

A 1911 I

GEODEZJA I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY
TOM I * ZESZYT 3

1 9 5 2

INSTYTUT GEODEZJI POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

GEODEZJA
I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY
TOM I ❖ ZESZYT 3



1952

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Edward Warchałowski (przewodniczący), Jan Różycki (redaktor), Bronisław Dzikiewicz (zastępca redaktora), Zygmunt Kowalczyk, Henryk Leśniok, Franciszek Biernacki, Brunon Piasecki

Adres Redakcji: Zakład Geodezji Wyższej (Politechnika) Warszawa,
Pl. Jedności Robotniczej 1

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1952

Nakład 700	Zamówienie nr 119
Arkuszy druk. $4\frac{1}{4}$	Druk ukończono 17/9. 52
Papier druk. sat. V, 70 g, 70×100	K-3-12762

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — ULICA FREDRY 10

Czesław Kamela

Wyrównanie sieci triangulacyjnej nowego typu (triangulacji liniowej)

W klasycznej triangulacji wykonujemy pomiary wszystkich kątów w sieci oraz, od czasu do czasu, długości baz. Pomiar kątów winien być wykonany bardzo starannie; wymaga to korzystania z najprecyzyjniejszych teodolitów oraz wielokrotnych pomiarów kąta na tym samym stanowisku. Wiemy, że gdy pomierzemy wszystkie trzy boki w trójkącie, to określimy go jednoznacznie. Jednak przy użyciu dotychczasowej aparatury do pomiaru baz bezpośrednio mierzenie wszystkich boków w sieci triangulacyjnej jest niemożliwe.

Próby zastosowania fal świetlnych do pomiaru boków triangulacyjnych, wobec dużych błędów w określaniu szybkości światła, również zawiodły.

Dopiero ostatnio szwedzkiemu fizykowi drowi Erikowi Bergstrandowi, pracującemu w Szwedzkim Instytucie Geodezyjnym, udało się skonstruować przyrząd nazwany geodimetrem, przy pomocy którego jesteśmy w stanie pomierzyć długość boku triangulacyjnego z błędem względnym

około $\frac{1}{500\ 000}$. Geodimetr wykorzystuje do pomiaru fale świetlne o wy-

sokiej częstotliwości. Również i technika radarowa zezwala obecnie pomierzyć znaczne długości (50 — 500 km) z błędem względnym około

$\frac{1}{60\ 000}$ do $\frac{1}{100\ 000}$.

Na przestrzeniach mniej zaludnionych i w okolicach podbiegunowych zostały już przeprowadzone triangulacje radarowe (szczególnie przy użyciu radaru typu zwanego Shoran, stąd nazwa tzw. triangulacji shoranowej), dostarczające dość dobrego podkładu geodezyjnego.

W najbliższej przyszłości będziemy mieli do czynienia z tym typem triangulacji (czy to radarowej, czy mierzonej geodimetrem), w której nie będą mierzone kąty, lecz tylko długości boków. Ten typ sieci prof. E. Warchałowski nazwał „triangulacją nowego typu“¹⁾.

¹⁾ Przegląd Geodezyjny nr 7—8, 1948, str 204—216.

Wyłania się więc problem wyrównania tego typu triangulacji.

Odnośnie wyrównania triangulacji opartej na pomiarze długości boków mgr inż. Paweł Dulian podał w Przeglądzie Geodezyjnym z r. 1951 nr 11, str. 334—347 w artykule pt.: „Przykład wyrównania triangulacji opartej na pomiarze boków“ jedną z metod wyrównania, a mianowicie wyrównanie metodą zawarunkowaną na elipsoidzie.

Gdybyśmy w sieci triangulacyjnej o długości boków np. odpowiadających triangulacji I rzędu pomierzyli wszystkie długości, to tę sieć możemy wyrównać różnymi sposobami.

Opierając się na klasycznych metodach triangulacji, możemy z pomierzonych długości boków obliczyć kąty w trójkątach i później traktować te kąty jako wielkości spostrzegane, przeprowadzając wyrównanie sieci jedną z metod, używanych w triangulacji klasycznej dla kątów.

Ten sposób wyrównania jest zbyt uciążliwy; ponadto w tym przypadku układamy równania błędów (bądź równania warunkowe) nie dla wielkości bezpośrednio spostrzeganych, lecz dla innych wielkości otrzymanych z wielkości bezpośrednio mierzonych.

Dlatego też przedstawimy poniżej sposoby wyrównania sieci używając tylko wielkości bezpośrednio spostrzeganych.

Jeśli taka sieć pokrywa rozległy obszar (np. więcej niż 100 000 km²), to wyrównanie jej z reguły będziemy musieli przeprowadzić na elipsoidzie metodą spostrzeżeń pośrednich, bądź metodą spostrzeżeń zawarunkowanych.

Jeżeli natomiast obszar objęty tą triangulacją nie jest zbyt duży, tak że można go odwzorować wiernokątnie na płaszczyźnie (z małymi poprawkami odwzorowawczymi np. w odwzorowaniu Gaussa-Krügera), wtedy wyrównanie sieci korzystniej jest przeprowadzić na płaszczyźnie metodą spostrzeżeń pośrednich, bądź metodą zawarunkowaną.

Jeśli to będzie sieć wypełniająca, to z reguły będziemy ją wyrównywali metodą spostrzeżeń pośrednich.

Przed przystąpieniem do wyrównania wielkości spostrzegane (długości boków triangulacyjnych pomierzone np. geodimetrem) musimy zredukować do przyjętej elipsoidy odniesienia, ażeby te wielkości były długościami linii geodezyjnych na tej elipsoidzie.

Przy sieciach mierzonych geodimetrem, gdzie długość boków będzie tego samego rzędu co i długość boków w klasycznej triangulacji I rzędu, zredukowana długość praktycznie będzie odpowiadać długości linii geodezyjnej. Jeżeli natomiast będą to sieci radarowe o długich bokach (np. 600 km), to zredukowane długości nie będą odpowiadać długości linii geodezyjnej. Omówimy to pod koniec tego problemu.

Przejdziemy do omówienia wyrównania sieci metodą spostrzeżeń pośrednich.

Mając sieć triangulacyjną o p punktach, z których znane są współrzędne triangulacyjne np. 2 punktów, będziemy mieli, stosując metodę spostrzeżeń pośrednich, $2(p - 2)$ niewiadomych a więc i tyleż równań normalnych. Oczywiście jest, że na płaszczyźnie będą to współrzędne prostokątne x i y , zaś na elipsoidzie będą to współrzędne geograficzne φ i λ . Każda pomierzona długość dostarczy nam równania błędów.

Rozważmy to zadanie najpierw na elipsoidzie.

Długość linii geodezyjnej S_{ik} między dwoma punktami i i k o znanych współrzędnych geograficznych możemy przedstawić jako funkcję tych współrzędnych, czyli możemy napisać, że

$$S_{ik} = f(\varphi_i, \lambda_i, \varphi_k, \lambda_k). \quad (1)$$

Gdy przy pomocy wielkości zaobserwowanych obliczymy przybliżone współrzędne geograficzne punktów i i k ($\varphi_i^0, \lambda_i^0, \varphi_k^0, \lambda_k^0$), to możemy napisać, że

$$S_{ik} = f(\varphi_i^0 + d\varphi_i, \lambda_i^0 + d\lambda_i, \varphi_k^0 + d\varphi_k, \lambda_k^0 + d\lambda_k), \quad (2)$$

gdzie $d\varphi_i, d\lambda_i, d\varphi_k, d\lambda_k$ oznaczają poprawki, jakie trzeba dodać do wielkości współrzędnych geograficznych przybliżonych, ażeby otrzymać współrzędne ostateczne (wyrównane).

Prawą stronę wzoru (2) rozwiniemy na szereg Taylora w otoczeniu współrzędnych przybliżonych i ograniczymy się do pierwszych pochodnych zakładając, że poprawki $d\varphi_i, d\lambda_i$ itd. są tak małe, iż możemy ich iloczyny, kwadraty itd. pominąć (również i wyrazy wyższe).

Wtedy otrzymamy równanie liniowe:

$$S_{ik} = f(\varphi_i^0, \lambda_i^0, \varphi_k^0, \lambda_k^0) + \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} d\varphi_i + \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} d\varphi_k + \frac{\partial f}{\partial \lambda_k} d\lambda_k + \text{wyrazy wyższego rzędu (które pomijamy)}. \quad (3)$$

Wartość $f(\varphi_i^0, \lambda_i^0, \varphi_k^0, \lambda_k^0)$ przedstawia długość linii geodezyjnej S_{ik}^0 , obliczoną ze współrzędnych przybliżonych — natomiast wartości pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial S_{ik}}{\partial \varphi_i}$ itd. zostały podane przez F. R. Helmerta w „Höhere Geodäsie“ tom I, w rozdziale VI § 9 i § 10, w rozdziale X § 11 oraz wyprowadzone przez prof. E. Warchałowskiego (patrz Przegląd Mierniczy z r. 1931) i wynoszą:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S_{ik}}{\partial \varphi_i} &= -M_i \cos \alpha_{ik} \\
 \frac{\partial S_{ik}}{\partial \varphi_k} &= -M_k \cos \alpha_{ki} \\
 \frac{\partial S_{ik}}{\partial \lambda_k} &= +N_k \cos \varphi_k \sin \alpha_{ki} \\
 \frac{\partial S_{ik}}{\partial \lambda_i} &= -N_i \cos \varphi_i \sin \alpha_{ik},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

przy czym M oznacza promień krzywizny południka, zaś N promień krzywizny przekroju poprzecznego w danym punkcie elipsoidy.

Na podstawie tego możemy ułożyć liniowe równanie błędów:

$$\begin{aligned}
 S_{ik} \text{ pomierzone} + v_{ik} &= S^0_{ik} - M_i \cos \alpha_{ik} d\varphi_i - N_i \cos \varphi_i \sin \alpha_{ik} d\lambda_i - \\
 &\quad - M_k \cos \alpha_{ki} d\varphi_k + N_k \cos \varphi_k \sin \alpha_{ki} d\lambda_k,
 \end{aligned}$$

czyli:

$$\begin{aligned}
 v_{ik} &= -M_i \cos \alpha_{ik} d\varphi_i - N_i \cos \varphi_i \sin \alpha_{ik} d\lambda_i - M_k \cos \alpha_{ki} d\varphi_k + \\
 &\quad + N_k \cos \varphi_k \sin \alpha_{ki} d\lambda_k + l_i,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

gdzie $l_i = S^0_{ik} - S_{ik}^{\text{pomierzone}}$.

Jak już wspominaliśmy, takich równań błędów będziemy mieli tyle, ile jest pomierzonych linii. Z równań tych układamy równanie normalne a dalszy tok nie wymaga już objaśnień.

Należy zaznaczyć, że może zajść potrzeba wprowadzenia wag.

Tok postępowania przy tej metodzie wyrównania jest następujący:

Redukujemy obserwowane długości do długości linii geodezyjnych na powierzchni elipsoidy odniesienia.

Przy pomocy tych wielkości obliczamy przybliżone współrzędne geograficzne szukanych punktów. Następnie obliczamy bardzo dokładnie S^0_{ik} (długości przybliżone) wszystkich linii pomierzonych oraz współczynniki $\frac{\partial S_{ik}}{\partial \varphi_i}$, $\frac{\partial S_{ik}}{\partial \lambda_i}$, $\frac{\partial S_{ik}}{\partial \varphi_k}$, $\frac{\partial S_{ik}}{\partial \lambda_k}$ według podanych wzorów i przystępujemy do układania równań błędów v_{ik} . Z równań błędów układamy równania normalne, po rozwiązaniu których otrzymamy poprawki $d\varphi_i$, $d\lambda_i$, $d\varphi_k$, $d\lambda_k, \dots$ do współrzędnych przybliżonych a w konsekwencji ostateczne (wyrównane) współrzędne geograficzne punktów.

Wszelkie kontrole przeprowadzamy zgodnie z rachunkiem wyrównawczym.

Jak już wspominaliśmy, możemy zadanie wyrównania sieci rozwiązać na płaszczyźnie, wyrównując metodę spostrzeżeń pośrednich przez

zastosowanie wiernokątnego odwzorowania elipsoidy na płaszczyźnie (np. odwzorowania Gaussa-Krügera). W tym przypadku będziemy operowali jako wielkościami spostrzeganymi nie długościami linii geodezyjnej na elipsoidzie ani też długościami jej obrazu w płaszczyźnie (który będzie jakąś krzywą za wyjątkiem południka głównego), lecz cięciwą obrazu linii geodezyjnej.

Musimy więc wprowadzić redukcję długościowe ze względu na odwzorowanie. Musimy również znać przybliżone (z dokładnością do kilku metrów) współrzędne prostokątne płaskie wszystkich punktów.

Używając odwzorowania Gaussa-Krügera, długość cięciwy obrazu linii geodezyjnej S_{ik} między punktami i i k na płaszczyźnie wynosi:

$$\bar{S}_{ik} = S_{ik} \left[1 + \frac{1}{6R_m^2} (y_i^2 + y_i y_k + y_k^2) \right] + \text{wyrazy wyższych rzędów.} \quad (6)$$

Dla Polski można stosować wzór przybliżony, obierając za R_m promień średni dla $\varphi = 52^\circ$; wtedy będzie

$$\bar{S}_{ik} = S_{ik} [1 + 0,000\ 000\ 00409(y_i^2 + y_i y_k + y_k^2)], \quad (7)$$

który to wzór dla boków o długości 25—30 km (a więc jak w naszej triangulacji I rzędu) będzie praktycznie wystarczający.

Korzystając z tych długości zredukowanych do cięciw, obliczamy przybliżone współrzędne prostokątne płaskie $x_i^0, y_i^0, x_k^0, y_k^0$ itd. wszystkich szukanych punktów. W celu otrzymania współrzędnych prostokątnych płaskich najpierw obliczamy kąty na podstawie wzorów cotangensowych wyrażając cotangensy odpowiednich kątów w trójkącie przez boki trójkątów.

Ponieważ $\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$, więc stosując w trójkącie płaskim twierdzenie Carnota, mamy:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

czyli

$$\text{ctg } \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}} \quad (8)$$

$$\text{ctg } \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}} \quad (9)$$

$$\text{ctg } \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}.$$

Mając obliczone kąty obliczamy przybliżone współrzędne.

Ze współrzędnych przybliżonych obliczamy bardzo dokładnie długości przybliżone S^0_{ik} wszystkich mierzonych linii.

Równania błędów w tym przypadku będą:

$$v_{ik} = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial S_{ik}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial S_{ik}}{\partial y_k} dy_k + (S^0_{ik} - \bar{S}_{ik}). \quad (10)$$

Pochodne cząstkowe obliczamy bardzo łatwo z wzoru:

$$S_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$$

Widzimy, że będą to sinusy i cosinusy azymutów przybliżonych (albo, nie wprowadzając kątów, $\frac{\Delta x}{S_{ik}}$ i $\frac{\Delta y}{S_{ik}}$).

Po ułożeniu równań błędów przystępujemy do tworzenia równań normalnych. Rozwiązanie równań normalnych dostarczy nam poprawki: dx_i , dy_i , dx_k , dy_k ... itd., które należy dodać do współrzędnych przybliżonych, ażeby otrzymać współrzędne wyrównane. Przeprowadzamy również dalsze kontrole w celu sprawdzenia, czy dobrze obliczyliśmy te poprawki. Następnie możemy te współrzędne prostokątne płaskie przeliczyć na współrzędne geograficzne (w przypadku zastosowania odwzorowania Gaussa-Krügera bardzo korzystnymi do tego zadania są tablice opracowane przez prof. Stefana Hausbrandta).

Wyrównanie omawianych sieci na elipsoidzie metodą spostrzeżeń warunkowanych, jak już wspominaliśmy, zostało opisane w artykule mgr inż. P. Duliana pt. „Przykład wyrównania triangulacji opartej na pomiarze boków“ w Przeglądzie Geodezyjnym z r. 1951 nr 11, str. 333—347.

Jeśli mamy w sieci do określenia $(p - 2)$ punktów (zakładamy, że 2 punkty są znane), a pomierzono n linii geodezyjnych, to dla jednoznacznego określenia tych punktów wystarczy $2(p - 2)$ linii.

Przy n pomierzonych liniach geodezyjnych będziemy mieli $n - 2(p - 2)$ nadliczbowych pomiarów, a więc i tyleż warunków w sieci, gdyż każde spostrzeżenie nadliczbowe dostarcza nam jednego warunku.

Jako warunki wystąpią tu: warunki zamknięcia horyzontu na punktach centralnych, warunki zamknięcia horyzontu przy nawiązaniu do punktów stałych (o znanych współrzędnych), warunki azymutalne oraz warunki poligonowe. Jeśli w sieci mamy czworoboki z przekątnymi, to wystąpi również warunek następujący: suma dwóch kątów (po obu stronach przekątnej) równa się całkowitemu kątowi na jednym z punktów tego czworoboku. W tym przypadku musimy do warunków wprowadzić odpowiednie kąty i ich poprawki.

Dla obliczenia kątów w trójkącie na elipsoidzie z wielkości obserwowanych, gdy boki trójkątów są mniejsze niż 100 km, stosujemy twierdze-

nie Legendre'a, traktując ten trójkąt jako płaski o tych samych bokach. Wyliczamy kąty płaskie, a po obliczeniu ekscesu sferycznego tego trójkąta — kąty na elipsoidzie (możemy je nazwać kątami obserwowanymi), dodając do obliczonych kątów płaskich wartość $1/3$ ekscesu sferycznego.

Poprawkę kąta $da = v$ obliczamy z wzoru (podajemy za mgr inż. Dulanem)

$$v = A \cdot da + B \cdot db + C \cdot dc \quad (11)$$

gdzie da, db, dc są to poprawki boków trójkąta, natomiast

$$A = \frac{\sin \alpha}{4} \left(+ \frac{1}{S-a} + \frac{1}{S-b} + \frac{1}{S-c} - \frac{1}{S} \right)$$

$$B = \frac{\sin \alpha}{4} \left(- \frac{1}{S-a} - \frac{1}{S-b} + \frac{1}{S-c} - \frac{1}{S} \right) \quad (12)$$

$$C = \frac{\sin \alpha}{4} \left(- \frac{1}{S-a} + \frac{1}{S-b} - \frac{1}{S-c} - \frac{1}{S} \right),$$

zaś
$$S = \frac{a+b+c}{2}.$$

Dla trójkątów o bokach długich (znacznie przekraczających 100 km) do obliczenia kątów stosujemy wzór Bordy:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \frac{1}{3} \varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{S-b}{R} \sin \frac{S-c}{R}}{\sin \frac{S}{R} \sin \frac{S-a}{R}}}, \quad (13)$$

gdzie R oznacza średni promień kuli ziemskiej.

$$d \left(\alpha + \frac{1}{3} \varepsilon \right) = v = A' \cdot da + B' \cdot db + C' \cdot dc, \quad (14)$$

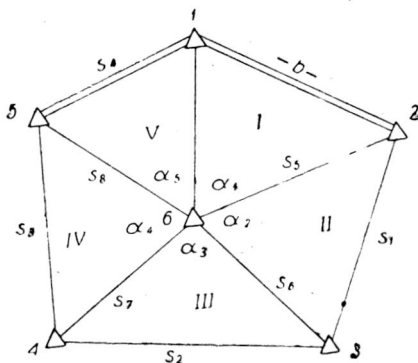
gdzie

$$A' = \frac{\sin \left(\alpha + \frac{1}{3} \varepsilon \right)}{4R} \left\{ + \operatorname{ctg} \frac{S-a}{R} + \operatorname{ctg} \frac{S-b}{R} + \operatorname{ctg} \frac{S-c}{R} - \operatorname{ctg} \frac{S}{R} \right\}$$

1) Patrz wyprowadzenie na str. 146-7.

$$B' = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{4R} \left\{ -\operatorname{ctg}\frac{S-a}{R} - \operatorname{ctg}\frac{S-b}{R} + \operatorname{ctg}\frac{S-c}{R} - \operatorname{ctg}\frac{S}{R} \right\} \quad (15)$$

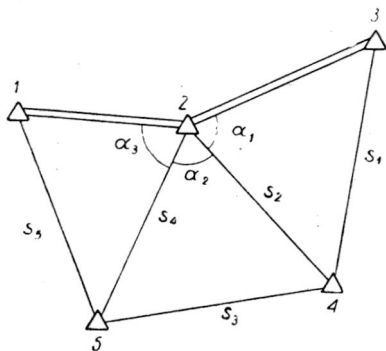
$$C' = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{4R} \left\{ -\operatorname{ctg}\frac{S-a}{R} + \operatorname{ctg}\frac{S-b}{R} - \operatorname{ctg}\frac{S-c}{R} - \operatorname{ctg}\frac{S}{R} \right\}.$$



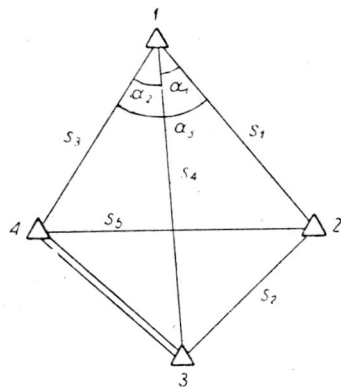
Rys. 1

W siatce promienistej (rys. 1) z pomierzonymi bokami, będziemy mieli jedno równanie warunkowe. Mamy pomierzonych 9 długości (zakładając, że punkt 1 i 2 mają dane współrzędne, a więc, że jest znana długość bazy), a do wyznaczenia są 4 punkty, dla których wystarczy 8 linii, jest więc jedna linia nadliczbowa, która dostarcza warunku:

$$\alpha_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \nu_1 + \alpha_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \nu_2 + \alpha_3 + \frac{1}{3}\varepsilon_3 + \nu_3 + \alpha_4 + \frac{1}{3}\varepsilon_4 + \nu_4 + \alpha_5 + \frac{1}{3}\varepsilon_5 + \nu_5 - 360^\circ = 0 \quad (16)$$



Rys. 2



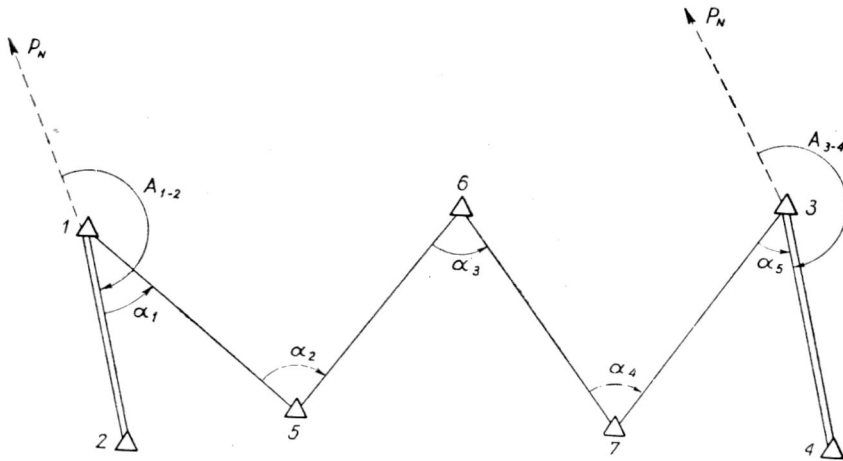
Rys. 3

Dla siatki podanej na rys. 2 mamy również do wyznaczenia tylko 2 punkty (4 i 5), a więc koniecznych pomiarów winno być 4. Wykonano 5 pomiarów, więc będzie jedno równanie warunkowe:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \varepsilon_1 + \alpha_2 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 + \alpha_3 + \frac{1}{3} \varepsilon_3 \right) + A_{2-3} - A_{2-1} = 0 \quad (17)$$

W czworoboku z przekątnymi (rys. 3) analogicznie będziemy mieli równanie warunkowe:

$$v_1 + v_2 - v_3 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \varepsilon_1 + \alpha_2 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 - \alpha_3 - \frac{1}{3} \varepsilon_3 \right) = 0 \quad (18)$$



Rys. 4

Równanie azymutalne dla przypadku jak na rysunku 4 będzie:

$$-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + \left\{ \left(-\alpha_1 - \frac{1}{3} \varepsilon_1 + \alpha_2 + \frac{1}{3} \varepsilon_2 - \alpha_3 - \frac{1}{3} \varepsilon_3 + \alpha_4 + \frac{1}{3} \varepsilon_4 - \alpha_5 - \frac{1}{3} \varepsilon_5 \right) + (\Delta\gamma_{1-5} + \Delta\gamma_{5-6} + \Delta\gamma_{6-7} + \Delta\gamma_{7-3}) + (\Delta\gamma_{1-2} - \Delta\gamma_{3-4}) \right\} = 0, \quad (19)$$

gdzie $\Delta\gamma_{i-k}$ oznacza różnicę zbieżności południków pomiędzy punktami i oraz k .

W przypadku jak na rysunku 5 otrzymamy dwa równania poligonowe (dla szerokości geograficznej i dla długości geograficznej).

Wzory różniczkowe dla linii geodezyjnej (z pominięciem wyrazów odnoszących się do zmian stałych elipsoidy odniesienia) są następujące:

$$d\varphi_2 = \frac{M_1}{M_2} \cos(\lambda_2 - \lambda_1) d\varphi_1 - \frac{1}{M_2} \cos A_{2-1} dS + \frac{m}{M_2} \sin A_{2-1} dA_{1-2}$$

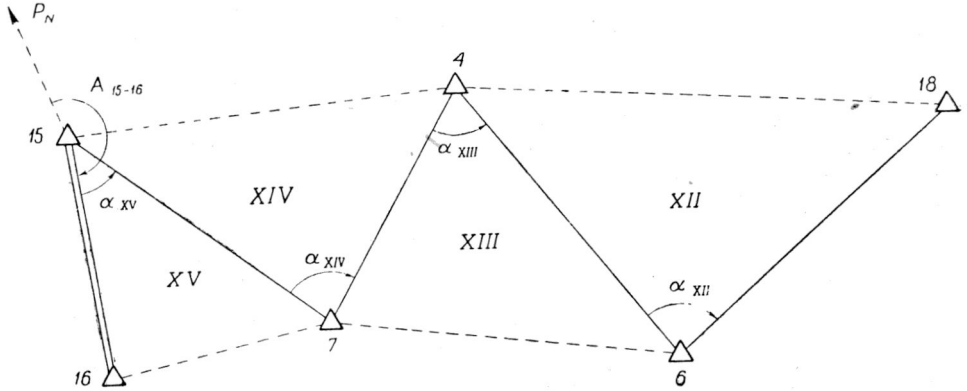
$$d\lambda_2 = d\lambda_1 + \frac{M_1}{N_2} \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\text{ctg } \varphi_2} d\varphi_1 - \frac{1}{N_2} \frac{\sin A_{2-1}}{\cos \varphi_2} dS - \frac{m}{N_2} \frac{\cos A_{2-1}}{\cos \varphi_2} dA_{1-2} \quad (20)$$

gdzie $m = S \left(1 - \frac{1}{6} \frac{S^2}{r^2} + \dots \right)$.

Przy przyjęciu $\varphi = 52^\circ$ i przy założeniu:

$$|dS \cos A| < 0,5 \text{ m, więc } |d\varphi_2| < 0,00162$$

oraz $|\lambda_2 - \lambda_1| < 4^\circ$, możemy śmiało pierwszy wyraz po prawej stronie pierwszego równania (20) zastąpić przez $d\varphi_1$ (błąd z tym uproszczeniem będzie mniejszy niż $0,00005$).



Rys. 5

Co do drugiego równania na $d\lambda$, to przy przyjęciu

$$|dS \cos A| < 0,5 \text{ m i } |\lambda_2 - \lambda_1| < 16'$$

drugi wyraz po prawej stronie drugiego równania (20) można pominąć (błąd z tego zaniedbania będzie mniejszy niż $0,00001$).

Przy długich bokach trójkątów, gdzie $(\lambda_2 - \lambda_1)$ między poszczególnymi bokami przekracza $16'$, ten wyraz należy uwzględnić.

Dalszymi uproszczeniami będzie przyjęcie $m = S$ i wzięcie azymutu średniego A zamiast A_{2-1} .

Przy tych założeniach wzór (20) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} d\varphi_2 &= d\varphi_1 + \frac{1}{M} \cos A dS - \frac{S}{M} \sin A dA \\ d\lambda_2 &= d\lambda_1 + \frac{1}{N \cos \varphi_2} \sin A dS + \frac{S}{N \cos \varphi_2} \cos A dA \end{aligned} \quad (21)$$

Wzory (21) możemy przedstawić następująco:

$$d\varphi_2 = d\varphi_1 + \left[\frac{1}{M} S \cos A \right] \frac{dS}{S} - \left[\frac{1}{N} S \sin A \sec \varphi \right] \frac{N}{M} \cos \varphi dA$$

$$d\lambda_2 = d\lambda_1 + \left[\frac{1}{N} S \sin A \sec \varphi \right] \frac{dS}{S} + \frac{1}{N} S \cos A \frac{M}{N} \frac{1}{\cos \varphi} dA$$
(22)

W pierwszym przybliżeniu mamy:

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{M} S \cos A$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{1}{N} S \sin A \sec \varphi$$
(23)

Jeśli to uwzględnimy, to otrzymamy ostatecznie:

$$d\varphi_2 = d\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{dS}{S} - (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{N}{M} \cos \varphi dA$$

$$d\lambda_2 = d\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{dS}{S} + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{M}{N} \frac{1}{\cos \varphi} dA$$
(24)

Zamiast dA możemy podstawić odpowiednie poprawki kątowe. Dla rysunku 5 będzie:

$$dA_{15,7} = -d\alpha_{XV}$$

$$dA_{7,4} = -d\alpha_{XV} + d\alpha_{XIV}$$

$$dA_{4,6} = -d\alpha_{XV} + d\alpha_{XIV} - d\alpha_{XIII}$$

$$dA_{6,18} = -d\alpha_{XV} + d\alpha_{XIV} - d\alpha_{XIII} + d\alpha_{XII},$$
(25)

Zaś poprawki kątowe da wyrazimy przez:

$$da = A \cdot da + B \cdot db + C \cdot dc.$$
(26)

Podstawiając w równania (2) zamiast dA wartości z równania (25) oraz uwzględniając równanie (26), otrzymamy odpowiednie wartości, w naszym przypadku dla: $d\varphi_7$, $d\varphi_4$, $d\varphi_6$, i $d\varphi_{18}$ oraz dla: $d\lambda_7$, $d\lambda_4$, $d\lambda_6$ i $d\lambda_{18}$.

Obliczając sukcesywnie $d\varphi_7$, dalej $d\varphi_4$, $d\varphi_6$ ostatecznie obliczymy $d\varphi_{18}$, które w naszym przypadku wyniesie:

$$\begin{aligned}
\varphi_{18} = & \left[\frac{\varphi_7 - \varphi_{15}}{S_{7 \cdot 15}} + \frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_{15}) \cos \varphi C_{XV} - \frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_7) \cos \varphi \cdot C_{XIV} \right] dS_{7 \cdot 15} + \\
& + \left[\frac{\varphi_4 - \varphi_7}{S_{4 \cdot 7}} + \frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_7) \cos \varphi B_{XIV} + \frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_4) \cos \varphi B_{XIII} \right] dS_{4 \cdot 7} + \\
& + \left[\frac{\varphi_6 - \varphi_4}{S_{6 \cdot 4}} + \frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_4) \cos \varphi C_{XIII} - \frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_6) \cos \varphi C_{XII} \right] dS_{4 \cdot 6} + \\
& + \left[\frac{\varphi_{18} - \varphi_6}{S_{6 \cdot 18}} - \frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_6) \cos \varphi B_{XII} \right] dS_{6 \cdot 18} + \\
& + \left[\frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_{15}) \cos \varphi \cdot A_{XV} \right] dS_{7 \cdot 16} - \\
& - \left[\frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_7) \cos \varphi \cdot A_{XIV} \right] dS_{4 \cdot 15} + \\
& + \left[\frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_4) \cos \varphi A_{XIII} \right] dS_{6 \cdot 7} - \\
& - \left[\frac{N}{M} (\lambda_{18} - \lambda_6) \cos \varphi A_{XII} \right] dS_{4 \cdot 8}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Równanie poligonowe przyjmie postać:

$$d\varphi_{18} + (\varphi'_{18} - \varphi_{18}) = 0 \tag{28}$$

gdzie φ_{18} jest szerokością geograficzną daną, zaś φ'_{18} jest szerokością geograficzną obliczoną z boków niewyrównanych, licząc od punktu 15 poprzez punkty 7, 4, 6 i 18.

Przyglądając się bliżej równaniu (27) możemy zauważyć pewną kolejność oraz symetrię współczynników, którą możemy we wszystkich podobnych przypadkach kontrolować, posługując się szkicem.

Analogicznie jak równania (27) i (28) dla szerokości, otrzymujemy równanie poligonowe dla długości geograficznej:

$$\begin{aligned}
d\lambda_{18} = & \left[\frac{\lambda_7 - \lambda_{15}}{S_{7 \cdot 15}} - \frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_{15}) \sec \varphi C_{XV} + \frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_7) \sec \varphi C_{XIV} \right] dS_{7 \cdot 15} + \\
& + \left[\frac{\lambda_4 - \lambda_7}{S_{4 \cdot 7}} + \frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_7) \sec \varphi B_{XIV} - \frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_4) \sec \varphi B_{XIII} \right] dS_{4 \cdot 7} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{\lambda_6 - \lambda_4}{S_{6 \cdot 4}} + \frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_4) \sec \varphi C_{XIII} + \frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_6) \sec \varphi C_{XII} \right] dS_{4 \cdot 6} + \\
 & + \left[\frac{\lambda_{18} - \lambda_6}{S_{6 \cdot 18}} + \frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_6) \sec \varphi B_{XII} \right] dS_{6 \cdot 18} - \\
 & - \left[\frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_{15}) \sec \varphi A_{XV} \right] dS_{7 \cdot 16} + \left[\frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_7) \sec \varphi A_{XIV} \right] dS_{4 \cdot 15} - \quad (29) \\
 & - \left[\frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_4) \sec \varphi A_{XIII} \right] dS_{6 \cdot 7} + \left[\frac{M}{N} (\varphi_{18} - \varphi_6) \sec \varphi A_{XII} \right] dS_{4 \cdot 18} + \lambda'_{18} - \lambda_{18} = 0.
 \end{aligned}$$

W przypadku wyrównywania sieci triangulacyjnej o bardzo długich bokach, kiedy w równaniu różniczkowym na λ nie będzie można pominąć pierwszego wyrazu prawej strony równania (20), wówczas do równania (29) należy wprowadzić jeszcze następujące wyrażenie:

$$+ F_7 d\varphi_7 + F_4 d\varphi_4 + F_6 d\varphi_6, \quad (30)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 F_7 &= \frac{M_7 \sin(\lambda_4 - \lambda_7)}{N_4 \operatorname{ctg} \varphi_4}, \\
 F_4 &= \frac{M_4 \sin(\lambda_6 - \lambda_4)}{N_6 \operatorname{ctg} \varphi_6}, \\
 F_6 &= \frac{M_6 \sin(\lambda_{18} - \lambda_6)}{N_{18} \operatorname{ctg} \varphi_{18}}.
 \end{aligned} \quad (31)$$

Po ułożeniu równań warunkowych, tworzymy równania korelat, po rozwiązaniu których otrzymamy wartości poszczególnych korelat $k_1, k_2, k_3 \dots$ Następnie obliczamy poprawki do boków z wzoru:

$$v_i = dS_i = \frac{1}{P_i} (a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \dots) \quad (32)$$

Mając obliczone poprawki dS do boków możemy następnie obliczyć poprawki do kątów da , a mianowicie:

$$d\alpha = A \cdot da + B \cdot db + C \cdot dc + \dots \quad (33)$$

Przy pomocy wyrównanych boków i kątów obliczamy współrzędne geograficzne punktów szukanych.

Oczywistym jest, że przeprowadzamy do tego wszelkie kontrole zgodnie z rachunkiem wyrównawczym. Jako niezależne kontrole mogą również służyć:

- a) obliczenie współrzędnych różnymi drogami,
 b) obliczenie współrzędnych geograficznych punktów znanych, wychodząc z punktów o znanych współrzędnych i przechodząc przez punkty szukane.

Jak widzimy, metoda ta jest bardzo uciążliwa, szczególnie ułożenie dwu równań poligonowych nastęrcza dużo pracy przygotowawczo-rachunkowej.

Przy rozwiązywaniu tego zadania na płaszczyźnie metodą spostrzeżeń warunkowanych [do wyznaczenia ($p - 2$) punktów, 2 punkty są znane, pomierzonych n linii geodezyjnych] musimy zastosować wiernokątne odwzorowanie elipsoidy na płaszczyźnie (np. odwzorowanie Gaussa — Krügera).

Jeśli znane punkty są podane za pomocą współrzędnych geograficznych, należy przeliczyć je na współrzędne prostokątne płaskie przyjętego odwzorowania.

Nie będziemy również operowali, jako wielkościami spostrzeganyimi, długościami linii geodezyjnych na elipsoidzie, ani też długościami ich obrazów w płaszczyźnie (które będą jakimiś krzywymi, za wyjątkiem południka głównego), lecz cięciwami linii geodezyjnych.

Musimy również wprowadzić redukcje długościowe ze względu na odwzorowanie oraz znać przybliżone współrzędne prostokątne płaskie (z dokładnością do kilku metrów) wszystkich punktów.

Długość cięciwy obrazu linii geodezyjnych obliczamy podobnie jak w przypadku wyrównania na płaszczyźnie metodą spostrzeżeń pośrednich, stosując wzór (6) bądź (7).

W równaniach warunkowych będą zachodzić pewne kąty, które wyliczymy przy pomocy długości otrzymanych formułami (6) bądź (7), przez zastosowanie jednego z twierdzeń trygonometrii płaskiej (np. twierdzenia Carnota). Poprawki dla kątów $da = v$ wyliczamy podobnie jak w poprzedniej metodzie stosując formuły (11) i (12).

Na tym miejscu należy wyjaśnić, skąd się wzięły formuły (11) i (12).

Stosując wzory połówkowe trygonometrii płaskiej na obliczenie kąta:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}, \text{ gdzie } S = \frac{a+b+c}{2} \quad (34)$$

i logarytmując prawą i lewą stronę, mamy:

$$\operatorname{lg} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{lg} (S-b) + \operatorname{lg} (S-c) - \operatorname{lg} (S-a) - \operatorname{lg} S \right\},$$

a różniczkując obie strony: lewą względem α , a prawą względem a, b i c , aby otrzymać zależność między poprawkami do boków a poprawką do kąta, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} d\alpha = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{S-a} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{S-b} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{S-c} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{2} \right\} da + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{S-a} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{S-b} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{S-c} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{2} \right\} db + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{S-a} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{S-b} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{S-c} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{2} \right\} dc. \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{dS}{da} = \frac{1}{2}$, przeto $\frac{d(S-a)}{da} = -\frac{1}{2}$ itd., a więc po uporządkowaniu mamy:

$$\begin{aligned} d\alpha = \frac{\sin \alpha}{4} \left\{ +\frac{1}{S-a} + \frac{1}{S-b} + \frac{1}{S-c} - \frac{1}{S} \right\} da + \frac{\sin \alpha}{4} \left\{ -\frac{1}{S-a} - \frac{1}{S-b} - \frac{1}{S-c} - \right. \\ \left. - \frac{1}{S} \right\} db + \frac{\sin \alpha}{4} \left\{ -\frac{1}{S-a} + \frac{1}{S-b} - \frac{1}{S-c} \right\} dc. \end{aligned} \quad (35)$$

Wzór (35) jest identyczny z wzorem (11) po uwzględnieniu skrótów przyjętych we wzorze (12).

Mając poprzednio omówioną metodę wyrównania spostrzeżeń z warunkowanych na elipsoidzie, nie będziemy szczegółowo omawiali poszczególnych warunków, gdyż będą one podobne do przedstawionych dla elipsoidy, z tym że w miejscu powierzchni elipsoidalnej wejdzie płaszczyzna, a więc w miejsce φ i λ wejdą współrzędne prostokątne płaskie x i y . Wówczas wszystkie wzory znacznie się uproszczą.

Tok obliczenia jest następujący:

Z długości pomierzonych i zredukowanych do cięciw na płaszczyznę obliczamy kąty α , potrzebne do ułożenia równań warunkowych. Poprawki tych kątów wyrażamy przez poprawki boków, układamy równania warunkowe, z których tworzymy równania korelat i wyliczamy poszczególne korelaty. Następnie obliczamy poprawki do boków oraz na ich podstawie — poprawki do kątów. Przy pomocy wyrównanych boków obliczamy współrzędne prostokątne płaskie (x, y) szukanych punktów. Te współrzędne prostokątne (x, y) poszczególnych punktów możemy przy pomocy znanych wzorów przeliczyć (dla odpowiedniego odwzorowania) na współrzędne geograficzne.

W sieciach triangulacji radarowej, gdzie boki są duże i praktycznie wahają się od 100—500 km, zazwyczaj będziemy mieli czworoboki geode-

zyjne z przekątniami (nie zaś klasyczną sieć trójkątów przylegających). Dokładność pomiaru długości boków w metodzie radarowej prawie jest niezależna od długości boków. Obecna technika radarowa zezwala na pomiar długości (system SHORAN, czyli tzw. triangulacja shoranowa), z kilkukrotnego nalatywania samolotu poprzecznie do mierzonej długości, z dokładnością ok. ± 3 m do ± 4 m. Ażeby więc mieć średni błąd względny pomiaru boku rzędu $\frac{1}{60\,000} - \frac{1}{100\,000}$ należy używać długości boków ok. 180—400 km (są dane, że najnowsze pomiary shoranowe przekroczyły podaną przez nas dokładność).

W związku ze stwierdzeniem, że promień elektromagnetyczny nie biegnie wzdłuż linii geodezyjnej, wystarczy obliczyć długość rzutu promienia drogi na powierzchnię elipsoidy odniesienia jakąś najprostszą przybliżoną metodą, np. metodą cięciwa — łuk, wiedząc, że przez to popełnimy dla linii o długości 600 km błąd mniejszy niż 1 m. To upoważnia nas do przyjęcia, że zredukowana długość może być przyjęta jako długość linii geodezyjnej, gdyż błąd przez to przyjęcie popełniony jest kilkakrotnie mniejszy od dokładności pomiaru linii (przy obecnej technice radarowej).

Sieć triangulacji radarowej możemy wyrównać przy pomocy jednej z podanych czterech metod.

Prócz podanego warunku dla czworoboku geodezyjnego można jeszcze ułożyć i inne warunki np. dla czworoboku żądać, żeby sumy powierzchni dwóch trójkątów przylegających do siebie były równe, a mianowicie:

$$P_I + P_{II} - (P_{III} + P_{IV}) = 0. \quad (36)$$

Wyrażając powierzchnie trójkątów P przez boki trójkątów, a mianowicie jako równe

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

i zakładając dla każdego boku poprawkę da, db, dc itd., możemy ułożyć odpowiedni warunek (dla czworoboku płaskiego).

Można jeszcze podać inny warunek dla czworoboku geodezyjnego, używając rachunku maczyrowego. Warunek ten sprowadzi się do:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (AB)^2 & (AC)^2 & (AD)^2 \\ 1 & (BA)^2 & 0 & (BC)^2 & (BD)^2 \\ 1 & (CA)^2 & (CB)^2 & 0 & (CD)^2 \\ 1 & (DA)^2 & (DB)^2 & (DC)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

gdzie $AB = BA$ itd. oznaczają boki czworoboku geodezyjnego płaskiego o wierzchołkach A, B, C i D .

Widzimy, że z powodu niedoskonałości pomiarów Δ nie będzie równe zeru, lecz dostarczy pewnej odchyłki $\omega = \Delta$. Nasz warunek będzie się przedstawiał w formie:

$$\sum \frac{\partial \Delta}{\partial S} dS = -\Delta, \tag{38}$$

gdzie S oznacza bok czworoboku, zaś dS — poprawkę do boku.

Sumowanie należy rozciągnąć poprzez wszystkie linie mierzone. Jeśli będziemy rozważali czworobok geodezyjny na kuli o promieniu równym średniemu promieniowi kuli ziemskiej, wtedy warunek (37) przejdzie na:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\left(\frac{BA}{R}\right) & \cos\left(\frac{AC}{R}\right) & \cos\left(\frac{AD}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{BA}{R}\right) & 1 & \cos\left(\frac{BC}{R}\right) & \cos\left(\frac{BD}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{CA}{R}\right) & \cos\left(\frac{CB}{R}\right) & 1 & \cos\left(\frac{CD}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{DA}{R}\right) & \cos\left(\frac{DB}{R}\right) & \cos\left(\frac{DC}{R}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

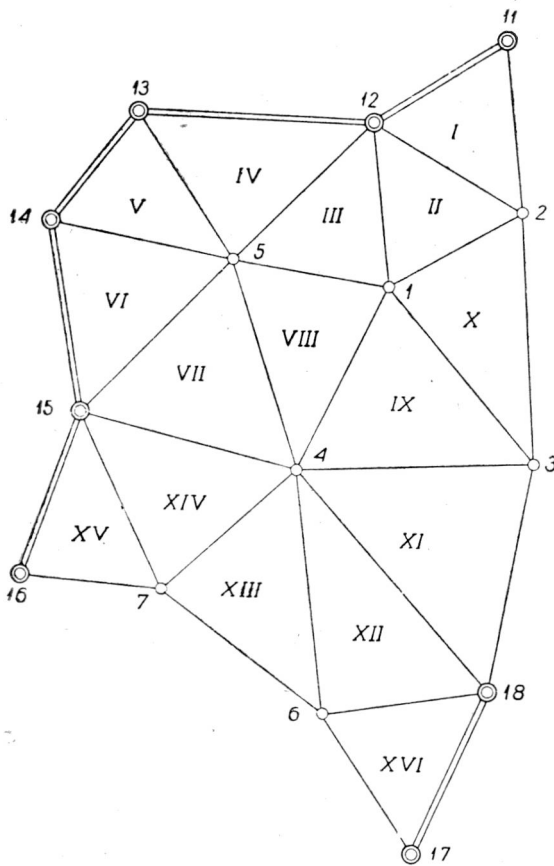
a warunek (38) jest podobny.

Praktycznie nie będziemy jednak rozwiązywali pojedynczych czworoboków geodezyjnych, lecz całą sieć. Dlatego wygodniej i łatwiej będzie posługiwać się czterema metodami podanymi poprzednio i to przeważnie metodą spostrzeżeń pośrednich, jako ekonomiczniejszą i wprost dostarczającą współrzędnych wyrównanych.

Do wyrównania triangulacji poprzez morza (łączenie triangulacji dwu kontynentów np. połączenie Danii z Norwegią, Norwegii z Anglią itd), wykonywanej przy pomocy flar (lampionów) spadochronowych, będziemy używać metod klasycznych znanych z rachunku wyrównawczego.

W triangulacji tej używamy nawigacji samolotu do zrzucenia flar spadochronowych na określone z góry pozycje, w połączeniu z synchronizowanymi transmisjami radiowymi, umożliwiając przez to zrobienie jednoczesnych obserwacji teodolitowych (z rejestracją fotograficzną) na flary z pewnej liczby stacji (punktów triangulacyjnych) na jednym i drugim kontynencie.

W najbliższej przyszłości będziemy musieli wyrównywać sieci triangulacyjne kombinowane, gdzie część sieci będzie pomierzona metodą klasyczną, a część np. przy pomocy celowania równoczesnego na flary spadochronowe.



Rys. 6

Wyrównanie takiej kombinowanej sieci triangulacyjnej nie przedstawia specjalnych trudności, gdy zastosujemy metody klasyczne i metody tu opisane. Jedynie kwestia ogólnego ustalenia wzajemnego wag wymaga przed przystąpieniem do wyrównania odpowiedniego przedyskutowania.

Jako przykład wyrównania triangulacji liniowej podamy przykład cytowany przez mgra inż. P. Duliana w Przeglądzie Geodezyjnym z r. 1951 nr 11, str. 333 i dalsze (rys. 6).

W sieci tej dane są współrzędne geograficzne 8 punktów (nowych mamy 7), a mianowicie:

11	52°06'06", 9206	22°15'49", 4209
12	52 01 10 , 2787	21 56 44 , 7659
13	52 03 06 , 0332	21 25 16 , 8276
14	51 53 36 , 9801	21 10 52 , 2587
15	51 37 20 , 5337	21 13 21 , 8194
16	51 52 26 , 3025	21 03 34 , 2866
17	50 56 00 , 8965	21 58 18 , 1573
18	51 10 16 , 2457	22 09 11 , 7919

Nowymi punktami są: 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.

Pomierzone długości boków (które nieco zmieniliśmy w stosunku do podanych w artykule mgra inż. P. Duliana) wynoszą:

Bok	Długość	Bok	Długość
1—2	25 682,100 m	4—7	30 140,900 m
1—3	38 741,000	4—15	37 087,100
1—4	34 310,900	4—18	48 170,900
1—5	25 231,100	5—12	32 226,100
1—12	26 242,900	5—13	28 412,900
2—3	42 399,100	5—14	30 108,100
2—11	28 399,900	5—15	34 406,900
2—12	28 329,100	6—7	36 051,100
3—14	38 881,900	6—17	27 241,900
3—18	37 755,100	6—18	26 520,100
4—5	35 524,900	7—15	31 972,900
4—6	40 991,100	7—16	22 356,000

Najpierw rozpatrzmy wyrównanie sieci przy pomocy spostrzeżeń pośrednich na elipsoidzie.

A. Wyrównanie sieci triangulacyjnej metodą spostrzeżeń pośrednich na elipsoidzie

1. Wykaz przybliżonych współrzędnych geograficznych, otrzymanych z przeniesienia współrzędnych metodą Clarke'a

Punkt	φ	λ
1	51° 47'01", 9923	21° 57'47", 9938
2	51° 52'51", 9942	22° 17'30", 0031
3	51° 29'59", 9825	22° 17'15", 0351
4	51° 30'44", 9808	21° 43'39", 9955
5	51° 49'19", 9953	21° 36'10", 0088
6	51° 08'42", 9830	21° 46'35", 0083
7	51° 21'06", 9968	21° 22'42", 9938

2. Wykaz przybliżonych długości boków, otrzymanych z zadania odwrotnego (metodą średniej szerokości)

Bok	Długość pomierzona	Długość przybliżona
1—2	25 082 100	25 082 645
1—3	38 741 000	38 741 662
1—4	34 310 900	34 311 757
1—5	25 231 100	25 230 448
1—12	26 242 900	26 242 901
2—3	42 399 100	42 399 464
2—11	28 399 900	28 399 962
2—12	28 329 100	28 329 595
3—4	38 881 900	38 882 873
3—18	37 755 100	37 755 106
4—5	35 524 900	35 524 918
4—6	40 991 100	40 990 672

Bok	Długość pomierzona	Długość przybliżona
4—7	30 140 900	30 140 893
4—15	37 087 100	37 087 102
4—18	48 170 900	48 171 050
5—12	32 226 100	32 225 882
5—13	28 412 900	28 413 581
5—14	30 108 100	30 108 695
5—15	34 406 900	34 406 864
6—7	36 051 100	36 051 869
6—17	27 241 900	27 241 857
6—18	26 520 100	26 520 109
7—15	31 972 900	31 972 904
7—16	22 356 000	22 355 825

3. Przykład obliczenia współczynników równania błędów i ułożenia równania błędów między punktami 1 i 2

$$v_{ik} = -\frac{M_i}{a} \cos \alpha_{ik} d\varphi_i - \frac{N_i}{a} \cos \varphi_i \sin \alpha_{ik} d\lambda_i - \frac{M_k}{a} \cos \alpha_{ki} d\varphi_k + \left. \begin{array}{l} \text{wzór} \\ \text{ogólny} \\ \text{na} \\ \text{równanie} \\ \text{błędów} \end{array} \right\} + \frac{N_k}{a} \cos \varphi_k \sin \alpha_{ki} d\lambda_k + \frac{(S^0_{ik} - S_{ik})}{a}$$

$i - k$	1 - 2
lg M_i	6,80443
lg $\cos \alpha_{ik}$	9,65674
clg a	3,19536
	9,65653
	0,43304
lg N_i	6,80555
lg $\cos \varphi_i$	9,79143
lg $\sin \alpha_{ik}$	9,95486
clg a	3,19536
	9,74720
	0,55873
lg M_k	6,80444
lg $\cos \varphi_{ki}$	9,65265 n
clg a	3,19536
	9,65245 n
	-0,42899

Wyrazy 2 i 4 równania błędów są sobie równe co do bezwzględnej wartości.

$$v_{1,2} = -0,43304 d\varphi_1 - 0,55873 d\lambda_1 + 0,42899 d\varphi_2 + 0,55873 d\lambda_2 + 0,85458 \text{ o wadze } 1,25$$

Analogicznie układamy równania błędów dla $v_{1,3}$ $v_{1,4}$ $v_{1,5}$ itd.

4. Zestawienie równań błędów

Z równań błędów układamy równania normalne, a po ich rozwiązaniu wyliczamy poprawki współrzędnych $d\varphi$ i $d\lambda$, o które poprawiamy przybliżone współrzędne geograficzne, by otrzymać wyrównane współrzędne.

Dalszy tok obliczeń nie wymaga wyjaśnień, więc go pominiemy.

Zestawienie równań błędów w tabeli

	$d\varphi_1$	$d\lambda_1$	$d\varphi_2$	$d\lambda_2$	$d\varphi_3$	$d\lambda_3$	$d\varphi_4$	$d\lambda_4$	$d\varphi_5$	$d\lambda_5$	$d\varphi_6$	$d\lambda_6$	$d\varphi_7$	$d\lambda_7$	l	p
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	m	n	o	p	r	(waga)
1-2	-0,43304	-0,55873	+0,42899	+0,55873											+0,85458	1,250
1-3	-0,81352	-0,36017			-0,81606	+0,36017									+1,03804	0,833
1-4	+0,87874	+0,29541					-0,88022	-0,29541							+1,34381	1,000
1-5	-0,17138	+0,61074							+0,16651	-0,61074					-1,02236	1,250
1-12	-0,99846	+0,02848													+0,00157	1,250
2-3			+0,99952	+0,00421	-0,99945	-0,00421									+0,57076	0,769
2-11			-0,99726	+0,04175											+0,09722	1,111
2-12			-0,54531	+0,51842											+0,77618	1,250
3-4					-0,03956	+0,62332	+0,03192	-0,62332							+1,52570	0,833
3-18					+0,96888	+0,15510									+0,00941	0,909
4-5							-0,96962	+0,15128	+0,96924	-0,15128					+0,02822	0,909
4-6							+0,99602	-0,05175			-0,99600	+0,05175			-0,67112	0,833
4-7							+0,59052	+0,50323					-0,59414	-0,50323	-0,01098	1,111
4-15							-0,33268	+0,58807							+0,00314	0,909
4-18							+0,78600	-0,38522							+0,23520	0,714
5-12									-0,68253	-0,45250					-0,34183	1,000
5-13									-0,89854	+0,27129					+1,06783	1,111
5-14									-0,26643	+0,59699					+0,93298	1,111
5-15									+0,64386	+0,47376					-0,05645	1,000
6-7											-0,63940	+0,48315	+0,63526	-0,48315	+1,20582	0,909
6-17											+0,86322	-0,31681			-0,06742	1,250
6-18											-0,11114	-0,62474			+0,01411	1,250
7-15													-0,94076	+0,21128	+0,00627	1,000
7-16													-0,11172	+0,62190	-0,27441	1,429

B. Wyrównanie sieci triangulacyjnej metodą spostrzeżeń pośrednich na płaszczyźnie

Metoda ta (przy przyjęciu np. odwzorowania wiernokątnego Gaussa-Krügera) nie wymaga objaśnień na przykładzie liczbowym.

C. Wyrównanie metodą zawarunkowaną na elipsoidzie

Metoda podana przez mgr inż. P. Duliana w cytowanym już Przeglądzie Geodezyjnym.

D. Wyrównanie metodą zawarunkowaną na płaszczyźnie

Rozwiązanie tego zadania składa się z 12 czynności. Są nimi:

1. Przeliczenie współrzędnych geograficznych punktów danych na współrzędne prostokątne płaskie (w odwzorowaniu Gaussa-Krügera)

Punkt	x	y
11	5778 551,97	86516,39
12	5765 344,92	64916,57
13	576 583,69	28899,92
14	5750 929,42	12471,24
15	5720 763,12	15422,97
16	5693 107,66	4144,28
17	5644 567,30	68300,12
18	5671 179,44	80647,98

2. Obliczenie przybliżonych współrzędnych prostokątnych y , punktów nowych dla przeprowadzenia redukcji długości boków z elipsoidy na płaszczyznę

Punkt	y (km)
1	66,470
2	88,930
3	89,395
4	50,516
5	41,556
6	54,324
7	26,373

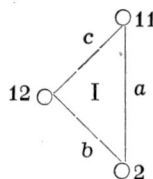
3. Redukcja długości boków danych oraz kontrola przez obliczenie ich ze współrzędnych płaskich

Bok	Zredukowany	Ze współrzędnych
11—12	25 317,542	25 317,544
12—13	36 161,976	36 161,979
13—14	24 115,857	24 115,853
14—15	30 310,376	30 310,379
15—16	29 866,916	29 866,908
17—18	29 337,258	29 337,271

4. Obliczenie zredukowanych długości boków

Bok	Długość	Bok	Długość
1—2	25 083,971	4—7	30 141,465
1—3	38,743,908	4—15	37 087,641
1—4	34 312,349	4—18	48 173,487
1—5	25 232,019	5—12	32 227,239
1—12	26 244,290	5—13	28 413,337
2—3	42 403,236	5—14	30 108,396
2—11	28 342,576	5—15	34 407,267
2—12	28 331,174	6—7	36 051,849
3—4	38 884,295	6—17	27 243,162
3—18	37 758,452	6—18	26 521,601
4—5	35 525,827	7—15	31 973,075
4—6	40 992,483	7—16	22 356,075

5. Obliczenie współczynników równań poprawek kąta oraz kątów przybliżonych

Numer równania warunkowego	1
Wierzchołek kąta	12
Nr trójkąta	I
Schemat	
a'	28 342,576
Δa	+0,072
a	28 342,648
b'	28 331,174
Δb	-0,009
b	28 331,165
c'	25 317,544
Δc	0,000
c	25 317,544
$2S$	81 991,294
S	40 995,647
$S-a'$	12 653,071
$S-b'$	12 664,473
$S-c'$	15 678,103
$\log S$	4,612 7377.6
$\log (S-a')$	4,102 1959.4
$\log (S-b')$	4,102 5871.2
$\log (S-c')$	4,195 2935.5
$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}$	9,791 4734.85
$\frac{\alpha'}{2}$	31°44'40,869
α'	63°29'21,738
$\Delta \alpha$	+ 0,705
α	22,443

log F	8,506 4071.85
F	3209 27693
2b'c'	1,434 551.488
F/2 · b'c'	0,223 7129
1 : S	0,00002 43928
1 : (S-a')	7 90322
1 : (S-b')	7 89610
1 : (S-c')	6 37832
Σ A	+0,00019 73836
Σ B	— 11 86028
Σ C	— 8 82472
A	+0,00004 41573
B	— 2 65330
C	— 1 97420

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{(S-b')(S-c')}{S \cdot (S-a')}}.$$

$$F = \sqrt{S(S-a')(S-b')(S-c')}$$

$$A = \frac{F}{2b'c'} \left(-\frac{1}{S} + \frac{1}{S-a'} + \frac{1}{S-b'} + \frac{1}{S-c'} \right) = \frac{F}{2b'c'} \cdot \Sigma A$$

$$B = \frac{F}{2b'c'} \left(-\frac{1}{S} - \frac{1}{S-a'} - \frac{1}{S-b'} + \frac{1}{S-c'} \right) = \frac{F}{2b'c'} \cdot \Sigma B$$

$$C = \frac{F}{2b'c'} \left(-\frac{1}{S} - \frac{1}{S-a'} + \frac{1}{S-b'} - \frac{1}{S-c'} \right) = \frac{F}{2b'c'} \cdot \Sigma C$$

$$\Delta\alpha = A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c = \Delta\alpha''$$

6. Ułożenie równań warunkowych

Równania te ogólnie będą miały dwie formy:

a) Równanie warunkowe dla stałego kąta

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \dots + \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 + \dots - (A_{A-B} - A_{C-B}) = 0$$

b) Dwa równania poligonalne dla współrzędnych x i y :

$$\sum_{i=1}^n \cos \alpha_{in} \cdot \Delta S_{i-k} - [\Delta\alpha_1 \cdot (y_n - y_1) + \Delta\alpha_2 \cdot (y_n - y_2) + \dots + \Delta\alpha_n \cdot (y_n - y_n)] - f_x = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{in} \cdot \Delta S_{i-n} + [\Delta\alpha_1 \cdot (x_n - x_1) + \Delta\alpha_2 \cdot (x_n - x_2) + \dots + \Delta\alpha_n \cdot (x_n - x_n)] - f_y = 0$$

gdzie:

$$f_x = \Delta x^* - [\Delta x], \quad \Delta x^* = x_n - x_1, \quad [\Delta x] = [S'_{in} \cdot \cos \alpha'_{ik}],$$

$$f_y = \Delta y^* - [\Delta y], \quad \Delta y^* = y_n - y_1, \quad [\Delta y] = [S'_{in} \cdot \sin \alpha'_{ik}].$$

Korzystając ze wzoru: $\Delta\alpha = A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c$ otrzymujemy ostateczną postać równania warunkowego.

Zestawienie równań warunkowych

ΔS	a 1	b 2	c 3	d 4	e 5	f 6	g 7	h 8	i 9	j 10	S	$\frac{1}{p}$	ΔS	
1.2	+1,2422				-1,0933						+0,1489	0,8	+0,003	
1.3					-1,3051		+1,1351				-0,1700	1,2	-0,004	
1.4					-1,1627	+1,0453	-0,8410				-0,9584	1,0	+0,149	
1.5	+1,1709				-1,1915	-0,5530	+1,0762				+0,5026	0,8	-0,064	
1.12	-0,7398				-1,4815	+1,0149					-1,2064	0,8	+0,109	
2.3					+1,1071						+1,1071	1,3	-0,094	
2.11	+1,3247										+1,3247	0,9	+0,072	
2.12	-1,4454				+1,1692						-0,2762	0,8	-0,009	
3.4					+0,8137		-0,8850				-0,0715	1,2	-0,013	
3.18							+0,9207				+0,9207	1,1	+0,073	
4.5				+0,9698	+1,0823	-1,2384	-0,9129				-0,0992	1,1	+0,114	
4.6							-0,8638	-0,4565	-0,7436	-0,9276	-2,9915	1,2	-0,068	
4.7				+0,9798			-0,6401	-0,5031	+1,5793	+0,9320	+2,3479	0,9	+0,142	
4.15				-1,0880		+0,8437	-1,3185	+1,4066	-2,1812	-0,7855	-3,1029	1,1	+0,090	
4.18							-1,0146	+1,5515	-1,1669	+0,1431	-0,4869	1,4	+0,396	
5.12	-0,9965	+1,1046			+1,2463	-1,3363					+0,0180	1,0	-0,120	
5.13	+0,9737	-1,2566	+1,3290			-0,8719					+0,1744	0,9	+0,070	
5.14		+1,4083	-1,5627	+1,0572		-0,7525					+0,1505	0,9	-0,041	
5.15			+1,2081	-1,0225		-0,9374	+1,0958				+0,5440	1,0	-0,173	
6.7							+1,1970	-1,1970	+1,0305	+1,2856	+2,3161	1,1	+0,316	
6.17								-1,4432			-1,4432	0,8	+0,132	
6.18								+0,8542	-0,2317	+0,7353	+0,9173	+2,2751	0,8	+0,107
7.15				-0,7430			+1,2126	-0,3458	-0,5714	+0,0743	-0,3733	1,0	+0,055	
7.16				+1,0453				-1,2195	+2,2726	+1,7276	+3,8260	0,7	+0,233	
	-0,14384	+0,27765	+0,05251	-0,48738	+0,19974	-0,53014	+0,43083	+0,19463	-0,51800	-1,09200				
K	+0,06052	+0,20294	+0,38512	+0,45065	+0,06530	+0,27343	+0,07214	-0,11401	-0,41028	+0,37898				

7. Równania normalne

Nr równa- nia	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	ω	S
1	+7,86643	-2,20215	+1,16488		- 3,91968	-0,55118	+ 1,00810				-0,14384	+ 3,22256
2		+4,42626	-3,48370	+1,33997	+ 1,37666	-1,44364					+0,27765	+ 0,29105
3			+5,24696	-2,72216		-1,11729	+ 1,32384				+0,05251	+ 0,46504
4				+6,56901	+ 1,15458	-2,08815	- 1,98175	- 2,76245	+ 6,09055	+2,97085	-0,48738	+ 8,08307
5					+13,56695	-5,03102	- 3,77668				+0,19974	+ 3,57055
6						+8,48956	- 2,36248	+ 1,30542	- 2,02431	-0,72900	-0,53014	- 6,08223
7							+15,41766	- 5,63459	+ 5,84843	+3,77028	+0,43083	+14,04364
8								+10,47017	- 9,45282	-4,18164	+0,19463	-10,06128
9									+15,59047	+8,50605	-0,51800	+24,04037
10										+7,10760	-2,09200	+16,35214
S	+3,36640	+0,01540	+0,41253	+8,57045	+3,37081	-5,55209	+13,61281	-10,25591	+24,55837	+17,44414	-1,61600	+53,92491

8. Obliczenie korelat (algorytmem Gaussa)

Wartości korelat podane w tabelce (punkt 7)

Kontrola: $[p v v] = +0.47612$; $[\omega \cdot k] = -0.47612$.

9. Obliczenie poprawek boków (patrz tabelka punkt 7)

$$\text{Ogólnie: } \Delta S_i = \frac{1}{p_i} (a_i \cdot k_1 + b_i \cdot k_2 + \dots + j_i \cdot k_{10}).$$

10. Obliczenie poprawek kątów (patrz tabelka punkt 5)

Korzystamy ze wzoru: $\Delta \alpha = A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c$.

11. Obliczenie współrzędnych płaskich punktów nowych

Współrzędne otrzymujemy przez wcięcie wprzód kątami poprawionymi.

Punkt	Współrzędne płaskie	
	<i>x</i>	<i>y</i>
1	5 739 146,473	66 468,934
2	5 750 312,338	88 930,665
3	5 707 911,545	89 392,025
4	5 708 767,399	50 517,162
5	5 743 144,505	41 555,738
6	5 667 962,081	51 323,388
7	5 690 723,548	26 373,100

12. Przeliczenie współrzędnych płaskich na współrzędne geograficzne

Wnioski

Z podanych przykładów możemy wysnuć następujące wnioski:

- a) Najkorzystniejszą metodą wyrównania dla sieci rozciągających się na dużym obszarze jest metoda spostrzeżeń pośrednich na elipsoidzie, dostarczająca wprost współrzędnych geograficznych szukanych punktów oraz błędów średnich tych współrzędnych.
- b) Mniej ekonomiczną metodą dla sieci rozciągniętych na dużych obszarach jest metoda spostrzeżeń zawarunkowanych na elipsoidzie, wymagająca dużo rachunków pomocniczych, mimo że równań korelat będzie posiadała zazwyczaj mniej niż mamy równań normalnych przy metodzie spostrzeżeń pośrednich, gdyż przy obecnej technice rozwiązywań równań normalnych ilość ich nie odgrywa takiej roli, jak w latach poprzednich. Poza tym w tej metodzie nie otrzymamy po wyrównaniu jeszcze współrzędnych geograficznych, które musimy obliczać dodatkowymi rachunkami, oraz nie mamy bezpośredniego obrazu dokładności wyrównanej sieci.

- c) Dla mniejszych sieci, a szczególnie sieci wypełniających, nadaje się najlepiej metoda spostrzeżeń pośrednich na płaszczyźnie przy zastosowaniu wiernokątneho odwzorowania (np. Gaussa - Krügera).
- d) Mniej ekonomiczną jest metoda spostrzeżeń zawarunkowanych na płaszczyźnie przy zastosowaniu wiernokątneho odwzorowania (np. Gaussa-Krügera) z przyczyn podanych pod punktem 2).

РЕЗЮМЕ

В этой статье рассмотрено уравнивание линейной триангуляционной сети т. е. такой, в которой измерено длины всех сторон четырьмя методами, а именно:

1. уравнивание по методу посредственных наблюдений на эллипсоиде,
2. уравнивание по методу посредственных наблюдений на плоскости,
3. уравнивание по методу условных наблюдений на эллипсоиде,
4. уравнивание по методу условных наблюдений на плоскости, частично подтвержденное числовым примером.

На основании этого автор сделал следующие выводы:

1. наиболее экономным методом уравнивания сети, охватывающей большие пространства, является метод посредственных наблюдений на эллипсоиде; метод условных наблюдений на эллипсоиде менее производителен.
2. для сетей триангуляции, охватывающих менее обширные пространства, и для заполняющих сетей триангуляции уравнивание по методу посредственных наблюдений на плоскости более эффективно чем по методу условных наблюдений на плоскости.

RÉSUMÉ

Cet article nous expose par quatre méthodes différentes la compensation d'un réseau de triangulation linéaire, c'est à dire d'une triangulation où toutes les longueurs des côtés ont été mesurées à savoir:

1. Compensation par la méthode d'observations indirectes sur un ellipsoïde.
2. Compensation par la méthode d'observations indirectes sur un plan.
3. Compensation par la méthode d'observations conditionnelles sur un ellipsoïde.
4. Compensation par la méthode d'observations conditionnelles sur un plan.

Ces quatre cas sont en partie appuyés par des exemples numériques.

A la suite de cette analyse l'auteur en est arrivé aux conclusions suivantes:

1. La méthode la plus économique pour la compensation d'un réseau qui s'étend sur de vastes superficies est la méthode des observations indirectes sur un ellipsoïde, tandis que dans les mêmes conditions, la méthode des observations conditionnelles sur un ellipsoïde exige un surcroît de travail.
2. Pour les réseaux de triangulation qui s'étendent à de moindres superficies, ainsi que pour les réseaux de triangulation de comblement, la méthode des observations indirectes sur un plan, est plus avantageuse que celle des observations conditionnelles sur un plan.

Jan Różycki

Odwzorowania kartograficzne stosowane do robót geodezyjnych i map topograficznych szczegółowych na obszarze Polski

Przegląd odwzorowań kartograficznych, stosowanych obecnie w Polsce, ograniczymy do omówienia odwzorowania przyjętego przez Główny Urząd Pomiarów Kraju dla obliczenia wyników triangulacji państwowej i opracowania mapy gospodarczej kraju. Charakterystyce odwzorowania przyjętego dla wyżej wymienionych prac oraz omówieniu typowych zagadnień, jakie wypływają z jego zastosowania w praktyce geodezyjnej, poświęcimy najwięcej uwagi. Na podkreślenie przy tym zasługuje fakt, że rozwiązanie szeregu bardziej pracochłonnych zagadnień zostało oparte na nowych metodach i wzorach, upraszczających w bardzo znacznym stopniu prace rachunkowe, a niespotykanych dotychczas w geodezyjnej literaturze zagranicznej.

Ponadto nieco miejsca poświęcimy charakterystyce kartograficznego materiału mapowego, który pozostał po państwach zaborczych, oraz materiału polskiego z okresu międzywojennego. Materiał ten wykorzystywany jest obecnie na tych obszarach Państwa, dla których nowe mapy nie zostały jeszcze opracowane.

Na zakończenie referatu podajemy wnioski i problemy wymagające obiektywnego rozważenia, a których rozwiązanie posunęłoby o dalszy krok naprzód sprawę normalizacji szeregu podstawowych zagadnień służby geodezyjno-kartograficznej.

I. Odwzorowanie stosowane w Polsce do obliczenia wyników triangulacji państwowej i opracowania mapy gospodarczej kraju w skali zasadniczej 1 : 10 000

A. Cechy charakterystyczne odwzorowania przyjętego w Polsce

1. Uwagi ogólne

Do prac związanych z obliczeniem wyników triangulacji państwowej oraz do prac związanych z kartograficznym opracowaniem mapy gospo-

darczej kraju zostało przyjęte, w roku 1947, odwzorowanie Gaussa-Krügera z uwzględnieniem podziału obszaru Państwa na trzystopniowe pasy południkowe. Cechą charakterystyczną przyjętego odwzorowania było to, że skala liniowa m_0 w południkach osiowych poszczególnych pasów, była różna od jedności i równa liczbie 0,999935. Wielkość tej skali została ustalona z warunku, aby odchylenia od jedności skal liniowych, występujących w obrazach punktów przecięć równoleżnika środkowego obszaru Polski ($\varphi_0 = 52^\circ$) z południkami skrajnymi i środkowymi poszczególnych pasów południkowych, były jednakowe.

Aby w omawianym odwzorowaniu uzyskać współrzędne prostokątne płaskie dowolnego punktu, które nazwiemy x_0 i y_0 , należy współrzędne prostokątne płaskie tego punktu x i y , dane w odwzorowaniu Gaussa-Krügera (przy skali liniowej $m_0 = 1$) pomnożyć przez współczynnik 0,999935, czyli

$$x_0 = m_0 x \quad (1)$$

$$y_0 = m_0 y$$

i odwrotnie

$$x = \frac{x_0}{m_0} \quad (1^*)$$

$$y = \frac{y_0}{m_0}$$

gdzie $m_0 = 0,999935$.

Wprowadzając stały współczynnik m_0 różny od jedności uzyskuje się tak samo odwzorowanie wiernokątne, lecz o odmiennym od poprzedniego rozkładzie zniekształceń.

Przeciętne np. zniekształcenie liniowe na skraju trzystopniowego pasa południkowego (dla obszaru Polski) przy współczynniku $m_0 = 1$ wynosi około + 14 cm na 1 km; natomiast po wprowadzeniu współczynnika $m_0 = 0,999935$ wymienione zniekształcenie wyniesie około + 7 cm, w południku zaś osiowym około -7 cm na 1 km.

Ze względu na potrzebę ujednoczenia podstaw zasadniczych prac geodezyjnych i kartograficznych w Państwie, przyjęto ostatecznie, z końcem 1949 r., odwzorowanie Gaussa-Krügera o skali liniowej m_0 w południkach osiowych poszczególnych pasów południkowych równej jedności.

Szerokość pasów została zachowana.

2. Układy współrzędnych prostokątnych

Obszar Polski został podzielony na cztery trzystopniowe pasy południkowe. Południki osiowe tych pasów, pokrywające się w odwzorowaniu

z osiami odciętych 4 niezależnych układów współrzędnych prostokątnych płaskich, posiadają następujące długości geograficzne:

$$15^{\circ}, 18^{\circ}, 21^{\circ} \text{ i } 24^{\circ}$$

licząc od południka Greenwich na wschód.

Poszczególne układy współrzędnych posiadają kolejną numerację od 1 do 4 oraz następujące nazwy od największych miast leżących w pobliżu ich południków osiowych:

1	—	szczeciński,	o	długości	geograf.	połudn.	osiow.	15°
2	—	bydgoski,	„	„	„	„	„	18°
3	—	warszawski,	„	„	„	„	„	21°
4	—	białostocki,	„	„	„	„	„	24°

Numeracja tych pasów w nawiązaniu do trzystopniowych oraz sześciostopniowych pasów południkowych przyjętych w Związku Radzieckim, w układzie słupów międzynarodowej mapy świata w skali 1 : 1 000 000 — podana jest w tabl. 1.

Tablica 1

Nr słupa mapy międzynarodowej	Nr sześciostopniowego pasa odwzorowania Gaussa-Krügera	Nr trzystopniowego pasa odwzorowania Gaussa-Krügera	Kolejna numeracja pasów polskich	λ_0
33	3	5	1	15°
		6	2	18°
34	4	7	3	21°
		8	4	24°
35	5	9	—	27°

3. Współrzędne ostateczne (cechowane)

Dla uniknięcia ujemnych wartości rzędnych punktów w odwzorowaniu oraz dla jednoznacznego wskazania układu, w którym dane punkty znajdują się, do wszystkich obliczanych rzędnych y dodaje się 500 000 m, ponadto przed każdą otrzymaną w ten sposób rzędną pisze się liczbę równą $\frac{1}{3}$ długości geograficznej południka osiowego odpowiedniego pasa. Otrzymaną w ten sposób rzędną będziemy nazywali ostateczną lub cechowaną i oznaczali symbolem Y .

Ponieważ odcięte wszystkich punktów w odwzorowaniu (dla półkuli północnej) są dodatnie, przyjmuje się, że odcięte ostateczne (cechowane), które oznaczymy symbolem X , są równe odciętym obliczonym x .

Związek zatem pomiędzy współrzędnymi X i Y a współrzędnymi x i y można wyrazić w formie następującej:

$$\left. \begin{aligned} X &= x \\ Y &= \left\lfloor \frac{\lambda_0}{3} \right\rfloor 500\,000 + y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

i odwrotnie

$$\left. \begin{aligned} x &= X \\ y &= Y - \left\lfloor \frac{\lambda_0}{3} \right\rfloor 500\,000, \end{aligned} \right\} \quad (2^*)$$

przy czym λ_0 oznacza długość geograficzną południka osiowego odpowiedniego pasa liczoną od Greenwich.

Związek pomiędzy rzędną ostateczną i rzędną obliczoną można wyrazić jeszcze prościej w formie następującej:

$$Y = \eta + y \text{ i odwrotnie } y = Y - \eta,$$

przy czym symbolem η oznaczono liczbę uwzględniającą przesunięcie osi odciętych o 500 000 m na zachód oraz oznaczenie odpowiedniego pasa południkowego. Wartości η dla poszczególnych układów współrzędnych podane są w tabl. 2.

Tablica 2

λ_0 (w stopniach)	η (w metrach)
15	5 500 000
18	6 500 000
21	7 500 000
24	8 500 000

Ponieważ dla pasów trzystopniowych liczba $\frac{\lambda_0}{3}$ wskazuje numer kolejny pasa w układzie sześciostopniowych pasów południkowych nawiązanych do numeracji słupów międzynarodowej mapy świata — więc wzory określające związek pomiędzy współrzędnymi X i Y i współrzędnymi x i y , można również napisać w sposób następujący:

$$\left. \begin{aligned} X &= x \\ Y &= |n| 500\,000 + y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{i odwrotnie} \\ x = X, \\ y = Y - |n| 500\,000, \end{array} \right\} \quad (3^*)$$

przy czym symbolem n oznaczono numer kolejny trzystopniowego pasa południkowego w układzie przyjętym przez ZSRR. Wartości n dla poszczególnych przyjętych w Polsce pasów trzystopniowych podane są w tabl. 1.

4. Wzajemne zachodzenie sąsiadujących ze sobą pasów południkowych

Ponieważ obszar Państwa został podzielony na cztery pasy południkowe, odpowiadające czterem niezależnym układom współrzędnych prostokątnych płaskich, wprowadzono wzajemne zachodzenie sąsiadujących ze sobą pasów. Jest to powszechnie stosowane tam, gdzie wprowadza się więcej niż jeden pas południkowy, a więc więcej niż jeden układ współrzędnych prostokątnych płaskich.

Wzajemne zachodzenie sąsiadujących ze sobą pasów jest konieczne dla wykonania takich czynności jak: 1) obliczenie odległości dwóch punktów na podstawie współrzędnych prostokątnych płaskich X i Y , o ile jeden z tych punktów znajduje się w granicach sąsiedniego pasa; 2) obliczenie kąta między dwiema liniami łączącymi trzy punkty o danych współrzędnych X i Y , jeśli jeden z tych punktów lub dwa znajdują się w granicach sąsiedniego pasa południkowego; 3) wykonanie projektu inżynierskiego jakiejś trasy (drogi, linii kolejowej, kanału itd.) na odcinku znajdującym się w granicach dwóch pasów sąsiednich itp.

Punkty geodezyjne znajdujące się na obszarze wzajemnego pokrycia się sąsiadujących ze sobą pasów otrzymują współrzędne prostokątne płaskie w obu układach odpowiadających tym pasom. Biorąc pod uwagę długości boków triangulacyjnej sieci wypełniającej ustalono szerokość wzajemnego pokrywania się pasów na 10' długości geograficznej w obie strony od południków skrajnych tych pasów.

5. Elipsoida odniesienia i punkt przyłożenia

Jako powierzchnia odniesienia została przyjęta elipsoida Bessela (z r. 1841) styczna do powierzchni geoidy w punkcie „Borowa Góra“ położonym w pobliżu miejscowości Zegrze koło Warszawy. Współrzędne geograficzne punktu Borowa Góra, (odniesione do elipsoidy) przyrównane do jego współrzędnych astronomicznych (odniesionych do geoidy ziemskiej) oraz azymut wyjściowy (Borowa Góra — Modlin) — wynoszą:

$$\begin{aligned} \varphi &= 52^\circ 28' 32''85 \pm 0''04 \\ \lambda &= 21^\circ 02' 12''12 \pm 0''135 \\ A &= 261^\circ 53' 15''9 \pm 0''3 \end{aligned}$$

Punkt „Borowa Góra“ jest zatem punktem wyjściowym geodezyjnych prac pomiarowych.

Przyjęcie elipsoidy Bessela jako powierzchni odniesienia dla prac geodezyjnych i kartograficznych nie wyklucza możliwości przejścia na tzw. międzynarodową elipsoidę Hayforda (z r. 1910) lub na elipsoidę Krawoskiego (z r. 1940), jeśli względy naukowe i techniczne będą to usprawiedliwiały.

B. Wzory stosowane przy rozwiązywaniu zadań zasadniczych w praktyce geodezyjnej i kartograficznej

1. Uwagi ogólne

Do prac obliczeniowych związanych z zastosowaniem odwzorowania Gaussa-Krügera w praktyce geodezyjnej i kartograficznej stosuje się obecnie wyłącznie wzory przystosowane do rachunku maszyną, ponieważ pozwalają one na wykonanie obliczeń w czasie kilkakrotnie krótszym niż dawniej stosowane wzory w formie logarytmicznej. Ponadto w wymienionych wyżej pracach obliczeniowych stosuje się wzory w formie możliwie uproszczonej mając na względzie uzyskanie wyników z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością przy najmniejszym nakładzie pracy i czasu.

2. Przeliczanie współrzędnych geograficznych φ i λ punktów elipsoidy na współrzędne prostokątne płaskie x i y w odwzorowaniu

Korzystne wyniki przy przeliczaniu współrzędnych geograficznych na współrzędne prostokątne płaskie x i y uzyskuje się stosując wzory i tablice mnożące St. Hausbrandta, ponadto wzory i tablice Boltza.

a) Wzory i tablice St. Hausbrandta:

$$\left. \begin{aligned} y &= \left(\boxed{P} \boxed{y} \right)_{\Sigma} \\ x &= \left(\boxed{P} \boxed{x} \right)_{\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Znaczenie użytych we wzorach symboli jest następujące:

- φ i λ — dane współrzędne geograficzne punktu na elipsoidzie,
- φ_0 — szerokość geograficzna równoleżnika (w całkowitych stopniach) znajdującego się najbliżej równoleżnika o szerokości geograficznej φ od strony południowej,
- λ_0 — długość geograficzna południka osiowego danego pasa,

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ — różnica długości geograficznych południków λ i λ_0 wyrażona w stopniach ¹⁾,
 $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ — różnica szerokości geograficznych równoleżników φ i φ_0 wyrażona w stopniach.

$$\boxed{P} = \begin{array}{cccc} 1 & \Delta\lambda & \Delta\lambda^2 & \Delta\lambda^3 \\ \Delta\varphi & \Delta\varphi \cdot \Delta\lambda & \Delta\varphi \cdot \Delta\lambda^2 & \Delta\varphi \cdot \Delta\lambda^3 \\ \Delta\varphi^2 & \Delta\varphi^2 \cdot \Delta\lambda & \Delta\varphi^2 \cdot \Delta\lambda^2 & \Delta\varphi^2 \cdot \Delta\lambda^3 \end{array}$$

jest to tzw. tabliczka potęgowa, ułożona na podstawie różnic $\Delta\varphi$ i $\Delta\lambda$ (liczby w tabliczce potęgowej \boxed{P} zapisuje się ośmiocyfrowo).

\boxed{x} } tabliczki ułożone dla współrzędnych x i y ;
 \boxed{y} } tabliczki \boxed{x} i \boxed{y} bierze się z „tablic mnożących“
 \boxed{y} } dla odpowiedniej szerokości geograficznej φ .

Dla obliczenia rzędnej y , za pomocą wyżej podanych wzorów, należy każdy element tabliczki potęgowej \boxed{P} pomnożyć przez odpowiadający mu element tabliczki \boxed{y} i otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować.

Dla obliczenia odciętej x , należy każdy element tabliczki potęgowej \boxed{P} pomnożyć przez odpowiadający mu element tabliczki \boxed{x} i otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować.

Całe działanie wykonuje się za pomocą arytmometru, bez zapisywania poszczególnych iloczynów. Na arytmometrze dwulicznikowym można obliczenia dla x i y wykonać równocześnie.

Tablice mnożące w układzie St. Hausbrandta jak również przykłady ich zastosowania zamieszczone są w publikacji pt. „Odwzorowanie Gaussa-Krügera i jego zastosowanie w Polsce“ — J. R ó z y c k i, Warszawa 1950, Geodezyjny Instytut Naukowo-Badawczy. Wymienione tablice pozwalają na obliczenie współrzędnych x i y z błędem nieprzekraczającym ± 3 cm dla trzystopniowych pasów południkowych.

b) Wzory i tablice Boltza:

$$\left. \begin{array}{l} y = r_1 \Delta\lambda + r_2 \Delta\lambda^3 + r_3 \Delta\lambda^5 \\ x = h_1 + h_2 \Delta\lambda^2 + h_3 \Delta\lambda^4 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Znaczenie symboli jest następujące:

φ i λ — dane współrzędne geograficzne punktu na elipsoidzie,
 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ — różnica między długościami geograficznymi południka punktu podlegającego odwzorowaniu i południka osiowego danego pasa, wyrażona w stopniach.

¹⁾ Zamianę minut i sekund na dziesiątą część stopnia, najdogodniej wykonać mnożąc liczbę minut przez 0,016 666 6667, liczbę sekund przez 0,000 277 7778.

x i y — poszukiwane współrzędne prostokątne płaskie punktu w odwzorowaniu,

h_0 — długość łuku południka odpowiadająca szerokości geograficznej φ ; wielkość tę bierze się z tablic H. Boltza „Formeln und Tafeln zur numerischen (nicht logarithmischen) Berechnung Gauss-Krüger'scher Koordinaten aus den geographischen Koordinaten“ — wydanie Geodezyjnego Instytutu w Poczdamie z r. 1943;

$\left. \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ h_1 \\ h_2 \end{array} \right\}$ — współczynniki, które otrzymuje się z tablic Boltza dla szerokości geograficznej φ jako argumentu drogą interpolacji liniowej.

Wzory Boltza pozwalają na obliczenie współrzędnych prostokątnych z błędem nieprzekraczającym $\pm 0,5$ cm, dla trzystopniowych pasów południkowych.

Wzory Boltza w formie podanej przez autora stosuje się przy obliczeniach wyników triangulacji. Przy pracach kartograficznych wystarczy ograniczyć się do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia. Otrzymamy wówczas wzory w formie następującej:

$$\begin{aligned} y &= r_1 \Delta\lambda + r_2 \Delta\lambda^3 \\ x &= h_0 + h_1 \Delta\lambda^2, \end{aligned}$$

które pozwalają na uzyskanie wyników z błędem nieprzekraczającym 10 cm dla trzystopniowego pasa.

3. Przeliczanie współrzędnych prostokątnych x i y punktu w odwzorowaniu na współrzędne geograficzne φ i λ

Przeliczenie współrzędnych prostokątnych x i y na współrzędne geograficzne φ i λ najprościej można wykonać posługując się wzorami i tablicami mnożącymi w układzie St. Hausbrandta. Wymienione wzory mają niżej podaną formę:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \left(\begin{array}{|c|} \hline P \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \varphi \\ \hline \end{array} \right)_{\Sigma} \\ \Delta\lambda &= \left(\begin{array}{|c|} \hline P \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \Delta\lambda \\ \hline \end{array} \right)_{\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

przy czym znaczenie użytych we wzorach symboli jest następujące:

x i y — dane współrzędne prostokątne w odwzorowaniu,
 φ i λ — poszukiwane współrzędne geograficzne punktu na elipsoidzie,

- λ_0 — długość geograficzna południka osiowego,
 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ — różnica długości geograficznych południków λ i λ_0 ; różnicę $\Delta\lambda$ oblicza się w stopniach i dziesiętnych częściach stopnia, po czym dziesiętne części stopnia zamienia się na minuty i sekundy łuku,
 X_0 — wyrażona w setkach kilometrów różnica między daną odciętą x a najbliższą odciętą X^{sk} , mniejszą od danej, wyrażającą się w całkowitych liczbach setek kilometrów,
 Y_0 — wyrażona w setkach kilometrów wartość bezwzględna rzędnej y .

$$P = \begin{array}{cccc} 1 & Y_0 & Y_0^2 & Y_0^3 \\ X_0 & X_0 Y_0 & X_0 Y_0^2 & X_0 Y_0^3 \\ X_0^2 & X_0^2 Y_0 & X_0^2 Y_0^2 & X_0^2 Y_0^3 \end{array}$$

Jest to tzw. tabliczka potęgowa ułożona na podstawie X_0 i Y_0 (liczby w tabelce potęgowej zapisuje się ośmiocyfrowo);

$\left. \begin{array}{l} \boxed{\varphi} \\ \boxed{\Delta\lambda} \end{array} \right\}$ tabliczki ułożone dla współrzędnych φ i $\Delta\lambda$;
 tabliczki $\boxed{\varphi}$ i $\boxed{\Delta\lambda}$ bierze się z „tablic mnożących“
 dla odpowiednich odciętych X^{sk} .

Dla obliczenia szerokości geograficznej φ należy każdy element tabliczki potęgowej P pomnożyć przez odpowiadający mu element tabliczki $\boxed{\varphi}$ i otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować.

Dla obliczenia różnicy długości geograficznych $\Delta\lambda$ należy każdy element tabliczki potęgowej P pomnożyć przez odpowiadający mu element tabliczki $\boxed{\Delta\lambda}$ i otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować.

Jeśli rzędna y jest ujemna, wówczas przed otrzymaną w rezultacie obliczenia różnicą długości geograficznych $\Delta\lambda$ należy postawić znak minus, poza tym postępowanie rachunkowe żadnej zmianie nie ulega.

4. Obliczanie skal liniowych i skal pól oraz zniekształceń liniowych i pól

W obrazie południka osiowego odwzorowywanego pasa — zniekształcenia liniowe i pól są równe zeru. W miarę oddalania się od południka osiowego wymienione zniekształcenia rosną, osiągając maksymalne wielkości na skraju pasa.

Zniekształcenia odwzorowawcze w granicach trzystopniowych pasów południkowych są nieduże, przeciętne bowiem zniekształcenia liniowe na skraju pasa nie przekraczają 15 cm na 1 km, przeciętne zaś zniekształcenia pól nie przekraczają 0,03 ha na 1 km².

Do obliczenia skali liniowej m i skali pól p , w dowolnym punkcie odwzorowania, mogą być stosowane wzory uproszczone w formie następującej:

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 + \frac{y^2}{2 R_0^2} \\ p &= 1 + \frac{y^2}{R_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Symbolem R_0 oznaczono średni promień krzywizny odpowiadający średniemu równoleżnikowi φ_0 obszaru Polski. Ponieważ dla $\varphi_0 = 52^\circ$ promień $R_0 = 6382,5$ km (uwzględniając elementy elipsoidy Bessela), przeto wzorom wyżej podanym można nadać następującą postać, dogodną do obliczeń maszyną:

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 + 0,00000\ 001227 \cdot y_{\text{km}}^2 \\ p &= 1 + 0,00000\ 002454 \cdot y_{\text{km}}^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Zniekształcenia liniowe ($m-1$) oraz zniekształcenia pól ($p-1$) oblicza się zatem z wzorów:

$$\left. \begin{aligned} m - 1 &= 0,00000\ 001227 \cdot y_{\text{km}}^2 \\ p - 1 &= 0,00000\ 002454 \cdot y_{\text{km}}^2 \end{aligned} \right\}$$

Wzory powyższe pozwalają na obliczenie zniekształceń odwzorowawczych z dokładnością zupełnie wystarczającą w praktyce geodezyjnej.

Tablica 3

y w km	Skale liniowe i pól		Przeciętne zniekształcenia	
	m	p	na 1 km w cm	na 1 km ² w m ²
0	1,000000	1,000000	0,0	0
10	1,000001	1,000002	0,1	2
20	1,000005	1,000010	0,5	10
30	1,000011	1,000022	1,1	22
40	1,000020	1,000039	2,0	39
50	1,000031	1,000061	3,1	61
60	1,000044	1,000088	4,4	88
70	1,000060	1,000120	6,0	120
80	1,000079	1,000157	7,9	157
90	1,000099	1,000199	9,9	199
100	1,000123	1,000245	12,3	245
110	1,000148	1,000297	14,8	297
120	1,000177	1,000353	17,7	353

Wielkości skal i zniekształceń odzworowawczych, występujących w granicach trzystopniowych pasów południkowych, dla obszaru Polski, podane są w tabelicy 3.

6. Redukcja długości

Jeśli długość linii geodezyjnej łączącej dwa punkty na elipsoidzie oznaczymy symbolem D , długość zaś linii prostej (cięciwy) łączącej obrazy tych punktów na płaszczyźnie odzworowania, oznaczymy symbolem d , to do określenia stosunku długości tych linii, czyli redukcji długości, można posługiwać się wzorem uproszczonym w formie następującej:

$$\frac{d}{D} = 1 + \frac{1}{6R_0^2}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2), \quad (9)$$

w którym R_0 oznacza średni promień krzywizny odpowiadający średniemu równoleżnikowi obszaru Polski $\varphi_0 = 52^\circ$; natomiast y_1 i y_2 oznaczają rzędne obrazów dwóch punktów, pomiędzy którymi dokonano pomiaru linii geodezyjnej D .

Po podstawieniu wartości liczbowej dla R_0 , która jak podano wyżej wynosi 6382,5 km, otrzymujemy (dla y_1 i y_2 wyrażonych również w km) następujące wzory redukcyjne do obliczenia długości d mając daną długość D i odwrotnie:

$$\begin{aligned} d &= D [1 + 0,000\ 000\ 00409 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)] \\ D &= d [1 - 0,000\ 000\ 00409 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)] \end{aligned} \quad (10)$$

Przy pracach obliczeniowych związanych z wyrównaniem triangulacyjnych sieci wypełniających i zagęszczających oraz ciągów poligonowych (poligonizacja ścisła) mogą być stosowane wzory w formie jeszcze bardziej uproszczonej:

$$\begin{aligned} d &= D (1 + 0,000\ 000\ 0123 y_m^2) \\ D &= d (1 - 0,000\ 000\ 0123 y_m^2), \end{aligned} \quad (11)$$

które otrzymuje się wprowadzając na miejsce rzędnych y_1 i y_2 — rzędną y_m środka cięciwy, podaną w km ($y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$).

W odzworowaniu Gaussa-Krügera długości linii zredukowanych na płaszczyznę są większe od długości linii geodezyjnych na elipsoidzie. Różnice te zwiększają się w miarę oddalania się od południka osiowego.

Tablica 4 zawiera różnice ($d-D$), wyrażone w metrach, na obszarze trzystopniowego pasa południkowego dla długości linii geodezyjnych w granicach od 20 m do 10 km, obliczone ze wzorów (11).

Tablica 4

D w metrach	ym w km											
	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01
50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01
60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
70	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
90	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02
100	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02
200	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,04
300	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,04	0,05
400	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,06	0,07
500	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,09
600	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,09	0,11
700	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,09	0,10	0,10	0,12
800	0,00	0,01	0,02	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,12	0,14
900	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,13	0,16
1 000	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,15	0,18
2 000	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30	0,30	0,35
3 000	0,02	0,03	0,06	0,09	0,13	0,18	0,24	0,30	0,37	0,45	0,45	0,53
4 000	0,02	0,04	0,08	0,12	0,18	0,24	0,31	0,40	0,49	0,59	0,59	0,71
5 000	0,02	0,06	0,10	0,15	0,22	0,30	0,39	0,50	0,61	0,74	0,74	0,88
6 000	0,03	0,07	0,12	0,18	0,26	0,36	0,47	0,60	0,74	0,89	0,89	1,06
7 000	0,03	0,08	0,14	0,21	0,31	0,42	0,55	0,70	0,86	1,04	1,04	1,24
8 000	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,48	0,63	0,80	0,98	1,19	1,19	1,41
9 000	0,04	0,10	0,18	0,28	0,40	0,54	0,71	0,89	1,10	1,34	1,34	1,59
10 000	0,05	0,11	0,20	0,31	0,44	0,60	0,79	0,99	1,23	1,48	1,48	1,77

Rozważając sprawę uwzględniania redukcji liniowych należy pamiętać, że mają one charakter błędów systematycznych, a więc powodują narastanie w sposób ciągły różnic pomiędzy zmierzonymi a zredukowanymi na płaszczyznę długościami boków w ciągach poligonowych lub boków trójkątów sieci triangulacyjnych. Ogólnie można powiedzieć, że uwzględnianie redukcji liniowych zależy jest od: a) rzędu wymaganej dokładności pomierzonej sieci triangulacyjnej lub ciągu poligonowego, b) południkowego lub równoleżnikowego kierunku sieci lub ciągu oraz c) położenia (odległości) mierzonego obszaru względem południka osiowego.

6. Redukcja kierunków i kątów

Przy wyrównywaniu na płaszczyźnie sieci triangulacyjnych można zredukować kierunki, po czym na ich podstawie obliczyć kąty zredukowane, bądź od razu zredukować na płaszczyznę pomierzone w terenie kąty.

Redukcję kąta kierunkowego linii geodezyjnej $P_1 P_2$ można wykonać korzystając z następującego wzoru uproszczonego:

$$\delta_1 = \frac{\varrho}{6R_0^2} (x_1 - x_2) (2y_1 + y_2) \quad (12)$$

Do obliczenia redukcji kierunku odwrotnego $P_2 P_1$ korzystamy ze wzoru analogicznego:

$$\delta_2 = \frac{\varrho}{6R_0^2} (x_1 - x_2) (y_1 + 2y_2) \quad (12^*)$$

Ponieważ dla szerokości geograficznej $\varphi = 52^\circ$ promień $R_0 = 6382,5$ km, więc wzory powyższe (dla x_1, y_1 i x_2, y_2 wyrażonych w km) przyjmują ostatecznie następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1'' &= 0,000\ 844 (x_1 - x_2)(2y_1 + y_2) \\ \delta_2'' &= 0,000\ 844 (x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Dodając do kierunku zaobserwowanego $P_1 P_2$ redukcję kierunku δ_1 otrzymujemy kierunek zredukowany na płaszczyznę (analogicznie postępujemy w celu zredukowania kierunku odwrotnego $P_2 P_1$).

Przy wyrównywaniu sieci triangulacyjnych rzędu niższego i średniego (np. o bokach nieprzekraczających 10 km) najdogodniej jest od razu obliczać kąty zredukowane na płaszczyznę (zawarte pomiędzy liniami prostymi łączącymi obrazy wierzchołków trójkątów sferoidalnych) dodając do kątów zaobserwowanych redukcje kątów obliczone ze wzoru uproszczonego w następującej bardzo prostej formie:

$$\delta'' = 0,00253 (x_l - x_p) y_s, \quad (14)$$

gdzie x_l i x_p są to odcięte lewego i prawego punktu obserwacji, zaś y_s jest rzędną stanowiska (współrzędne x_l, x_p i y_s — wyrażone są w kilometrach).

Dodając do kąta α , zaobserwowanego na elipsoidzie, redukcję kątową δ otrzymujemy zredukowany kąt β na płaszczyźnie odwzorowania, czyli:

$$\beta = \alpha + 0,00253 (x_l - x_p) y_s. \quad (15)$$

W tablicy 5 podane są bezwzględne wartości redukcji kątowych (w sekundach łuku), występujących na obszarze trzystopniowego pasa południkowego, dla różnic odciętych $(x_l - x_p)$ co 1 km oraz rzędnych co 10 km.

Tablica 5

$x_l - x_p$ w km	y_s w km											
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
2	0,0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6
3	0,0	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8
4	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
5	0,0	0,1	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,3	1,4
6	0,0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,9	1,1	1,2	1,4	1,5	1,7
7	0,0	0,2	0,4	0,5	0,7	0,9	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9
8	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2
9	0,0	0,2	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,8	2,0	2,3	2,5
10	0,0	0,3	0,5	0,8	1,0	1,3	1,5	1,8	2,0	2,3	2,5	2,8
11	0,0	0,3	0,6	0,8	1,1	1,4	1,7	1,9	2,2	2,5	2,8	3,0
12	0,0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3
13	0,0	0,3	0,7	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	2,9	3,3	3,6
14	0,0	0,4	0,7	1,0	1,4	1,8	2,1	2,5	2,8	3,2	3,5	3,9
15	0,0	0,4	0,8	1,1	1,5	1,9	2,3	2,6	3,0	3,4	3,8	4,1

7. Przeliczanie współrzędnych prostokątnych płaskich z jednego układu na drugi układ sąsiedni

Przeliczenie współrzędnych prostokątnych płaskich z jednego układu na drugi układ sąsiedni, może być wykonane w sposób szybki i łatwy przy użyciu „tablic do interpolacyjnego przeliczania współrzędnych prostokątnych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera na sąsiedni układ trzystopniowy“, opracowanych przez prof. St. Hausbrandta. Tablice składają się z dwóch części: Część pierwsza (Tablica I) zawiera wartości współrzędnych prostokątnych płaskich w układzie wschodnim, odpowiadające współrzędnym prostokątnym płaskim w układzie zachodnim, w okrągłych dziesiątkach kilometrów. Część druga (Tablica II) zawiera wartości współrzędnych prostokątnych płaskich w układzie zachodnim, odpowiadające współrzędnym prostokątnym płaskim w układzie wschodnim, w okrągłych dziesiątkach kilometrów.

Przeliczenie współrzędnych prostokątnych z jednego układu na drugi układ sąsiedni polega na wykonaniu interpolacji posługując się „tabelką mnożącą“ (którą należy zestawić dla danych czynników interpolacyjnych) oraz wartościami współrzędnych umieszczonych w tablicach interpolacyjnych.

Związek pomiędzy współrzędnymi obu układów można przedstawić w sposób następujący:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \left(\boxed{K} \quad \boxed{x'} \right)_{\Sigma} \\ y' &= \left(\boxed{K} \quad \boxed{y'} \right)_{\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

jeśli chodzi o przeliczenie współrzędnych prostokątnych z układu zachodniego na układ wschodni, bądź

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(\boxed{K} \quad \boxed{x} \right)_{\Sigma} \\ y &= \left(\boxed{K} \quad \boxed{y} \right)_{\Sigma} \end{aligned} \right\} \quad (16^*)$$

jeśli chodzi o przeliczenie współrzędnych prostokątnych z układu wschodniego na zachodni.

Występujące w powyższych wzorach symbole mają następujące znaczenie:

- x i y — współrzędne prostokątne w układzie zachodnim,
- x' i y' — współrzędne prostokątne w układzie wschodnim,
- K_w — czynnik interpolacji wierszowej,
- K_k — czynnik interpolacji kolumnowej.

$$\boxed{K} = \begin{array}{|c|c|} \hline (1-K_k) (1-K_w) & (1-K_k)K_w \\ \hline K_k (1-K_w) & K_k \cdot K_w \\ \hline \end{array}$$

Jest to tzw. tabelka mnożąca, ułożona na podstawie wartości czynników interpolacyjnych, które otrzymuje się z danych współrzędnych prostokątnych (x i y bądź x' i y'). Suma liczb tabelki mnożącej musi być równa ściśle jedności. $\boxed{x'}$ i $\boxed{y'}$ bądź \boxed{x} i \boxed{y} — są to odpowiednio zgrupowane elementy tablic funkcyjnych (Tablicy I — jeśli chodzi o przeliczenie współrzędnych z układu zachodniego na układ wschodni, lub Tablicy II — jeśli chodzi o wykonanie zadania odwrotnego) odpowiadające współrzędnym prostokątnym, danym w dziesiątkach kilometrów, które okalają poszukiwane współrzędne x' i y' bądź x i y .

Aby przeliczyć odciętą x , daną w układzie zachodnim, na odpowiadającą jej odciętą x' w układzie wschodnim należy każdy element tabelki mnożącej \boxed{K} pomnożyć przez odpowiadający jej element tablicy funkcyjnej $\boxed{x'}$, następnie otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować (wykorzystujemy w tym przypadku Tablicę I).

Aby przeliczyć rzędną y , daną w układzie zachodnim, na odpowiadającą jej rzędną y' , w układzie wschodnim, należy każdy element tabelki mnożącej \boxed{K} pomnożyć przez odpowiadający jej element tablicy funkcyjnej $\boxed{y'}$ następnie otrzymane w wyniku mnożenia elementy zsumować (również w tym przypadku wykorzystujemy Tablicę I).

Zupełnie w analogiczny sposób wykonuje się zadanie odwrotne, przy wykorzystaniu Tablicy II.

Należy nadmienić, że występujące we wzorach rzędne y bądź y' otrzymuje się na podstawie rzędnych cechowanych Y bądź Y' przez skreślenie pierwszej cyfry rzędnej $|n|$ charakteryzującej pas, w którym dany punkt znajduje się.

Analitycznie można to wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} y &= Y - |n| 1000\,000, \\ \text{lub} \quad y' &= Y' - |n| 1000\,000. \end{aligned}$$

Dla zorientowania czytelnika w użyciu tablic podaję przykład liczbowy zamieszczony przez autora w objaśnieniach do tablic interpolacyjnych.

Dane:
współrzedne prostokątne
(cechowane) w układzie
zachodnim:

$$X = 5\,785\,575,13 \text{ m}$$

$$Y = 6\,593\,897,30 \text{ m}$$

Poszukiwane:
współrzedne prostokątne
(cechowane) w układzie
wschodnim:

$$X'$$

$$Y'$$

Pamiętając o uwadze ostatniej, do interpolacyjnego przeliczenia będziemy mieć współrzedne następujące:

$$x = 5\,785\,575,13$$

$$y = 593\,897,30.$$

Czynniki interpolacyjne wynoszą:

$$K_k = 0,557\,513$$

$$1 - K_k = 0,442\,487$$

zaś:

$$K_w = 0,389\,730$$

$$1 - K_w = 0,610\,270.$$

Napisać je łatwo wzięwszy sześć ostatnich cyfr z każdej współrzednej x i y .

Tabelka mnożąca mieć będzie następującą postać:

\boxed{K} =	0,270 0365	0,172 4505
	0,340 2335	0,217 2795

Potrzebny do przeliczeń fragment tablicy funkcyjnej (który bierze się bezpośrednio z tablicy bez wypisywania go) ma postać następującą:

$x \backslash y$	590		600			
	x'	y'	x'	y'		
5770	
5780	5780523,61	384675,90	5780110,24	394667,75
5790	5790515,68	385089,53	5790101,82	395081,35
5800

Po wykonaniu mnożenia zupełnego tabelki mnożącej przez odpowiednie elementy fragmentu tablicy funkcyjnej — otrzymujemy:

$$x' = 5\,785\,933,11 \text{ m}$$

$$y' = 388\,800,62 \text{ m},$$

skąd, po dopisaniu przed rzędną cyfry 7 tj. (6+1), otrzymamy współrzędne ostateczne (cechowane) w układzie wschodnim:

$$X' = 5\,785\,933,11 \text{ m}$$

$$Y' = 7\,388\,800,62 \text{ m}.$$

Przeliczenie współrzędnych przy użyciu opisanych tablic interpolacyjnych daje rezultat z błędem nieprzekraczającym ± 2 cm dla odciętych oraz z błędem nieprzekraczającym ± 7 cm dla rzędnych — dla pasów trzystopniowych. Jeśli błąd przeliczenia rzędnej jest za wysoki, wówczas dokładność rezultatu obliczenia można podnieść dodając poprawkę rzędnej, którą otrzymuje się z tabelki poprawkowych załączonych do tablic interpolacyjnych.

C. Ogólna charakterystyka podstaw matematycznych mapy w skali 1:10 000

1. Ogólne uwagi dotyczące charakteru i przeznaczenia mapy

Mapa gospodarcza kraju w skali 1:10 000 pomyślana jest jako zespół map obrazujących różne zagadnienia natury ekonomiczno-gospodarczej na tle podkładu sytuacyjno-hipsometrycznego.

Mapa użycia powierzchni ziemi stanowiąca pierwszą kartę tego zespołu map zawiera obraz istniejącego stanu użycia powierzchni ziemi w momencie zdjęć topograficznych związanych z opracowaniem mapy. Mapa służy do celów związanych z gospodarką powierzchni ziemi, a w szczególności do

- a) poznania obiektu gospodarowania,
- b) planowania gospodarczego w terenie w skali miejscowej,
- c) opracowania wszelkich projektów związanych z terenem, a przede wszystkim projektów gospodarczo-inżynierskich,
- d) jako podkład do wszelkich badań i opracowań dotyczących terenu.

Ponadto mapa użycia powierzchni ziemi (w wydaniu ostatecznym zawierającym rzeźbę terenu, opracowaną na podstawie oryginalnych zdjęć terenowych) będzie stanowiła podkład zasadniczy, który posłuży do opracowania map topograficznych w skalach mniejszych.

W pierwszym etapie prac wykorzystywane są mapy katastralne, reambulowane w terenie, oraz zdjęcia lotnicze. W zasadzie przewiduje się opracowanie mapy na podkładzie zdjęć lotniczych odczytanych w terenie.

Rysunek rzeźby terenu w pierwszym etapie prac nad mapą użycia powierzchni ziemi przenoszony jest z map 1 : 25 000. W ten sposób otrzymane warstwicę odtwarzają rzeźbę terenu z dokładnością odpowiadającą mapom źródłowym, z których zostały przeniesione, a więc mają one charakter orientacyjny i mogą być wykorzystane przy rozwiązywaniu tylko niektórych zagadnień z zakresu planowania gospodarczego; nie nadają się one natomiast do celów kartometrycznych ścisłych w skali mapy.

W drugim etapie prac nad mapą przewiduje się opracowanie rzeźby terenu na podstawie bezpośrednich pomiarów polowych.

2. Format i nomenklatura arkuszy sekcyjnych mapy

Poszczególne arkusze sekcyjne mapy 1 : 10 000 mają format prostokątny o wymiarach 595 mm na 840 mm. Format arkusza w świetle ramki wewnętrznej wynosi 500 mm na 800 mm, co odpowiada w terenie 5 km na 8 km.

Arkusze mapy oznacza się przez podanie w kilometrach współrzędnych prostokątnych (cechowanych) lewych dolnych narożników ramek sekcyjnych tych arkuszy; przy tym podaje się najpierw odcięte, potem rzędne. Ponadto każdy arkusz sekcyjny mapy otrzymuje nazwę odpowiadającą nazwie jednej z miejscowości znajdujących się na tym arkuszu i najtrafniej charakteryzującej obszar nim objęty.

3. Siatka kartograficzna i siatka kilometrowa

Każdy arkusz sekcyjny mapy zawiera siatkę kilometrową o bokach 10 cm (czyli 1 km w terenie) w ogólnopaństwowym układzie współrzędnych prostokątnych płaskich odwzorowania Gaussa-Krügera.

Ponieważ każdy arkusz mapy ma format prostokąta, więc wykreślenie siatki sprowadza się do podzielenia ramek arkusza na dziesięciocentymetrowe odcinki i połączenia liniami prostymi punktów diametralnie przeciwległych.

Punkty przecięć siatki kilometrowej z ramkami mapy opisuje się podając dwie ostatnie cyfry współrzędnych prostokątnych płaskich wyrażone w kilometrach. Narożniki arkuszy sekcyjnych mapy opisuje się współrzędnymi prostokątnymi — czterocyfrowo.

Siatki kartograficznej nie wykreśla się, ograniczając się do wniesienia i opisanie punktów przecięć siatki z ramkami sekcyjnymi mapy, w odstępach jednocentymetrowych; przy tym punkty położone najbliżej narożników opisuje się w stopniach i minutach, natomiast punkty pośrednie opisuje się tylko w minutach.

II Mapy niemieckie, austriackie i rosyjskie w skalach szczegółowych, wydane przed pierwszą wojną światową, oraz mapy szczegółowe wydane przez W. I. G. w okresie międzywojennym

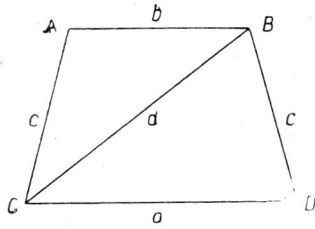
1. Uwagi ogólne

Mapa użycia powierzchni ziemi w skali 1 : 10 000 wydana została dotychczas dla stosunkowo niedużego obszaru Państwa, ograniczając się na razie do rejonów, dla których wydanie tej mapy ze względów gospodarczych było nieodzowną i pilną potrzebą oraz dla których wykonanie mapy było możliwe ze względu na materiał źródłowy (mapy katastralne reambulowane w terenie bądź zdjęcia lotnicze oraz podkład geodezyjny). Dlatego też przy pracach związanych z planowaniem gospodarczym na pozostałych obszarach ziem dawnych zachodzi potrzeba posługiwania się mapami w skali 1 : 25 000 jak również 1 : 100 000, wydanymi przez były W. I. G. w okresie międzywojennym na podstawie map niemieckich, austriackich i rosyjskich, a częściowo na podstawie oryginalnych zdjęć terenowych. Na obszarach ziem odzyskanych zachodzi potrzeba posługiwania się mapami niemieckimi w skalach 1 : 25 000 i 1 : 100 000 wydanymi przed pierwszą wojną światową jak również w okresie międzywojennym. Z powyższych względów usprawiedliwionym się staje poświęcenie tym mapom nieco uwagi.

2. Mapy niemieckie w skalach 1 : 25 000 i 1 : 100 000

Poszczególne arkusze mapy niemieckiej w skali 1 : 25 000 zawierają obraz powierzchni trapezu (sferoidalnego) ograniczonego południkami oddalonymi od siebie o 10' długości geograficznej i równoleżnikami oddalo-

nymi o 6' szerokości geograficznej. Według instrukcji pruskiej z r. 1821 obraz wymienionego trapezu zawarty był w trapezie płaskim równoramiennym o bokach prostoliniowych (rys. 1).



Rys. 1

Przyjmuje się przy tym, że podstawy trapezu mapy są równe rozwiniętym łukom równoleżników skrajnych trapezu sferoidalnego, zaś boki trapezu mapy są równe rozwiniętym łukom południków skrajnych tegoż trapezu sferoidalnego. Elementy potrzebne do konstrukcji trapezu płaskiego prostoliniowego można otrzymać z odpowiednich tablic lub obliczyć z niżej podanych wzorów:

$$a = CD = \text{arc } 10' N_{\varphi} \cos \varphi,$$

$$b = AB = \text{arc } 10' N_{\varphi+6'} \cos (\varphi + 6'),$$

$$c = CA = DB = S_{\varphi+6'} - S_{\varphi},$$

$$d = CB = \sqrt{ab + c^2}.$$

Siatka kartograficzna przedstawiona jest przez naniesienie punktów przecięć południków i równoleżników z ramkami arkusza mapy w odstępach 1'. Dla otrzymania siatki wymienione punkty należy połączyć liniami prostymi. A więc obrazami równoleżników są linie proste wzajemnie równoległe, obrazami zaś południków są linie proste zbieżne w kierunku północnym. Opisany wyżej sposób otrzymania siatki kartograficznej na pojedynczym arkuszu odpowiada praktycznie warunkom odwzorowania pseudowalcowego trapezowego, z wiernie rozwiniętymi równoleżnikami i wiernym południkiem środkowym siatki. W całości — układ jest wielościenny.

Późniejsze instrukcje z lat 1873—1876 wprowadzają do pierwotnych przepisów pewne zmiany, dostosowując obrazy równoleżników do odwzorowania Soldnera. W tym celu należałoby ze wszystkich punktów węzłowych siatki kartograficznej poprowadzić linie proste prostopadłe do obrazów równoleżników i na tych prostych (w kierunku południowym) odłożyć odcinki równe strzałkom Δx łuków równoleżnikowych w odwzorowaniu Soldnera. Wielkości tych strzałek, w jednominutowych odstępach kątowych długości geograficznych λ , podaje załączona obok tabela:

$\Delta\lambda$	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'
Δx	0 m	1,18 m	2,09 m	2,74 m	3,13 m	3,26 m	3,13 m	2,74 m	2,09 m	1,18 m	0 m
Δx w skali mapy	0 mm	0,047 mm	0,084 mm	0,110 mm	0,125 mm	0,130 mm	0,125 mm	0,110 mm	0,084 mm	0,047 mm	0 mm

Z tabeli widać, że wielkości strzałek w skali mapy są bardzo małe; z tego względu przy wykreślaniu obrazów równoleżników nie uwzględniano ich krzywizny wynikającej z dostosowania siatki do odwzorowania Soldnera. Odpowiednie poprawki wprowadzano jedynie przy wnoszeniu na mapę punktów geodezyjnych jak również przy odczytywaniu z mapy położenia tych punktów. Jak widać, odwzorowanie przyjęte do opracowania poszczególnych arkuszy mapy niemieckiej w skali 1 : 25 000 według wymienionych wyżej instrukcji może być traktowane jako odwzorowanie pseudowalcowe trapezowe, jeśli chodzi o sposób budowy siatki kartograficznej, bądź też może być uważane jako odwzorowanie Soldnera, jeśli chodzi o stronę obliczeniową. Mapa 1 : 25 000 opracowana została na podstawie zdjęć stolikowych wykonanych w latach 1870—1880. Jako powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela. Długości geograficzne liczone od południka Ferro ¹⁾). W późniejszych wydaniach długości geograficzne przeliczono na południk Greenwich.

Początkowo wprowadzono kolejną numerację arkuszy. Później wprowadzono nową numerację polegającą na tym, że każdy arkusz oznaczano liczbą czterocyfrową, w której dwie pierwsze cyfry oznaczają pas równoleżnikowy, następne — słupek południkowy.

Mapa oprócz sytuacji zawiera rzeźbę terenu przedstawioną warstwicami o najmniejszych odstępach co 1,25 m. Zarówno sytuacja, jak i rzeźba terenu przedstawiona jest na mapie w kolorze czarnym. Na wielu arkuszach, wydanych później, wody wydrukowano w kolorze niebieskim.

Na podstawie mapy 1 : 25 000 opracowana została mapa Niemiec w skali 1 : 100 000. Poszczególne arkusze tej mapy posiadają format 30' wzdłuż równoleżnika i 15' wzdłuż południka. Na jeden arkusz tej mapy wchodzi 6 pełnych i 3 połówki arkuszy mapy 1 : 25 000. Mapa opracowana jest również w układzie wielościennym. Arkusze mapy numerowano liczbami kolejnymi od 1 do 674.

Jako powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela. Długości liczone od południka Ferro. W późniejszych wydaniach długości przeliczono na południk Greenwich.

Ukazał się szereg wydań tej mapy, różniących się pomiędzy sobą kolorytem i sposobem przedstawienia rzeźby terenu. Pierwsze wydania posiadały rzeźbę terenu przedstawioną kreskami i uzupełnioną licznymi punktami wysokościowymi. Dalsze wydania uzupełniono warstwicami o cięciach 50 m. Późniejsze wydania map 1 : 25 000 i 1 : 100 000 z okresu

¹⁾ Długość geograficzna południka Ferro przyjętego do map pruskich — tzw. Ferro L. A. — różni się o 13",4 od długości geograficznej konwencjonalnego południka Ferro i wynosi 17°39'59" długości zachodniej względem południka Greenwich.

międzywojennego otrzymały siatkę kilometrową w odwzorowaniu Gaussa-Krügera, które zostało wprowadzone na terenie całych Niemiec w r. 1927.

Siatka kilometrowa na mapach 1 : 25 000 składa się z kwadratów o bokach 4 cm (1 km w terenie). Boki kwadratów siatki kilometrowej na mapach 1 : 100 000 wynoszą po 5 cm (5 km w terenie).

Z omówionych tu pokrótce map w skalach 1 : 25 000 i 1 : 100 000 korzystamy na terenach ziem odzyskanych.

3. Mapy austriackie w skalach 1 : 75 000 i 1 : 25 000

Zasadniczym elementem mapy austriackiej w skali 1 : 75 000 jest trapez formatu 30' wzdłuż równoleżnika i 15' wzdłuż południka. Powierzchnię wymienionego trapezu odwzorowywano na płaszczyznę posługując się pseudowalcowym rzutem Sansona, w którym jak wiadomo południk środkowy¹⁾ odtwarza się na linię prostą z zachowaniem swojej długości; pozostałe południki odtwarzają się na sinusoidy zwrócone stroną wklęsłą w kierunku obrazu południka środkowego; równoleżniki odtwarzają się na linie proste prostopadłe do obrazu południka środkowego z zachowaniem swoich długości.

Teoretycznie, obrazem trapezu jest figura utworzona przez dwie linie proste do siebie równoległe oraz dwa łuki sinusoidalne. Ponieważ łuki sinusoidalne obrazów południków bardzo mało odbiegają od linii prostych (największa strzałka nie przewyższa 0,001 mm w skali mapy), przeto można pominąć ich krzywiznę bez jakiegokolwiek ujemnego wpływu na dokładność rysunku siatki jak również przy nanoszeniu i odczytywaniu z mapy współrzędnych punktów geodezyjnych. Praktycznie więc przyjmuje się, że obrazem trapezu sferoidalnego jest trapez płaski prostoliniowy.

Jako powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela. Długości geograficzne liczono od południka Ferro. Punkty przecięć siatki kartograficznej z ramkami poszczególnych arkuszy mapy wnoszono w odstępach co 1'.

Początkowo arkusze oznaczano numeracją pasów (Zone) i numeracją słupów (Kolonne). Pasy oznaczano cyframi arabskimi wzrastającymi na południe, słupy zaś — cyframi rzymskimi wzrastającymi na wschód, np. „Zone 5, Kol. XXII“. Później wprowadzono nową numerację polegającą na tym, że każdy arkusz oznaczano liczbą czterocyfrową, w której dwie pierwsze cyfry oznaczają pas, następne — słup, np. 3964.

Mapa w skali 1 : 75 000 była wydana przez Wojskowy Instytut Geograficzny w Wiedniu w latach 1873—1889 na podstawie zdjęć stoliko-

¹⁾ w danym przypadku środkowy południk trapezu mapy

wych wykonanych w tym samym czasie. Sytuacja przedstawiona jest na mapie w kolorze czarnym, rzeźba terenu — kreskami i warstwicami również w kolorze czarnym. Warstwice biegną w odstępach co 50 m na nizinach i co 100 m w terenach górzystych. Późniejsze wydania ukazały się w wersji wielobarwnej.

W okresie pierwszej wojny światowej na podstawie zdjęć stolikowych wykonanych dla mapy 1 : 75 000 została wydana mapa w skali 1 : 25 000. Poszczególne arkusze mapy 1 : 25 000 obejmują obszar przedstawiony na ćwiartce mapy 1 : 75 000 tj. zawierają obraz powierzchni trapezu o formacie 15' wzdłuż równoleżnika i 7,5' wzdłuż południka. Mapa wydana została w kolorze czarnym. Rzeźbę terenu przedstawiono kreskami i uzupełniono warstwicami w odstępach co 20 m i 10 m. Ze względu na późniejsze opracowanie oraz oparcie się o przestarzałe zdjęcia, wykonane w terenie dla potrzeb mapy w skali drobniejszej (1 : 75 000) — mapa jest mało dokładna i zawiera wiele usterek zarówno w podaniu szczegółów sytuacyjnych, jak i w przedstawieniu rzeźby terenu.

Mapy austriackie w skalach 1 : 25 000 i 1 : 75 000 były w okresie międzywojennym na terenach byłego zaboru austriackiego wykorzystywane przez W. I. G. do wydań map polskich w skalach 1 : 25 000 i 1 : 100 000.

4. Mapy rosyjskie w skalach 1 : 21 000, 1 : 42 000 i 1 : 84 000

Poszczególne arkusze mapy w skali 1 : 21 000, zwanej mapą półwiorstową (250 sążni, czyli 0,5 wiorsty w 1 calu), posiadają format trapezu o wymiarach 9' wzdłuż równoleżnika i 5' wzdłuż południka. Jako powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela¹⁾. Długości geograficzne liczone były od południka Pułkowo jako początkowego.

Mapę opracowano w odwzorowaniu wielościennym, przy czym poszczególne trapezy o bokach prostoliniowych budowano sposobem podanym przy opisie map niemieckich w skali 1 : 25 000.

Mapa 1 : 21 000 wykonana była na podstawie zdjęć terenowych w latach 1870—1906. Oprócz sytuacji mapa zawiera rzeźbę terenu przedstawioną warstwicami biegnącymi w zasadniczych odstępach co 2 sążnie.

Mapa w skali 1 : 42 000, zwana mapą wiorstową (500 sążni, czyli 1 wiorsta w 1 calu) początkowo była wydawana (do roku 1907) jako po-

¹⁾ Dla niektórych rejonów obliczenia były wykonane z uwzględnieniem elementów elipsoidy Walbecka, Clarke'a i tzw. elipsoidy wyrównującej. W późniejszym czasie obliczenia te przepracowano uwzględniając wymiary elipsoidy Bessela.

mnieszenie fotograficzne mapy 1 : 21 000. Począwszy od roku 1907 mapa wiorstowa była opracowywana i wydawana na podstawie oryginalnych zdjęć terenowych wykonywanych w tej samej skali. Poszczególne arkusze mapy wiorstowej, wydawanej w pierwszym okresie, posiadały format trapezów o wymiarach 8' wzdłuż równoleżnika i 10' wzdłuż południka. Mapa ta ze względu na metodę opracowania była przeładowana szczegółami i z tego względu mało czytelna. Arkusze mapy wiorstowej wykonane na podstawie oryginalnych zdjęć terenowych posiadają format trapezów o wymiarach 15' wzdłuż równoleżnika i 10' wzdłuż południka. Jako powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela. Długości geograficzne liczono od południka Pułkowo. Mapa opracowana została w odwzorowaniu wielościennym, a poszczególne trapezy o bokach prostoliniowych konstruowano w ten sam sposób jak trapezy mapy półwiorstowej.

Oprócz sytuacji mapa zawiera rzeźbę terenu przedstawioną warstwicami w odstępach co 4 sążnie.

Na podstawie map 1 : 21 000 i 1 : 42 000 rozpoczęto w latach 80 ubiegłego stulecia wydawanie mapy w skali 1 : 84 000, zwanej dwuwiorstową (1000 sążni czyli 2 wiorsty w 1 calu). Poszczególne arkusze tej mapy posiadały format 27' wzdłuż równoleżnika i 15' wzdłuż południka. Jako powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela. Długości geograficzne liczono od południka Pułkowo. Budowę trapezów poszczególnych arkuszy mapy wykonywano sposobem stosowanym przy mapach 1 : 21 000 i 1 : 42 000. Dla oznaczenia poszczególnych arkuszy mapy wprowadzono numerację pasów cyframi rzymskimi (wzrastającymi w kierunku południowym) oraz numerację słupów cyframi arabskimi (wzrastającymi w kierunku wschodnim).

Mapa oprócz sytuacji zawiera rzeźbę terenu przedstawioną warstwicami o cięciach co 2 sążnie.

Drogą przeróbki map rosyjskich w skalach 1 : 42 000 i 1 : 84 000 Niemcy w okresie przed oraz w czasie pierwszej wojny światowej wydali mapę w skali 1 : 100 000. Mapa ta znana jest pod nazwą „Karte des westlichen Russlands“. Cięcia arkuszy zostały zmienione i dostosowane do cięcia map niemieckich. Wydanie to zawiera sytuację w kolorze czarnym i warstwice w kolorze brązowym. Cięcia warstwic pozostawiono co 4,26 m (tj. co 2 sążnie), a niekiedy co 2,13 m (tj. co 1 sążeń), natomiast warstwice opisano naprzemian co 4 m i 5 m.

Wysokości punktów przeliczono na metry i podano w liczbach okrągłych.

5. *Mapy polskie w skalach 1:25000 i 1:100000 wydane przez W. I. G. w okresie międzywojennym*

Spośród map wydanych w okresie międzywojennym przez W. I. G. najbardziej nas interesują mapy w skalach 1 : 25 000 oraz 1 : 100 000 ze względu na możliwość ich wykorzystania przy pracach związanych z planowaniem gospodarczym na tych obszarach, dla których mapa użycia powierzchni ziemi nie została jeszcze wykonana.

W pierwszym okresie swych prac W. I. G. ograniczył się do wykonania reprodukcji lub przeróbek map niemieckich, austriackich i rosyjskich wydanych przed pierwszą wojną światową (pierwsze wydanie mapy 1 : 100 000 oraz mapy 1 : 25 000). Później przystąpiono do opracowania i wydawania map według instrukcji polskich, początkowo w oparciu o istniejący materiał mapowy reambulowany w terenie (Mapa Polska 1 : 100 000 w odwzorowaniu wielościennej), następnie na podstawie oryginalnych zdjęć topograficznych.

Jako powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela. Długości geograficzne liczono od Greenwich, aczkolwiek podział na arkusze sekcyjne przyjęto od południka Ferro¹⁾.

Do opracowania map w skalach 1 : 25 000 i 1 : 100 000 przyjęto w roku 1929 wiernokątne quasistereograficzne odwzorowanie Roussilhe'a, przystosowując je do obszaru Polski. W celu uzyskania możliwie najbardziej równomiernego rozkładu zniekształceń przyjęto elipsoidę Bessela o wymiarach skurczonych o 1 : 2000 ich wartości. Przyjęte odwzorowanie otrzymało nazwę „quasistereograficznego odwzorowania Wojskowego Instytutu Geograficznego“. Jako punkt główny odwzorowania przyjęto punkt o współrzędnych geograficznych:

$$\varphi_0 = 52^{\circ}$$

$$\lambda_0 = 22^{\circ}$$

Arkusze mapy w skali 1 : 100 000 posiadają format trapezu a wymiarach 30' wzdłuż równoleżnika i 15' wzdłuż południka. Arkusze tej mapy oznaczano wprowadzając numerację pasów i słupów. Pasy wzrastają na południe, słupy — na wschód. Począwszy od roku 1931 mapa ta była wydawana jako mapa czterokolorowa (sytuacja i opis w kolorze czarnym, wody w niebieskim, lasy w zielonym i warstwice w brązowym, przy czym kolory niebieski i zielony były kolorami nadrukowymi na rysunek czarny).

¹⁾ Przyjęto długość geograficzną południka Ferro 17° 40' na zachód od południka Greenwich.

W czasie ostatniej wojny światowej Niemcy reprodukowali dla potrzeb wojskowych polską mapę 1 : 100 000 drogą fotolitograficzną w kolorze czarnym, bądź wielokolorowo (w arkuszach pojedynczych lub poczwórnych).

Arkusze mapy 1 : 25 000, opracowane według instrukcji polskich, posiadają format 10' wzdłuż równoleżnika i 5' wzdłuż południka. Arkusze tej mapy oznaczone są numeracją pasów i słupów odpowiednich arkuszy mapy 1 : 100 000, z dodaniem litery alfabetu w układzie:

A B C

D E F

G H I.

Mapa 1 : 25 000 wydana była zasadniczo jako jednoobarwna na podstawie materiału mapowego odziedziczonego po zaborcach, reambulowanego w terenie. W oparciu o oryginalne zdjęcia topograficzne wydano do roku 1939 zaledwie parę setek arkuszy na ogólną ilość około 4500.

Mapy 1 : 100 000 i 1 : 25 000 w wydaniu oryginalnym posiadają siatkę kilometrową odwzorowania quasistereograficznego W. I. G., o bokach odpowiednio równych 2 cm (czyli 2 km w terenie) i 4 cm (czyli 1 km w terenie).

III. Uwagi i wnioski

Odwzorowanie Gaussa-Krügera zyskuje coraz większe rozpowszechnienie dla prac geodezyjnych i map topograficznych. Poza Polską odwzorowanie Gaussa-Krügera stosowane jest w Związku Radzieckim (w układzie sześć- i trzystopniowych pasów południkowych), Niemczech, Norwegii, Szwecji, Finlandii, Anglii, Austrii, Jugosławii, Włoszech, Bułgarii, Portugalii, Turcji, Egipcie oraz w szeregu kolonii afrykańskich. Ponadto na podkreślenie zasługuje fakt, że IX Konferencja Międzynarodowej Unii Geodezyjnej i Geofizycznej, która odbyła się w Brukseli w roku 1951 — stwierdzając celowość przyjęcia we wszystkich krajach świata jednego typu odwzorowania kartograficznego — uznała, że najbardziej odpowiednie odwzorowanie dla robót geodezyjnych i map topograficznych jest odwzorowanie „transwersalne Mercatora“ (Gaussa-Krügera) z zastosowaniem sześciostopniowych pasów południkowych w układzie słupów międzynarodowej mapy w skali 1 : 1 000 000. W związku z tym konferencja zaleciła, aby wszystkie państwa, w których stosowane są inne odwzorowania kartograficzne, przyjęły odwzorowanie „transwersalne Mercatora“ do nowopodejmowanych prac geodezyjnych i topograficzno-kartograficznych¹⁾.

¹⁾ Patrz „Bulletin géodésique“ nr 22 z r. 1951 (Organ Międzynarodowej Asocjacji Geodezyjnej).

W świetle powyższych faktów nasuwa się wniosek, że słuszna i dalekowzrocza była decyzja Głównego Urzędu Pomiarów Kraju (w roku 1947) w zakresie przyjęcia odwzorowania Gaussa-Krügera dla robót geodezyjnych i kartograficznego opracowania mapy gospodarczej kraju.

Mając jednak na uwadze, zarówno z punktu widzenia naukowego, jak i technicznego, niewątpliwe korzyści, jakie wypływają z przyjęcia jednolitych założeń dla podstawowych robót geodezyjnych i kartograficznych prowadzonych przez różne państwa, należałoby rozważyć następujące problemy:

1. Celowość zastąpienia elipsoidy Bessela — jako powierzchni odniesienia dla prac geodezyjnych i kartograficznych — międzynarodową elipsoidą Hayforda (z r. 1910), bądź elipsoidą Krasowskiego (z r. 1940).

2. Celowość wprowadzenia sześciostopniowych pasów południkowych (o skali liniowej w południkach osiowych równej jedności) dla ogólnopństwowych prac geodezyjnych i kartograficznych, z pozostawieniem pasów trzystopniowych dla geodezyjnych i kartograficznych prac o charakterze specjalnym na poszczególnych obszarach kraju (np. mapy górnicze).

3. Celowość wprowadzenia dla wszystkich map topograficznych — niezależnie od ich skali, charakteru i przeznaczenia — jednolitego podziału na arkusze sekcyjne oraz jednolitej nomenklatury w nawiązaniu do międzynarodowej mapy świata w skali 1 : 1 000 000.

Dośkonały przykład właściwego rozwiązania tego problemu dała kartografia Związku Radzieckiego, wprowadzając jednolitość i daleko posuniętą konsekwencję w przyjętej nomenklaturze i podziale sekcyjnym dla wszystkich wydawanych w Związku map topograficznych. Wymieniony przykład ilustruje zamieszczona poniżej tablica 6.

Tablica 6

Skala	Rozmiary arkuszy sekcyjnych map		Przykład nomenklatury
	wzdłuż południka	wzdłuż równoleżnika	
1 : 1 000 000	4°	6°	N-37
1 : 500 000	4° : 2 = 2° = 120'	6° : 2 = 3°	N-37-Γ
1 : 200 000	120' : 3 = 40'	3° : 3 = 1° = 60'	N-37-XXVIII
1 : 100 000	40' : 2 = 20'	60' : 2 = 30'	N-37-103
1 : 50 000	20' : 2 = 10'	30' : 2 = 15'	N-37-103-Б
1 : 25 000	10' : 2 = 5'	15' : 2 = 7',5	N-37-103-Б-Б
1 : 10 000	5' : 2 = 2',5	7',5 : 2 = 3',75	N-37-103-Б-Б-1

4. Celowość wprowadzenia dla wszystkich map topograficznych, niezależnie od ich skali i przeznaczenia, jednolitego typu znaków umownych

przynajmniej dla zasadniczych elementów mapy, jak np. granice administracyjne, miejscowości, komunikacja, hipsometria, batymetria itp.

Wniosek pierwszy uzasadniony jest tym, że w niewielu już krajach europejskich pracuje się na elipsoidzie Bessela, której rozmiary wyznaczone 111 lat temu dość znacznie odbiegają od rozmiarów elipsoidy Hayforda i Krasowskiego; daje się to wyraźnie zauważyć przy pracach geodezyjnych prowadzonych według jednolitych założeń na wielkich obszarach. Jako przykład może służyć Związek Radziecki, gdzie trudności w wyrównaniu jednolitej sieci państwowej na elipsoidzie Bessela zmusiły do wprowadzenia w roku 1946 elipsoidy Krasowskiego, której elementy zostały ustalone na podstawie nowoczesnych pomiarów geodezyjnych i geofizycznych, zakrojonych na olbrzymią skalę.

Za pozytywnym ustosunkowaniem się do wniosku drugiego przemawiają następujące względy:

a) Sześciostopniowe pasy południkowe dla ogólnopaństwowych robót geodezyjnych oraz trzystopniowe pasy południkowe dla robót lokalnych o specjalnym charakterze — zostały przyjęte w Związku Radzieckim tj. na obszarze wynoszącym 15% powierzchni wszystkich kontynentów kuli ziemskiej. Ponadto sześciostopniowe pasy przyjęły już niektóre kraje kontynentu europejskiego. W Polsce sześciostopniowe pasy stosowane są dla wojskowych prac geodezyjno-topograficznych.

b) Sześciostopniowe pasy południkowe odwzorowania Gaussa-Krügera zaleciły uchwały IX Konferencji brukselskiej Międzynarodowej Unii Geodezyjnej i Geofizycznej z roku 1951.

c) Pasy sześciostopniowe najzupełniej odpowiadają dokładnościom wymaganym od mapy 1 : 10 000, powodują bowiem zniekształcenia liniowe nie przekraczające $\frac{1}{2000}$.

d) Wprowadzenie pasów sześciostopniowych dla prac związanych z wyrównaniem sieci triangulacyjnych zaspokoi potrzeby zarówno cywilnej, jak i wojskowej służby geodezyjno-topograficznej, ograniczając obliczanie współrzędnych w dwóch systemach (pasy sześć- i trzystopniowe) do potrzeb lokalnych.

Przyjęcie założeń podanych we wnioskach trzecim i czwartym wprowadzi daleko idącą normalizację i systematykę w opracowaniu różnoskalowych map topograficznych oraz ułatwi korzystanie z tych map. Proponuję przy tym wprowadzenie podziału sekcyjnego i nomenklatury przyjętej przez Związek Radziecki, tj. w nawiązaniu do międzynarodowej mapy świata w skali 1 : 1 000 000, ze względu na przejrzystość i prostotę tego systemu.

Należy zwrócić uwagę na trudność właściwego rozwiązania problemu poruszonego we wniosku pierwszym. Rozważając bowiem sprawę przyjęcia powierzchni tej czy innej elipsoidy jako powierzchni odniesienia dla robót geodezyjnych i kartograficznych, prowadzonych na obszarze jakiegoś państwa — należy uwzględnić w pierwszym rzędzie wielkość jego terytorium, następnie problem ujednoczenia podstawowych założeń geodezyjnych dla większego zespołu sąsiadujących ze sobą państw. I tak jeśli rozpatrujemy interesujące nas zagadnienie z punktu widzenia lokalnych potrzeb technicznych jednego niedużego lub średniej wielkości państwa, wówczas trzeba stwierdzić, że kwestia przyjęcia tej czy innej elipsoidy nie ma zasadniczego znaczenia. Inaczej przedstawia się to zagadnienie, jeśli rozważa się je z punktu widzenia unifikacji i normalizacji podstawowych prac geodezyjno-kartograficznych dla wielkiego obszaru obejmującego zespół państw.

Sprawą nieodłączną od problemu przyjęcia takiej czy innej elipsoidy jako powierzchni odniesienia jest sprawa obioru właściwego punktu przyłożenia tej powierzchni do powierzchni geoidy. Trzeba i tu stwierdzić, że przyjęcie dla zespołu pewnej ilości państw jednej elipsoidy, lecz różnych punktów przyłożenia dla poszczególnych państw nie przyniesie większych korzyści.

Powyższe momenty należy wziąć pod uwagę rozważając sprawę wyboru elipsoidy i wydaje się, że właściwe rozwiązanie może być dokonane na podstawie porozumienia zainteresowanych państw.

Na zakończenie pozwolę sobie nadmienić, że zagadnienia poruszone we wnioskach powinny by się znaleźć na warsztacie prac prowadzonych przez Geodezyjny Instytut Naukowo-Badawczy oraz Instytut Geodezji Politechniki Warszawskiej — ze względu na aktualność tych zagadnień oraz korzyści mogące wypłynąć z pozytywnego ich rozwiązania.

Literatura polska

dotycząca zasadniczych problemów poruszonych w referacie

- St. Hausbrandt — Parę uwag dotyczących możliwości uproszczeń przy przeliczaniu kątów z elipsoidy na płaszczyznę odwzorowania Gaussa-Krügera, Biuletyn Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego. Rocznik 1, nr 2, Warszawa 1951.
- St. Hausbrandt — Tablice do interpolacyjnego przeliczania współrzędnych prostokątnych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera na sąsiedni układ trzystopniowy. Geodezyjny Instytut Naukowo-Badawczy, Warszawa 1952.
- J. Pawłowski — Przeliczanie współrzędnych prostokątnych płaskich w odwzorowaniu południkowym wiernokątnym z jednego układu do układu sąsiedniego przy pomocy maszyny do liczenia (Wzory i tablice). Geodezyjny Instytut Naukowo-Badawczy, Warszawa 1949.
- J. Różycki — Odwzorowanie Gaussa-Krügera i jego zastosowanie w Polsce. Geodezyjny Instytut Naukowo-Badawczy, Warszawa 1949.
- J. Różycki — Odwzorowanie Gaussa-Krügera i jego zastosowanie w Polsce. Wydanie drugie zmienione. Geodezyjny Instytut Naukowo - Badawczy Warszawa 1950.

РЕЗЮМЕ

В статье дается характеристика картографической проекции, применяемой на сегодняшний день в Польше при основных геодезических и картографических работах; кроме того статья содержит краткую характеристику топографических карт, являющихся наследствием от государств, ранее оккупировавших Польшу, так же польских карт периода между двумя войнами.

В конце статьи даются выводы относительно унификации и нормализации некоторых заложений для основных геодезических и картографических работ,

В частности выводы эти касаются:

вопроса изменения референц-эллипсоида,

вопроса изменения ширины меридианных зон проекции, принятой для геодезических и картографических работ,

вопроса размеров листов секционных топографических карт а также вопроса унификации типов некоторых условных топографических знаков.

RÉSUMÉ

Cet article donne la caractéristique de la représentation appliquée actuellement en Pologne aux travaux de base géodésiques et cartographiques. A part cela, il contient une brève caractéristique des cartes topographiques laissées par les envahisseurs, ainsi que des cartes polonaises parues entre les deux guerres. La fin de l'article nous présente des conclusions concernant l'unification et la normalisation de quelques principes établis pour les travaux fondamentaux de géodésie et de cartographie. Les conclusions concernent en particulier les questions suivantes: les changements des ellipsoïdes de référence; les changements de la latitude des zones méridiennes admises pour les travaux géodésiques et cartographiques; les représentations; la question du format des feuilles de section des cartes topographiques, ainsi que la question de l'uniformisation du type de certaines dénominations conventionnelles pour les cartes topographiques.

Tadeusz Kochmański

Zagadnienie wyrównywania horyzontu przy pomiarach kierunkowych

1. Wstęp

Istnieje rozbieżność zdań co do sposobu wyrównania różnicy między początkowym i końcowym odczytem na punkt początkowy (wyjściowy) przy pomiarach kierunkowych. Instrukcja austriacka poleca brać średnią z obydwu odczytów, jeśli nie przekraczają one dozwolonej granicy; instrukcja polska M. R. P. z r. 1928 poleca rozrzucić tę końcową odchyłkę równomiernie na wszystkie kierunki; wreszcie ostatnio zaleca się odrzucać końcowy odczyt nie wykorzystując go do prac obliczeniowych.

Jeżeli zwrócimy się do autorytetu prof. K. Weigla, to i u niego nie znajdziemy jasnej odpowiedzi, jakkolwiek skłania się on również do odrzucania ostatniego odczytu. Na str. 204 „Rachunku wyrównawczego“ z r. 1923 czytamy:

„Spostrzeżeń kontrolnych nie używa się z reguły do dalszych rachunków... Przy pomiarach dokonywanych teodolitami o przypuszczalnie minimalnych błędach nastawienia i odczytu można wspomnianą różnicę, o ile jest niewielka, przypisać nieznacznemu przesunięciu się limbusu pod wpływem ruchu alhidady i rozdzielić ją na poszczególne kierunki usuwając w ten sposób ze spostrzeżeń wspomniany błąd systematyczny“.

Powstaje pytanie, jak należy postąpić, by nasze postępowanie było teoretycznie najbardziej uzasadnione. W rzeczywistości istnieje wystarczająco ściśle dla praktyki rozwiązanie tego zagadnienia, które przedstawimy w następnym ustępie.

2. Wzór na rozrzucenie odchyłki zamknięcia horyzontu przy pomiarach kierunkowych

Różnicę między początkowym i końcowym odczytem na ten sam cel możemy przypisać trzem przyczynom:

1. działaniu błędów przypadkowych,
2. „ „ systematycznych,
3. „ „ grubych.

Jeżeli zgodnie z teorią błędów odrzucimy rozpatrywanie błędów grubych, wówczas pozostaną do wyrównania jedynie błędy przypadkowe i systematyczne. Celem wyrównania błędów systematycznych musimy założyć pewną prawidłowość ich powstawania. Możemy np. przyjąć je jako proporcjonalne do czasu pomiaru, albo też do ilości mierzonych kierunków. Ponieważ jednak czas pomiaru można przyjąć średnio jako proporcjonalny do ilości mierzonych kierunków, więc ostatecznie można przyjąć, że błąd systematyczny jest proporcjonalny do ilości kierunków — oczywiście dla tego samego stanowiska. Założenie to nie jest może precyzyjne, ale wystarczające dla praktyki.

Streszczając dotychczasowe założenia i nadając im formę algebraiczną powiemy, że końcowa odchyłka δ zamknięcia horyzontu składa się z sumy algebraicznej dwóch składowych ε i η , czyli:

$$\delta = \varepsilon + \eta \quad (1)$$

Założmy, że składowa ε powstała z powodu działania błędów przypadkowych; składowa η — z powodu działania błędów systematycznych i to w ten sposób, że dla ilości kierunków k , przy pomiarze każdego następnego kierunku, pojawia się błąd systematyczny $\frac{\eta}{k}$.

A więc przyjmijmy, że błąd systematyczny dla i -tego kierunku wynosi $i \frac{\eta}{k}$, gdzie $i = 0, 1, 2, \dots, k$. Poprawka usuwająca ten błąd powinna więc wynosić — $i \frac{\eta}{k}$. Po usunięciu tego błędu pozostanie różnica — między kierunkiem początkowym, tzn. dla $i = 0$, a końcowym, tzn. dla $i = k$ — o wielkości ε . Różnica ta będzie, według założenia, już tylko błędem przypadkowym, a więc powstałym przez błędy celowania i odczytu na punkcie, od którego rozpoczynaliśmy pomiar. Według zasad rachunku wyrównawczego należy przeto wziąć średnią z obu wyników — otrzymamy wówczas dodatkowe poprawki $+\frac{\varepsilon}{2}$ dla początkowego odczytu i $-\frac{\varepsilon}{2}$ dla końcowego.

Nie wpłynie to na wielkość mierzonych kątów, jeżeli wszystkie odczyty zmienimy o tę samą wielkość. Dodajmy więc do wszystkich odczytów wielkość $-\frac{\varepsilon}{2}$. Obecnie całkowite poprawki, składające się z poprawki na skutek błędu systematycznego i poprawki na skutek błędu przypadkowego, będą wynosiły dla kolejnych kierunków:

$$0, -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\eta}{k}, \dots, -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\eta \cdot i}{k}, \dots, -(\varepsilon + \eta).$$

Można powyższe wyrównanie ująć wzorami:

$$v_0 = 0 \quad (2)$$

$$v_i = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\eta \cdot i}{k} \quad \text{dla } 0 < i < k \quad (3)$$

$$v_k = -(\varepsilon + \eta), \quad (4)$$

gdzie v_i dla $0 \leq i \leq k$ oznacza poprawkę dla kolejnych spostrzeżeń kierunków, począwszy od pierwszego, któremu dano wskaźnik zero i zakończywszy na ostatnim, któremu dano wskaźnik k .

3. Techniczne przeprowadzenie wyrównania według wzorów podanych w ustępie drugim

Celem praktycznego zastosowania wzorów (2—4) podanych w poprzednim ustępie, powinniśmy ustalić przeciętny stosunek błędu przypadkowego do systematycznego. Jeżeli bowiem odchyłka

$$\delta = \varepsilon + \eta$$

oraz zakładamy lub znamy stosunek a błędu systematycznego do całkowitej odchyłki (dla danego typu instrumentu, sposobu pomiarów i dla danej indywidualności mierzącego), czyli zakładamy, że zachodzi

$$\frac{\eta}{\delta} = a, \quad (5)$$

gdzie a jest współczynnikiem proporcjonalności, wówczas według wzoru (3) zachodzi:

$$v_i = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\eta \cdot i}{k} = -\frac{\delta - \eta}{2} - \frac{\eta \cdot i}{k} = -\frac{\delta(1-a)}{2} - \frac{a \cdot \delta \cdot i}{k},$$

Otrzymujemy więc wzór:

$$v_i = -\delta \left(\frac{1-a}{2} + \frac{a \cdot i}{k} \right) \quad \text{dla } 0 < i < k. \quad (6)$$

Instrukcja austriacka milcząco przyjmuje, że $\eta=0$, czyli $a=0$ i wówczas $v_i = -\frac{\delta}{2}$ dla $0 < i < k$, co odpowiada średniej wartości z pierwszego i ostatniego odczytu, bez zmiany pozostałych.

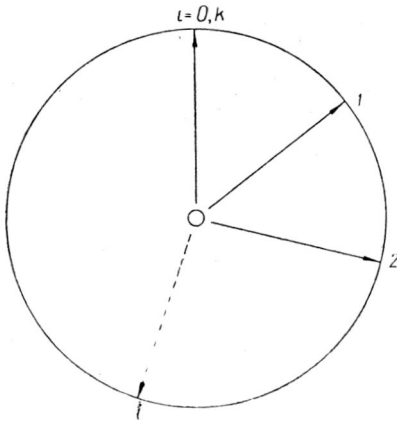
Instrukcja polska z r. 1928 przyjmuje, że $a = 1$, czyli według wzoru (6):

$$v_i = -\frac{\delta \cdot i}{k}.$$

Są to więc dwa przypadki krańcowe. Gdybyśmy zaś przyjęli, że $a = 0,5$ — otrzymamy wzór następujący:

$$v_i = -\delta \left(0,25 + \frac{0,5 \cdot i}{k} \right) \text{ dla } 0 < i < k. \quad (7)$$

A więc według tej metody dla $i = 0$ odczyt pozostawiamy bez zmiany, a dla $i = k$ odczyt po wyrównaniu horyzontu jest równy odczytowi początkowemu. Dla tych dwóch spostrzeżeń możemy więc nie obliczać poprawek.



Rys. 1

Co do wielkości a to najlepiej postąpimy, jeżeli wyznaczymy jej wielkość empirycznie, dla warunków możliwie zbliżonych do tych, jakie zachodzą dla wyrównywanego stanowiska; może ona bowiem, jak to wyżej zaznaczyliśmy, przybierać różne wartości. Powstaje pytanie, jak najpraktyczniej wyznaczyć tę wielkość a , z materiału pomiarowego, który właśnie mamy do dyspozycji.

Przypuśćmy, że na podstawie pewnego materiału pomiarowego ustaliliśmy, że średnia różnica zamknięcia horyzontu wynosi w jednym położeniu lunety δ_{sr} . Równocześnie dla tych samych pomiarów kierunkowych obliczyliśmy średnią różnicę między kątami mierzonymi w dwóch seriach przy dwóch położeniach lunety. Oznaczmy tę różnicę przez m . Jeżeli $\delta_{sr} > m$, wówczas przyczyny tego zwiększenia możemy szukać w działaniu błędu systematycznego; wielkość tego zwiększenia, według prawa przenoszenia błędów, znajdziemy z równania

$$\eta^2 = \delta_{sr}^2 - m^2,$$

a więc

$$a^2 = \frac{\eta^2}{\delta_{sr}^2} = 1 - \frac{m^2}{\delta_{sr}^2};$$

czyli

$$a = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\delta_{sr}^2}}. \quad (8)$$

Po znalezieniu wielkości a empirycznie ze wzoru (8), znajdujemy poprawki kierunków ze wzoru (6) z wyjątkiem kierunku pierwszego, który pozostaje bez zmiany, oraz ostatniego, który po wyrównaniu będzie równy kierunkowi pierwszemu.

4. Przykład liczbowy

Na podstawie pomiaru na 6 stanowiskach w 3 poczetach (tzn. 36 spostrzeżeń) ustalono, że błąd średni

$$m = \sqrt{\frac{3294}{36}} = 9,55 \text{ cc,}$$

średnia różnica zamknięcia horyzontu

$$\delta_{sr} = \sqrt{\frac{4865}{36}} = 11,45 \text{ cc,}$$

a więc według wzoru (8)

$$a = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\delta_{sr}^2}} = 0,56,$$

wobec tego wzór na poprawki kierunków od 2 do przedostatniego (dla tego przypadku) obliczymy korzystając ze wzoru (6)

$$v_i = -\delta \left(\frac{1-a}{2} + \frac{a \cdot i}{k} \right) = -\delta \left(0,22 + \frac{0,56 i}{k} \right) \quad (9)$$

$$\text{dla } 0 < i < k.$$

U w a g a. Przy obliczaniu błędu średniego należy odrzucać spostrzeżenia, co do których istnieje podejrzenie, że obarczone są błędem „grubym“ chociaż o niezbyt dużej wielkości. Dlatego w powyższym obliczeniu odrzucono dane z 4 stanowisk, w których zamknięcia δ przekraczały dla niektórych poczetów podwójny błąd średni, tzn. więcej niż 23 cc. Podobnie odrzucono w tych 6 stanowiskach, które wzięto do obliczeń, trzy różnice kątów, których wielkość przekraczała 23 cc biorąc na ich miejsce następne z kolei różnice.

Dodajmy dalej, że podane tu obliczenie traktowane jest jako przykładowe, ponieważ wnioskowanie na podstawie tylko 6 stanowisk, tzn. 36 danych jest za mało dokładne.

5. Zakończenie

Powstaje pytanie, czy obliczanie poprawek według powyższych wzorów — zbliżone do ścisłości matematycznej — może być praktycznie stosowane i czy praca obliczeniowa spowodowana tym nie będzie zbyt wielka. Otóż praca ta nie przekracza kilkunastu minut na stanowisko, co stanowi niewielki wkład w porównaniu z kosztami triangulacji i osiągniętym podwyższeniem jej dokładności wskutek prawidłowego wyrównania horyzontu.

Drugie pytanie, które się nasuwa, dotyczyć może nierówności wag po wyrównaniu dla kierunku początkowego i kierunków następnych, co utrudnia dalsze wyrównanie. Można na to odpowiedzieć, że jest mniejszym złem przyjęcie jednakowych wag dla wszystkich kierunków do dalszego wyrównania niż odrzucenie nadliczbowego spostrzeżenia.

РЕЗЮМЕ

В статье дается формула уравнивания горизонта при наблюдении направлений. Формула эта учитывает одновременно среднюю квадратическую систематическую ошибку возникающую при наблюдениях и среднюю квадратическую случайную ошибку разности между первым и последним отсчетом при одном положении зрительной трубы. Соотношение между систематической ошибкой и полной невязкой может быть выведено в каждом случае эмпирически.

RÉSUMÉ

Le mémoire présent donne une formule pour la compensation des discordances des observations azimutales. Cette formule tient tout aussi bien compte de l'erreur moyenne systématique commise pendant l'observation, que de l'erreur accidentelle provenant de la différence entre la première et la dernière lecture pour chaque position de la lunette.

Le rapport entre l'erreur systématique et la déviation totale peut être chaque fois déterminé par voie expérimentale.

SPIS TREŚCI

Str.

<i>Czesław Kamela</i> — Wyrównanie sieci triangulacyjnej nowego typu (triangulacji liniowej)	133
<i>Jan Różycki</i> — Odwzorowania kartograficzne stosowane do robót geodezyjnych i map topograficznych szczegółowych na obszarze Polski	161
<i>Tadeusz Kochmański</i> — Zagadnienie wyrównywania horyzontu przy pomiarach kierunkowych	191

СОДЕРЖАНИЕ

Чеслав Камеля — Уравнивание триангуляционной сети нового типа (Линейная триангуляция)	133
Ян Ружицки — Картографические проекции, применяемые при геодезических работах и для крупномасштабных топографических карт на территории Польши.	161
Тадеуш Кохмански — Уравнивание станции при наблюдении способом круговых приемов	191

TABLE DES MATIÈRES

<i>Czesław Kamela</i> — Compensation d'un réseau de triangulation d'un nouveau type (triangulation linéaire)	133
<i>Jan Różycki</i> — Représentations cartographiques appliquées aux travaux géodésiques et aux cartes topographiques détaillées sur le territoire de Pologne	161
<i>Tadeusz Kochmański</i> — Problème du nivellement de l'horizon dans les mesures de direction	191

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ACTA MICROBIOLOGICA POLONICA (kwartalnik) *~ Zeszyt zł 6.—*

Czasopismo poświęcone zagadnieniom mikrobiologii teoretycznej, rolniczej i przemysłowej. Zamieszcza prace oryginalne oraz referaty przeglądowe. Umożliwia pracownikom naukowym i laboratoryjnym ogłaszanie wyników własnych. Ułatwia wymianę doświadczeń i osiągnięć naukowych krajowych oraz zagranicznych w dziedzinie mikrobiologii.

POSTĘPY FIZYKI (kwartalnik) *Zeszyt zł 9.—*

Czasopismo poświęcone upowszechnianiu wiedzy fizycznej w Polsce. Ogłasza monografie syntetyczne obejmujące najnowsze zdobycze fizyki. Zamieszcza komunikaty dla członków PTF oraz krótkie streszczenia prac badawczych przedstawianych na zjazdach fizyków polskich.

KWARTALNIK INSTYTUTU POLSKO-RADZIECKIEGO *Zeszyt zł 5.—*

Czasopismo poświęcone rusycystyce polskiej, polsko-radzieckiej współpracy kulturalnej i naukowej, rozwojowi kultury i nauki narodów Związku Radzieckiego, kwestiom tradycji przyjaźni polsko-rosyjskiej i polsko-radzieckiej. Czasopismo ogłasza: artykuły naukowe, teksty dokumentów archiwalnych, informacje o radzieckich polonicach i polskich sowieticach oraz o zagadnieniach kultury i nauki radzieckiej a zwłaszcza o współpracy kulturalnej polsko-radzieckiej, zamieszcza przeglądy bibliograficzne oraz recenzje.

MYŚL FILOZOFICZNA (kwartalnik) *Zeszyt zł 10.—*

Czasopismo poświęcone zagadnieniom materializmu dialektycznego i historycznego, historii filozofii, postępowym tradycjom polskiej myśli filozoficzno-społecznej, filozofii przyrodoznawstwa, logice, etyce, estetyce oraz innym dziedzinom filozofii. Stoi na stanowisku konsekwentnego materializmu i stawia sobie za cel walkę z wszelkimi kierunkami reakcyjnej, idealistycznej filozofii i socjologii burżuazyjnej. Dąży do upowszechnienia filozofii marksistowsko-leninowskiej w najszerszych kołach pracowników naukowych i działaczy społecznych wszystkich dziedzin.

PRZEGLĄD GEOGRAFICZNY (kwartalnik) *Zeszyt zł 5.—*

Czasopismo zawierające oryginalne artykuły naukowe ze wszystkich ośrodków geograficznych w Polsce z zakresu geografii fizycznej i ekonomicznej. Podaje kronikę ruchu geograficznego w Polsce i na świecie.

ŻYCIE NAUKI (miesięcznik) *Zeszyt zł 7.—*

Czasopismo dostarczające światu naukowemu gruntownych informacji o całości prac badawczych PAN, wyższych uczelni, poszczególnych instytutów, instytucji i placówek naukowych. Poświęca wiele uwagi zagadnieniom dydaktyki i organizacji szkół wyższych, jak również życiu społeczno-organizacyjnemu pracowników nauki. Uwzględnia problemowe zagadnienia teoretyczne, wskazuje kierunkowe rozwiązania w ramach poszczególnych dyscyplin, łączy je z praktyką dydaktyczną wyższych uczelni.

Do nabycia w księgarniach DOMU KSIĄŻKI. Wysyła za zaliczeniem Księgarnia Naukowa Domu Książki, Warszawa, Krak. Przedm. 7.



ERRATA DO NR 5 „GEODEZJI I KARTOGRAFII”

str.	wiersz od góry	wiersz od dołu	jest	powinno być
136		1	metodę	metoda
137	11		S_{ik}	\bar{S}_{ik}
143		5	w równania (2)	w równaniu (24)
152		4-ty w tabeli	$\lg \cos \varphi_{ki}$	$\lg \cos \alpha_{ki}$
154	3-i w tabeli 1 w części nakładu		576 583,69	5768 583,69
156	3-i w tabeli		1,434 551.488	1434 551 488
156		6	$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{in} \cdot \Delta S_{i-n}$	$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_{in} \cdot \Delta S_{i-n}$
157	6 w ost. kol. tabeli		-0,094	+0,094
160	6		pod punktem 2)	pod punktem b)
173		10	$\delta'' = 0,00253(x_l - x_p)y_s$	$\delta'' = 0,00253(x_l - x_p)y_s$