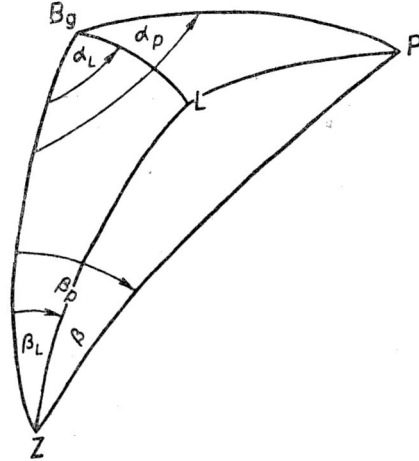
\* \* \*

Szczególnym wypadkiem rozpatrzonego zadania jest rachunek wyznaczenia azymutu gwiazdy L lub P (rys. 4) w oparciu o znajomość: 1) szerokości geograficznej miejsca obserwacji  $\varphi$ , 2) deklinacji  $\delta_L, \delta_P$  tych gwiazd, 3) różnicy ich rektascenzji  $\alpha = R_P - R_L$  oraz 4) kąta dwuściennego  $\beta$  wyzna-

czonego przez wertykały gwiazd, tzn. kąta równego różnicy azymutów gwiazd P i L (rys. 4).

Postępowanie nosi nazwę metody Hosmera-Krasowskiego. Nie wnikając w szczegóły dotyczące obserwacji, które należy oczywiście sprawdzić do tego samego momentu czasu, zauważymy, że o ile zaobserwować też przybliżone wartości wysokości gwiazd nad poziomem, co jest bardzo mało kłopotliwe, a pozwala na wydatne skrócenie czasu rachunku, zadanie można rozwiązać jak niżej.

1. Wyznaczamy z trójkątów paralaktycznych Biegun Zenit Gwiazda kąty przy podstawie Biegun Zenit opierając się na znajomości wszystkich boków w tych trójkątach, po czym porównujemy różnicę rektascenzji gwiazd, tzn. kąt  $\alpha$ , z różnicą kątów przy biegunie oraz różnicę azymutów gwiazd, tzn. kąt  $\beta$  z różnicą kątów przy zenicie, obliczając wielkości



Rys. 4

$$\Delta\alpha = \alpha - (\alpha_P - \alpha_L) \quad \Delta\beta = \beta - (\beta_P - \beta_L)$$

2. Znajdujemy poprawki  $d\beta_L$   $d\beta_P$  zamieniające kąty przy zenicie, znalezione z rozwiązania trójkątów paralaktycznych, na azymuty gwiazd. Wymaga to realizacji wzorów

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_L \operatorname{tgh}_L & \cos\beta_P \operatorname{tgh}_P \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad d\beta_L = \frac{|\Delta\alpha \ \Delta\beta|}{u-v}, \quad d\beta_P = \frac{|\Delta\alpha \ \Delta\beta|}{v-u} \quad (8)$$

**Przykład liczbowy**

Rozwiążemy przykład podany w Roczniku Astronomicznym G.I.N.B. 1946 (F. Kępiński: Metoda Hosmera wyznaczania azymutu na mocy pomiaru kąta horyzontalnego między Biegunową a inną gwiazdą). Przyjmujemy przy tym, że wysokość gwiazd nad poziomem wyznaczono z dokładnością rzędu 1'.

Danymi będą:  $\varphi = 52^{\circ}13'21''$   $\delta_L = 56^{\circ}14'17.3''$   $\delta_P = 89^{\circ}00'16.5''$  (Biegunowa),  $\alpha = R_P - R_L = 17^{\circ}07'05''$   $\beta = 43^{\circ}25'50.9''$   $h_L = 38^{\circ}34'$   $h_P = 52^{\circ}24'$ .

Obie gwiazdy znajdowały się z zachodniej strony południka.

	sin	cos	tg	
$h_L$	0.623425	0.781883	0.797337	Po zestawieniu tablicy potrzebnych w rachunku funkcji trygonometrycznych przystępujemy do rozwiązania trójkątów, pamiętając, że w związku z obroną kierunkowością wartości $\alpha$ i $\beta$ dla obu gwiazd — z uwagi na ich zachodnie położenie będą ujemne. Rachunek daje
$h_P$	0.792290	0.610145	1.298526	
$\delta_L$	0.831354	0.555772	—	
$\delta_P$	0.999849	0.017375	—	
$\varphi$	0.790396	0.612597	—	

$$\cos \alpha_L = \frac{\sin h_L - \sin \delta_L \sin \varphi}{\cos \delta_L \cos \varphi} = \frac{-0.0336739}{0.3404643} = -0.098906$$

$$\alpha_L = -95^{\circ}40'34'';$$

$$\sin \beta_L = \frac{\cos \delta_L \sin \alpha_L}{\cos h_L} = \frac{0.555772 \cdot 0.995097}{0.781883} = 0.707327$$

$$\beta_L = -45^{\circ}01'04''$$

$$\cos \alpha_P = \frac{\sin h_P - \sin \delta_P \sin \varphi}{\cos \delta_P \cos \varphi} = \frac{0.002013350}{0.01064387} = 0.189156$$

$$\alpha_P = -79^{\circ}05'47''$$

$$\text{stad } \alpha_P - \alpha_L = 16^{\circ}34'47'' \quad (\alpha = 17^{\circ}07'05'')$$

$$\sin \beta_P = \frac{\cos \delta_P \sin \alpha_P}{\cos h_P} = \frac{0.017375 \cdot 0.981947}{0.610145} = 0.027963;$$

$$\beta_P = -1^{\circ}36'08''$$

$$\beta_P - \beta_L = 43^{\circ}24'56'' \quad (\beta = 43^{\circ}25'50.9'')$$

$$\text{Mamy więc } \Delta \alpha = 17^{\circ}07'05'' - 16^{\circ}34'47'' = 32'18'' = \underline{1938''}$$

$$\text{oraz } \Delta \beta = 43^{\circ}25'51'' - 43^{\circ}24'56'' = \underline{55''}$$

W dalszym rachunku otrzymujemy

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.612597 \\ 0.790396 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (0.706887 \cdot 0.797337) & (0.999608 \cdot 1.298017) \\ -1 & -1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -0.445120 \\ 0.004765 \end{Bmatrix} \quad d\beta_P = \frac{\begin{vmatrix} 1938 & 55 \\ 0.004765 & -0.002121 \end{vmatrix}}{-0.449885} = 9''.7. \end{aligned}$$

Dodając poprawkę  $d\beta_2$  do przybliżonej wartości azymutu Biegunowej  $\beta_2$  wyznaczmy jej azymut:  $-1^{\circ}36'08'' + 10'' = -1^{\circ}35'58''$ . Począwszy

od rozwiązania trójkątów można było oczywiście pracować z mniejszą dokładnością rachunkową (4 a nawet 3 cyfry znaczące). Doświadczenie poucza jednak, że zmiana dokładności w czasie rachunku nie jest ekonomiczna.<sup>1</sup>

Dowód słuszności wzoru (8) podajemy w odsyłaczu <sup>2</sup>. Dla uniknięcia nieporozumień warto nadmienić, że podanie przykładu na wyznaczenie azymutu metodą Hosmera-Krasowskiego nie miało w żadnym razie na celu propagowania tej metody do celów praktyki. Jest to niewątpliwie jedna z najuciążliwszych metod wyznaczania azymutu i posiadać może znaczenie praktyczne wyłącznie w wypadku posługiwania się efemerycznymi tablicami funkcyjnymi, pozwalającymi sprowadzić czynności rachunkowe do interpolacji, jak np.: Tablice funkcyjne geodety radzieckiego Smirnowa (Tablicy dla określenia azymutu ziemnego przedmieta). Natomiast znaczenie dydaktyczne zagadnienia zaprzeczyć się nie da. I to

<sup>1</sup> Zazwyczaj zakłada się znajomość przybliżonej wartości azymutu jednej z gwiazd (Biegunowej), co w opisanym sposobie postępowania rachunkowego nie byłoby wygodne. Mogłoby bowiem w razie mało dokładnej wartości azymutu — spowodować potrzebę rachunku metodą kolejnych przybliżeń; czego znajomość wysokości gwiazd pozwala z łatwością uniknąć. Zbyteczne wyjaśniać, że pomierzone wysokości gwiazd grają rolę pomocniczych elementów aproksymacji, a nie spostrzeżeń nadliczbowych. Nie ma więc żadnego celu silić się na ich dokładne wyznaczenie, gdyż dokładność ta znikomy ma wpływ na cel pracy: wyznaczenie azymutu gwiazdy okołobiegunowej o małym ruchu w azymucie. W rozwiązany przykładzie zmiany rzędu 1' w wysokościach gwiazd spowodują zmiany w granicach 1'' w azymucie Biegunowej, o czym przekonać się łatwo przez podstawienie wartości liczbowych. (Obliczenie cząstkowych

pochodnych  $\frac{\partial \beta_P}{\partial h_1}$   $\frac{\partial \beta_P}{\partial h_2}$  byłoby tu niesłychanie uciążliwe — podobnie zresztą jak

i obliczenie cząstkowej pochodnej  $\frac{\partial \beta_P}{\partial \beta}$ ).

<sup>2</sup> Dowód słuszności wzoru (8) przeprowadzić można jak niżej. Oznaczając przez  $\varphi$  szerokość geograficzną miejsca obserwacji, przez  $h_L$   $h_P$  wysokości gwiazd nad poziomem, przez  $\Delta\alpha$   $\Delta\beta$  różnice:

$$\Delta\alpha = \alpha - (\alpha_P - \alpha_L) = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2) \quad \Delta\beta = \beta - (\beta_P - \beta_L) = \beta - (\beta_1 + \beta_2)$$

i pamiętając, że  $\beta_1 = -\beta_L$  oraz  $\beta_2 = \beta_P$  napiszemy równanie (6) pod postacią:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sin \beta_L} \\ \frac{1}{\sin \beta_P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/\cos \varphi & \begin{vmatrix} \operatorname{tgh}_L & \operatorname{tg} \varphi \\ 1 & \cos \beta_L \end{vmatrix} \\ 1/\cos \varphi & \begin{vmatrix} \operatorname{tgh}_P & \operatorname{tg} \varphi \\ 1 & \cos \beta_P \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sin \beta_L \cos \varphi} & \frac{1}{\sin \beta_P \cos \varphi} \\ \frac{\operatorname{tgh}_L \cos \beta_L - \operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta_L} & \frac{\operatorname{tgh}_P \cos \beta_P - \operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta_P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$



zapewne jest przyczyną powstawania coraz to nowych ujęć problemu Hosmera, jak np. podane w ostatnich latach przez prof. Kępińskiego (loc. cit.) ujęcie, w którym autor sprowadza zadanie do wyznaczenia kąta godzinowego  $t$  gwiazdy Biegunowej. (w naszych oznaczeniach  $-\alpha_L$  lub  $-\alpha_p$  na drodze rozwiązania jednego równania trygonometrycznego o postaci:

$$k_0 + k_{1c} \cdot \cos t + k_{18} \cdot \sin t + k_2 \cdot \cos(2t - r_\alpha) = k_0 + k_1 \cos(t - K_1) + k_2 \cos(2t - r_\alpha) = 0,$$

gdzie:

$$-k_0 = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{tg} \delta' + \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \varphi) \cdot \sec \varphi \cdot \cos r_\alpha \cdot \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin r_\alpha \cdot \operatorname{tg} p$$

$$k_{1c} = \sin \varphi \cdot \cos r_\alpha \cdot \operatorname{tg} r_a + \sin r_\alpha + \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{tg} \delta' \cdot \operatorname{tg} p = k_1 \cos K_1$$

$$k_{18} = \sin \varphi \cdot \sin r_\alpha \cdot \operatorname{tg} r_a - \cos r_\alpha + \operatorname{tg} \delta' \cdot \operatorname{tg} p = k_1 \sin K_1$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} r_a \cdot \operatorname{tg} p$$

przy czym  $p$  jest odległością polarną Biegunowej,  $\delta'$  deklinacją drugiej gwiazdy,  $r_a$  różnicą odczytów koła poziomego przy celowaniu na gwiazdę pomocniczą i Biegunową,  $r_\alpha$  odpowiadającą różnicą rektascenzyj, wreszcie  $\varphi$  szerokością geograficzną miejsca obserwacji. Pomimo elegancji matematycznej ujęcia — szukaną wielkość określa jedno równanie; czynności rachunkowe nie są tu specjalnie proste.

gdzie oznaczyliśmy w skróceniu przez  $t$  drugi krakowian ostatniego równania. Przekształcimy teraz zmienne  $dx$   $dy$  na zmienne  $d\alpha_1$   $d\beta_2$ . Mamy:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d\alpha_1 \\ d\beta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_1}{dx} \\ \frac{d\beta_2}{dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{Bmatrix} \tau^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_1}{dx} \\ \frac{d\beta_2}{dy} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_1}{dx} \\ \frac{d\beta_2}{dy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau^{-1} \\ \tau^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1/d\alpha_1}{dx} \\ \frac{1/d\beta_2}{dy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \\ \tau \end{Bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Podstawiając wartości:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y},$$

oraz wartość  $\tau$  otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} d\alpha_1 \\ d\beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \beta_L \cos \varphi & \sin \beta_p \\ \operatorname{tgh}_p \cos \beta_p - \operatorname{tg} \varphi & -\operatorname{tg} \varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-1}{\sin \beta_L \cos \varphi} & \frac{\operatorname{tgh}_L \cos \beta_L - \operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta_L} \\ \frac{1}{\sin \beta_p \cos \varphi} & \frac{\operatorname{tgh}_p \cos \beta_p - \operatorname{tg} \varphi}{\sin \beta_p} \end{Bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{Bmatrix} \Delta^\alpha \\ \Delta^\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \frac{1}{(\operatorname{tgh}_P \cos \varphi_P \cos \varphi - \sin \varphi)} \\ (\operatorname{tgh}_L \cos \beta_L \cos \varphi - \sin \varphi) & 1 \end{Bmatrix}^{-1}$$

Przy oznaczeniach:  $u = \operatorname{tgh}_L \cos \beta_L \cos \varphi - \sin \varphi$  oraz:  $v = \operatorname{tgh}_P \cos \beta_P \cos \varphi - \sin \varphi$  otrzymamy:

$$\begin{Bmatrix} d\alpha_1 \\ d\beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta^\alpha \\ \Delta^\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \frac{1}{v} \\ U & 1 \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} \Delta^\alpha \\ \Delta^\beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & -u \\ -\frac{1}{v} & 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{1 - \frac{u}{v}}$$

Obliczając potrzebną poprawkę azymutu  $d\beta_P = d\beta_2$  znajdziemy:

$$d\beta_P = \frac{-U \Delta^\alpha + \Delta^\beta}{1 - \frac{U}{v}} = \frac{(-U \Delta^\alpha + \Delta^\beta) v}{v - u} = \frac{uv \Delta^\alpha - v \Delta^\beta}{u - v}$$

Dla symetrii napisaliśmy to pod postacią:

$$d\beta_P = \frac{\begin{vmatrix} \Delta^\alpha & \Delta^\beta \\ v & uv \end{vmatrix}}{u - v}$$

Analogicznie byłoby

$$d\beta_L = -d\beta_I = \frac{\begin{vmatrix} \Delta^\alpha & \Delta^\beta \\ u & uv \end{vmatrix}}{u - v}$$

Również dla symetrii napisaliśmy oznaczenia  $u$   $v$  pod postacią iloczynu krakowianowego

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \beta_L \operatorname{tgh}_L & \cos \beta_P \operatorname{tgh}_P \\ -1 & -1 \end{Bmatrix}$$

Użycie symboliki krakowianowej we wzorze (8) jest oczywiście mało istotne. Natomiast użycie tej symboliki w rozumowaniu pozwala na przeprowadzenie dowodu, z czego często autorzy unikający posługiwania się pojęciem liczb zespolonych muszą zrezygnować.

#### РЕЗЮМЕ

Во многих геодезических проблемах приходится определить комплекс независимых переменных  $X, Y, Z$ , связанных функционально с известными величинами другого комплекса независимых переменных  $F, G, H$ . Непосредственное определение величины  $X, Y, Z$ , как функции  $F, G, H$ , является при этом очень трудным, или, в некоторых случаях даже невозможным в связи с характером зависимости  $X(F, G, H), Y(F, G, H), Z(F, G, H)$ .

Известны однако приближенные значения искомых  $X, Y, Z$ , а кроме того вычисление производных  $F(X, Y, Z), G(X, Y, Z), H(X, Y, Z)$  и вычисление значений самих функций для известных значений не представляет затруднения.

Вопрос данного характера можно считать обратной задачей разложения функции многих переменных в ряд Тэйлора, пренебрегая членами высших степеней. Применяя метод краковянов Банаховича автор сводит эти проблемы к одинаковой схеме и указывает пользу такого решения так с математической точки зрения, как и с практического приложения к численным вычислениям.

#### RESUMÉ

Dans beaucoup de problèmes géodésiques, nous recherchons souvent un certain ensemble de variables indépendantes  $X, Y, Z$ , dont chacune peut être considéré comme une fonction des grandeurs connues d'un autre ensemble de variables indépendantes les unes des autres  $F, G, H$ . Une détermination directe des grandeurs  $X, Y, Z$  comme fonctions des grandeurs  $F, G, H$  est, outre cela, pénible ou même impossible à réaliser, vu le caractère de dépendance de  $X(F, G, H), Y(F, G, H), Z(F, G, H)$ .

Dans ce problème, cependant, les valeurs approximatives recherchées des grandeurs  $X, Y, Z$  sont connues et la différentiation des fonctions  $F(X, Y, Z), G(X, Y, Z), H(X, Y, Z)$ , de même que calcul des valeurs variables connues, ne présente pas de difficultés.

Le problème du type précité peut être considéré comme le problème inverse du développement de la fonction de plusieurs variables en série de Taylor avec l'omission des hautes puissances des accroissements.

Le but de cet article serait de donner, par l'adaptation du calcul des cracoviens de Banachiewicz, une forme homogène à ces problèmes, ce qui illustrera en même temps les avantages de cette conception aussi bien dans le domaine théorique que dans le domaine du calcul numérique.

Zygmunt Kowalczyk

## Pomiar wysokości kominów fabrycznych i kontrola ich pionowości

Częstym zjawiskiem obserwowanym w praktyce są stwierdzone wychylenia kominów przemysłowych. Zjawisko to obserwujemy nie tylko na terenach górniczych, jako skutek eksploatacji górniczej, ale i na terenach niegórniczych.

Wychylenia te są spowodowane:

- osiadaniem fundamentu i muru komina
- osiadaniem samego fundamentu
- osiadaniem muru komina.

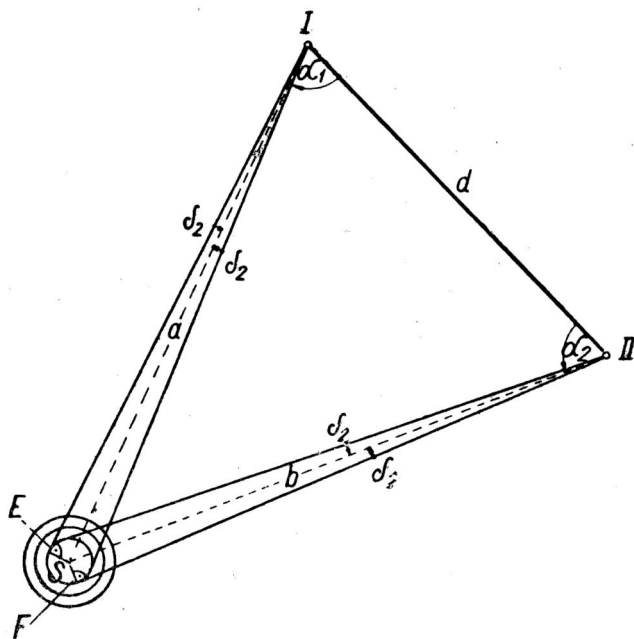
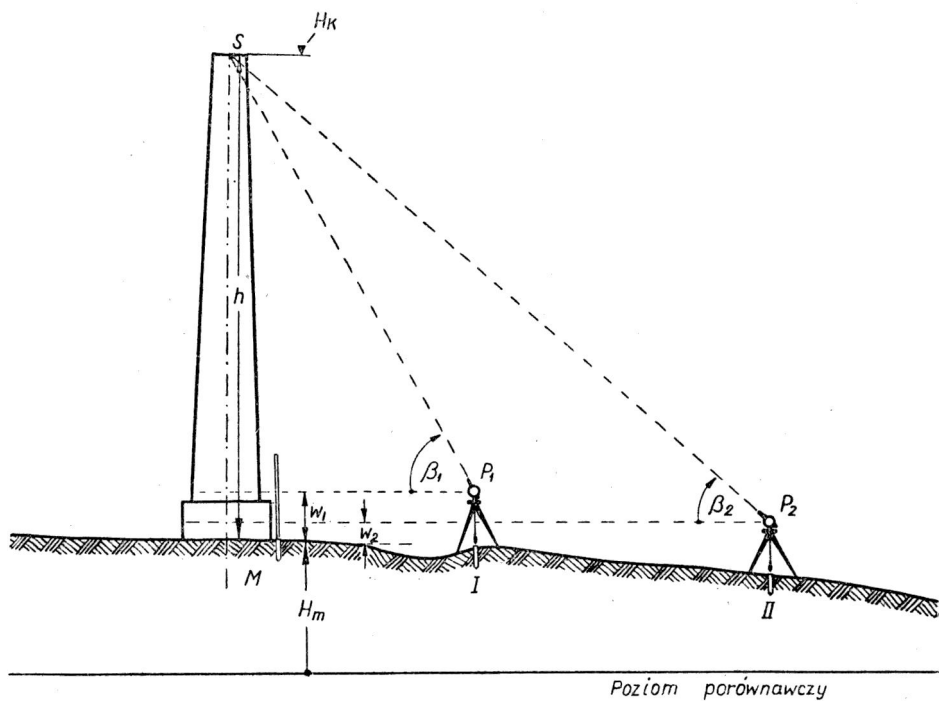
Na terenach niegórniczych najczęściej spotykamy osiadanie muru komina jako skutek za małej izolacji cieplnej, przez co beton przegrzewa się i w następstwie tego rozpada się na piasek, powodując zaciskanie fug muru.

Zadaniem pomiarów geodezyjnych jest ustalenie wielkości wychylenia osi pionowej komina, która nie powinna przekraczać 6 — 10 cm i ustalenie czy wychylenie komina rośnie progresywnie z jego wysokością. Pomiar wysokości kominów opieramy na specjalnie założonej bazie I — II tak usytuowanej, aby mierzony komin znajdował się na symetrycznej do bazy, a więc w pobliżu prostopadłej wyprowadzonej z jej środka (rys. 1). Długość bazy powinna być dostosowana do wysokości komina, a więc nie za krótka, tak aby kąty nachylenia celowych  $\beta$  były nie większe jak  $45^{\circ}$ . Przy kątach  $\beta$  większych od  $30^{\circ}$  trzeba zwrócić szczególną uwagę na dokładne spoziomowanie przyrządu.

Do obliczeń potrzebne są kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  zawarte między bazą a środkiem komina S, który nie jest sygnalizowany, wobec tego kąty te obliczamy ze średnich odczytów celowych skierowanych na obie skrajne tworzące komina.

Z trójkąta S, I, II na podstawie twierdzenia sinusów otrzymamy

$$a = d \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad (1)$$



Rys. 1.

$$b = d \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (2)$$

Wobec tego  $h = a \cdot \operatorname{tg} \beta_1 + w_1 \quad (3)$

i  $h = b \cdot \operatorname{tg} \beta_2 + w_2. \quad (4)$

często jeszcze należy obliczyć  $r$ , do czego wykorzystamy trójkąt S E I i S F II

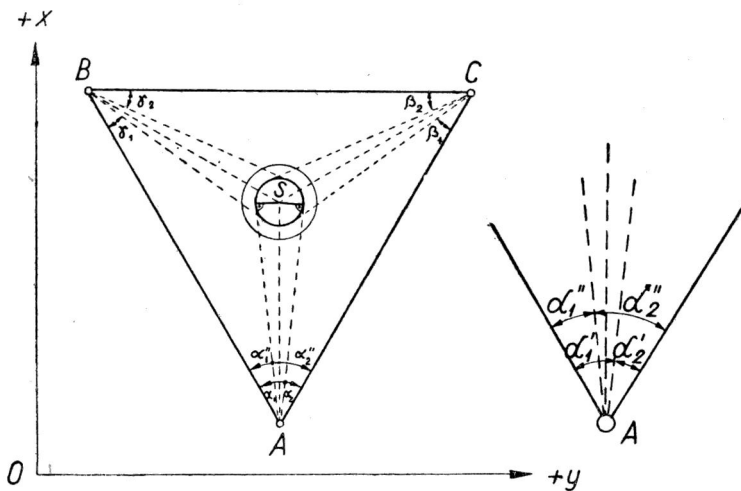
$$\frac{r}{a} = \sin \delta_2 \quad \text{skąd} \quad r = \sim a \cdot \frac{\delta''_2}{\rho''} \quad (5)$$

$$\frac{r}{b} = \sin \delta_1 \quad \text{skąd} \quad r = \sim b \cdot \frac{\delta''_1}{\rho''} \quad (6)$$

gdzie  $\delta_1$  i  $\delta_2$  są bardzo małymi kątami. Współrzędna  $H_k$  najwyższego punktu kominą:

$$H_k = H_m + h. \quad (7)$$

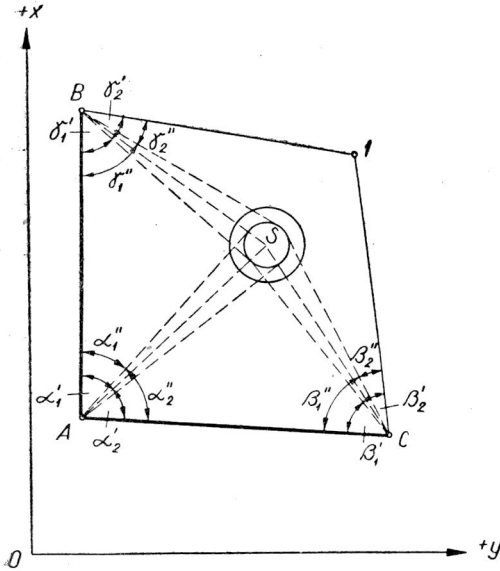
Na podstawie trygonometrycznego pomiaru wysokości możemy również ustalić wielkość skrzywienia kominą.



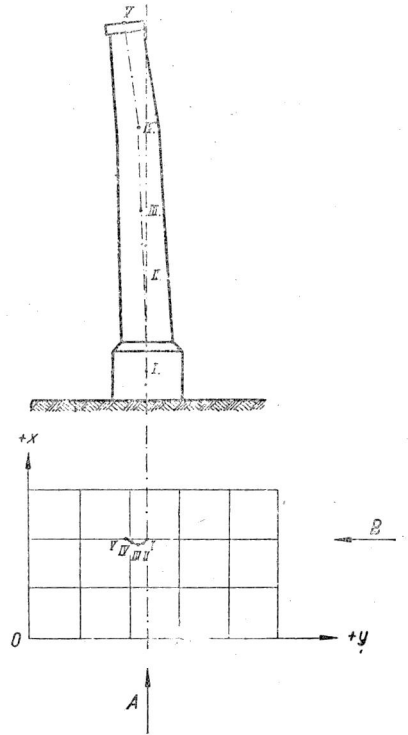
Rys. 2.

Ponieważ zagadnienie to wymaga określenia trzech współrzędnych, przy czym  $x$  i  $y$  szczególnie dokładnie, dlatego obserwacje należy dokonać z trzech stanowisk (rys. 2), tworzących trójkąt lub zamknięty wielobok (rys. 3), jeśli są przeszkody terenowe dla założenia trójkąta.

Pierwsze stanowisko wybieramy w miejscu najlepiej widocznego skrzywienia komina.



Rys. 3.



Rys. 4.

Pomiaru dokonujemy w miejscach widocznych skrzywień, a jeżeli trudno jest je ustalić na oko, to wtedy obserwujemy komin na wysokości jego pierścieni (obręczy) lub o kilka rzędów cegieł poniżej lub powyżej najbliższego pierścienia (rys. 4).

Mając dane współrzędne  $x$ ,  $y$  i  $H$  wszystkich trzech punktów stałych  $A$ ,  $B$  i  $C$  oraz pomierzone kąty poziome i pionowe, możemy wyliczyć

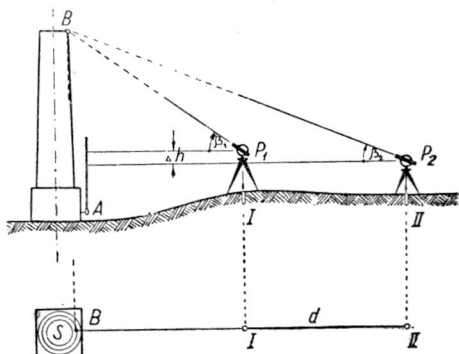
współrzędne  $x$ ,  $y$  i  $z$  środka komina w jego charakterystycznych miejscach.

Współrzędne  $x$ ,  $y$  środka komina obliczamy trzykrotnie niezależnie z trzech trójkątów wcięciem w przód, a następnie wyrównujemy je graficznie (obliczając środek ciężkości trójkąta, którego wierzchołkami są współrzędne przybliżone środka komina, obliczone z punktów A, B i C). W ten sposób otrzymamy dla każdego przekroju komina jego środek.

Obliczone środki komina poszczególnych przekrojów nanosimy względem środka pierwszego przekroju komina, co da nam obraz przebiegu skrzywienia komina w płaszczyźnie pionowej i poziomej (rys. 4).

Wysokości przekrojów, dla których wyznaczono środek komina określamy za pomocą niwelacji trygonometrycznej.

Można określić wszystkie trzy współrzędne przekroju komina ze znanych współrzędnych punktów A, B i C oraz kątów nachylenia celowych do środka komina. Sposób powyższy podany jest na dalszych stronach. Warunki miejscowe mogą zmusić nas do usytuowania bazy I — II w przedłużeniu środka komina (rys. 5).



Rys. 5.

#### Określenie współrzędnych $x$ , $y$ , $H$ za pomocą pomiaru kątów pionowych

Ponieważ zagadnienie powyższe dotyczy trzech niewiadomych, dlatego musimy mieć tyleż równań. Punkt w przestrzeni możemy określić za pomocą trzech kątów, a mianowicie: dwóch kątów poziomych i jednego pionowego, dwóch kątów pionowych i jednego poziomego i wreszcie za pomocą trzech kątów pionowych.

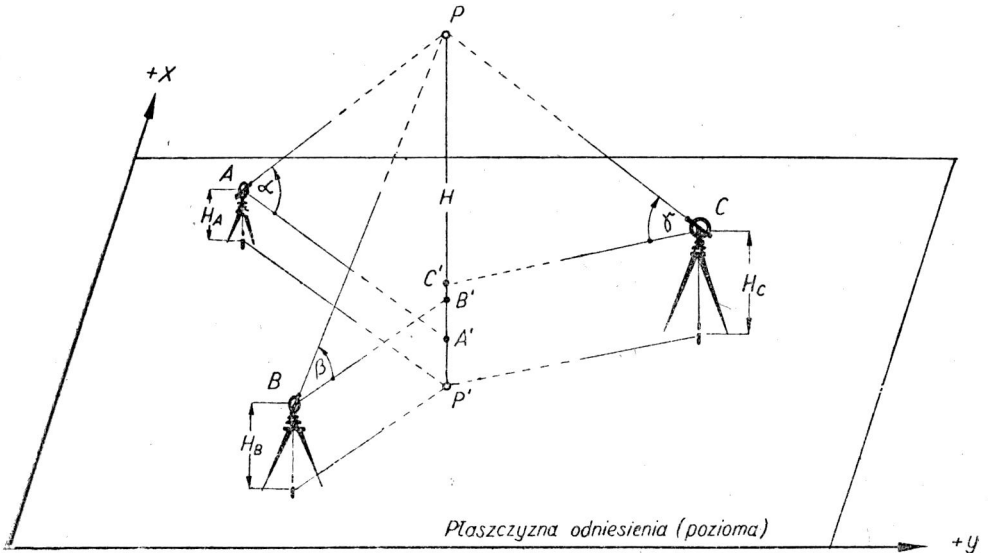
W ostatnim wypadku, który będziemy rozpatrywali dla określenia w przestrzeni punktu P (którym może być np. środek komina, piorunochronu, szczyt wieży itp.), mamy dane współrzędne trzech punktów A, B i C, a mianowicie:

$$(x_A, y_A, H_A), (x_B, y_B, H_B), (x_C, y_C, H_C)$$



i kąty pionowe pomierzone na stanowiskach A, B i C do punktu P tj.:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (rys. 6).

Powyższe dane spełniają zależności, co wynika z trójkątów  $(A P A')$ ,  $(B P B')$  i  $(C P C')$ , przy czym należy pamiętać, że ten sposób wyznaczania punktu w przestrzeni może mieć miejsce przy krótkich celowych.



Rys. 6.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{H - H_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{H - H_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}} \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{H - H_C}{\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

By nie operować dużymi cyframi, wprowadzamy wielkości przybliżone  $x_0$ ,  $y_0$  i  $H_0$ , które możemy określić graficznie oraz na podstawie których wyliczymy:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x \\ y &= y_0 + \Delta y \\ H &= H_0 + \Delta H \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wprowadzając wartości (9) do (8) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} (H_0 + \Delta H - H_A) - \operatorname{tg} \alpha \sqrt{(x_0 + \Delta x - x_A)^2 + (y_0 + \Delta y - y_A)^2} &= 0 \\ (H_0 + \Delta H - H_B) - \operatorname{tg} \beta \sqrt{(x_0 + \Delta x - x_B)^2 + (y_0 + \Delta y - y_B)^2} &= 0 \\ (H_0 + \Delta H - H_C) - \operatorname{tg} \gamma \sqrt{(x_0 + \Delta x - x_C)^2 + (y_0 + \Delta y - y_C)^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Przechodzimy do rozwinięcia powyższych zależności w szereg Taylora, którego ogólną postacią jest:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + \\ &+ \frac{df}{dx} \cdot \Delta x + \frac{df}{dy} \cdot \Delta y + \frac{df}{dz} \cdot \Delta z + \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^2f}{dy^2} \cdot \frac{\Delta y^2}{2!} + \\ &+ \frac{d^2f}{dz^2} \cdot \frac{\Delta z^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora otrzymamy przez zróżniczkowanie funkcji (10) względem poszczególnych zmiennych.

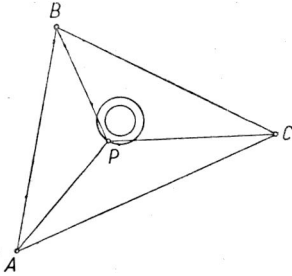
$$\left. \begin{aligned} \Delta H - \frac{(x_0 - x_A) \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2}} \cdot \Delta x - \frac{(y_0 - y_A) \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2}} \cdot \Delta y + \\ + (H_0 - H_A) - \operatorname{tg} \alpha \sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} = 0 \\ \Delta H - \frac{(x_0 - x_B) \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{(x_0 - x_B)^2 + (y_0 - y_B)^2}} \cdot \Delta x - \frac{(y_0 - y_B) \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{(x_0 - x_B)^2 + (y_0 - y_B)^2}} \cdot \Delta y + \\ + (H_0 - H_B) - \operatorname{tg} \beta \sqrt{(x_0 - x_B)^2 + (y_0 - y_B)^2} = 0 \\ \Delta H - \frac{(x_0 - x_C) \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{(x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2}} \cdot \Delta x - \frac{(y_0 - y_C) \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{(x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2}} \cdot \Delta y + \\ + (H_0 - H_C) - \operatorname{tg} \gamma \sqrt{(x_0 - x_C)^2 + (y_0 - y_C)^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Wyrazy drugie i dalszych rzędów pomijamy jako znikomo małe. Rozwiązując układ równań (11) otrzymamy  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta H$ .

Wyliczone za pomocą powyższych wzorów wielkości  $x$ ,  $y$  i  $H$  będą tym dokładniej określone im mniejsze są wielkości  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  i  $\Delta H$ .

**Przykład 1**

Dane są współrzędne trzech punktów A, B, C, a należy określić współrzędne pionurochronu P (rys. 7).



Rys. 7

	x	y	H
A	0,00	0,00	+ 0,37
B	53,72	31,24	0,00
C	0,00	62,51	+ 0,15

Współrzędne przybliżone pionurochronu P wynoszą:

$x_0$	$y_0$	$H_0$
10,50	30,00	24,50

Kąty pionowe do pionurochronu pomierzone na stanowiskach A, B, C:

$$\text{na stanowisku A : } \alpha = 37^{\circ} 10' 50''$$

$$\text{na stanowisku B : } \beta = 29^{\circ} 48' 40''$$

$$\text{na stanowisku C : } \gamma = 35^{\circ} 38' 20''.$$

Podstawiając danea wielkości do układu równań (11) otrzymamy

$$\Delta H - 0,250 \Delta x - 0,716 \Delta y + 24,13 - 24,10 = 0,$$

$$\Delta H + 0,573 \Delta x + 0,016 \Delta y + 24,50 - 24,78 = 0,$$

$$\Delta H - 0,220 \Delta x + 0,682 \Delta y + 24,35 - 24,49 = 0,$$

$$\Delta H - 0,250 \Delta x - 0,716 \Delta y + 0,03 = 0,$$

$$\Delta H + 0,573 \Delta x + 0,016 \Delta y - 0,28 = 0,$$

$$\Delta H - 0,220 \Delta x + 0,682 \Delta y - 0,14 = 0,$$

po pierwszej redukcji:

$$- 0,823 \Delta x - 0,732 \Delta y + 0,31 = 0,$$

$$- 0,793 \Delta x + 0,666 \Delta y + 0,14 = 0.$$

Rozwiązując układ powyższych dwóch równań otrzymamy

$$\text{z drugiego} \quad \Delta x = \frac{0,666 \Delta y + 0,14}{0,793}$$

skąd po podstawieniu do pierwszego równania

$$- 0,823 \cdot \left( \frac{0,666 \Delta y + 0,14}{0,793} \right) - 0,732 \Delta y + 0,31 = 0,$$

$$\text{czyli} \quad - 1,423 \Delta y + 0,17 = 0,$$

skąd ostatecznie

$$\Delta y = \frac{0,17}{1,423} = 0,12,$$

oraz

$$\Delta x = 0,28,$$

po czym otrzymamy

$$\Delta H = 0,12.$$

Współrzędne piorunochronu wynoszą:

$$x_p = x_0 + \Delta x = 10,50 + 0,28 = 10,78 \text{ m},$$

$$y_p = y_0 + \Delta y = 30,00 + 0,12 = 30,12 \text{ m},$$

$$H_p = H_0 + \Delta H = 24,50 + 0,12 = 24,62 \text{ m}.$$

Obliczenia powyższe wykonano suwakiem logarytmicznym.

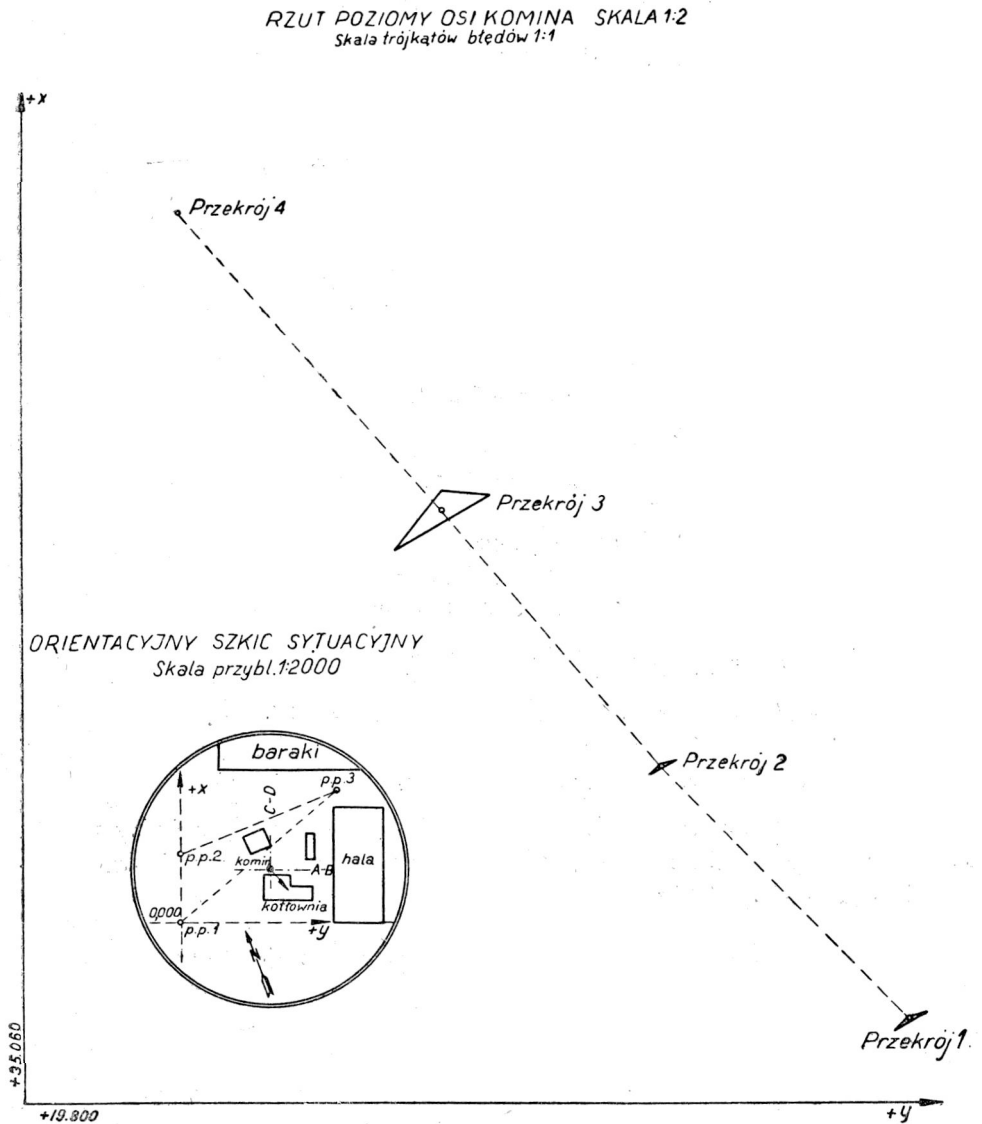
Różnice w wartości współrzędnych obliczonych maszyną (przy użyciu sześciocyfrowych tablic funkcji trygonometrycznych) i suwakiem logarytmicznym — wyniosły

$$H_p : 0 \text{ cm}, \quad \text{dla } x_p : + 2 \text{ cm}, \quad \text{dla } y_p : + 1 \text{ cm}.$$

## Przykład 2

Pomiar wychylenia osi komina wyznaczono metodą wcięcia w przód i trygonometrycznego pomiaru wysokości z czterech przekrojów komina. Dla każdego przekroju określono położenie osi komina. Pomiar i obliczenia oparto na wcinaniu w przód dokonanym z trzech punktów 1, 2 i 3. Współrzędne osi komina każdego przekroju wyznaczono trzykrotnie, a to

przez obliczenie wcinania z punktów 1 i 2, 2 i 3, 1 i 3, przy czym dwa z tych wcięć wykonano niezależnie.



Z trzykrotnego obliczenia współrzędnych osi komina, otrzymano dla każdego przekroju trójkąt błędów. Kształt trójkąta błędów zależy

od usytuowania punktów obserwacji (1, 2, 3) względem komina, a wielkości boków trójkąta błędów zależą od dokładności pomiaru odległości 1 — 2, 2 — 3, 3 — 1, od dokładności pomiaru kierunków, od dokładności spoziomowania przyrzędu (szczególnie przy stromych celowych) i od regularności przekrojów komina. Należy przy tym pamiętać, że celowa jest skierowana bezpośrednio na brzeg komina. Jak wykazała praktyka, boki tych trójkątów — w zależności od technicznych warunków lokalnych wahają się w granicach od kilku milimetrów do 3 cm. Za ostateczne współrzędne osi przekrojów przyjęto środki ciężkości trójkątów błędów. Ścisłe wyrównanie współrzędnych mija się z celem. Jako kierunki do osi danego przekroju przyjęto średnie arytmetyczne obliczone z kierunków do prawego i lewego brzegu komina. Błąd pomiaru kątów pionowych nie ma tu większego znaczenia z uwagi na fakt, że określenie wysokości z dokładnością do kilku centymetrów nie ma dla tych celów praktycznego znaczenia. Ilość poczetów jest uzależniona od wielkości przypuszczalnego wychylenia. W wypadku znacznego wychylenia — (kilkunastu czy kilkudziesięciu centymetrów) pomiar może być wykonywany w jednym poczecie, gdyż wielkość obliczonego wychylenia nie zostanie zniekształcona przez błędy pomiarów. Przy nieznacznym wychyleniu należy zastosować większą ilość poczetów. Szczególnie dokładnie należy mierzyć długości podstaw 1 — 2, 2 — 3, 3 — 1, gdyż błędy pomiaru podstawy wpływają bezpośrednio i bardzo szkodliwie na współrzędne osi komina obliczone dla poszczególnych przekrojów.

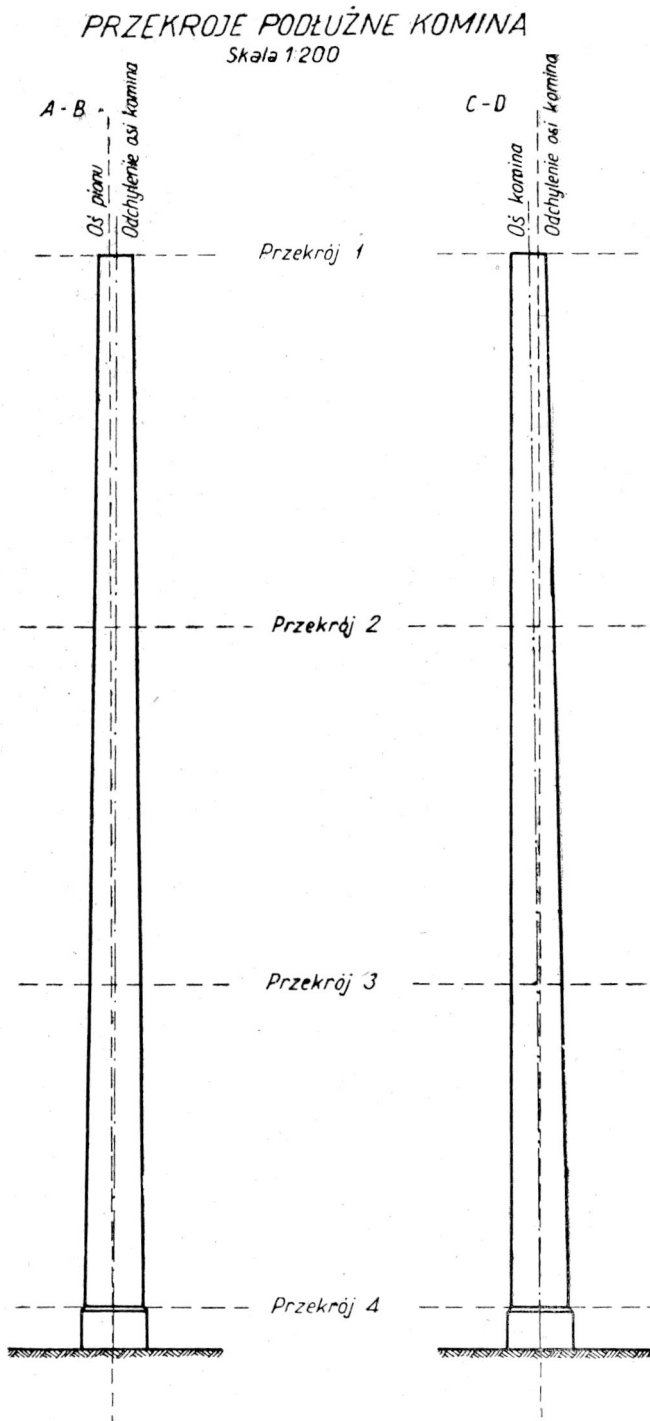
Kąty załamania podstawy należy mierzyć w tylu poczetach, ile obrazno przekrojów komina — nie mniej jednak niż w trzech, celując równocześnie na brzegi komina. Po dokonaniu pomiaru kątów danej serii instrument centrujemy i poziomujemy ponownie.

Operat pomiarowy składa się z:

- 1) rzutu poziomego osi komina wyznaczonych dla poszczególnych przekrojów, wykreślonego w skali 1 : 1 (rys. 8),
- 2) szkicu orientacyjnego sytuacji zabudowań komina w skali 1 : 1000 (1 : 500) (rys. 9),
- 3) z dwu podłużnych przekrojów komina w skali 1 : 100 (1 : 10) wykonanych w kierunkach do siebie prostopadłych (rys. 10).

Rzut poziomy pozwoli określić wielkości ekscentru między środkami poszczególnych przekrojów komina.

W naszym wypadku stwierdzono wychylenie osi komina wynoszące 43 cm.



**Rys. 10**  
(zmniejszony  
w stosunku  
2:3 w po-  
równaniu do  
podanej  
skali)

T a b l i c a 1

## Pomiar długości podstawy

bok F-2

Nr	Odczyt prawy p	Odczyt lewy l	Różnica p-l	średnia
1	25,168	0,000	25,168	25,168
2	25,208	0,040	25,168	
3	25,181	0,012	25,169	
4	25,222	0,054	25,168	
5	25,187	0,020	25,167	
6	25,227	0,060	25,167	
7	25,266	0,100	25,166	
8	25,268	0,100	25,168	
		Suma	1,341	

T a b l i c a 2

Nr	Odczyt prawy p	Odczyt lewy l	Różnica p-l	średnia
1	67,293	0,011	67,282	67,283
2	67,309	0,025	67,284	
3	67,302	0,020	67,282	
4	67,314	0,031	67,283	
5	67,328	0,045	67,283	
6	67,314	0,030	67,284	
7	67,304	0,021	67,283	
8	67,302	0,019	67,283	
		Suma	2264	

T a b l i c a 3

bok 1-3

Nr	Odczyt prawy p	Odczyt lewy l	Różnica p-l	średnia
1	80,828	0,020	80,808	80,809
2	80,907	0,098	80,809	
3	80,885	0,075	80,810	
4	80,875	0,068	80,807	
5	80,862	0,052	80,810	
6	80,838	0,030	80,808	
7	80,824	0,015	80,809	
8	80,821	0,010	80,811	
		Suma	64,72	



T a b l i c a 4

## Pomiar kierunków poziomych i kątów pionowych

			Stanowisko: 1				Instrument: Wilt T1.			Obserwował: Mgr. inż. W. Batkiewicz							
Nr. przekr.	Cel.	pozi. / pionowy	Poczet I				średnia poczetu		średnia przekr.			kąt pionowy		średnia		Uwagi.	
			g	c	cc	średnia c cc	c	cc	g	cc	cc	g	c	g	c		
1	2	3	4				5		6			7			8		9
Przekrój 1	2	I	0	67	<sup>80</sup> <sub>70</sub>	67	75	<sup>00</sup> <sub>00</sub>	0	00	00						
		II	200	65	<sup>90</sup> <sub>10</sub>	65	05	66	40								
	L	I	67	15	<sup>80</sup> <sub>110</sub>	15	95	44	00								
		II	267	04	<sup>90</sup> <sub>80</sub>	04	85	10	40	67	49	60	50	35	45	65,5	
	P	I	69	27	<sup>20</sup> <sub>30</sub>	27	25	55	20				349	66			
		II	269	15	<sup>100</sup> <sub>90</sub>	15	95	21	60				400	01			
Przekrój 2	2	I	50	70	<sup>90</sup> <sub>100</sub>	70	95	<sup>00</sup> <sub>00</sub>	0	00	00						
		II	250	69	<sup>10</sup> <sub>10</sub>	69	10	70	02								
	L	I	116	76	<sup>20</sup> <sub>00</sub>	76	10	1	05								
		II	316	66	<sup>10</sup> <sub>00</sub>	66	05	71	07	67	28	48	63	71	36	28,5	
	P	I	119	30	<sup>80</sup> <sub>100</sub>	30	90	55	90				336	28			
		II	319	20	<sup>90</sup> <sub>100</sub>	20	95	25	92				399	99			
Przekrój 3	2	I	100	14	<sup>20</sup> <sub>20</sub>	14	20	<sup>00</sup> <sub>00</sub>	0	00	00						
		II	300	12	<sup>30</sup> <sub>50</sub>	12	40	13	30								
	L	I	165	78	<sup>10</sup> <sub>00</sub>	78	05	60	70								
		II	365	<sup>69</sup> <sub>69</sub>	<sup>90</sup> <sub>100</sub>	69	95	74	00	67	08	40	80	82	19	18	
	P	I	168	<sup>73</sup> <sub>73</sub>	<sup>90</sup> <sub>80</sub>	73	85	56	10				319	18			
		II	368	<sup>64</sup> <sub>64</sub>	<sup>90</sup> <sub>100</sub>	64	95	69	40				400	00			
Przekrój 4	2	I	150	46	<sup>00</sup> <sub>20</sub>	46	10	<sup>00</sup> <sub>00</sub>	0	00	00						
		II	350	45	<sup>50</sup> <sub>60</sub>	45	55	45	82								
	L	I	215	59	<sup>00</sup> <sub>40</sub>	59	20	10	75								
		II	15	53	<sup>90</sup> <sub>100</sub>	53	95	56	57	66	83	84	99	43	00	58	
	P	I	219	<sup>05</sup> <sub>05</sub>	<sup>40</sup> <sub>60</sub>	05	50	56	93				300	59			
		II	19	<sup>00</sup> <sub>00</sub>	<sup>00</sup> <sub>00</sub>	00	00	02	75				400	02			

Tablica 5

		Stanowisko 2				Instrument Wild T1.				Obserwowat. Mgr inż. H. Bałkiewicz						
Nr. przekr.	Cel	Poczet I				średnia poczetu		średnia przekr.			kąt pionowy		średnia		Uwagi	
		g	c	cc	średnia c cc	c	cc	g	cc	cc	g	c	g	c		
1	2	3	4			5		6			7		8		9	
Przekrój 1	1	I	0	87 87	80 80	87	80	00	00	0	00	00				
		II	200	86 86	00 00	86	00	86	90							
	3	I	274	36	40 60	36	50	49	20							
		II	74	35	70 70	35	70	36	10	273	49	20				
	l	I	309	33 33	10 10	33	10	39	12							
		II	109	18 18	90 100	18	95	26	02	309	52	11	49	97	50	04
	p	I	311	59 59	00 00	59	00	65	10				350	05		
		II	111	45 45	00 00	45	00	52	00				400	02		
Przekrój 2	1	I	50	05 05	100 90	05	95	00	00	0	00	00				
		II	250	04 04	80 80	04	80	05	38							
	3	I	323	55 55	30 10	55	20	49	30							
		II	123	54 54	10 20	54	15	54	68	273	49	30				
	l	I	358	10 10	80 100	10	90	99	87							
		II	157	99 99	80 40	99	60	05	25							
	p	I	360	86 86	00 00	86	00	74	64	309	37	25	59	88	40	11,5
		II	160	74 74	00 10	74	05	80	02				340	11		
Przekrój 3	1	I	100	66 66	50 50	66	50	00	00	0	00	00				
		II	300	66 66	10 00	66	05	66	27							
	3	I	374	15 15	85 90	15	88	49	22							
		II	174	15 15	10 10	15	10	15	49	273	49	22				
	l	I	8	30 30	00 00	30	00	59	65							
		II	208	21 21	80 90	21	85	25	92				78	35		
	p	I	11	53 53	00 00	53	00	82	45	309	21	05	321	64	21	64,5
		II	211	44 44	40 50	44	45	48	72				399	99		
Przekrój 4	1	I	150	12 12	90 90	12	90	00	00	0	00	00				
		II	350	12 12	0 10	12	05	12	47							
	3	I	23	62	0 40	62	25	49	28							
		II	223	61	20 30	61	25	61	75							
	l	I	57	27 27	80 80	27	80	12	88	273	49	28				
		II	257	22 22	80 100	22	90	25	35				99	34	00	66,5
	p	I	61	08 08	70 40	08	55	93	68	309	03	28	300	67		
		II	261	03 03	80 70	03	75	06	15				400	01		

T a b l i c a 6

Stanowisko: 3 Instrument: Wild T1 Obserwowat: Mgrinz W Bałkiewica																
Nr. przekr.	Cel	Poczet i					średnia początku		Średnia przekr.			kąt pionowy		średni:		Uwagi
		g	c	cc	średnia		c	cc	g	c	cc	g	c	g	c	
					c	cc										
1	2	3	4			5		6		7			8		9	
Przekrój 1	2	I	0	08 08	20 00	08	10	00	00	0	00	00				
		II	200	11 11	80 60	11	70	09	90							
	L	I	368	68 67	00 90	67	95	53	00							
		II	168	57 57	90 80	57	85	62	90	369	57	05				
	p	I	370	70 76	30 00	76	15	61	10							
		II	170	66 65	00 70	65	85	71	00							
Przekrój 2	2	I	50	78 78	60 40	78	50	00	00	c	00	00				
		II	250	76 76	10 40	76	25	77	38							
	L	I	19	33 33	20 20	33	20	51	27							
		II	219	24 24	00 20	24	10	28	65	369	78	04				
	p	I	21	86 86	60 40	86	50	04	80							
		II	221	77 77	80 90	77	85	82	18							
Przekrój 3	2	I	100	65 65	20 60	65	40	00	00	0	00	00				
		II	300	63 63	20 00	63	10	64	25							
	L	I	69	20 20	00 00	20	00	51	97							
		II	269	12 12	50 40	12	45	16	22	369	98	28				
	p	I	72	12 12	80 40	12	60	44	60							
		II	272	05 05	20 00	05	10	08	85							
Przekrój 4	2	I	150	58 58	90 80	58	85	00	00	0	00	00				
		II	350	57 57	00 00	57	00	57	92							
	L	I	119	17 17	10 00	17	05	56	40							
		II	319	11 11	60 60	11	60	14	32	370	21	23				
	p	I	122	46 47	90 00	46	95	86	06							
		II	322	41 41	00 00	41	01	43	98							

Tablica 7  
Obliczenie średniej wartości kąta załamania podstawy

Nr pomiaru	kąt załamania			średnia	V
	g	c	cc		
1	273	49	20	273 <sup>g</sup> 49 <sup>c</sup> 25 <sup>cc</sup>	+5 <sup>cc</sup>
2	273	49	30		-5 <sup>cc</sup>
3	273	49	22		+3 <sup>cc</sup>
4	273	49	28		-3 <sup>cc</sup>
Σ			100		0

Tablica 8  
Obliczenie współrzędnych punktów podstawy

Punkt	kąt załamania			kąt północny σ			sin σ cos σ	długość L	przyrosty		Współrzędne		Punkt
	g	c	cc	g	c	cc			Δy	Δx	Y	X	
1							0,00 000	25,168	0,000	+25,168	0,000	0,000	1
2	273	49	25	73	49	25	+1,00 000 +0,91 456 +0,40 444	67,283	+61,534	+27,212	0,000	25,168	2
3	381	61	25	255	10	50	-0,76 148 -0,64 819	80,809	-61,534	-52,380	+61,534	+52,380	3
1	344	89	50	0	00	00					0,000	0,000	1
2													

Σ<sub>p</sub> = 1000000  
Σ<sub>t</sub> = 1000000

Σ = 0,000 0,000

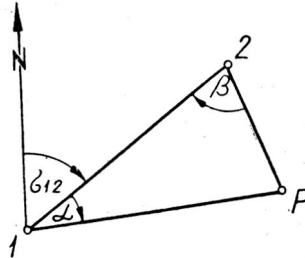
Kąty na stanowisku 1 i 2 oraz długość 1 i 5 pomierzono tylko dla kontroli mierząc kąt prawy i lewy 2 razy

Tablica 9  
Orientacja kierunków

Punkt	Nr. przekroju	Cel	kier. mierzony			kąt północny σ			kier. zorientowany σ <sub>g</sub> +l <sub>i</sub> =σ		
			g	c	cc	g	c	cc	g	c	cc
1	2		0	00	00	0	00	00	0	00	00
	1		67	49	60				67	49	60
	2		67	28	48				67	28	50
	3		67	08	40				67	08	40
	4		66	83	84				66	83	85
2	1		0	00	00	200	00	00	200	00	00
	1		309	52	11				109	52	10
	2		309	37	25				109	37	25
	3		309	21	05				109	21	05
	4		309	03	28				109	03	30
3	2		0	00	00	273	49	25	273	49	25
	1		369	57	05				243	06	30
	2		369	78	04				243	27	30
	3		369	98	28				243	47	35
	4		370	21	23				243	70	50

## T a b l i c a 10

Formularz do obliczenia wcinania, w przód metodą krakowianową  
wg schematu prof. T. Kochmańskiego



$$\begin{aligned}\sigma_{1P} &= \sigma_{12} + \alpha \\ \sigma_{2P} &= \sigma_{21} - \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \sigma_{1P} &= a_1 \\ \operatorname{tg} \sigma_{2P} &= a_2\end{aligned}$$

$$Y_2 - Y_1 = \Delta Y$$

$$X_2 - X_1 = \Delta X$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta Y, a_1 \\ \Delta X, +1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +1 & +1 \\ -a_2 & -a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A, C \\ B, D \end{Bmatrix}$$

$$a_1 \frac{A}{C} = D$$

$$a_2 \frac{B}{C} = E$$

$$X_P = \begin{cases} X_1 + \frac{A}{C} \\ X_2 + \frac{B}{C} \end{cases}$$

$$Y_P = \begin{cases} Y_1 + D \\ Y_2 + E \end{cases}$$

$$X_P = \begin{cases} X_1 + \frac{A}{C} \\ X_2 + \frac{B}{C} \end{cases}$$

$$Y_P = \begin{cases} Y_1 + D \\ Y_2 + E \end{cases}$$

## Sposób mnożenia krakowianowego

$$(\Delta Y \cdot +1) + (\Delta X \cdot -a_2) = A$$

$$(a_1 \cdot +1) + (+1 \cdot -a_2) = a_1 - a_2 = C$$

$$(\Delta Y \cdot +1) + (\Delta X \cdot -a_1) = B$$

$$(a_1 \cdot +1) + (+1 \cdot -a_1) = 0$$

T a b l i c a 11

Przekrój Nr 1

Wcinanie z p-tów 1 i 2

$$\sigma_{1-K} = 67^g 49^c 60^{cc}$$

$$a_1 = \operatorname{tg}\sigma_{1-K} = + 1,78537$$

$$\sigma_{2-K} = 109^g 52^c 10^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg}\sigma_{2-K} = - 6,63655$$

$$\Delta X = + 25,168 \quad \Delta Y = 0,000$$

$$\begin{Bmatrix} 0,000 & + 1,78537 \\ +25,168 & + 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} +1 & +1 \\ +6,63655 & -1,78537 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +167,02869 & +8,42192 \\ -44,93419 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{A}{C} = + 19,85261$$

$$\frac{B}{C} = - 5,35359$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = + 35,409$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = - 35,409$$

$$X_K = \begin{cases} 0,000 + 19,853 = + 19,853 \\ +25,168 - 5,355 = + 19,853 \end{cases}$$

$$Y_K = \begin{cases} 0,000 + 35,409 = + 35,409 \\ 0,000 + 35,409 = + 35,409 \end{cases}$$

Przekrój Nr 1

Wcinanie z p-tów 1 i 3

$$\sigma_{1-K} = 67^g 49^c 60^{cc}$$

$$a_1 = \operatorname{tg}\sigma_{1-K} = + 1,78537$$

$$\sigma_{3-K} = 243^g 06^c 30^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg}\sigma_{3-K} = + 0,80278$$

$$\Delta X = + 52,380 \quad \Delta Y = + 61,534$$

$$\begin{Bmatrix} +61,534 & +1,78537 \\ +52,380 & + 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} +1 & +1 \\ -0,80278 & -1,78537 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +19,48458 & +0,98259 \\ -31,98368 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{A}{C} = + 19,82961$$

$$\frac{B}{C} = - 32,55038$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = + 35,403$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = - 26,131$$

$$X_K = \begin{cases} 0,000 + 19,850 = + 19,850 \\ +52,380 - 32,550 = + 19,830 \end{cases}$$

$$Y_K = \begin{cases} 0,000 + 35,403 = + 35,403 \\ + 61,534 - 26,131 = + 35,403 \end{cases}$$

T a b l i c a 12

Przekrój Nr 1

Wcinanie z p-tów 2 i 3

$$\sigma_{2-K} = 109^g 52^c 10^{cc}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{2-K} = -6,65655$$

$$\sigma_{3-K} = 245^g 06^c 30^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{3-K} = 0,80278$$

$$\Delta X = +27,212$$

$$\Delta Y = +61,554$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +61,554 - 6,65655 \\ +27,212 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ -80,278 + 6,65655 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +39,68875 - 7,43935 \\ +242,12780 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = -5,35499$$

$$\frac{B}{C} = -32,54699$$

$$a_1 \frac{A}{C} = +35,406$$

$$a_2 \frac{B}{C} = -26,128$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} +25,168 - 5,355 = +19,833 \\ +52,380 - 32,547 = +19,833 \end{array} \right.$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,406 = +35,406 \\ +61,554 - 26,128 = +35,406 \end{array} \right.$$

Przekrój Nr 2

Wcinanie z p-tów 1 i 2

$$\sigma_{1-K} = 67^g 28^c 50^{cc}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{1-K} = +1,77157$$

$$\sigma_{2-K} = 109^g 37^c 25^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{2-K} = -6,74401$$

$$\Delta X = +25,168$$

$$\Delta Y = 0,000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,000 + 1,77157 \\ +25,168 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ +6,74401 - 1,77157 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +169,73324 + 8,51558 \\ -44,58687 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = +19,93207$$

$$\frac{B}{C} = -5,23592$$

$$a_1 \frac{A}{C} = +35,311$$

$$a_2 \frac{B}{C} = +35,311$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 19,932 = +19,932 \\ +25,168 - 5,236 = +19,932 \end{array} \right.$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,311 = +35,311 \\ 0,000 + 35,311 = +35,311 \end{array} \right.$$

T a b l i c a 13

Przekrój Nr 2

Wcinanie z p-tów 1 i 3

$$\sigma_{1-K} = 67^{\text{g}} 28^{\text{c}} 50^{\text{cc}}$$

$$a_1 = \text{tg}\sigma_{1-K} = +1,77157$$

$$\sigma_{3-K} = 243^{\text{g}} 27^{\text{c}} 30^{\text{cc}}$$

$$a_2 = \text{tg}\sigma_{3-K} = +0,80822$$

$$\Delta X = +52,380$$

$$\Delta Y = +61,534$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +61,534 + 1,77157 \\ +52,380 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ -0,80822 \quad -1,77157 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +19,19944 + 0,96335 \\ -31,26084 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = +19,92986$$

$$\frac{B}{C} = -32,45013$$

$$a_1 \frac{A}{C} = +35,307$$

$$a_2 \frac{B}{C} = -26,227$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 19,930 = +19,930 \\ +52,380 - 32,450 = +19,930 \end{array} \right.$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,307 = +35,307 \\ +61,534 - 26,227 = +35,307 \end{array} \right.$$

Przekrój Nr 2

Wcinanie z p-tów 2 i 3

$$\sigma_{2-K} = 109^{\text{g}} 37^{\text{c}} 25^{\text{cc}}$$

$$a_1 = \text{tg}\sigma_{2-K} = -6,74401$$

$$\sigma_{3-K} = 243^{\text{g}} 27^{\text{c}} 30^{\text{cc}}$$

$$a_2 = \text{tg}\sigma_{3-K} = +0,80822$$

$$\Delta X = +27,212$$

$$\Delta Y = +61,534$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +61,534 - 6,74401 \\ +27,212 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ -0,80822 + 6,74401 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +39,54072 - 7,55223 \\ +245,05200 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = -5,23564$$

$$\frac{B}{C} = -32,44763$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = +35,309$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = -26,225$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} +25,168 - 5,236 = +19,932 \\ +52,380 - 32,448 = +19,932 \end{array} \right.$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,309 = +35,309 \\ +61,534 - 26,225 = +35,309 \end{array} \right.$$



T a b l i c a 14

Przekrój Nr 3

Wcinanie z p-tów 1 i 2

$$\sigma_{1-K} = 67^{\circ} 08' 40''$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{1-K} = + 1,75857$$

$$\sigma_{2-K} = 109^{\circ} 21' 05''$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{2-K} = - 6,86360$$

$$\Delta X = + 25,168$$

$$\Delta Y = 0,000$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 0,000 & + 1,75857 \\ + 25,168 & + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{cc} + 1 & + 1 \\ + 6,86360 & - 1,75857 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} + 172,74308 & + 8,62217 \\ - 44,25969 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = + 20,05475$$

$$\frac{B}{C} = - 5,13324$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = - 35,233$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = + 35,233$$

$$X_K = \begin{cases} 0,000 + 20,035 = + 20,035 \\ + 25,168 - 5,133 = + 20,035 \end{cases}$$

$$Y_K = \begin{cases} 0,000 + 35,233 = + 35,233 \\ 0,000 + 35,233 = + 35,233 \end{cases}$$

Przekrój Nr 5

Wcinanie z p-tów 1 i 3

$$\sigma_{1-K} = 67^{\circ} 08' 40''$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{1-K} = + 1,75857$$

$$\sigma_{3-K} = 243^{\circ} 47' 35''$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{3-K} = + 0,81344$$

$$\Delta X = + 52,380$$

$$\Delta Y = + 61,554$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} + 61,534 & + 1,75857 \\ + 52,380 & + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{cc} + 1 & + 1 \\ - 0,81344 & - 1,75857 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} + 18,92601 & + 0,94513 \\ - 30,57990 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = + 20,02476$$

$$\frac{B}{C} = - 32,35523$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = + 35,215$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = - 26,319$$

$$X_K = \begin{cases} 0,000 + 20,025 = + 20,025 \\ + 52,380 - 32,355 = + 20,025 \end{cases}$$

$$Y_K = \begin{cases} 0,000 + 35,215 = + 35,215 \\ + 61,034 - 26,319 = + 35,215 \end{cases}$$

T a b l i c a 15

Przekrój Nr 3

Wcinanie z p-tów 2 i 3

$$\sigma_{2-K} = 109^g 21^c 05^{cc}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{2-K} = -6,86360$$

$$\sigma_{3-K} = 245^g 47^c 35^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{3-K} = +0,81344$$

$$\Delta X = +27,22$$

$$\Delta Y = +61,534$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +61,534 - 6,86360 \\ +27,212 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ -0,81344 \quad +6,86360 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +39\,59867 - 7,67704 \\ +248,30628 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = -5,13201$$

$$\frac{B}{C} = -32,34401$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = +35,224$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = -26,310$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} +25,168 - 5,122 = +20,036 \\ +52,380 - 32,344 = +20,036 \end{array} \right\rangle$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,224 = +35,224 \\ +61,534 - 26,310 = +35,224 \end{array} \right\rangle$$

Przekrój Nr 4

Wcinanie z p-tów 1 i 2

$$\sigma_{1-K} = 66^g 83^c 85^{cc}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{1-K} = +1,74290$$

$$\sigma_{2-K} = 109^g 03^c 30^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{2-K} = -7,00035$$

$$\Delta X = +25,168$$

$$\Delta Y = 0,000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,000 + 1,74290 \\ +25,168 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ +7,00035 - 1,74290 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +17,61848 + 8,74325 \\ -43,86531 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = +20,15095$$

$$\frac{B}{C} = -5,01705$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = +35,121$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = +35,121$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 20,151 = +20,151 \\ +25,168 - 5,017 = +20,151 \end{array} \right\rangle$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,121 = +35,121 \\ 0,000 + 35,121 = +35,121 \end{array} \right\rangle$$

T a b l i c a 16

Przekrój Nr 4

Wcinanie z p-tów 1 i 3

$$\sigma_{1-K} = 66^g 85^c 85^{cc}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{1-K} = +1,74290$$

$$\sigma_{3-K} = 243^g 70^c 50^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{3-K} = +0,81950$$

$$\Delta X = +52,380$$

$$\Delta Y = +61,534$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +61,534 + 1,74290 \\ +52,380 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ -0,81950 \quad -1,74290 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +18,60859 + 0,92340 \\ -29,75910 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = +20,15225$$

$$\frac{B}{C} = -32,22774$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = +35,123$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = -26,411$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 20,152 = +20,152 \\ +52,380 - 32,228 = +20,152 \end{array} \right.$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,123 = +35,123 \\ +61,534 - 26,411 = +35,123 \end{array} \right.$$

Przekrój Nr 4

Wcinanie z p-tów 2 i 3

$$\sigma_{2-K} = 109^g 03^c 30^{ce}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \sigma_{2-K} = -7,00035$$

$$\sigma_{3-K} = 243^g 70^c 50^{cc}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \sigma_{3-K} = +0,81950$$

$$\Delta X = +27,212$$

$$\Delta Y = +61,534$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +61,534 - 7,00035 \\ +27,212 + 1 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +1 \quad +1 \\ -0,81950 \quad +7,00035 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +39,23377 - 7,81985 \\ +252,02752 \quad 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{A}{C} = -5,01720$$

$$\frac{B}{C} = -32,22919$$

$$a_1 \cdot \frac{A}{C} = +35,122$$

$$a_2 \cdot \frac{B}{C} = -26,412$$

$$X_K = \left\langle \begin{array}{l} +25,168 - 5,017 = +20,151 \\ +52,380 - 32,229 = +20,151 \end{array} \right.$$

$$Y_K = \left\langle \begin{array}{l} 0,000 + 35,122 = +35,122 \\ +61,534 - 26,412 = +35,122 \end{array} \right.$$

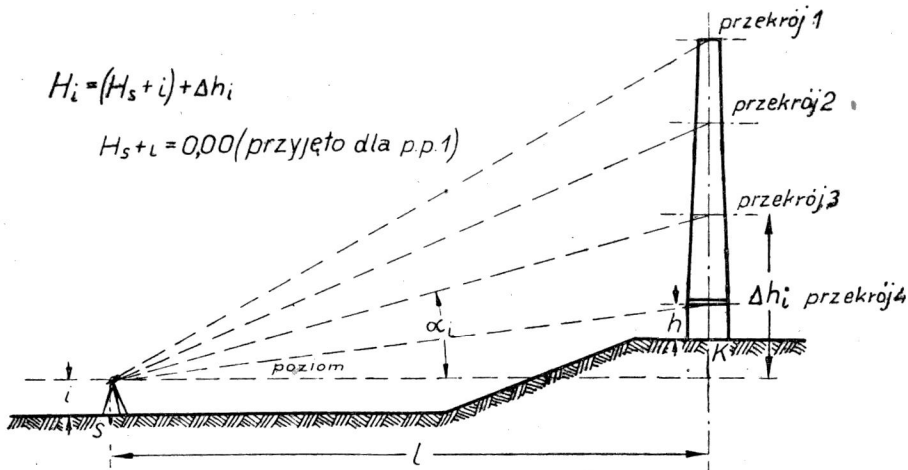
Tablica 17

Obliczenia średnich współrzędnych osi w poszczególnych przekrojach

Nr przekroju	Naczenie i p-tow	Y	X	średnia $\frac{Y}{X}$
1	1-2	+35,409	+19,833	+35,406
	1-3	+35,403	+19,830	+19,832
	2-3	+35,406	+19,833	
	Suma	12 18	24 96	
2	1-2	+35,311	+19,932	+35,309
	1-3	+35,307	+19,930	+19,931
	2-3	+35,309	+19,932	
	Suma	929	2794	
3	1-2	+35,233	+20,035	+35,224
	1-3	+35,215	+20,025	+20,032
	2-3	+35,224	+20,036	
	Suma	672	96	
4	1-2	+35,121	+20,151	+35,122
	1-3	+35,123	+20,152	+20,151
	2-3	+35,122	+20,151	
	Suma	366	454	

Tablica 18

Obliczenie wysokości przekrojów



$$L = \sqrt{\Delta Y_s^2 - k + \Delta X_s^2 - k} \quad L_{1-k} = \sqrt{3527^2 + 1998^2} = \sqrt{1643,1733} = 40,54 \text{ m}$$

$$L_{2-k} = \sqrt{35,27^2 + 5,18^2} = \sqrt{1270,8053} = 35,65 \text{ m}$$

Nr przekt.	z punkt	$\alpha$		$tg\alpha$	Odległość m	$H_i$ m	średnia m
		g	c				
1	1	49	65,5	0,9892	40,54	40,10	40,10
	2	50	04	1,1257	35,65	40,10	
2	1	36	28,5	0,6409	40,54	25,98	25,98
	2	40	11,5	0,7293	35,65	25,97	
3	1	19	18	0,3107	40,54	12,60	12,59
	2	21	64,5	0,3537	35,65	12,58	
4	1	00	58	0,0091	40,54	0,37	0,36
	2	00	66,5	0,0104	35,65	0,34	

### Obliczenie średnicy przekroju Nr 4 i 1

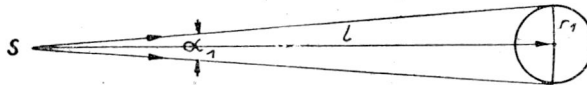
Przekrój Nr 4

Pomierzono obwód  $o = 6,924$  m

$$R_4 = 2 r_4 = \frac{o}{\pi} = \frac{6,924}{3,1416} = 2,20 \text{ m} \quad r_4 = 1,10$$

Przekrój Nr 1

Obliczono ze stanowiska 1



$$r_1 = \frac{L \cdot tg \alpha_1}{2} = 40,54 \quad \alpha_1 = 2^{\circ} 11' 20'' \quad tg \frac{\alpha_1}{2} = 0,01659 \quad r_1 = 40,54 \cdot 0,01659 = 0,67 \text{ m} \quad R_1 = 1,34 \text{ m}$$

### РЕЗЮМЕ

В статье даны теоретические обоснования определения высот фабричных труб (дымоходов) и отклонения их осей от линии отвеса. Даны численные примеры и практические указания.

В заключение приводится числовой пример представляющий совокупность всех вычислений произведенных методом краковянов и расположенных в схемах.

### RESUMÉ

Cet article donne les bases théoriques de la détermination de la déviation de l'axe des cheminées manufacturières de la verticale et celle de leur hauteur. Cette thèse est illustrée par de nombreux exemples et de multiples indications pratiques. Pour terminer, il est donné un exemple numérique qui présente l'ensemble du calcul, conçu en schémas, et effectué d'après le calcul des cracoviens.

Paweł Dulian

## Zastosowanie metody Křováka do uproszczonego obliczenia korelat w równaniach normalnych dla niezależnych układów centralnych

W pewnych wypadkach przy wyrównywaniu sieci triangulacyjnych, jak np. w sieciach lokalnych, przy wyrównywaniu sieci podzielonych na grupy, przy wyrównywaniu stacyj z pomierzonymi kątami itd. spotykamy się z zadaniem ścisłego wyrównania niezależnych układów centralnych. Wyrównanie takie da się uprościć i sprowadzić do obliczenia bardziej zmechanizowanego, jeśli rozwiązanie równań normalnych rozbijemy na dwie grupy, rozwiążemy pierwszą grupę, a następnie połączymy obie grupy dla dalszego rozwiązania.

Ogólne zasady wyrównywania sieci triangulacyjnych w kilku oddzielnych grupach rozpatrywane były przez wielu autorów. Pierwszy krok w tym kierunku, poza Gaussem, zrobił L. Krüger w publikacji: *Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen*.

Najbardziej szczegółowe opracowanie tego zagadnienia znaleźć można w dwóch następujących pracach:

1. H. Boltz: *Entwicklungsverfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze nach der Methode der kleinsten Quadrate*. 1923.

2. H. Boltz: *Substitutions-Verfahren zum Ausgleichen grosser Dreiecknetze in einem Guss nach der Methode der kleinsten Quadrate*. 1938.

J. Křovák ogłosił w r. 1927 swój sposób, wykazujący pewne wspólne cechy z metodą Boltza. Opis metody Křováka znaleźć można w szeregu publikacyj ogłoszonych przez autora, m. in. w następującej publikacji: Ing. N. Hnatiuk: *Die Křovák-Methode zur Auflösung von Normalgleichungen*, Prag, Nachrichten aus den Reichsvermessungsdienst. Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme. 18 Jahrgang. 1942.

Sposób Křováka jest na ogół mało znany, chociaż uważany był w Czechosłowacji za najlepszy i zastosowany został do jednoczesnego wyrów-

nania całej sieci triangulacyjnej I rzędu, które sprowadziło się do rozwiązania 559 równań warunkowych.

Dla uproszczonego obliczenia korelat w równaniach normalnych dla niezależnych układów centralnych można zastosować zarówno postępowanie Boltza, jak i postępowanie Křovaka. Wybierzemy jednak metodę Křovaka, która doskonale nadaje się do tego celu i zasługuje na szersze zainteresowanie się nią polskich geodetów.

Wiemy, że w odosobnionych układach centralnych, sieci triangulacyjnych złożonych z trójkątów, równania normalne wynikające z zamknięcia figur (trójkątów), z równania horyzontu (przy wyrównywaniu kątów) oraz z równania sinusowego (boków) przyjmują następującą postać:

### Przy wyrównywaniu kątów

dla układu centralnego złożonego z trzech trójkątów:

$$\begin{array}{rcccccc}
 +3 & & & & + & 1 & + [ae] + w_1 = 0 \\
 & + & 3 & & + & 1 & + [be] + w_2 = 0 \\
 & & & + & 3 & + & 1 & + [ce] + w_3 = 0 \\
 +1 & + & 1 & + & 1 & + & 3 & + [de] + w_4 = 0 \\
 [ae] & + & [be] & + & [ce] & + & [de] & + [ee] + w_5 = 0
 \end{array}$$

dla układu centralnego złożonego z czterech trójkątów:

$$\begin{array}{rcccccc}
 + 3 & & & & + & 1 & + [af] + w_1 = 0 \\
 & + & 3 & & + & 1 & + [bf] + w_2 = 0 \\
 & & & + & 3 & + & 1 & + [cf] + w_3 = 0 \\
 & & & & + & 3 & + & 1 & + [df] + w_4 = 0 \\
 + 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 4 & + [ef] + w_5 = 0 \\
 [af] & + & [bf] & + & [cf] & + & [df] & + & [ef] & + [ff] + w_6 = 0 \\
 & & & & & & & & & \text{itd.}
 \end{array}$$

### Przy wyrównywaniu kierunków

dla układu centralnego złożonego z trzech trójkątów:

$$\begin{array}{rcccccc}
 + 6 & - & 2 & - & 2 & + [ad] + w_1 = 0 \\
 - 2 & + & 6 & - & 2 & + [bd] + w_2 = 0 \\
 - 2 & - & 2 & + & 6 & + [cd] + w_3 = 0 \\
 [ad] & + & [bd] & + & [cd] & + [dd] + w_4 = 0
 \end{array}$$

dla układu centralnego złożonego z czterech trójkątów:

$$\begin{aligned} + 6 & - 2 & . & - 2 & + [ae] + w_1 = 0 \\ - 2 & + 6 & - 2 & . & + [be] + w_2 = 0 \\ . & - 2 & + 6 & - 2 & + [ce] + w_3 = 0 \\ - 2 & . & - 2 & - 6 & + [de] + w_4 = 0 \\ [ae] + [be] + [ce] + [de] + [ee] + w_5 = 0 \end{aligned}$$

itd.

Tego rodzaju kształt równań normalnych pozwala na korzystanie przy obliczaniu korelat ze stałych współczynników, zależnych tylko od ilości trójkątów w układzie centralnym, co praktycznie sprowadza się do rozwiązania jednego równania normalnego przekształconego na wzór metody Boltza. Skraca to nie tylko sam proces obliczania korelat, lecz również daje korelaty w postaci bardzo korzystnej, a mianowicie jako funkcje wyrazów wolnych. Umożliwia to prowadzenie rachunku na podstawie przybliżonych wartości kątów w trójkątach, a więc kiedy prace pomiarowe są jeszcze w toku lub kiedy ostateczne zamknięcia trójkątów nie są jeszcze znane. Również upraszcza znacznie powtórzenie wyrównania przy wprowadzeniu nowych wartości na wyrazy wolne.

Obliczenie korelat rozбивa się zasadniczo na 2 części. Najpierw obliczamy korelaty w postaci funkcji wyrazów wolnych dla układu równań normalnych, z pominięciem równania sinusowego. Następnie dołączamy równanie sinusowe obliczając odpowiednie poprawki do współczynników wyrazów wolnych obliczonych poprzednio. Gotowe współczynniki wyrazów wolnych, dla pierwszej części, odczytać możemy z odpowiednich tablic. Dołączenie równania sinusowego i obliczenie ostatecznych współczynników oparte jest na następującym rozumowaniu:

Dany jest następujący układ 3 równań normalnych:

$$\left. \begin{aligned} [aa] k_1 + [ab] k_2 + [ac] k_3 + w_1 &= 0 \\ [ab] k_1 + [bb] k_2 + [bc] k_3 + w_2 &= 0 \\ [ac] k_1 + [bc] k_2 + [cc] k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wyłączmy z powyższego układu pierwsze dwa równania normalne:

$$\left. \begin{aligned} [aa] k'_1 + [ab] k'_2 + w_1 &= 0 \\ [ab] k'_1 + [bb] k'_2 + w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

i przedstawmy korelaty tego ostatniego układu jako funkcje wyrazów wolnych  $w_1$  i  $w_2$ :

$$\left. \begin{aligned} k'_1 &= A_1 \cdot w_1 + A_2 \cdot w_2 \\ k'_2 &= B_1 \cdot w_1 + B_2 \cdot w_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Zmieńmy teraz wyrazy wolne w ostatniej grupie 2 równań normalnych w następujący sposób:

$$\left. \begin{aligned} [aa] k_1 + [ab] k_2 &= -w_1 - [ac] k_3 \\ [ab] k_1 + [bb] k_2 &= -w_2 - [bc] k_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Poprzednie współczynniki A i B nie są zależne od wyrazów wolnych, a więc jeśli będziemy uważać prawe strony równań (4) za wyrazy wolne zmienione dowolnie, współczynniki dla korelat  $k_1$  i  $k_2$  będą te same co dla korelat  $k'_1$  i  $k'_2$ . Będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= A_1 w_1 + A_1 [ac] k_3 + A_2 w_2 + A_2 [bc] k_3 = k'_1 + \{A_1 [ac] + A_2 [bc]\} k_3 \\ k_2 &= B_1 w_1 + B_1 [ac] k_3 + B_2 w_2 + B_2 [bc] k_3 = k'_2 + \{B_1 [ac] + B_2 [bc]\} k_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Oznaczając

$$\left. \begin{aligned} \Delta k_1 &= A_1 [ac] + A_2 [bc] \\ \Delta k_2 &= B_1 [ac] + B_2 [bc] \end{aligned} \right\} \Delta k_3 = + 1$$

będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= k'_1 + \Delta k_1 \cdot k_3 = A_1 \cdot w_1 + A_2 \cdot w_2 + \Delta k_1 \cdot k_3 \\ k_2 &= k'_2 + \Delta k_2 \cdot k_3 = B_1 \cdot w_1 + B_2 \cdot w_2 + \Delta k_2 \cdot k_3. \end{aligned} \right\}$$

Podstawiając ostatnie wartości na  $k_1$  i  $k_2$  do równania trzeciego w układzie (1) będziemy mieli

$$\left\{ [ac] \Delta k_1 + [bc] \Delta k_2 + [cc] \Delta k_3 \right\} k_3 + \{A_1 [ac] + B_1 [bc]\} w_1 + \{A_2 [ac] + B_2 [bc]\} w_2 + w_3 = 0.$$

Oznaczenie  $\Delta k_3 = + 1$  wprowadziliśmy dla symetrii.

Oznaczając dalej

$$W = [ac] \Delta k_1 + [bc] \Delta k_2 + [cc] \Delta k_3$$

i pamiętając o tym, że współczynniki przy wyrazach wolnych układają się symetrycznie na wzór współczynników przy równaniach normalnych, czyli

$$A_1 = B_2 \quad \text{i} \quad A_2 = B_1,$$

będziemy mieli

$$\left. \begin{aligned} k_3 &= -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_1 \cdot w_1 - \frac{1}{W} \cdot \Delta k_2 \cdot w_2 - \frac{1}{W} \cdot \Delta k_3 \cdot w_3 \\ &= \Delta C_1 \cdot w_1 + \Delta C_2 \cdot w_2 + \Delta C_3 \cdot w_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

gdzie

$$\Delta C_1 = -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_1, \quad \Delta C_2 = -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_2, \quad \Delta C_3 = -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_3.$$

Podstawiając ostatnią wartość na  $k_3$  do równań (5) będziemy mieli

$$k_1 = \{A_1 + \Delta k_1 \cdot \Delta C_1\} w_1 + \{A_2 + \Delta k_1 \cdot \Delta C_2\} w_2 + \Delta k_1 \cdot \Delta C_3 \cdot w_3$$

$$k_2 = \{B_1 + \Delta k_2 \cdot \Delta C_1\} w_1 + \{B_2 + \Delta k_2 \cdot \Delta C_2\} w_2 + \Delta k_2 \cdot \Delta C_3 \cdot w_3$$

a wprowadzając jeszcze następujące oznaczenia:

$$\Delta A_1 = \Delta k_1 \cdot \Delta C_1 \qquad \Delta B_1 = \Delta k_2 \cdot \Delta C_1$$

$$\Delta A_2 = \Delta k_1 \cdot \Delta C_2 \qquad \Delta B_2 = \Delta k_2 \cdot \Delta C_2$$

$$\Delta A_3 = \Delta k_1 \cdot \Delta C_3 \qquad \Delta B_3 = \Delta k_2 \cdot \Delta C_3$$

ostatecznie

$$k_1 = \{A_1 + \Delta A_1\} w_1 + \{A_2 + \Delta A_2\} w_2 + \{0 + \Delta A_3\} w_3$$

$$k_2 = \{B_1 + \Delta B_1\} w_1 + \{B_2 + \Delta B_2\} w_2 + \{0 + \Delta B_3\} w_3$$

$$k_3 = \{0 + \Delta C_1\} w_1 + \{0 + \Delta C_2\} w_2 + \{0 + \Delta C_3\} w_3.$$

Schemat obliczeniowy wg Křováka jest następujący:

A	B	C	[ ]	$\Delta k$	W
$\Delta A_1 = \Delta k_1 \cdot \Delta C_1$ $A_1$	$\Delta B_1 = \Delta k_2 \cdot \Delta C_1$ $B_1$	$\Delta C_1 = -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_1$ 0	[ac]	$\Delta k_1 = [ [ ] \cdot A ]$	$W = [ [ ] \cdot \Delta k ]$
$\Delta A_2 = \Delta k_1 \cdot \Delta C_2$ $A_2$	$\Delta B_2 = \Delta k_2 \cdot \Delta C_2$ $B_2$	$\Delta C_2 = -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_2$ 0	[bc]	$\Delta k_2 = [ [ ] \cdot B ]$	
$\Delta A_3 = \Delta k_1 \cdot \Delta C_3$ 0	$\Delta B_3 = \Delta k_2 \cdot \Delta C_3$ 0	$\Delta C_3 = -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_3$ 0	[cc]	$\Delta k_3 = + 1$	$-\frac{1}{W}$

Kolejność obliczeń w tym schemacie jest następująca:

- $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  i  $B_2$  (z tablic lub na podstawie kolejnych redukcji);
- $\Delta k_1$ ,  $\Delta k_2$  i  $\Delta k_3$ ;
- W i  $-\frac{1}{W}$ ;
- $\Delta C_1$ , i  $\Delta C_2$  i  $\Delta C_3$ ;
- $\Delta A_1$ ,  $\Delta A_2$ ,  $\Delta A_3$ ,  $\Delta B_1$ ,  $\Delta B_2$  i  $\Delta B_3$ .

Poniżej podane są tablice z obliczonymi współczynnikami dla różnych układów centralnych oraz przykład korzystania z tych tablic, przy obliczaniu korelat dla układu centralnego złożonego z 6 trójkątów z pomierzonymi kątami.

## a) Układ centralny złożony z trzech trójkątów

(Wyrównanie kątów)

$\Delta A_1 = \Delta k_1 \cdot \Delta E_1$ - 0,388 889	$\Delta B_1 = \Delta k_2 \cdot \Delta E_1$ - 0,055 556	$\Delta C_1 = \Delta k_3 \cdot \Delta E_1$ - 0,055 556	$\Delta D_1 = \Delta k_4 \cdot \Delta E_1$ + 0,166 667	$\Delta E_1 =$ $= -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_1$	[ea]	$\Delta k_1 =$ $(-0,388 \text{ [ea]}) +$ $(-0,055 \text{ [eb]}) +$ $(-0,055 \text{ [ec]}) +$ $(+0,166 \text{ [ed]})$
$\Delta A_2 = \Delta k_1 \cdot \Delta E_2$ - 0,055 556	$\Delta B_2 = \Delta k_2 \cdot \Delta E_2$ - 0,388 889	$\Delta C_2 = \Delta k_3 \cdot \Delta E_2$ - 0,055 556	$\Delta D_2 = \Delta k_4 \cdot \Delta E_2$ + 0,166 667	$\Delta E_2 =$ $= -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_2$	[eb]	$\Delta k_2 =$ $(-0,055 \text{ [ea]}) +$ $(-0,388 \text{ [eb]}) +$ $(-0,055 \text{ [ec]}) +$ $(+0,166 \text{ [ed]})$
$\Delta A_3 = \Delta k_1 \cdot \Delta E_3$ - 0,055 556	$\Delta B_3 = \Delta k_2 \cdot \Delta E_3$ - 0,055 556	$\Delta C_3 = \Delta k_3 \cdot \Delta E_3$ - 0,388 889	$\Delta D_3 = \Delta k_4 \cdot \Delta E_3$ + 0,166 667	$\Delta E_3 =$ $= -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_3$	[ec]	$\Delta k_3 =$ $(-0,055 \text{ [ea]}) +$ $(-0,055 \text{ [eb]}) +$ $(-0,388 \text{ [ec]}) +$ $(+0,166 \text{ [ed]})$
$\Delta A_4 = \Delta k_1 \cdot \Delta E_4$ + 0,166 667	$\Delta B_4 = \Delta k_2 \cdot \Delta E_4$ + 0,166 667	$\Delta C_4 = \Delta k_3 \cdot \Delta E_4$ + 0,166 667	$\Delta D_4 = \Delta k_4 \cdot \Delta E_4$ - 0,500 000	$\Delta E_4 =$ $= -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_4$	[ed]	$\Delta k_4 =$ $(+0,166 \text{ [ea]}) +$ $(+0,166 \text{ [eb]}) +$ $(+0,166 \text{ [ec]}) +$ $(-0,500 \text{ [ed]})$
$\Delta A_5 = \Delta k_1 \cdot \Delta E_5$ 0	$\Delta B_5 = \Delta k_2 \cdot \Delta E_5$ 0	$\Delta C_5 = \Delta k_3 \cdot \Delta E_5$ 0	$\Delta D_5 = \Delta k_4 \cdot \Delta E_5$ 0	$\Delta E_5 =$ $= -\frac{1}{W} \cdot \Delta k_5$	[ee]	$\Delta k_5 =$ + 1
$k_1 =$ $(\Delta A_1 - 0,388) w_1 +$ $(\Delta A_2 - 0,055) w_2 +$ $(\Delta A_3 - 0,055) w_3 +$ $(\Delta A_4 + 0,166) w_4 +$ $(\Delta A_5) w_5$	$k_2 =$ $(\Delta B_1 - 0,055) w_1 +$ $(\Delta B_2 - 0,388) w_2 +$ $(\Delta B_3 - 0,055) w_3 +$ $(\Delta B_4 + 0,166) w_4 +$ $(\Delta B_5) w_5$	$k_3 =$ $(\Delta C_1 - 0,055) w_1 +$ $(\Delta C_2 - 0,055) w_2 +$ $(\Delta C_3 - 0,388) w_3 +$ $(\Delta C_4 + 0,166) w_4 +$ $(\Delta C_5) w_5$	$k_4 =$ $(\Delta D_1 + 0,166) w_1 +$ $(\Delta D_2 + 0,166) w_2 +$ $(\Delta D_3 + 0,166) w_3 +$ $(\Delta D_4 - 0,500) w_4 +$ $(\Delta D_5) w_5$	$k_5 =$ $\Delta E_1 \cdot w_1 +$ $\Delta E_2 \cdot w_2 +$ $\Delta E_3 \cdot w_3 +$ $\Delta E_4 \cdot w_4 +$ $\Delta E_5 \cdot w_5$		
$W = [\text{ea}] \cdot \Delta k_1 + [\text{eb}] \cdot \Delta k_2 + [\text{ec}] \cdot \Delta k_3 + [\text{ed}] \cdot \Delta k_4 + [\text{ee}] \cdot \Delta k_5$						

## b) Układ centralny złożony z czterech trójkątów

$\Delta A_1$	$\Delta B_1$	$\Delta C_1$	$\Delta D_1$	$\Delta E_1$	$\Delta F_1$		
-0,37500	-0,04167	-0,04167	-0,01467	+0,12500	0	[fa]	$\Delta k_1$
$\Delta A_2$	$\Delta B_2$	$\Delta C_2$	$\Delta D_2$	$\Delta E_2$	$\Delta F_2$		
-0,04167	-0,37500	-0,04167	-0,04167	+0,12500	0	[fb]	$\Delta k_2$
$\Delta A_3$	$\Delta B_3$	$\Delta C_3$	$\Delta D_3$	$\Delta E_3$	$\Delta F_3$		
-0,04167	-0,04167	-0,37500	-0,04167	+0,12500	0	[fc]	$\Delta k_3$
$\Delta A_4$	$\Delta B_4$	$\Delta C_4$	$\Delta D_4$	$\Delta E_4$	$\Delta F$		
-0,04167	-0,04167	-0,04167	-0,37500	+0,12500	0	[fd]	$\Delta k_4$
$\Delta A_5$	$\Delta B_5$	$\Delta C_5$	$\Delta D_5$	$\Delta E_5$	$\Delta F_5$		
+0,12500	+0,12500	+0,12500	+0,12500	-0,37500	0	[fe]	$\Delta k_5$
$\Delta A_6$	$\Delta B_6$	$\Delta C_6$	$\Delta D_6$	$\Delta E_6$	$\Delta F_6$		
0	0	0	0	0	0	[ff]	$\Delta k_6$
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$		

## c) Układ centralny złożony z pięciu trójkątów

$\Delta A_1$ -0,36667	$\Delta B_1$ -0,03333	$\Delta C_1$ -0,03333	$\Delta D_1$ -0,03333	$\Delta E_1$ -0,03333	$\Delta F_1$ +0,10000	$\Delta G_1$ 0	[ga]	$\Delta k_1$
$\Delta A_2$ -0,03333	$\Delta B_2$ -0,36667	$\Delta C_2$ -0,03333	$\Delta D_2$ -0,03333	$\Delta E_2$ -0,03333	$\Delta F_2$ +0,10000	$\Delta G_2$ 0	[gb]	$\Delta k_2$
$\Delta A_3$ -0,03333	$\Delta B_3$ -0,03333	$\Delta C_3$ -0,36667	$\Delta D_3$ -0,03333	$\Delta E_3$ -0,03333	$\Delta F_3$ +0,10000	$\Delta G_3$ 0	[gc]	$\Delta k_3$
$\Delta A_4$ -0,03333	$\Delta B_4$ -0,03333	$\Delta C_4$ -0,03333	$\Delta D_4$ -0,36667	$\Delta E_4$ -0,03333	$\Delta F_4$ +0,10000	$\Delta G_4$ 0	[gd]	$\Delta k_4$
$\Delta A_5$ -0,03333	$\Delta B_5$ -0,03333	$\Delta C_5$ -0,03333	$\Delta D_5$ -0,03333	$\Delta E_5$ -0,36667	$\Delta F_5$ +0,10000	$\Delta G_5$ 0	[ge]	$\Delta k_5$
$\Delta A_6$ +0,10000	$\Delta B_6$ +0,10000	$\Delta C_6$ +0,10000	$\Delta D_6$ +0,10000	$\Delta E_6$ +0,10000	$\Delta F_6$ -0,30000	$\Delta G_6$ 0	[gf]	$\Delta k_6$
$\Delta A_7$ 0	$\Delta B_7$ 0	$\Delta C_7$ 0	$\Delta D_7$ 0	$\Delta E_7$ 0	$\Delta F_7$ 0	$\Delta G_7$ 0	[gg]	$\Delta k_7$
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$		

d) Układ centralny złożony z sześciu trójkątów

$\Delta A_1$ -0,36111	$\Delta B_1$ -0,02778	$\Delta C_1$ -0,02778	$\Delta D_1$ -0,02778	$\Delta E_1$ -0,02778	$\Delta F_1$ -0,02778	$\Delta G_1$ +0,08333	$\Delta H_1$ 0	[ha]	$\Delta k_1$
$\Delta A_2$ -0,02778	$\Delta B_2$ -0,36111	$\Delta C_2$ -0,02778	$\Delta D_2$ -0,02778	$\Delta E_2$ -0,02778	$\Delta F_2$ -0,02778	$\Delta G_2$ +0,08333	$\Delta H_2$ 0	[hb]	$\Delta k_2$
$\Delta A_3$ -0,02778	$\Delta B_3$ -0,02778	$\Delta C_3$ -0,36111	$\Delta D_3$ -0,02778	$\Delta E_3$ -0,02778	$\Delta F_3$ -0,02778	$\Delta G_3$ +0,08333	$\Delta H_3$ 0	[hc]	$\Delta k_3$
$\Delta A_4$ -0,02778	$\Delta B_4$ -0,2778	$\Delta C_4$ -0,02778	$\Delta D_4$ -0,36111	$\Delta E_4$ -0,02778	$\Delta F_4$ -0,02778	$\Delta G_4$ +0,08333	$\Delta H_4$ 0	[hd]	$\Delta k_4$
$\Delta A_5$ -0,02778	$\Delta B_5$ -0,02778	$\Delta C_5$ -0,02778	$\Delta D_5$ -0,02778	$\Delta E_5$ -0,36111	$\Delta F_5$ -0,02778	$\Delta G_5$ +0,08333	$\Delta H_5$ 0	[he]	$\Delta k_5$
$\Delta A_6$ -0,02778	$\Delta B_6$ -0,02778	$\Delta C_6$ -0,02778	$\Delta D_6$ -0,02778	$\Delta E_6$ -0,02778	$\Delta F_6$ -0,36111	$\Delta G_6$ +0,08333	$\Delta H_6$ 0	[hf]	$\Delta k_6$
$\Delta A_7$ +0,08333	$\Delta B_7$ +0,08333	$\Delta C_7$ +0,08333	$\Delta D_7$ +0,80333	$\Delta E_7$ +0,08333	$\Delta F_7$ +0,08333	$\Delta G_7$ -0,25000	$\Delta H_7$ 0	[hg]	$\Delta k_7$
$\Delta A_8$ 0	$\Delta B_8$ 0	$\Delta C_8$ 0	$\Delta D_8$ 0	$\Delta E_8$ 0	$\Delta F_8$ 0	$\Delta G_8$ 0	$\Delta H_8$ 0	[hh]	$= + 1$ $\Delta k_8$
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$		

e) Układ centralny złożony z siedmiu trójkątów

$\Delta A_1$ -0,35714	$\Delta B_1$ -0,02381	$\Delta C_1$ -0,02381	$\Delta D_1$ -0,02381	$\Delta E_1$ -0,02381	$\Delta F_1$ -0,02381	$\Delta G_1$ -0,02381	$\Delta H_1$ +0,07143	$\Delta I_1$ 0	[ia]	$\Delta k_1$
$\Delta A_2$ -0,02381	$\Delta B_2$ -0,35714	$\Delta C_2$ -0,08381	$\Delta D_2$ -0,02381	$\Delta E_2$ -0,02381	$\Delta F_2$ -0,02381	$\Delta G_2$ -0,02381	$\Delta H_2$ +0,07143	$\Delta I_2$ 0	[ib]	$\Delta k_2$
$\Delta A_3$ -0,02381	$\Delta B_3$ -0,02381	$\Delta C_3$ -0,35714	$\Delta D_3$ -0,02381	$\Delta E_3$ -0,02381	$\Delta F_3$ -0,02381	$\Delta G_3$ -0,02381	$\Delta H_3$ +0,07143	$\Delta I_3$ 0	[ic]	$\Delta k_3$
$\Delta A_4$ -0,02381	$\Delta B_4$ -0,02381	$\Delta C_4$ -0,02381	$\Delta D_4$ -0,35714	$\Delta E_4$ -0,02381	$\Delta F_4$ -0,02381	$\Delta G_4$ -0,02381	$\Delta H_4$ +0,07143	$\Delta I_4$ 0	[id]	$\Delta k_4$
$\Delta A_5$ -0,02381	$\Delta B_5$ -0,02381	$\Delta C_5$ -0,02381	$\Delta D_5$ -0,02381	$\Delta E_5$ -0,35714	$\Delta F_5$ -0,02381	$\Delta G_5$ -0,02381	$\Delta H_5$ +0,07143	$\Delta I_5$ 0	[ie]	$\Delta k_5$
$\Delta A_6$ -0,02381	$\Delta B_6$ -0,02381	$\Delta C_6$ -0,02381	$\Delta D_6$ -0,02381	$\Delta E_6$ -0,02381	$\Delta F_6$ -0,35714	$\Delta G_6$ -0,02381	$\Delta H_6$ +0,07143	$\Delta I_6$ 0	[if]	$\Delta k_6$
$\Delta A_7$ -0,02381	$\Delta B_7$ -0,02381	$\Delta C_7$ -0,02381	$\Delta D_7$ -0,02381	$\Delta E_7$ -0,02381	$\Delta F_7$ -0,02381	$\Delta G_7$ -0,35714	$\Delta H_7$ +0,07143	$\Delta I_7$ 0	[ig]	$\Delta k_7$
$\Delta A_8$ +0,07143	$\Delta B_8$ +0,07143	$\Delta C_8$ +0,07143	$\Delta D_8$ +0,07143	$\Delta E_8$ +0,07143	$\Delta F_8$ +0,07143	$\Delta G_8$ +0,07143	$\Delta H_8$ -0,21429	$\Delta I_8$ 0	[ih]	$\Delta k_8$
$\Delta A_9$ 0	$\Delta B_9$ 0	$\Delta C_9$ 0	$\Delta D_9$ 0	$\Delta E_9$ 0	$\Delta F_9$ 0	$\Delta G_9$ 0	$\Delta H_9$ 0	$\Delta I_9$ 0	[ii]	=+1 $\Delta k_9$
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$		

f) Układ centralny złożony z ośmiu trójkątów

$\Delta A_1$ -0,48167	$\Delta B_1$ -0,02833	$\Delta C_1$ -0,02833	$\Delta D_1$ -0,02833	$\Delta E_1$ -0,02833	$\Delta F_1$ -0,02833	$\Delta G_1$ -0,02833	$\Delta H_1$ -0,02833	$\Delta I_1$ +0,08500	$\Delta K_1$ 0	[ka]	$\Delta k_1$
$\Delta A_2$ -0,02833	$\Delta B_2$ -0,48167	$\Delta C_2$ -0,02833	$\Delta D_2$ -0,02833	$\Delta E_2$ -0,02833	$\Delta F_2$ -0,02833	$\Delta G_2$ -0,02833	$\Delta H_2$ -0,02833	$\Delta I_2$ +0,08500	$\Delta K_2$ 0	[kb]	$\Delta k_2$
$\Delta A_3$ -0,02833	$\Delta B_3$ -0,02833	$\Delta C_3$ -0,48167	$\Delta D_3$ -0,02833	$\Delta E_3$ -0,02833	$\Delta F_3$ -0,02833	$\Delta G_3$ -0,02833	$\Delta H_3$ -0,02833	$\Delta I_3$ +0,08500	$\Delta K_3$ 0	[kc]	$\Delta k_3$
$\Delta A_4$ -0,02833	$\Delta B_4$ -0,02833	$\Delta C_4$ -0,02833	$\Delta D_4$ -0,48167	$\Delta E_4$ -0,02833	$\Delta F_4$ -0,02833	$\Delta G_4$ -0,02833	$\Delta H_4$ -0,02833	$\Delta I_4$ +0,08500	$\Delta K_4$ 0	[kd]	$\Delta k_4$
$\Delta A_5$ -0,02833	$\Delta B_5$ -0,02833	$\Delta C_5$ -0,02833	$\Delta D_5$ -0,02833	$\Delta E_5$ -0,48167	$\Delta F_5$ -0,02833	$\Delta G_5$ -0,02833	$\Delta H_5$ -0,02833	$\Delta I_5$ +0,08500	$\Delta K_5$ 0	[ke]	$\Delta k_5$
$\Delta A_6$ -0,02833	$\Delta B_6$ -0,02833	$\Delta C_6$ -0,02833	$\Delta D_6$ -0,02833	$\Delta E_6$ -0,02833	$\Delta F_6$ -0,48167	$\Delta G_6$ -0,02833	$\Delta H_6$ -0,02833	$\Delta I_6$ +0,08500	$\Delta K_6$ 0	[kf]	$\Delta k_6$
$\Delta A_7$ -0,02833	$\Delta B_7$ -0,02833	$\Delta C_7$ -0,02833	$\Delta D_7$ -0,02833	$\Delta E_7$ -0,02833	$\Delta F_7$ -0,02833	$\Delta G_7$ -0,48167	$\Delta H_7$ -0,02833	$\Delta I_7$ +0,08500	$\Delta K_7$ 0	[kg]	$\Delta k_7$
$\Delta A_8$ -0,02833	$\Delta B_8$ -0,02833	$\Delta C_8$ -0,02833	$\Delta D_8$ -0,02833	$\Delta E_8$ -0,02833	$\Delta F_8$ -0,02833	$\Delta G_8$ -0,02833	$\Delta H_8$ -0,48167	$\Delta I_8$ +0,08500	$\Delta K_8$ 0	[kh]	$\Delta k_8$
$\Delta A_9$ +0,08500	$\Delta B_9$ +0,08500	$\Delta C_9$ +0,08500	$\Delta D_9$ +0,08500	$\Delta E_9$ +0,08500	$\Delta F_9$ +0,08500	$\Delta G_9$ +0,08500	$\Delta H_9$ +0,08500	$\Delta I_9$ -0,25500	$\Delta K_9$ 0	[ki]	$\Delta k_9$
$\Delta A_{10}$ 0	$\Delta B_{10}$ 0	$\Delta C_{10}$ 0	$\Delta D_{10}$ 0	$\Delta E_{10}$ 0	$\Delta F_{10}$ 0	$\Delta G_{10}$ 0	$\Delta H_{10}$ 0	$\Delta I_{10}$ 0	$\Delta K_{10}$ 0	[kk]	$\Delta k_{10}$
$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$		



## Ogólne zestawienie współczynników przy wyrazach wolnych

## a) przy wyrównywaniu kierunków

Dla układu centralnego złożonego z trójkątów	Kolejne współczynniki w pierwszym wierszu								
	1	2	3	* 4	5	6	7	8	9
3	-2/8	-1/8	-1/8						
4	-7/30	-3/30	-2/30	-3/30					
5	-5/22	-2/22	-1/22	-1/22	-2/22				
6	-18/80	-7/80	-3/80	-2/80	-3/80	-7/80			
7	-13/58	-5/58	-2/58	-1/58	-1/58	-2/58	-5/58		
8	-47/210	-18/210	-7/210	-3/210	-2/210	-3/210	-7/210	-18/210	
9	-34/152	-13/152	-5/152	-2/152	-1/152	-1/152	-2/152	-5/152	-13/152

Sposób korzystania z powyższej tablicy widoczny jest z poniższego zestawienia współczynników dla układu centralnego złożonego z 6 trójkątów, gdzie łatwo odczytać ogólne prawo tworzenia wszystkich wierszy, kiedy dany jest pierwszy wiersz.

w	A	B	C	D	E	F
1	-18/80	-7/80	-3/80	-2/80	-3/80	-7/80
2	-7/80	-18/80	-7/80	-3/80	-2/80	-3/80
3	-3/80	-7/80	-18/80	-7/80	-3/80	-2/80
4	-2/80	-3/80	-7/80	-18/80	-7/80	-3/80
5	-3/80	-2/80	-3/80	-7/80	-18/80	-7/80
6	-7/80	-3/80	-2/80	-3/80	-7/80	-18/80

## b) przy wyrównywaniu kątów

Dla układu centralnego złożonego z trójkątów	Drugi wyraz w pierwszym wierszu	Ostatni wyraz w pierwszym wierszu	Ostatni wyraz w ostatnim wierszu	Pierwszy wyraz w pierwszym wierszu
3	-1/18	+3/18	-9/18	-7/18
4	-1/24	+3/24	-9/24	-9/24
5	-1/30	+3/30	-9/30	-11/30
6	-1/36	+3/36	-9/36	-13/36
7	-1/42	+3/42	-9/42	-15/42
8	-1/48	+3/48	-9/48	-17/48
9	-1/54	+3/54	-9/54	-19/54

Ogólne prawo tworzenia wszystkich wierszy na podstawie danych powyższej tablicy dla wyrównywania kątów widoczne jest z poniższego zestawienia dla układu centralnego złożonego z sześciu trójkątów:

W	A	B	C	D	E	F	G
1	-13/36	-1/36	-1/36	-1/36	-1/36	-1/36	+3/36
2	-1/36	-13/36	-1/36	-1/36	-1/36	-1/36	+3/36
3	-1/36	-1/36	-13/36	-1/36	-1/36	-1/36	+3/36
4	-1/36	-1/36	-1/36	-13/36	-1/36	-1/36	+3/36
5	-1/36	-1/36	-1/36	-1/36	-13/36	-1/36	+3/36
6	-1/36	-1/36	-1/36	-1/36	-1/36	-13/36	+3/36
7	+3/36	+3/36	+3/36	+3/36	+3/36	+3/36	-9/36

### Przykład liczbowy

Dane są następujące równania normalne dla układu centralnego, złożonego z sześciu trójkątów z zaobserwowanymi kątami:

numer równania	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	w
1	+3	.	.	.	.	.	+1	+0,65	-0,300
2	.	+3	.	.	.	.	+1	-0,74	+0,300
3	.	.	+3	.	.	.	+1	-0,42	-4,800
4	.	.	.	+3	.	.	+1	-0,28	-4,400
5	.	.	.	.	+3	.	+1	+0,51	-5,500
6	.	.	.	.	.	+3	+1	+0,27	-0,300
7	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+6	0	+1,000
8	+0,65	-0,74	-0,42	-0,28	+0,51	+0,27	+0,00	+5,50	+3,920

Obliczyć wartości korelat dla powyższych równań normalnych.

### Sposób obliczenia

Jeśli będziemy korzystać z gotowych współczynników dla tego rodzaju układu centralnego, podanych w powyżej umieszczonych tablicach, obliczenie korelat sprowadzi się do rozwiązania jednego równania normalnego przekształconego. Tego rodzaju rozwiązanie na schemacie Krowáka będzie następujące:

Nr	w	A	B	C	D	E	F	G	H	[ ]	$\Delta k$
1	-0,300	-0,00940 -0,36111	+0,01073 -0,02778	+0,00610 -0,02778	+0,00407 -0,02778	-0,00737 -0,02778	-0,00390 -0,02778	-0,00004 +0,08333	+0,04345 0	+0,65	-0,21639
2	+0,300	+0,01073 -0,02778	-0,01224 -0,36111	-0,00696 -0,02778	-0,00464 -0,02778	+0,00848 -0,02778	+0,00445 -0,02778	+0,00004 +0,08333	-0,04958 0	-0,74	+0,24694
3	-4,800	+0,00609 -0,02778	-0,00695 -0,02778	-0,00395 -0,36111	-0,00264 -0,02778	+0,00478 -0,02778	+0,00253 -0,02778	+0,00002 +0,08333	-0,02816 0	-0,42	+0,14028
4	-4,400	+0,00407 -0,02778	-0,00464 -0,02778	-0,00264 -0,02778	-0,00176 -0,36111	+0,00319 -0,02778	+0,00169 -0,02778	+0,00002 +0,08333	-0,01879 0	-0,28	+0,09361
5	-5,500	-0,00737 -0,02778	+0,00842 -0,02778	+0,00478 -0,02778	+0,00319 -0,02778	-0,00578 -0,36111	-0,00306 -0,02778	-0,00003 +0,08333	+0,03408 0	+0,51	-0,16972
6	-0,300	-0,00390 -0,02778	+0,00445 -0,02778	+0,00253 -0,02778	+0,00169 -0,02778	-0,00306 -0,02778	-0,00162 -0,36111	-0,00002 +0,08333	+0,01801 0	+0,27	-0,08972
7	+1,000	-0,00004 +0,08333	+0,00004 +0,08333	+0,00002 +0,08333	+0,00002 +0,08333	-0,00003 +0,08333	-0,00002 +0,08333	-0,00000 -0,25000	+0,00017 0	0	-0,00083
8	+3,920	+0,04345 0	-0,04958 0	-0,02816 0	-0,01879 0	+0,03408 0	+0,01801 0	+0,00017 0	-0,20078 0	+5,50	+1
		$k_1 =$ +0,7709	$k_2 =$ +0,2050	$k_3 =$ +1,9893	$k_4 =$ +1,8928	$k_5 =$ +2,4674	$k_6 =$ +0,6708	$k_7 =$ -1,4996	$k_8 =$ -0,7898	$W = +4,98070$ $\frac{-1}{W} = -0,200775$	

**Kolejność obliczenia**

1. Najpierw wpisujemy gotowe współczynniki z tablicy dla układu centralnego złożonego z sześciu trójkątów, przy wyrównywaniu kątów. A więc dla przekątnej z wyjątkiem ostatniego wyrazu mamy wartość  $-0,36111$ , dla ostatniego wyrazu przekątnej mamy  $-0,25000$ , dla ostatniego wiersza, jak również dla ostatniej kolumny z wyjątkiem ostatniego wyrazu mamy  $+0,08333$ , a dla pozostałych wyrazów wielkość  $-0,02778$ .

2. Następnie obliczamy wartości dla wszystkich  $\Delta k$ , przy czym ostatnie  $\Delta k$  jest zawsze równe  $+1$ . Mamy

$$\Delta k_1 = [I \mid \cdot A]$$

$$\Delta k_2 = [I \mid \cdot B]$$

$$\Delta k_3 = [I \mid \cdot C]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta k_7 = [I \mid \cdot G]$$

$$\Delta k_8 = + 1 ,$$

czyli

$$\begin{array}{rcl} \Delta k_1 & = & (+0,65 - 0,36111) + \Delta k_2 = (+0,65 - 0,02778) + \\ & + & (-0,74 - 0,02778) + & + & (-0,74 - 0,36111) + \\ & + & (-0,42 - 0,02778) + & + & (-0,42 - 0,02778) + \\ & + & (-0,28 - 0,02778) + & + & (-0,28 - 0,02778) + \\ & + & (+0,51 - 0,02778) + & + & (+0,51 - 0,02778) + \\ & + & (+0,27 - 0,02778) + & + & (+0,27 - 0,02778) + \\ & + & ( 0 + 0,08333) & + & ( 0 + 0,08333) \\ & = & - 0,21639 & = & + 0,24694 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \Delta k_7 = (+0,65 + 0,08333) + \\ + (-0,74 + 0,08333) + \\ + (-0,42 + 0,08333) + \\ + (-0,28 + 0,08333) + \\ + (+0,51 + 0,08333) + \\ + (+0,27 + 0,08333) + \\ + ( 0 - 0,25000) \\ = -0,00083 \end{array}$$

3. W dalszej kolejności obliczamy  $W$  z wzoru

$$W = \left[ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right] \cdot \Delta k$$

$$W = (+0,65 - 0,21639) + (-0,74 + 0,24694) + (-0,42 + 0,14028) +$$

$$+ (-0,28 + 0,09361) + (+0,51 - 0,16972) + (+0,27 - 0,08972) +$$

$$+ (0 - 0,00083) + (5,50) + 1 = + 4,98070$$

$$- \frac{1}{W} = - 0,200775.$$

4. Następnie obliczamy  $\Delta H$  z wzorów

$$\Delta H_1 = - \frac{1}{W} \cdot \Delta k_1$$

$$\Delta H_2 = - \frac{1}{W} \cdot \Delta k_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta H_8 = - \frac{1}{W} \cdot \Delta k_8,$$

czyli

$$\Delta H_1 = (-0,200775) (-0,21639) = + 0,04345$$

$$\Delta H_2 = (-0,200775) (+0,24694) = - 0,04958$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta H_8 = (-0,200775) + 1 = - 0,20078.$$

5. Teraz obliczamy

$$\begin{array}{lll} \Delta A_1 = \Delta k_1 \cdot \Delta H_1 & \Delta B_1 = \Delta k_2 \cdot \Delta H_1 & \Delta G_1 = \Delta k_7 \cdot \Delta H_1 \\ \Delta A_2 = \Delta k_1 \cdot \Delta H_2 & \Delta B_2 = \Delta k_2 \cdot \Delta H_2 & \Delta G_2 = \Delta k_7 \cdot \Delta H_2 \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta A_8 = \Delta k_1 \cdot \Delta H_8 & \Delta B_8 = \Delta k_2 \cdot \Delta H_8 & \Delta G_8 = \Delta k_7 \cdot \Delta H_8, \end{array}$$

czyli

$$\begin{array}{ll} \Delta A_1 = -0,21639 + 0,04345 & \Delta B_1 = +0,24694 - 0,02778 \\ \Delta A_2 = -0,21639 - 0,04958 & \Delta B_2 = +0,24694 - 0,36111 \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ \Delta A_8 = -0,21639 - 0,20078 & \Delta B_8 = +0,24694 - 0,20078 \end{array}$$



## РЕЗИОМЕ

Статья имеет своей целью упрощение и механизацию вычислений при уравнивании независимых центральных триангуляционных систем. Такие системы встречаются не только в местных триангуляционных сетях, но и при уравнивании станций в заполняющих сетях с угловыми наблюдениями.

Упрощение достигнуто путем применения метода постепенных редукиций по способу Кжовака и использования симметрической формы системы нормальных уравнений, решаемых при помощи таблиц, помещенных в статье. В этих таблицах даны коэффициенты редуцированных  $(n-1)$  нормальных уравнений. Таким образом вычисление коррелат приводится к решению одного преобразованного нормального уравнения. При этом коррелаты выступают в форме линейных функций известных членов уравнений, в форме очень выгодной, благодаря которой уравнивание можно повторять сколько угодно раз, не повторяя всех вычислений.

## RESUMÉ

Le but de cet article est de simplifier et de mécaniser, autant que possible, le calcul de compensation des systèmes indépendants centraux, composés de triangles. On rencontre de tels systèmes non seulement dans les réseaux locaux de triangulation, mais aussi dans le procédé de compensation des réseaux en groupes séparés, ou bien dans celui de compensations de stations dans les réseaux superficiels à la base des angles mesurés.

Cette simplification a été réalisée par l'application de la méthode de réductions successives, qui est la méthode de Křovák, et en utilisant le système d'équations normales qui permet de se servir des tableaux contenus dans le texte. Ces tableaux contiennent des coefficients permettant de former les équations normales réduites  $(n-1)$ . De cette façon le calcul des corrélations est amené à la solution d'une équation normale ainsi transformée. Outre cela, les corrélations paraissent comme fonctions linéaires des termes libres, ce qui veut dire en forme très avantageuse, puisqu'elle permet, à volonté, la répétition des compensations sans exiger, à nouveau, l'ensemble du calcul.

*Jerzy Gomoliszewski*

## Geodezyjne metody pomiaru zabytków architektonicznych

### 1. Cel pomiaru zabytków

Zanalizowane w artykule metody są oparte na doświadczeniach własnych z pomiaru 4 budowli architektury zabytkowej, wykonanego w okresie od r. 1946 do 1950.

Doświadczenia powyższe wykazały wyraźnie celowość stosowania w tej dziedzinie ścisłych metod pomiaru.

Zabytki architektoniczne, oprócz wartości historycznej, przedstawiają wysoką wartość artystyczną. Jako arcydzieła sztuki monumentalnej, które przetrwały krytykę wieków, wnoszą obfity i cenny materiał doświadczalny w dziedzinę kompozycji architektonicznej, zarówno z punktu widzenia naukowego, jak i praktycznego (wykonawstwo).

W związku z tym wyłania się szereg problemów, które wymagają ścisłych i szczegółowych pomiarów, a mianowicie:

1) **Konserwacja.** Zabytki, jako wysokowartościowe dzieła sztuki narodowej, otaczamy zawsze opieką chroniąc je przed zniszczeniem, a w wypadku częściowego lub całkowitego zniszczenia odnawiamy je lub wznosimy na nowo. Wiele przykładów daje nam pod tym względem odbudowa Warszawy.

2) **Rekonstrukcja.** Niejednokrotnie spotykamy się z zabytkami obciążonymi naleciałościami późniejszych wieków i przywracamy im stan pierwotny (oryginalny). Przykłady: zamek w Pieskowej Skale, gdzie przywraca się stan z epoki renesansu, zamek w Wiśniczu, Niedzicy itp.

3) **Badania historyczne.** Aktualne są one w tych wypadkach, gdy chodzi o stwierdzenie rozwoju historycznego danego zabytku lub też grupy zabytków w poszczególnych epokach.

4) **Inwentaryzacja zabytków.** Zadaniem jej jest katalogowanie zabytków przez połączenie planów i opisów historycznych.



5) **Problemy kompozycyjno-naukowe.** Obejmują one formę i konstrukcję zabytku w szczegółowym ujęciu, a mianowicie: układ w przekrojach poziomych, pionowych, rozwiązanie elewacji i wnętrza, konstrukcja murów z nadwieszkami i odsadzkami, kształty poszczególnych elementów architektonicznych (kształt sklepień, łęków, kolumn, głowic, profili gzym-sowych, kopuł, hełmów wieżowych, otworów okiennych, pinakli, portali itp. elementów położonych niejednokrotnie bardzo wysoko i niedostępnych dla bezpośredniego pomiaru), wzajemne ich proporcje oraz — jak wykazały wspomniane na początku doświadczenia badawcze — celowe odkształcenia formy, czyli korekty kompozycyjno-perspektywiczne, mające na celu wywołanie odpowiednich, decydujących wrażeń w przystosowaniu do perspektywicznego widzenia w naturze; jednym słowem wszystko to, co stanowi istotę wartości kompozycyjno-artystycznej, a zarazem monumentalnej w architekturze zabytkowej.

We wszystkich tych wypadkach potrzebne nam są plany sporządzone na podstawie pomiaru.

Aby plany były pełnowartościowe w zastosowaniu do wyżej wymienionych problemów, muszą być szczegółowe i wiernie odtwarzać stan rzeczywisty, a więc opierać się na odpowiednio ścisłym pomiarze — w przeciwnym bowiem razie będą miały wartość tylko pogładową lub fragmentaryczną i nie spełnią należycie swego zadania ani przy rekonstrukcji, ani przy odnowieniu części lub całkowitej odbudowie zniszczonego zabytku, nie dostarczą odpowiednich argumentów przy badaniach historycznych i nie oświetlą dostatecznie bardzo ważnych z naukowego i praktycznego punktu widzenia problemów kompozycyjno-architektonicznych.

W inwentaryzacji zabytków, gdzie chodzi o przyspieszenie od dawna już aktualnego, lecz długiego i kosztownego problemu, muszą z konieczności wystarczać mało dokładne i choćby fragmentaryczne pomiary i plany — w zasadzie jako prowizorium.

Niejednokrotnie w braku innych możliwości wykorzystujemy także we wszystkich innych wymienionych wyżej problemach plany pogładowe (mało dokładne), jakkolwiek bardzo często z poważnym uszczerbkiem dla sztuki architektonicznej, narażając się na możliwości tzw. „eklektyzmu“, aktualnego w XIX w. (nieudane naśladownictwo).

Należałoby tu, traktując sprawę ogólnie, wyodrębnić pewną grupę zabytków, bądź to mniej skomplikowanych pod względem konstrukcji i formy, bądź mniej ciekawych i ważnych z punktu widzenia sztuki architektonicznej (drugoplanowe), dla których mało dokładne plany o charakterze pogładowym mogą całkowicie wystarczyć, ewentualnie takich zabytków, które możemy pomierzyć najprostszymi metodami uzyskując

dostateczną dla danych warunków dokładność i oczywiście wystarczającą przydatność (przykład: niektóre zabytki budownictwa mieszkaniowego lub tp.).

## II. Analiza metod pomiaru

Dotychczas były stosowane w tej dziedzinie następujące metody:

- 1) najczęściej stosowana metoda pomiarów bezpośrednich, taśmowych,
- 2) metoda fotogrametrii jednoobrazowej,
- 3) metoda stolikowa,
- 4) metoda stereofotogrametryczna.

Zalety i wady wymienionych metod:

Ad 1). Metodę pomiaru taśmą (z użyciem pionu i ewentualnie pryzmatu) można stosować przy odcinkach dostępnych dla bezpośredniego pomiaru. Nie ulega wątpliwości, że bezpośredni pomiar odcinka może być bardzo dokładny, lecz w zabytku ilość takich odcinków (zarówno w płaszczyźnie poziomej, jak i pionowej) jest mocno ograniczona. Tą metodą możemy w zasadzie pomierzyć tylko niektóre fragmenty zabytku lub też w sporadycznych wypadkach cały zabytek o bardzo prostej, regularnej, nieskomplikowanej formie. Jeśli chodzi o zabytek skomplikowany, zwłaszcza architektury monumentalnej (a takich mamy wiele), przedstawiający budowlę o różnych nieregularnościach, stanowiących jego istotną cechę, to w żadnym wypadku nie zmontujemy tą metodą całości (bez użycia instrumentu) w sensie dokładnego i właściwego ujęcia. W tych więc wypadkach plany, które otrzymamy w wyniku pomiaru metodą bezpośrednią (taśmową) będą miały wartość tylko fragmentaryczną, a w stosunku do całości budowli — pogładową.

Ad 2). Metoda fotogrametrii jednoobrazowej polega na przejściu graficznym od rzutu perspektywicznego do przekroju poziomego (tzw. „rzutu“) lub pionowego (jest to odwrotność perspektywy). Może ona oddać duże usługi przy opracowaniu fragmentów elewacji lub wnętrza, lecz do przekrojów poziomych lub pionowych nie nadaje się. Dokładność jej, jako metody graficznej, jest niewielka, zwłaszcza w wypadkach odtwarzania pozycji punktów na podstawie przecięć linii prostych pod bardzo ostrymi kątami (a takich będzie dużo). Przy budowlach nieskomplikowanych pod względem formy może być przydatna. W zasadzie ma charakter metody nadającej się do celów fragmentarycznych, w stosunku zaś do całości skomplikowanej budowli (zabytku) ma charakter metody dającej wynik pogładowy. Stosowaną jest rzadko. Duże usługi odda nam natomiast zwykła fotografia przy kompletowaniu albumów z widokami perspektywicznymi i sztuką plastyczną w zabytku (dekoracje, rzeźby, freski,

malowidła itp. szczegóły), a równocześnie jako dobry materiał orientacyjno-pomocniczy przy opracowywaniu plansz technicznych (architektonicznych). Album zdjęć fotograficznych, jako bardzo pożądany dodatek do plansz technicznych, sporządzonych za pomocą metod geodezyjnych, podanych dalej, da nam możliwość wyczerpującego i plastycznego objaśnienia kompozycji zabytku.

Ad 3). Metoda stolikowa może być stosowana do sporządzenia przekroju poziomego dolnych kondygnacji (przyziemia) oraz do elewacji, a w niektórych wypadkach nawet do obrysu zewnętrznego górnych kondygnacji. W przekrojach pionowych jest ona w zasadzie nieużyteczna. Metoda ta z jednej strony nie pozwala na całkowite rozwiązanie problemu, z drugiej zaś strony, jako metoda graficzna, daje małą dokładność. Może całkowicie wystarczyć tylko w prostszych budowlach lub tam, gdzie nie potrzeba większej dokładności (do celów poglądowych).

Ad 4). Metoda stereofotogrametryczna w zastosowaniu do pomiaru zabytków jest metodą dokładną (dokładność wg danych z prospektów Zeissa — około 1 cm) i najszybszą, bezkonkurencyjną w opracowywaniu elewacji i fragmentów wnętrza (kształty kopuł, łęków, sklepień itp.), daje olbrzymie bogactwo szczegółów odtwarzanych prawie z jednakową dokładnością (co jest tu momentem bardzo ważnym). Natomiast metoda ta przy opracowaniu przekrojów pionowych i obrysu wewnętrznego jest bardzo trudna i w tych wypadkach może być tylko częściowo wykorzystana.

Muszę tu nadmienić, że interesując się tym problemem szukałem w różnych dostępnych mi źródłach i spotkałem się tylko z opracowaniem fragmentów (np. prospekty Zeissa podają tylko elewacje lub fragmenty), lecz opracowania całego zabytku tą metodą (zwłaszcza przekrojów pionowych lub obrysów wnętrza) nie spotkałem.

Żadna więc z podanych wyżej i stosowanych dotychczas metod nie daje możliwości wykonania całkowitego (pełnego), a jednocześnie dokładnego pomiaru w skomplikowanych, przeważnie zabytkach architektury monumentalnej.

Geodezyjne metody pomiaru zabytków architektonicznych (metody instrumentalne), które podaję w następnych rozdziałach, pozwoliły mi nie tylko na dostarczenie wyczerpującego materiału w postaci ścisłych danych geodezyjnych i planów skomplikowanego pod względem formy zabytku architektury barokowej z pełnym zastosowaniem do wszystkich wymienionych na początku problemów, lecz także na dokonanie (na podstawie tych danych geodezyjnych) bardzo ciekawych odkryć dotyczących kompozycji architektury zabytkowej.

Metody powyższe pozwalają wprowadzić na wszechstronne wyczerpanie problemów, związanych z architekturą zabytkową, pochłaniają jednak dużo czasu na pomiary i wyliczenia; przy większym doświadczeniu i odpowiedniej organizacji można by tu jeszcze wiele zyskać na czasie, ale nawet i wtedy lepiej jest, o ile możliwości, stosować metodę stereofotogrametryczną.

Dlatego więc za najwłaściwsze rozwiązanie tej sprawy na przyszłość uważam zastosowanie metod geodezyjnych (instrumentalnych) w połączeniu z metodą stereofotogrametryczną. Wówczas w tych częściach zabytku, gdzie jest korzystne zastosowanie metody stereofotogrametrycznej, metody geodezyjne instrumentalne ograniczyłyby się tylko do niezbędnej ilości punktów, koniecznych w każdym razie jako podkład geodezyjny. Ze względów organizacyjnych opłacalność takiego rozwiązania zwiększyłaby się przy pomiarze obejmującym większą ilość zabytków (grupe).

### III. Ogólne zasady sporządzania planów architektonicznych

Pomiar zabytku powinien być tak wykonany, aby zawierał wszystkie dane potrzebne do ujęcia całej jego konstrukcji i formy. Jest to więc pomiar przestrzenny, mający dostarczyć 3 współrzędne ( $x$ ,  $y$ , i  $z$ ) dla danego punktu. Wyniki jego uwidaczniamy na planach, które obejmują: przekroje poziome, przekroje pionowe (podłużne i poprzeczne), elewacje, szczególnie w skali zwiększonej, czyli drobne elementy, które w skali przyjętej dla przekrojów lub elewacji nie dadzą się dokładnie uwidocznić (np. profile gzymsów, portale, okna, głowice itp.) oraz dodatkowe wykresy odkształceń formy lub proporcji (z danymi geodezyjnymi) mających charakter artystycznego wykonawstwa i stanowiących jego istotne cechy.

Komplet taki wraz z danymi geodezyjnymi dotyczącymi wszystkich najważniejszych cech kompozycyjnych da nam pełny obraz rzeczywistości i pozwoli na wyprowadzenie odpowiednich wniosków oraz na wyczerpujące rozwiązanie tego ważnego z punktu widzenia naukowego i potrzeb praktycznych zagadnienia kompozycji architektury zabytkowej.

Przekrój poziomy (zwany potocznie „rzutem“) lub pionowy jest to obrys zewnętrzny i wewnętrzny części murowanej lub drewnianej budowli otrzymany w wyniku przecięcia jej płaszczyzną poziomą lub pionową.

Elewacja jest to rzut prostokątny zewnętrznej części budynku na płaszczyznę pionową, z reguły równoległą do ściany.

W celu uwidocznienia wzajemnego układu niższych i wyższych poziomów, przy sporządzaniu przekroju poziomego podaje się jednocześnie rzuty prostokątne (na płaszczyznę przekroju) tych elementów, które widzimy w dół od płaszczyzny przekroju, np. krając mur na pozio-

mie nad cokołami, podaje się rzuty niżej leżących cokołów, schodów itp., krając nad poziomem gzymsów podaje się rzuty gzymsów itp. W niektórych wypadkach wkreślamy na płaszczyznę przekroju poziomego rzuty elementów położonych nad płaszczyzną przekroju (np. układy gurt lub żeber sklepiennych itp.).

Analogicznie w przekrojach pionowych podajemy rzuty prostokątne (na płaszczyznę przekroju) elementów leżących po lewej lub po prawej stronie przekroju; wszelkie charakterystyczne różnice pomiędzy elementami znajdującymi się po lewej i prawej stronie przekroju pionowego należy wykazać na oddzielnych wykresach.

Obrysy części murowanych (lub drewnianych) otrzymane w wyniku przekroju budynku płaszczyzną poziomą lub pionową znaczy się linią grubą na planie, elementy zrzutowane zaś — linią cienką; jeśli na danym przekroju poziomym lub pionowym chcemy zaznaczyć rzuty elementów niewidocznych z płaszczyzny przekroju (np. znajdujących się za ścianą, pod murem czy też nad murem itp.), znaczymy je linią kreskowaną.

Ilość przekrojów (poziomych i pionowych) zależna jest od konstrukcji i formy zabytku; musimy je poprowadzić tak, aby zobrazować całość.

Przekroje poziome (których w monumentalnych zabytkach będzie z reguły kilka) wszystkich kondygnacji należy podać w jednym układzie współrzędnych, w celu ustalenia wzajemnego położenia kondygnacji (zmiany grubości murów, odsadzki, nadwieszki itp.). Wówczas dla odróżnienia poszczególnych poziomów różnicujemy je na pierworysie odpowiednimi kolorami (ew. liniami różnej grubości). W celu sporządzenia odbitek ozalidowych, wykreśla się odrysowane z pierworysów matryce oddzielnie dla każdego przekroju (poziomego), ale należy wówczas na oddzielnych wykresach podać geodezyjnie charakterystyczne różnice w układzie górnych kondygnacji w stosunku do przyziemia.

Przekroje pionowe wykreśla się każdy oddzielnie. W wielu wypadkach (analogicznie jak w przekrojach poziomych) będzie potrzebne sporządzenie dodatkowych wykresów porównawczych (z danymi geodezyjnymi) dla wykazania charakterystycznych różnic w poszczególnych elementach lub układach dotyczących jednego przekroju w stosunku do drugiego, jednej elewacji w stosunku do drugiej albo też na odcinku danego przekroju lub ewelacji.

Płaszczyzna przekrojowa danego przekroju poziomego może zmieniać swój poziom w przystosowaniu do każdej części zabytku ze względu na różne układy wysokościowe w poszczególnych częściach (np. różne poziomy okien jednej części w stosunku do drugiej lub tp.).

Analogicznie płaszczyzna przekrojowa danego przekroju pionowego może zmieniać swoje położenie w poszczególnych częściach budynku, w zależności od potrzeb korzystniejszego zobrazowania przekroju.

Niezależnie od opisanych wyżej planów i wykresów potrzebny jest plan sytuacyjno-wysokościowy podający położenie budowli zabytkowej oraz jego otoczenie, jak: przyległe budynki, ulice, drogi, wody, użytki, grupy drzew, nawet pojedyncze drzewa itp. oraz układ wysokościowy. W miarę możliwości należy sporządzić plan sytuacyjny z okresu budowy zabytku na podstawie materiałów historycznych.

#### IV. Skala, w jakiej należy sporządzać plany zabytków

Plany sytuacyjno-wysokościowe: 1 : 5 000, 1 : 4 000, 1 : 2 000, 1 : 1 000, 1 : 500, 1 : 400, 1 : 200.

Plany przekrojów poziomych, pionowych i elewacji: 1:200, 1:100, 1:50 (najkorzystniejsza skala jest 1:50).

Szczegóły: 1:50, 1:20, 1:10, 1:5, 1:2, 1:1.

Wykresy odkształceń konstrukcji i formy, zmian proporcji i innych charakterystycznych cech kompozycji zabytku sporządzane dla celów naukowych mogą być podane w skali dowolnej, zależnie od charakteru fragmentu, a często nawet wskazane jest przyjęcie innej skali poziomej i innej wysokościowej, w celu lepszego zobrazowania danego odkształcenia (podobnie jak przy profilu niwelacyjnym).

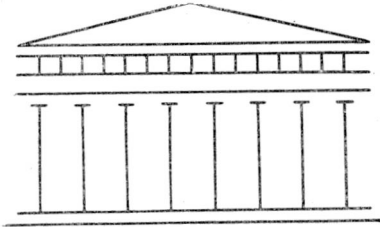
#### V. Uzasadnienie dokładności pomiaru zabytków

Do stwierdzenia, jak ważną rolę odgrywają w architekturze drobne, nawet centymetrowe zmiany kształtu oraz do uzasadnienia w związku z tym dokładności, z jaką należy wykonywać pomiary zabytków dla celów naukowych, mogą posłużyć wyniki dociekań z XIX w., kiedy wznoszono szereg budowli wzorowanych na świątyniach starożytnej Grecji (neoklasycyzm). Budowle te nie odpowiadały oryginałom, np. kolumny robiły wrażenie pochyłych, gzymsy wydawały się wklęsłe itp. Jak stwierdzono później, przyczyną tego było pominięcie drobnych odchyłeń (od pionu, lub poziomu) stosowanych w architekturze greckiej.

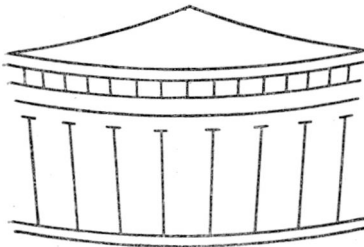
Załączone 3 rysunki dotyczące odkryć z XIX w., podane w wydaniu ZSRR „Wsieobszczaja istorija architektury“, t. II, Moskwa 1949, ilustrują powyższy problem. Rysunek 1 wskazuje, jak miała wyglądać świątynia grecka; rysunek 2 — jak wyglądała taka świątynia, gdy ją zbudowano bez uwzględnienia odchyłeń; rysunek 3 — jak budowali Grecy, aby osiągnąć wynik podany na rysunku 1.

Odchylenia te, nazwane „korektami optycznymi“, które tak uchwytnie wpływały na formę, były wielkościami małymi, centymetrowymi, niemniej jednak spełniały swoje zadanie.

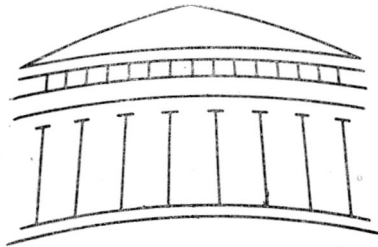
Jak wynika ze wspomnianego poprzednio dzieła radzieckiego, korekty te miały na celu bądź to skorygowanie optycznych wypaczeń oka ludzkiego bądź też uniknięcie sztywności geometrycznej oraz nużącej jedno-



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

stajności i nadanie budowli charakteru naturalności żyjącego organizmu; problem ten, dotyczący architektury starożytnej Grecji, nie został dostatecznie jasno zbadany i matematycznie zanalizowany — znamy go tylko w ogólnym zarysie.

Pomiar, który wykonałem na przykładzie jednego z zabytków architektury barokowej w Krakowie, stwierdził, że ówczesny architekt Tylman Gamereński (XVII — XVIII w.) biorąc pod uwagę miejsce, w którym budynek ten został postawiony, i jego otoczenie, zastosował cały szereg głęboko przemyślanych i imponujących korekt kompozycyjnych w zakresie daleko szerszym niż te, które znamy w architekturze greckiej (korekty optyczne, przeciwperspektywiczne, równowagi kompozycyjnej w oknach elewacji, oświetleniowe itp. Ze względu na ograniczony zakres artykułu, nie podaję szczegółowych wyników tego pomiaru. Gwarancją istnienia korekt we wspomnianym zabytku jest fakt, że z chwilą, gdy dowiadujemy się o nich w wyniku pomiaru ścisłego, znaczną ich część możemy potwierdzić okiem. Nie wiedząc zaś o nich nie

jesteśmy w stanie nie tylko dostrzec, ale nawet podejrzewać ich istnienia — i na tym między innymi polega ich artyzm.

Wspomniane korekty kompozycyjne w tym zabytku wahają się w granicach od około 2 do 20 cm.

Powyższe dane pozwalają na wyprowadzenie konkretnych wniosków co do dokładności pomiaru zabytków dla celów naukowo-badawczych, a mianowicie: pomiar taki powinien dać gwarancję, że położenie mierzzonego punktu, zarówno w płaszczyźnie poziomej (współrzędne  $x$ ,  $y$ ), jak i w pionowej jest określone z błędem nie przekraczającym  $\pm 1$  cm (jako błąd graniczny), czyli ze średnim błędem  $\pm 0,33$  cm — dla budowli muryrowanych lub kamiennych.

Dokładność tę należy uważać za zasadniczą, z tym, że w poszczególnych wypadkach, zależnie od charakteru zabytku lub jego elementów, można ją obniżyć bez szkody dla prac naukowo-badawczych, np. przy budowlach drewnianych lub mniej ważnych elementach konstrukcji murywanej — do wielkości  $\pm 1$  cm jako błąd średni.

Przy pomiarze zabytków specjalną uwagę należy zwracać na mniejsze elementy, gdyż niedokładność pomiaru w tych wypadkach ma o wiele większy wpływ na ich proporcję niż w elementach dużych; tak np. będzie rzeczą obojętną, czy wysokość zabytku wynosi 30,00 m, czy 30,10 m, ale nie będzie obojętny błąd 2 cm lub 3 cm popełniony w profilu gzymsowym, wysokości kilkucentymetrowej, zniekształcający całość proporcji danego gzymsu, jak również nie będzie obojętny fakt, że pilaster wysokości kilku metrów ma u dołu głębokość 28 cm, a u góry — 23 cm, albo jeśli zamiast łuku, po którym biegnie ściana lub gzyms (jako istotnej cechy kompozycyjnej) przyjmujemy linię prostą. Poza tym bardzo ważne ze względów konstrukcyjnych są niektóre drobne elementy, jak np. grubości sklepień, murów, filarów, wielkości nadwieszek itp.

## VI. Instrumentalne metody pomiaru zabytków

Mamy tu z reguły do czynienia z pomiarem pośrednim, trygonometrycznym, opartym na instrumencie uniwersalnym, przy zastosowaniu krótkich celowych. W problemie tym wchodzi w grę pomiary poziome (dla przekrojów poziomych) oraz pomiary wysokościowe (dla przekrojów pionowych i elewacji).

### A. P o m i a r p r z e k r o j ó w p o z i o m y c h

Pomiar przekrojów poziomych skomplikowanego budynku musimy oprzeć na ciągach poligonowych (zewnątrznych i wewnętrznych).

Niejednokrotnie zachodzi potrzeba prowadzenia ciągów poligonowych na kilku kondygnacjach i wówczas wszystkie ciągi muszą być ściśle z sobą powiązane, czyli założone w jednym układzie współrzędnych.

Powiązanie ciągów poligonowych górnych kondygnacji z ciągami przyziemia w zasadzie powinno być wykonane sposobem trygonometrycznym (boki nawiązujące niedostępne dla bezpośredniego pomiaru).

Podstawą pomiaru poszczególnych dostępnych punktów danego przekroju powinny być boki ciągów poligonowych lub założone na nich linie pomiarowe. Stosujemy wówczas jeden z następujących sposobów, w zależności od warunków lokalnych, a przede wszystkim od żądanej dokładności pomiaru:



- 1) metodę wcięcia kąтового z odpowiednio przygotowanych baz;
- 2) metodę biegunową przy odległościach nie przekraczających 10 m;
- 3) metodę ortogonalną z użyciem węgielnicy podwójnej przy krótkich rzędnych (do 10 m). Przy pomiarach zabytków murowanych dla celów naukowych metoda ta, ze względu na niższą dokładność, ma ograniczone zastosowanie i nadaje się raczej dla budynków drewnianych.

Bardzo ważną i kardynalną zasadą przy wszelkiego rodzaju pomiarach, zwłaszcza gdy chodzi o dużą dokładność, jak również o gwarancję pomiaru, jest stosowanie kontroli, a więc przy zdjęciu punktów metodą ortogonalną lub biegunową albo nawet metodą wcięcia, o ile to możliwe, należy bezwarunkowo pomierzyć miary czołowe.

Często przy pomiarach budowli musimy wykonać także pomiar podziemia (dla sporządzenia przekroju podziemia).

Pomiar taki musi być również oparty na ciągu poligonowym, wyrażonym w tym samym układzie.

Powiązanie takiego ciągu z ciągiem przyziemia może być wykonane:

- 1) albo przez zwykłe poligonowe nawiązanie, przy krótkiej, pochyłej celowej,
- 2) albo według zasad orientacji pomiarów kopalnianych — przez odrzutowanie krótkiej bazy.

W tych wypadkach dokładność może być trochę mniejsza, lecz do danego celu wystarczająca.

Ze względu na krótkie boki ciągów poligonowych przy pomiarze budynków, zwłaszcza we wnętrzu, należy zwracać specjalną uwagę na ściśle centrowanie instrumentu i odpowiednie celowanie, jak również na odpowiednią stabilizację.

Pomiar niedostępnych punktów przyziemia, ew. punktów dostępnych, lecz oddalonych znacznie od bazy, oraz pomiar wszystkich niedostępnych punktów górnych kondygnacji (gdy nie mamy możliwości oparcia się na dodatkowym ciągu poligonowym), opieramy wyłącznie na wcięciu kątowym z odpowiednio przygotowanych baz, z reguły krótkich (przeciętnie 20—30 m).

Bazami tymi będą bądź odcinki boków poligonowych, bądź linie pomiarowe lub ich odcinki.

Punkty bazowe na bokach poligonowych lub na liniach pomiarowych wytycza się za pomocą instrumentu.

Bazy te należy mierzyć zależnie od dokładności, jaką chcemy uzyskać, za pomocą skomparowanej taśmy stalowej albo łań długości od 3 do 5 m.

Najbardziej wskazane do pomiaru zabytków murowanych ze względu na uzyskanie większej dokładności — są łąty (zarówno przy pomiarze boków poligonowych, jak i baz).

Przy zabytkach drewnianych wystarczy taśma.

Aby określić położenie punktu metodą wcięcia kąтового ze średnim błędem  $\pm 0,33$  cm dla zabytków murowanych lub  $\pm 1$  cm dla zabytków drewnianych, należy — jak to wynika z podanej dalej analizy wcięcia:

1) bazy oraz boki poligonowe pomierzyć, w pierwszym wypadku ze średnim błędem  $\pm 0,1$  cm, w drugim wypadku ze średnim błędem  $\pm 0,33$  cm;

2) do pomiaru kątów użyć instrumentu, który nam pozwoli zmierzyć kąt poziomy (przy 2 noniuszach i w 2 położeniach lunety) w pierwszym wypadku ze średnim błędem  $\pm 10''$ , w drugim wypadku ze średnim błędem  $\pm 30''$  (można przyjąć — jakkolwiek niezupełnie ściśle, lecz z wystarczającą tutaj dokładnością — że zadanie  $t_0$  spełni nam w pierwszym wypadku instrument o dokładności odczytu  $20''$ , w drugim wypadku — jednodominutowy).

Uzyskanie podanej dokładności dla boków i baz nie będzie przedstawiało specjalnych trudności, ze względu na niewielkie długości ciągów poligonowych i baz przy pomiarze zabytku (jako przeciętną długość ciągu obwodowego można przyjąć 300 m).

We wnętrzu mierzonego budynku lub na zewnątrz może czasem, w braku innych możliwości, zajść potrzeba założenia instrumentalnie pod pewnym kątem linii pomiarowej (na której będą oparte domiary), a nawet linii bazowej, ew. potrzeba założenia krótkiego ciągu otwartego (tzw. ciągu ślepego).

Wówczas pomiar ciągu musi być oczywiście wykonany w taki sposób, który pozwoliłby na kontrolę, rugując możliwość popełniania błędów niedopuszczalnych.

Tego rodzaju okoliczności mogą najczęściej występować przy pomiarze podziemia budowli oraz górnych kondygnacji (poddasze), gdzie dokładność pomiaru może być nawet trochę obniżona bez szkodliwego wpływu na wynik pracy.

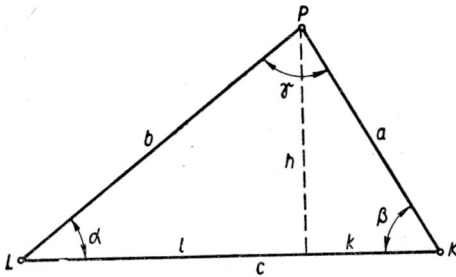
Przy pomiarze przyziemia okoliczności takie zdarzają się rzadziej, zabytki bowiem mają z reguły 2 wejścia.

Użycie do pomiaru kątów instrumentów dokładniejszych, jak np. Wilda typu T2 (lub innych podobnych) z punktu widzenia dokładności pomiaru kąta jest zbędne, gdyż z jednej strony — dokładność  $\pm 10''$  zupełnie wystarcza, a z drugiej strony — przy krótkich celowych powstaje większy błąd celu, niż dokładność odczytu. Ze względów jednak praktycznych wskazane jest używanie podanych typów dla ścisłego pomiaru

zabytków, ponieważ zyskujemy: 1) na ścisłym centrowaniu przez użycie pionownika optycznego, 2) na dokładności poziomowania dzięki czulszej libeli w tych instrumentach, 3) na czasie z uwagi na znaczną wygodę i szybkość odczytów. Jeśli przy pomiarze korzystamy z tych typów, wystarczy zaokrąglić odczyty do 10".

Przy pomiarze kątów poziomych metodą wcięcia, w wypadku gdy wcinane punkty znajdują się w wyższych poziomach, należy instrument dokładnie poziomować ze względu na to, że wpływ błędu niepionowości osi obrotu instrumentu na kąt poziomy przy celu na punkty wysoko położone jest dość znaczny.

Przy celowaniu na punkt leżący pod kątem  $50^\circ$  do poziomu wpływ błędu niepionowości osi obrotu instrumentu na kąt może osiągnąć wielkość  $2,4 \varepsilon$  (gdzie  $\varepsilon$  jest to kąt odchylenia osi instrumentu od pionu).



Rys. 4

W celu wyeliminowania ewentualnych błędów kolimacji i inklinacji, a jednocześnie dla kontroli i większej dokładności pomiar wszystkich kątów przy pomiarze zabytków należy bezwzględnie wykonywać w 2 położeniach lunety.

Naniesienie na plan punktów pomierzonych metodą wcięcia może być wykonane:

1. Za pomocą rzędnych i odciętych wyliczonych w stosunku do bazy na podstawie prostych wzorów:

$$k = a \cdot \cos \beta = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot c \cdot \cos \beta,$$

$$l = b \cdot \cos \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot c \cdot \cos \alpha;$$

jako sprawdzenie wyliczenia mamy:  $k + l = c$  (długość bazy),

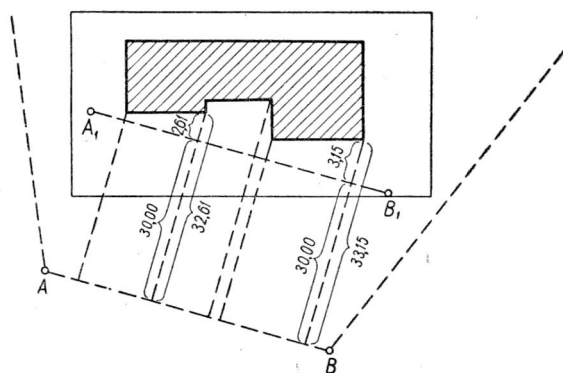
$$\text{zaś} \quad h = a \cdot \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot c \cdot \sin \beta$$

$$\text{albo} \quad h = b \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot c \cdot \sin \alpha$$

Licząc w sposób powyższy wielkości:  $h$  oraz  $k$  i  $l$  otrzymujemy kontrolę rachunku, ponieważ wielkości  $h$  muszą być identyczne w obu wyliczeniach, suma zaś wielkości  $k + l$  musi się równać wielkości  $c$ .

Obliczenie i naniesienie w podany wyżej sposób punktów wciętych nie jest połączone z dużą stratą czasu, jakby się to na pozór wydawało, ponieważ w większości wypadków punkty wcinane muszą mieć także pomiarowe wysokości potrzebne do wykreślenia przekrojów pionowych i elewacji. Wobec tego wielkość  $a$  oraz  $b$  będą wykorzystane do wzoru na obliczenie wysokości (jak to wynika z dalszych rozważań, dotyczących pomiaru wysokości).

Jeśli baza, z której wcinamy punkty niedostępne nie mieści się na arkuszu, na który наносimy te punkty (co często się zdarza), należy bazę przesunąć równoległe do jej właściwego położenia o odpowiednią ilość metrów i po przeliczeniu w ten sposób przesuniętej bazy i naniesieniu jej na arkusz można nanosić wcinane punkty (za pomocą rzędnych i odciętych) zmniejszając ich rzędne o odległości równe przesunięciu bazy.



Rys. 5

A — B — baza leżąca poza arkuszem; A<sub>1</sub> — B<sub>1</sub> — baza przerzutowana.

Zastosowanie tego sposobu jest opłacalne wówczas, gdy z jednej bazy lub boku poligonowego pomierzono wcięciem większą ilość punktów.

2. Za pomocą współrzędnych, wyliczonych w układzie przyjętym dla ciągu poligonowego (a nie w stosunku do bazy), w tych wypadkach, gdy odległości od punktów wcinanych są duże i graficzne wystawienie kąta prostego mogłoby spowodować znaczne błędy (np. wystawienie na planie prostopadłej długości 30 lub 40 cm daje dużą niedokładność).

3. Za pomocą przenośnika, jako wcięcie graficzne, przy krótkich odległościach (np. do 5 cm na planie); sposób ten, jako mniej dokładny, stosujemy rzadziej.

Przy obieraniu baz do wcięcia kąтового powinno się dążyć do tego, aby były one, choćby w przybliżeniu, równoległe do mierzonych elewacji; ułatwi to nam wydatnie prace naukowo-badawcze (przy wykrywaniu różnych kompozycyjnych deformacji).

## Analiza błędów wcięcia

Jeżeli we wzorach na  $h$  i  $l$  (rys. 4) zamiast  $\gamma$  podstawimy  $180^\circ - [\alpha + \beta]$ , to otrzymamy:

$$h = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin [\alpha + \beta]} \cdot c \qquad l = \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin [\alpha + \beta]} \cdot c.$$

Powyższe funkcje są funkcjami trzech zmiennych:  $c$ ,  $a$  i  $\beta$ .

Średni błąd określenia położenia wcinanego punktu będzie:

$$m_p^2 = m_h^2 + m_l^2$$

Biorąc zgodnie z wzorem na średni błąd funkcji pochodne cząstkowe względem zmiennych  $c$ ,  $a$  i  $\beta$ , oraz przyjmując, że kąty  $\alpha$  i  $\beta$  mierzymy jednym instrumentem, a więc z jednakową dokładnością, (czyli  $m_\alpha = m_\beta = m$ ) wyrazimy średni błąd dla punktu  $P$  następującym wzorem:

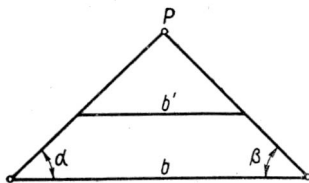
$$m_p = \frac{1}{\sin^2 [\alpha + \beta]} \cdot \left[ \sin^2 \beta \cdot m_c + \frac{c^2 \cdot m^2}{\sin^2 [\alpha + \beta]} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \right] \cdot \dots \cdot I$$

przy czym  $m_\alpha = m_\beta = m$ , wyrażone jest w mierze analitycznej.

Z powyższego wzoru wynika, że wpływ błędów kątowych na dokładność określenia punktu  $P$  jest między innymi zależny od długości bazy, a więc gdy zachodzi wypadek, że jakiś punkt mielibyśmy wciąć z dużej i odległej od niego bazy  $b$ , to chcąc zwiększyć dokładność przy tych samych wcinających kątach  $\alpha$  i  $\beta$ , oraz przy tej samej wielkości  $m$ , musimy obrać nową bazę  $b_1$ , mniejszą i bliższą danego punktu (rys. 6).

Ponadto warunkiem wspólnym dla wszystkich powyższych wzorów jest, aby

$$\sin [\alpha + \beta] \neq 0, \quad \alpha + \beta \neq 0, \quad \alpha + \beta \neq 180^\circ.$$



Rys. 6

Ponieważ długość bazy jest z reguły niewielka i pomiar jej jest na ogół łatwy (trotuary, chodniki na zewnątrz zabytku lub posadzka we wnętrzu), błąd średni pomiaru bazy  $m_c$ , jako wielkość małą rzędu wyższego, możemy dla ułatwienia dyskusji odrzucić, tym bardziej, że jak wynika z wzoru — również współczynnik przy  $m_c$  jest wielkością małą.

rzędu wyższego niż współczynnik przy  $m$ , a wobec tego wzór  $m_p$  przyjmie postać:

$$m_p^2 \cong \frac{c^2 \cdot m^2}{\sin^4 [a+\beta]} \cdot \left[ \sin^2 a + \sin^2 \beta \right], \quad \text{czyli:}$$

$$m_p \cong \pm \frac{c \cdot m}{\sin^2 [a+\beta]} \cdot \sqrt{\sin^2 a + \sin^2 \beta}.$$

Ze wzoru tego widzimy, że dokładność określenia punktu wcinanego  $P$  jest wprost proporcjonalna do długości bazy i dokładności instrumentu.

Najmniejsza wartość  $m_p$ , jak wynika z samego wzoru, będzie wtedy, gdy  $\sin^2 a = \sin^2 \beta$ , czyli gdy kąt  $a = \beta$ , a więc w trójkącie równoramiennym.

Wówczas będzie:

$$m_{p \min} = \frac{c \cdot m}{\sin^2 2a} \cdot \sqrt{2 \sin^2 a} = \frac{c \cdot m}{\sqrt{2} \cdot \sin 2a \cdot \cos a}.$$

Najmniejsza wartość dla  $m_{p \min}$  zachodzi, gdy pierwsza pochodna jest równa 0, a to ma miejsce, gdy  $\operatorname{tg} a = 2 \operatorname{ctg} 2a$ , czyli  $\operatorname{ctg}^2 a = 2$ , a więc przy  $a = \beta = 35^\circ 16'$  (w zaokrągleniu).

Kąt na punkcie wcinanym  $P$  będzie wówczas równy  $109^\circ 28'$ .

Konkretnie otrzymamy:

$m_{p \min} = \pm 0,92 m.c$ , co przy średnim błędzie pomiaru kąta  $= \pm 0'.5$  (osiągalne przy teodolicie o dokładności odczytu z noniusza  $= 1'$ ) i przy przeciętnej długości bazy  $= 30$  m, wyniesie 0,4 cm.

Przyjmując przeciętną długość bazy  $= 30$  m, średni błąd pomiaru kąta poziomego  $\pm 0'.5$  (dla teodolitu o jednoninutowej dokładności) i średni błąd pomiaru bazy  $\pm 0,33$  cm i podstawiając do wzoru na  $m_p$  charakterystyczne wartości kątów  $a$  i  $\beta$ , otrzymamy odpowiednie orientacyjne wartości błędów ujęte w tabelicy 1.

Jak widać z podanej tabelicy 1, najłatwiej nam będzie określić położenie wcinanego punktu  $P$  w stosunku do punktów bazy (przy warunku, że błąd określenia tego punktu nie może przekroczyć założonej granicy) za pomocą kąta  $\gamma$  z tym, że w niektórych wypadkach będą miały na to wpływ wielkości kątów  $a$  i  $\beta$ .

Tablica 1

Kąt $\gamma$	Kąt $\alpha$	Kąt $\beta$	Średni błąd $m_p$	Kąt $\gamma$	Kąt $\alpha$	Kąt $\beta$	Średni błąd $m_p$
170°00'	5°00'	5°00'	1,8 cm	45°00'	45°00'	90°00'	1,2 cm
160 00	2 00	18 00	1,2	45 00	67 50	67 30	1,2
160 00	6 00	14 00	1,0	40 00	10 00	130 00	0,9
160 00	10 00	10 00	0,95	40 00	20 00	120 00	1,0
155 00	15 00	10 00	0,77	40 00	40 00	100 00	1,3
150 00	10 00	20 00	0,7	40 00	50 00	90 00	1,4
109 30	35 15	35 15	0,4	40 00	70 00	70 00	1,5
90 00	30 00	60 00	0,5	35 00	15 00	130 00	1,1
90 00	45 00	45 00	0,5	35 00	35 00	110 00	1,5
60 00	10 00	110 00	0,65	30 00	1 00	149 00	0,95
60 00	30 00	90 00	0,75	30 00	30 00	120 00	1,8
60 00	60 00	60 00	0,77	20 00	20 00	140 00	2,77
52 00	25 00	103 00	0,77	20 00	40 00	120 00	4,1
51 00	64 30	64 30	0,95	13 00	41 00	126 00	9,2
50 00	30 00	100 00	0,95	10 00	10 00	160 00	5,5
45 00	20 00	115 00	0,87	10 00	35 00	135 00	13,4
45 00	30 00	105 00	0,97	10 00	85 00	85 00	20,5

Jeżeli postawimy warunek, aby średni błąd  $m_p$  nie przekroczył wielkości  $\pm 1$  cm (to na podstawie takiej tablicy, przy podanych założeniach, możemy ustalić praktycznie wystarczającą granicę dla kąta  $\gamma$ , a mianowicie:

$155^\circ > \gamma > 50^\circ$ , w każdym wypadku, niezależnie od wielkości kątów  $\alpha$  i  $\beta$ . Rozpiętość tej granicy może być w niektórych warunkach zwiększona, a mianowicie:

- 1) górna granica kąta  $\gamma$ , może być zwiększona do  $160^\circ$ , jeżeli kąt  $\alpha$  lub  $\beta$  będzie wynosić od  $5^\circ$  do  $10^\circ$ ;
- 2) dolna granica kąta  $\gamma$  może być zmniejszona do  $45^\circ$ , jeżeli kąt  $\alpha$  lub  $\beta$  będzie zawarty w granicach od  $0^\circ$  do  $35^\circ$ ;
- 3) dolna granica kąta  $\gamma$  może być zmniejszona do  $40^\circ$ , jeżeli kąt  $\alpha$  lub  $\beta$  będzie zawarty w granicach od  $0^\circ$  do  $20^\circ$ ;
- 4) dolna granica kąta  $\gamma$  może dochodzić do  $35^\circ$ , jeżeli kąt  $\alpha$  lub  $\beta$  będzie zawarty w granicach od  $0^\circ$  do  $10^\circ$ .

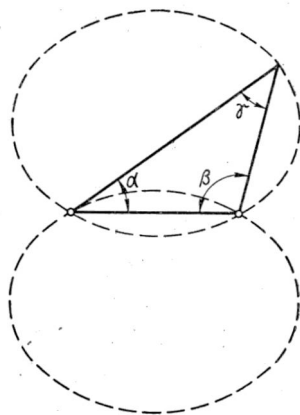
Gdy przy pomiarze punktu metodą wcięcia mamy niekorzystne warunki terenowe, ze względu na nieodpowiedni kąt  $\gamma$  (nie ma możliwości wybrania odpowiedniej bazy), wówczas w celu zwiększenia dokładności wyniku, należy albo wykonać dwukrotny niezależny pomiar i przyjmując średnią z 2 wyników albo użyć do pomiaru kątów dokładniejszego instrumentu.

Jeśli przyjmiemy taką samą długość bazy = 30 m, średni błąd pomiaru kąta poziomego  $\pm 10''$  i średni błąd pomiaru bazy  $\pm 1$  mm (co bez specjalnych trudności można osiągnąć), to błąd  $m_p$  będzie 3 razy mniejszy niż przy założeniu poprzednim (ponieważ we wzorze na  $m_p$  oba składniki zmniejszyły się 3 razy), a więc w podanej poprzednio tabelicy wielkości z ostatniej kolumny będą 3 razy mniejsze; błędy zatem podane w tabelicy 1 będą dla ostatnich założeń błędami granicznymi.

Granice rozpiętości kąta  $\gamma$  (lub  $\alpha$  i  $\beta$ ) dla mierzonych metodą wcięcia punktów, możemy ustalić jeszcze innym sposobem, mianowicie zakładamy, że  $m_p$  ma się równać żądanej wielkości, np.  $m_p = \pm 1$  cm.

$$\text{Wówczas mamy } \pm 1 \text{ cm} = \pm \sqrt{\frac{c^2 \cdot m^2}{\sin^4 [\alpha + \beta]} [\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta]}.$$

Rozwijając i przekształcając na podstawie wzorów trygonometrycznych do postaci tangensowej oraz przyjmując założone wielkości na długość bazy i średni błąd kąta, otrzymamy równanie czwartego stopnia typu  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , gdzie współczynniki  $a, b, c, d, e$  będą funkcjami kąta  $\alpha$ , niewiadoma zaś  $x = \text{tg } \beta$ . Podstawiając dla  $\alpha$  kolejno wielkości, na przykład co  $10^\circ$ , rozwiążemy to równanie z praktycznie wystarczającą dokładnością, sposobem graficznym, metodą Lille'a, a w wyniku otrzymamy elipsę błędów, (jak na rysunku 7), która nam wykaże granice dla kątów  $\alpha, \beta$  (lub  $\gamma$ ), przy których możemy wcinać punkt  $P$ , aby nie przekroczyć założonego błędu.



Rys. 7

### B. Pomiary wysokościowe dla przekrojów pionowych i elewacji

Za pomocą niwelacji geometrycznej określamy z bezpośrednich odczytów na łącie wysokości wszystkich dostępnych dla tej metody punktów danej kondygnacji. W sporadycznych wypadkach określamy wysokość punktu sposobem pośrednim, na podstawie zniwelowanych poziomów nawiązujących, od których odmieramy łatą dostępne odcinki pionowe, np. mając zniwelowany poziom cokołu (gzymsu, posadzki lub tp.) odmieramy od niego odległość pionową do punktu niższego lub wyższego. Ten ostatni sposób, jakkolwiek mniej dokładny od niwelacji bezpośredniej, w poszczególnych wypadkach może wystarczyć.



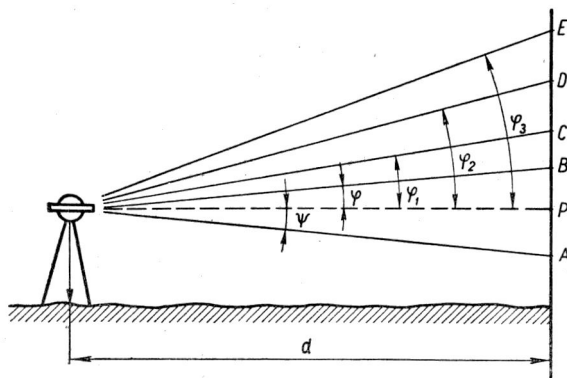
W zasadzie należy go ograniczyć do takich warunków, gdy nie możemy wykonać odczytów bezpośrednich z łąty lub gdy takie obniżenie dokładności nie wpłynie szkodliwie na wynik.

Pomiar niwelacyjny w wielu wypadkach opiera się na odczytach z łąty odwróconej trzymanej stopką na punkcie, którego wysokość określamy. Rozpiętość w różnicy wysokości między punktami niwelowanymi z jednego stanowiska będzie w wyniku tego znacznie zwiększona (łąta w dół i w górę od osi celowej). Przy pomiarze zabytków wskazane jest skonstruowanie dłuższej łąty wysuwanej, przynajmniej 6-metrowej, przy której jeszcze bardziej zwiększymy zasięg wysokościowy; niewielkie obniżenie dokładności nie będzie w tym wypadku szkodliwe.

Dowiązanie wysokościowe pośrednich poziomów poszczególnych kondygnacji (np. poziom poddasza lub podziemia z przyziemiem itp.) można wykonać z wystarczającą dla tych celów dokładnością za pomocą metody niwelacyjnej, w której będziemy posługiwać się zwieszoną pionowo i odpowiednio naciągniętą taśmą stalową — zamiast łąty. Sposób ten jest aktualny w wypadkach:

- 1) gdy warunki pozwalają na przeciągnięcie pionowe taśmy przez jedną lub więcej kondygnacji wewnątrz budynku;
- 2) gdy stojąc wewnątrz z niwelatorem możemy przez otwory w ścianach, (np. przez okno) wykonać odczyt na taśmie zawieszonej przy ścianie zewnętrznej budynku.

Wszystkie wysokości punktów, których nie możemy określić za pomocą niwelacji geometrycznej (z ewentualną pomocą miar bezpośrednich), należy pomierzyć metodami pomiaru trygonometrycznego.



Rys. 8

Trygonometryczny pomiar wysokości wykonujemy jednym z trzech sposobów:

1. Określenie różnicy wysokości między dwoma punktami (lub między większą ilością punktów) leżącymi w jednej linii pionowej (wysokość ściany — od posadzki do

gzymsu lub tp.). W tym wypadku musimy zmierzyć: odległość poziomą od punktu, nad którym stoi instrument, do linii pionowej, na której leżą mierzone wysokościowe punkty (rys. 8 —

odległość „ $d$ “), odpowiednie kąty pochylenia dla każdego punktu (kąty:  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ ) oraz wspólny dla wszystkich punktów kąt  $\psi$ .

Różnica wysokości  $AE = d [\operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{tg} \psi]$  jest funkcją trzech zmiennych:  $d, \varphi, \psi$ .

Przechodząc do średnich błędów otrzymamy

$$m_{AE}^2 = \left[ \operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{tg} \psi \right]^2 \cdot m_d^2 + \frac{d^2 \cdot m_\varphi^2}{\cos^4 \varphi_3} + \frac{p^2 \cdot m_\psi^2}{\cos^4 \psi}$$

Ponieważ wysokość instrumentu jest niewielka w stosunku do odległości  $d$ , przeto kąt  $\psi$  jest mały, wobec czego  $\operatorname{tg} \psi$  jako wielkość małą, można w niniejszym rozumowaniu pominąć; z drugiej zaś strony  $\cos^4 \psi$  przy kącie  $\psi$  można uważać jako równe jedności. Prócz tego  $m_\varphi = m_\psi = m$  ze względu na pomiar kątów jednym instrumentem. W wyniku tego będzie

$$m_{AE}^2 \approx \operatorname{tg}^2 \varphi_3 \cdot m_d^2 + d^2 \cdot m^2 \left[ \frac{1}{\cos^4 \varphi_3} + 1 \right]$$

gdzie:

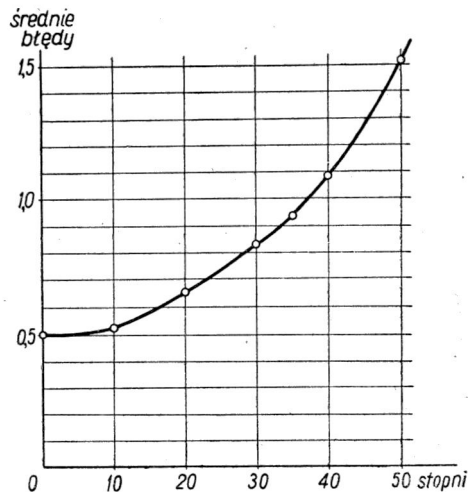
$m_d$  = błąd pomiaru bazy;  $d$  = długość bazy,

$m$  = błąd pomiaru kąta pionowego.

Przebieg zmiany błędu w zależności od zmiany kąta  $\varphi$ , przedstawia podany wykres (rys. 9).

Wykres sporządzony dla długości bazy = 23,0 m. (ze względu na uproszczenie rachunku) oraz dla błędu pomiaru kąta pionowego  $m = \pm 0,5$  (jako błąd graniczny) i dla błędu pomiaru bazy =  $\pm 1$  cm (jako błąd graniczny).

Z wykresu wynika, że błąd graniczny możemy otrzymać mniejszy od  $\pm 1$  cm wtedy, gdy kąt  $\varphi$  jest mniejszy od  $37^\circ$  i gdy punkty, których różnicę wysokości w ten sposób określamy, leżą (choćby z niewielkim odchyleniem) w jednej linii pionowej, zgodnie z początkowym założeniem. W rzeczywistości nie zawsze to będzie miało miejsce i wówczas otrzymamy niewłaściwą długość bazy, czyli znaczny błąd  $m_d$ , a więc błędny wynik.



Rys. 9

A zatem metoda ta w ujęciu ramowym ma niewielkie zastosowanie przy pomiarach dokładnych. Duże natomiast korzyści daje przy określaniu różnicy wysokości mniejszych odcinków, np.  $ED$ . Wówczas mamy

$$ED = d [\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2];$$

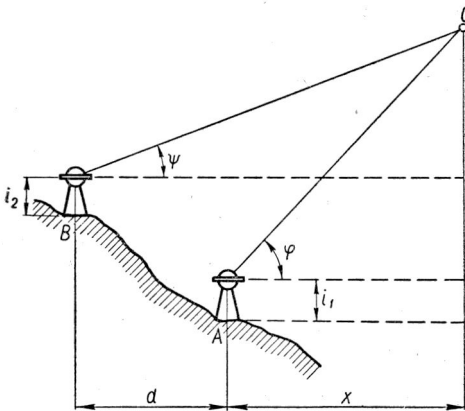
$$\text{błąd } m_{ED}^2 = [\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2]^2 \cdot m_d^2 + d^2 \cdot m^2 \left[ \frac{1}{\cos^4 \varphi_3} + \frac{1}{\cos^4 \varphi_2} \right].$$

Dla niewielkiej różnicy kątów:  $\varphi_3$  i  $\varphi_2$ , współczynnik przy  $m_d^2$  jest niewielki, a więc nawet większe wychylenie ściany lub krawędzi z pionu, czyli większy błąd  $m_d$  — nie odegra tu roli. Tak więc np. jeśli założymy:  $\varphi_3 = 40^\circ$ ,  $\varphi_2 = 35^\circ$ ,  $d =$  długość bazy = 23,0 m,  $m = \pm 0,5$  oraz błąd pomiaru bazy  $m_d = \pm 5$  cm (co jest równoznaczne z wychyleniem ściany z pionu), to błąd  $m_{ED}$  nie przekroczy  $\pm 1$  cm (błąd graniczny). W danym wypadku ( $\varphi_3 = 40^\circ$ ,  $\varphi_2 = 35^\circ$  oraz  $d = 23,0$  m), odległość między punktami  $E$  i  $D$  wyniesie 3,2 m, a zatem odcinki 3-metrowej długości, a tym bardziej mniejsze, możemy w takich warunkach pomierzyć

z błędem nie przekraczającym  $\pm 1$  cm. Ma to zastosowanie przy pomiarze profilów gzymsowych (nieдоступnych do bezpośredniego pomiaru).

2. Określenie różnicy wysokości między punktami leżącymi w jednej płaszczyźnie pionowej.

Obieramy dwa stanowiska instrumentu  $A$  i  $B$  w ten sposób, aby leżały one w jednej płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez punkt o mierzonej wysokości (rys. 10).



Rys. 10

Mierzymy bazę  $AB = d$ , kąt pochylenia  $\varphi$  i  $\psi$  oraz wysokości instrumentu w punktach  $A$  i  $B$

Oznaczając: wysokość punktu $A$ . . . . .	$H_A$
„ „ „ $B$ . . . . .	$H_B$
„ „ „ $C$ . . . . .	$H_C$
„ „ instrumentu w punkcie $A$ . . . . .	$i_1$
„ „ „ „ „ $B$ . . . . .	$i_2$
rzut poziomy odcinka $AB$ . . . . .	$d$
„ „ „ „ „ $AC$ . . . . .	$x$

mamy zależności:

$$H_C = H_A + i_1 + x \operatorname{tg} \varphi;$$

$$H_C = H_B + i_2 + (d + x) \cdot \operatorname{tg} \psi$$

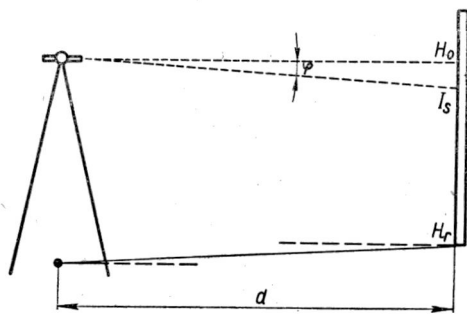
$$\text{stad } x = \frac{d \cdot \operatorname{tg} \psi + H_B - H_A + i_2 - i_1}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi},$$

$$\text{zaś } H_C = \frac{1}{\sin(\varphi - \psi)} \left\{ d \cdot \sin \varphi \sin \psi + [H_B + i_2] \cos \psi \sin \varphi - [H_A + i_1] \cos \varphi \sin \psi \right\}.$$

Wielkości:  $H_A + i_1$ ,  $H_B + i_2$  można określić dwoma sposobami:

1.  $H_A$  i  $H_B$  określamy z niwelacji,  $i_1$ ,  $i_2$  zaś mierzymy bezpośrednio, z tym, że chcąc uzyskać dokładny rezultat musimy uwzględnić skosy taśmy na krótkich odcinkach (taśma nie ułoży się pionowo na odcinku od osi obrotu lunety do punktu, nad którym stoi instrument).

2. Określamy bezpośrednio poziom osi obrotu lunety za pomocą niwelacji trygonometrycznej, przy użyciu łąty ustawionej na reperze w nie-



Rys. 11

wielkiej odległości od instrumentu (5 — 10 m). Nastawiamy nitkę poziomą (środkową) przy dwóch położeniach lunety na całkowity odczyt centymetrowy na łącie, blisko poziomu osi obrotu (w granicach kilku centymetrów w dół lub w górę) i określamy kąt pochylenia (rys. 11). Mając pomierzoną odległość do łąty, kąt pochylenia do punktu, na któ-

ry celowaliśmy oraz odczyt z łąty wskazujący wysokość naszej celowej — możemy dokładnie określić poziom osi obrotu lunety (praktycznie można go będzie uważać za bezbłędny). Sposób ten jest właściwszy od poprzedniego ze względu na większą dokładność.

Poziom osi obrotu lunety obliczamy ze wzoru

$$H_0 = H_r + l_s + d \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

gdzie  $H_r$  — jest to poziom reperu,

$l_s$  — odczyt pełnego centymetra,

$d$  — odległość do łąty na reperze,

$\varphi$  — kąt pochylenia.

Błąd określenia poziomu osi obrotu lunety powyższą metodą sprowadza się do błędu wielkości  $d \cdot \operatorname{tg} \varphi$ , gdyż odczyt na łącie  $l_s$  (jako całkowity od-

czyt centymetrowy) możemy uważać praktycznie za bezbłądny. Biorąc cząstkowe pochodne względem zmiennych  $d$  i  $\varphi$  otrzymamy wzór na błąd wysokości

$$m_h^2 = \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot m_d^2 + \frac{d^2}{\cos^4 \varphi} \cdot m_\varphi^2.$$

Jeśli weźmiemy np.  $\varphi = 1^\circ$ ,  $d = 10$  m,  $m_d = \pm 1$  cm,  $m_\varphi = \pm 10''$  to otrzymamy wówczas  $m_h = \pm 0,5$  mm, a więc bardzo niewielki.

Oznaczmy we wzorze na  $H_C$ :

poziom osi obrotu lunety w punkcie  $B$ :  $H_B + i_2 = A$ ,

poziom osi obrotu lunety w punkcie  $A$ :  $H_A + i_1 = B$ ;

wówczas

$$H_C = \frac{1}{\sin[\varphi - \psi]} \left[ d \sin \varphi \sin \psi + A \cos \psi \sin \varphi - B \cos \varphi \sin \psi \right].$$

Funkcja  $H_C$  jest funkcją zmiennych:  $d$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi$  i  $\psi$ . Biorąc cząstkowe pochodne względem poszczególnych zmiennych otrzymamy średni błąd wielkości  $H_C$  ze wzoru

$$m_{H_C}^2 = \frac{1}{\sin^2[\varphi - \psi]} \left[ \sin^2 \varphi \sin^2 \psi m_d^2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \psi m_i^2 + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi m_i^2 \right] + \\ + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^4[\varphi - \psi]} \left[ d \sin \psi + \Delta \cos \psi \right]^2 m^2 + \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^4[\varphi - \psi]} \left[ d \sin \varphi + \Delta \cos \varphi \right]^2 m^2,$$

gdzie:  $m_d$  = średni błąd pomiaru bazy

$\Delta = A - B$  = różnica poziomów osi obrotu lunety na poszczególnych stanowiskach,

$m_i$  = średni błąd poziomego osi obrotu lunety w punkcie  $A$  lub  $B$ , który sprowadza się do średniego błędu instrumentu  $i_1$  lub  $i_2$  ze względu na to, że wielkości  $H_A$  i  $H_B$  uważamy za bezbłądne.

$m = m_\varphi = m_\psi$  = średni błąd pomiaru kątów  $\varphi$  i  $\psi$  mierzonych jednym instrumentem.

Ustalenie dopuszczalnej granicy dla kątów  $\varphi$  i  $\psi$  - z założeniem że średni błąd nie może przekroczyć wielkości  $\pm 1$  cm, może nastąpić analogicznie jak dla problemu wcięć: albo przez rozwiązanie równania czwartego stopnia przy warunku, aby błąd średni nie był większy od  $\pm 1$  cm, albo za pomocą tablicy przez podstawienie do wzorów charakterystycznych wartości kątów.

Jeśli założymy: długość bazy  $d = 32,5$  m (dla uproszczenia rachunku),  $m = 0',5$ ,  $m_d = \pm 0,33$  cm (osiągalny bez specjalnego wysiłku),  $m_i = \pm 0,33$  cm, poza tym wielkość  $\Delta = 0$ , ze względu na to, że różnica

poziomów między instrumentami przy tego rodzaju pomiarach jest z reguły niewielka, ponieważ metodę tę stosujemy zazwyczaj przy pomiarze wysokości we wnętrzu zabytku, gdzie poziom posadzki jest dość równy — to otrzymamy

$$m_{H_c}^2 = \frac{0,111}{\sin^2[\varphi-\psi]} \left[ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \psi \right] + \frac{0,222}{\sin^4[\varphi-\psi]} \left[ \sin^4 \psi + \sin^4 \varphi \right].$$

Przyjmując różne wielkości dla kątów  $\varphi$  i  $\psi$  do powyższego wzoru otrzymamy orientacyjne wielkości średnich błędów podane w tablicy 2.

Tablica 2

Kąt $\psi$	Kąt $\varphi$	Kwadrat średniego błędu $m_H^2$	Kąt $\psi$	Kąt $\varphi$	Kwadrat średniego błędu $m_H^2$
10°00'	20°00'	3,11 cm	30°00'	40°00'	58,88
	35 00	1,00		75 00	1,03
	40 00	0,79		80 00	0,83
	45 00	0,69		120 00	0,23
	60 00	0,53		150 00	0,11
	120 00	0,24		160 00	0,11
20°00'	50°00'	18,33 cm	40°00'	50°00'	128,33 cm
	45 00	2 08		80 00	1,74
	60 00	0,96		89 00	0,99
	110 00	0,28		120 00	0 27
	150 00	0,11		140 00	0,16
	160 00	0,09		150 00	0,14
50°00'	60°00'	225,11 cm	70°00'	90°00'	29,78 cm
	100 00	1,01		120 00	1,04
	130 00	0,26		130 00	0,58
	150 00	0,13		160 00	0,28
	150 00	0,13			
	160 00	0,19			
60°00'	70°00'	333,67 cm	80°00'	90°00'	481,67 cm
	110 00	1,06		130 00	1 01
	120 00	0,58		140 00	0,58
	140 00	0,27		160 00	0 34
	150 00	0,23	90°00'	135°00'	1,33 cm
	160 00	0,24		140 00	0,94
				150 00	0,57

Jeśli będziemy chcieli, aby błąd określenia wysokości nie przekroczył wielkości  $\pm 1$  cm, żądanie nasze będzie spełnione w następujących układach dla kątów  $\varphi$  i  $\psi$ :

Tablica 3

Dla kąta $\psi$	Rozpiętość kąta $\varphi$
10°	od 55° do 180°
20°	„ 60° „ 180°
30°	„ 77° „ 180°
40°	„ 89° „ 180°
50°	„ 100° „ 180°
60°	„ 110° „ 180°
70°	„ 120° „ 180°
80°	„ 130° „ 180°
90°	„ 140° „ 180°

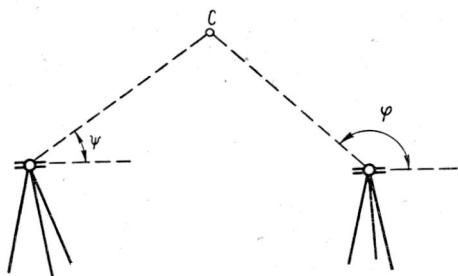
Zestawienie niniejsze daje nam orientację co do możliwości stosowania tej metody; wartości pośrednie można łatwo ustalić z tablicy.

Z powyższego zestawienia wynika, że korzystne warunki pomiaru wysokości tą metodą są w wielu wypadkach związane z dużymi kątami pochylenia, co wymaga stosowania przyzmatu okularowego lub instrumentu z łamaną lunetą.

Tablica została ułożona przy założeniu, że długość bazy wynosi 32,5 m. Przy bazie mniejszej błąd ten będzie mniejszy, przy większej powiększy się, dlatego rozpiętość ta może ulegać pewnym wahaniom.

Jeśli przy tej samej długości bazy (32,5 m) przyjmiemy jako błędy średnie:  $m = +10''$ ,  $m_d = m_i = \pm 1$  mm, to wielkości średnich błędów ( $m_H$ ) będą 3 razy mniejsze niż przy założeniu poprzednim, gdyż we wzorze na  $m_H^2$  oba składniki zmniejszyły się 9 razy. Wówczas błędy średnie z tablicy 2 będą przy tych założeniach błędami granicznymi.

Metoda ta daje kontrolę rachunku, nie mamy natomiast kontroli pomiaru. Przy popełnionym błędzie w kątach  $\varphi$  lub  $\psi$  otrzymamy zgodne wyniki na  $H_C$ , choć nie odpowiadające rzeczywistości. Przez pomiar w dwóch

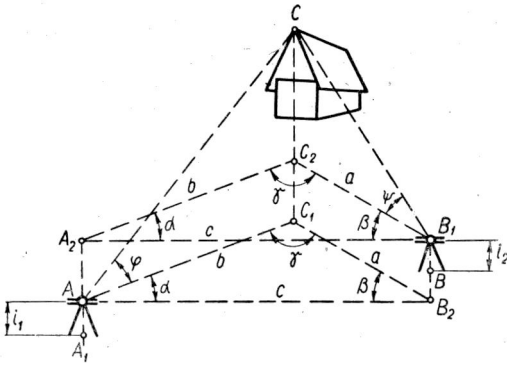


Rys. 12

położeniach lunety prawdopodobieństwo pojawienia się błędów jest znacznie zmniejszone. Przy pomiarze wysokości sklepień zabytków (rys. 12) w większości wypadków jest to metoda jedyna poza tym ma mniejsze zastosowanie.

3. Określenie różnicy wysokości między dwoma (lub więcej) punktami leżącymi w różnych pionowych płaszczyznach.

Obieramy dwa stanowiska instrumentu nie leżące w jednej płaszczyźnie pionowej z punktem, którego wysokość określamy (rys. 13). Mierzmy na stanowisku  $A$ : kąt poziomy  $\alpha$  (między kierunkiem na punkt  $B$  i na punkt  $C$ ) i kąt pionowy  $\varphi$ , a na stanowisku  $B$ : kąt poziomy  $\beta$  (między kierunkiem na punkt  $A$  i na punkt  $C$ ) i kąt pionowy  $\psi$ . Ponadto mierzymy odległość między punktami  $A$  i  $B$  (bazę  $c$ ).



Rys. 13

Jeżeli przez oś obrotu lunety na stanowisku  $A$  poprowadzimy płaszczyznę poziomą i rzutujemy na nią punkty  $A, B$  i  $C$ , otrzymamy poziomy trójkąt  $A_1 C_1 B_2$ .

Analogicznie otrzymamy trójkąt poziomy  $A_2 C_2 B_1$  identyczny z poprzednim, prowadząc płaszczyznę poziomą przez oś obrotu lunety na stanowisku  $B$  i rzutując na nią punkty  $A, B$  i  $C$ . Na rysunku 13 trójkąty te są pokazane w widoku perspektywicznym;

Oznaczamy:  $CC_1 = h_1, CC_2 = h_2$ .

Rozwiązując którykolwiek z tych trójkątów otrzymamy odpowiednie odległości  $a$  i  $b$ , a następnie mnożąc odpowiednio przez tangensy kątów pochylenia, otrzymamy różnicę wysokości między poziomami osi obrotu lunety na stanowiskach  $A$  i  $B$  a punktem szukanym  $C$ .

Oznaczając wysokość punktu $A$ . . . . .	$H_A$
„ „ „ $B$ . . . . .	$H_B$
„ „ „ $C$ . . . . .	$H_C$
„ instrumentu w punkcie $A$ . . . . .	$i_1$
„ „ „ „ $B$ . . . . .	$i_2$

otrzymamy wysokość punktu  $C$ :

$$H_C^I = H_A + i_1 + h_1 = H_A + i_1 + b \cdot \operatorname{tg} \varphi \text{ wyliczone z punktu } A$$

$$H_C^{II} = H_B + i_2 + h_2 = H_B + i_2 + a \cdot \operatorname{tg} \psi \text{ wyliczone z punktu } B.$$

Te dwie wielkości powinny się różnić od siebie tylko w granicach błędów pomiaru.



Ostateczna wysokość powinna być średnią ogólną obu tych wyników, z uwzględnieniem wag, czyli

$$H_C = \frac{H_C^I \cdot p_1 + H_C^{II} \cdot p_2}{p_1 + p_2}, \quad \text{gdzie } p = \frac{1}{m^2}.$$

Jednakże — jak wynika z dalszych rozważań — różnice wag są na ogół nieduże, przeto dla uproszczenia pracy możemy przyjąć  $H_C$  za średnią arytmetyczną:

$$H_C = \frac{H_C^I + H_C^{II}}{2} = \frac{H_A + H_B + h_1 + h_2 + i_1 + i_2}{2}.$$

Wielkość  $H_A + i_1$  (poziom osi obrotu lunety na stanowisku  $A$ ) wyznaczoną za pomocą niwelacji trygonometrycznej, oznaczamy  $H_{A1}$ , wielkość zaś  $H_B + i_2$  (poziom osi obrotu lunety na stanowisku  $B$ ), wyznaczoną analogicznie, oznaczamy  $H_{B1}$ .

Wówczas

$$H_C = \frac{H_{A1} + h_1 + H_{B1} + h_2}{2},$$

przy czym:

$$h_1 = b \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \beta \cdot c}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

$$h_2 = a \cdot \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \alpha \cdot c}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \operatorname{tg} \psi.$$

Błąd wysokości  $H_C$  wyrazi się wzorem

$$m_{H_C}^2 = \frac{m_{H_A}^2 + m_{H_B}^2 + m_{i_1}^2 + m_{i_2}^2 + m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2}{4}.$$

Wielkości  $m_{H_A}$ ,  $m_{H_B}$ ,  $m_{i_1}$ ,  $m_{i_2}$  możemy pominąć, jako bardzo małe, jeśli poziom osi obrotu lunety ustalimy za pomocą niwelacji trygonometrycznej.

Wobec tego

$$m_{H_C}^2 \simeq \frac{1}{4} [m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2]$$

czyli

$$m_{H_C} \simeq \pm \frac{1}{2} \sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2}.$$

Wysokość  $h_1$  jest funkcją czterech zmiennych:  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta'$ ,  $\varphi$ , wysokość zaś  $h_2$  — funkcją czterech zmiennych:  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\psi$ .

Średnie błędy wielkości  $h_1$  i  $h_2$  wyrażą się wzorami:

$$m_{h_1}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \left[ \sin^2 \beta m_c^2 + c^2 \sin^2 \beta \operatorname{ctg}^2 (\alpha + \beta) m_\alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \cdot m_\beta^2 + \frac{c^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \cdot m_\varphi^2 \right],$$

$$m_{h_2}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \left[ \sin^2 \alpha m_c^2 + \frac{c^2 \sin^2 \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)} \cdot m_\alpha^2 + \right. \\ \left. + c^2 \sin^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 (\alpha + \beta) m_\beta^2 + \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \psi \sin^2 \psi} \cdot m_\psi^2 \right],$$

gdzie:  $c$  = długość bazy,  $m_c$  = błąd pomiaru bazy,

$m_\alpha = m_\beta$  = błąd pomiaru kąta poziomego

$m_\varphi = m_\psi$  = błąd pomiaru kąta pionowego, przy czym:

$m_\alpha = m_\beta = m_\varphi = m_\psi$ .

Założmy wielkość bazy = 30 m, średni błąd pomiaru kątów poziomych  $m_\alpha = m_\beta = \pm 0',5$ , średni błąd pomiaru kątów pionowych  $m_\varphi = m_\psi = \pm 0',5$ , średni błąd pomiaru bazy  $m_c = \pm 0,33$  cm, maksymalny kąt pochylenia  $\psi = 52^\circ$ , poza tym weźmy pod uwagę zależność między kątem  $\varphi$  i  $\psi$ , mianowicie:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \operatorname{tg} \psi$$

(ponieważ baza w większości wypadków ma niewielki spadek).

Podstawiając przy tych założeniach różne wielkości kątów  $\alpha$  i  $\beta$  otrzymamy tablicę:

Tablica 4

Kąt $\gamma$	Kąt $\alpha$	Kąt $\beta$	Kąt $\varphi$	Kąt $\psi$	$m_{h_1}$	$m_{h_2}$	$m_{HC} = \pm \frac{\sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2}}{2}$ (błąd średni)
170° 00'	5° 00'	5° 00'	52° 00'	52° 00'	2,3 cm	2,3 cm	1,65 cm
160 00	10 00	10 00	52 00	52 00	1,5	1,5	0,90
160 00	5 00	15 00	23 00	52 00	0,6	1,3	0,75
155 00	7 00	18 00	27 00	52 00	0,6	1,1	0,60
155 00	10 00	15 00	40 30	52 00	0,7	1,0	0,90
150 00	10 00	20 00	33 00	52 00	0,6	0,9	0,53
109 30	35 15	35 15	52 00	52 00	0,8	0,8	0,60
90 00	15 00	75 00	19 00	52 00	0,5	0,6	0,40
90 00	45 00	45 00	52 00	52 00	0,7	0,7	0,50
60 00	10 00	110 00	13 00	52 00	0,7	0,7	0,43
60 00	60 00	60 00	52 00	52 00	1,4	1,4	1,00
50 00	40 00	90 00	39 30	52 00	0,9	1,3	0,77
45 00	35 00	100 00	37 00	52 00	1,2	1,5	0,97
45 00	45 00	90 00	42 00	52 00	1,4	1,7	1,10
40 00	20 00	120 00	27 00	52 00	0,9	1,4	0,80
40 00	40 00	100 00	40 00	52 00	1,5	1,9	1,20
35 00	15 00	130 00	23 30	52 00	0,8	1,4	0,83
35 00	35 00	110 00	38 00	52 00	1,6	1,8	1,20
30 00	10 00	140 00	19 00	52 00	0,7	1,5	0,83
30 00	30 00	120 00	36 30	52 00	1,7	2,5	1,50
20 00	5 00	155 00	15 00	52 00	0,7	2,1	1,10

Z tablicy tej wynika, że błędy wysokości nie przekroczą (na ogół) błędów wcięcia, a nawet będą od nich mniejsze i 2) że z metody tej możemy korzystać przy analogicznych warunkach dla kąta  $\gamma$  lub kątów  $\alpha$  i  $\beta$ .

Mamy potwierdzenie podanej poprzednio uwagi, że różnice średnich błędów ( $m_{h_1}$  i  $m_{h_2}$ ) są na ogół niewielkie i dlatego niewiele się pomylimy, biorąc średnią arytmetyczną wysokości zamiast średniej ogólnej, zwłaszcza, że wyniki średnich błędów w powyższej tablicy oparte są na wprowadzeniu dużego kąta  $\varphi = 52^\circ$ .

Jeśli przy tej samej długości bazy (30 m) założymy jako błędy średnie:  $m_\alpha = m_\beta = m_\varphi = m_\psi = \pm 10''$  i  $m_d = \pm 1$  mm, to błąd określenia wysokości będzie 3 razy mniejszy niż poprzednio, gdyż wszystkie składniki we wzorze zmniejszą się 3 razy, a zatem wielkości błędów  $m_{HC}$  w tablicy 4 będą dla takich założeń błędami granicznymi.

Analizę błędów wysokości wynikających z powyższej metody można również przeprowadzić w sposób analogiczny jak przy metodzie wcięć, mianowicie przez rozwiązanie równania czwartego stopnia.

Metoda powyższa jest najczęściej stosowana zarówno przy pomiarze wnętrza, jak i elewacji; daje nam kontrolę pomiarów i wyliczenia wyso-

kości, oraz pośrednio — wcięcia, czyli kontrolę pomierzonych wielkości:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ . Ponieważ każdy punkt, którego wysokość określamy, jest jednocześnie punktem wciętym ze względu na zmierzone kąty  $\alpha$  i  $\beta$ , czyli punktem, którego rzut zawsze można określić (współrzędne:  $x$  i  $y$ ), przeto pomiar wysokości tym sposobem daje podwójną korzyść, zwłaszcza jeżeli chodzi o punkty niedostępne w przyziemiu i wszystkie punkty górnych kondygnacji.

Przy wszelkich pomiarach kątów pochylenia należy zwracać specjalną uwagę na libelę koła pionowego (kolimacyjną).

Przy pomiarach naukowo-badawczych dotyczących zabytków należy m. in. mieć na uwadze wychylenia z pionu ścian lub filarów czy też pilastrow. Stwierdzenie takich odchyłeń może być wykonane — zależnie od warunków:

- 1) za pomocą wcięcia,
- 2) za pomocą odpionowania instrumentem przy ustawieniu się prostopadle do płaszczyzny ewentualnego wychylenia.

Ten drugi sposób jest bez porównania szybszy od pierwszego i dlatego należy go stosować wszędzie tam, gdzie to jest tylko możliwe.

Trzeba oczywiście mieć tu na uwadze wpływ błędu kolimacji i inklinacji. Przy pomiarach wysokości wnętrza bardzo pomocne są poziomy pośrednie (chóry, różne ubikacje w górnych kondygnacjach, balkony, krużganki, szerokie i dostępne do pomiarów gzymsy itp.), z których należy zawsze korzystać w celu ułatwienia pracy. Niekiedy korzystamy z przyległych do zabytku budynków, jako poziomów pośrednich.

Poziomy pośrednie obniżają dokładność z natury rzeczy, wskutek narastania błędów, jednocześnie zaś zwiększają ją ze względu na mniejsze kąty pochylenia i w większości wypadków ułatwiają pracę. Problem ten jest aktualny także przy pomiarze współrzędnych  $x$  i  $y$  metodą wcięcia.

Reasumując powyższe stwierdzimy, co następuje: dokładność określenia położenia punktu w przestrzeni (zarówno współrzędnych  $x$ ,  $y$ , jak i współrzędnej  $z$ ), jaką powyższymi metodami można bezsprzecznie uzyskać w praktycznym zastosowaniu, wynosi:  $\pm 1$  cm jako błąd graniczny, oczywiście przy skrupulatnym zachowaniu wyżej podanych warunków, jak: dokładny pomiar baz, ściśle centrowanie, poziomowanie, odpowiednio dokładny pomiar kątów poziomych i pionowych oraz warunków, wpływających z teorii błędów — polegających na tym, aby nie przekroczyć odpowiedniej granicy wielkości mierzonych kątów.

## VII. Lokalne trudności pomiaru

Jeśli chodzi o pomiary ściśle i szczegółowe zabytków architektonicznych, to należą one do kategorii pomiarów bardzo mozolnych, wymagających

wielkiej cierpliwości i systematyczności, a nawet pedanterii, ze względu na:

- 1) skomplikowaną formę i olbrzymią ilość szczegółów,
- 2) ograniczony dostęp z zewnątrz, zwłaszcza, jeśli chodzi o znaczną część zabytków w mieście: wąskie ulice i zabudowania dokoła zabytku,
- 3) brak odpowiedniego światła oraz szczupłość miejsca wewnątrz,
- 4) trudności identyfikacji punktów, na które musimy celować przy dwóch położeniach lunety i z obu końców bazy — ze względu na różnorodność kształtu fragmentów, wśród których znajdują się mierzone punkty (tło),
- 5) znaczną ilość pracy, przy której z natury rzeczy łatwo o pomyłkę (mnóstwo elementów powiązanych z sobą niejednokrotnie w sposób skomplikowany).

Dlatego też bez systematyczności i pedanterii nie otrzymamy żądanych wyników.

Pomiar wnętrza zabytków jest z reguły znacznie trudniejszy od pomiaru elewacji: brak światła utrudnia znalezienie odpowiednich baz, to zaś zmusza nas do stosowania większych kątów pochylenia oraz zwiększenia ilości baz; stąd większa strata czasu przy uzyskaniu żądanej dokładności. Brak światła jest często spowodowany nieodpowiednią pogodą (zachmurzenie, które silnie odbija się we wnętrzu budowli), o czym należy przy pomiarze wnętrza pamiętać; w niektórych wypadkach możemy sobie przy takiej sytuacji poradzić za pomocą sztucznego oświetlenia. Przy odczytach instrumentalnych z reguły korzystamy z lampki elektrycznej, karbidówki lub instrumentu z elektryczną instalacją.

Dla uniknięcia błędów, mogących powstać wskutek złej identyfikacji punktów, na które celujemy przy dwóch położeniach lunety i z dwóch końców bazy, należy prowadzić dokładne szkice z odpowiednio oznaczonymi punktami (na które celujemy), położonymi na tle różnorodnych fragmentów, oraz unikać pomiaru większej ilości punktów objętych jedną serią z danego stanowiska (bądź to punktów wcinanych, bądź też mierzonych dla uzyskania położenia wysokościowego), ponieważ większa ilość mierzonych punktów objętych jedną serią znacznie utrudnia nam orientację. Ma to również na celu uniknięcie ewentualnej straty czasu w wypadkach poruszenia (przypadkowego) instrumentu, gdyż wówczas pomiar danej serii musielibyśmy zaczynać od początku (mimo bacznej uwagi, przy ciągłym wypatrywaniu i szukaniu oraz wprowadzaniu w pole widzenia mierzonych punktów niejednokrotnie narażeni jesteśmy na taką ewentualność). Z tego względu za maksymalną ilość punktów, które mierzymy w jednej serii przy dwóch położeniach lunety i z dwóch końców bazy, należy przyjąć 10 punktów.

Szkice polowe przy pomiarze zabytków odgrywają bardzo ważną rolę, ułatwiają bowiem wspomnianą wyżej identyfikację i stanowią podstawowy materiał przy sporządzaniu planów budowli, dlatego należy do nich przywiązywać szczególną wagę i prowadzić je w sposób bardzo przejrzysty i pedantyczny (w dużej skali, wyraźne rysunki).

### VIII. Stabilizacja punktów

Punkty ciągów poligonowych i linii pomiarowych oraz baz i ciągów bazowych — ze względu na potrzebę korzystania z nich przez cały okres pomiaru, trwający przy ścisłych pomiarach kilka miesięcy — należy w odpowiedni sposób ustabilizować.

Najbardziej nadają się do tego celu specjalne gwoździe lub paliki z gwoździami (zależnie od terenu).

Wymiary gwoździ będą zależały od warunków lokalnych: ciągi obwodowe należy ustabilizować gwoździami dłuższymi, wciskanymi między płyty w trotuarze lub osadzonymi w bruku, natomiast ciągi wewnętrzne — cienkimi i krótkimi gwoździkami, które z łatwością osadzi się w szczelinach między płytami posadzki, bez szkody dla zabytku.

Równie dobrym sposobem utrwalenia punktu na okres pomiaru będzie wyrysowanie krzyżyka dłutkiem na płycie kamiennej lub betonowej.

W mniejszych miasteczkach lub ośrodkach wiejskich do ciągów obwodowych często przydają się paliki z gwoździami.

Na bokach ciągów poligonowych (zarówno obwodowych, jak i związkowych) oraz bazowych należy zawczasu ustalić i ustabilizować dość gęsto punkty bazowe (np. co kilka metrów), by potem nie tracić czasu na dodatkowe ustawianie instrumentu dla ustalania nowych punktów bazowych w toku pracy (względy organizacyjne).

Mając gęsto ustalone i ustabilizowane punkty możemy w toku pracy z łatwością dobierać sobie odpowiednie bazy (może być kilkanaście baz na jednym boku poligonowym lub bazowym).

### IX. Wnioski ogólne

Ścisły i szczegółowy pomiar na przykładzie jednego z zabytków architektury barokowej w Krakowie, wykonany wg podanych metod pozwolił mi na odkrycie korekt kompozycyjnych zastosowanych po mistrzowsku w tym zabytku.

Ten przykład imponującego rozwiązania kompozycyjnego w ograniczonych warunkach przestrzennych, w jakich się zabytek znajdował, jakkolwiek wnosi bardzo dużo światła do kompozycji barokowej, nie wyczerpuje sprawy całkowicie.

Dla ustalenia zasad kompozycji architektonicznej dotyczących tych artystycznych problemów, stosunkowo niewielkich, lecz znacznie wpły-

wających na całość (uzewnętrznionych w korektach i opartych na wielowiekowych doświadczeniach, a okrytych dziś mrokiem czasu) i dla wydania ostatecznego sądu o tej czy innej epoce architektonicznej lub o jej mistrzach, jak również dla odpowiedniego wyciągnięcia konkretnych wniosków z ówczesnych bogatych doświadczeń — należałoby objąć pewną grupę zabytków pomiarem ścisłym, który jest czynnikiem decydującym przy odkrywaniu tego rodzaju tajemnic.

Wspomniany problem korekt o charakterze wykonawstwa artystycznego znamy w architekturze greckiej pod nazwą „korekt optycznych“ tylko w ogólnym zarysie. Bogate jego rozwinięcie stwierdzone na podanym przykładzie pozwala z dużym prawdopodobieństwem wnioskować, że był on powszechny w epoce baroku. Ważność jego w architekturze monumentalnej, zarówno z punktu widzenia naukowego, jak i praktycznego, wydaje się niewątpliwa. Trudno bowiem zaprzeczyć konieczności poznawania i pogłębiania tego problemu (na podstawie dalszych pomiarów) w szerszym jeszcze zakresie, niż to nam daje wspomniany przykład oraz uwzględniania go przy konserwacji lub rekonstrukcji zabytków celem ewentualnego uniknięcia eklektyzmu. Również trudno negować możliwości wykorzystania tych zasad przy realizowaniu projektów budowli monumentalnych w odpowiedniej formie, na podstawie badań i doświadczeń.

#### РЕЗЮМЕ

Статья содержит:

Правила составления планов архитектурных сооружений при помощи геодезических наблюдений для научно-исследовательских целей.

Обоснование точности, которую необходимо применять по отношению к измерениям памятников архитектуры.

Анализ методов измерений применяемых до сих пор.

Методы геодезических измерений.

Исследование точности инструментальных наблюдений в применении к снимкам фронтонов зданий, а также горизонтальных и вертикальных сечений.

Обоснование целесообразности применения геодезических измерений памятников архитектуры для научно-исследовательских целей на основании опыта и исследований автора.

#### RÉSUMÉ

Cet article contient:

Les principes qui permettent de lever, dans le but de recherches scientifiques, les plans des monuments d'architecture, en se basant sur des données géodésiques.

La justification de l'exactitude nécessaire pour lever les plans des bâtiments de l'architecture monumentale.

L'analyse des méthodes servant à lever les monuments d'architecture employées jusqu'ici.

Les méthodes des mesures géodésiques.

L'analyse de l'exactitude des observations instrumentales se rapportant aux sections verticales, horizontales et à celles d'élévation.

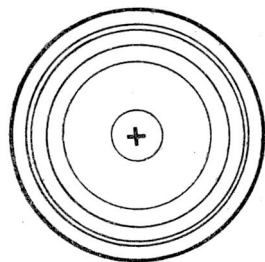
La justification de l'emploi des méthodes géodésiques de mesures de l'architecture monumentale employées et des recherches de l'auteur.

Jerzy Kuśmierczyk

## Luneta do przybliżonego wyznaczenia azymutu przez orientację według torów gwiazd okołobiegunowych

Wyznaczanie azymutu dla potrzeb geodezji niższej sprowadza się przeważnie do tzw. wyznaczenia przybliżonego z dokładnością kilku czy kilkadziesiąt sekund. Duże znaczenie praktyczne tego zagadnienia przyczyniło się do powstania szeregu pomocy, umożliwiających szybkie wyznaczanie azymutu przez uproszczenie czynności obserwacyjnych lub rachunkowych (np. nasadka południkowa firmy Wild, tablice Smirnowa). Na szczególną uwagę zasługuje zupełnie prosty sposób orientacji wg torów gwiazd okołobiegunowych, opracowany przez dr. S. Hausbrandta, pozwalający na przybliżone wyznaczenie azymutu w krótkim czasie i bez stosowania skomplikowanych obliczeń. Na podstawie założeń tej metody oraz celem jej praktycznego zastosowania został opracowany i skonstruowany prototyp lunety. Dla zrozumienia konstrukcji samej lunety należy pokrótce zapoznać się z metodą orientacji wg torów gwiazd okołobiegunowych.

Istotą metody\*) jest zastąpienie obserwacji obrazów gwiazd w odniesieniu do układu prostych (krzyż celowniczy) i związanych z tym rachunków trygonometrycznych — przez obserwację obrazów gwiazd w odniesieniu do układu współśrodkowych okręgów, co uwalnia nas od tych rachunków. W tym celu w płaszczyźnie obrazowej lunety należy umieścić diagram (rys. 1), będący obrazem torów ruchu pozornego kilku gwiazd okołobiegunowych. Różnice refrakcji w otoczeniu bieguna zaniedbujemy tzn. wykreślony diagram jest układem współśrodkowych okręgów, których promienie widoczne są pod kątami równymi odległościom polarnym gwiazd w dniu obserwacji



Rys. 1

\*) Opis metody został podany przez dr. S. Hausbrandta w broszurce wydanej na wystawie, która została zorganizowana w r. 1950 z okazji I Konferencji Naukowo - Technicznej Związku Mierniczych RP.



cji. Wielkości promieni okręgów ustalamy z równania

$$r = f \cdot \operatorname{tg} p$$

gdzie  $f$  — ogniskowa obiektywu

$p$  — odległość polarna gwiazdy (uzyskana z Rocznika Astronomicznego).

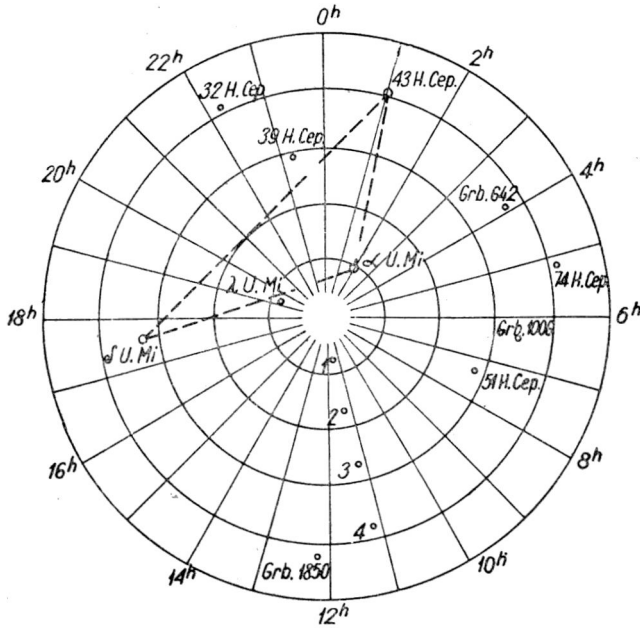
Jeśli oś celową lunety wzniesiemy od poziomu pod kątem równym kątowii widoczności bieguna w miejscu obserwacji (szerokość geograficzna plus kąt refrakcji) i ruchem koła poziomego „wprowadzimy gwiazdy na ich tory“ (uzyskując efekt ukazania się obrazów gwiazd na okręgach kół diagramu), wówczas oś celowa lunety znajdzie się w płaszczyźnie południka. Tablica I podaje wartości odległości polarnych dziesięciu gwiazd okołobiegunowych z dokładnością  $\pm 1''$  opracowane na r. 1952 przez Radziecki Rocznik Astronomiczny (Astronomiczeskij Jeżegodnik SSSR).

Czynności obserwacyjne przy wyznaczaniu azymutu kierunku ziemskiego  $\overline{AB}$  sprowadzają się do ustawienia teodolitu (zaopatrzonego w lunetę z diagramem) w punkcie A, starannego spoziomowania, skierowania lunety na punkt B i odczytania koła poziomego. Następnie wznosimy lunetę od poziomu pod kątem widoczności bieguna. Potrzebną do określenia tego kąta szerokość geograficzną bierzemy z mapy, przy czym wprowadzamy poprawkę refrakcji, której szczegóły omawia tablica II. Po ustaleniu kąta widoczności bieguna ruchem koła poziomego wprowadzamy łatwą do odszukania Gwiazdę Polarną w pole widzenia lunety. Kilka ruchów leniwką koła poziomego wystarczy dla „wprowadzenia gwiazd na ich tory“, czyli zorientowania lunety. Po opisanym zorientowaniu odczyt koła poziomego będzie tzw. odczytem północy  $\overline{N}$ . Azymut kierunku ziemskiego  $\overline{AB}$  otrzymujemy wykonując działanie

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{N},$$

gdzie  $\overline{B}$  — odczyt na kole poziomym teodolitu przy celowaniu na punkt B. Dla wyeliminowania błędów osiowych teodolitu oraz błędu niewspółśrodkowego ustawienia diagramu, należy powtórzyć wyznaczenie azymutu przy drugim położeniu lunety po ponownym starannym spoziomowaniu instrumentu. Ponieważ szerokość geograficzna miejsca obserwacji przeważnie nie jest ściśle znana, może nie nastąpić pokrycie wszystkich obrazów gwiazd, co powoduje konieczność korekty orientacji, przeprowadzanej za pomocą śrub leniwych obu kół. Najpierw korygujemy koło pionowe sprowadzając na swe tory obrazy tych gwiazd, które w chwili obserwacji znajdują się w pobliżu górowania i dołowania. Następnie przeprowadzamy korektę koła poziomego wprowadzając na tory obrazy tych gwiazd, które w chwili obserwowania ich znajdują się w pobliżu elongacji. Po przeprowadzeniu obu korekt odczytujemy ostatecz-

nie na kole poziomym odczyt północy oraz na kole pionowym kąt widoczności bieguna  $\varphi + \rho$ , skąd po odjęciu poprawki refrakcyjnej  $\rho$  można otrzymać ściślejszą wartość szerokości geograficznej. Na rys. 2 widzi-



Rys. 2

my mapkę okolic bieguna (w odwzorowaniu azymutalnym równoległościowym) przedstawiającą gwiazdy, które mogą wchodzić w rachubę przy pracy opisaną metodą. Jeśli pole widzenia lunety jest niewielkie (ca  $2^\circ$ ), można poprzestać na torach dwóch jasnych najbliższych bieguna gwiazd  $\alpha$  U. Min, i  $\lambda$  U. Min. Wzajemne położenie tych gwiazd jest dość korzystne, gdyż przejście przez południk jednej z nich odpo-

wiada w przybliżeniu elongacji drugiej. Lepiej jednak stosować obiektywy o większym polu widzenia i korzystać też z dalszych od bieguna gwiazd, spośród których wyróżniają się jasnością  $\delta$  U. Min, i 43 H. Cep.

Przystępując do opracowania prototypu lunety (rys. 3) wzięto pod uwagę kilka warunków wynikających z wyżej podanej metody. Zasadniczym warunkiem jest łatwa i szybka (nie wymagająca rozkręcania jakichkolwiek elementów lunety) możliwość wymiany diagramów, umieszczonych w płaszczyźnie obrazowej lunety. Zastosowanie tego warunku wprowadziło pewną cechę konstrukcyjną, odróżniającą zaprojektowaną lunetę od innych dotychczas stosowanych normalnych lunet teodolitów. Pozostałe warunki to: 1) możliwość usunięcia paralaksy (dokładne zogniskowanie obiektywu w płaszczyźnie diagramu), 2) możliwie duże pole widzenia lunety, 3) możliwość przerzucania lunety przez zenit (dla wyeliminowania błędów osiowych instrumentu i błędu niewspółśrodkowego osadzenia diagramu), 4) ewentualna możliwość oświetlania diagramu. Przekrój skonstruowanej lunety przedstawia rys. 4. Aby umożliwić łatwą wymianę diagramów wykonanych na krążkach szklanych lub celuloido-

T A B L I C A 1

D a t a		Odległości polarne gwiazd $p=90^\circ-\delta$									
		$\alpha$ U. Mi.	$\lambda$ U. Mi.	51 H. Cep.	39 H. Cep.	$\delta$ U. Mi.	Grb. 642	43 H. Cep.	161 Cam.	Grb.1850	32 H. Cep.
		57'	57'	2 <sup>o</sup> 52'	2 <sup>o</sup> 57'	3 <sup>o</sup> 23'	3 <sup>o</sup> 29'	3 <sup>o</sup> 59'	4 <sup>o</sup> 06'	4 <sup>o</sup> 09'	4 <sup>o</sup> 07'
		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
Styczeń	1	15	02	37	04	39	58	32	16	15	40
	10	14	05	34	05	42	56	31	15	15	42
	20	13	08	31	06	45	54	31	14	12	44
	31	13	11	27	08	49	52	32	12	11	47
Luty	1	15	12	27	08	49	51	32	12	10	47
	10	13	14	25	11	51	51	33	10	09	50
	20	15	16	22	13	53	50	35	07	06	53
	29	16	18	20	16	54	50	37	04	04	55
Marzec	1	17	18	20	16	54	50	37	04	04	56
	10	18	19	18	19	55	51	40	01	01	59
	20	21	19	17	22	55	53	43	05' 58	08' 58	08' 02
	31	24	19	16	26	55	55	46	55	55	05
Kwiecień	1	25	19	16	26	54	55	46	55	54	05
	10	27	19	16	28	54	57	49	52	52	07
	20	30	17	16	31	52	50	52	50	49	09
	30	33	15	17	33	49	03	55	48	47	10
Maj	1	34	15	17	33	49	03	55	48	46	10
	10	36	13	19	34	47	06	57	46	44	10
	20	39	11	21	35	46	09	59	46	43	10
	31	41	07	24	35	41	12	4 <sup>00'</sup> 00	46	42	09
Czerwiec	1	41	07	24	35	40	12	01	46	42	09
	10	43	04	27	35	37	15	02	46	42	08
	20	44	01	30	34	34	17	02	47	42	06
	30	44	56' 58	33	33	31	19	02	48	43	04
Lipiec	1	44	57	33	33	31	19	02	49	43	04
	10	44	55	36	31	28	21	01	50	44	01
	20	44	51	39	28	25	22	00	53	46	07' 58
	31	43	49	43	25	22	23	3 <sup>59'</sup> 58	56	49	54
Sierpień	1	43	48	43	25	22	23	58	56	49	54
	10	41	46	46	22	20	23	56	59	51	51
	20	39	44	49	18	19	23	53	06' 03	55	47
	31	36	42	51	14	17	22	49	07	58	43
Wrzesień	1	36	42	52	14	17	22	49	07	59	42
	10	33	41	53	10	17	21	46	11	09' 02	39
	20	30	40	55	06	16	19	42	15	06	35
	30	26	40	56	02	17	17	39	19	10	32
Październik	1	26	40	56	02	17	17	38	19	11	31
	10	23	40	57	56' 59	17	15	35	22	14	28
	20	19	41	58	55	19	12	31	25	17	26
	31	15	42	57	52	21	08	27	29	22	23
Listopad	1	15	43	57	51	21	08	26	29	22	23
	10	11	44	57	49	23	05	23	32	25	21
	20	08	46	56	46	25	02	20	34	28	19
	30	04	49	54	45	28	29' 58	17	36	30	19
Grudzień	1	04	49	54	44	29	58	17	36	30	19
	10	01	52	52	43	32	55	15	37	32	18
	20	56' 59	55	49	42	35	51	13	38	34	19
	31	57	58	46	42	38	48	11	38	34	20

T A B L I C A 2

Obliczanie kąta refrakcji $\rho$ przy wyznaczaniu azymutu z torów gwiazd okolobiegunowych										
		Szerokość geograficzna miejsca obserwacji								
		48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°
		"	"	"	"	"	"	"	"	"
Temperatura w stopniach Celsjusza	-20°	58	57	55	53	51	50	48	46	44
	-15°	56	55	53	51	49	48	46	45	43
	-10°	56	55	53	51	49	48	46	44	42
	-5°	55	54	52	50	48	47	45	44	42
	0°	54	53	51	49	47	46	44	43	41
	+5°	55	52	50	48	46	45	43	42	40
	+10°	52	51	49	47	45	44	42	41	39
	+15°	51	50	48	46	44	43	41	40	38
	+20°	50	49	47	45	43	42	40	39	38
	+25°	49	48	46	44	42	41	39	38	37
	+30°	48	47	45	43	41	40	38	37	36
	+35°	48	47	45	43	41	40	38	37	36
Ciśnienie w mm słupa Hg	720	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-2	-2
	730	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1
	740	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1
	750	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0
	760	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	770	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0
	780	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+1
	790	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+1
	800	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+2	+2

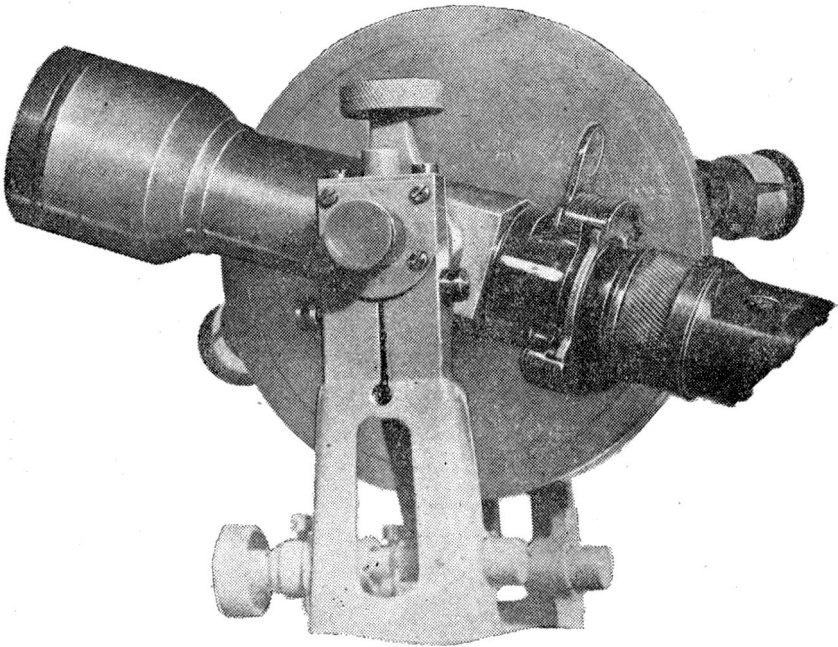
Tablica służy do określania kąta refrakcji  $\rho$ , który należy dodać do szerokości geograficznej miejsca obserwacji w celu otrzymania kąta widoczności bieguna (tzn. kąta, pod którym należałoby pochylić do poziomu lunetę dla zobaczenia gwiazdy znajdującej się ściśle w biegunie).

#### Przykład

Obserwujemy pod szerokością geograficzną  $\varphi = 53^{\circ}10'20''$  przy temperaturze  $t = 20^{\circ}\text{C}$  i ciśnieniu  $B = 750$ . W kolumnie o liczbie nagłówkowej  $\varphi = 53^{\circ}$  znajdujemy

naprzeciw temperatury 20°	42''
naprzeciw ciśnienia 750	-2''
razem refrakcja $\rho$	40''
Dodając szerokość geograficzną	<u>53°10'20''</u>
otrzymamy kąt widoczności bieguna	53°11'00''

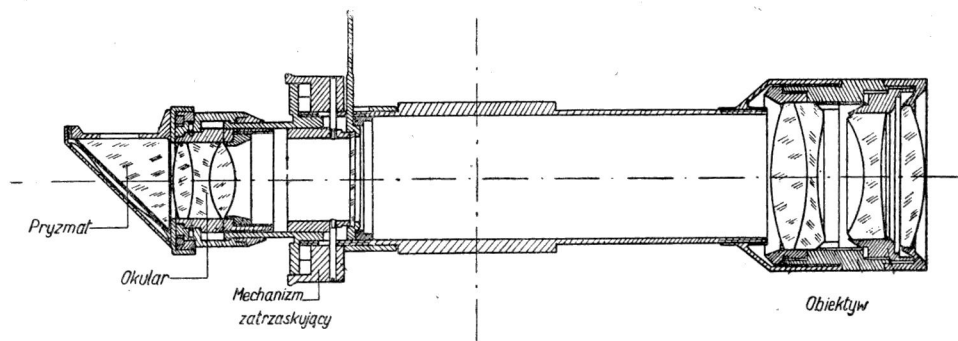
wych przylegających do szkła, luneta zaopatrzona jest w oprawkę — nazwijmy ją oprawką płytki ogniskowej. Oprawkę wraz z włożonym w nią diagramem (płytką ogniskową), po odciągnięciu sprężynowego zatrzasku, wsuwamy w wycięcie lunety aż do oporu. Następnie zwalniamy zatrzask, który za pomocą pierścienia, poruszanego przez cztery symetrycznie rozmieszczone sprężynki, dociska równomiernie na obwodzie



Rys. 3

szklany krążek diagramu do oprawki płytki ogniskowej. Pośrednio ustala on oprawkę w pierścieniowym prowadzeniu zamocowanym w korpusie lunety. Przy wyjmowaniu oprawki z płytką ogniskową odciągamy zatrzask, cofamy lekko oprawkę w kierunku odciągniętego zatrzasku, aby wyszła z pierścieniowego prowadzenia i swobodnie ją wysuwamy. Rys. 5 przedstawia fragment lunety obejmujący włożoną oprawkę z płytką ogniskową oraz sposób jej wyjmowania. Wymianę diagramów należy wykonywać przy lunecie skierowanej obiektywem w dół. Luneta jest dokładnie zogniskowana na nieskończoność, a oprawka płytki ogniskowej zawsze jest dociskana z jednakową siłą do stałej płaszczyzny oporowej pierścienia prowadzącego (prostopadłej do osi celowej lunety). Daje to gwarancję ustawienia diagramu w płaszczyźnie obrazowej lunety. Może

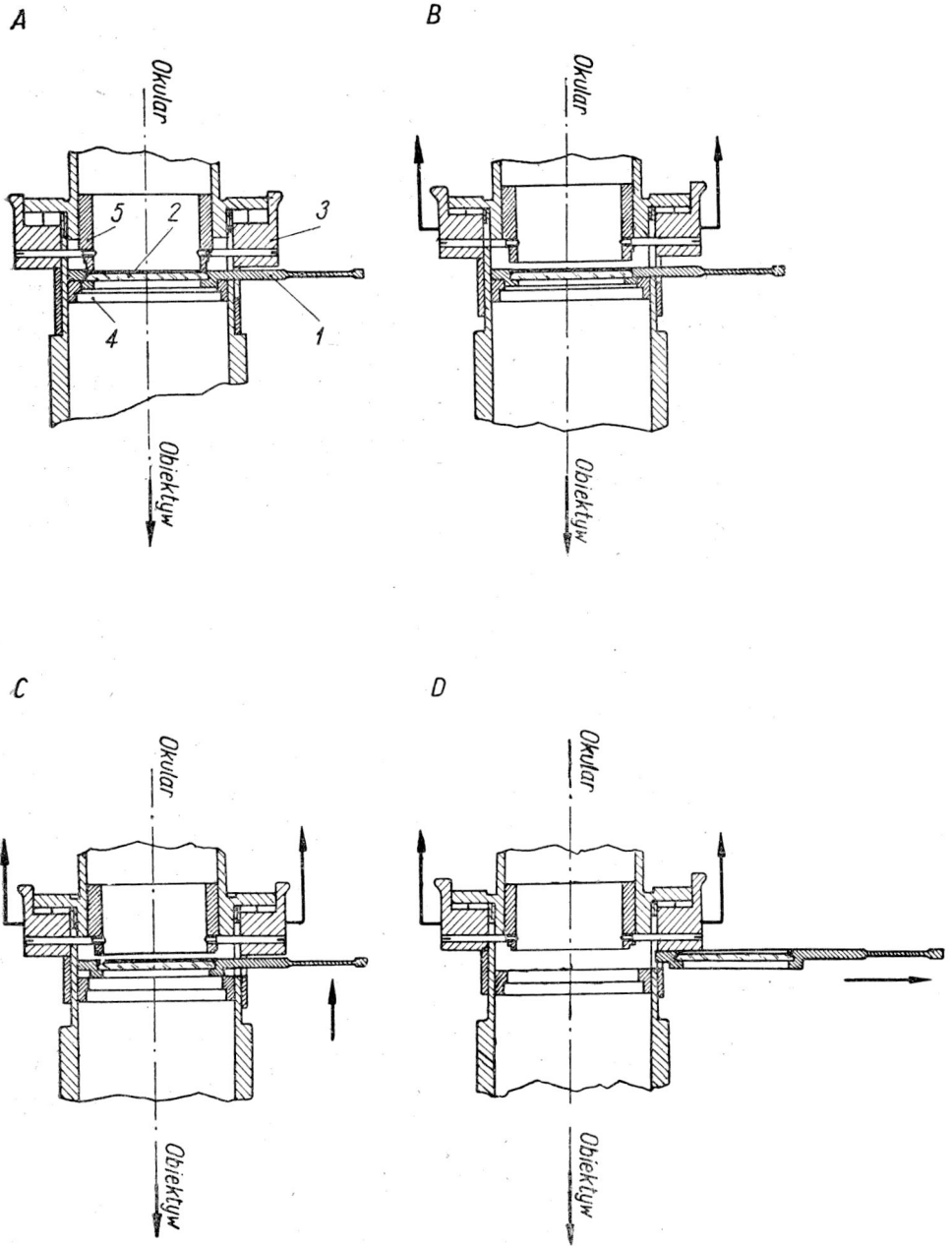
natomiast zająć wypadek niewspółśrodkowego ustawienia diagramu w stosunku do osi celowej lunety, ponieważ szklany krążek z naniesionym diagramem wkładany jest swobodnie w cylindryczne wgłębienie w oprawce płytki ogniskowej. Ta swoboda uzasadniona jest względami praktycznymi (łatwa wymiana krążków diagramu). Umożliwia to, po dociśnięciu pierścieniem zatrzasku, dokładne przyleganie krążka diagra-



Rys. 4

mu do płaszczyzny oporu (nie ma obawy zakleszczenia krążka). Maksymalna niewspółśrodkowość osadzenia diagramu nie może przekroczyć wielkości  $\pm 0,1$  mm i jest absolutnie nieszkodliwa, jeśli pomiar dokonywany będzie przy dwóch położeniach lunety. Konstrukcja lunety, a szczególnie mechanizmu umożliwiającego wymianę diagramów, jest bardzo zwarta, ponieważ dostosowano ją do posiadanego, pozbawionego lunety, korpusu teodolitu firmy Hildebrandt. Korpus lunety jest wykonany z mosiądzu za pomocą obróbki mechanicznej (toczenia i frezowania), a oś obrotu lunety — toczona i szlifowana. Z uwagi na trudności wykonania czy nabycia skorygowanego obiektywu lunety o dużym polu widzenia, odpowiedniej średnicy i wystarczającej jasności — przystosowano do lunety radziecki obiektyw fotograficzny „Industar“ o ogniskowej 10,5 cm i sile światła 1 : 3,5. Dało to w efekcie wystarczająco duże pole widzenia. Okular 9 $\times$  połączony jest z niezależnie obracającym się pryzmatem, co pozwala na dogodnie wykonywanie obserwacji przy obu położeniach lunety. Aby uzyskać oświetlenie diagramu (tak jak to jest praktykowane w wielu nowszych teodolitach z elektrycznym oświetleniem), w jednej stronie osi obrotu lunety przewiercono otwór, przez który pada światło żarówki na metalowe lustro, ustawione pod kątem 45 $^{\circ}$  i skierowane (w polu widzenia lunety) w stronę płytki ogniskowej.

Dla uzupełnienia opisu lunety należy podać sposoby nanoszenia diagramów. Jednym z nich jest trasowanie kół metodą kolejnych przybli-



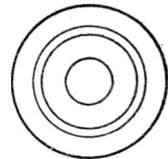
Rys. 5

A) Diagram zamocowany: 1 — oprawka płytki ogniskowej (diagramu), 2 — szklany krążek z naniesionym diagramem, 3 — segment do odciągania sprężynowego zatrasku, 4 — pierścieniowe prowadzenie oprawki płytki ogniskowej, 5 — pierścień dociskający. B) Zatrask sprężynowy odciągnięty w kierunku strzałki przy pomocy dwóch palców lewej ręki. C) Oprawka diagramu cofnięta przy pomocy prawej ręki. D) Oprawka diagramu wysunięta w kierunku strzałki.

zeń. Polega ono na wykreśleniu (na próbnej płytce celuloidowej), za pomocą cyrkla, okręgu koła o promieniu obliczonym z zależności  $r = f \cdot \operatorname{tg} p$ , założeniu tej płytki do lunety oraz pomiarze kąta określonego przez styczne pionowe (daleki cel) do obu stron okręgu. Jeśli kąt ten okaże się większy od podwójnej wartości polarnej odległości gwiazdy, dla której trasujemy tor, wówczas przeprowadzić należy korektę polegającą na ponownym wykreśleniu na drugiej płytce próbnej okręgu koła przy drobnej zmianie jego promienia.

Po stwierdzeniu w drodze pomiaru kąta, że wielkość promienia jest właściwa (następuje to zazwyczaj po trzech przybliżeniach), trasujemy okrąg na płytce przeznaczonej do pracy. Trasowanie należy oczywiście wykonać dla toru każdej z obranych gwiazd. Drugi sposób, dokładniejszy i prostszy, wymaga przyrządu — nazwijmy go mikrocyrkiem — do precyzyjnego trasowania. Zasadniczym elementem mikrocyrka jest tarcza obrotowa osadzona na nieruchomej osi. Na tarczy tej umieszczona jest wycechowana śruba mikrometryczna, połączona z ostrzem trasującym, za pomocą której można regulować wielkość promienia trasowanego na płytce zamocowanej w centrum nieruchomej osi. Trasowanie następuje przez obrót tarczy. Elementem trasującym jest ostrze stalowe — przy trasowaniu na celuloidzie, lub diamentowe — przy trasowaniu na szkle.

Wykreślenie większej ilości torów gwiazd ponad trzy do czterech nie jest celowe, nie wpływa bowiem wiele na podniesienie dokładności, a jest powodem wątpliwości w czasie „wprowadzania gwiazd na odpowiednie tory“. Przy próbach wykonywanych opisaną lunetą, trasowano tory trzech najjaśniejszych gwiazd w otoczeniu bieguna (stosowany diagram w wielkości naturalnej przedstawia rys. 6). Gwiazdy te tworzą charakterystyczny trójkąt rozwartokątny (na rys. 2 zaznaczony przerywanymi liniami).



Rys. 6

Główną zaletą wyznaczania azymutu za pomocą omawianej lunety jest prostota postępowania w samych czynnościach pomiarowych, pozwalająca na szybkie opanowanie pracy przez personel bez wyższych kwalifikacji. Pracownik udający się w teren otrzymuje komplet diagramów, który mu wystarczy na dłuższy okres czasu. Przy instrumentach o dokładność rzędu  $1^\circ$  wystarczy w zasadzie przeprowadzić wymianę diagramów średnio w okresach ca miesięcznych. Dokładność wyznaczenia azymutu uwarunkowana jest oczywiście dokładnością odczytu koła poziomego. W badanym instrumencie dokładność koła poziomego wynosiła  $1^\circ$ . Pozwoliło to na wyznaczenie azymutu z dokładnością tego rzę-



du. Przy zastosowaniu koła poziomego o wyższej dokładności odczytu i posługiwaniu się diagramem trasowanym za pomocą mikrocyrkla — można osiągnąć dokładności dużo większe. Nie znaczy to, abyśmy omawianą metodę mogli zaliczać do rzędu metod ścisłych. Wymagałoby to bowiem rezygnacji z założenia jednostajności refrakcji w otoczeniu bieguna i w konsekwencji potrzeby sporządzania diagramów o torach krzywych, trudnych do wykreślenia.

Rezultaty przeprowadzonych prób wykazały celowość szerokiego zastosowania (dla przybliżonego wyznaczania azymutu) sposobu orientacji według torów gwiazd okołobiegunowych. Ponieważ budowa specjalnych instrumentów powodowałaby znaczne koszty, a poza tym byłoby niewygodne posługiwanie się w terenie normalnym teodolitem i dodatkowym przy wyznaczaniu azymutu — należy opracować lunetkę nasadkową na normalny teodolit lub stosować lunetę wymienną do teodolitu, w którym ta wymiana jest możliwa i łatwa, jak np. teodolit Gerlacha, Heidego. Wykonywanie takich lunet jest zupełnie realne, tym bardziej, że obecnie produkowane przez PZO obiektywy i okulary w zupełności do tego celu się nadają.

#### РЕЗЮМЕ

В статье описывается построенная автором астрономическая труба (с особой диаграммой), применяемая при приближенном определении азимута по способу др. Хаусбрандта методом ориентировки по траекториям близполюсных звезд. Труба снабжена несложным механизмом, с помощью которого можно быстро менять диаграммы, помещаемые в плоскости изображения трубы. Главным достоинством определения азимута при использовании описываемой оптической трубы является необыкновенная простота производства наблюдений и полное исключение вычислительных работ. Этим инструментом могут наблюдать малоопытные наблюдатели.

#### RESUMÉ

Cet article décrit une lunette construite par l'auteur et qui sert à déterminer approximativement l'azimut en s'orientant d'après la position des étoiles circumpolaires dans leurs trajectoires. C'est la méthode d'orientation du Dr Hausbrandt.

Cette lunette possède un mécanisme simple, à ressort, qui permet un rapide échange de diagrammes placés dans le plan d'images de la lunette.

Le principal avantage, en déterminant l'azimut à l'aide de cette lunette, consiste en la simplicité du procédé dans la prise des mesures, ce qui permet à un personnel, même pas hautement qualifié, de maîtriser rapidement l'instrument et de pouvoir se passer de n'importe quels calculs trigonométriques.

## SPIS TREŚCI

<b>W sześćdziesiątą rocznicę urodzin Prezydenta RP Bolesława Bieruta</b>	5
<b>Od Redakcji</b>	7
<b>Edward Warchałowski</b> — Udział geodezji w budowie podstaw socjalizmu w Polsce	9
<b>Stefan Hausbrandt</b> — Zagadnienie odwrócenia szeregu Taylora w ujęciu krakowianowym i kilka przykładów zastosowania tego zagadnienia do rachunków geodezyjnych	19
<b>Zygmunt Kowalczyk</b> — Pomiar wysokości kominów fabrycznych i kontrola ich pionowości	45
<b>Paweł Dulian</b> — Zastosowanie metody Krováka do uproszczonego obliczenia korelat w równaniach normalnych dla niezależnych układów centralnych	69
<b>Jerzy Gomoliszewski</b> — Geodezyjne metody pomiaru zabytków architektonicznych	87
<b>Jerzy Kuśmierczyk</b> — Luneta do przybliżonego wyznaczania azymutu przez orientację według torów gwiazd okołobiegunowych	119

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

<b>К шестидесятой годовщине рождения Президента Польской Народной Республики Болеслава Берута</b>	5
<b>От Редакции</b>	7
<b>Эдвард Вархаловский</b> — Участие геодезии в строительстве фундамента социализма в Польской Народной Республике	9
<b>Стефан Хаусбрандт</b> — Проблемы инверсии ряда Тэйлора с применением краковянов и примеры применения этой проблемы в геодезических вычислениях	19
<b>Зигмунт Ковальчик</b> — Определение высоты фабричных труб и проверка их отвесного положения	45
<b>Павэл Дулиян</b> — Применение метода Кжовака при упрощенном вычислении коррелат нормальных уравнений для независимых центральных систем	69
<b>Ежи Гомолишевский</b> — Геодезические методы измерения памятников архитектуры	87
<b>Ежи Кусмерчик</b> — Теодолитная труба для приближенного определения азимута путем ориентировки по траекториям близполюсных звёзд	119

## SOMMAIRE

<b>Le soixantième anniversaire du Président de la République Populaire Polonaise Bolesław Bierut</b> . . . . .	5
<b>Préface du rédacteur</b> . . . . .	7
<b>Edward Warchalowski</b> — Rôle de la géodésie dans l'établissement des bases du socialisme en Pologne . . . . .	9
<b>Stefan Hausbrandt</b> — Problème de l'inversion de la série de Taylor dans la symbolique cracovienne et quelques exemples de l'application de ce problème aux calculs géodésiques . . . . .	19
<b>Zygmunt Kowalczyk</b> — Mesurage de la hauteur des cheminées d'usine et contrôle de leur verticalité . . . . .	43
<b>Paweł Dulian</b> — Application de la méthode de Krovák au calcul simplifié des quantités corrélatives dans les équations normales par rapport aux systèmes centraux indépendants . . . . .	69
<b>Jerzy Gomoliszewski</b> — Méthodes géodésiques servant à faire les le- vers des monuments d'architecture . . . . .	87
<b>Jerzy Kuśmierczyk</b> — Lunette destinée à la détermination approxima- tive de l'azimut par orientation suivant les trajectoires des étoiles circumpolaires . . . . .	119

