Na prawach rękopisu

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

Politechniki Wrocławskiej

Analiza drgań i stateczności niepryzmatycznych, cienkościennych elementów konstrukcji prętowych

Raport serii PRE nr 5/2023

Praca doktorska

mgr inż. Józef Szybiński

Słowa kluczowe:
pręty cienkościenne,
drgania swobodne,
stateczność,
warunki brzegowe,
szeregi ortogonalne.

Promotor: dr hab. inż. Piotr Ruta, prof. uczelni

Wrocław, maj 2023 r.

Autor:

1. mgr inż. Józef Szybiński ……...…….

Politechnika Wrocławska

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

Katedra Mechaniki Budowli i Inżynierii Miejskiej

Wybrzeże Wyspiańskiego 27

50-370 Wrocław

tel. 71 320 48 46

e-mail: jozef.szybinski@pwr.edu.pl

Raport został złożony do Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w maju 2023 r.

Lista odbiorców:

Recenzenci	2 egz.
Promotor	1 egz.
Autor	1 egz.
Biblioteka Główna	1 egz.
Archiwum W-2	1 egz.
Razem	6 egz.

PODZIĘKOWANIA

W tym miejscu chciałbym podziękować mojemu promotorowi dr. hab. inż. Piotrowi Rucie prof. uczelni za okazaną pomoc, cenne uwagi i sugestie, które wpłynęły na ostateczny kształt tej pracy. Życzliwość, wsparcie i zaufanie, którym mnie obdarzył będę zawsze pamiętać i będą dla mnie zawsze cechami idealnego szefa. Miałem w życiu ogromne szczęście, że mogłem realizować pracę pod okiem tak wspaniałego specjalisty, jakim jest Pan Profesor, ale przede wszystkim, że mogłem współpracować z takim Człowiekiem. Realizując swoje zawodowe zainteresowania zawsze mogłem liczyć na Pana Profesora, w tym poświęcony czas i wiele inspirujących rozmów, z których wynikały interesujące wnioski wzbogacające tą pracę.

Osobne, równie ważne, podziękowania składam na ręce mojej rodziny w tym w szczególności mojej żony Anety, na którą zawsze mogłem liczyć, która mnie wspierała i niejednokrotnie odciążała mnie w moich obowiązkach domowych oraz rodzicielskich. Słowa podziękowania należą się także moim rodzicom, którzy także zawsze mnie wspierali.

Spis treści

1. Wstęp 7
1.1. Wprowadzenie 7
1.2. Przegląd literatury 8
1.3. Cel pracy 34
1.4. Zakres pracy 37
2. Matematyczny opis prętów cienkościennych 40
2.1. Wprowadzenie 40
2.2. Opis geometrii pręta cienkościennego 40
2.3. Wyprowadzenie zależności kinematycznych i funkcji określających stan odkształcenia dla zagadnienia liniowego 44
2.4. Wyprowadzenie nieliniowych składników tensora odkształcenia 47
2.5. Wyprowadzenia zależności opisujących stan naprężenia 50
3. Równania opisujące przemieszczenia pręta cienkościennego 57
3.1. Opis sposobu wyprowadzenia równań 57
3.2. Energia potencjalna odkształcenia sprężystego – część liniowa 58
3.3. Energia potencjalna odkształcenia sprężystego – część nieliniowa 61
3.4. Energia potencjalna od naprężeń wstępnych 70
3.5. Energia kinetyczna 77
3.6. Praca obciążenia zewnętrznego 81
4. Rozwiązywanie zagadnień mechaniki przy pomocy szeregów ortogonalnych Gegenbauera 84
4.1. Wprowadzenie 84
4.2. Wielomiany Gegenbauera – definicja 84
4.3. Metoda rozwiązania układu równań różniczkowych 87
5. Zagadnienie własne pręta cienkościennego 91
5.1. Wprowadzenie 91
5.2. Sformułowanie zagadnienia 91
5.3. Rozwiązanie zagadnienia 94
5.4. Przykłady numeryczne 99
5.5. Analiza otrzymanych wyników 112
6. Analiza wpływu zmiany położenia punktu podparcia, w ramach tego samego przekroju, na drgania belek cienkościennych 114
6.1. Wprowadzenie 114
6.2. Sformułowanie zagadnienia 115
6.3. Przykłady numeryczne 116
6.4. Analiza wyników numerycznych 142
6.5. Rozwiązanie analityczne zagadnienia własnego dla drgań skrętnych 143
6.6. Wnioski 144
7. Analiza wpływu „lekkiego” zakrzywienia osi pręta cienkościennego na odpowiedź dynamiczną układu 146
7.1. Wprowadzenie 146
7.2. Sformułowanie zagadnienia 146

7.3. Przykłady numeryczne 147
7.4. Wyniki numeryczne 154
7.5. Analiza otrzymanych wyników 161
8. Zagadnienie stateczności pręta cienkościennego 165
8.1. Wprowadzenie 165
8.2. Sformułowanie zagadnienia 165
8.3. Rozwiązanie zagadnienia 168
8.4. Przykłady numeryczne 174
8.5. Analiza otrzymanych wyników 182
9. Analiza stateczności cienkościennego układu prętowego 184
9.1. Wprowadzenie 184
9.2. Sformułowanie zagadnienia 184
9.3. Przykłady numeryczne 186
9.4. Analiza otrzymanych wyników 189
10. Podsumowanie 190
Literatura 196
Streszczenie 203

1. Wstęp

1.1. Wprowadzenie

Zagadnienie drgań i stateczności niepryzmatycznych, cienkościennych elementów konstrukcji prętowych ma duże znaczenie praktyczne, ze względu na powszechne zastosowanie w rzeczywistych konstrukcjach budowlanych niepryzmatycznych prętów o przekroju cienkościennym. Rozwiązanie problemu drgań i stateczności cienkościennych konstrukcji prętowych jest szczególnie skomplikowane, gdy parametry układu, takie jak charakterystyki geometryczne i materiałowe przekroju poprzecznego, są zmienne na długości pręta. W ogólnym przypadku zmienność tych charakterystyk powoduje bowiem zakrzywienie osi utworzonych przez środki ciężkości i środki ścinania przekrojów poprzecznych. Wówczas równania drgań i stateczności w ogólnym przypadku opisane są sprzężonym układem 4 równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach, co praktycznie uniemożliwia otrzymanie ścisłego rozwiązania analitycznego. Wyjątkiem są tutaj szczególne przypadki, gdy przekrój poprzeczny jest bisymetryczny i liniowo zmienny. Wówczas współczynniki te przyjmują prostą określoną postać (np. są funkcjami liniowymi, parabolicznymi itp.). Stopień skomplikowania problemu oraz brak ogólnych rozwiązań sprawiają, że zagadnienie to jest również interesujące z poznawczego punktu widzenia.

Metodą najczęściej stosowaną do analizy drgań i stateczności tego typu układów jest metoda elementów skończonych (MES). Wykorzystywane są tutaj między innymi modele bazujące na prętowych elementach skończonych o 14 stopniach swobody, przy czym z reguły niepryzmatyczne elementy konstrukcji modelowane są pryzmatycznymi elementami skończonymi o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym. Profesjonalne oprogramowanie stosujące tę metodę pozwala na rozwiązanie zagadnień utraty stateczności oraz zagadnień dynamicznych (zagadnienie własne, analiza drgań wymuszonych). Zaletą tej metody jest możliwość rozwiązania dużych, nieregularnych układów, wadą natomiast ograniczona dokładność rozwiązania. Dokładność ta z reguły jest wystarczająca z punktu widzenia praktyki projektowej, może natomiast być zbyt mała przy analizie złożonych zagadnień dynamicznych lub zagadnień utraty stateczności.

W celu dokładniejszej analizy zachowania niepryzmatycznych cienkościennych konstrukcji prętowych, w przypadku metody elementów skończonych, stosuje się również płytowe oraz bryłowe elementy skończone. Modele takie umożliwiają uwzględnienie efektów lokalnych w analizie konstrukcji cienkościennych, takich jak lokalna utrata stateczności lub

lokalne drgania ścianki elementu cienkościennego. Prowadzi to jednak do zdecydowanie bardziej rozbudowanego modelu obliczeniowego i dużo bardziej złożonego zadania o znacznej liczbie stopni swobody. Modele te z uwagi na swoją złożoność obliczeniową w praktyce inżynierskiej ograniczają się do pojedynczych elementów konstrukcyjnych lub niewielkich układów prętowych.

Inne rzadziej stosowane metody numeryczne do rozwiązania tego typu zagadnień to metoda kwadratur różnicowych DQM (*Differential Quadrature Method*), w której określa się pochodne poszukiwanej funkcji poprzez wartości funkcji wyjściowej, lub metoda transformacji różnicowej DTM (*Differential Transform Method*), w której uzyskuje się współczynniki rozwinięcia poszukiwanego rozwiązania w szereg Taylora.

Do rozwiązania układu równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach, który opisuje rozpatrywane zagadnienia, często stosuje się różnego rodzaju metody aproksymacyjne, w których rozwiązań poszukuje się w postaci skończonych lub nieskończonych szeregów. Przykładem takich metod są: metoda Galerkina, metoda Ritza, aproksymacja rozwiązań klasycznymi szeregami potęgowymi lub klasycznymi szeregami Fouriera. W metodach aproksymacyjnych dokładność rozwiązania zależy od postaci przyjętej bazy aproksymacyjnej oraz jej rozmiaru. Zaletą metod aproksymacyjnych jest uzyskiwanie rozwiązania w postaci półanalitycznej, która umożliwia dogodne wykonywanie dalszych przekształceń.

1.2. Przegląd literatury

Problemem analizy konstrukcji prętowych w tym w szczególności analizy drgań i stateczności niepryzmatycznych, cienkościennych elementów konstrukcji prętowych zajmowało się wielu autorów, o czym świadczy bogata literatura dotycząca tego tematu.

W literaturze można znaleźć obszerne prace przeglądowe, w których autorzy zajmowali się zarówno analizą drgań jak i analizą stateczności, m. in. w publikacjach Kim i in. [41], Nguyen i in [65], Rajasekaran i Khaniki [76], [77], Rajasekaran i Nalinaa [78], Soltani i in. [103], [104].

Kim i in. w pracy [41] przedstawili ogólne sformułowanie problemu przestrzennej analizy drgań swobodnych i stateczności cienkościennych pryzmatycznych przestrzennych elementów ramy. Analizę wykonano dla prętów o przekroju bez cech symetrii z uwzględnieniem odkształceń ścinających. W przedstawionym przez autorów modelu

parametry przemieszczenia określone zostały dla dowolnie wybranych osi odniesienia z uwzględnieniem składników drugiego rzędu wynikających z obrotów. W celu określenia dynamicznej i statycznej macierzy sztywności dla jednorodnego, pryzmatycznego elementu belkowo-słupowego o przekroju cienkościennym bez cech symetrii wyprowadzono równania różniczkowe pierwszego rzędu na podstawie równań ruchu. Rozwiązanie problemu sprowadzono do rozwiązania zagadnienia własnego. Autorzy wykazali, że wyniki numeryczne uzyskane przedstawioną metodą są zgodne z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych w programie ABAQUS przy zastosowania zarówno cienkościennych elementów belkowych jak i elementów płytowych.

Nguyen i in. w pracy [65] do analizy drgań swobodnych i analizy wyboczenia cienkościennych kompozytowych belek dwuteowych o zmiennych parametrach materiałowych i geometrycznych zastosowali metodę Ritza. Do opisu zmienności parametrów materiałowych na grubość ścianki zastosowano rozkład potęgowy. Równania ruchu zostały wyprowadzone z równań Lagrange'a. W pracy wyznaczono częstotliwości drgań własnych i wartości obciążenia krytycznego powodującego wyboczenie belek cienkościennych zarówno dla teorii uwzględniającej wpływ ścinania na odkształcenia, jak i dla teorii pomijającej jego wpływ. Otrzymane wyniki numeryczne porównano z wynikami uzyskanymi przez innych autorów. W cytowanej pracy autorzy zbadali również wpływ kąta nachylenia włókien, rozkładu materiału, stosunku rozpiętości do wysokości i wpływ odkształcenia ścinającego na wartość krytycznego obciążenia wyboczeniowego i częstotliwości drgań własnych cienkościennych belek dwuteowych, analizując różne warunki brzegowe.

Rajasekaran i Khaniki w pracach [76], [77] wyprowadzili formuły pozwalające na szczegółową analizę wyboczenia i drgań swobodnych niepryzmatycznych belek cienkościennych o dowolnym przekroju otwartym i zamkniętym. Opracowana teoria ogranicza się do małych odkształceń, umiarkowanych ugięć i małych obrotów. Opiera się na założeniu, że odkształcenie ścinające na konturze środkowej powierzchni przekroju poprzecznego pręta jest pomijalne. Korzystając z membranowej teorii powłok, uzyskano dokładne wyrażenia na odkształcenia. W cytowanych pracach przyjęto, że właściwości materiałowe są zmienne zarówno wzdłuż osi belki, jak i w kierunku poprzecznym segmentu płytowego belek. Równania przemieszczeniowe wyprowadzano, przyjmując dowolny układ odniesienia. Do obliczeń charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych wykorzystano całkowanie numeryczne Simpsona oraz kwadraturę całkowania numerycznego Gaussa. Krytyczne obciążenia wyboczeniowe i częstotliwości własne oraz odpowiadające im formy wyboczeniowe i modalne dla różnych schematów belek niepryzmatycznych

wyznaczono z użyciem metody elementów skończonych. W analizach zastosowano cienkościenny element skończony o siedmiu stopniach swobody w każdym węźle. Wyniki uzyskane dla analizowanych przykładów porównano z wynikami prezentowanymi w dostępnej literaturze. Dzięki modyfikacjom sztywności osiowej i poprzecznej wyprowadzone formuły pozwalają na badanie belek kompozytowych z laminatami kompozytowymi wzmocnionymi włóknami.

W pracy Rajasekaran i Nalinaa [78] przedmiotem rozważań jest statyka, zagadnienie własne oraz problem wyboczenia niepryzmatycznych cienkościennych kompozytowych elementów przestrzennych o dowolnym przekroju. Teoria ogranicza się do małych odkształceń, umiarkowanych ugięć i małych obrotów. W pracy wyprowadzono ścisłe, przy przyjętych założeniach, wyrażenia dla odkształceń oparte na membranowej teorii powłok, uwzględniające efekt nieliniowego zwężenia przekroju poprzecznego. Wykorzystując wyprowadzone formuły oraz stosując do całkowania numerycznego kwadratury Gaussa, wyznaczono macierze sztywności i bezwładności prętowego elementu skończonego. Zdefiniowane elementy skończone zastosowano do rozwiązania klasycznych problemów wyboczenia i zagadnień drgań. Krytyczne obciążenia wyboczeniowe, częstotliwości własne oraz odpowiadające im formy wyboczeniowe i modalne wyznaczono za pomocą procedury iteracji Jacobiego.

Soltani i in. w pracach [103], [104] badali wyboczenie giętno-skrętne i drgania swobodne zbieżnych cienkościennych belek-słupów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Równania ruchu wyprowadzono stosując zasadę Hamiltona. Energię odkształcenia wyznaczono z uwzględnieniem naprężeń początkowych. W pracy uwzględniono efekty mimośrodowego (w stosunku do środka ścinania i środka ciężkości) przyłożenia obciążenia. Wyprowadzone równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach rozwiązano metodą szeregów potęgowych, analizując różne schematy podparcia. W zastosowanej metodzie przemieszczenia i zmienne charakterystyki geometryczne przekrojów są aproksymowane wielomianami skończonego stopnia.

W przedstawionych w pracy przykładach numerycznych rozwiązano zagadnienie zginania i skręcania oraz problem drgań swobodnych belek cienkościennych ze zbieżnymi środnikami i pasami oraz różnymi warunkami podparcia. W celu sprawdzenia poprawności i oszacowania dokładności zastosowanej metody otrzymane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych oraz z dostępnymi rozwiązaniami innych autorów.

Zagadnienie drgań prętów cienkościennych było analizowane m. in. w publikacjach Ambrosini i in. [2], Arpaci i Bozdag [6], Borbón i Ambrosini [11], Chen [19], Eisenberger [22], Gere [30], Jang i Kim [39], Machado i Cortínez [57], Mohri i in. [60], Nguyen i in [64].

Ambrosini i in. w pracy [2] wyprowadzili równania drgań belek cienkościennych o przekroju otwartym z uwzględnieniem odkształcalności postaciowej, bezwładności obrotowej przekroju oraz zmiennych charakterystyk przekroju. Równania te wyprowadzono przyjmując założenia Własowa. Równania te mają również zastosowanie do belek pełnościennych i opisują ogólne zagadnienie sprzężonego zginania i skręcania belek prostych. Otrzymane równania zastosowano do wyznaczenia częstotliwości drgań własnych i reakcji sejsmicznej budynku wyposażonego w cienkościenny rdzeń żelbetowy, który ma wytrzymać obciążenia boczne. W celu wykazania ogólności wyprowadzonych równań zastosowano je do analizy drgań belki ceowej o zmiennym przekroju.

W pracy [6] Arpaci i Bozdag analizowali zagadnienie sprzężonych drgań pryzmatycznych belek cienkościennych o niesymetrycznym otwartym przekroju poprzecznym. W cytowanej pracy wyprowadzono i rozwiązano równania różniczkowe dla sprzężonych drgań giętnych i skrętnych. Omówiono również i poddano krytycznej analizie wcześniejsze badania na ten sam temat.

Borbón i Ambrosini w artykule [11] zawarli numeryczno-eksperymentalne badanie częstotliwości drgań własnych belek cienkościennych obciążonych osiowo. W pracy analizowany był wpływ obciążenia osiowego na częstotliwości drgań własnych. Równania ruchu wyprowadzono na podstawie teorii belek cienkościennych Własowa, którą zmodyfikowano tak, aby uwzględniała wpływ podatności na ścinanie oraz bezwładności obrotowej przekroju w wypadkowych naprężeniach. Stałe obciążenie osiowe uwzględniono w równaniach ruchu, zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Pokazano, że różniczkowe równania ruchu są wygodne do analizy w dziedzinie częstotliwości przy użyciu metody zmiennej stanu. W cytowanej pracy zawarto przykłady numeryczne w celu pokazania wpływu obciążenia osiowego przy różnych warunkach brzegowych. Na koniec w pracy przedstawiono testy doświadczalne drgań swobodnych, które pozwalają zweryfikować teorię przedstawioną w pracy i dostarczają dobrej jakości danych, które można wykorzystać do sprawdzenia dokładności i wiarygodność różnych teorii.

Chen w pracy [19] do wyprowadzenia dynamicznych równań równowagi belek cienkościennych o dowolnym przekroju zastosował zasadę Hamiltona. Przemieszczenia zostały zdefiniowane w dowolnie wybranym układzie współrzędnych. W wyniku

zastosowania tej metody otrzymano równania równowagi dynamicznej i naturalne warunki brzegowe. Wyprowadzone równania były silnie sprzężone.

Eisenberger w pracy [22] podał dokładne rozwiązania pozwalające na wyznaczenie częstotliwości drgań skrętnych symetrycznych prętów cienkościennych o otwartym, zmiennym przekroju poprzecznym. W pracy przedstawiono metodę analityczną pozwalającą na utworzenia dynamicznej macierzy sztywności pręta, z uwzględnieniem efektu spaczenia. Opisaną metodę zastosowano w przedstawionym w pracy przykładzie numerycznym. Otrzymane wyniki porównano z wynikami wyznaczonymi metodami przybliżonymi.

Gere w pracy [30] zajmował się analizą skrętnych drgań swobodnych prętów cienkościennych o przekroju otwartym, w których środek ścinania i środek ciężkości pokrywają się. Takimi przekrojami są dwuteowniki o przekroju bisymetrycznym i przekroje typu Z o równych pasach. Wyprowadzono równanie różniczkowe drgań skrętnych uwzględniające efekt spaczenia przekroju poprzecznego. Określono wpływ spaczenia na częstotliwość drgań oraz na formy drgań belek jednoprzęsłowych, analizując różne warunki podparcia. Dla belki swobodnie podpartej wyprowadzano wzór na główne częstotliwości skrętne i wyrażenie określające formy drgań własnych. W przypadku innych warunków podparcia wyprowadzano równania pozwalające na wyznaczenie częstości własnych i przedstawiono ich graficzne rozwiązania.

W pracy [39] Jang i Kim badali zachowanie belki cienkościennej o przekroju skrzynkowym poddanej dynamicznemu obciążeniu skręcającemu. W analizowanym przypadku spaczenie i deformacje przekroju poprzecznego są sprzężone z odkształceniami skrętnymi. W wyniku sprzężenia zagadnienie rozchodzenia się drgań wzdłuż osi belki staje się skomplikowane. Sprzężone zachowanie propagacji fali skręcającej, wypaczającej i zniekształcającej w belce cienkościennej z prostokątnym przekrojem skrzynkowym został zbadany teoretycznie przy użyciu cienkościennej teorii belki wyższego rzędu.

Machado i Cortínez w pracy [57] zbadali wpływ początkowych odkształceń generowanych przez działanie statycznego obciążenia zewnętrznego, a także wpływ podatności ścinającej na dynamiczne zachowanie bisymetrycznych cienkościennych belek zespolonych. Przedstawiona teoria uwzględniania geometryczną nieliniowości układu spowodowaną dużymi przemieszczeniami i obrotami. W celu dyskretyzacji równań opisujących zagadnienie zastosowano wariacyjną metodę Ritza. W rozważaniach uwzględniono belki o przekroju otwartym poddane początkowemu momentowi jednorodnemu, obciążeniu rozłożonemu i obciążeniu skupionemu. Uzyskane w pracy wyniki numeryczne pokazują, że gdy stosunek sztywności na zginanie wzdłuż słabszej osi do

sztywności na zginanie wzdłuż silnej osi jest duży, klasyczna analiza drgań może prowadzić do niedokładnych wyników ze względu na wpływ początkowych przemieszczeń. W pracy zbadano również wpływ rozpiętości belki oraz poziomu przyłożenia obciążenia na wartości częstości własnych dla różnych sekwencji układania laminatu.

Mohri i in. w pracy [60] opisali model nieliniowy, który uwzględnia nieliniowość geometryczną w spaczeniu, zginaniu i skręcaniu. Model został wykorzystany do analizy nieliniowego zagadnienia utraty stateczności. W oparciu o ten model, badano zachowanie się belek cienkościennych po wyboczeniu zarówno pod obciążeniem osiowym i normalnym do osi belki. Do rozwiązania zastosowano metodę Galerkina. Rozwiązania po wyboczeniu są otrzymywane metodą iteracyjną Newtona-Raphsona. Korzystając ze stycznej macierzy sztywności wyprowadzonej z rozwiązania statycznego, przeprowadzono analizę zarówno w fazie wstępnej, jak i po wyboczeniu. Równania opisujące zagadnienie własne sformułowano dla belek o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Dla belek o przekrojach bisymetrycznych i monosymetrycznych wyprowadzono zależności w postaci zamkniętej pozwalające na wyznaczenie częstotliwości własnych.

Nguyen i in. w pracy [64] wyprowadzili rozwiązania analityczne pozwalające na wyznaczanie częstości skrętnych drgań własnych dwuteownika ze stężeniami pośrednimi. Wyprowadzone równania mają proste formy zamknięte i można je zastosować, uwzględniając dowolną liczbę punktów usztywniających. Równania zweryfikowano, porównując uzyskane za ich pomocą wyniki z wynikami wyznaczanymi metodą elementów skończonych. Wykonane porównania potwierdziły poprawność wyprowadzonych równań. Jako przykład praktycznego zastosowania w inżynierii lądowej, uzyskane równania zastosowano do analizy drgań własnych układu podwójnych belek dwuteowych i przeprowadzano serię analiz, których celem było zbadania wpływu liczby punktów usztywniających i całkowitej sztywności skrętnej na drgania skrętne.

W literaturze dotyczącej zagadnienia utraty stateczności niepryzmatycznych prętów cienkościennych szczególnie dużo miejsca poświęcono zagadnieniu zwichrzenia belek cienkościennych (LTB), w tym w szczególności zwichrzenia belek niepryzmatycznych o liniowo zmiennym przekroju. Zagadnienie to polega na utracie płaskiej postaci zginania i jest kluczowym problemem z punktu widzenia praktycznego. Tym zagadnieniem zajmowali się m. in. Andrade i Camotim [3], Andrade i in. [4], [5], Asgarian i in. [7], Benyamina i in. [9], Bradford [12], [13], Challamel i in. [17], Challamel i Wang [18], Gupta i in. [37], Ibañez i Serna [38], Kitipornchai i Trahair [43], [44], Kuś [47]-[49], Mohri i in. [61], [63], Osmani i Meftah [70], Polyzois i Raftoyiannis [73],

Raftoyiannis i Adamakos [74], Rezaiee-Pajand i in. [79], Ronagh i Bradford [80], Soltani [99], Soltani i Asgarian [100], [101], Soltani i in. [105], [108], Suryoatmono i Ho [109], Zhang i Tong [125].

Andrade i Camotim w pracy [3], wykorzystując metody wariacyjne sformułowali równania pozwalające na analizę zwichrzenia monosymetrycznych cienkościennych belek o zbieżnym przekroju. Równania równowagi wyprowadzono, stosując kryterium Trefftza. W celu weryfikacji poprawności i ilustracji możliwości zastosowań wyprowadzonych równań, przedstawiono w pracy szereg przykładów. W przykładach tych analizowano zwichrzenie bisymetrycznych i monosymetrycznych dwuteowych belek swobodnie podpartych i wspornikowych o zbieżnym środniku, obciążonych punktowo. Do rozwiązania wyprowadzonych równań zastosowano metodę Rayleigha-Ritza, wykorzystując do aproksymacji form zwichrzenia funkcje trygonometryczne. Uzyskane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi przez innych autorów. W pracy wykazano, że modelowanie belki zbieżnej jako zespołu segmentów belek pryzmatycznych jest koncepcyjnie niespójne i może prowadzić do niedokładnych wyników. W pracy zawarto również aktualny przegląd jednowymiarowych sformułowań analitycznych opisujących zagadnienie zwichrzenia belek liniowo zbieżnych.

Andrade i in. w pracy [4] przedstawili jednowymiarowy model umożliwiający analizę zwichrzenia niepryzmatycznych belek cienkościennych o monosymetrycznym, otwartym przekroju poprzecznym. Model ten umożliwia uwzględnienie wpływu wstępnego ugięcia przed wyboczeniem. W pracy wyznaczono współczynniki obciążenia krytycznego i formy wyboczenia otrzymane za pomocą zaprezentowanego modelu. Otrzymane wyniki numeryczne porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych przy użyciu dwuwymiarowych powłokowych elementów skończonych (wyniki referencyjne). Autorzy analizowali belki swobodnie podparte i belki wspornikowe o przekroju dwuteowym z pryzmatycznymi półkami i pryzmatycznymi lub liniowo zbieżnymi środnikami. Analizowano zarówno przekroje o jednakowych półkach jak i o półkach różnych. Jako obciążenie belek przyjęto siłę skupioną na końcu wspornika oraz siłę skupioną w środku rozpiętości w przypadku belki swobodnie podpartej. Otrzymane wyniki numeryczne porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych, wykazując ich dobrą zgodność. W pracy odnotowano również istotne rozbieżności dla krótszych belek, które wynikają z występowania odpowiednich zniekształceń przekroju poprzecznego lub miejscowych zjawisk wyboczeniowych.

W pracy [5] Andrade i in. przedmiotem rozważań było zwichrzenie cienkościennej belki niepryzmatycznej dodatkowo podpartej punktowo na jej długości. Autorzy, analizując bisymetryczny dwuteownik o liniowo zbieżnym środniku obciążony od góry, pokazali, jaki wpływ na rozważany problem zwichrzenia mają dodatkowe utwierdzenia liniowo sprężyste lub sztywne. Dodatkowe podparcia mogą mieć charakter translacyjny lub skrętny w słabszej płaszczyźnie. Wynikowy problem własny został rozwiązywany w postaci bezwymiarowej. Do obliczeń numerycznych wykorzystano pakiet COLNEW. W cytowanej pracy autorzy wykonali szczegółową parametryczną analizę, badając skuteczność różnych typów utwierdzenia bocznego, wpływu sztywności utwierdzenia oraz wpływu na wyniki stopnia zbieżności belki niepryzmatycznej. Analiza ta umożliwiła autorom pracy zidentyfikowanie osobliwości zwichrzeniowych i wyboczeniowych belek niepryzmatycznych oraz podanie fizycznego wyjaśnienia pozornie paradoksalnych wyników.

Asgarian i in. w pracy [7] przedstawili teoretyczny model niepryzmatycznej belki cienkościennej i wykorzystali go do analizy stateczność na zwichrzenie niepryzmatycznych belek cienkościennych o dowolnych przekrojach poprzecznych. Równania równowagi i równania ruchu wyprowadzono stosując zasadę Hamiltona. Energię odkształcenia wyznaczono, uwzględniając naprężenia początkowe. W pracy uwzględniono również efekty mimośrodowego (w stosunku do środka ścinania i środka ciężkości) przyłożenia obciążenia. Wyprowadzone równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach rozwiązano metodą szeregów potęgowych, analizując różne schematy podparcia. W zastosowanej metodzie przemieszczenia i zmienne charakterystyki geometryczne przekrojów są aproksymowane wielomianami skończonego rzędu. Do rozwiązania równań różniczkowych czwartego rzędu opisujących zagadnienie utraty stateczności belki ze zmiennymi parametrami geometrycznymi z uogólnionymi warunkami brzegowymi autorzy zastosowali metodę aproksymacyjną wykorzystującą do aproksymacji szeregi potęgowe. Obciążenie powodujące utratę stateczności określono, wyznaczając wartości własne macierzy współczynników wyprowadzonego układu równań algebraicznych. W celu zbadania dokładności i efektywności metody w pracy, przedstawiono rozwiązania kilku przykładów numerycznych. Otrzymane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych przy wykorzystaniu oprogramowania ANSYS i wynikami otrzymanymi przez innych autorów innymi dostępnymi metodami numerycznymi lub analitycznymi.

W pracy [9] Benyamina i in. badali zagadnienie zwichrzenia bisymetrycznych belek cienkościennych o zbieżnych środnikach. W tym celu opracowali nieliniowy model pręta uwzględniający duże skręcenia. Do rozwiązania wyprowadzonych równań równowagi

zastosowano metodę Ritza. Rozwiązując te równania wyprowadzono prosty wzór analityczny umożliwiający analizę zwichrzenia belek o zbieżnych środnikach. Wyprowadzony wzór pozwalał na badanie wpływu na zwichrzenie takich wielkości jak sztywność przekroju, punkt przyłożenia obciążenia i parametru określającego stopień zbieżności. Autorzy dokonali numerycznej weryfikacji proponowanego wzoru analitycznego, rozwiązując kilka przykładów liczbowych. Wykazali, że wyprowadzony wzór daje wyniki zgodne z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych.

Bradford w pracy [12] zastosował metodę elementów skończonych do analizy zwichrzenia, monosymetrycznych niepryzmatycznych belek dwuteowych obciążonych dowolnym obciążeniem i z dowolnymi warunkami podparcia. W rozwiązaniach uwzględniono naprężenia szczątkowe powstające przy spawaniu pasów do środnika oraz przestrzenny rozkład uplastycznienia. Wyniki uzyskane dla analizowanych przykładów porównano z wynikami prezentowanymi literaturze.

Bradford w pracy [13] dokonał przeglądu brytyjskich i australijskich norm projektowania, w których do określenia stanu granicznego zwichrzenia niepryzmatycznych belek dwuteowych, wykorzystuje się metodę stanów granicznych. W cytowanej pracy do wyznaczenia sprężystego obciążenia krytycznego belek zastosowano metodę elementów skończonych. Przedstawiona metoda umożliwia analizę belek w szerokim zakresie, jeżeli chodzi o ich geometrię i warunki obciążenia. W pracy zaproponowano metodę projektowania wykorzystującą dokładne sprężyste rozwiązania krytyczne. Zaproponowana metoda projektowania oraz metody normowe zostały porównane w rozwiązanym w pracy przykładzie.

Challamel i in. w pracy [17] analizowali zwichrzenie liniowo zbieżnych belek wspornikowych wywołane obciążeniem przyłożonym na końcu wspornika. Analityczne rozwiązanie problemu zwichrzenia, w postaci konfluentnych funkcji hipergeometrycznych, wyprowadzono dla wsporników o liniowo zmiennej wysokości. Obciążenie, powodujące wyboczenie, odpowiada najniższemu dodatniemu pierwiastkowi wyznacznika charakterystycznego, wynikającego z ogólnego rozwiązania równania różniczkowego z uwzględnieniem warunków brzegowych. W pracy przedstawiono również rozwiązanie zagadnienia optymalizacji kształtu wspornika, przyjmując jako kryterium optymalizacji maksymalną jego nośności na zwichrzenie (przy założeniu stałej objętości materiału).

W pracy [18] Challamel i Wang przedstawili analizę kryteriów zwichrzenia belek wspornikowych wywołanych obciążeniem skupionym zlokalizowanymi na końcu wspornika i na długości belki wspornikowej. W warunkach, w których wspornik zachowuje stateczność,

rozwiązanie ma postać zamkniętą i wyraża się za pomocą funkcji Bessela. W pracy pokazano, że granica obszaru, w którym konstrukcja zachowuje stateczność zmierza w kierunku linii Dunkerleya, gdy obciążenie pośrednie zbliża się do wierzchołka wspornika. Gdy odległość między oboma obciążeniami jest wystarczająco duża, linia Dunkerleya nie jest już odpowiednia do oszacowania obszaru stateczności. W pracy przedstawiono zestaw wzorów przybliżonych do szybkiego oszacowania obciążenia, powodującego zwichrzenie belki wspornikowej.

Gupta i in. w pracy [37] zastosowali metodę elementów skończonych do analizy zwichrzenia niepryzmatycznych cienkościennych belek dwuteowych. Zaprezentowana w cytowanej pracy metoda umożliwia analizę ciągłych belek dwuteowych o zbieżności liniowej lub kwadratowej z akceptowalną dokładnością. W przedstawionym modelu uwzględniono wpływ lokalizacji obciążeń pręta w różnych punktach przekroju poprzecznego. Przedstawione w pracy analizy parametryczne wykonano dla jednoprzęsłowych i dwuprzęsłowych belek ciągłych, uwzględniając różne formy i stopnie niepryzmatyczności, obciążenia oraz warunków podparcia. Poprawność rozwiązań otrzymanych metodą elementów skończonych została zweryfikowana poprzez porównanie ich z dostępnymi w literaturze wynikami eksperymentalnymi i numerycznymi.

W pracy [38] Ibañez i Serna przedstawili metodę obliczania momentu krytycznego dla niepryzmatycznych prętów cienkościennych. Metoda bazuje na obszernych wynikach badań parametrycznych sprężystego momentu krytycznego belek niepryzmatycznych z różnymi rozkładami momentów zginających. Przedstawiona metoda, zwaną metodą równoważnych momentów, polega na zastąpieniu belki niepryzmatycznej z dowolnym przebiegiem momentów zginających równoważną belką pryzmatyczną. Efektem zastosowania przedstawionej w pracy procedury jest to, że znane w literaturze wyrażenia analityczne stosowane do obliczenia momentu krytycznego dla belki pryzmatycznej można uogólnić i stosować do belek niepryzmatycznych.

Kitipornchai i Trahair w pracach [43], [44] wyprowadzili równania różniczkowe, opisujące zagadnienie giętno-skrętnej utraty stateczności niepryzmatycznych belek dwuteowych na podstawie analizy odkształceń półek zgodnie z założeniami teorii Własowa. Równania te wykorzystano do analizy zwichrzenia belek swobodnie podpartych. W pracy stwierdzono, że w przypadku belek o stałych półkach, w których niepryzmatyczny jest jedynie środnik, zmiany sztywności skrętnej wraz ze zmianą stopnia zbieżności są niewielkie, a w konsekwencji krytyczne obciążenia sprężyste nie zmieniają się znacznie. Natomiast sprężyste obciążenia krytyczne belek o stałej wysokości, które mają zbieżne półki wraz ze

wzrostem stopnia zbieżności zmniejsza się znacznie. Autorzy przeprowadzili testy, w których obciążali obciążeniem skręcającym belki wspornikowe o liniowo zmiennym środniku, otrzymane wyniki potwierdziły przewidywania teoretyczne. Przeprowadzono również testy wyboczenia na swobodnie podpartych belkach dwuteowych, które miały zbieżne półki lub środnik. Otrzymane doświadczalne wartości obciążenia krytycznego były zgodne z wartościami wyznaczonymi teoretycznie.

Kuś w swoich pracach [47]-[49] przedstawił metodę wyznaczania momentu krytycznego niepryzmatycznej stalowej belki cienkościennej ze zmiennym liniowo przekrojem poprzecznym. Do wyznaczenia obciążenia krytycznego zastosował metodę Rayleigh'a – Ritz'a. Autor w swoich pracach obliczenia wykonywał przy użyciu programu Mathematica. Uzyskane wyniki porównywał z obliczeniami numerycznymi wykonanymi metodą elementów skończonych przy zastosowaniu pakietu obliczeniowego ANSYS. W cytowanych pracach zawarto wiele przykładów numerycznych dla różnych schematów statycznych i różnych rozpiętości niepryzmatycznych belek cienkościennych. W pracach analizowano różne schematy obciążenia takie jak obciążenie równomiernie rozłożone, obciążenie siłami skupionymi i obciążenie momentami skupionymi na końcach belki. Przedmiotem analizy był również poziom przyłożenia obciążenia. W pracach wykazano, że nośność obliczeniowa przekrojów belki zmniejsza się znaczniej w przypadku zwężenia szerokości pasów, w porównaniu ze zmniejszeniem wysokości środników przy tych samych wartościach parametrów zbieżności i cechach geometrycznych przekrojów poprzecznych.

W pracy [61] Mohri i in. analizowali globalną stateczność nieusztywnionych na długości cienkościennych pryzmatycznych prętów o przekrojach otwartych. W cytowanej pracy opracowano model pryzmatycznego pręta cienkościennego, wykorzystując go następnie do analizy stateczności belki na zwichrzenie. Zgodnie z europejską normą stalową Eurokod 3 do sprawdzania stateczności belek nieutwierdzonych poprzecznie na długości stosuje się rozwiązanie analityczne. Zależy on od rozkładu momentu zginającego, wpływu punktu przyłożenia obciążenia oraz stopnia monosymetrii przekroju zwanego parametrem Wagnera. Współczynniki C_1, C_2 i C_3 odpowiednio wpływają na te parametry i są podane dla wybranych przypadków obciążeń. Autorzy cytowanej pracy w oparciu o zaproponowany model, stosując metody Ritza i Galerkina ponownie wyznaczyli współczynniki C_1, C_2 i C_3 dla belek swobodnie podpartych. Współczynniki C_1 i C_2 uzyskane metodą Galerkina są zbliżone do współczynników uzyskanych na podstawie normy Eurokod 3. Natomiast współczynniki C_3 zaproponowane przez Wagnera i uzyskane w pracy metodą Galerkina bardzo różnią się od

wyników uzyskanych na podstawie normy Eurokod 3. W pracy omówiono różne rozwiązania oraz porównano je z wynikami uzyskanymi za pomocą metody elementów skończonych.

Mohri i in. w pracy [63] zajmowali się badaniem problemu zwichrzenie pryzmatycznych belek cienkościennych analizując model liniowy i nieliniowy. Przedmiotem rozważań były belki o przekroju monosymetrycznym. W przeprowadzonych analizach uwzględniono różne rozkłady momentów zginających, wpływ poziomu przyłożenia obciążenia oraz efekty związane ze współczynnikiem Wagnera. W rozważanym w pracy zagadnieniu nieliniowym, uwzględniającym występowanie w układzie dużych kątów skręcenia pręta cienkościennego, badano wpływ początkowego odkształcenia układu przed wyboczeniem. Stosując metodę elementów skończonych, zbadano stateczność belek obciążonych na obu końcach momentami gradientowymi ($M_0, \psi M_0, -1 \le \psi \le 1$). W pracy pokazano, że w przypadku belek o monosymetrycznych przekrojach dwuteowych i teowych skutki ugięć przed wyboczeniem są istotne tylko wtedy, gdy szersza półka jest ściskana pod wpływem momentu M_0 i dodatniego gradientu $\psi > 0$. W pracy zbadano również wpływ gradientu momentu na stateczność belek zamocowanych na końcach. W przypadku takich warunków brzegowych w belce powstają znaczne siły osiowe wynikające z nieliniowej deformacji belki.

Osmani i Meftah w pracy [70] badali wpływ odkształceń ścinających na wyboczenie niepryzmatycznych cienkościennych belek o przekroju bisymetrycznym. W pracy analizowano belki o przekroju otwartym i zamkniętym, obciążone kombinacją sił powodujących zginanie i odkształcenia osiowe. W prowadzonych analizach autorzy pracy wykorzystywali nieliniową teorię belki uwzględniającą nieliniowość geometryczną. W równaniach opisujących analizowany model, uwzględniono składowe odkształceń wynikające ze ścinania. Do rozwiązania równań równowagi autorzy zastosowali metodę Ritza. Następnie obliczyli obciążenia wyboczeniowe wyznaczając wartości własne macierzy sztywności. W pracy wykazano zgodność wartości obciążenia krytycznego, wyznaczonego proponowaną w pracy metodą, z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych przy użyciu oprogramowania ABAQUS. Zamieszczone w pracy wyniki liczbowe, dla wsporników i belek swobodnie podpartych z przekrojami otwartymi i skrzynkowymi pokazują, że klasyczne rozwiązanie problemu stateczności ma tendencję do przeszacowania rzeczywistej nośności na wyboczenie krótkich belek wspornikowych o zwężających się przekrojach skrzynkowych.

Polyzois i Raftoyiannis w pracy [73] analizowali utratę stateczności belek z niepryzmatycznymi środnikami, poddanych obciążeniom zginającym. Zgodnie ze specyfikacjami AISC (*American Institute of Steel Construction*) element liniowo zbieżny jest traktowany jako element pryzmatyczny o zmodyfikowanej długości i przekroju identycznym jak przekrój „mniejszego" końca elementu liniowo zbieżnego. Do określenia zmodyfikowanej długości służą współczynniki modyfikujące, na wartość których wpływają takie czynniki jak gradient momentu na długości między stężeniami oraz sposób utwierdzenia sąsiednich przęseł. W cytowanej pracy wpływ tych czynników został ponownie przeanalizowany metodą elementów skończonych i otrzymane wyniki porównano z wartościami proponowanymi w specyfikacjach AISC. Na podstawie uzyskanych rezultatów zaproponowano modyfikacje wytycznych projektowych dla stalowych belek o liniowo zbieżnych przekrojach. Zaproponowane wytyczne obejmowały szerszy zbiór belek w zakresie geometrii i przypadków obciążeń.

Raftoyiannis i Adamakos w pracy [74] przedstawili numeryczną procedurę do określania krytycznego obciążenia powodującego zwichrzenie belek dwuteowych z niepryzmatycznymi środnikami. Współczynniki modyfikujące sprężysty moment krytyczny w odniesieniu do średniego przekroju poprzecznego podano dla różnych współczynników zbieżności. Wyniki przedstawione w formie graficznej porównano z wynikami badań dostępnymi w literaturze. Przedstawioną w artykule metodę można bardzo łatwo zastosować w projektowaniu do analizy zwichrzenia belek niepryzmatycznych o zbieżnym środniku.

W pracy [79] Rezaiee-Pajand i in. badali zwichrzenie niepryzmatycznej belki cienkościennej z uwzględnieniem zmienność parametrów materiałowych zarówno na kierunku podłużnym jak i na kierunku poprzecznym. Założono, że przekrój poprzeczny belki jest symetrycznym przekrojem dwuteowym o liniowo zmiennej wysokości środnika. Przyjęto ponadto, że jest on w sposób ciągły poprzecznie podparty przez więzi rotacyjne na całej długości belki. Prezentowane rozwiązanie otrzymano dla przypadku, w których zmiana modułu sprężystości i modułu odkształcalności postaciowej opisana jest funkcją potęgową. Zmiany tych współczynników następują wzdłuż długości belki i wysokości przekroju. Analizowana belka obciążona była dwoma skupionymi momentami na końcach. Poszukiwane przemieszczenie poprzeczne i kąt skręcenia belki aproksymowano sinusowymi szeregami trygonometrycznymi. Krytyczny moment zginający belki wyznaczono rozwiązując zagadnienie własne. Aby zweryfikować dokładność i poprawność otrzymanych wyników, w pracy rozwiązano kilka przykładów numerycznych.

Ronagh i Bradford w pracy [80] opracowali element skończony służący do analizy lokalnej i globalnej utraty stateczności cienkościennych stalowych konstrukcji prętowych takich jak ramy hal stalowych i mosty stalowe składające się z niepryzmatycznych dwuteowników. Opracowany element skończony uwzględnia zarówno zwężenie pasów, jak i środnika. W elemencie skończonym uwzględniono również pionowe usztywnienia środnika oraz wpływ lokalizacji obciążenia poza środkiem ścinania. Przedstawione sformułowanie zagadnienia prowadzi do ogólnego zagadnienia własnego, w którym obciążenie wyboczeniowe i formy utraty stateczności są wyznaczane przy użyciu powszechnie znanych algorytmów. W pracy przedstawiono przykłady numeryczne. W celu sprawdzenia poprawność i oszacowania dokładność zastosowanej metody otrzymane dla analizowanych przykładów wyniki porównano z wynikami uzyskanymi przez innych autorów. Prezentowaną metodę zastosowano do badania wpływu lokalnych deformacji na wyboczenie typowej ramy hali stalowej pod wpływem obciążeń grawitacyjnych.

W pracy [99] Soltani przedstawił metodę analizy zwichrzenia symetrycznych belek kompozytowych o niepryzmatycznym przekroju dwuteowym. W prezentowanej metodzie do wyznaczenia całkowitej energii potencjalnej i zdefiniowania formuły wariacyjnej dla kąta skręcenia wykorzystuje się klasyczną teorię belek kompozytowych i model Własowa. Obciążenie wyboczeniowe wyznacza się stosując metodę Ritza. Aby zademonstrować dokładność proponowanej metody, przeanalizowano przykłady numeryczne, a otrzymane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych, z wykorzystaniem elementów powłokowych, w programie ANSYS i pokazano ich dobrą zgodność. W cytowanej pracy dla wybranego obciążenia, szczegółowo omówiono wpływ niektórych parametrów, takich jak współczynniki zbieżności, położenie obciążenia poprzecznego i orientacja włókien na stateczność boczną kompozytowych dwuteowników o przekroju niepryzmatycznym o swobodnie podpartych końcach. Uzyskane wyniki pokazują, że nośność na wyboczenie boczne belki zespolonej ze zwężającym się przekrojem dwuteowym znacząco spada, gdy kąt włókien w obu pasach jest obrócony względem osi podłużnej. Maksymalne obciążenie wyboczeniowe dla swobodnie podpartej belki o zbieżnym środniku i pasach pod równomiernie rozłożonym obciążeniem uzyskuje się poprzez umieszczenie włókien w środniku pod kątem +/-45°, natomiast w obu pasach pod kątem 0°.

Soltani i Asgarian w pracach [100], [101] zastosowali metodę elementów skończonych oraz metodę kwadratur różniczkowych do analizy zwichrzenia niepryzmatycznych bisymetrycznych belek dwuteowym ze zmiennymi parametrami materiałowymi na długości belki. Analizę wykonano dla belek o różnych warunkach

podparcia. Równania równowagi wyprowadzono metodą energetyczną z uwzględnieniem teorii Własowa. Układ równań równowagi został następnie przekształcony w pojedyncze równanie różniczkowe, w którym poszukiwaną funkcją jest kąt skręcania. Macierze sztywności i sztywności geometrycznej wyznaczono, wykorzystując do aproksymacji funkcji kształtu sześcienne wielomiany interpolacyjne Hermite'a. W cytowanych pracach przeanalizowano wiele przykładów numerycznych. Szczegółowo omówiono wpływ na zwichrzenie różnych czynników i parametrów takich jak: osiowa zmienność właściwości materiału na długości pręta, współczynników zbieżności dla belek niepryzmatycznych, wartości gradientu momentu zginającego, poziomu przyłożenia obciążenia poprzecznego i warunków podparcia belki. Wyniki zawarte w cytowanych pracach mogą być przydatne w badaniach belek dwuteowych o zbieżnych środnikach i/lub półkach o zmiennych na długości cechach materiałowych.

W pracy [105] Soltani i in. również zajmowali się analizą zwichrzenia przegubowo podpartych niepryzmatycznych belek dwuteowych z parametrami materiałowymi zmieniającymi się wzdłuż osi podłużnej belki. Analiza została wykonana z użyciem metody elementów skończonych. W pracy założono, że właściwości materiałowe belki zmieniają się w sposób ciągły wzdłuż osi podłużnej, zgodnie z procentową objętością materiałów składowych, która jest opisana funkcjami wykładniczymi lub potęgowymi. Do rozwiązania równań różniczkowych zastosowano metodę szeregów potęgowych. Funkcje kształtu wyznaczono używając do ich aproksymacji szeregów potęgowych. W pracy przedstawiono trzy obszerne przykłady numeryczne osiowo niejednorodnych i jednorodnych belek niepryzmatycznych o bisymetrycznym przekroju dwuteowym. Przeanalizowano wpływ różnych parametrów, takich jak osiowa zmiana właściwości materiału, współczynnik zbieżności dla belki niepryzmatycznej, poziom przyłożenia obciążenia poprzecznego.

Soltani i in. w pracy [108] zastosowali metodę różnic skończonych do rozwiązania problemu zwichrzenia niepryzmatycznych belek cienkościennych o dowolnych warunkach brzegowych. W zastosowanej metodzie wszystkie pochodne występujące w równaniu równowagi są zastępowane odpowiednimi różnicami skończonymi w celu otrzymania dyskretnej postaci równania równowagi w postaci macierzowej. Krytyczne obciążenie powodujące zwichrzenie określono, wyznaczając wartości własne otrzymanej macierzy. W celu weryfikacji dokładności stosowanej w pracy metody przedstawiono kilka przykładów numerycznych, w których analizowano zwichrzenia niepryzmatycznych belek cienkościennych. Otrzymane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych, wykorzystującą do aproksymacji elementy powłokowe, w programie ANSYS.

Autorzy dokonali również porównania otrzymanych wyników z ich własnymi rezultatami otrzymanymi w innych pracach przy użyciu metody aproksymacyjnej bazującej na szeregach potęgowych. Wyniki otrzymane w pracy pokazały, że w niektórych przypadkach metoda różnic skończonych pozwala dokładniej określić obciążenie wyboczeniowe, w innych dokładniejsze jest przybliżenie szeregami potęgowymi. W rezultacie autorzy do analizy zwichrzenia zalecają zastosowanie metody hybrydowej, opartej na połączeniu techniki różnic skończonych i metody szeregów potęgowych.

Suryoatmono i Ho w pracy [109] analizowali równania określające normowy współczynnik gradientu momentu C_b. Współczynnik C_b jest stosunkiem między momentem krytycznym w sytuacji zmiennego wykresu momentów, a momentem krytycznym w sytuacji jednorodnego momentu. Podane w normie projektowej AISC współczynniki obciążenia krytycznego dla konstrukcji stalowych są równaniami empirycznymi. Równanie określające współczynnik C_b w wydaniu normy z 1986 r. jest poprawne w przypadku liniowej zmienności momentów gnących między podporami. Zmodyfikowane równanie określające C_b w wydaniu normy z 1994 r. jest poprawne dla szerszej grupy przebiegów momentów gnących. W ocenie autorów cytowanej pracy istniało jednak prawdopodobieństwo, że dla pewnych wykresów momentów normowe równania dadzą błędne wyniki. Autorzy zbadali poprawność obu równań porównując wartości współczynnika C_b obliczone z wykorzystaniem wzorów normowych, z wartościami obliczonym przy użyciu metody różnic skończonych. Analizę przeprowadzono dla kilku przypadków obciążenia. Wyniki numeryczne potwierdziły, że równania do oceny współczynnika C_b w obu wydaniach normy AISC nie są dokładne dla części przypadków analizowanych w cytowanym artykule. Autorzy zaproponowali alternatywne równania do oceny współczynnika C_b dla każdego przypadku obciążenia.

W pracy [125] Zhang i Tong zajmowali się analizą zwichrzenia belek dwuteowych o niepryzmatycznym środniku. Autorzy bazując na teorii Własowa najpierw przeprowadzili analizę liniową z uwzględnieniem efektów niepryzmatyczności belek dwuteowych o zbieżnych środnikach. Następnie, na potrzeby analizy zwichrzenia belek dwuteowych ze zwężającym się środnikiem, zastosowano klasyczną metodę wariacyjną bazującą na całkowitej energii potencjalnej układu. W pracy zawarto przykłady numeryczne, w których wyznaczono obciążenia krytyczne dla niepryzmatycznych wsporników i belek swobodnie podpartych o przekrojach dwuteowych. Obciążenia krytyczne wyznaczone opisaną metodą porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych przy użyciu różnych elementów powłokowych i różnych elementów belkowych. Modele belkowe bazują odpowiednio na metodzie zastąpienia elementów niepryzmatycznych równoważnymi

elementami pryzmatycznymi oraz na typowej teorii belek niepryzmatycznych dostępnej w istniejącej literaturze. Porównanie wyników numerycznych pokazuje, że wyniki oparte na metodzie stosowanej przez autorów w tym artykule są dokładniejsze od wyników uzyskiwanych na podstawie istniejących teorii. W pracy pokazano również, że metoda elementów skończonych wykorzystująca równoważne pryzmatyczne elementy belkowe może dawać wyniki znacznie różniące się od wyników otrzymanych innymi metodami.

Zagadnieniami dotyczącymi utraty stateczności prętów o przekroju cienkościennym zajmowali się również m. in. Achour i Roberts [1], Branford i Cuk [14], Egidio i Vestroni [21], El-Mahdy i El-Saadawy [23], Erkmen i Mohareb [24], [25], Giżejowski [31], Kim i Kim [42], Machado i Cortínez [58], Mohri i in. [62], Nguyen i in. [66], [67], Masquino i Marotti de Sciarra [71], Raftoyiannis i Ermopoulos [75], Ronagh i in. [81], [82], Smith [97], Soltani i in. [106], [107], Yang i Yau [123], Yau [124].

Achour i Roberts w pracy [1] wyprowadzili zależności definiujące nieliniowe odkształcenia dla pryzmatycznych cienkościennych prętów, o otwartym przekroju poprzecznym, poddanych działaniu obciążeń osiowych, zginających i skrętnych. Wyrażenia nieliniowe dla odkształceń zostały wyprowadzone dla modelu prętowego. W przedstawionej teorii pominięto wpływ odkształceń ścinających spowodowanych nierównomiernym zginaniem i skręcaniem. Wyprowadzone formuły zostały sprawdzone przez zastosowanie ich do rozwiązania szeregu problemów sprężystej utraty stateczności, w której istotnym elementem jest dokładna postać wyrażeń nieliniowych.

W pracy [14] Branford i Cuk przedstawili metodę analizy wyboczenia giętno-skrętnego niepryzmatycznych belek-słupów o przekroju dwuteowym z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Sformułowanie przedstawione w pracy stanowi ogólne podejście do problemu, w którym sprzężenie skręcania i zginania zostało uproszczone poprzez przyjęcie osi obrotu pręta w środka środnika. Dokonując tego uproszczenia, autorzy nie odbiegają w swych rozważaniach od ograniczeń innych metod rozwiązań, takich jak stosowanie elementów pryzmatycznych i metody różnic skończonych. W pracy podane zostały macierze sztywności i sztywności geometrycznej, które można wykorzystać w istniejących programach, bazujących na metodzie elementów skończonych. Autorzy wykazali, że wyniki uzyskane prezentowaną w pracy metodą są zgodne z wynikami uzyskanymi bardziej złożonymi metodami.

Egidio i Vestroni [21] w pracy skupili się na numerycznej i doświadczalnej weryfikacji nieliniowego jednowymiarowego modelu pryzmatycznej belki cienkościennej o przekroju otwartym. W rozpatrywanym modelu założono, że belka jest nierozciągliwa na

długości oraz pominięto wpływ odkształceń ścinających. Model uwzględnia nieliniowe składniki wydłużenia spowodowane spaczeniem i skręcaniem. W celu lepszego zobrazowania wpływu tych składników, w pracy poddano analizie belkę o monosymetrycznym przekroju poprzecznym. Autorzy przeprowadzili wstępną analizę, aby określić przekrój belki wspornikowej, dla którego przeważać będzie krzywizna skrętna nad krzywizną giętną. Dla rozpatrywanego w pracy przekroju ceowego, umiarkowanej krzywiźnie giętnej towarzyszy duże odkształcenie skrętne. W pracy uwagę skupiono na analizie odpowiedzi na siły statyczne poprzez badanie stateczności i ścieżek równowagi. Autorzy porównali wyniki analityczne z wynikami uzyskanymi za pomocą dwóch różnych modeli nieliniowych bazujących na metodzie elementów skończonych oraz z wynikami eksperymentalnymi. W pracy uzyskano ciekawe wyniki dla wartości obciążenia krytycznego przy wyboczeniu giętno-skrętnym.

El-Mahdy i El-Saadawy w pracy [23] stworzyli trójwymiarowy model belki cienkościennej, wykorzystując program ANSYS i przeanalizowali wpływ zmiennego stosunku wymiarów półek belki monosymetrycznej na optymalne właściwości użytkowe z uwagi na nośność z uwzględnieniem zwichrzenia. W pracy zbadano smukłe środniki oraz wpływ lokalnego i globalnego wyboczenia i jego korelację z całkowitą nośnością belki. W analizowanych przykładach numerycznych zużycie materiału na pasy jest stałe i zmianie ulegają tylko udziały w pasach ściskanych i rozciąganych, tak aby uzyskać optymalne rozwiązanie projektowe. Głównym celem autorów było przedstawienie bezpośrednich wytycznych projektowych kierowanych do doświadczonych projektantów, które zapewnią najbardziej ekonomiczny dobór rozwiązań projektowych.

Erkmen i Mohareb w pracach [24], [25] wykorzystali metodę wariacyjną do analizy wyboczenia pryzmatycznych elementów cienkościennych. Równania przemieszczeniowe wyprowadzono, na podstawie zmodyfikowanej teorii belek cienkościennych Własowa, przyjmując, w przedstawionej w pracy zmodyfikowanej teorii, niektóre z założeń teorii Własowa m.in. hipotezę sztywnego przekroju poprzecznego i postać wyrażeń na naprężenia, podczas, gdy inny element tej teorii, założenie o zerowaniu odkształcenia ścinającego na powierzchni środkowej, są odrzucane. W celu wyprowadzenia równań równowagi i związanych z tymi równaniami wzorów określających warunki brzegowe, wykorzystano warunek stacjonarności energii. Opisana metoda uwzględnia efekty deformacji ścinającej i efekty lokalizacji obciążenia. W równaniach przemieszczeniowych uwzględniony został również efekt Wagnera. Przedstawiony w pracach szereg przykładów demonstruje poprawność sformułowanych elementów skończonych i możliwość ich zastosowania w wielu różnych zagadnieniach związanych z wyboczeniem konstrukcji cienkościennych.

Prezentowane w pracy przykłady obejmują wyboczenie giętne i skrętne słupa, zwichrzenie belek o różnych warunkach brzegowych wywołane parą momentów skupionych. We wszystkich analizowanych w cytowanych pracach przypadkach poprawność rozwiązania została zweryfikowana poprzez porównanie ze znanymi wynikami uzyskanymi w postaci zamkniętej i/lub numerycznej.

Giżejowski w pracy [31] badał zagadnienia przestrzennej utraty stateczności rygli stalowych konstrukcji szkieletowych, a także belek stropowych opartych na podciągach, które charakteryzują się ograniczoną zdolnością obrotu na podporach. W cytowanej pracy analizowano wpływ sztywności blach czołowych i żeber podporowych oraz wycięć w ich połączeniu z podciągami w stropach stalowych. Rozważania zilustrowano przykładami numerycznymi.

Kim i Kim w pracy [42] przedstawili metodę analizy drgań swobodnych i stateczności przestrzennej, cienkościennych belek zbieżnych i ram przestrzennych, bazującą na metodzie elementów skończonych. Energie kinetyczną i potencjalną układu wyznaczono, stosując zasadę pracy wirtualnej. Wyprowadzane zależności wyznaczono względem dowolnie wybranej osi odniesienia, przyjmując przemieszczenia punktów tej osi jako przemieszczeniowe parametry opisujące zachowanie układu. W rezultacie autorzy otrzymali funkcjonał, w którym występują składniki, uwzględniające nieliniowe odkształcenie sprężyste. Autorzy wyznaczyli macierze bezwładności, sztywności sprężystej i sztywności geometrycznej dla pręta o niesymetrycznym cienkościennym przekroju poprzecznym. Jako funkcje kształtu, w dwuwęzłowym elemencie, przyjęto Hermitowskie wielomiany sześcienne. W macierzach uwzględniono korektę dla obciążeń skupionych i rozłożonych przyłożonych poza przyjętą osią odniesienia. W celu weryfikacji poprawności oraz dokładności przedstawionej metody, autorzy przedstawili przykłady numeryczne, w których rozwiązano zagadnienia drgań własnych oraz problem wyboczenia poprzecznego i skrętnego niepryzmatycznych cienkościennych belek-słupów i ram przestrzennych. Otrzymane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi przez innych autorów.

W pracy [58] Machado i Cortínez przedstawili geometrycznie nieliniową teorię cienkościennych belek kompozytowych, która została opracowana zarówno dla prętów o przekrojach otwartych, jak i zamkniętych, z uwzględnieniem deformacji spowodowanej ścinaniem (ścinanie przy zginaniu i spaczeniu). Sformułowany model nieliniowy wykorzystano do analizy stateczności pryzmatycznych belek cienkościennych wykonanych z materiałów kompozytowych obciążonych skupionymi momentami na końcach, siłami skupionymi lub równomiernie rozłożonym obciążeniem. W celu rozwiązania otrzymanego

nieliniowego układu równań różniczkowych autorzy najpierw zastosowali metodę Ritza, a następnie otrzymane algebraiczne równania równowagi rozwiązali metodą przyrostową Newtona-Rapshona. W artykule analizowano wyboczenie giętno-skrętne i zwichrzenie oraz zachowanie się belek swobodnie podpartych po wyboczeniu, wskazując na wpływ odkształcenia ścinającego dla różnych sposobów układania laminatu i wpływ ugięć przed wyboczeniem na obciążenia wyboczeniowe.

Mohri i in. w pracach [62] zbadali zachowanie się pryzmatycznych belek cienkościennych o przekroju otwartym w przypadku dużych przemieszczeń skręcających. Równania równowagi wyprowadzono dla przypadku sprężystego zachowania belki.

Otrzymane rezultaty autorzy wykorzystali do zdefiniowania belkowego elementu skończonego z dwoma węzłami i siedmioma stopniami swobody w każdym węźle. Ze względu na założenie dużego skręcania i występujące sprzężenie giętno-skrętne, autorzy uzyskali nowe macierze sztywności. Do rozwiązywania otrzymanych równań nieliniowych w cytowanej pracy zastosowano przyrostowo-iteracyjną metodę Newtona-Raphsona. W pracy przedstawiono wiele zastosowań dotyczących nieliniowego i postwyboczeniowego zachowania się belek pod obciążeniem skręcającym i zginającym. Przedstawiony w pracy element belkowy jest efektywny i dokładny w przypadku analizowania bifurkacji i nieliniowego zachowania belek o przekrojach asymetrycznych. W pracy udowodniono, że punkty bifurkacji są zgodne z nieliniowymi rozwiązaniami stateczności. W pracy wskazano zalety modelu i omówiono ograniczenia modeli stosowanych dla liniowej stateczności.

Nguyen i in. w pracach [66], [67] zajmowali się analizą wyboczenia giętnego, skrętnego i giętno-skrętnego kompozytowych belek cienkościennych o przekroju otwartym, o różnych typach rozkładu zmienności parametrów materiału na grubości ścianki. W pracy [66] autorzy analizowali belki obciążone osiowo. Natomiast w pracy [67] przedmiotem analizy były belki obciążone poprzecznie siłami skupionymi, obciążeniem równomiernie rozłożonym i gradientem momentu z uwzględnieniem różnych typów rozkładów parametrów materiałowych. W cytowanych pracach do opisu zmienność parametrów materiałowych na grubość ścianki zastosowano rozkład potęgowy. W wyprowadzonych równaniach autorzy uwzględnili spaczenie przekroju poprzecznego oraz wszelkie sprzężenia strukturalne wynikające z anizotropii materiału. Analizowany problem utraty stateczności został rozwiązany przy użyciu dwuwęzłowego, belkowego elementu skończonego o 14 stopniach swobody. Stosując prezentowaną metodę, wyznaczono krytyczne obciążenie dla cienkościennych monosymetrycznych dwuteowników i ceowników z dowolnym rozkładem cech materiału na grubości ścianki. Uzyskane w pracy wyniki

porównano z wynikami uzyskanymi przez innych autorów, potwierdzając poprawność zastosowanej metody.

Masquino i Marotti de Sciarra w pracy [71] analizowali niepryzmatyczne belki cienkościenne o otwartych przekrojach poprzecznych. Autorzy, wykorzystując podejście wariacyjne, wyprowadzili przemieszczeniowe równania Eulera-Lagrange'a opisujące zagadnienie utraty stateczności. Niepryzmatyczność belki wprowadza dodatkowy składnik, do wyrażenia określającego naprężenia styczne, modyfikujący położenie środka ścinania. Na podstawie dodatniej określoności drugiej wariacji całkowitej energii potencjalnej, określono kryterium stateczności. W pracy wykazano, że równania Eulera-Lagrange'a można wykorzystać do analizy utraty stateczności niepryzmatycznych belek cienkościennych. Metoda analizy stateczności przedstawiona w cytowanej pracy, wyprowadzona została przy założeniu liniowego i sprężystego zachowania konstrukcji.

W pracy [75] Raftoyiannis i Ermopoulos analizowali stateczność sprężystą niepryzmatycznych stalowych słupów obciążonych mimośrodowo o ciągłej lub skokowej zmienności przekroju na długości pręta. Autorzy zbadali również wpływ imperfekcji początkowej. Problem stateczności został sformułowany w sposób umożliwiający analizę większość przypadków spotykanych w zastosowaniach projektowych. Przedstawione sformułowanie opiera się na dokładnym rozwiązaniu równania opisującego wyboczenie słupów o zmiennym przekroju. Dla określenia początkowej imperfekcji w pracy przyjęto kształt paraboliczny zgodnie z zapisami Eurokodu 3. Kryterium plastyczności zostało zastosowane do określenia zniszczenia materiału w konfiguracji wyboczonej. W celu weryfikacji otrzymanych wyników analitycznych, autorzy wykonali nieliniowe analizy metodą elementów skończonych. Wyniki przedstawione w cytowanej pracy mogą być wykorzystane do projektowania niepryzmatycznych słupów stalowych z uwzględnieniem imperfekcji.

Ronagh i in. w pracach [81], [82] zajmowali się nieliniową analizą niepryzmatycznych belek-słupów o przekroju cienkościennym. W pracy [81] autorzy przedstawili teorię nieliniowego odkształcenia osiowego i wypadkowe naprężenia Kirchhoffa dla belki-słupa cienkościennego o przekroju zbieżnym. Równania wyprowadzone w pracy na podstawie pierwszej wariacji potencjału całkowitego mogą być wykorzystane w nieliniowej analizie równowagi. Równania wyprowadzone na podstawie drugiej wariacji potencjału całkowitego mogą być zastosowane do analizy stateczności. W pracy [82] autorzy wykorzystali wyprowadzone równania jako podstawę dla analizy metodą elementów skończonych. Uzyskano wyniki numeryczne dla niepryzmatycznych monosymetrycznych belek

dwuteowych. W zakresie analizy liniowej wykazano zgodność wyników numerycznych z wynikami uzyskanymi przez innych autorów.

Smith w pracy [97] przy wykorzystaniu metody energetycznej i analizy symbolicznej opracował analityczne wyrażenia pozwalające na wyznaczenie krytycznego obciążenia wyboczeniowego słupów niepryzmatycznych. Opracowana teoria ma zastosowanie do każdego słupa, którego zmienność przekroju poprzecznego można zapisać jako funkcję współrzędnej osiowej.

Soltani i in. w pracach [106], [107] badali zagadnienie zwichrzenia belek cienkościennych i wyboczenia giętno-skrętnego belek-słupów cienkościennych, niepryzmatycznych o przekroju dwuteowym przy uwzględnieniu nielokalnego modelu sprężystości. W analizowanych prętach właściwości materiałowe zmieniają się w sposób ciągły wzdłuż osi podłużnej pręta. Równania giętno-skrętne, opisujące problem utraty stateczności zostały wyprowadzone w oparciu o nielokalną teorię sprężystości Eringena i metodę energetyczną z uwzględnieniem założeń teorii belki cienkościennej Własowa. Układ równań opisujących zwichrzenie belki został zredukowany do równania różniczkowego czwartego rzędu zależnego od kąta skręcania poprzez separację pozostałych równań różniczkowych. Obciążenia wyboczeniowe zostały ostatecznie wyznaczone przy użyciu metody kwadratur różniczkowych (DQM), która została wykorzystana w cytowanych artykułach jako narzędzie numeryczne do bezpośredniego rozwiązywania równań różniczkowych. Autorzy w przykładach numerycznych zbadali wpływ niektórych parametrów, takich jak wykładnik potęgi dla rozkładu własności materiałowych, współczynnika niepryzmatyczności, poziomu przyłożenia obciążenia, warunków brzegowych i parametrów nielokalnego modelu sprężystości Eringena, na nośność krytyczną niepryzmatycznych belek dwuteowych.

Yang i Yau w pracy [123] wyprowadzili różniczkowe równania równowagi dla niepryzmatycznej belki dwuteowej oraz zdefiniowali belkowy element skończony uwzględniający efekt nieswobodnego skręcania. W wyrażeniach określających pracę wirtualną uwzględniono efekty nieliniowości geometrycznej. Odkształcenia wyznaczono w oparciu o membranową teorię powłok. Przemieszczenia każdego przekroju poprzecznego zostały określone przy uwzględnieniu założeń teorii Własowa. Wyprowadzone liniowe i geometryczne macierze sztywności mają zastosowanie w analizie wyboczenia i mogą być przydatne w przyrostowej analizie dużych przemieszczeń. Wykorzystując przedstawioną w pracy teorię, można badać różne problemy niestateczności giętno-skrętnej. W pracy

przeanalizowano szereg przykładów i dokonano porównania otrzymanych wyników z innymi istniejącymi rozwiązaniami.

Yau w pracy [124] przedstawił model elementu skończonego do analizy wyboczenia niepryzmatycznych belek dwuteowych obciążonych momentami skręcającymi. W pracy niepryzmatyczny dwuteownik traktowany jest jako układ trzech zwężających się wąskich belek (górny pas, środnik i dolny pas). Całkowitą energię potencjalną niepryzmatycznej belki dwuteowej można bezpośrednio wyrazić, sumując wszystkie wyrażenia określające energię potencjalną belek „składowych" w oparciu o równanie potencjału zwężającej się belki pełnej. Na bazie wyznaczonej całkowitej energii potencjalnej układu wyznaczono liniowe macierze sprężystości i geometrycznej sztywności obciążonego skrętnie elementu belki dwuteowej o niepryzmatycznym przekroju poprzecznym. Efekty drugiego rzędu spowodowane bimomentem i momentem giętno-skrętnym zostały uwzględnione w wyprowadzonej geometrycznej macierzy sztywności. Zawarte w pracy przykłady analizy wyboczenia wykazały, że spaczenie i skręcanie St. Venanta mogą znacząco wpływać na nośność belek dwuteowych na wyboczenie giętne przy obciążeniu skręcającym. Obciążenia krytyczne zbieżnych belek dwuteowych o większej sztywności na spaczenie zostają zmniejszone przez efekt niestateczności spowodowany bimomentem.

Innymi pokrewnymi zagadnieniami dotyczącymi niepryzmatycznych konstrukcji prętowych, w tym również konstrukcji cienkościennych zajmowali się także inni autorzy. Zagadnieniami dotyczącymi drgań swobodnych niepryzmatycznych belek zajmowali się Ghazaryan i in. [33], Kim i in. w pracy [40] przedstawili analizę naprężeń w liniowo zbieżnych belkach teowych. Lee w swojej pracy [50] zajmował się cienkościennymi belkami kompozytowymi. Leung [51] rozważał teorię dynamicznego wyboczenia osiowo-skrętnego. Librescu i in. [54] analizowali problemy drgań i stateczności z uwzględnieniem zjawisk termosprężystych. Optymalnemu projektowaniem ram stalowych zbudowanych z niepryzmatycznych cienkościennych elementów prętowych poświęcona jest praca Saka [94]. Shen i in. [96] zajmowali się analizą drgań łopat wirników w turbinach wiatrowych, przyjmując w analizie jako ich model niepryzmatyczny cienkościenny element prętowy. Soltani i Asgarian w pracy [102] analizowali drgania własne i stateczność niepryzmatycznych belek spoczywających na podłożu Winklera-Pasternaka. Wang i in. [117] zajmowali się optymalizacją geometrii belki, przyjmując jako funkcję celu maksymalną wartość obciążenia krytycznego.

Ghazaryan i in. w pracy [33] metodą transformacji różnicowej zbadali drgania swobodne belek Eulera-Bernoulliego o niepryzmatycznym przekroju poprzecznym

i zmieniających się właściwościach materiałowych wzdłuż osi podłużnej pręta przy uwzględnieniu różnych warunków brzegowych. Równanie opisujące belkę Eulera-Bernoulliego o zmiennych współczynnikach zostało zredukowane do zestawu prostszych algebraicznych równań rekurencyjnych za pomocą przekształceń różniczkowych. W celu wykazania ogólność i skuteczność tego podejścia, w cytowanej pracy obliczono częstotliwości drgań własnych różnych belek o zmiennych na długości parametrach i porównano je z wynikami, otrzymanymi metodami analitycznymi i numerycznymi, dostępnymi w literaturze.

Kim i in. w pracy [40] analizowali metody projektowania wsporników o przekroju teowym ze zbieżnym środnikiem. W cytowanej pracy zbadano zależności między maksymalnym naprężeniem ściskającym, a stopniem zbieżności belki rozumianym jak stosunek s=h'/h (h - wysokość belki w punkcie utwierdzenia, h'- wysokość na końcu wspornika). Autorzy wyprowadzili analityczne formuły, określające położenie przekroju maksymalnego naprężenia, gdy belka jest poddana działaniu równomiernego obciążenia rozłożonego lub obciążenia skupionego na swobodnym końcu. Wyniki otrzymane zaproponowaną metodą zweryfikowano za pomocą metody elementów skończonych i testów doświadczalnych.

Lee w pracy [50] badał zwichrzenie cienkościennych belek kompozytowych o przekrojach monosymetrycznych. Równania opisujące ogólny geometrycznie nieliniowy model cienkościennych laminowanych belek kompozytowych o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym i dowolnych sekwencjach układania laminatu zostały wyprowadzone metodami wariacyjnymi. W cytowanej pracy zdefiniowane zostały wszystkie wypadkowe naprężeń oraz wyprowadzano tensor odkształceń nieliniowych. W pracy podano ogólne równania uwzględniające nieliniowość geometryczną. Równania, opisujące zagadnienie zwichrzenia, wyprowadzono przez linearyzację równań nieliniowych. Na podstawie modelu analitycznego w pracy opracowano jednowymiarowy model elementu skończonego. Przykłady numeryczne rozwiązano dla cienkościennych belek kompozytowych o monosymetrycznych przekrojach poprzecznych. W pracy zbadany został wpływ orientacji włókien, umiejscowienia przyłożonego obciążenia, stosunku wysokości do rozpiętości na wielkość obciążenia powodującego zwichrzenie belki.

W pracy [51] Leung zaproponował zastosowanie do analizy wyboczenia teorii dynamicznego wyboczenia osiowo-skrętnego. W pracy wzięte zostały pod uwagę efekty drugiego rzędu związane z działaniem siły osiowej i momentu skręcającego. Macierz sztywności dynamicznej uzyskano aproksymując funkcje przemieszczeń uogólnionych

szeregami potęgowymi. Dzięki zastosowaniu przedstawionej w pracy metody można analizować dowolnie rozłożoną siłę osiową.

Librescu i in. [54] w pracy zajmowali się problemami związanymi z modelowaniem termosprężystym i zachowaniem elementów cienkościennych takich jak belki wykonane z materiałów o gradacji funkcjonalnej (FGM). W tym kontekście rozważane były dwa układy konstrukcyjne: (i) obracające się łopaty maszyn wirnikowych oraz (ii) cienkościenne konstrukcje belkowe obracające się wokół własnej osi podłużnej. We wszystkich tych przypadkach założono, że konstrukcje działają w środowisku o wysokiej temperaturze. Pod wpływem prędkości wirowania generowane są siły żyroskopowe. Pod ich wpływem, podobnie jak w systemach niekonserwatywnych, mogą wystąpić zjawiska utraty stateczności spowodowane flatterem i dywergencją. W cytowanej pracy zbadano wpływ sił zachowawczych i żyroskopowych rozpatrywanych w połączeniu z polem temperaturowym powodującym degradację właściwości sprężystych na drgania układu konstrukcyjnego i utratę stateczności. Cienkościenny model belki konstrukcyjnej rozważany w cytowanym artykule jest modelem zaawansowanym. W tym sensie, że oprócz ścinania poprzecznego i spaczenia, uwzględnia się wpływ wstępnego skręcenia i niejednorodności przekroju poprzecznego belki wzdłuż jej długości. W analizie uwzględniono zarówno belki skrzynkowe, jak i belki o okrągłym przekroju poprzecznym. W pracy autorzy wykonali porównanie uzyskanych wyników z wynikami uzyskanymi za pomocą modelu Mori-Tanaka, stwierdzając bardzo dobrą zgodność wyników. W artykule omówiono kwestie związane z podstawami i zachowaniem geometrycznie nieliniowych obracających się/wirujących cienkościennych belek, o nawarstwiającej się budowie (FGM) i działających w polu temperatury.

Saka w pracy [94] zajmował się projektowaniem niepryzmatycznych elementów stalowych. W cytowanym artykule opracowano algorytm optymalnego projektowania stalowych ram, składających się z elementów pryzmatycznych i/lub liniowo zbieżnych. Autor przyjął stałą szerokość przekroju dwuteowego oraz stałą grubość środnika i pasa, podczas gdy wysokość środnika przyjął zmieniającą się liniowo na długości pręta. Wysokość przekroju w każdym węźle ramy została potraktowana jako zmienna projektową. Ponadto autor założył, że w każdym węźle ramy występują utwierdzenia boczne. Funkcją celu, była objętość materiału ramy. Podczas formułowania problemu projektowego uwzględniono przemieszczenie oraz połączone ograniczenia wytrzymałości osiowej i wytrzymałości na zginanie. Dla zademonstrowania praktycznego zastosowania opisanego w pracy algorytmu przedstawiono przykłady numeryczne.

Shen i in. w pracy [96] analizowali niepryzmatyczne struktury cienkościenne, które są szeroko stosowane w turbinach wiatrowych i łopatach wirników. W tym artykule opracowano model elementów skończonych w celu zbadania liniowo zbieżnych cienkościennych struktur belkowych, w których uwzględniono efekt spaczenia związany ze skręcaniem. Autorzy, korzystając z zasady Hamiltona, wyprowadzili zestaw w pełni sprzężonych równań przemieszczeniowych. Następnie, stosując metodę transformacji różnicowej (DTM), uzyskali półanalityczne rozwiązania, które wykorzystano w definicji elementu skończonego. W cytowanej pracy stosując opisaną metodę, przeprowadzono symulacje numeryczne dla liniowo zbieżnych, cienkościennych łopat wirnika turbiny wiatrowej, które zostały zweryfikowane przy użyciu programu ANSYS. Wyniki częstotliwości modalnych były zgodne z rezultatami otrzymanymi z programu ANSYS, w których wykorzystano około 30000 elementów powłokowych. W opracowanym modelu elementów skończonych do wykonania takich obliczeń potrzebny był jeden element skończony, ponieważ funkcje interpolacyjne zostały wyprowadzone z dokładnych półanalitycznych rozwiązań. Zaproponowany przez autorów model elementów skończonych umożliwia dokładne i wydajnie przeprowadzenie analizy modalnej dla liniowo zbieżnych cienkościennych łopat wirnika.

Soltani i Asgarian w pracy [102] do analizy drgań własnych i stateczności niepryzmatycznych belek Eulera-Bernoulliego, spoczywających na podłożu Winklera-Pasternaka, zastosowali hybrydowe podejście oparte na kombinacji metody szeregów potęgowych oraz metody Rayleigha-Ritza W przedstawionej analizie, oprócz zmiennej geometrii przekrojów, uwzględniono zmienność właściwości materiału wzdłuż podłużnej osi belki. Przedstawioną metodę wykorzystano do rozwiązania przykładów numerycznych. Otrzymane wyniki porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych (program ANSYS) oraz z innymi dostępnymi wynikami numerycznymi.

Wang i in. w pracy [117] zajmowali się określeniem optymalnej liniowej zbieżności wąskiej prostokątnej belki. Analizowany problem polegał na wyznaczeniu takiej zbieżności, przy której krytyczne obciążenia wyboczeniowego (przy ustalonej objętości materiału belki), będzie miało największą wartość. W pracy analizowana były belka wspornikowa oraz belka swobodnie podparta, obciążona obciążeniem równomiernie rozłożonym i obciążeniem skupionym. Rozwiązanie problemu uzyskano za pomocą dwóch metod. Jedna opierała się na kryterium energetycznym Timoshenki, druga oparta była na mnożnikach Lagrange'a.

W celu podkreślenia złożoności problemu i konieczności prowadzenia dalszych badań w zakresie niepryzmatycznych konstrukcji cienkościennych należy zauważyć, że

powszechnie dostępne opracowania polskie i zagraniczne dotyczące projektowania cienkościennych konstrukcji prętowych (Biegus [10], Brzoska [16], Gjelsvik [32], Gosowski [35], Łubiński i in. [55], Łubiński i Żółtowski [56], Rutecki [91], [92], Rykaluk [93], Weiss i Giżejowski [119]), czy też opracowania dotyczące analizy drgań i stateczności cienkościennych konstrukcji prętowych (Bazant i Cedolin [8], Brezina [15], Chen i Lui [20], Green i Zerna [36]) z reguły pomijają fakt niepryzmatyczności lub traktują go w sposób uproszczony.

Na zakończenie tego przeglądu nie sposób nie wymienić podstawowych pozycji dotyczących mechaniki konstrukcji, co prawda dotyczyły one w głównej mierze pryzmatycznych konstrukcji prętowych, ale w momencie rozpoczęcia badań nad omawianą w pracy tematyką stanowiły źródło podstawowej wiedzy w tym zakresie. Są nimi prace dotyczące mechaniki konstrukcji takie jak: Fung [26], Gawęcki [27], [28], Nowacki [68], [69], Timoshenko [114], Timoshenko i Gere [115], [116].

W zakresie stosowanych przy wyprowadzeniu równań metod energetycznych i elementów rachunku wariacyjnego korzystano z prac Gelfanda i Fomina [29], Kozłowskiego i in. [46] oraz z pracy Washizu [118].

1.3. Cel pracy

Przystępując do realizacji niniejszej pracy, określono pięć głównych celów, jakie chce się w niej osiągnąć.

Pierwszym celem pracy jest wyznaczenie równań opisujących zagadnienie drgań oraz zagadnienie utraty stateczności dla niepryzmatycznych, cienkościennych elementów konstrukcji prętowych o dowolnie zmiennych parametrach geometrycznych.

Jako punkt wyjścia przejęto teoretyczne rozważania przedstawione przez Wilde w pracy [120]. W cytowanej pracy opisano model pręta cienkościennego o zmiennych parametrach geometrycznych, wykorzystując bezmomentową teorię powłok. Przemieszczeniowe równania równowagi wyprowadzono z wykorzystaniem zaawansowanych metod teorii sprężystości, w tym rachunku tensorowego. Wyprowadzając równania opisujące model pręta, w cytowanej pracy założono, że jego przekroje obracają się względem ustalonego środka obrotu (w literaturze za punkt ten przyjmuje się środek ścinania przekroju). Ponieważ położenie tego punktu na długości pręta zmienia się, zatem w wyprowadzonych równaniach konsekwentnie (w sensie przekształceń matematycznych) powinny pojawiać się składniki zawierające pochodne funkcji opisujące współrzędne tego

punktu. W pracy [120] wszystkie te składniki zostały pominięte, tak jakby obrót we wszystkich przekrojach odbywał się względem ustalonej prostoliniowej osi, co oczywiście mogłoby być jednym z założeń upraszczających, ale wtedy powstaje pytanie jakie współrzędne ma ta oś i jak je wyznaczyć. Uogólnienie wyprowadzanego w niniejszej pracy modelu polegało zatem, na konsekwentnym uwzględnieniu wszystkich składników, w których pojawiają się pochodne funkcji, opisujących zmienne położenie środków ścinania przekrojów. Należy podkreślić też, że wyprowadzane w niniejszej pracy równania opisują zachowanie pręta cienkościennego o przekroju otwartym względem dowolnej prostoliniowej osi odniesienia oraz że zmiana położenia tej osi nie wpływa na otrzymywane rezultaty. Warunek ten w niektórych publikowanych pracach nie jest spełniony. Dodatkowo wyprowadzone równania pozwalają również uwzględnić rzeczywistą lokalizację punktu podparcia w definiowanych warunkach brzegowych.

Drugim celem jest opracowanie algorytmów numerycznych służących do analizy drgań i stateczności niepryzmatycznych, cienkościennych elementów układów prętowych o dowolnie zmiennych parametrach geometrycznych. Do rozwiązania analizowanych w pracy zagadnień zastosowano metodę aproksymacyjną. W metodzie tej funkcji będących rozwiązaniami rozważanych problemów poszukuje się w postaci rozwinięć w szeregi względem wybranych typów ortogonalnych wielomianów Gegenbauera: w tym w szczególności wielomianów Legandre'a oraz wielomianów Czebyszewa I i II rodzaju. Matematyczne podstawy tej metody zostały przedstawione w pracach Lewanowicza [52] [53] i Paszkowskiego [72]. Podstawowym elementem wykorzystywanym w stosowanej metodzie jest twierdzenie opisujące sposób przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach z wykorzystaniem ortogonalnych wielomianów Gegenbauera. Przestawiony sposób rozwiązania zagadnień drgań i stateczności niepryzmatycznych, cienkościennych elementów układów prętowych nie był dotychczas stosowany przez innych autorów.

Kolejnym celem jest zbadanie wpływu dodatkowych składników „uogólnionych" równań przemieszczeniowych, opisujących drgania cienkościennego niepryzmatycznego pręta o dowolnym rozkładzie geometrycznych charakterystyk przekrojów na wyniki rozwiązania zagadnienia własnego (a stąd wpływu na rozwiązania innych zagadnień dynamiki niepryzmatycznego pręta cienkościennego). Podstawą do wyprowadzenia przez autora „uogólnionych" równań przemieszczeniowych były równania (opisujące zagadnienie statyczne) wyprowadzone przez Wilde w pracy [120], na bazie bezmomentowej teorii powłok z wykorzystaniem założeń Własowa [121]. Uogólnienie to polegało na uwzględnieniu

w matematycznym opisie modelu dodatkowych składników zawierających pochodne funkcji opisujących zmienne położenia środków ścinania, a pominiętych w pracy [120]. Dodatkowe składniki zawierające pochodne funkcji określających zmienne współrzędne środków ścinania zostały uwzględnione w opisie modelu przedstawionego w pracy Soltaniego, Asgariana i Mohriego [104]. Przedstawiony w pracy [104] model wyprowadzono przyjmując za punkt wyjścia arbitralnie przyjętą funkcję określającą podłużne przemieszczenia pręta. Podkreślić jednak należy, że użyte tam zależności kinematyczne nie spełniają założeń Własowa [121]. Wyprowadzone w [104] równania stosowane były przez tych autorów w innych ich pracach, m. in. [103] i [105]. Z uwagi na złożoność zagadnienia inni autorzy zajmujący się niepryzmatycznymi prętami cienkościennymi z reguły ograniczają się do analizy zagadnień prętów bisymetrycznych lub monosymetrycznych o liniowo zmiennym wymiarach ścianek przekroju poprzecznego, co znacznie upraszcza rozważania bo eliminuje z tych równań wiele składników ze względu na zerowanie się niektórych geometrycznych charakterystyk przekrojów.

Kolejny cel to zbadanie wpływu na rozwiązanie zagadnienia drgań własnych prętów cienkościennych dwóch czynników związanych z geometrią pręta i jego schematem statycznym. Przedmiotem analizy było sprawdzenie, jaki wpływ na rozwiązanie zagadnienie własnego ma zmiana punktu podparcia (przy czym zmiana położenia tego punku odbywała się tylko w ramach ustalonego tego samego przekroju pręta). Drugim z analizowanych problemów było zbadanie wpływu na rozwiązania zagadnienia własnego „niewielkiego" zakrzywienia pręta.

Ostatni cel to zastosowanie opracowanych metod do analizy zagadnienia globalnej utraty stateczności prętów niepryzmatycznych oraz układów prętowych złożonych z prętów niepryzmatycznych. W ramach tej analizy badany jest również wpływ zmiany punktów podparcia w ramach ustalonego przekroju podporowego. Badano również wpływ punktu przyłożenia obciążenia na wartości obciążenia krytycznego belki.

Niniejsza praca jest kontynuacją badań P. Ruty, który jako pierwszy zastosował tę metodę, do rozwiązywania zagadnień mechaniki budowli wykorzystując do aproksymacji wielomiany Czebyszewa I rodzaju. Otrzymane przez niego rezultaty przedstawione zostały w pracach [83]-[85] oraz w jego monografii habilitacyjnej [86]. Zastosowaniem wielomianów Czebyszewa do rozwiazywania zagadnień mechaniki budowli zajmowała się również w swojej rozprawie doktorskiej M. Meissner [59], P. Ruta i M. Meissner w pracy [87] oraz P. Ruta i J. Szybiński w pracach [88]-[90]. W zakresie konstrukcji cienkościennych

częściowe wyniki badań autor niniejszej rozprawy wraz z P. Rutą zawarł w pracach [110]-[113].

Otrzymane przedstawioną w pracy metodą rozwiązania są rozwiązaniami ogólnymi. Umożliwiają one bowiem analizę układów o dowolnych parametrach geometrycznych, bez konieczności ponownego rozwiązania problemu. Wystarczy tylko w wyprowadzonych wzorach podstawić odpowiednie współczynniki rozwinięć w szeregi względem analizowanych wielomianów ortogonalnych zmiennych geometrycznych charakterystyk przekrojów. Metoda cechuje się dużą dokładnością, a półanalityczna postać wyników umożliwia ich dalsze wykorzystanie w analizie bardziej złożonych problemów, w których do rozwiązania stosuje się metody analityczne.

1.4. Zakres pracy

Praca składa się z dziesięciu rozdziałów. Pierwszym rozdziałem jest wstęp, w którym przedstawiono przegląd literatury i cel pracy.

W drugim rozdziale przedstawiono przyjęte założenia dotyczące matematycznego opisu niepryzmatycznych prętów cienkościennych o przekroju otwartym. Na podstawie zależności opisujących przemieszczenie przekroju poprzecznego pręta cienkościennego, przy uwzględnieniu założeń Własowa [121], wyprowadzono zależności kinematyczne dla przemieszczeń pręta cienkościennego. Wyprowadzono również zależności opisujące stan odkształceń i stan naprężenia dla zagadnienia liniowego i nieliniowego. Opisane zależności wyprowadzono względem prostoliniowej osi odniesienia.

W kolejnym rozdziale stosując metodę energetyczną wyprowadzono równania przemieszczeniowe, opisujące analizowany model pręta cienkościennego. W ramach zastosowanej do wyprowadzenia równań metody wyznaczono wariację funkcjonałów, opisujących energie potencjalną i kinetyczną oraz pracę obciążenia zewnętrznego. Otrzymane równania pozwalają na rozwiązanie następujących zagadnień:

- liniowego zagadnienia statyki,
- nieliniowego zagadnienia statyki,
- zagadnienia drgań własnych,
- zagadnienia utraty stateczności,
- zagadnienia drgań wymuszonych.

Z uwagi na obszerność wymienionych zagadnień w dalszej części pracy analizowano zagadnienie drgań własnych i zagadnienie utraty stateczności. W przypadku zagadnienia utraty stateczności (wg teorii II rzędu) do wyznaczenia naprężeń wstępnych wykorzystywano rozwiązanie liniowego zagadnienia statyki.

W rozdziale czwartym przedstawiono podstawowe informacje dotyczące wielomianów i szeregów Gegenbauera. Opisano metodę aproksymacyjną pozwalającą w przybliżony sposób rozwiązywać równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach. W metodzie tej układ równań różniczkowych sprowadzony zostaje do nieskończonego układu równań algebraicznych (w przypadku zagadnienia własnego, zagadnienia utraty stateczności, czy też zagadnienia drgań wymuszonych harmonicznie) lub do nieskończonego układu równań różniczkowych zwyczajnych (w przypadku drgań niestacjonarnych). Niewiadomymi nieskończonego układu równań są współczynniki rozwinięcia poszukiwanych funkcji rozwiązania w szeregi Gegenbauera.

Następny rozdział zawiera analizę zagadnienia własnego wraz z przykładami numerycznymi. Równania opisujące drgania własne pręta cienkościennego, tworzą układ czterech sprzężonych ze sobą równań różniczkowych czwartego stopnia. W rozdziale tym przeanalizowano wpływ rozmiaru bazy aproksymacyjnej na dokładność wyników w celu oszacowania zalecanej wielkości bazy aproksymacyjnej. Analizowano również wpływ na rozwiązanie zagadnienia własnego, uproszczeń polegających na pominięciu dodatkowych składników zawierających pochodne funkcji opisujących zmienne położenia środków ścinania oraz wpływ parametru β opisującego nachylenie ścianek w stosunku do osi podłużnej belki. Otrzymane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych.

W rozdział szóstym badano wpływ zmiany punktu podparcia (przy czym zmiana położenia tego punku odbywała się tylko w ramach ustalonego tego samego przekroju pręta) na rozwiązanie zagadnienia drgań własnych prętów. Zagadnienie to jest pomijane w znanej autorowi literaturze. W literaturze z reguły kinematyczne warunki brzegowe określa się w środku ścinania, przyjmując, że przemieszczenia czy też kąty obrotu w tym punkcie przyjmują wartość zero, natomiast warunki kinetyczne określa się względem osi centralnych tj. osi przechodzących przez środek ciężkości przekroju. Rzeczywiste, faktyczne fizyczne warunki podparcia, odbiegające od zwyczajowo przyjmowanych, nie są w literaturze analizowane, a, jak wykazano w pracy, warunki te istotnie wpływają na wartości i formy własne szczególnie dla układów o obu podporach nieprzesuwnych na kierunku podłużnym. Analizując wpływ zmiany punktu podparcia, dokonano również porównania wyników

uzyskanych przy zastosowaniu do aproksymacji różnych wielomianów aproksymacyjnych przy różnych wielkościach bazy aproksymacyjnej. Otrzymane wyniki porównano z wynikami wyznaczonymi metodą elementów skończonych.

W rozdziale siódmym przeprowadzono analizę wpływu na rozwiązania zagadnienia własnego „niewielkiego" zakrzywienia osi pręta przy zachowaniu tego samego przekroju poprzecznego. Otrzymane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych.

W rozdziale ósmym przedstawiono rozwiązanie zagadnienia stateczności prętów cienkościennych, o dowolnym niesymetrycznym przekroju poprzecznym i dowolnym obciążeniu. Wyprowadzone w tym przypadku równania różniczkowe opisujące zagadnienie utraty stateczności, stanowią układ czterech sprzężonych ze sobą równań różniczkowych czwartego stopnia. Jako przykłady w rozdziale tym rozwiązano zagadnienie zwichrzenia belki przegubowo-przegubowej o liniowo zmiennym monosymetrycznym i bisymetrycznym przekroju poprzecznym, obciążonej momentami skupionymi na końcach. W ramach analizy uwzględniono zmianę lokalizacji punktu podparcia w ustalonym przekroju podporowym. Kolejnym analizowanym przykładem jest belka wspornikowa o liniowo zmiennym bisymetrycznym przekroju poprzecznym, obciążona siłą skupioną na końcu wspornika. W ostatnim przykładzie analizowano wpływ zmiany punktu przyłożenia obciążenia niepryzmatycznej belki bisymetrycznej. Otrzymane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych oraz z wynikami uzyskanymi przez innych autorów.

W rozdziale dziewiątym zastosowano zaprezentowaną w pracy metodę analizy stateczności prętów cienkościennych do rozwiązania zagadnienia utraty stateczności prostego niepryzmatycznego układu prętowego. W rozdziale tym rozwiązano zagadnienie utraty stateczności ramy złożonej z dwóch prętów o liniowo zmiennym bisymetrycznym przekroju poprzecznym obciążonej siłą skupioną w węźle. Otrzymane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych.

Ostatni rozdział stanowi podsumowanie, w którym zawarto ogólne wnioski i możliwe kierunki dalszych badań.

Wyniki we wszystkich przykładach numerycznych otrzymano z wykorzystaniem pakietu firmy Wolfram Mathematica 12 [34], [122]. Przykłady, w których do rozwiązania stosowano MES [45], rozwiązano z wykorzystaniem systemu komputerowego SOFiSTiK [98] i ABAQUS [95].

2. Matematyczny opis prętów cienkościennych

2.1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań w niniejszej pracy są niepryzmatyczne pręty o przekroju cienkościennym otwartym. Wyprowadzając równania opisujące rozważany model pręta cienkościennego, przyjęto następujące założenia Własowa [121]:

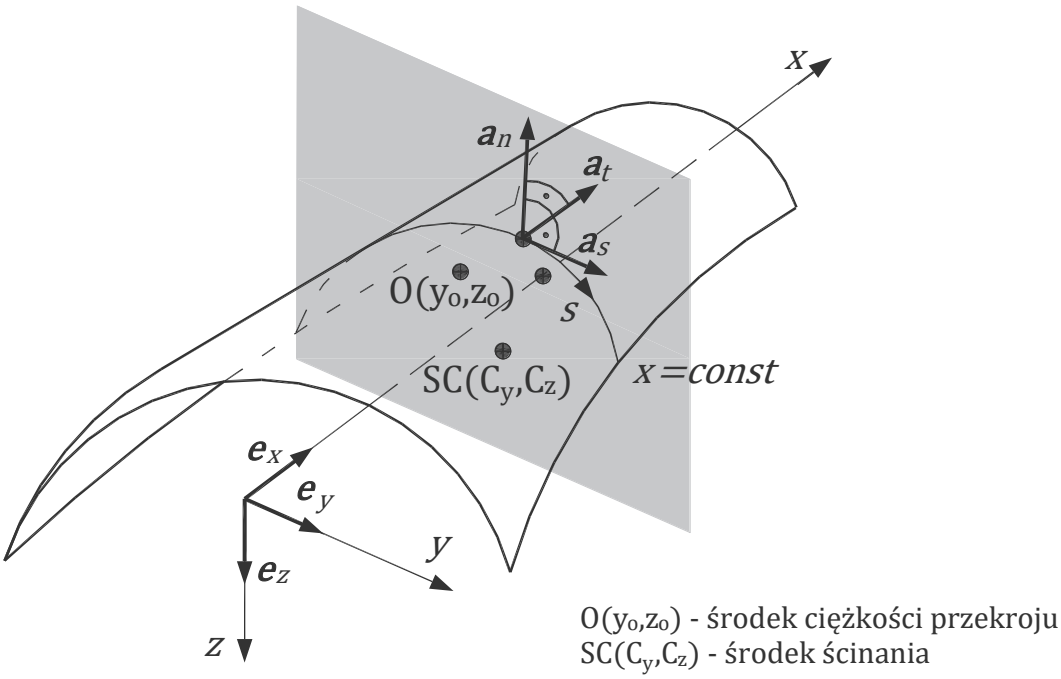
1. przekroje poprzeczne pręta ulegają deformacji tylko w kierunku osi podłużnej x (tzw. hipoteza sztywnego przekroju poprzecznego − założenie z teorii skręcania swobodnego de Saint-Venanta),
2. liniowe odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej są równe zeru, tzn. $\gamma_{xs} = 0.$

Założono również, że wymiary przekroju poprzecznego pręta są małe w porównaniu z jego długością. Założenia te pozwalają na traktowanie pręta jako obiektu jednowymiarowego, w którym przemieszczenia dowolnego punktu pręta są funkcjami dwóch zmiennych (x, s). Założono również, że materiał jest idealnie sprężysty i izotropowy.

Bazując na pracy Wilde [120] do opisu analizowanego w pracy modelu wykorzystano bezmomentową teorię powłok. Wykorzystywane w niniejszej pracy równania przemieszczeniowe wyprowadzono względem dowolnej prostoliniowej osi odniesienia i związanego z przyjętą osią globalnego, prawoskrętnego, kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y, z). Zależności kinematyczne opisujące przemieszczenia pręta cienkościennego uwzględniają występującą w pręcie niepryzmatycznym krzywoliniowość osi opisującej położenia środków ścinania, co stanowi uogólnienie modelu podanego przez Wilde w pracy [120].

2.2. Opis geometrii pręta cienkościennego

W opisie niepryzmatycznego pręta cienkościennego wprowadzono dodatkowy lokalny układ współrzędnych (t, s, n) związany z punktami powierzchni środkowej powłoki, w którym $t = x$, współrzędna s opisuje długość wzdłuż linii środkowej przekroju dla $x = const,$ a współrzędna n opisuje długość wzdłuż wektora normalnego do powierzchni [120].



Rys. 2.1. Przyjęty opis geometrii pręta cienkościennego.
Układ współrzędnych oraz lokalne wektory bazowe dla niepryzmatycznego pręta cienkościennego

Wektor opisujący położenie punktu na powierzchni środkowej określony jest następującym wzorem

$$\mathbf{r} = t\,\mathbf{e}_x + y(t,s)\,\mathbf{e}_y + z(t,s)\,\mathbf{e}_z\,, \tag{2.1}$$

gdzie: $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ są wersorami bazy kartezjańskiego układu współrzędnych.

Wektory bazy kowariantnej lokalnego układu współrzędnych (t,s,n) zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \mathbf{e}_x + y_{,t}\mathbf{e}_y + z_{,t}\mathbf{e}_z\,, \\ \mathbf{a}_s &= y_{,s}\mathbf{e}_y + z_{,s}\mathbf{e}_z\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie: $f_{,s} = \partial f(t,s)/\partial s, \quad f_{,t} = \partial f(t,s)/\partial t$.

W dalszej części pracy w większości przypadków pomijany jest jawny zapis argumentów funkcji oraz stosowany jest skrótowy zapis pochodnych funkcji. Jawny zapis

stosowany jest jedynie w miejscach, w których jest to konieczne dla czytelnego i jednoznacznego przedstawienia zagadnienia.

Współrzędna s opisuje długość krzywej na płaszczyźnie yz, w związku z tym

$$\left(y_{,s}\right)^2+\left(z_{,s}\right)^2=1. \tag{2.3}$$

Można wprowadzić następującą notację:

$$y_{,s}=\cos\alpha,\ z_{,s}=\sin\alpha, \tag{2.4}$$

gdzie α jest kątem pomiędzy dodatnią częścią osi y oraz styczną do przekroju poprzecznego dla $t=const$.

Trzeci jednostkowy wektor bazy definiuje następująca zależność

$$\mathbf{a}_n=\frac{-\mathbf{a}_t\times\mathbf{a}_s}{\left|\mathbf{a}_t\times\mathbf{a}_s\right|}=\left(1+\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\beta\mathbf{e}_x+\sin\alpha\mathbf{e}_y-\cos\alpha\mathbf{e}_z\right), \tag{2.5}$$

gdzie $\beta=-y_{,t}\sin\alpha+z_{,t}\cos\alpha$.

Macierz transformacji z bazy kartezjańskiego układu współrzędnych do kowariantnej bazy układu zdefiniowanego na powierzchni wyraża się następująco

$$\mathbf{C}_{i.}^{.k}=\begin{bmatrix} 1 & y_{,t} & z_{,t} \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} & \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}} & \dfrac{-\cos\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Dla układu współrzędnych związanego z powierzchnią kowariantny powierzchniowy tensor metryczny wyraża się wzorem

$$\mathbf{a}_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 1+\beta^2+\gamma^2 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

gdzie $\gamma=y_{,t}\cos\alpha+z_{,t}\sin\alpha$.

Kontrawariantny tensor metryczny wyraża się wzorem

$$\mathbf{a}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\beta^2} & -\dfrac{\gamma}{1+\beta^2} \\ -\dfrac{\gamma}{1+\beta^2} & \dfrac{1+\beta^2+\gamma^2}{1+\beta^2} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Zdefiniowany lokalny układ współrzędnych w ogólnym przypadku nie jest ortogonalny. Na bazie wcześniej zdefiniowanego układu możliwe jest wprowadzenie ortogonalnego układu współrzędnych (T, S, N) w następujący sposób:

$$\begin{gathered} \mathbf{a}_S = \mathbf{a}_s,\ \mathbf{a}_N = \mathbf{a}_n, \\ \mathbf{a}_s \perp \mathbf{a}_T \perp \mathbf{a}_n, \\ |\mathbf{a}_T| = 1. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Z powyższych zależności wynika, że wersor $\mathbf{a}_T$ leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni, wektor definiujemy w następujący sposób

$$\mathbf{a}_T = \alpha_1 \mathbf{a}_t + \alpha_2 \mathbf{a}_s. \tag{2.10}$$

Wartości współczynników α_1 i α_2 są określane na podstawie następujących zależności:

$$\begin{gathered} \mathbf{a}_T \perp \mathbf{a}_s, \\ |\mathbf{a}_T| = 1. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Ponieważ $|\mathbf{a}_s| = |\mathbf{a}_n| = 1$ i $\mathbf{a}_s \perp \mathbf{a}_n$, zatem wersor $\mathbf{a}_T$ spełniający warunki (2.9) możemy również wyznaczyć ze wzoru

$$\mathbf{a}_T = -\mathbf{a}_s \times \mathbf{a}_n = \left(1+\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{e}_x - \beta \sin\alpha \mathbf{e}_y + \beta \cos\alpha \mathbf{e}_z\right). \tag{2.12}$$

Ostatecznie macierz transformacji lokalnego układu $\mathbf{a}_s, \mathbf{a}_t$ do układu ortogonalnych jednostkowych wektorów $\mathbf{a}_S, \mathbf{a}_T$ leżących na powierzchni stycznej do powierzchni środkowej powłoki określona jest wzorem

$$\mathbf{C}_{\Omega\,\cdot}^{\cdot\,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\gamma}{\sqrt{1+\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

a macierz odwrotna ma postać

$$\mathbf{C}_{\alpha\,\cdot}^{\cdot\,\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \sqrt{1+\beta^2} \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

2.3. Wyprowadzenie zależności kinematycznych i funkcji określających stan odkształcenia dla zagadnienia liniowego

W pracy zastosowano powszechnie stosowane założenie, że linie środkowe przekrojów poprzecznych pręta ulegają deformacji tylko w kierunku osi podłużnej x (tzw. hipoteza sztywnego przekroju poprzecznego). Prowadzi to do następującego równania opisującego przemieszczenie dowolnego punktu pręta cienkościennego

$$\mathbf{u} = u_x(t,s)\mathbf{e}_x + \Big(u_y(t) - \big(z(t,s) - C_z(t)\big)\theta(t)\Big)\mathbf{e}_y + \Big(u_z(t) + \big(y(t,s) - C_y(t)\big)\theta(t)\Big)\mathbf{e}_z, \tag{2.15}$$

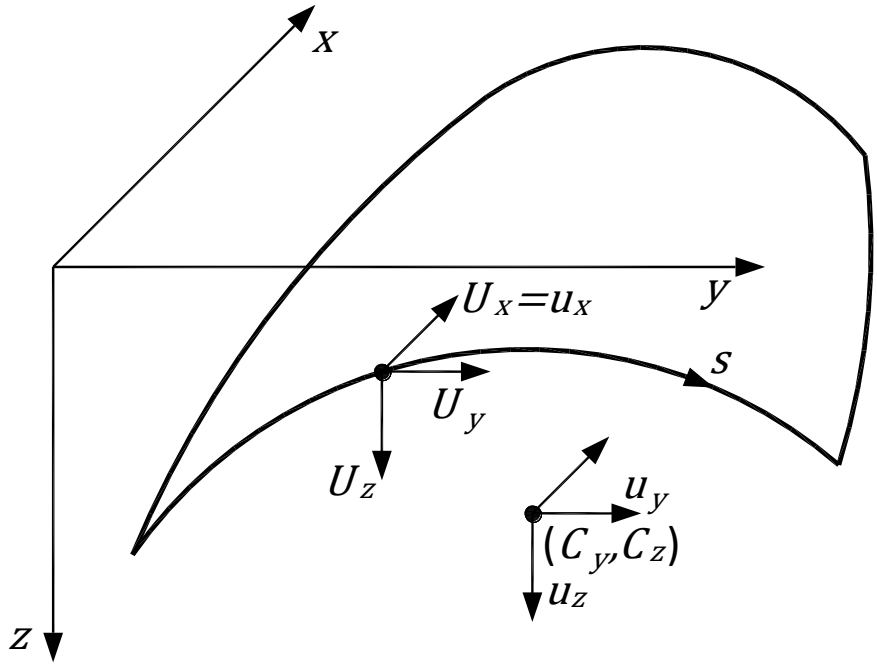
gdzie:

$\mathbf{u} = \big(U_x, U_y, U_z\big)$ – wektor opisujący przemieszczenie dowolnego punktu pręta,

$\theta(t)$ – kąt obrotu względem osi wyznaczonej przez punkty o współrzędnych, $\big(C_y(t), C_z(t)\big)$,

$u_y(t)$, $u_z(t)$ – składnik przemieszczeń przekroju poprzecznego w środku ścinania mierzone wzdłuż osi globalnego układu współrzędnych,

$u_x(t,s)$ – funkcja opisująca przemieszczenie podłużne przekroju względem płaszczyzny wyznaczonej przez $x = const$, z uwzględnieniem przemieszczenia podłużnego wynikającego ze spaczenia przekroju.



Rys. 2.2. Przyjęty opis przemieszczeń pręta cienkościennego

Liniowe składowe tensora odkształcenia definiuje się wzorem

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{a}_\alpha \circ \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{a}_\beta \circ \mathbf{u}_{,\alpha}\right). \tag{2.16}$$

Stąd po podstawieniu do wzoru (2.15) zależności (2.2) i (2.14) otrzymujemy:

$$\begin{gathered}
\gamma_{tt} = u_{x,t} + y_{,t}\left(u_{y,t} - \left(z - C_z\right)\theta_{,t} + C_{z,t}\theta\right) + z_{,t}\left(u_{z,t} + \left(y - C_y\right)\theta_{,t} - C_{y,t}\theta\right), \\
\gamma_{ts} = \gamma_{st} = \frac{1}{2}\left(u_{x,s} + y_{,s}\left(u_{y,t} - \left(z - C_z\right)\theta_{,t} + C_{z,t}\theta\right) + z_{,s}\left(u_{z,t} + \left(y - C_y\right)\theta_{,t} - C_{y,t}\theta\right)\right), \\
\gamma_{ss} = 0.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Odkształcenia fizyczne wyznaczamy wykorzystując zależność

$$\gamma_{\Omega\Phi} = \mathbf{C}^{\cdot\alpha}_{\Omega,}\mathbf{C}^{\cdot\beta}_{\Phi\cdot}\gamma_{\alpha\beta}. \tag{2.18}$$

Po wykonaniu przekształceń formuły definiujące odkształcenia fizyczne przyjmują postać:

$$\gamma_{TT} = \left(1+\beta^2\right)^{-1}\gamma_{tt} - 2\gamma\left(1+\beta^2\right)^{-1}\gamma_{ts},$$
$$\gamma_{TS} = \gamma_{ST} = \left(1+\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}\gamma_{st}, \tag{2.19}$$
$$\gamma_{SS} = 0.$$

Zgodnie z założeniem teorii Własowa naprężenia $\gamma_{TS} = 0$. Z tego wynika, że również naprężenia $\gamma_{ts} = 0$. Ostatecznie prowadzi to do następującej zależności

$$u_{x,s} = -\left(y_{,s}\left(u_{y,t} - \left(z - C_z\right)\theta_{,t} + C_{z,t}\theta\right) + z_{,s}\left(u_{z,t} + \left(y - C_y\right)\theta_{,t} - C_{y,t}\theta\right)\right). \tag{2.20}$$

Całkując obie strony powyższego wzoru po zmiennej s oraz uwzględniając, że z prawej strony równości tylko funkcje z i y zależą od s, otrzymujemy

$$u_x = u_{ox} - yu_{y,t} - zu_{z,t} - \left(yC_{z,t} - zC_{y,t}\right)\theta - \omega\theta_{,t}, \tag{2.21}$$

gdzie:

$u_{ox} = u_{ox}(t)$ jest stałą całkowania niezależną od zmiennej s,

$\omega = \omega(t,s)$ jest współrzędną wycinkową opisaną zależnością

$$\omega(t,s) = \int\left(-\left(z - C_z\right)y_{,s} + \left(y - C_y\right)z_{,s}\right)ds. \tag{2.22}$$

Następnie różniczkując funkcję u_x po zmiennej t otrzymujemy

$$u_{x,t} = u_{ox,t} - y_{,t}u_{y,t} - yu_{y,tt} - z_{,t}u_{z,t} - zu_{z,tt} - \kappa\theta - \mu\theta_{,t} - \omega\theta_{,tt}, \tag{2.23}$$

gdzie:

$$\kappa = \left(y_{,t}C_{z,t} + yC_{z,tt} - z_{,t}C_{y,t} - zC_{y,tt}\right),$$
$$\mu = \left(\omega_{,t} + yC_{z,t} - zC_{y,t}\right). \tag{2.24}$$

Wstawiając $u_{x,t}$ do wzoru na γ_{tt} oraz uwzględniając, że $t = x$ ostatecznie otrzymujemy

$$\gamma_{xx} = u_{ox,x} - yu_{y,xx} - zu_{z,xx} - \omega\theta_{,xx} - \psi\theta_{,x} - \delta\theta, \tag{2.25}$$

gdzie:

$$\psi = \omega_{,x} + y_{,x}\left(z - C_z\right) - z_{,x}\left(y - C_y\right) + \left(yC_{z,x} - zC_{y,x}\right),$$
$$\delta = yC_{z,xx} - zC_{y,xx}. \tag{2.26}$$

2.4. Wyprowadzenie nieliniowych składników tensora odkształcenia

Formuły określające nieliniowe składowe tensora odkształcenia wyprowadzimy wykorzystując wyznaczone przemieszczenia pręta cienkościennego oraz definicję nieliniowych składowych tensora odkształcenia:

$$\gamma_{xx}^{nl} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{,x} \circ \mathbf{u}_{,x}\right),$$
$$\gamma_{xs}^{nl} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{,x} \circ \mathbf{u}_{,s}\right), \tag{2.27}$$
$$\gamma_{ss}^{nl} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{,s} \circ \mathbf{u}_{,s}\right).$$

Po podstawieniu pochodnych przemieszczeń nieliniowe składowe odkształcenia γ_{xx}^{nl} wyrażają się wzorem

$$\gamma_{xx}^{nl} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_{x,x}^2 \\ +\left(u_{y,x} - \left(z_{,x} - C_{z,x}\right)\theta - \left(z - C_z\right)\theta_{,x}\right)^2 \\ +\left(u_{z,x} + \left(y_{,x} - C_{y,x}\right)\theta + \left(y - C_y\right)\theta_{,x}\right)^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(u_{ox,x} - y_{,x}u_{y,x} - yu_{y,xx} - z_{,x}u_{z,x} - zu_{z,xx} - \kappa\theta - \mu\theta_{,x} - \omega\theta_{,xx}\right)^2 \\ +\left(u_{y,x} + \eta_y\theta + \vartheta_y\theta_{,x}\right)^2 + \left(u_{z,x} + \eta_z\theta + \vartheta_z\theta_{,x}\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

gdzie:

$$\eta_y = -\left(z_{,x} - C_{z,x}\right), \qquad \eta_z = \left(y_{,x} - C_{y,x}\right),$$
$$\vartheta_y = -\left(z - C_z\right), \qquad \vartheta_z = \left(y - C_y\right). \tag{2.29}$$

Po wykonaniu przekształceń i wprowadzeniu w celu uproszczenia zapisu następujących oznaczeń:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{x,1}^{x,1}=1,\quad \alpha_{y,1}^{y,1}=1+y_{,x}^2,\quad \alpha_{y,2}^{y,2}=y^2,\quad \alpha_{z,1}^{z,1}=1+z_{,x}^2,\quad \alpha_{z,2}^{z,2}=z^2,\quad \alpha_{\theta}^{\theta}=\kappa^2+\eta_y^2+\eta_z^2,\\
&\alpha_{\theta,1}^{\theta,1}=\mu^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2,\quad \alpha_{\theta,2}^{\theta,2}=\omega^2,\quad \alpha_{x,1}^{y,1}=-y_{,x},\quad \alpha_{x,1}^{y,2}=-y,\quad \alpha_{x,1}^{z,1}=-z_{,x},\quad \alpha_{x,1}^{z,2}=-z,\\
&\alpha_{x,1}^{\theta}=-\kappa,\quad \alpha_{x,1}^{\theta,1}=-\mu,\quad \alpha_{x,1}^{\theta,2}=-\omega,\quad \alpha_{y,1}^{y,2}=yy_{,x},\quad \alpha_{y,1}^{z,1}=y_{,x}z_{,x},\quad \alpha_{y,1}^{z,2}=y_{,x}z,\\
&\alpha_{y,1}^{\theta}=y_{,x}\kappa+\eta_y,\quad \alpha_{y,1}^{\theta,1}=y_{,x}\mu+\vartheta_y,\quad \alpha_{y,1}^{\theta,2}=y_{,x}\omega,\quad \alpha_{y,2}^{z,1}=yz_{,x},\quad \alpha_{y,2}^{z,2}=yz,\quad \alpha_{y,2}^{\theta}=y\kappa,\\
&\alpha_{y,2}^{\theta,1}=y\mu,\quad \alpha_{y,2}^{\theta,2}=y\omega,\quad \alpha_{z,1}^{z,2}=zz_{,x},\quad \alpha_{z,1}^{\theta}=z_{,x}\kappa+\eta_z,\quad \alpha_{z,1}^{\theta,1}=z_{,x}\mu+\vartheta_z,\quad \alpha_{z,1}^{\theta,2}=z_{,x}\omega,\\
&\alpha_{z,2}^{\theta}=z\kappa,\quad \alpha_{z,2}^{\theta,1}=z\mu,\quad \alpha_{z,2}^{\theta,2}=z\omega,\quad \alpha_{\theta}^{\theta,1}=\kappa\mu+\eta_y\vartheta_y+\eta_z\vartheta_z,\quad \alpha_{\theta}^{\theta,2}=\kappa\omega,\quad \alpha_{\theta,1}^{\theta,2}=\mu\omega,
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\gamma_{xx}^{nl}=&\frac{1}{2}\left(\alpha_{x,1}^{x,1}u_{ox,x}^2+\alpha_{y,1}^{y,1}u_{y,x}^2+\alpha_{y,2}^{y,2}u_{y,xx}^2+\alpha_{z,1}^{z,1}u_{z,x}^2+\alpha_{z,2}^{z,2}u_{z,xx}^2+\alpha_{\theta}^{\theta}\theta^2+\alpha_{\theta,1}^{\theta,1}\theta_{,x}^2+\alpha_{\theta,2}^{\theta,2}\theta_{,xx}^2\right)\\
&+\alpha_{x,1}^{y,1}u_{ox,x}u_{y,x}+\alpha_{x,1}^{y,2}u_{ox,x}u_{y,xx}+\alpha_{x,1}^{z,1}u_{ox,x}u_{z,x}+\alpha_{x,1}^{z,2}u_{ox,x}u_{z,xx}+\alpha_{x,1}^{\theta}u_{ox,x}\theta+\alpha_{x,1}^{\theta,1}u_{ox,x}\theta_{,x}\\
&+\alpha_{x,1}^{\theta,2}u_{ox,x}\theta_{,xx}+\alpha_{y,1}^{y,2}u_{y,x}u_{y,xx}+\alpha_{y,1}^{z,1}u_{y,x}u_{z,x}+\alpha_{y,1}^{z,2}u_{y,x}u_{z,xx}+\alpha_{y,1}^{\theta}u_{y,x}\theta+\alpha_{y,1}^{\theta,1}u_{y,x}\theta_{,x}\\
&+\alpha_{y,1}^{\theta,2}u_{y,x}\theta_{,xx}+\alpha_{y,2}^{z,1}u_{y,xx}u_{z,x}+\alpha_{y,2}^{z,2}u_{y,xx}u_{z,xx}+\alpha_{y,2}^{\theta}u_{y,xx}\theta+\alpha_{y,2}^{\theta,1}u_{y,xx}\theta_{,x}+\alpha_{y,2}^{\theta,2}u_{y,xx}\theta_{,xx}\\
&+\alpha_{z,1}^{z,2}u_{z,x}u_{z,xx}+\alpha_{z,1}^{\theta}u_{z,x}\theta+\alpha_{z,1}^{\theta,1}u_{z,x}\theta_{,x}+\alpha_{z,1}^{\theta,2}u_{z,x}\theta_{,xx}+\alpha_{z,2}^{\theta}u_{z,xx}\theta+\alpha_{z,2}^{\theta,1}u_{z,xx}\theta_{,x}\\
&+\alpha_{z,2}^{\theta,2}u_{z,xx}\theta_{,xx}+\alpha_{\theta}^{\theta,1}\theta\theta_{,x}+\alpha_{\theta}^{\theta,2}{}_{\theta\theta_{,xx}}\theta\theta_{,xx}+\alpha_{\theta,1}^{\theta,2}\theta_{,x}\theta_{,xx}.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

W przypadku zagadnienia nieliniowego w pracach często pomija się składnik $u_{x,x}^2$ jako małą wyższego rzędu. Należy zauważyć, że ma to uzasadnienie jedynie dla ustrojów prętowych o przekroju pełnościennym, w przypadku przekroju cienkościennego wpływ odkształceń podłużnych, wynikających za spaczenia pręta nie jest pomijalny. Dodatkowo należy zauważyć, że pominięcie składnika $u_{x,x}^2$ ma uzasadnienie jedynie dla ustrojów z podporami nieprzesuwnymi na kierunku podłużnym pręta. W przypadku ustrojów z podporami przesuwnymi na kierunku podłużnym należy uwzględnić składnik $u_{x,x}^2$, co wykazano w pracy autora dla zagadnienia belki Timoshenki [90].

Wzór definiujący nieliniową składową odkształcenia γ_{xs}^{nl} przyjmuje postać

$$\gamma_{xs}^{nl}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_{x,x}u_{x,s} \\ -\left(u_{y,x}-\left(z_{,x}-C_{z,x}\right)\theta-\left(z-C_z\right)\theta_{,x}\right)z_{,s}\theta \\ +\left(u_{z,x}+\left(y_{,x}-C_{y,x}\right)\theta+\left(y-C_y\right)\theta_{,x}\right)y_{,s}\theta \end{pmatrix}= \tag{2.32}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ox,x}-y_{,x}u_{y,x}-yu_{y,xx}-z_{,x}u_{z,x}-zu_{z,xx} \\ -\kappa\theta-\mu\theta_{,x}-\omega\theta_{,xx} \end{pmatrix}\left(-y_{,s}u_{y,x}-z_{,s}u_{z,x}-\chi\theta-\omega_{,s}\theta_{,x}\right) \\ -\left(u_{y,x}+\eta_y\theta+\vartheta_y\theta_{,x}\right)z_{,s}\theta+\left(u_{z,x}+\eta_z\theta+\vartheta_z\theta_{,x}\right)y_{,s}\theta \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$\chi=\left(y_{,s}C_{z,x}-z_{,s}C_{y,x}\right). \tag{2.33}$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń upraszczających zapis wyprowadzanych wzorów:

$$\begin{aligned}
&\zeta_{y,1}^{y,1}=y_{,x}y_{,s}, \quad \zeta_{z,1}^{z,1}=z_{,x}z_{,s}, \quad \zeta_{\theta}^{\theta}=\kappa\chi+\eta_z y_{,s}-\eta_y z_{,s}, \quad \zeta_{\theta,1}^{\theta,1}=\mu\omega_{,s}, \quad \zeta_{x,1}^{y,1}=-\frac{1}{2}y_{,s}, \\
&\zeta_{x,1}^{z,1}=-\frac{1}{2}z_{,s}, \quad \zeta_{x,1}^{\theta}=-\frac{1}{2}\chi, \quad \zeta_{x,1}^{\theta,1}=-\frac{1}{2}\omega_{,s}, \quad \zeta_{y,1}^{y,2}=\frac{1}{2}yy_{,s}, \quad \zeta_{y,1}^{z,1}=\frac{1}{2}\left(y_{,x}z_{,s}+z_{,x}y_{,s}\right), \\
&\zeta_{y,1}^{z,2}=\frac{1}{2}zy_{,s}, \quad \zeta_{y,1}^{\theta}=\frac{1}{2}\left(y_{,x}\chi+\kappa y_{,s}-z_{,s}\right), \quad \zeta_{y,1}^{\theta,1}=\frac{1}{2}\left(y_{,x}\omega_{,s}+\mu y_{,s}\right), \quad \zeta_{y,1}^{\theta,2}=\frac{1}{2}\omega y_{,s}, \\
&\zeta_{y,2}^{z,1}=\frac{1}{2}yz_{,s}, \quad \zeta_{y,2}^{\theta}=\frac{1}{2}y\chi, \quad \zeta_{y,2}^{\theta,1}=\frac{1}{2}y\omega_{,s}, \quad \zeta_{z,1}^{z,2}=\frac{1}{2}zz_{,s}, \quad \zeta_{z,1}^{\theta}=\frac{1}{2}\left(z_{,x}\chi+\kappa z_{,s}+y_{,s}\right), \\
&\zeta_{z,1}^{\theta,1}=\frac{1}{2}\left(z_{,x}\omega_{,s}+\mu z_{,s}\right), \quad \zeta_{z,1}^{\theta,2}=\frac{1}{2}\omega z_{,s}, \quad \zeta_{z,2}^{\theta}=\frac{1}{2}z\chi, \quad \zeta_{z,2}^{\theta,1}=\frac{1}{2}z\omega_{,s}, \\
&\zeta_{\theta}^{\theta,1}=\frac{1}{2}\left(\kappa\omega_{,s}+\vartheta_z y_{,s}-\vartheta_y z_{,s}+\mu\chi\right), \quad \zeta_{\theta}^{\theta,2}=\frac{1}{2}\omega\chi \quad \zeta_{\theta,1}^{\theta,2}=\frac{1}{2}\omega\omega_{,s},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

otrzymamy

$$\gamma_{xs}^{nl}=\frac{1}{2}\left(\zeta_{y,1}^{y,1}u_{y,x}^2+\zeta_{z,1}^{z,1}{}_{u_{z,x}^2}u_{z,x}^2+\zeta_{\theta}^{\theta}\theta^2+\zeta_{\theta,1}^{\theta,1}\theta_{,x}^2\right)+\zeta_{x,1}^{y,1}u_{ox,x}u_{y,x}+\zeta_{x,1}^{z,1}u_{ox,x}u_{z,x}$$
$$+\zeta_{x,1}^{\theta}u_{ox,x}\theta+\zeta_{x,1}^{\theta,1}u_{ox,x}\theta_{,x}+\zeta_{y,1}^{y,2}u_{y,x}u_{y,xx}+\zeta_{y,1}^{z,1}u_{y,x}u_{z,x}+\zeta_{y,1}^{z,2}u_{y,x}u_{z,xx}+\zeta_{y,1}^{\theta}u_{y,x}\theta$$
$$+\zeta_{y,1}^{\theta,1}u_{y,x}\theta_{,x}+\zeta_{y,1}^{\theta,2}u_{y,x}\theta_{,xx}+\zeta_{y,2}^{z,1}u_{y,xx}u_{z,x}+\zeta_{y,2}^{\theta}u_{y,xx}\theta+\zeta_{y,2}^{\theta,1}u_{y,xx}\theta_{,x}+\zeta_{z,1}^{z,2}u_{z,x}u_{z,xx} \qquad (2.35)$$
$$+\zeta_{z,1}^{\theta}u_{z,x}\theta+\zeta_{z,1}^{\theta,1}u_{z,x}\theta_{,x}+\zeta_{z,1}^{\theta,2}u_{z,x}\theta_{,xx}+\zeta_{z,2}^{\theta}u_{z,xx}\theta+\zeta_{z,2}^{\theta,1}u_{z,xx}\theta_{,x}+\zeta_{\theta}^{\theta,1}\theta\theta_{,x}$$
$$+\zeta_{\theta}^{\theta,2}\theta\theta_{,xx}+\zeta_{\theta,1}^{\theta,2}\theta_{,x}\theta_{,xx}.$$

Nieliniowa składowa odkształcenia γ_{ss}^{nl} ma postać

$$\gamma_{ss}^{nl}=\frac{1}{2}\left(u_{x,s}^2+z_{,s}^2+y_{,s}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\left(-y_{,s}u_{y,x}-z_{,s}u_{z,x}-\chi\theta-\omega_{,s}\theta_{,x}\right)^2+z_{,s}^2\theta^2+y_{,s}^2\theta^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(y_{,s}^2u_{y,x}^2+z_{,s}^2u_{z,x}^2+\left(\chi^2+z_{,s}^2+y_{,s}^2\right)\theta^2+\omega_{,s}^2\theta_{,x}^2\right) \qquad (2.36)$$
$$+y_{,s}z_{,s}u_{y,x}u_{z,x}+y_{,s}\chi u_{y,x}\theta+y_{,s}\omega_{,s}u_{y,x}\theta_{,x}+z_{,s}\chi u_{z,x}\theta+z_{,s}\omega_{,s}u_{z,x}\theta_{,x}+\chi\omega_{,s}\theta\theta_{,x}.$$

Po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$\xi_{y,1}^{y,1}=y_{,s}^2,\quad \xi_{z,1}^{z,1}=z_{,s}^2,\quad \xi_{\theta}^{\theta}=\chi^2+y_{,s}^2+z_{,s}^2,\quad \xi_{\theta,1}^{\theta,1}=\omega_{,s}^2,\quad \xi_{y,1}^{z,1}=y_{,s}z_{,s},$$
$$\xi_{y,1}^{\theta}=y_{,s}\chi,\quad \xi_{y,1}^{\theta,1}=y_{,s}\omega_{,s},\quad \xi_{z,1}^{\theta}=z_{,s}\chi,\quad \xi_{z,1}^{\theta,1}=z_{,s}\omega_{,s},\quad \xi_{\theta}^{\theta,1}=\chi\omega_{,s}, \qquad (2.37)$$

składowa ta ostatecznie wyraża się wzorem

$$\gamma_{ss}^{nl}=\frac{1}{2}\left(\xi_{y,1}^{y,1}u_{y,x}^2+\xi_{z,1}^{z,1}u_{z,x}^2+\xi_{\theta}^{\theta}\theta^2+\xi_{\theta,1}^{\theta,1}\theta_{,x}^2\right)$$
$$+\xi_{y,1}^{z,1}u_{y,x}u_{z,x}+\xi_{y,1}^{\theta}u_{y,x}\theta+\xi_{y,1}^{\theta,1}u_{y,x}\theta_{,x}+\xi_{z,1}^{\theta}u_{z,x}\theta+\xi_{z,1}^{\theta,1}u_{z,x}\theta_{,x}+\xi_{\theta}^{\theta,1}\theta\theta_{,x}. \qquad (2.38)$$

2.5. Wyprowadzenia zależności opisujących stan naprężenia

Zależność pomiędzy odkształceniami i naprężeniami określone są wzorem

$$n^{\alpha\beta}=D\mathbf{H}^{\alpha\beta\rho\lambda}\gamma_{\rho\lambda}, \qquad (2.39)$$

gdzie: $\mathbf{H}^{\alpha\beta\rho\lambda}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{a}^{\alpha\beta}\mathbf{a}^{\beta\rho}+\mathbf{a}^{\alpha\rho}\mathbf{a}^{\beta\lambda}+\upsilon\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\rho}\boldsymbol{\varepsilon}^{\beta\lambda}+\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}^{\beta\rho}\right)\right)$, $D=E'g$, $E'=\frac{E}{1-\nu^2}$,

ν – współczynnik Poissona, E – moduł Younga, g – grubość , $\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ – tensor Ricciego.

Powyższa zależność po uwzględnieniu, że $\gamma_{xs} = \gamma_{ss} = 0$ sprowadza się do postaci

$$n^{xx} = E' g \left(1+\beta^2\right)^{-2} \gamma_{xx}. \tag{2.40}$$

Ponieważ założono, że $\gamma_{xs} = \gamma_{sx} = 0$, stąd siły n^{xs} nie mogą być wyprowadzone z relacji odkształcenia-naprężenia podanej powyżej. Siły n^{xs} mogą być wyprowadzone z równań równowagi.

Rozważając siły przekrojowe działające w przekroju poprzecznym dla $x = const$. Otrzymujemy wektor sił wyrażony za pomocą sił membranowych w postaci następującego równania

$$\mathbf{t} = n^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_\beta, \tag{2.41}$$

gdzie n_α jest kowariantnym elementem wektora jednostkowego normalnego do płaszczyzny stycznej i prostopadłego do linii stycznej do przekroju poprzecznego. Wobec tego, że $\mathbf{n}$ jest równy $\boldsymbol{\alpha}_T$ wynikają następujące równości:

$$\begin{aligned} n_x &= \left(1+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ n_s &= 0. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Zatem

$$\mathbf{t} = n^{xx} \left(1+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{a}_t + n^{xs} \left(1+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{a}_s. \tag{2.43}$$

W celu znalezienia składowej $\mathbf{t}$ działającej wzdłuż osi x rzutujemy wektor na oś x mnożąc go skalarnie z wersorem $\mathbf{e}_x$. W wyniku tego mnożenia otrzymujemy

$$\sigma_{xx} = \mathbf{t} \circ \mathbf{e}_x = E' g^* \left(u_{ox,x} - y u_{y,xx} - z u_{z,xx} - \omega\theta_{,xx} - \psi\theta_{,x} - \delta\theta\right), \tag{2.44}$$

gdzie $g^* = \left(1+\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}} g$ wyraża zredukowaną grubość.

Powyższe wyrażenie opisuje naprężenia wynikające z odkształceń liniowych. W analogiczny sposób definiuje się naprężenia związane z odkształceniami nieliniowymi

$$\sigma_{xx}^{nl*} = \mathbf{t}^{nl*} \circ \mathbf{e}_x =$$

$$= -E'g^* \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha_{x,1}^{x,1}u_{ox,x}^2 + \alpha_{y,1}^{y,1}u_{y,x}^2 + \alpha_{y,2}^{y,2}u_{y,xx}^2 + \alpha_{z,1}^{z,1}u_{z,x}^2 + \alpha_{z,2}^{z,2}u_{z,xx}^2 \\ +\alpha_{\theta}^{\theta}\theta^2 + \alpha_{\theta,1}^{\theta,1}\theta_{,x}^2 + \alpha_{\theta,2}^{\theta,2}\theta_{,xx}^2 \end{pmatrix} \\ +\alpha_{x,1}^{y,1}u_{ox,x}u_{y,x} + \alpha_{x,1}^{y,2}u_{ox,x}u_{y,xx} + \alpha_{x,1}^{z,1}u_{ox,x}u_{z,x} + \alpha_{x,1}^{z,2}u_{ox,x}u_{z,xx} + \alpha_{x,1}^{\theta}u_{ox,x}\theta \\ +\alpha_{x,1}^{\theta,1}u_{ox,x}\theta_{,x} + \alpha_{x,1}^{\theta,2}u_{ox,x}\theta_{,xx} + \alpha_{y,1}^{y,2}u_{y,x}u_{y,xx} + \alpha_{y,1}^{z,1}u_{y,x}u_{z,x} + \alpha_{y,1}^{z,2}u_{y,x}u_{z,xx} \\ +\alpha_{y,1}^{\theta}u_{y,x}\theta + \alpha_{y,1}^{\theta,1}u_{y,x}\theta_{,x} + \alpha_{y,1}^{\theta,2}u_{y,x}\theta_{,xx} + \alpha_{y,2}^{z,1}u_{y,xx}u_{z,x} + \alpha_{y,2}^{z,2}u_{y,xx}u_{z,xx} + \alpha_{y,2}^{\theta}u_{y,xx}\theta \\ +\alpha_{y,2}^{\theta,1}u_{y,xx}\theta_{,x} + \alpha_{y,2}^{\theta,2}u_{y,xx}\theta_{,xx} + \alpha_{z,1}^{z,2}u_{z,x}u_{z,xx} + \alpha_{z,1}^{\theta}u_{z,x}\theta + \alpha_{z,1}^{\theta,1}u_{z,x}\theta_{,x} + \alpha_{z,1}^{\theta,2}u_{z,x}\theta_{,xx} \\ +\alpha_{z,2}^{\theta}u_{z,xx}\theta + \alpha_{z,2}^{\theta,1}u_{z,xx}\theta_{,x} + \alpha_{z,2}^{\theta,2}u_{z,xx}\theta_{,xx} + \alpha_{\theta}^{\theta,1}\theta\theta_{,x} + \alpha_{\theta}^{\theta,2}{}_{\theta\theta_{,xx}}\theta\theta_{,xx} + \alpha_{\theta,1}^{\theta,2}\theta_{,x}\theta_{,xx} \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

Na podstawie powyższych zależności możemy wyznaczyć siły przekrojowe obliczone względem prostoliniowej osi odniesienia w następujący sposób:

$$N = \int_S \sigma_{xx} ds, \quad M_y = \int_S z\sigma_{xx} ds, \quad M_z = -\int_S y\sigma_{xx} ds, \quad B = \int_S \omega\sigma_{xx} ds., \tag{2.46}$$

gdzie całkowanie zdefiniowane jest po konturze przekroju poprzecznego. W tym celu wygodne jest zastosowanie zapisu, w którym elementarny wycinek pola dA^* definiujemy przy użyciu zredukowanej grubości g^* w następujący sposób

$$dA^* = g^* ds. \tag{2.47}$$

Liniowe składniki sił przekrojowych wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} N &= E'\left(A^* u_{ox,x} - S_z^* u_{y,xx} - S_y^* u_{z,xx} - S_\omega^* \theta_{,xx} - S_\psi^* \theta_{,x} - S_\delta^* \theta\right), \\ M_y &= E'\left(S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_y^* u_{z,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right), \\ M_z &= -E'\left(S_z^* u_{ox,x} - I_z^* u_{y,xx} - I_{yz}^* u_{z,xx} - I_{\omega z}^* \theta_{,xx} - I_{\psi z}^* \theta_{,x} - I_{\delta z}^* \theta\right), \\ B &= E'\left(S_\omega^* u_{ox,x} - I_{\omega z}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* u_{z,xx} - I_\omega^* \theta_{,xx} - I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} - I_{\delta\omega}^* \theta\right). \end{aligned} \tag{2.48}$$

gdzie:

$$
\begin{gathered}
A^* = \int_S dA^*, \quad S_y^* = \int_S z dA^*, \quad S_z^* = \int_S y dA^*, \\
S_\omega^* = \int_S \omega dA^*, \quad S_\psi^* = \int_S \psi dA^*, \quad S_\delta^* = \int_S \delta dA^*, \\
I_y^* = \int_S z^2 dA^*, \quad I_z^* = \int_S y^2 dA^*, \quad I_{yz}^* = \int_S yz dA^*, \\
I_{\omega y}^* = \int_S z\omega dA^*, \quad I_{\omega z}^* = \int_S y\omega dA^*, \quad I_\omega^* = \int_S \omega^2 dA^*, \\
I_{\psi y}^* = \int_S z\psi dA^*, \quad I_{\psi z}^* = \int_S y\psi dA^*, \quad I_{\psi\omega}^* = \int_S \omega\psi dA^*, \\
I_{\delta y}^* = \int_S z\delta dA^*, \quad I_{\delta z}^* = \int_S y\delta dA^*, \quad I_{\delta\omega}^* = \int_S \omega\delta dA^*.
\end{gathered}
\tag{2.49}
$$

Nieliniowe składniki sił przekrojowych wyrażają się następującymi wzorami:

$$
N^{nl*} = E' \left(\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} S^*_{\alpha^{x,1}_{x,1}} u^2_{ox,x} + S^*_{\alpha^{y,1}_{y,1}} u^2_{y,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{y,2}} u^2_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{z,1}} u^2_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{z,2}} u^2_{z,xx} \\ + S^*_{\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta^2 + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta^2_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta^2_{,xx} \end{array} \right) \\
+ u_{ox,x} \left(\begin{array}{l} S^*_{\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{z,xx} \\ + S^*_{\alpha^{\theta}_{x,1}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{x,1}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{x,1}} \theta_{,xx} \end{array} \right) \\
+ u_{y,x} \left(S^*_{\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,1}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,1}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,1}} \theta_{,xx} \right) \\
+ u_{y,xx} \left(S^*_{\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,2}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,2}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,2}} \theta_{,xx} \right) \\
+ u_{z,x} \left(S^*_{\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,1}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,1}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,1}} \theta_{,xx} \right) \\
+ u_{z,xx} \left(S^*_{\alpha^{\theta}_{z,2}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,2}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,2}} \theta_{,xx} \right) + \theta \left(S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta_{,xx} \right) + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,x} \theta_{,xx}
\end{array} \right),
\tag{2.50}
$$

gdzie

$$
S^*_{\alpha_i^j} = \int_S \alpha_i^j dA^*,
\tag{2.51}
$$

$$M_y^{nl*} = E'\left(\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} I^*_{y\alpha_{x,1}^{x,1}}u^2_{ox,x} + I^*_{y\alpha_{y,1}^{y,1}}u^2_{y,x} + I^*_{y\alpha_{y,2}^{y,2}}u^2_{y,xx} + I^*_{y\alpha_{z,1}^{z,1}}u^2_{z,x} + I^*_{y\alpha_{z,2}^{z,2}}u^2_{z,xx} \\ + I^*_{y\alpha_{\theta}^{\theta}}\theta^2 + I^*_{y\alpha_{\theta,1}^{\theta,1}}\theta^2_{,x} + I^*_{y\alpha_{\theta,2}^{\theta,2}}\theta^2_{,xx} \end{array}\right) \\
+u_{ox,x}\left(\begin{array}{l} I^*_{y\alpha_{x,1}^{y,1}}u_{y,x} + I^*_{y\alpha_{x,1}^{y,2}}u_{y,xx} + I^*_{y\alpha_{x,1}^{z,1}}u_{z,x} + I^*_{y\alpha_{x,1}^{z,2}}u_{z,xx} \\ + I^*_{y\alpha_{x,1}^{\theta}}\theta + I^*_{y\alpha_{x,1}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{y\alpha_{x,1}^{\theta,2}}\theta_{,xx} \end{array}\right) \\
+u_{y,x}\left(I^*_{y\alpha_{y,1}^{y,2}}u_{y,xx} + I^*_{y\alpha_{y,1}^{z,1}}u_{z,x} + I^*_{y\alpha_{y,1}^{z,2}}u_{z,xx} + I^*_{y\alpha_{y,1}^{\theta}}\theta + I^*_{y\alpha_{y,1}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{y\alpha_{y,1}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) \\
+u_{y,xx}\left(I^*_{y\alpha_{y,2}^{z,1}}u_{z,x} + I^*_{y\alpha_{y,2}^{z,2}}u_{z,xx} + I^*_{y\alpha_{y,2}^{\theta}}\theta + I^*_{y\alpha_{y,2}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{y\alpha_{y,2}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) \\
+u_{z,x}\left(I^*_{y\alpha_{z,1}^{z,2}}u_{z,xx} + I^*_{y\alpha_{z,1}^{\theta}}\theta + I^*_{y\alpha_{z,1}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{y\alpha_{z,1}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) \\
+u_{z,xx}\left(I^*_{y\alpha_{z,2}^{\theta}}\theta + I^*_{y\alpha_{z,2}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{y\alpha_{z,2}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) + \theta\left(I^*_{y\alpha_{\theta}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{y\alpha_{\theta}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) + I^*_{y\alpha_{\theta,1}^{\theta,2}}\theta_{,x}\theta_{,xx}
\end{array}\right), \tag{2.52}$$

gdzie

$$I^*_{y\alpha_i^j} = \int_S z\alpha_i^j dA^*, \tag{2.53}$$

$$M_z^{nl*} = -E'\left(\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} I^*_{z\alpha_{x,1}^{x,1}}u^2_{ox,x} + I^*_{z\alpha_{y,1}^{y,1}}u^2_{y,x} + I^*_{z\alpha_{y,2}^{y,2}}u^2_{y,xx} + I^*_{z\alpha_{z,1}^{z,1}}u^2_{z,x} + I^*_{z\alpha_{z,2}^{z,2}}u^2_{z,xx} \\ + I^*_{z\alpha_{\theta}^{\theta}}\theta^2 + I^*_{z\alpha_{\theta,1}^{\theta,1}}\theta^2_{,x} + I^*_{z\alpha_{\theta,2}^{\theta,2}}\theta^2_{,xx} \end{array}\right) \\
+u_{ox,x}\left(\begin{array}{l} I^*_{z\alpha_{x,1}^{y,1}}u_{y,x} + I^*_{z\alpha_{x,1}^{y,2}}u_{y,xx} + I^*_{z\alpha_{x,1}^{z,1}}u_{z,x} + I^*_{z\alpha_{x,1}^{z,2}}u_{z,xx} \\ + I^*_{z\alpha_{x,1}^{\theta}}\theta + I^*_{z\alpha_{x,1}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{z\alpha_{x,1}^{\theta,2}}\theta_{,xx} \end{array}\right) \\
+u_{y,x}\left(I^*_{z\alpha_{y,1}^{y,2}}u_{y,xx} + I^*_{z\alpha_{y,1}^{z,1}}u_{z,x} + I^*_{z\alpha_{y,1}^{z,2}}u_{z,xx} + I^*_{z\alpha_{y,1}^{\theta}}\theta + I^*_{z\alpha_{y,1}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{z\alpha_{y,1}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) \\
+u_{y,xx}\left(I^*_{z\alpha_{y,2}^{z,1}}u_{z,x} + I^*_{z\alpha_{y,2}^{z,2}}u_{z,xx} + I^*_{z\alpha_{y,2}^{\theta}}\theta + I^*_{z\alpha_{y,2}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{z\alpha_{y,2}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) \\
+u_{z,x}\left(I^*_{z\alpha_{z,1}^{z,2}}u_{z,xx} + I^*_{z\alpha_{z,1}^{\theta}}\theta + I^*_{z\alpha_{z,1}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{z\alpha_{z,1}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) \\
+u_{z,xx}\left(I^*_{z\alpha_{z,2}^{\theta}}\theta + I^*_{z\alpha_{z,2}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{z\alpha_{z,2}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) + \theta\left(I^*_{z\alpha_{\theta}^{\theta,1}}\theta_{,x} + I^*_{z\alpha_{\theta}^{\theta,2}}\theta_{,xx}\right) + I^*_{z\alpha_{\theta,1}^{\theta,2}}\theta_{,x}\theta_{,xx}
\end{array}\right), \tag{2.54}$$

gdzie

$$I^*_{z\alpha_i^j} = \int_S y\alpha_i^j dA^*, \tag{2.55}$$

$$B^{nl*} = E'\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I^*_{\omega\alpha^{x,1}_{x,1}}u^2_{ox,x} + I^*_{\omega\alpha^{y,1}_{y,1}}u^2_{y,x} + I^*_{\omega\alpha^{y,2}_{y,2}}u^2_{y,xx} + I^*_{\omega\alpha^{z,1}_{z,1}}u^2_{z,x} + I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{z,2}}u^2_{z,xx} \\ + I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{\theta}}\theta^2 + I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}}\theta^2_{,x} + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}}\theta^2_{,xx} \end{pmatrix} \\ + u_{ox,x}\begin{pmatrix} I^*_{\omega\alpha^{y,1}_{x,1}}u_{y,x} + I^*_{\omega\alpha^{y,2}_{x,1}}u_{y,xx} + I^*_{\omega\alpha^{z,1}_{x,1}}u_{z,x} + I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{x,1}}u_{z,xx} \\ + I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{x,1}}\theta + I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{x,1}}\theta_{,x} + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{x,1}}\theta_{,xx} \end{pmatrix} \\ + u_{y,x}\left(I^*_{\omega\alpha^{y,2}_{y,1}}u_{y,xx} + I^*_{\omega\alpha^{z,1}_{y,1}}u_{z,x} + I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{y,1}}u_{z,xx} + I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{y,1}}\theta + I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{y,1}}\theta_{,x} + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{y,1}}\theta_{,xx}\right) \\ + u_{y,xx}\left(I^*_{\omega\alpha^{z,1}_{y,2}}u_{z,x} + I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{y,2}}u_{z,xx} + I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{y,2}}\theta + I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{y,2}}\theta_{,x} + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{y,2}}\theta_{,xx}\right) \\ + u_{z,x}\left(I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{z,1}}u_{z,xx} + I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{z,1}}\theta + I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{z,1}}\theta_{,x} + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{z,1}}\theta_{,xx}\right) \\ + u_{z,xx}\left(I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{z,2}}\theta + I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{z,2}}\theta_{,x} + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{z,2}}\theta_{,xx}\right) + \theta\left(I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{\theta}}\theta_{,x} + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{\theta}}\theta_{,xx}\right) + I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}}\theta_{,x}\theta_{,xx} \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

gdzie

$$I^*_{\omega\alpha^j_i} = \int_S \omega\alpha^j_i dA^* . \tag{2.57}$$

Na podstawie powyższych wzorów nie ma możliwości zdefiniowania momentu skręcającego oraz sił tnących. Do znalezienia naprężeń membranowych n^{xs} konieczne jest rozwiązanie równania równowagi

$$n^{x\alpha}\Big|_{\alpha} = 0 . \tag{2.58}$$

Tensor metryczny dla rozważanego układu współrzędnych jest znany, w związku z tym możemy wyznaczyć symbole Christoffela oraz pochodne kowariantne dla pręta. Prowadzi to do relacji następującej postaci (patrz [120])

$$n^{xs}_{,s} + n^{xs}\left(1+\beta^2\right)^{-1}\left(3\beta\beta_{,s} + 2\gamma\gamma_{,s}\right) + n^{xx}_{,x} + n^{xx}\left(1+\beta^2\right)^{-1}\left(\gamma^2\gamma_{,s} + 3\gamma\beta\beta_{,s} + 2\beta\beta_{,x}\right) = 0 . \tag{2.59}$$

W ogólnym przypadku nie ma możliwości rozwiązania powyższej równości. Gdy $\gamma = 0$ czyli gdy układ współrzędnych jest ortogonalny równanie upraszcza się do postaci (patrz [120])

$$\left(\left(1+\beta^2\right)^{\frac{3}{2}} n^{xs}\right)_{,s} + \left(1+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(1+\beta^2\right)n^{xx}\right)_{,x} = 0 . \tag{2.60}$$

Powyższa równość może być łatwo całkowana ponieważ n^{xx} jest znane.

Korzystając z zależności

$$n^{xx} = E'g\left(1+\beta^2\right)^{-2}\gamma_{xx}, \tag{2.61}$$

otrzymujemy

$$\left(1+\beta^2\right)^{\frac{3}{2}} n^{xs} = -\int_{s_-}^{s}\left(1+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(E'g\left(1+\beta^2\right)^{-1}\gamma_{xx}\right)_x ds\,. \tag{2.62}$$

Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy końcową postać wzoru z którego możemy wyznaczyć naprężenia styczne

$$n^{xs} = -\left(1+\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}}\int_{s_-}^{s}\left(1+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} E'g\left[-2\beta\beta_{,x}\left(1+\beta^2\right)^{-2}\gamma_{xx}+\left(1+\beta^2\right)^{-1}\gamma_{xx,x}\right]ds\,. \tag{2.63}$$

Gdy zmiana przekroju-poprzecznego jest mała możemy przyjąć $1+\beta^2 \approx 1$ i $\beta_{,x} = 0$ redukuje to równanie do prostszej postaci

$$n^{xs} = \int_{s_-}^{s} E'g\gamma_{xx,x}ds\,. \tag{2.64}$$

3. Równania opisujące przemieszczenia pręta cienkościennego

3.1. Opis sposobu wyprowadzenia równań

Teoria prętów cienkościennych jest przybliżoną teorią inżynierską. Jedną z metod pozwalającą na wyprowadzenie równań opisujących zachowanie pręta cienkościennego jest zastosowanie metod wariacyjnych w tym zasady minimum energii potencjalnej, w przypadku zagadnień niezależnych od czasu, oraz zasadę minimalnego działania Hamiltona, w przypadku zagadnień dynamicznych. W tym celu wyznacza się wariacje funkcjonałów określających energie potencjalną i kinetyczną oraz pracę obciążenia zewnętrznego. W celu wyznaczenia równań opisujących zagadnienia elastokinetyki korzystamy z następujących zależności:

- w przypadku równań opisujących liniowe zagadnienia statyki

$$\delta\left(U_l - W\right) = 0, \tag{3.1}$$

- w przypadku równań opisujących nieliniowe zagadnienie statyki

$$\delta\left(U_l + U_l^{nl} - W\right) = 0, \tag{3.2}$$

- w przypadku równań opisujących zagadnienie drgań własnych

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(U_l - U_M\right)dt = 0, \tag{3.3}$$

- w przypadku równań opisujących zagadnienie wg teorii II rzędu, w tym zagadnienie utraty stateczności

$$\delta\left(U_l + U_0 - W\right) = 0, \tag{3.4}$$

- w przypadku równań opisujących zagadnienie drgań wymuszonych

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(U_l - U_M\right)dt - \int_{t_0}^{t_1}\delta W\left(t\right)dt = 0, \tag{3.5}$$

gdzie:

U_l – energia potencjalna odkształcenia sprężystego – część liniowa,

U_l^{nl} – energia potencjalna odkształcenia sprężystego – część nieliniowa,

$W\left(t\right)$ – praca obciążenia zewnętrznego,

U_M – energia kinetyczna,

U_0 – energia potencjalna od naprężeń wstępnych.

3.2. Energia potencjalna odkształcenia sprężystego – część liniowa

Energia potencjalna odkształcenia sprężystego określona jest wzorem

$$U_l = \frac{1}{2}\iint n^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}dS + \frac{1}{2}\int_a^b GI_s\left(\theta_{,x}\right)^2 dx, \tag{3.6}$$

gdzie:

$$\frac{1}{2}\iint n^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}dS = \frac{1}{2}\iint n^{xx}\gamma_{xx}dS,$$

$$n^{xx} = E'g\left(1+\beta^2\right)^{-2}\gamma_{xx},$$

$dS = \sqrt{a}dsdx = \sqrt{1+\beta^2}dsdx$, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, ν – współczynnik Poissona, E – moduł Younga,

GI_s – sztywnością na swobodne skręcanie.

Po wykonaniu przekształceń otrzymamy

$$\frac{1}{2}\iint n^{xx}\gamma_{xx}dS = \frac{1}{2}\iint E'g\left(1+\beta^2\right)^{-2}\gamma_{xx}^2\sqrt{1+\beta^2}dsdx = \frac{1}{2}\iint E'\gamma_{xx}^2 dA^* dx, \tag{3.7}$$

gdzie:

$$dA^* = g^* ds, \quad g^* = \left(1+\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}} g, \quad g = \left(1+\beta^2\right)^{\frac{3}{2}} g^*, \quad \left(1+\beta^2\right)^{\frac{3}{2}} dA^* = gds.$$

Ostatecznie energia potencjalna wyraża się wzorem

$$U_l = \frac{1}{2}\iint E'\gamma_{xx}^2 dA^* dx + \frac{1}{2}\int_a^b GI_s\left(\theta_{,x}\right)^2 dx, \tag{3.8}$$

gdzie po podstawieniu wzoru na odkształcenia otrzymujemy

$$U_l = \frac{1}{2}\int_a^b \left(E' \begin{pmatrix} A^* u_{ox,x}^2 + I_z^* u_{y,xx}^2 + I_y^* u_{z,xx}^2 + I_\omega^* \theta_{,xx}^2 + I_\psi^* \theta_{,x}^2 + I_\delta^* \theta^2 \\ -2S_z^* u_{ox,x} u_{y,xx} - 2S_y^* u_{ox,x} u_{z,xx} - 2S_\omega^* u_{ox,x} \theta_{,xx} - 2S_\psi^* u_{ox,x} \theta_{,x} \\ -2S_\delta^* u_{ox,x} \theta + 2I_{yz}^* u_{y,xx} u_{z,xx} + 2I_{\omega z}^* u_{y,xx} \theta_{,xx} + 2I_{\omega y}^* u_{z,xx} \theta_{,xx} \\ +2I_{\psi z}^* u_{y,xx} \theta_{,x} + 2I_{\psi y}^* u_{z,xx} \theta_{,x} + 2I_{\delta z}^* u_{y,xx} \theta + 2I_{\delta y}^* u_{z,xx} \theta \\ +2I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} \theta_{,x} + 2I_{\delta\omega}^* \theta_{,xx} \theta + 2I_{\delta\psi}^* \theta_{,x} \theta \end{pmatrix} + GI_s \theta_{,x}^2 \right) dx. \tag{3.9}$$

Wariacja energii potencjalnej wyraża się wzorem

$$\delta U_l = \int_a^b \left(E' \left(\begin{array}{l} A^* u_{ox,x} \delta u_{ox,x} + I_z^* u_{y,xx} \delta u_{y,xx} + I_y^* u_{z,xx} \delta u_{z,xx} \\ + I_\omega^* \theta_{,xx} \delta \theta_{,xx} + I_\psi^* \theta_{,x} \delta \theta_{,x} + I_\delta^* \theta \delta \theta \\ - S_z^* u_{y,xx} \delta u_{ox,x} - S_z^* u_{ox,x} \delta u_{y,xx} - S_y^* u_{z,xx} \delta u_{ox,x} \\ - S_y^* u_{ox,x} \delta u_{z,xx} - S_\omega^* \theta_{,xx} \delta u_{ox,x} - S_\omega^* u_{ox,x} \delta \theta_{,xx} \\ - S_\psi^* \theta_{,x} \delta u_{ox,x} - S_\psi^* u_{ox,x} \delta \theta_{,x} - S_\delta^* \theta \delta u_{ox,x} \\ - S_\delta^* u_{ox,x} \delta \theta + I_{yz}^* u_{z,xx} \delta u_{y,xx} + I_{yz}^* u_{y,xx} \delta u_{z,xx} \\ + I_{\omega z}^* \theta_{,xx} \delta u_{y,xx} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} \delta \theta_{,xx} + I_{\omega y}^* \theta_{,xx} \delta u_{z,xx} \\ + I_{\omega y}^* u_{z,xx} \delta \theta_{,xx} + I_{\psi z}^* \theta_{,x} \delta u_{y,xx} + I_{\psi z}^* u_{y,xx} \delta \theta_{,x} \\ + I_{\psi y}^* \theta_{,x} \delta u_{z,xx} + I_{\psi y}^* u_{z,xx} \delta \theta_{,x} + I_{\delta z}^* \theta \delta u_{y,xx} \\ + I_{\delta z}^* u_{y,xx} \delta \theta + I_{\delta y}^* \theta \delta u_{z,xx} + I_{\delta y}^* u_{z,xx} \delta \theta \\ + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} \delta \theta_{,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} \delta \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta \delta \theta_{,xx} \\ + I_{\delta\omega}^* \theta_{,xx} \delta \theta + I_{\delta\psi}^* \theta \delta \theta_{,x} + I_{\delta\psi}^* \theta_{,x} \delta \theta \end{array} \right) + G I_s \theta_{,x} \delta \theta_{,x} \right) dx . \qquad (3.10)$$

W celu zwiększenia czytelności wzorów, otrzymywanych w ramach wykonywanych przekształceń wariacji δU_l, w dalszej części osobno przedstawiono składniki wariacji skojarzone odpowiednio z wariacjami uogólnionych przemieszczeń $\delta u_{ox}, \delta u_y, \delta u_z, \delta\theta$ czy też w pierwszej fazie przekształceń wariacjami ich pochodnych. Składniki te mają postać:

$$\int_a^b \left(E' \left(A^* u_{ox,x} - S_z^* u_{y,xx} - S_y^* u_{z,xx} - S_\omega^* \theta_{,xx} - S_\psi^* \theta_{,x} - S_\delta^* \theta \right) \right) \delta u_{ox,x} dx , \qquad (3.11)$$

$$\int_a^b \left(E' \left(I_z^* u_{y,xx} - S_z^* u_{ox,x} + I_{yz}^* u_{z,xx} + I_{\omega z}^* \theta_{,xx} + I_{\psi z}^* \theta_{,x} + I_{\delta z}^* \theta \right) \right) \delta u_{y,xx} dx , \qquad (3.12)$$

$$\int_a^b \left(E' \left(I_y^* u_{z,xx} - S_y^* u_{ox,x} + I_{yz}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* \theta_{,xx} + I_{\psi y}^* \theta_{,x} + I_{\delta y}^* \theta \right) \right) \delta u_{z,xx} dx , \qquad (3.13)$$

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(E' \left(I_\omega^* \theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta \right) \right) \delta \theta_{,xx} dx \\ &+ \int_a^b \left(E' \left(I_\psi^* \theta_{,x} - S_\psi^* u_{ox,x} + I_{\psi z}^* u_{y,xx} + I_{\psi y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta \right) + G I_s \theta_{,x} \right) \delta \theta_{,x} dx \\ &+ \int_a^b \left(E' \left(I_\delta^* \theta - S_\delta^* u_{ox,x} + I_{\delta z}^* u_{y,xx} + I_{\delta y}^* u_{z,xx} + I_{\delta\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta_{,x} \right) \right) \delta \theta dx . \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Po przekształceniu występujących we wzorach (3.11)-(3.14) całek z wykorzystaniem metody całkowania przez części, otrzymujemy następujące składniki wchodzące w skład wzorów określających równania równowagi:

$$\int_a^b \left(E' \left(-A^* u_{ox,x} + S_z^* u_{y,xx} + S_y^* u_{z,xx} + S_\omega^* \theta_{,xx} + S_\psi^* \theta_{,x} + S_\delta^* \theta \right)_{,x} \right) \delta u_{ox} dx \,, \tag{3.15}$$

$$\int_a^b \left(E' \left(I_z^* u_{y,xx} - S_z^* u_{ox,x} + I_{yz}^* u_{z,xx} + I_{\omega z}^* \theta_{,xx} + I_{\psi z}^* \theta_{,x} + I_{\delta z}^* \theta \right)_{,xx} \right) \delta u_y dx \,, \tag{3.16}$$

$$\int_a^b \left(E' \left(I_y^* u_{z,xx} - S_y^* u_{ox,x} + I_{yz}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* \theta_{,xx} + I_{\psi y}^* \theta_{,x} + I_{\delta y}^* \theta \right)_{,xx} \right) \delta u_z dx \,, \tag{3.17}$$

$$\int_a^b \left(\begin{array}{l} E' \left(\left(I_\omega^* \theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta \right)_{,xx} \right. \\ + \left(-I_\psi^* \theta_{,x} + S_\psi^* u_{ox,x} - I_{\psi z}^* u_{y,xx} - I_{\psi y}^* u_{z,xx} - I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} - I_{\delta\psi}^* \theta \right)_{,x} \\ \left. + \left(I_\delta^* \theta - S_\delta^* u_{ox,x} + I_{\delta z}^* u_{y,xx} + I_{\delta y}^* u_{z,xx} + I_{\delta\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta_{,x} \right) \right) - G \left(I_s \theta_{,x} \right)_{,x} \end{array} \right) \delta\theta dx \,. \tag{3.18}$$

Natomiast składniki wchodzące w skład wzorów określających warunki brzegowe otrzymane w wyniku przekształceń wariacji części liniowej energii potencjalnej U_l określonej wzorami (3.11)-(3.14) przyjmują postać:

$$\left[N \delta u_{ox} \right]_a^b = 0 \,, \tag{3.19}$$

gdzie

$$N = E' \left(A^* u_{ox,x} - S_z^* u_{y,xx} - S_y^* u_{z,xx} - S_\omega^* \theta_{,xx} - S_\psi^* \theta_{,x} - S_\delta^* \theta \right),$$

$$\left[Q_y \delta u_y \right]_a^b = 0 \,, \tag{3.20}$$

gdzie

$$Q_y = E' \left(-I_z^* u_{y,xx} + S_z^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{z,xx} - I_{\omega z}^* \theta_{,xx} - I_{\psi z}^* \theta_{,x} - I_{\delta z}^* \theta \right)_{,x},$$

$$\left[M_z \delta u_{y,x} \right]_a^b = 0 \,, \tag{3.21}$$

gdzie

$$M_z = -E' \left(-I_z^* u_{y,xx} + S_z^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{z,xx} - I_{\omega z}^* \theta_{,xx} - I_{\psi z}^* \theta_{,x} - I_{\delta z}^* \theta \right),$$

$$\left[Q_z \delta u_z\right]_a^b = 0\,, \tag{3.22}$$

gdzie

$$Q_z = E'\left(-I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right)_{,x},$$

$$\left[M_y \delta u_{z,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{3.23}$$

gdzie

$$M_y = E'\left(-I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right),$$

$$\left[M_x \delta\theta\right]_a^b = 0\,, \tag{3.24}$$

gdzie

$$M_x = E'\begin{pmatrix}\left(-I_\omega^* \theta_{,xx} + S_\omega^* u_{ox,x} - I_{\omega z}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* u_{z,xx} - I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} - I_{\delta\omega}^* \theta\right)_{,x} \\ +\left(I_\psi^* \theta_{,x} - S_\psi^* u_{ox,x} + I_{\psi z}^* u_{y,xx} + I_{\psi y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta\right)\end{pmatrix} + GI_s \theta_{,x}\,,$$

$$\left[B\delta\theta_{,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{3.25}$$

gdzie

$$B = E'\left(I_\omega^* \theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta\right).$$

3.3. Energia potencjalna odkształcenia sprężystego – część nieliniowa

W nieliniowej część energii potencjalne pomijamy składniki liniowe uwzględnione w liniowej części energii potencjalnej oraz pomijamy składniki nieliniowe wyższego rzędu tj. $\left(\gamma_{xx}^{nl}\right)^2$

$$U_l^{nl} = \frac{1}{2}\iint E'\left(\left(\gamma_{xx} + \gamma_{xx}^{nl}\right)^2 - \left(\gamma_{xx}\right)^2 - \left(\gamma_{xx}^{nl}\right)^2\right) dA^* dx = \iint E'\,\gamma_{xx}\gamma_{xx}^{nl} dA^* dx\,. \tag{3.26}$$

Po podstawieniu do wzoru (3.26) formuł określających odkształcenia γ_{xx} i γ_{xx}^{nl} otrzymamy

$$U_l^{nl}=\iint E'\begin{pmatrix}u_{ox,x}-yu_{y,xx}-zu_{z,xx}\\-\omega\theta_{,xx}-\psi\theta_{,x}-\delta\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_{x,1}^{x,1}u_{ox,x}^2+\alpha_{y,1}^{y,1}u_{y,x}^2+\alpha_{y,2}^{y,2}u_{y,xx}^2+\alpha_{z,1}^{z,1}u_{z,x}^2\\+\alpha_{z,2}^{z,2}u_{z,xx}^2+\alpha_{\theta}^{\theta}\theta^2+\alpha_{\theta,1}^{\theta,1}\theta_{,x}^2+\alpha_{\theta,2}^{\theta,2}\theta_{,xx}^2\end{pmatrix}\\+\alpha_{x,1}^{y,1}u_{ox,x}u_{y,x}+\alpha_{x,1}^{y,2}u_{ox,x}u_{y,xx}+\alpha_{x,1}^{z,1}u_{ox,x}u_{z,x}\\+\alpha_{x,1}^{z,2}u_{ox,x}u_{z,xx}+\alpha_{x,1}^{\theta}u_{ox,x}\theta+\alpha_{x,1}^{\theta,1}u_{ox,x}\theta_{,x}\\+\alpha_{x,1}^{\theta,2}u_{ox,x}\theta_{,xx}+\alpha_{y,1}^{y,2}u_{y,x}u_{y,xx}+\alpha_{y,1}^{z,1}u_{y,x}u_{z,x}\\+\alpha_{y,1}^{z,2}u_{y,x}u_{z,xx}+\alpha_{y,1}^{\theta}u_{y,x}\theta+\alpha_{y,1}^{\theta,1}u_{y,x}\theta_{,x}\\+\alpha_{y,1}^{\theta,2}u_{y,x}\theta_{,xx}+\alpha_{y,2}^{z,1}u_{y,xx}u_{z,x}+\alpha_{y,2}^{z,2}u_{y,xx}u_{z,xx}\\+\alpha_{y,2}^{\theta}u_{y,xx}\theta+\alpha_{y,2}^{\theta,1}u_{y,xx}\theta_{,x}+\alpha_{y,2}^{\theta,2}u_{y,xx}\theta_{,xx}\\+\alpha_{z,1}^{z,2}u_{z,x}u_{z,xx}+\alpha_{z,1}^{\theta}u_{z,x}\theta+\alpha_{z,1}^{\theta,1}u_{z,x}\theta_{,x}\\+\alpha_{z,1}^{\theta,2}u_{z,x}\theta_{,xx}+\alpha_{z,2}^{\theta}u_{z,xx}\theta+\alpha_{z,2}^{\theta,1}u_{z,xx}\theta_{,x}\\+\alpha_{z,2}^{\theta,2}u_{z,xx}\theta_{,xx}+\alpha_{\theta}^{\theta,1}\theta\theta_{,x}+\alpha_{\theta}^{\theta,2}{}_{\theta\theta_{,xx}}\theta\theta_{,xx}\\+\alpha_{\theta,1}^{\theta,2}\theta_{,x}\theta_{,xx}\end{pmatrix}dA^*dx. \tag{3.27}$$

Po przekształceniu w postać rozwiniętą i wykonaniu całkowania po polu nieliniowa część energii potencjalnej wyraża się następującym wzorem

$$U_l^{nl}=\int_a^b E'\begin{pmatrix}Du_{ox,x}-D_zu_{y,xx}-D_yu_{z,xx}-D_\omega\theta_{,xx}-D_\psi\theta_{,x}-D_\delta\theta\\+Fu_{ox,x}-F_zu_{y,xx}-F_yu_{u_{z,xx}}-F_\omega\theta_{,xx}-F_\psi\theta_{,x}-F_\delta\theta\end{pmatrix}dx\,, \tag{3.28}$$

gdzie:

$$D=\frac{1}{2}\left(S_{\alpha_{x,1}^{x,1}}^*u_{ox,x}^2+S_{\alpha_{y,1}^{y,1}}^*u_{y,x}^2+S_{\alpha_{y,2}^{y,2}}^*u_{y,xx}^2+S_{\alpha_{z,1}^{z,1}}^*u_{z,x}^2+S_{\alpha_{z,2}^{z,2}}^*u_{z,xx}^2+S_{\alpha_{\theta}^{\theta}}^*\theta^2+S_{\alpha_{\theta,1}^{\theta,1}}^*\theta_{,x}^2+S_{\alpha_{\theta,2}^{\theta,2}}^*\theta_{,xx}^2\right), \tag{3.29}$$

$$D_k=\frac{1}{2}\left(I_{k\alpha_{x,1}^{x,1}}^*u_{ox,x}^2+I_{k\alpha_{y,1}^{y,1}}^*u_{y,x}^2+I_{k\alpha_{y,2}^{y,2}}^*u_{y,xx}^2+I_{k\alpha_{z,1}^{z,1}}^*u_{z,x}^2+I_{k\alpha_{z,2}^{z,2}}^*u_{z,xx}^2+I_{k\alpha_{\theta}^{\theta}}^*\theta^2+I_{k\alpha_{\theta,1}^{\theta,1}}^*\theta_{,x}^2+I_{k\alpha_{\theta,2}^{\theta,2}}^*\theta_{,xx}^2\right), \tag{3.30}$$

dla $k=z,y,\omega,\psi,\delta$,

$$\begin{aligned}F=&S_{\alpha_{x,1}^{y,1}}^*u_{ox,x}u_{y,x}+S_{\alpha_{x,1}^{y,2}}^*u_{ox,x}u_{y,xx}+S_{\alpha_{x,1}^{z,1}}^*u_{ox,x}u_{z,x}+S_{\alpha_{x,1}^{z,2}}^*u_{ox,x}u_{z,xx}+S_{\alpha_{x,1}^{\theta}}^*u_{ox,x}\theta+S_{\alpha_{x,1}^{\theta,1}}^*u_{ox,x}\theta_{,x}\\&+S_{\alpha_{x,1}^{\theta,2}}^*u_{ox,x}\theta_{,xx}+S_{\alpha_{y,1}^{y,2}}^*u_{y,x}u_{y,xx}+S_{\alpha_{y,1}^{z,1}}^*u_{y,x}u_{z,x}+S_{\alpha_{y,1}^{z,2}}^*u_{y,x}u_{z,xx}+S_{\alpha_{y,1}^{\theta}}^*u_{y,x}\theta+S_{\alpha_{y,1}^{\theta,1}}^*u_{y,x}\theta_{,x}\\&+S_{\alpha_{y,1}^{\theta,2}}^*u_{y,x}\theta_{,xx}+S_{\alpha_{y,2}^{z,1}}^*u_{y,xx}u_{z,x}+S_{\alpha_{y,2}^{z,2}}^*u_{y,xx}u_{z,xx}+S_{\alpha_{y,2}^{\theta}}^*u_{y,xx}\theta+S_{\alpha_{y,2}^{\theta,1}}^*u_{y,xx}\theta_{,x}+S_{\alpha_{y,2}^{\theta,2}}^*u_{y,xx}\theta_{,xx}\\&+S_{\alpha_{z,1}^{z,2}}^*u_{z,x}u_{z,xx}+S_{\alpha_{z,1}^{\theta}}^*u_{z,x}\theta+S_{\alpha_{z,1}^{\theta,1}}^*u_{z,x}\theta_{,x}+S_{\alpha_{z,1}^{\theta,2}}^*u_{z,x}\theta_{,xx}+S_{\alpha_{z,2}^{\theta}}^*u_{z,xx}\theta+S_{\alpha_{z,2}^{\theta,1}}^*u_{z,xx}\theta_{,x}\\&+S_{\alpha_{z,2}^{\theta,2}}^*u_{z,xx}\theta_{,xx}+S_{\alpha_{\theta}^{\theta,1}}^*\theta\theta_{,x}+S_{\alpha_{\theta}^{\theta,2}}^*\theta\theta_{,xx}+S_{\alpha_{\theta,1}^{\theta,2}}^*\theta_{,x}\theta_{,xx}\,,\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$
\begin{aligned}
F_k &= I^*_{k\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{ox,x} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{ox,x} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{ox,x} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{ox,x} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{x,1}} u_{ox,x}\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{x,1}} u_{ox,x}\theta_{,x} \\
&+ I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{x,1}} u_{ox,x}\theta_{,xx} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,x} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{y,x} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{y,x} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,1}} u_{y,x}\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,1}} u_{y,x}\theta_{,x} \\
&+ I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,1}} u_{y,x}\theta_{,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{y,xx} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{y,xx} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,2}} u_{y,xx}\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,2}} u_{y,xx}\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,2}} u_{y,xx}\theta_{,xx} \\
&+ I^*_{k\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,x} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,1}} u_{z,x}\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,1}} u_{z,x}\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,1}} u_{z,x}\theta_{,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,2}} u_{z,xx}\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,2}} u_{z,xx}\theta_{,x} \\
&+ I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,2}} u_{z,xx}\theta_{,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta\theta_{,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,x}\theta_{,xx},
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$.

Wariacja nieliniowej części energii potencjalnej wyrażona jest wzorem

$$
\delta U_l^{nl} = \int_a^b E' \begin{pmatrix} D\delta u_{ox,x} - D_z \delta u_{y,xx} - D_y \delta u_{z,xx} - D_\omega \delta\theta_{,xx} - D_\psi \delta\theta_{,x} - D_\delta \delta\theta \\ +F\delta u_{ox,x} - F_z \delta u_{y,xx} - F_y \delta u_{z,xx} - F_\omega \delta\theta_{,xx} - F_\psi \delta\theta_{,x} - F_\delta \delta\theta \\ +\delta D u_{ox,x} - \delta D_z u_{y,xx} - \delta D_y u_{z,xx} - \delta D_\omega \theta_{,xx} - \delta D_\psi \theta_{,x} - \delta D_\delta \theta \\ +\delta F u_{ox,x} - \delta F_z u_{y,xx} - \delta F_y u_{z,xx} - \delta F_\omega \theta_{,xx} - \delta F_\psi \theta_{,x} - \delta F_\delta \theta \end{pmatrix} dx, \tag{3.33}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\delta D &= S^*_{\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{y,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{y,xx}\delta u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{z,x}\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{z,xx}\delta u_{z,xx} \\
&+ S^*_{\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta\delta\theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,x}\delta\theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,xx}\delta\theta_{,xx},
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta D_k &= I^*_{k\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{y,xx}\delta u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{z,x}\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{z,xx}\delta u_{z,xx} \\
&+ I^*_{k\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta\delta\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,x}\delta\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,xx}\delta\theta_{,xx},
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

$$\delta F = S^*_{\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{y,x}\delta u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{y,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{y,xx}\delta u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{z,x}\delta u_{ox,x}$$
$$+S^*_{\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{z,xx}\delta u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{x,1}} \theta\delta u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{\theta}_{x,1}} u_{ox,x}\delta\theta$$
$$+S^*_{\alpha^{\theta,1}_{x,1}} \theta_{,x}\delta u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta\theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{x,1}} \theta_{,xx}\delta u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{x,1}} u_{ox,x}\delta\theta_{,xx} + S^*_{\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,xx}\delta u_{y,x}$$
$$+S^*_{\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{z,x}\delta u_{y,x} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{z,xx}\delta u_{y,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{z,xx}$$
$$+S^*_{\alpha^{\theta}_{y,1}} \theta\delta u_{y,x} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,1}} u_{y,x}\delta\theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,1}} \theta_{,x}\delta u_{y,x} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,1}} u_{y,x}\delta\theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,1}} \theta_{,xx}\delta u_{y,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,1}} u_{y,x}\delta\theta_{,xx}$$
$$+S^*_{\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{z,x}\delta u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{y,xx}\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{z,xx}\delta u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{y,xx}\delta u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,2}} \theta\delta u_{y,xx}$$
$$+S^*_{\alpha^{\theta}_{y,2}} u_{y,xx}\delta\theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,2}} \theta_{,x}\delta u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,2}} u_{y,xx}\delta\theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,2}} \theta_{,xx}\delta u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,2}} u_{y,xx}\delta\theta_{,xx}$$
$$+S^*_{\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,xx}\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,x}\delta u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,1}} \theta\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,1}} u_{z,x}\delta\theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,1}} \theta_{,x}\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,1}} u_{z,x}\delta\theta_{,x}$$
$$+S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,1}} \theta_{,xx}\delta u_{z,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,1}} u_{z,x}\delta\theta_{,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,2}} \theta\delta u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,2}} u_{z,xx}\delta\theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,2}} \theta_{,x}\delta u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,2}} u_{z,xx}\delta\theta_{,x}$$
$$+S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,2}} \theta_{,xx}\delta u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,2}} u_{z,xx}\delta\theta_{,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta_{,x}\delta\theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta\delta\theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta_{,xx}\delta\theta + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta\delta\theta_{,xx}$$
$$+S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,xx}\delta\theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,x}\delta\theta_{,xx}\,, \tag{3.36}$$

$$\delta F_k = I^*_{k\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{y,x}\delta u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{y,xx}\delta u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{z,x}\delta u_{ox,x}$$
$$+I^*_{k\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{z,xx}\delta u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{ox,x}\delta u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{x,1}} \theta\delta u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{x,1}} u_{ox,x}\delta\theta$$
$$+I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{x,1}} \theta_{,x}\delta u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{x,1}} u_{ox,x}\delta\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{x,1}} \theta_{,xx}\delta u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{x,1}} u_{ox,x}\delta\theta_{,xx} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,xx}\delta u_{y,x}$$
$$+I^*_{k\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{z,x}\delta u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{z,xx}\delta u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{y,x}\delta u_{z,xx}$$
$$+I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,1}} \theta\delta u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,1}} u_{y,x}\delta\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,1}} \theta_{,x}\delta u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,1}} u_{y,x}\delta\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,1}} \theta_{,xx}\delta u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,1}} u_{y,x}\delta\theta_{,xx}$$
$$+I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{z,x}\delta u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{y,xx}\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{z,xx}\delta u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{y,xx}\delta u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,2}} \theta\delta u_{y,xx}$$
$$+I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,2}} u_{y,xx}\delta\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,2}} \theta_{,x}\delta u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,2}} u_{y,xx}\delta\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,2}} \theta_{,xx}\delta u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,2}} u_{y,xx}\delta\theta_{,xx}$$
$$+I^*_{k\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,xx}\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,x}\delta u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,1}} \theta\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,1}} u_{z,x}\delta\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,1}} \theta_{,x}\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,1}} u_{z,x}\delta\theta_{,x}$$
$$+I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,1}} \theta_{,xx}\delta u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,1}} u_{z,x}\delta\theta_{,xx} + +I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,2}} \theta\delta u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,2}} u_{z,xx}\delta\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,2}} \theta_{,x}\delta u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,2}} u_{z,xx}\delta\theta_{,x}$$
$$+I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,2}} \theta_{,xx}\delta u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,2}} u_{z,xx}\delta\theta_{,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta_{,x}\delta\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta\delta\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta_{,xx}\delta\theta + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta\delta\theta_{,xx}$$
$$+I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,xx}\delta\theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,x}\delta\theta_{,xx}\,. \tag{3.37}$$

Podobnie jak w przypadku przekształceń wariacji δU_l, w celu zwiększenia czytelności przekształcanych wzorów opisujących wariację δU_l^{nl}, w dalszej części przedstawimy osobno składniki wariacji δU_l^{nl} skojarzone z wariacjami uogólnionych przemieszczeń

$\delta u_{ox}, \delta u_y, \delta u_z, \delta\theta$ czy też w pierwszej fazie przekształceń wariacjami ich pochodnych. Składniki te mają postać:

$$\int_a^b E' \begin{pmatrix} D+F \\ +\left(S^*_{\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta\right) u_{ox,x} \\ +H_{x,1} u_{ox,x} - H^z_{x,1} u_{y,xx} - H^y_{x,1} u_{z,xx} - H^{\omega}_{x,1} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{x,1} \theta_{,x} - H^{\delta}_{x,1} \theta \end{pmatrix} \delta u_{ox,x} dx, \tag{3.38}$$

gdzie:

$$H_{x,1} = S^*_{\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{x,1}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{x,1}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{x,1}} \theta_{,xx}, \tag{3.39}$$

$$H^k_{x,1} = I^*_{k\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{x,1}} \theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{x,1}} \theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{x,1}} \theta_{,xx}, \tag{3.40}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$,

$$\begin{aligned} &\int_a^b E' \begin{pmatrix} -D_z - F_z \\ +\left(S^*_{\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta\right) u_{y,xx} \\ +H_{y,2} u_{ox,x} - H^z_{y,2} u_{y,xx} - H^y_{y,2} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{y,2} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{y,2} \theta_{,x} - H^{\delta}_{y,2} \theta \end{pmatrix} \delta u_{y,xx} dx \\ &+\int_a^b E' \begin{pmatrix} \left(S^*_{\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta\right) u_{y,x} \\ +H_{y,1} u_{ox,x} - H^z_{y,1} u_{y,xx} - H^y_{y,1} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{y,1} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{y,1} \theta_{,x} - H^{\delta}_{y,1} \theta \end{pmatrix} \delta u_{y,x} dx, \end{aligned} \tag{3.41}$$

gdzie:

$$H_{y,2} = S^*_{\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,2}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,2}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,2}} \theta_{,xx}, \tag{3.42}$$

$$H^k_{y,2} = I^*_{k\alpha^{y,2}_{x,1}} u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,2}} \theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,2}} \theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,2}} \theta_{,xx}, \tag{3.43}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$,

$$H_{y,1} = S^*_{\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,1}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,1}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,1}} \theta_{,xx}, \tag{3.44}$$

$$H^k_{y,1} = I^*_{k\alpha^{y,1}_{x,1}} u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{y,2}_{y,1}} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,1}} \theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,1}} \theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,1}} \theta_{,xx} \tag{3.45}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$,

$$\int_a^b E'\begin{pmatrix} -D_y - F_y \\ +\left(S^*_{\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta\right) u_{z,xx} \\ +H_{z,2} u_{ox,x} - H^z_{z,2} u_{y,xx} - H^y_{z,2} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{z,2} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{z,2} \theta_{,x} - H^{\delta}_{z,2} \theta \end{pmatrix} \delta u_{z,xx} dx \tag{3.46}$$

$$+\int_a^b E'\begin{pmatrix} \left(S^*_{\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta\right) u_{z,x} \\ +H_{z,1} u_{ox,x} - H^z_{z,1} u_{y,xx} - H^y_{z,1} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{z,1} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{z,1} \theta_{,x} - H^{\delta}_{z,1} \theta \end{pmatrix} \delta u_{z,x} dx,$$

gdzie:

$$H_{z,2} = S^*_{\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,2}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,2}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,2}} \theta_{,xx}, \tag{3.47}$$

$$H^k_{z,2} = I^*_{k\alpha^{z,2}_{x,1}} u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,1}} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{y,2}} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,2}} \theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,2}} \theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,2}} \theta_{,xx}, \tag{3.48}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$,

$$H_{z,1} = S^*_{\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,1}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,1}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,1}} \theta_{,xx}, \tag{3.49}$$

$$H^k_{z,1} = I^*_{k\alpha^{z,1}_{x,1}} u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,1}} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{z,1}_{y,2}} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{z,2}_{z,1}} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,1}} \theta + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,1}} \theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,1}} \theta_{,xx}, \tag{3.50}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$,

$$\int_a^b E'\begin{pmatrix} -D_{\omega} - F_{\omega} \\ +\left(S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta\right) \theta_{,xx} \\ +H_{\theta,2} u_{ox,x} - H^z_{\theta,2} u_{y,xx} - H^y_{\theta,2} u_{z,xx} - H^{\omega}_{\theta,2} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{\theta,2} \theta_{,x} - H^{\delta}_{\theta,2} \theta \end{pmatrix} \delta\theta_{,xx} dx$$

$$+\int_a^b E'\begin{pmatrix} -D_{\psi} - F_{\psi} \\ +\left(S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta\right) \theta_{,x} \\ +H_{\theta,1} u_{ox,x} - H^z_{\theta,1} u_{y,xx} - H^y_{\theta,1} u_{z,xx} - H^{\omega}_{\theta,1} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{\theta,1} \theta_{,x} - H^{\delta}_{\theta,1} \theta \end{pmatrix} \delta\theta_{,x} dx \tag{3.51}$$

$$+\int_a^b E'\begin{pmatrix} -D_{\delta} - F_{\delta} \\ +\left(S^*_{\alpha^{\theta}_{\theta}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta}_{\theta}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta}_{\theta}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta\right) \theta \\ +H_{\theta} u_{ox,x} - H^z_{\theta} u_{y,xx} - H^y_{\theta} u_{z,xx} - H^{\omega}_{\theta} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{\theta} \theta_{,x} - H^{\delta}_{\theta} \theta \end{pmatrix} \delta\theta dx,$$

gdzie:

$$H_{\theta,2} = S^*_{\alpha^{\theta,2}_{x,1}} u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{y,2}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{z,2}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,x}\,, \tag{3.52}$$

$$H^k_{\theta,2} = I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{x,1}} u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,1}} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{y,2}} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,1}} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{z,2}} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,x}\,, \tag{3.53}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$,

$$H_{\theta,1} = S^*_{\alpha^{\theta,1}_{x,1}} u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{y,2}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{z,2}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,xx}\,, \tag{3.54}$$

$$H^k_{\theta,1} = I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{x,1}} u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,1}} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{y,2}} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,1}} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{z,2}} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta,1}} \theta_{,xx}\,, \tag{3.55}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$,

$$H_{\theta} = S^*_{\alpha^{\theta}_{x,1}} u_{ox,x} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,1}} u_{y,x} + S^*_{\alpha^{\theta}_{y,2}} u_{y,xx} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,1}} u_{z,x} + S^*_{\alpha^{\theta}_{z,2}} u_{z,xx} + S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta_{,x} + S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta_{,xx}\,, \tag{3.56}$$

$$H^k_{\theta} = I^*_{k\alpha^{\theta}_{x,1}} u_{ox,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,1}} u_{y,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{y,2}} u_{y,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,1}} u_{z,x} + I^*_{k\alpha^{\theta}_{z,2}} u_{z,xx} + I^*_{k\alpha^{\theta,1}_{\theta}} \theta_{,x} + I^*_{k\alpha^{\theta,2}_{\theta}} \theta_{,xx}\,, \tag{3.57}$$

dla $k = z, y, \omega, \psi, \delta$.

Po przekształceniu występujących we wzorach całek z wykorzystaniem całkowania przez części, otrzymujemy następujące składniki wchodzące w skład wzorów określających równania równowagi:

$$\int_a^b E' \begin{pmatrix} -D - F \\ -\left(S^*_{\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta \right) u_{ox,x} \\ -H_{x,1} u_{ox,x} + H^z_{x,1} u_{y,xx} + H^y_{x,1} u_{z,xx} + H^{\omega}_{x,1} \theta_{,xx} + H^{\psi}_{x,1} \theta_{,x} + H^{\delta}_{x,1} \theta \end{pmatrix}_{,x} \delta u_{ox} dx\,, \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} &\int_a^b E' \begin{pmatrix} -D_z - F_z \\ +\left(S^*_{\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta \right) u_{y,xx} \\ +H_{y,2} u_{ox,x} - H^z_{y,2} u_{y,xx} - H^y_{y,2} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{y,2} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{y,2} \theta_{,x} - H^{\delta}_{y,2} \theta \end{pmatrix}_{,xx} \delta u_y dx \\ &+\int_a^b E' \begin{pmatrix} -\left(S^*_{\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta \right) u_{y,x} \\ -H_{y,1} u_{ox,x} + H^z_{y,1} u_{y,xx} + H^y_{y,1} u_{u_{z,xx}} + H^{\omega}_{y,1} \theta_{,xx} + H^{\psi}_{y,1} \theta_{,x} + H^{\delta}_{y,1} \theta \end{pmatrix}_{,x} \delta u_y dx\,, \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\int_a^b E'\begin{pmatrix} -D_y - F_y \\ +\left(S^*_{\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta\right) u_{z,xx} \\ +H_{z,2} u_{ox,x} - H^z_{z,2} u_{y,xx} - H^y_{z,2} u_{u_{z,xx}} - H^\omega_{z,2} \theta_{,xx} - H^\psi_{z,2} \theta_{,x} - H^\delta_{z,2} \theta \end{pmatrix}_{,xx} \delta u_z dx$$

$$+\int_a^b E'\begin{pmatrix} -\left(S^*_{\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta\right) u_{z,x} \\ -H_{z,1} u_{ox,x} + H^z_{z,1} u_{y,xx} + H^y_{z,1} u_{u_{z,xx}} + H^\omega_{z,1} \theta_{,xx} + H^\psi_{z,1} \theta_{,x} + H^\delta_{z,1} \theta \end{pmatrix}_{,x} \delta u_z dx, \quad (3.60)$$

$$\int_a^b E'\begin{pmatrix} -D_\omega - F_\omega \\ +\left(S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta\right) \theta_{,xx} \\ +H_{\theta,2} u_{ox,x} - H^z_{\theta,2} u_{y,xx} - H^y_{\theta,2} u_{z,xx} - H^\omega_{\theta,2} \theta_{,xx} - H^\psi_{\theta,2} \theta_{,x} - H^\delta_{\theta,2} \theta \end{pmatrix}_{,xx} \delta\theta dx$$

$$+\int_a^b E'\begin{pmatrix} D_\psi + F_\psi \\ -\left(S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta\right) \theta_{,x} \\ -H_{\theta,1} u_{ox,x} + H^z_{\theta,1} u_{y,xx} + H^y_{\theta,1} u_{z,xx} + H^\omega_{\theta,1} \theta_{,xx} + H^\psi_{\theta,1} \theta_{,x} + H^\delta_{\theta,1} \theta \end{pmatrix}_{,x} \delta\theta dx \quad (3.61)$$

$$+\int_a^b E'\begin{pmatrix} -D_\delta - F_\delta \\ +\left(S^*_{\alpha^{\theta}_{\theta}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta}_{\theta}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta}_{\theta}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta}_{\theta}} \theta\right) \theta \\ +H_\theta u_{ox,x} - H^z_\theta u_{y,xx} - H^y_\theta u_{z,xx} - H^\omega_\theta \theta_{,xx} - H^\psi_\theta \theta_{,x} - H^\delta_\theta \theta \end{pmatrix} \delta\theta dx.$$

Składniki wchodzące w skład wzorów określających warunki brzegowe będące składnikami wariacji nieliniowej części energii potencjalnej odkształcenia sprężystego U_l^{nl} przyjmują postać:

$$\left[N \delta u_{ox}\right]_a^b = 0, \quad (3.62)$$

gdzie

$$N = E'\begin{pmatrix} D + F \\ +\left(S^*_{\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{x,1}_{x,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{x,1}_{x,1}} \theta\right) u_{ox,x} \\ +H_{x,1} u_{ox,x} - H^z_{x,1} u_{y,xx} - H^y_{x,1} u_{z,xx} - H^\omega_{x,1} \theta_{,xx} - H^\psi_{x,1} \theta_{,x} - H^\delta_{x,1} \theta \end{pmatrix},$$

$$\left[M_z \delta u_{y,x}\right]_a^b = 0, \quad (3.63)$$

gdzie

$$M_z = -E'\begin{pmatrix} -D_z - F_z \\ +\left(S^*_{\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta\right) u_{y,xx} \\ +H_{y,2} u_{ox,x} - H^z_{y,2} u_{y,xx} - H^y_{y,2} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{y,2} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{y,2} \theta_{,x} - H^{\delta}_{y,2} \theta \end{pmatrix},$$

$$\left[Q_y \delta u_y\right]_a^b = 0, \tag{3.64}$$

gdzie

$$Q_y = E'\begin{pmatrix} D_z + F_z \\ -\left(S^*_{\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{y,2}_{y,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{y,2}_{y,2}} \theta\right) u_{y,xx} \\ -H_{y,2} u_{ox,x} + H^z_{y,2} u_{y,xx} + H^y_{y,2} u_{u_{z,xx}} + H^{\omega}_{y,2} \theta_{,xx} + H^{\psi}_{y,2} \theta_{,x} + H^{\delta}_{y,2} \theta \end{pmatrix}_{,x}$$
$$+E'\begin{pmatrix} \left(S^*_{\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{y,1}_{y,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{y,1}_{y,1}} \theta\right) u_{y,x} \\ +H_{y,1} u_{ox,x} - H^z_{y,1} u_{y,xx} - H^y_{y,1} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{y,1} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{y,1} \theta_{,x} - H^{\delta}_{y,1} \theta \end{pmatrix},$$

$$\left[M_y \delta u_{z,x}\right]_a^b = 0, \tag{3.65}$$

gdzie

$$M_y = E'\begin{pmatrix} -D_y - F_y \\ +\left(S^*_{\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta\right) u_{z,xx} \\ +H_{z,2} u_{ox,x} - H^z_{z,2} u_{y,xx} - H^y_{z,2} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{z,2} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{z,2} \theta_{,x} - H^{\delta}_{z,2} \theta \end{pmatrix},$$

$$\left[Q_z \delta u_z\right]_a^b = 0, \tag{3.66}$$

gdzie

$$Q_z = E'\begin{pmatrix} D_y + F_y \\ -\left(S^*_{\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{z,2}_{z,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{z,2}_{z,2}} \theta\right) u_{z,xx} \\ -H_{z,2} u_{ox,x} + H^z_{z,2} u_{y,xx} + H^y_{z,2} u_{u_{z,xx}} + H^{\omega}_{z,2} \theta_{,xx} + H^{\psi}_{z,2} \theta_{,x} + H^{\delta}_{z,2} \theta \end{pmatrix}_{,x}$$
$$+E'\begin{pmatrix} \left(S^*_{\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{z,1}_{z,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{z,1}_{z,1}} \theta\right) u_{z,x} \\ +H_{z,1} u_{ox,x} - H^z_{z,1} u_{y,xx} - H^y_{z,1} u_{u_{z,xx}} - H^{\omega}_{z,1} \theta_{,xx} - H^{\psi}_{z,1} \theta_{,x} - H^{\delta}_{z,1} \theta \end{pmatrix},$$

$$\left[B\delta\theta_{,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{3.67}$$

gdzie

$$B = E'\begin{pmatrix} -D_\omega - F_\omega \\ +\left(S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta\right)\theta_{,xx} \\ +H_{\theta,2} u_{ox,x} - H^z_{\theta,2} u_{y,xx} - H^y_{\theta,2} u_{z,xx} - H^\omega_{\theta,2} \theta_{,xx} - H^\psi_{\theta,2} \theta_{,x} - H^\delta_{\theta,2} \theta \end{pmatrix},$$

$$\left[M_x \delta\theta\right]_a^b = 0\,, \tag{3.68}$$

gdzie

$$M_x = E'\begin{pmatrix} D_\omega + F_\omega \\ -\left(S^*_{\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta,2}_{\theta,2}} \theta\right)\theta_{,xx} \\ -H_{\theta,2} u_{ox,x} + H^z_{\theta,2} u_{y,xx} + H^y_{\theta,2} u_{z,xx} + H^\omega_{\theta,2} \theta_{,xx} + H^\psi_{\theta,2} \theta_{,x} + H^\delta_{\theta,2} \theta \end{pmatrix}_{,x}$$

$$+E'\begin{pmatrix} -D_\psi - F_\psi \\ +\left(S^*_{\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{ox,x} - I^*_{z\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{y,xx} - I^*_{y\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} u_{z,xx} - I^*_{\omega\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,xx} - I^*_{\psi\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta_{,x} - I^*_{\delta\alpha^{\theta,1}_{\theta,1}} \theta\right)\theta_{,x} \\ +H_{\theta,1} u_{ox,x} - H^z_{\theta,1} u_{y,xx} - H^y_{\theta,1} u_{z,xx} - H^\omega_{\theta,1} \theta_{,xx} - H^\psi_{\theta,1} \theta_{,x} - H^\delta_{\theta,1} \theta \end{pmatrix}.$$

3.4. Energia potencjalna od naprężeń wstępnych

Potencjalna energia sprężysta będąca wynikiem występowania w układzie naprężeń wstępnych określona jest wzorem

$$U_0 = \iint n_0^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{nl} dS\,, \tag{3.69}$$

gdzie: $n_0^{\alpha\beta}$ - naprężenia wstępne od obciążeń zewnętrznych,

$\gamma_{\alpha\beta}^{nl}$ - nieliniowa część odkształceń.

Po podstawieniu niezerowych składników naprężeń i odkształceń otrzymujemy:

$$U_0 = \iint \left(n_0^{xx}\gamma_{xx}^{nl} + n_0^{xs}\gamma_{xs}^{nl} + n_0^{sx}\gamma_{sx}^{nl}\right) dS = \iint \left(n_0^{xx}\gamma_{xx}^{nl} + 2n_0^{xs}\gamma_{xs}^{nl}\right) dS\,, \tag{3.70}$$

gdzie:

$n_0^{xx} = E'\,g\left(1+\beta^2\right)^{-2}\gamma_{xx}^0$,

γ_{xx}^0 - odkształcenia od obciążeń zewnętrznych wyznaczone dla zagadnienia liniowego,

$$n_0^{xs} = -\left(1+\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}} \int_{s_-}^{s} \left(1+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} E' g \left[-2\beta\beta_{,x} \left(1+\beta^2\right)^{-2} \gamma_{xx}^0 + \left(1+\beta^2\right)^{-1} \gamma_{xx,x}^0 \right] ds,$$

γ_{xx}^{nl} - nieliniowa część odkształceń zdefiniowana wzorem (2.31),

γ_{xs}^{nl} - nieliniowa część odkształceń zdefiniowana wzorem (2.35).

Energia potencjalna od naprężeń wstępnych po podstawieniu odkształceń nieliniowych wyraża się wzorem

$$U_0 = \iint E' \left[\begin{array}{l} n_0^{xx} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \alpha_{x,1}^{x,1} u_{ox,x}^2 + \alpha_{y,1}^{y,1} u_{y,x}^2 + \alpha_{y,2}^{y,2} u_{y,xx}^2 + \alpha_{z,1}^{z,1} u_{z,x}^2 + \alpha_{z,2}^{z,2} u_{z,xx}^2 \\ + \alpha_{\theta}^{\theta} \theta^2 + \alpha_{\theta,1}^{\theta,1} \theta_{,x}^2 + \alpha_{\theta,2}^{\theta,2} \theta_{,xx}^2 \end{array} \right) \\ + \alpha_{x,1}^{y,1} u_{ox,x} u_{y,x} + \alpha_{x,1}^{y,2} u_{ox,x} u_{y,xx} + \alpha_{x,1}^{z,1} u_{ox,x} u_{z,x} + \alpha_{x,1}^{z,2} u_{ox,x} u_{z,xx} \\ + \alpha_{x,1}^{\theta} u_{ox,x} \theta + \alpha_{x,1}^{\theta,1} u_{ox,x} \theta_{,x} + \alpha_{x,1}^{\theta,2} u_{ox,x} \theta_{,xx} + \alpha_{y,1}^{y,2} u_{y,x} u_{y,xx} \\ + \alpha_{y,1}^{z,1} u_{y,x} u_{z,x} + \alpha_{y,1}^{z,2} u_{y,x} u_{z,xx} + \alpha_{y,1}^{\theta} u_{y,x} \theta + \alpha_{y,1}^{\theta,1} u_{y,x} \theta_{,x} \\ + \alpha_{y,1}^{\theta,2} u_{y,x} \theta_{,xx} + \alpha_{y,2}^{z,1} u_{y,xx} u_{z,x} + \alpha_{y,2}^{z,2} u_{y,xx} u_{z,xx} + \alpha_{y,2}^{\theta} u_{y,xx} \theta \\ + \alpha_{y,2}^{\theta,1} u_{y,xx} \theta_{,x} + \alpha_{y,2}^{\theta,2} u_{y,xx} \theta_{,xx} + \alpha_{z,1}^{z,2} u_{z,x} u_{z,xx} + \alpha_{z,1}^{\theta} u_{z,x} \theta \\ + \alpha_{z,1}^{\theta,1} u_{z,x} \theta_{,x} + \alpha_{z,1}^{\theta,2} u_{z,x} \theta_{,xx} + \alpha_{z,2}^{\theta} u_{z,xx} \theta + \alpha_{z,2}^{\theta,1} u_{z,xx} \theta_{,x} \\ + \alpha_{z,2}^{\theta,2} u_{z,xx} \theta_{,xx} + \alpha_{\theta}^{\theta,1} \theta \theta_{,x} + \alpha_{\theta}^{\theta,2} {}_{\theta\theta_{,xx}} \theta \theta_{,xx} + \alpha_{\theta,1}^{\theta,2} \theta_{,x} \theta_{,xx} \end{array} \right) \\ + 2 n_0^{xs} \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\zeta_{y,1}^{y,1} u_{y,x}^2 + \zeta_{z,1}^{z,1} {}_{u_{z,x}^2} u_{z,x}^2 + \zeta_{\theta}^{\theta} \theta^2 + \zeta_{\theta,1}^{\theta,1} \theta_{,x}^2 \right) \\ + \zeta_{x,1}^{y,1} u_{ox,x} u_{y,x} + \zeta_{x,1}^{z,1} u_{ox,x} u_{z,x} + \zeta_{x,1}^{\theta} u_{ox,x} \theta + \zeta_{x,1}^{\theta,1} u_{ox,x} \theta_{,x} \\ + \zeta_{y,1}^{y,2} u_{y,x} u_{y,xx} + \zeta_{y,1}^{z,1} u_{y,x} u_{z,x} + \zeta_{y,1}^{z,2} u_{y,x} u_{z,xx} + \zeta_{y,1}^{\theta} u_{y,x} \theta \\ + \zeta_{y,1}^{\theta,1} u_{y,x} \theta_{,x} + \zeta_{y,1}^{\theta,2} u_{y,x} \theta_{,xx} + \zeta_{y,2}^{z,1} u_{y,xx} u_{z,x} + \zeta_{y,2}^{\theta} u_{y,xx} \theta \\ + \zeta_{y,2}^{\theta,1} u_{y,xx} \theta_{,x} + \zeta_{z,1}^{z,2} u_{z,x} u_{z,xx} + \zeta_{z,1}^{\theta} u_{z,x} \theta + \zeta_{z,1}^{\theta,1} u_{z,x} \theta_{,x} \\ + \zeta_{z,1}^{\theta,2} u_{z,x} \theta_{,xx} + \zeta_{z,2}^{\theta} u_{z,xx} \theta + \zeta_{z,2}^{\theta,1} u_{z,xx} \theta_{,x} + \zeta_{\theta}^{\theta,1} \theta \theta_{,x} \\ + \zeta_{\theta}^{\theta,2} \theta \theta_{,xx} + \zeta_{\theta,1}^{\theta,2} \theta_{,x} \theta_{,xx} \end{array} \right) \end{array} \right] dS. \qquad (3.71)$$

Energia potencjalna od naprężeń wstępnych po wykonaniu całkowaniu po polu przekroju poprzecznego wyraża się wzorem

$$U_0 = E'\int_a^b \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} I^0_{x,1,1} u^2_{ox,x} + I^0_{y,1,1} u^2_{y,x} + I^0_{y,2,2} u^2_{y,xx} + I^0_{z,1,1} u^2_{z,x} + I^0_{z,2,2} u^2_{z,xx} \\ + I^0_{\theta,\theta} \theta^2 + I^0_{\theta,1,1} \theta^2_{,x} + I^0_{\theta,2,2} \theta^2_{,xx} \end{array} \right) \\ + I^0_{y,1,1} u_{ox,x} u_{y,x} + I^0_{y,2,1} u_{ox,x} u_{y,xx} + I^0_{z,1,1} u_{ox,x} u_{z,x} + I^0_{z,2,1} u_{ox,x} u_{z,xx} + I^0_{\theta,1} u_{ox,x} \theta \\ + I^0_{\theta,1,1} u_{ox,x} \theta_{,x} + I^0_{\theta,2,1} u_{ox,x} \theta_{,xx} + I^0_{y,2,1} u_{y,x} u_{y,xx} + I^0_{z,1,1} u_{y,x} u_{z,x} + I^0_{z,2,1} u_{y,x} u_{z,xx} \\ + I^0_{\theta,1} u_{y,x} \theta + I^0_{\theta,1,1} u_{y,x} \theta_{,x} + I^0_{\theta,2,1} u_{y,x} \theta_{,xx} + I^0_{z,1,2} u_{y,xx} u_{z,x} + I^0_{z,2,2} u_{y,xx} u_{z,xx} \\ + I^0_{\theta,2} u_{y,xx} \theta + I^0_{\theta,1,2} u_{y,xx} \theta_{,x} + I^0_{\theta,2,2} u_{y,xx} \theta_{,xx} + I^0_{z,1,2} u_{z,x} u_{z,xx} + I^0_{\theta,1} u_{z,x} \theta \\ + I^0_{\theta,1,1} u_{z,x} \theta_{,x} + I^0_{\theta,2,1} u_{z,x} \theta_{,xx} + I^0_{\theta,2} u_{z,xx} \theta + I^0_{\theta,1,2} u_{z,xx} \theta_{,x} + I^0_{\theta,2,2} u_{z,xx} \theta_{,xx} \\ + I^0_{\theta,1,\theta} \theta\theta_{,x} + I^0_{\theta,2,\theta} \theta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2,1} \theta_{,x} \theta_{,xx} \end{array} \right) dx, \quad (3.72)$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
&I^0_{x,1\,x,1}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{x,1\,x,1}ds^*,\quad I^0_{y,1\,y,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{y,1\,y,1}+2n_0^{xs}\zeta_{y,1\,y,1}\right)ds^*,\quad I^0_{y,2\,y,2}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{y,2\,y,2}ds^*,\\
&I^0_{z,1\,z,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{z,1\,z,1}+2n_0^{xs}\zeta_{z,1\,z,1}\right)ds^*,\quad I^0_{z,2\,z,2}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{z,2\,z,2}ds^*,\quad I^0_{\theta\,\theta}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta\,\theta}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta\,\theta}\right)ds^*,\\
&I^0_{\theta,1\,\theta,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,1\,\theta,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,1\,\theta,1}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,2\,\theta,2}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,\theta,2}ds^*,\quad I^0_{y,1\,x,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{y,1\,x,1}+2n_0^{xs}\zeta_{y,1\,x,1}\right)ds^*,\\
&I^0_{y,2\,x,1}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{y,2\,x,1}ds^*,\quad I^0_{z,1\,x,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{z,1\,x,1}+2n_0^{xs}\zeta_{z,1\,x,1}\right)ds^*,\quad I^0_{z,2\,x,1}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{z,2\,x,1}ds^*,\\
&I^0_{\theta\,x,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta\,x,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta\,x,1}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,1\,x,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,1\,x,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,1\,x,1}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,2\,x,1}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,x,1}ds^*,\\
&I^0_{y,2\,y,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{y,2\,y,1}+2n_0^{xs}\zeta_{y,2\,y,1}\right)ds^*,\quad I^0_{z,1\,y,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{z,1\,y,1}+2n_0^{xs}\zeta_{z,1\,y,1}\right)ds^*,\\
&I^0_{z,2\,y,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{z,2\,y,1}+2n_0^{xs}\zeta_{z,2\,y,1}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta\,y,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta\,y,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta\,y,1}\right)ds^*,\\
&I^0_{\theta,1\,y,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,1\,y,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,1\,y,1}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,2\,y,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,y,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,2\,y,1}\right)ds^*,\\
&I^0_{z,1\,y,2}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{z,1\,y,2}+2n_0^{xs}\zeta_{z,1\,y,2}\right)ds^*,\quad I^0_{z,2\,y,2}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{z,2\,y,2}ds^*,\\
&I^0_{\theta\,y,2}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta\,y,2}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta\,y,2}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,1\,y,2}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,1\,y,2}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,1\,y,2}\right)ds^*,\\
&I^0_{\theta,2\,y,2}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,y,2}ds^*,\quad I^0_{z,2\,z,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{z,2\,z,1}+2n_0^{xs}\zeta_{z,2\,z,1}\right)ds^*,\\
&I^0_{\theta\,z,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta\,z,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta\,z,1}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,1\,z,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,1\,z,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,1\,z,1}\right)ds^*,\\
&I^0_{\theta,2\,z,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,z,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,2\,z,1}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta\,z,2}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta\,z,2}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta\,z,2}\right)ds^*,\\
&I^0_{\theta,1\,z,2}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,1\,z,2}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,1\,z,2}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,2\,z,2}=\int_S n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,z,2}ds^*,\quad I^0_{\theta,1\,\theta}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,1\,\theta}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,1\,\theta}\right)ds^*,\\
&I^0_{\theta,2\,\theta}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,\theta}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,2\,\theta}\right)ds^*,\quad I^0_{\theta,2\,\theta,1}=\int_S\left(n_0^{xx}\alpha_{\theta,2\,\theta,1}+2n_0^{xs}\zeta_{\theta,2\,\theta,1}\right)ds^*,\\
&ds^*=\sqrt{1+\beta^2}ds.
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Wariacja energii potencjalnej od naprężeń wstępnych δU_0 określona jest wzorem

$$\delta U_0 = E' \int_a^b \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} I^0_{x,1,1} u_{ox,x} \delta u_{ox,x} + I^0_{y,1,1} u_{y,x} \delta u_{y,x} + I^0_{y,2,2} u_{y,xx} \delta u_{y,xx} + I^0_{z,1,1} u_{z,x} \delta u_{z,x} \\ + I^0_{z,2,2} u_{z,xx} \delta u_{z,xx} + I^0_{\theta} \theta \delta\theta + I^0_{\theta,1,1} \theta_{,x} \delta\theta_{,x} + I^0_{\theta,2,2} \theta_{,xx} \delta\theta_{,xx} \end{array} \right) \\ + I^0_{y,1,1} u_{ox,x} \delta u_{y,x} + I^0_{y,1,1} u_{y,x} \delta u_{ox,x} + I^0_{y,2,1} u_{ox,x} \delta u_{y,xx} + I^0_{y,2,1} u_{y,xx} \delta u_{ox,x} \\ + I^0_{z,1,1} u_{ox,x} \delta u_{z,x} + I^0_{z,1,1} u_{z,x} \delta u_{ox,x} + I^0_{z,2,1} \delta u_{ox,x} u_{z,xx} + I^0_{z,2,1} u_{z,xx} \delta u_{ox,x} \\ + I^0_{\theta,1,1} u_{ox,x} \delta\theta + I^0_{\theta,1,1} \theta \delta u_{ox,x} + I^0_{\theta,1,1} u_{ox,x} \delta\theta_{,x} + I^0_{\theta,1,1} \theta_{,x} \delta u_{ox,x} \\ + I^0_{\theta,2,1} u_{ox,x} \delta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2,1} \delta\theta_{,xx} \delta u_{ox,x} + I^0_{y,2,1} u_{y,x} \delta u_{y,xx} + I^0_{y,2,1} u_{y,xx} \delta u_{y,x} \\ + I^0_{z,1,1} u_{y,x} \delta u_{z,x} + I^0_{z,1,1} u_{z,x} \delta u_{y,x} + I^0_{z,2,1} u_{y,x} \delta u_{z,xx} + I^0_{z,2,1} u_{z,xx} \delta u_{y,x} \\ + I^0_{\theta,1,1} u_{y,x} \delta\theta + I^0_{\theta,1,1} \theta \delta u_{y,x} + I^0_{\theta,1,1} u_{y,x} \delta\theta_{,x} + I^0_{\theta,1,1} \theta_{,x} \delta u_{y,x} \\ + I^0_{\theta,2,1} u_{y,x} \delta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2,1} \theta_{,xx} \delta u_{y,x} + I^0_{z,1,2} u_{y,xx} \delta u_{z,x} + I^0_{z,1,2} u_{z,x} \delta u_{y,xx} \\ + I^0_{z,2,2} u_{y,xx} \delta u_{z,xx} + I^0_{z,2,2} u_{z,xx} \delta u_{y,xx} + I^0_{\theta,2} u_{y,xx} \delta\theta + I^0_{\theta,2} \theta \delta u_{y,xx} \\ + I^0_{\theta,1,2} u_{y,xx} \delta\theta_{,x} + I^0_{\theta,1,2} \theta_{,x} \delta u_{y,xx} + I^0_{\theta,2,2} u_{y,xx} \delta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2,2} \theta_{,xx} \delta u_{y,xx} \\ + I^0_{z,2,1} u_{z,x} \delta u_{z,xx} + I^0_{z,2,1} u_{z,xx} \delta u_{z,x} + I^0_{\theta,1} u_{z,x} \delta\theta + I^0_{\theta,1} \theta \delta u_{z,x} \\ + I^0_{\theta,1,1} u_{z,x} \delta\theta_{,x} + I^0_{\theta,1,1} \theta_{,x} \delta u_{z,x} + I^0_{\theta,2,1} u_{z,x} \delta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2,1} \theta_{,xx} \delta u_{z,x} \\ + I^0_{\theta,2} u_{z,xx} \delta\theta + I^0_{\theta,2} \theta \delta u_{z,xx} + I^0_{\theta,1,2} u_{z,xx} \delta\theta_{,x} + I^0_{\theta,1,2} \theta_{,x} \delta u_{z,xx} \\ + I^0_{\theta,2,2} u_{z,xx} \delta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2,2} \theta_{,xx} \delta u_{z,xx} + I^0_{\theta,1} \theta \delta\theta_{,x} + I^0_{\theta,1} \theta_{,x} \delta\theta \\ + I^0_{\theta,2} \theta \delta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2} \theta_{,xx} \delta\theta + I^0_{\theta,2,2} \theta_{,x} \delta\theta_{,xx} + I^0_{\theta,2,1} \theta_{,xx} \delta\theta_{,x} \end{array} \right) dx. \tag{3.74}$$

Składniki wariacji δU_0 skojarzone z wariacjami pochodnych przemieszczeń uogólnionych $\delta u_{ox}, \delta u_y, \delta u_z, \delta\theta$ przyjmują postać:

$$\int_a^b E' \left(\begin{array}{l} I^0_{x,1,1} u_{ox,x} + I^0_{y,1,1} u_{y,x} + I^0_{y,2,1} u_{y,xx} + I^0_{z,1,1} u_{z,x} + I^0_{z,2,1} u_{z,xx} \\ + I^0_{\theta,1,1} \theta + I^0_{\theta,1,1} \theta_{,x} + I^0_{\theta,2,1} \delta\theta_{,xx} \end{array} \right) \delta u_{ox,x} dx, \tag{3.75}$$

$$\int_a^b E'\left(\begin{array}{l} I^0_{y,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{x,1\,y,2}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,y,2}u_{y,x}+I^0_{y,2\,y,2}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{z,xx} \\ +I^0_{\theta\,y,2}\theta+I^0_{\theta,1\,y,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}\theta_{,xx} \end{array}\right)\delta u_{y,xx}dx$$
$$+\int_a^b E'\left(\begin{array}{l} I^0_{y,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{x,1\,y,1}u_{ox,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,1}u_{z,xx} \\ +I^0_{\theta\,y,1}\theta+I^0_{\theta,1\,y,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,1}\theta_{,xx} \end{array}\right)\delta u_{y,x}dx, \qquad (3.76)$$

$$\int_a^b E'\left(\begin{array}{l} I^0_{z,2\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{x,1\,z,2}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,z,2}u_{y,x}+I^0_{y,2\,z,2}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,z,2}u_{z,x} \\ +I^0_{\theta\,z,2}\theta+I^0_{\theta,1\,z,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,z,2}\theta_{,xx} \end{array}\right)\delta u_{z,xx}dx$$
$$+\int_a^b E'\left(\begin{array}{l} I^0_{z,1\,z,1}u_{z,x}+I^0_{x,1\,z,1}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,z,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,z,1}u_{y,xx}+I^0_{z,2\,z,1}u_{z,xx} \\ +I^0_{\theta\,z,1}\theta+I^0_{\theta,1\,z,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,z,1}\theta_{,xx} \end{array}\right)\delta u_{z,x}dx, \qquad (3.77)$$

$$\int_a^b E'\left(I^0_{\theta,2\,\theta,2}\theta_{,xx}+I^0_{x,1\,\theta,2}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,\theta,2}u_{y,x}+I^0_{y,2\,\theta,2}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,\theta,2}u_{z,x}+I^0_{z,2\,\theta,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,\theta,2}\theta+I^0_{\theta,1\,\theta,2}\theta_{,x}\right)\delta\theta_{,xx}dx$$
$$+\int_a^b E'\left(I^0_{\theta,1\,\theta,1}\theta_{,x}+I^0_{x,1\,\theta,1}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,\theta,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,\theta,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,\theta,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,\theta,1}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,\theta,1}\theta+I^0_{\theta,2\,\theta,1}\theta_{,xx}\right)\delta\theta_{,x}dx \qquad (3.78)$$
$$+\int_a^b E'\left(I^0_{\theta\,\theta}\theta+I^0_{x,1\,\theta}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,\theta}u_{y,x}+I^0_{y,2\,\theta}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,\theta}u_{z,x}+I^0_{z,2\,\theta}u_{z,xx}+I^0_{\theta,1\,\theta}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,\theta}\theta_{,xx}\right)\delta\theta dx.$$

Po wykonaniu we wzorach (3.75) - (3.78) całkowania przez części otrzymujemy następujące składniki wariacji δU_0, pozwalające na wyznaczenie składowych związanych z występowaniem w układzie naprężeń wstępnych wchodzących w skład wzorów określających równania równowagi:

$$\int_a^b E'\left(\begin{array}{l} -I^0_{x,1\,x,1}u_{ox,x}-I^0_{y,1\,x,1}u_{y,x}-I^0_{y,2\,x,1}u_{y,xx}-I^0_{z,1\,x,1}u_{z,x}-I^0_{z,2\,x,1}u_{z,xx} \\ -I^0_{\theta\,x,1}\theta-I^0_{\theta,1\,x,1}\theta_{,x}-I^0_{\theta,2\,x,1}\delta\theta_{,xx} \end{array}\right)_{,x}\delta u_{ox}dx\,, \qquad (3.79)$$

$$\int_a^b E'\left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} I^0_{y,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{x,1\,y,2}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,y,2}u_{y,x}+I^0_{z,1\,y,2}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{z,xx} \\ +I^0_{\theta\,y,2}\theta+I^0_{\theta,1\,y,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}\theta_{,xx} \end{array}\right)_{,xx} \\ -\left(\begin{array}{l} I^0_{y,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{x,1\,y,1}u_{ox,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,1}u_{z,xx} \\ +I^0_{\theta\,y,1}\theta+I^0_{\theta,1\,y,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,1}\theta_{,xx} \end{array}\right)_{,x} \end{array}\right)\delta u_y dx\,, \qquad (3.80)$$

$$\int_a^b E'\left(\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}I^0_{z,2\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{z,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{z,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{z,2\,z,1}u_{z,x}\\ +I^0_{\theta\,z,2}\theta+I^0_{\theta,1\,z,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,z,2}\theta_{,xx}\end{array}\right)_{,xx}\\ -\left(\begin{array}{l}I^0_{z,1\,z,1}u_{z,x}+I^0_{z,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{z,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{z,1\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{z,2\,z,1}u_{z,xx}\\ +I^0_{\theta\,z,1}\theta+I^0_{\theta,1\,z,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,z,1}\theta_{,xx}\end{array}\right)_{,x}\end{array}\right)\delta u_z dx\,, \tag{3.81}$$

$$\int_a^b E'\left(\begin{array}{l}\left(I^0_{\theta,2\,\theta,2}\theta_{,xx}+I^0_{\theta,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{\theta,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{\theta,2\,z,1}u_{z,x}+I^0_{\theta,2\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta,2\,\theta}\theta+I^0_{\theta,2\,\theta,1}\theta_{,x}\right)_{,xx}\\ -\left(I^0_{\theta,1\,\theta,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{\theta,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{\theta,1\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{\theta,1\,z,1}u_{z,x}+I^0_{\theta,1\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta,1\,\theta}\theta+I^0_{\theta,2\,\theta,1}\theta_{,xx}\right)_{,x}\\ +\left(I^0_{\theta\,\theta}\theta+I^0_{\theta\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{\theta\,y,1}u_{y,x}+I^0_{\theta\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{\theta\,z,1}u_{z,x}+I^0_{\theta\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta,1\,\theta}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,\theta}\theta_{,xx}\right)\end{array}\right)\delta\theta dx\,. \tag{3.82}$$

Natomiast składniki wchodzące w skład wzorów określających warunki brzegowe, wyznaczone w wyniku przekształcenia wzorów (3.75) - (3.78) przyjmują postać:

$$\left[N\delta u_{ox}\right]_a^b=0\,, \tag{3.83}$$

gdzie

$$N=E'\left(I^0_{x,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,x,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,x,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,x,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,x,1}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,x,1}\theta+I^0_{\theta,1\,x,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,x,1}\delta\theta_{,xx}\right),$$

$$\left[M_z\delta u_{y,x}\right]_a^b=0\,, \tag{3.84}$$

gdzie

$$M_z=-E'\left(-I^0_{y,2\,x,1}u_{ox,x}-I^0_{y,2\,y,1}u_{y,x}-I^0_{y,2\,y,2}u_{y,xx}-I^0_{z,1\,y,2}u_{z,x}-I^0_{z,2\,y,2}u_{z,xx}-I^0_{\theta\,y,2}\theta-I^0_{\theta,1\,y,2}\theta_{,x}-I^0_{\theta,2\,y,2}\theta_{,xx}\right),$$

$$\left[Q_y\delta u_y\right]_a^b=0\,, \tag{3.85}$$

gdzie

$$\begin{aligned}Q_y=&-E'\left(I^0_{y,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,1}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,y,1}\theta+I^0_{\theta,1\,y,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,1}\theta_{,xx}\right)\\ &-E'\left(I^0_{y,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,2}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,y,2}\theta+I^0_{\theta,1\,y,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}\theta_{,xx}\right)_{,x},\end{aligned}$$

$$\left[M_y \delta u_{z,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{3.86}$$

gdzie

$$M_y = E'\left(-I^0_{\substack{z,2\\x,1}} u_{ox,x} - I^0_{\substack{z,2\\y,1}} u_{y,x} - I^0_{\substack{z,2\\y,2}} u_{y,xx} - I^0_{\substack{z,2\\z,1}} u_{z,x} - I^0_{\substack{z,2\\z,2}} u_{z,xx} - I^0_{\substack{\theta\\z,2}} \theta - I^0_{\substack{\theta,1\\z,2}} \theta_{,x} - I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} \theta_{,xx}\right),$$

$$\left[Q_z \delta u_z\right]_a^b = 0\,, \tag{3.87}$$

gdzie

$$Q_z = E'\left(I^0_{\substack{z,1\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{z,1\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{z,1\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{z,1\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{z,2\\z,1}} u_{z,xx} + I^0_{\substack{\theta\\z,1}} \theta + I^0_{\substack{\theta,1\\z,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,1}} \theta_{,xx}\right)$$
$$-E'\left(I^0_{\substack{z,2\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{z,2\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{z,2\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{z,2\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{z,2\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\substack{\theta\\z,2}} \theta + I^0_{\substack{\theta,1\\z,2}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} \theta_{,xx}\right)_{,x},$$

$$\left[B \delta \theta_{,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{3.88}$$

gdzie

$$B = E'\left(I^0_{\substack{\theta,2\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta}} \theta + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,2}} \theta_{,xx}\right),$$

$$\left[M_x \delta \theta\right]_a^b = 0\,, \tag{3.89}$$

gdzie

$$M_x = -E'\left(I^0_{\substack{\theta,1\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{\theta,1\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{\theta,1\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{\theta,1\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{\theta,1\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\substack{\theta,1\\\theta}} \theta + I^0_{\substack{\theta,1\\\theta,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,1}} \theta_{,xx}\right)$$
$$-E'\left(I^0_{\substack{\theta,2\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta}} \theta + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,2}} \theta_{,xx}\right)_{,x}.$$

3.5. Energia kinetyczna

Energia kinetyczna niepryzmatycznego pręta cienkościennego określona jest wzorem

$$U_M = \frac{1}{2}\int_a^b \int_S \rho\left(\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2\right) g dS dx \tag{3.90}$$

gdzie: $\dot{U}_x^2, \dot{U}_y^2, \dot{U}_z^2$ - oznaczają pochodne po czasie przemieszczeń dowolnego punktu przekroju, $gdS = g\sqrt{a}dsdx = g\sqrt{1+\beta^2}dsdx$, $dA' = g\sqrt{1+\beta^2}ds$.
Po podstawieniu do wzoru (3.90) funkcji przemieszczeń energia kinetyczna wyraża się wzorem

$$U_M = \frac{1}{2}\int_a^b \int_S \rho \begin{pmatrix} \left(\dot{u}_{ox} - y\dot{u}_{y,x} - z\dot{u}_{z,x} - \left(yC_{z,x} - zC_{y,x}\right)\dot{\theta} - \omega\dot{\theta}_{,x}\right)^2 \\ +\left(\dot{u}_y - \left(z - C_z\right)\dot{\theta}\right)^2 + \left(\dot{u}_z + \left(y - C_y\right)\dot{\theta}\right)^2 \end{pmatrix} dA'dx\,. \tag{3.91}$$

Rozwijając wyrażenia podcałkowe otrzymamy

$$U_M = \frac{1}{2}\int_a^b \int_S \rho \begin{pmatrix} \dot{u}_{ox}^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2 + y^2\dot{u}_{y,x}^2 + z^2\dot{u}_{z,x}^2 + \left(yC_{z,x} - zC_{y,x}\right)^2\dot{\theta}^2 \\ +\omega^2\dot{\theta}_{,x}^2 + \left(z - C_z\right)^2\dot{\theta}^2 + \left(y - C_y\right)^2\dot{\theta}^2 - 2y\dot{u}_{ox}\dot{u}_{y,x} - 2z\dot{u}_{ox}\dot{u}_{z,x} \\ -2\left(yC_{z,x} - zC_{y,x}\right)\dot{u}_{ox}\dot{\theta} - 2\omega\dot{u}_{ox}\dot{\theta}_{,x} + 2yz\dot{u}_{y,x}\dot{u}_{z,x} \\ +2y\left(yC_{z,x} - zC_{y,x}\right)\dot{u}_{y,x}\dot{\theta} + 2y\omega\dot{u}_{y,x}\dot{\theta}_{,x} \\ +2z\left(yC_{z,x} - zC_{y,x}\right)\dot{u}_{z,x}\dot{\theta} + 2z\omega\dot{u}_{z,x}\dot{\theta}_{,x} \\ -2\left(z - C_z\right)\dot{u}_y\dot{\theta} + 2\left(y - C_y\right)\dot{u}_z\dot{\theta} \end{pmatrix} dA'dx\,. \tag{3.92}$$

Po wykonaniu w powyższym wzorze całkowania po polu przekroju poprzecznego S dostajemy

$$U_M = \int_a^b \rho \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(A'\dot{u}_{ox}^2 + A'\dot{u}_y^2 + A'\dot{u}_z^2 + I'_z\dot{u}_{y,x}^2 + I'_y\dot{u}_{z,x}^2 \right. \\ \left. +I'_\lambda\dot{\theta}^2 + I'_\omega\dot{\theta}_{,x}^2 + I'_{\vartheta_y}\dot{\theta}^2 + I'_{\vartheta_z}\dot{\theta}^2 \right) \\ -S'_z\dot{u}_{ox}\dot{u}_{y,x} - S'_y\dot{u}_{ox}\dot{u}_{z,x} - S'_\lambda\dot{u}_{ox}\dot{\theta} - S'_\omega\dot{u}_{ox}\dot{\theta}_{,x} - S'_{\vartheta_y}\dot{u}_y\dot{\theta} + S'_{\vartheta_z}\dot{u}_z\dot{\theta} \\ +I'_{yz}\dot{u}_{y,x}\dot{u}_{z,x} + I'_{\lambda z}\dot{u}_{y,x}\dot{\theta} + I'_{\omega z}\dot{u}_{y,x}\dot{\theta}_{,x} + I'_{\lambda y}\dot{u}_{z,x}\dot{\theta} + I'_{\omega y}\dot{u}_{z,x}\dot{\theta}_{,x} \end{pmatrix} dx\,, \tag{3.93}$$

gdzie: $\vartheta_y = \left(z - C_z\right)$, $\vartheta_z = \left(y - C_y\right)$, $\lambda = \left(yC_{z,x} - zC_{y,x}\right)$,

$$A' = \int_S dA'\,,\quad S'_y = \int_S z dA'\,,\quad S'_z = \int_S y dA'\,,\quad S'_\lambda = \int_S \lambda dA'\,,$$

$$S'_\omega = \int_S \omega dA'\,,\quad S'_{\vartheta_y} = \int_S \vartheta_y dA'\,,\quad S'_{\vartheta_z} = \int_S \vartheta_z dA'\,,$$

$$I'_y = \int_S z^2 dA'\,,\quad I'_z = \int_S y^2 dA'\,,\quad I'_{yz} = \int_S yz dA'\,,$$

$$I'_{\omega y} = \int_S z\omega dA'\,,\quad I'_{\omega z} = \int_S y\omega dA'\,,\quad I'_\omega = \int_S \omega^2 dA'\,,$$

$$I'_\lambda = \int_S \lambda^2 dA'\,,\quad I'_{\vartheta_y} = \int_S \vartheta_y^2 dA'\,,\quad I'_{\vartheta_z} = \int_S \vartheta_z^2 dA'\,,$$

$$I'_{\lambda z} = \int_S y\lambda dA'\,,\quad I'_{\lambda y} = \int_S z\lambda dA'\,.$$

Wariacja funkcji działania (odnosząca się do części związanej z energią kinetyczną) określona jest wzorem

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} U_M\,dt=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_a^b\left(\begin{array}{l}A'\dot{u}_{ox}\delta\dot{u}_{ox}+A'\dot{u}_y\delta\dot{u}_y+A'\dot{u}_z\delta\dot{u}_z+I'_z\dot{u}_{y,x}\delta\dot{u}_{y,x}+I'_y\dot{u}_{z,x}\delta\dot{u}_{z,x}\\+I'_\lambda\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+I'_\omega\dot{\theta}_{,x}\delta\dot{\theta}_{,x}+I'_{\vartheta_y}\dot{\theta}\delta\dot{\theta}+I'_{\vartheta_z}\dot{\theta}\delta\dot{\theta}\\-S'_z\dot{u}_{ox}\delta\dot{u}_{y,x}-S'_z\dot{u}_{y,x}\delta\dot{u}_{ox}-S'_y\dot{u}_{ox}\delta\dot{u}_{z,x}\\-S'_y\dot{u}_{z,x}\delta\dot{u}_{ox}-S'_\lambda\dot{u}_{ox}\delta\dot{\theta}-S'_\lambda\dot{\theta}\delta\dot{u}_{ox}-S'_\omega\dot{u}_{ox}\delta\dot{\theta}_{,x}-S'_\omega\dot{\theta}_{,x}\delta\dot{u}_{ox}\\+I'_{yz}\dot{u}_{y,x}\delta\dot{u}_{z,x}+I'_{yz}\dot{u}_{z,x}\delta\dot{u}_{y,x}+I'_{\lambda z}\dot{u}_{y,x}\delta\dot{\theta}+I'_{\lambda z}\dot{\theta}\delta\dot{u}_{y,x}\\+I'_{\omega z}\dot{u}_{y,x}\delta\dot{\theta}_{,x}+I'_{\omega z}\dot{\theta}_{,x}\delta\dot{u}_{y,x}+I'_{\lambda y}\dot{u}_{z,x}\delta\dot{\theta}+I'_{\lambda y}\dot{\theta}\delta\dot{u}_{z,x}\\+I'_{\omega y}\dot{u}_{z,x}\delta\dot{\theta}_{,x}+I'_{\omega y}\dot{\theta}_{,x}\delta\dot{u}_{z,x}-S'_{\vartheta_y}\dot{u}_y\delta\dot{\theta}-S'_{\vartheta_y}\dot{\theta}\delta\dot{u}_y+S'_{\vartheta_z}\dot{u}_z\delta\dot{\theta}+S'_{\vartheta_z}\dot{\theta}\delta\dot{u}_z\end{array}\right)\rho dx\,, \tag{3.94}$$

Całkując przez części względem t oraz zauważywszy, że dla $t=t_0$ i $t=t_1$ wariacje uogólnionych przemieszczeń i ich pochodnych są równe 0, wyrażenia związane z wariacjami poszczególnych uogólnionych przemieszczeń przyjmują postać:

$$\int_{t_0}^{t_1}dt\int_a^b\left[\rho\left(-A'\ddot{u}_{ox}+S'_z\ddot{u}_{y,x}+S'_y\ddot{u}_{z,x}+S'_\lambda\ddot{\theta}+S'_\omega\ddot{\theta}_{,x}\right)\right]\delta u_{ox}dx\,, \tag{3.95}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}dt\left(\begin{array}{l}\int_a^b\left[\rho\left(-I'_z\ddot{u}_{y,x}+S'_z\ddot{u}_{ox}-I'_{yz}\ddot{u}_{z,x}-I'_{\lambda z}\ddot{\theta}-I'_{\omega z}\ddot{\theta}_{,x}\right)\right]\delta u_{y,x}dx\\+\int_a^b\left[\rho\left(-A'\ddot{u}_y-S'_{\vartheta_y}\ddot{\theta}\right)\right]\delta u_y dx\end{array}\right), \tag{3.96}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}dt\left(\begin{array}{l}\int_a^b\left[\rho\left(-I'_y\ddot{u}_{z,x}+S'_y\ddot{u}_{ox}-I'_{yz}\ddot{u}_{y,x}-I'_{\lambda y}\ddot{\theta}-I'_{\omega y}\ddot{\theta}_{,x}\right)\right]\delta u_{z,x}dx\\+\int_a^b\left[\rho\left(-A'\ddot{u}_z-S'_{\vartheta_z}\ddot{\theta}\right)\right]\delta u_z dx\end{array}\right), \tag{3.97}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}dt\left(\begin{array}{l}\int_a^b\left[\rho\left(-I'_\omega\ddot{\theta}_{,x}+S'_\omega\ddot{u}_{ox}-I'_{\omega z}\ddot{u}_{y,x}-I'_{\omega y}\ddot{u}_{z,x}\right)\right]\delta\theta_{,x}dx\\+\int_a^b\left[\rho\left(-I'_\lambda\ddot{\theta}-I'_{\vartheta_y}\ddot{\theta}-I'_{\vartheta_z}\ddot{\theta}+S'_\lambda\ddot{u}_{ox}-I'_{\lambda z}\ddot{u}_{y,x}-I'_{\lambda y}\ddot{u}_{z,x}-S'_{\vartheta_y}\ddot{u}_y-S'_{\vartheta_z}\ddot{u}_z\right)\right]\delta\theta dx\end{array}\right). \tag{3.98}$$

Po przekształceniach, polegających na wykonaniu całkowania przez części po zmiennej x, otrzymujemy następujące składniki związane z energią kinetyczną, wchodzące w skład wzorów określających równania równowagi:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^b \left[\rho \left(-A' \ddot{u}_{ox} + S'_z \ddot{u}_{y,x} + S'_y \ddot{u}_{z,x} + S'_\lambda \ddot{\theta} + S'_\omega \ddot{\theta}_{,x} \right) \right] \delta u_{ox} dx \,, \tag{3.99}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^b \left[\rho \left(-A' \ddot{u}_y - S'_{\vartheta_y} \ddot{\theta} + \left(I'_z \ddot{u}_{y,x} - S'_z \ddot{u}_{ox} + I'_{yz} \ddot{u}_{z,x} + I'_{\lambda z} \ddot{\theta} + I'_{\omega z} \ddot{\theta}_{,x} \right)_{,x} \right) \right] \delta u_y dx \,, \tag{3.100}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^b \left[\rho \left(-A' \ddot{u}_z - S'_{\vartheta_z} \ddot{\theta} + \left(I'_y \ddot{u}_{z,x} - S'_y \ddot{u}_{ox} + I'_{yz} \ddot{u}_{y,x} + I'_{\lambda y} \ddot{\theta} + I'_{\omega y} \ddot{\theta}_{,x} \right)_{,x} \right) \right] \delta u_z dx \,, \tag{3.101}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_a^b \left[\rho \begin{pmatrix} -I'_\lambda \ddot{\theta} - I'_{\vartheta_y} \ddot{\theta} - I'_{\vartheta_z} \ddot{\theta} + S'_\lambda \ddot{u}_{ox} - I'_{\lambda z} \ddot{u}_{y,x} - I'_{\lambda y} \ddot{u}_{z,x} - S'_{\vartheta_y} \ddot{u}_y - S'_{\vartheta_z} \ddot{u}_z \\ + \left(I'_\omega \ddot{\theta}_{,x} - S'_\omega \ddot{u}_{ox} + I'_{\omega z} \ddot{u}_{y,x} + I'_{\omega y} \ddot{u}_{z,x} \right)_{,x} \end{pmatrix} \right] \delta\theta dx \,. \tag{3.102}$$

Wyrażenia, wynikających z energii kinetycznej (wzory (3.95) - (3.98)), pozwalające na wyznaczenie składników wchodzących w skład wzorów definiujących warunki brzegowe, określone są następującymi wzorami (we wzorach (3.103) - (3.105) pominięto występujące tam całkowanie $\int_{t_0}^{t_1} (.)\, dt$):

$$\left[Q_y \delta u_y \right]_a^b = 0 \,, \tag{3.103}$$

gdzie

$$Q_y = \rho \left(-I'_z \ddot{u}_{y,x} + S'_z \ddot{u}_{ox} - I'_{yz} \ddot{u}_{z,x} - I'_{\lambda z} \ddot{\theta} - I'_{\omega z} \ddot{\theta}_{,x} \right),$$

$$\left[Q_z \delta u_z \right]_a^b = 0 \,, \tag{3.104}$$

gdzie

$$Q_z = \rho \left(-I'_y \ddot{u}_{z,x} + S'_y \ddot{u}_{0x} - I'_{yz} \ddot{u}_{y,x} - I'_{\lambda y} \ddot{\theta} - I'_{\omega y} \ddot{\theta}_{,x} \right),$$

$$\left[M_x \delta\theta \right]_a^b = 0 \,, \tag{3.105}$$

gdzie

$$M_x = \rho \left(-I'_\omega \ddot{\theta}_{,x} + S'_\omega \ddot{u}_{ox} - I'_{\omega z} \ddot{u}_{y,x} - I'_{\omega y} \ddot{u}_{z,x} \right).$$

3.6. Praca obciążenia zewnętrznego

Obciążenie przyłożone do pręta na jego długości redukujemy do punktów będących głównymi biegunami przekrojów tj. do środków ścinania

$$W = \int_a^b \left(\mathbf{p} \circ \mathbf{u}^p \right) dx = \int_a^b \left(p_x u_x^p + p_y u_y^p + p_z u_z^p \right) dx \,, \tag{3.106}$$

gdzie:

$\mathbf{p} = \left[p_x, p_y, p_z \right]$ – wektor obciążenia zewnętrznego,

$\mathbf{u}^p = \left[u_x^p, u_y^p, u_z^p \right]^T$ – wektor przemieszczeń punktów przyłożenia obciążenia zewnętrznego.

Składowe wektora przemieszczeń $\mathbf{u}^p$ określone są wzorami:

$$u_x^p = u_{ox} - y^p u_{y,x} - z^p u_{z,x} - \left(y^p C_{z,x} - z^p C_{y,x} \right) \theta - \omega^p \theta_{,x} \,, \tag{3.107}$$

$$u_y^p = u_y - \left(z^p - C_z \right) \sin\theta - \left(y^p - C_y \right) \left(1 - \cos\theta \right) , \tag{3.108}$$

$$u_z^p = u_z + \left(y^p - C_y \right) \sin\theta - \left(z^p - C_z \right) \left(1 - \cos\theta \right) , \tag{3.109}$$

gdzie:

$\left[x^p, y^p, z^p \right]$ – wektor współrzędnych punktu przyłożenia obciążenia zewnętrznego,

ω^p – współrzędna wycinkowa punktu przyłożenia obciążenia.

Zastępując we wzorach (3.107) - (3.109) funkcje $\sin\theta$ i $\cos\theta$ ich przybliżeniami tj. pierwszymi wyrazami ich rozwinięcia w szeregi Maclaurina otrzymujemy następujące wzory na przemieszczenia:

$$u_y^p = u_y - \left(z^p - C_z \right) \theta - \frac{1}{2} \left(y^p - C_y \right) \theta^2 \,, \tag{3.110}$$

$$u_z^p = u_z + \left(y^p - C_y \right) \theta - \frac{1}{2} \left(z^p - C_z \right) \theta^2 \,. \tag{3.111}$$

Po tych przekształceniach praca obciążenia zewnętrznego wyraża się wzorem

$$W=\int_a^b\begin{pmatrix}\left(u_{ox}-y^p u_{y,x}-z^p u_{z,x}-\left(y^p C_{z,x}-z^p C_{y,x}\right)\theta-\omega^p\theta_{,x}\right)p_x\\+\left(u_y-\left(z^p-C_z\right)\theta-\frac{1}{2}\left(y^p-C_y\right)\theta^2\right)p_y\\+\left(u_z+\left(y^p-C_y\right)\theta-\frac{1}{2}\left(z^p-C_z\right)\theta^2\right)p_z\end{pmatrix}dx. \tag{3.112}$$

Wariacja pracy obciążenia zewnętrznego określona jest wzorem

$$\delta W=\int_a^b\begin{pmatrix}\left(\delta u_{ox}-y^p\delta u_{y,x}-z^p\delta u_{z,x}-\left(y^p C_{z,x}-z^p C_{y,x}\right)\delta\theta-\omega^p\delta\theta_{,x}\right)p_x\\+\left(\delta u_y-\left(z^p-C_z\right)\delta\theta-\left(y^p-C_y\right)\theta\delta\theta\right)p_y\\+\left(\delta u_z+\left(y^p-C_y\right)\delta\theta-\left(z^p-C_z\right)\theta\delta\theta\right)p_z\end{pmatrix}dx. \tag{3.113}$$

Po rozłożeniu wariacji δW na poszczególne składniki i wykonaniu na nich całkowania przez części otrzymujemy następujące składniki wchodzące w skład wzorów określających równania równowagi:

$$\int_a^b\left[p_x\right]\delta u_{ox}dx, \tag{3.114}$$

$$\int_a^b\left[\left(p_x y^p\right)_{,x}+p_y\right]\delta u_y dx, \tag{3.115}$$

$$\int_a^b\left[\left(p_x z^p\right)_{,x}+p_z\right]\delta u_z dx, \tag{3.116}$$

$$\int_a^b\begin{bmatrix}\left(p_x\omega^p\delta\theta_{,x}\right)_{,x}+p_x\left(y^p C_{z,x}-z^p C_{y,x}\right)\\-\left(p_y\left(z^p-C_z\right)+p_y\left(y^p-C_y\right)\theta-p_z\left(y^p-C_y\right)+p_z\left(z^p-C_z\right)\theta\right)\end{bmatrix}\delta\theta dx. \tag{3.117}$$

Natomiast składniki wchodzące w skład wzorów określających warunki brzegowe otrzymane w wyniku przekształceń wariacji części liniowej energii potencjalnej U_l określonej wzorami (3.11)-(3.14) przyjmują postać:

Natomiast niezerowe składniki wynikające z pracy obciążenia zewnętrznego wchodzące w skład wzorów określających warunki brzegowe wyrażone są następującymi równaniami:

$$\left[Q_y \delta u_y\right]_a^b = 0\,, \tag{3.118}$$

gdzie

$$Q_y = -p_x y^p\,,$$

$$\left[Q_z \delta u_z\right]_a^b = 0\,, \tag{3.119}$$

gdzie

$$Q_z = -p_x z^p\,,$$

$$\left[M_x \delta\theta\right]_a^b = 0\ , \tag{3.120}$$

gdzie

$$M_x = -p_x \omega^p\ .$$

4. Rozwiązywanie zagadnień mechaniki przy pomocy szeregów ortogonalnych Gegenbauera

4.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym przedstawiono podstawowe informacje dotyczące wielomianów i szeregów Gegenbauera, w tym podstawowe z punktu widzenia zastosowań w niniejszej pracy twierdzenie, opisujące metodę przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach.

4.2. Wielomiany Gegenbauera – definicja

Do rozwiązania analizowanego zagadnienia zastosujemy twierdzenie podane przez Lewanowicza w pracy [53]. Twierdzenie to opisuje metodę rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych z wykorzystaniem wielomianów Gegenbauera. Wielomiany te określone są wzorami:

$$\begin{aligned} C_k^{(\lambda)}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda+k-m)}{m!(k-2m)!} (2x)^{k-2m} \quad \text{gdy} \quad \lambda \neq 0, \\ C_k^{(0)}(x) &= \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} C_k^{(\lambda)}(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^m \frac{\Gamma(k-m)}{m!(k-2m)!} (2x)^{k-2m} \quad \text{gdy} \quad \lambda = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

oraz spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$\begin{aligned} &C_0^{(\lambda)}(x) = 1,\ C_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x, \\ &C_k^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{k}\left[2x(k+\lambda-1) C_{k-1}^{(\lambda)}(x) - (k+2\lambda-2) C_{k-2}^{(\lambda)}(x) \right] \quad \text{gdy} \quad \lambda \neq 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &C_0^{(0)}(x) = 1,\ C_1^{(0)}(x) = 2x, \\ &C_k^{(0)}(x) = \frac{1}{k}\left[2x(k-1) C_{k-1}^{(0)}(x) - (k-2) C_{k-2}^{(0)}(x) \right] \qquad \text{gdy} \quad \lambda = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Występujący we wzorach (4.1)-(4.3) parametr λ określa rząd wielomianów Gegenbauera $\left(\lambda \geq -\frac{1}{2}\right)$. Dla szczególnych wartości parametru λ wielomiany te określają inne znane wielomiany ortogonalne i tak w przypadku gdy:

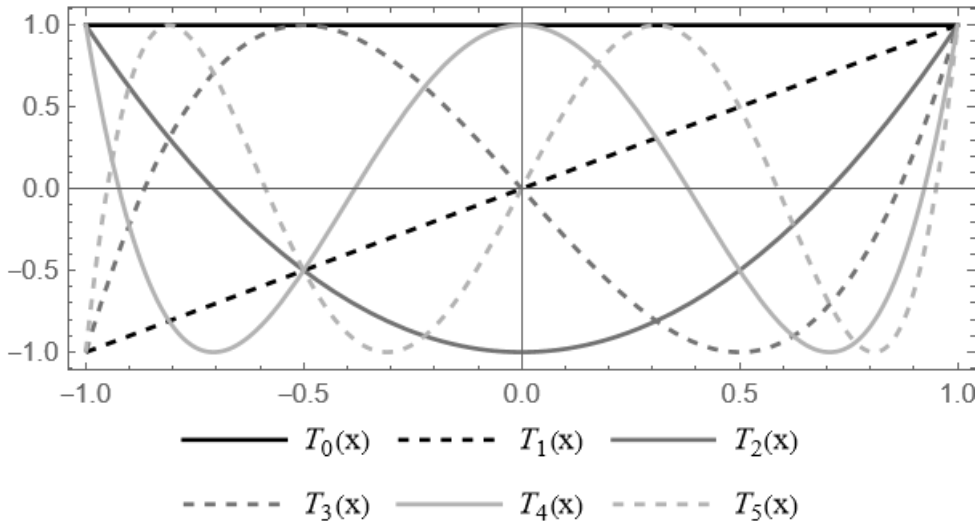
- $\lambda = 0,$ stają się wielomianami Czebyszewa I rodzaju $T_0(x) = C_0^{(0)}(x),$

  $T_k(x) = \frac{k}{2} C_k^{(0)}(x)$ dla $k \geq 1,$

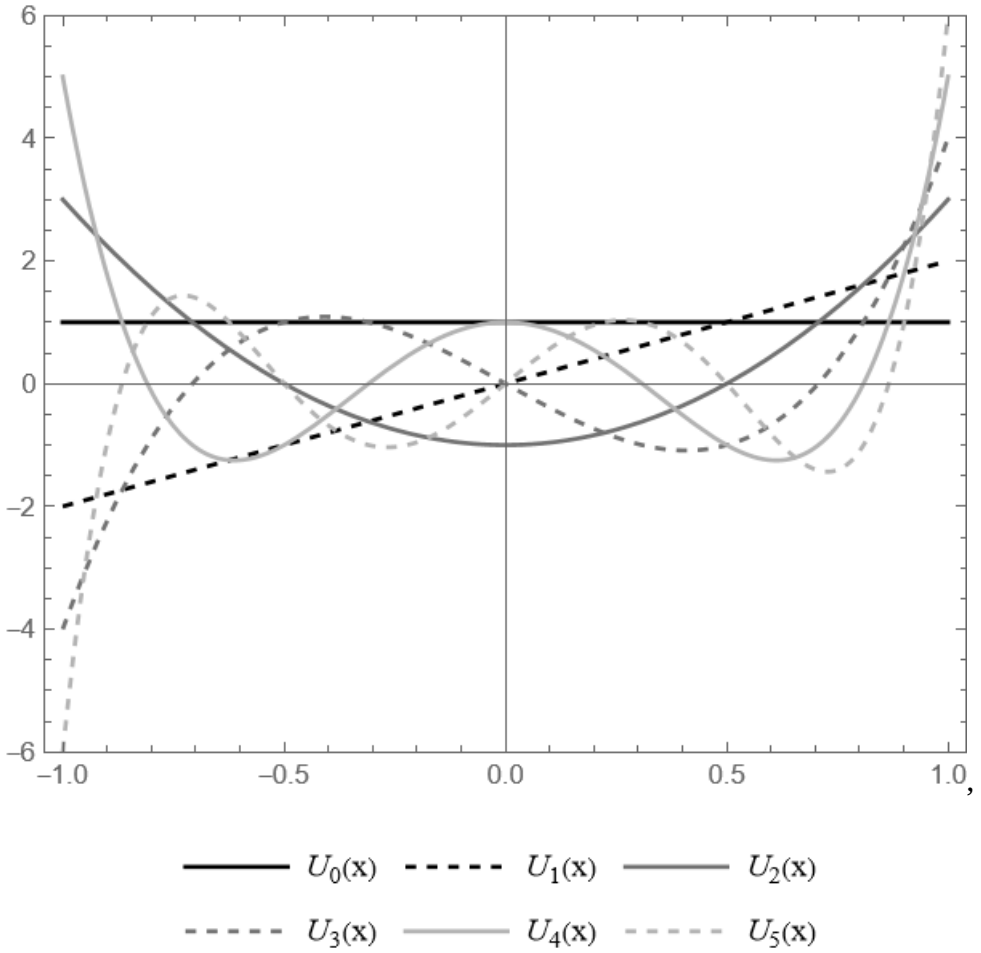
- $\lambda = 1,$ stają się wielomianami Czebyszewa II rodzaju $U_k(x) = C_k^{(1)}(x)$ dla $k \geq 1,$

- $\lambda = \frac{1}{2},$ stają się wielomianami Legendre'a $P_k(x) = C_k^{(1/2)}(x)$ dla $k \geq 1.$

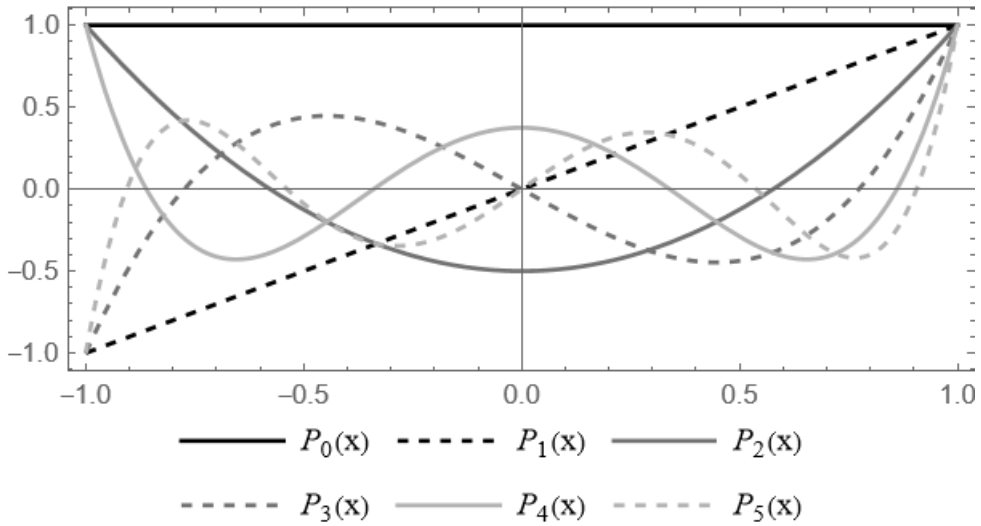
Wykresy pierwszych sześciu wielomianów z każdej opisanej grupy wielomianów ortogonalnych przedstawiono na rysunkach (Rys. 4.1. - Rys. 4.3.).



Rys. 4.1. Wykresy pierwszych sześciu wielomianów Czebyszewa I rodzaju.



Rys. 4.2. Wykresy pierwszych sześciu wielomianów Czebyszewa II rodzaju.



Rys. 4.3. Wykresy pierwszych sześciu wielomianów Legendre'a.

4.3. Metoda rozwiązania układu równań różniczkowych

Niech rozwiązywany układ równań różniczkowych zwyczajnych ma postać

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i(x)\mathbf{f}^{(i)}(x) = \mathbf{P}(x). \tag{4.4}$$

W przedstawionej przez Lewanowicza metodzie [53] rozwiązań poszukuje się postaci szeregów Gegenbauera. W przypadku, gdy $\lambda \neq 0,$ szereg ten ma postać

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k[f] C_k^{(\lambda)}(x), \tag{4.5}$$

gdzie współczynniki $a_k[f]$ rozwinięcia funkcji f określone są wzorem

$$a_k[f] = \frac{k!(k+\lambda)\left[\Gamma(\lambda)\right]^2}{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(k+2\lambda)} \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{\lambda-1/2} C_k^{(\lambda)}(x) f(x)dx \quad \text{dla} \quad k \geq 0, \tag{4.6}$$

natomiast, w przypadku gdy $\lambda = 0,$ (wielomiany Gegenbauera określają wtedy wielomiany Czebyszewa I rodzaju) szereg ten wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2} b_0[f] T_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k[f] T_k(x), \tag{4.7}$$

gdzie

$$b_k[f] = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{-1/2} T_k(x) f(x)dx \quad \text{dla} \quad k \geq 0. \tag{4.8}$$

Można wykazać, że układ (4.4) jest równoważny następującemu układowi (patrz [53])

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\mathbf{Q}_i(x)\mathbf{f}(x)\right)^{(i)} = \mathbf{P}(x), \tag{4.9}$$

gdzie macierze $\mathbf{Q}_i(x)$ określone są następującym wzorem

$$\mathbf{Q}_i(x) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j}{j-i} \left(\mathbf{P}_j(x)\right)^{(j-i)}, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{4.10}$$

W pracy [53] wykazano, że jeżeli funkcja $\mathbf{f}(x)$ jest rozwiązaniem układ równań różniczkowych (4.9), a co za tym idzie jest również rozwiązaniem wyjściowego układu

równań różniczkowych (4.4) (równanie (4.4) jest równoważne równaniu (4.9)), to dla każdego $k \ge n$ spełniona jest następująca relacja rekurencyjna

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \sum_{m=0}^{n-i} \varrho_{nim}(k)\, c_{k-n+i+2m}\left[\mathbf{Q}_i(x)\mathbf{f}(x)\right] = \sum_{m=0}^{n} \varrho_{n0m}(k)\, c_{k-n+2m}\left[\mathbf{P}(x)\right] \quad \text{dla } k \ge n, \tag{4.11}$$

gdzie

$$\varrho_{ijm}(k) =$$
$$(-1)^m \binom{i-j}{m} (k+\lambda-i)_{j+m} (k+\lambda-i+j+2m)(k+\lambda+m+1)_{i-m} \left[(k+\lambda)^2 - i^2\right]^{-1} \tag{4.12}$$
$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1) \text{ dla } k \ge 1.$$

Współczynniki rozwinięć $c_k\left[\mathbf{Q}_i(x)\mathbf{f}(x)\right]$ iloczynu funkcji $\mathbf{Q}_i(x)\mathbf{f}(x)$ przy założeniu, że macierze $\mathbf{Q}_i(x)$ zawierają wyłącznie wielomiany obliczamy korzystając ze wzoru (patrz [53])

$$c_k\left[x^l f(x)\right] = 2^{-l} \sum_{j=0}^{l} \alpha_{lj}(k)\, c_{k-l+2j}\left[f(x)\right] \quad \text{dla } k,l \ge 0, \tag{4.13}$$

gdzie dla $\lambda = 0$

$$\alpha_{lj}(k) = \binom{l}{j}, \tag{4.14}$$

dla $\lambda \ne 0$

$$\alpha_{00}(k) = 1,$$

$$\alpha_{lj}(k) = \begin{cases} \alpha(k)\alpha_{l-1,0}(k-1) & \text{gdy } j = 0 \\ \alpha(k)\alpha_{l-1,j}(k-1) + \beta(k)\alpha_{l-1,j-1}(k+1) & \text{gdy } j = 1,2,\ldots, \quad l-1 \text{ i } l \ge 1, \\ \beta(k)\alpha_{l-1,l-1}(k+1) & \text{gdy } j = l \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} k/(k+\lambda) & \text{gdy } \lambda \ne 0 \\ 1 & \text{gdy } \lambda = 0 \end{cases} \qquad \beta(k) = 2 - \alpha(k).$$

Jeśli założenie to nie jest spełnione należy zastosować wcześniej odpowiednią aproksymację wielomianową dla elementów macierzy $\mathbf{Q}_i(x)$.

W przypadku zastosowania do aproksymacji funkcji wielomianów Czebyszew I rodzaju ($\lambda = 0$) do wyznaczenia współczynników rozwinięcia w szereg iloczynu funkcji, zamiast wzorów (4.13), (4.14) można stosować bardziej ogólny wzór

$$c_k[f(x)\cdot g(x)] = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}{}' c_l[f]\left(c_{k-l}[g] + c_{k+l}[g]\right) \tag{4.16}$$

gdzie symbol $\sum'$ oznacza

$$\sum_{l=0}^{\infty}{}' c_l[f] = \frac{1}{2}c_0[f] + c_1[f] + c_2[f] + \ldots \tag{4.17}$$

Wyznaczone współczynniki $c_k[f]$ stanowią przekształcone współczynniki rozwinięć w szereg Gegenbauera poszukiwanego rozwiązania (4.5) lub (4.7). Współczynniki c_k opisane są następującą relacją

$$c_k[f] = \begin{cases} (k+\lambda)^{-1} a_k[f] & \text{dla } \lambda \neq 0 \\ b_k[f] & \text{dla } \lambda = 0 \end{cases}, \tag{4.18}$$

gdzie $a_k[f]$, $b_k[f]$ są odpowiednio współczynnikami rozwinięć w szeregi (4.5) i (4.7). Przy obliczaniu współczynników o ujemnych indeksach korzysta się ponadto z następujących zależności: jeśli $2\lambda = m$ jest nieujemną liczbą całkowitą

$$c_{-k}[f] = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 1, 2, \ldots, m-1 \\ c_{k-m}[f] & \text{dla } k \geq m \end{cases}, \tag{4.19}$$

oraz jeśli 2λ nie jest liczbą całkowitą

$$c_{-k}[f] = 0 \quad \text{dla} \quad k \geq 1. \tag{4.20}$$

W przypadku szczególnym, gdy układ równań różniczkowych (4.4) jest czwartego rzędu $(n = 4)$ (a takimi są analizowane w dalszej części pracy równania), nieskończony układ równań (4.11) opisujący zależności między współczynnikami rozwinięcia poszukiwanej funkcji $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ określony jest wzorem

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{k}+\lambda+1)(\mathrm{k}+\lambda+2)(\mathrm{k}+\lambda+3)c_{k-4}\left[\mathbf{Q}_0(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)(\mathrm{k}+\lambda+3)c_{k-2}\left[\mathbf{Q}_0(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+6\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)(\mathrm{k}+\lambda)c_k\left[\mathbf{Q}_0(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)(\mathrm{k}+\lambda-3)c_{k+2}\left[\mathbf{Q}_0(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+(\mathrm{k}+\lambda-1)(\mathrm{k}+\lambda-2)(\mathrm{k}+\lambda-3)c_{k+4}\left[\mathbf{Q}_0(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+2\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\Big[(\mathrm{k}+\lambda+1)(\mathrm{k}+\lambda+2)c_{k-3}\left[\mathbf{Q}_1(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-3(\mathrm{k}+\lambda-1)(\mathrm{k}+\lambda+2)c_{k-1}\left[\mathbf{Q}_1(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+3(\mathrm{k}+\lambda+1)(\mathrm{k}+\lambda-2)c_{k+1}\left[\mathbf{Q}_1(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-(\mathrm{k}+\lambda-1)(\mathrm{k}+\lambda-2)c_{k+3}\left[\mathbf{Q}_1(x)\mathbf{f}(x)\right]\Big]\\
&+4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)\Big[(\mathrm{k}+\lambda+1)c_{k-2}\left[\mathbf{Q}_2(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-2(\mathrm{k}+\lambda)c_k\left[\mathbf{Q}_2(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+(\mathrm{k}+\lambda-1)c_{k+2}\left[\mathbf{Q}_2(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+8\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-1\right)\Big[c_{k-1}\left[\mathbf{Q}_3(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-c_{k+1}\left[\mathbf{Q}_3(x)\mathbf{f}(x)\right]\Big]\\
&+16\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-1\right)(\mathrm{k}+\lambda)c_k\left[\mathbf{Q}_4(x)\mathbf{f}(x)\right]\\
&=(\mathrm{k}+\lambda+1)(\mathrm{k}+\lambda+2)(\mathrm{k}+\lambda+3)c_{k-4}\left[\mathbf{P}(x)\right]\\
&-4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)(\mathrm{k}+\lambda+3)c_{k-2}\left[\mathbf{P}(x)\right]\\
&+6\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)(\mathrm{k}+\lambda)c_k\left[\mathbf{P}(x)\right]\\
&-4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)(\mathrm{k}+\lambda-3)c_{k+2}\left[\mathbf{P}(x)\right]\\
&+(\mathrm{k}+\lambda-1)(\mathrm{k}+\lambda-2)(\mathrm{k}+\lambda-3)c_{k+4}\left[\mathbf{P}(x)\right], \qquad k\geq n.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Relacja rekurencyjna (4.11), a zatem również relacja (4.21), wraz z wzorami (4.13)-(4.16) pozwalającymi na wyznaczenie współczynników c_k rozwinięcia w szereg występują - cego w tej relacji iloczynu funkcji $\mathbf{Q}_i(x)\mathbf{f}(x)$, pozwala na sprowadzenie układu równań różniczkowych (4.4) do nieskończonego układu równań algebraicznych.

5. Zagadnienie własne pręta cienkościennego

5.1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań w niniejszym rozdziale jest zagadnienie drgań własnych niepryzmatycznych prętów cienkościennych o dowolnym przekroju otwartym. W ogólnym przypadku dla pręta niepryzmatycznego, osie wyznaczone przez środki ciężkości oraz środki ścinania przekrojów poprzecznych takiego pręta są osiami krzywoliniowymi, pomimo „prostoliniowego" charakteru pręta w rozumieniu typowo inżynierskim.

W celu opisu takiego niepryzmatycznego pręta cienkościennego jako prostoliniowy element prętowy wprowadzono dodatkową podłużną prostoliniową oś odniesienia i towarzyszące jej pozostałe osie układu kartezjańskiego, względem których opisujemy parametry pręta cienkościennego wraz z jego charakterystykami geometrycznymi przekroju poprzecznego. O prostoliniowej podłużnej osi odniesienia z reguły zakładamy, że przechodzi przez punkty, w których zdefiniowano podparcie na końcach pręta.

W rozdziale wyprowadzone zostały równania różniczkowe opisujące zagadnienie własne oraz przedstawiono jego rozwiązanie z wykorzystaniem aproksymacji szeregami Gegenbauera. Rozwiązano zagadnienie własne, otrzymane wartości częstości własnych porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych.

5.2. Sformułowanie zagadnienia

Analizowane w niniejszym rozdziale zagadnienie drgań swobodnych niepryzmatycznego pręta cienkościennego opisane jest następującym układem 4 sprzężonych równań różniczkowych 4 rzędu o zmiennych współczynnikach. Układ równań wyprowadzono na podstawie zasady Hamiltona zgodnie z zależnością podaną we wzorze (3.3). Otrzymane równania przedstawiono poniżej:

$$\begin{aligned} &E\left(-A^{*}u_{ox,x}+S_{z}^{*}u_{y,xx}+S_{y}^{*}u_{z,xx}+S_{\omega}^{*}\theta_{,xx}+S_{\psi}^{*}\theta_{,x}+S_{\delta}^{*}\theta\right)_{,x} \\ &-\rho\left(-A'\ddot{u}_{ox}+S_{z}'\ddot{u}_{y,x}+S_{y}'\ddot{u}_{z,x}+S_{\lambda}'\ddot{\theta}+S_{\omega}'\ddot{\theta}_{,x}\right)=0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &E\left(I_{z}^{*}u_{y,xx}-S_{z}^{*}u_{ox,x}+I_{yz}^{*}u_{z,xx}+I_{\omega z}^{*}\theta_{,xx}+I_{\psi z}^{*}\theta_{,x}+I_{\delta z}^{*}\theta\right)_{,xx} \\ &-\rho\left(-A'\ddot{u}_{y}-S_{\vartheta_{y}}'\ddot{\theta}+\left(I_{z}'\ddot{u}_{y,x}-S_{z}'\ddot{u}_{ox}+I_{yz}'\ddot{u}_{z,x}+I_{\lambda z}'\ddot{\theta}+I_{\omega z}'\ddot{\theta}_{,x}\right)_{,x}\right)=0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$
\begin{aligned}
&E\left(I_y^* u_{z,xx} - S_y^* u_{ox,x} + I_{yz}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* \theta_{,xx} + I_{\psi y}^* \theta_{,x} + I_{\delta y}^* \theta\right)_{,xx} \\
&-\rho\left(-A' \ddot{u}_z - S'_{\vartheta_z} \ddot{\theta} + \left(I'_y \ddot{u}_{z,x} - S'_y \ddot{u}_{ox} + I'_{yz} \ddot{u}_{y,x} + I'_{\lambda y} \ddot{\theta} + I'_{\omega y} \ddot{\theta}_{,x}\right)_{,x}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\left(I_\omega^* \theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta\right)_{,xx} \\
&+\left(-I_\psi^* \theta_{,x} + S_\psi^* u_{ox,x} - I_{\psi z}^* u_{y,xx} - I_{\psi y}^* u_{z,xx} - I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} - I_{\delta\psi}^* \theta\right)_{,x} \\
&+\left(I_\delta^* \theta - S_\delta^* u_{ox,x} + I_{\delta z}^* u_{y,xx} + I_{\delta y}^* u_{z,xx} + I_{\delta\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta_{,x}\right)\Big) - G\left(I_s \theta_{,x}\right)_{,x} \\
&-\rho\begin{pmatrix} -I'_\lambda \ddot{\theta} - I'_{\vartheta_y} \ddot{\theta} - I'_{\vartheta_z} \ddot{\theta} + S'_\lambda \ddot{u}_{ox} - I'_{\lambda z} \ddot{u}_{y,x} - I'_{\lambda y} \ddot{u}_{z,x} - S'_{\vartheta_y} \ddot{u}_y - S'_{\vartheta_z} \ddot{u}_z \\ +\left(I'_\omega \ddot{\theta}_{,x} - S'_\omega \ddot{u}_{ox} + I'_{\omega z} \ddot{u}_{y,x} + I'_{\omega y} \ddot{u}_{z,x}\right)_{,x} \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Po wyeliminowaniu pochodnych po czasie równania przyjmują postać:

$$
\begin{aligned}
&E\left(-A^* u_{ox,x} + S_z^* u_{y,xx} + S_y^* u_{z,xx} + S_\omega^* \theta_{,xx} + S_\psi^* \theta_{,x} + S_\delta^* \theta\right)_{,x} \\
&-\rho\omega^2\left(A' u_{ox} - S'_z u_{y,x} - S'_y u_{z,x} - S'_\lambda \theta - S'_\omega \theta_{,x}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left(I_z^* u_{y,xx} - S_z^* u_{ox,x} + I_{yz}^* u_{z,xx} + I_{\omega z}^* \theta_{,xx} + I_{\psi z}^* \theta_{,x} + I_{\delta z}^* \theta\right)_{,xx} \\
&-\rho\omega^2\left(A' u_y + S'_{\vartheta_y} \theta - \left(I'_z u_{y,x} - S'_z u_{ox} + I'_{yz} u_{z,x} + I'_{\lambda z} \theta + I'_{\omega z} \theta_{,x}\right)_{,x}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left(I_y^* u_{z,xx} - S_y^* u_{ox,x} + I_{yz}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* \theta_{,xx} + I_{\psi y}^* \theta_{,x} + I_{\delta y}^* \theta\right)_{,xx} \\
&-\rho\omega^2\left(A' u_z + S'_{\vartheta_z} \theta - \left(I'_y u_{z,x} - S'_y u_{ox} + I'_{yz} u_{y,x} + I'_{\lambda y} \theta + I'_{\omega y} \theta_{,x}\right)_{,x}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\left(I_\omega^* \theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta\right)_{,xx} \\
&+\left(-I_\psi^* \theta_{,x} + S_\psi^* u_{ox,x} - I_{\psi z}^* u_{y,xx} - I_{\psi y}^* u_{z,xx} - I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} - I_{\delta\psi}^* \theta\right)_{,x} \\
&+\left(I_\delta^* \theta - S_\delta^* u_{ox,x} + I_{\delta z}^* u_{y,xx} + I_{\delta y}^* u_{z,xx} + I_{\delta\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta_{,x}\right)\Big) - G\left(I_s \theta_{,x}\right)_{,x} \\
&-\rho\omega^2\begin{pmatrix} I'_\lambda \theta + I'_{\vartheta_y} \theta + I'_{\vartheta_z} \theta - S'_\lambda u_{ox} + I'_{\lambda z} u_{y,x} + I'_{\lambda y} u_{z,x} + S'_{\vartheta_y} u_y + S'_{\vartheta_z} u_z \\ -\left(I'_\omega \theta_{,x} - S'_\omega u_{ox} + I'_{\omega z} u_{y,x} + I'_{\omega y} u_{z,x}\right)_{,x} \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Towarzyszące im równania opisujące warunki brzegowe przedstawiają się następująco:

$$
\left[N \delta u_{ox}\right]_a^b = 0,
\tag{5.9}
$$

gdzie

$$
N = E'\left(A^* u_{ox,x} - S_z^* u_{y,xx} - S_y^* u_{z,xx} - S_\omega^* \theta_{,xx} - S_\psi^* \theta_{,x} - S_\delta^* \theta\right),
$$

$$\left[Q_y \delta u_y\right]_a^b = 0\,, \tag{5.10}$$

gdzie

$$Q_y = E'\left(-I_z^* u_{y,xx} + S_z^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{z,xx} - I_{\omega z}^* \theta_{,xx} - I_{\psi z}^* \theta_{,x} - I_{\delta z}^* \theta\right)_{,x}$$
$$-\rho\omega^2\left(-I_z' u_{y,x} + S_z' u_{ox} - I_{yz}' u_{z,x} - I_{\lambda z}' \theta - I_{\omega z}' \theta_{,x}\right),$$

$$\left[M_z \delta u_{y,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{5.11}$$

gdzie

$$M_z = -E'\left(-I_z^* u_{y,xx} + S_z^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{z,xx} - I_{\omega z}^* \theta_{,xx} - I_{\psi z}^* \theta_{,x} - I_{\delta z}^* \theta\right),$$

$$\left[Q_z \delta u_z\right]_a^b = 0\,, \tag{5.12}$$

gdzie

$$Q_z = E'\left(-I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right)_{,x}$$
$$-\rho\omega^2\left(-I_y' u_{z,x} + S_y' u_{0x} - I_{yz}' u_{y,x} - I_{\lambda y}' \theta - I_{\omega y}' \theta_{,x}\right),$$

$$\left[M_y \delta u_{z,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{5.13}$$

gdzie

$$M_y = E'\left(-I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right),$$

$$\left[M_x \delta\theta\right]_a^b = 0\,, \tag{5.14}$$

gdzie

$$M_x = E'\left(\begin{array}{l}\left(-I_\omega^* \theta_{,xx} + S_\omega^* u_{ox,x} - I_{\omega z}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* u_{z,xx} - I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} - I_{\delta\omega}^* \theta\right)_{,x} \\ +\left(I_\psi^* \theta_{,x} - S_\psi^* u_{ox,x} + I_{\psi z}^* u_{y,xx} + I_{\psi y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta\right)\end{array}\right) + GI_s \theta_{,x}$$
$$-\rho\omega^2\left(-I_\omega' \theta_{,x} + S_\omega' u_{ox} - I_{\omega z}' u_{y,x} - I_{\omega y}' u_{z,x}\right),$$

$$\left[B\delta\theta_{,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{5.15}$$

gdzie

$$B = E'\left(I_\omega^* \theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta\right).$$

5.3. Rozwiązanie zagadnienia

Sformułowany w poprzednim podrozdziale układ równań można sprowadzić stosując zapis macierzowy do następującej postaci

$$\sum_{i=0}^{4}\left(\mathbf{P}_i\left(x\right)-\omega^2\mathbf{R}_i\left(x\right)\right)\mathbf{f}^{(i)}\left(x\right)=\mathbf{0}\,, \tag{5.16}$$

gdzie funkcje $\mathbf{Q}_i\left(x\right)$ (patrz wzór (4.10)) w analizowanym zagadnieniu określone są wzorem

$$\mathbf{Q}_i\left(x,\omega\right)=\sum_{j=i}^{4}\left(-1\right)^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ j-i \end{pmatrix}\left(\mathbf{P}_j\left(x\right)-\omega^2\mathbf{R}_j\left(x\right)\right)^{(j-i)}. \tag{5.17}$$

W analizowanym zagadnieniu macierze $\mathbf{P}_i$ oraz $\mathbf{R}_i$ występujące we wzorach (5.16), (5.17) przyjmują następującą postać:

$$\mathbf{P}_0=E\begin{bmatrix}0&0&0&k_{14}^0\\0&0&0&k_{24}^0\\0&0&0&k_{34}^0\\0&0&0&k_{44}^0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_1=E\begin{bmatrix}k_{11}^1&0&0&k_{14}^1\\k_{21}^1&0&0&k_{24}^1\\k_{31}^1&0&0&k_{34}^1\\k_{41}^1&0&0&k_{44}^1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_2=E\begin{bmatrix}k_{11}^2&k_{12}^2&k_{13}^2&k_{14}^2\\k_{21}^2&k_{22}^2&k_{23}^2&k_{24}^2\\k_{31}^2&k_{32}^2&k_{33}^2&k_{34}^2\\k_{41}^2&k_{42}^2&k_{43}^2&k_{44}^2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3=E\begin{bmatrix}0&k_{12}^3&k_{13}^3&k_{14}^3\\k_{21}^3&k_{22}^3&k_{23}^3&k_{24}^3\\k_{31}^3&k_{32}^3&k_{33}^3&k_{34}^3\\k_{41}^3&k_{42}^3&k_{43}^3&k_{44}^3\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_4=E\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&k_{22}^4&k_{23}^4&k_{24}^4\\0&k_{32}^4&k_{33}^4&k_{34}^4\\0&k_{42}^4&k_{43}^4&k_{44}^4\end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

$$\mathbf{R}_0=\rho\begin{bmatrix}m_{11}^0&0&0&m_{14}^0\\m_{21}^0&m_{22}^0&0&m_{24}^0\\m_{31}^0&0&m_{33}^0&m_{34}^0\\m_{41}^0&m_{42}^0&m_{43}^0&m_{44}^0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{R}_1=\rho\begin{bmatrix}0&m_{12}^1&m_{13}^1&m_{14}^1\\m_{21}^1&m_{22}^1&m_{23}^1&m_{24}^1\\m_{31}^1&m_{32}^1&m_{33}^1&m_{34}^1\\m_{41}^1&m_{42}^1&m_{43}^1&m_{44}^1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2=\rho\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&m_{22}^2&m_{23}^2&m_{24}^2\\0&m_{32}^2&m_{33}^2&m_{34}^2\\0&m_{42}^2&m_{43}^2&m_{44}^2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{R}_3=\mathbf{0},\qquad \mathbf{R}_4=\mathbf{0}. \tag{5.19}$$

a występujące w nich współczynniki określone są następującymi wyrażeniami:

- współczynniki macierzy sztywności:

$$
\begin{aligned}
&k_{14}^{0}=S_{\delta,x}^{*}, \quad k_{24}^{0}=I_{\delta z,xx}^{*}, \quad k_{34}^{0}=I_{\delta y,xx}^{*}, \quad k_{44}^{0}=I_{\delta\omega,xx}^{*}-I_{\delta\psi,x}^{*}+I_{\delta}^{*},\\
&k_{11}^{1}=-A_{,x}^{*}, \quad k_{14}^{1}=S_{\psi,x}^{*}+S_{\delta}^{*}, \quad k_{21}^{1}=-S_{z,xx}^{*}, \quad k_{24}^{1}=I_{\psi z,xx}^{*}+2I_{\delta z,x}^{*},\\
&k_{31}^{1}=-S_{y,xx}^{*}, \quad k_{34}^{1}=I_{\psi y,xx}^{*}+2I_{\delta y,x}^{*}, \quad k_{41}^{1}=-S_{\omega,xx}^{*}+S_{\psi,x}^{*}-S_{\delta}^{*},\\
&k_{44}^{1}=I_{\psi\omega,xx}^{*}+2I_{\delta\omega,x}^{*}-I_{\psi,x}^{*}-\frac{G}{E}I_{s,x},\\
&k_{11}^{2}=-A^{*}, \quad k_{12}^{2}=S_{z,x}^{*}, \quad k_{13}^{2}=S_{y,x}^{*}, \quad k_{14}^{2}=S_{\omega,x}^{*}+S_{\psi}^{*},\\
&k_{21}^{2}=-2S_{z,x}^{*}, \quad k_{22}^{2}=I_{z,xx}^{*}, \quad k_{23}^{2}=I_{yz,xx}^{*}, \quad k_{24}^{2}=I_{\omega z,xx}^{*}+2I_{\psi z,x}^{*}+I_{\delta z}^{*},\\
&k_{31}^{2}=-2S_{y,x}^{*}, \quad k_{32}^{2}=I_{yz,xx}^{*}, \quad k_{33}^{2}=I_{y,xx}^{*}, \quad k_{34}^{2}=I_{\omega y,xx}^{*}+2I_{\psi y,x}^{*}+I_{\delta y}^{*},\\
&k_{41}^{2}=-2S_{\omega,x}^{*}+S_{\psi}^{*}, \quad k_{42}^{2}=I_{\omega z,xx}^{*}-I_{\psi z,x}^{*}+I_{\delta z}^{*}, \quad k_{43}^{2}=I_{\omega y,xx}^{*}-I_{\psi y,x}^{*}+I_{\delta y}^{*},\\
&k_{44}^{2}=I_{\omega,xx}^{*}+I_{\psi\omega,x}^{*}+2I_{\delta\omega}^{*}-I_{\psi}^{*}-\frac{G}{E}I_{s},\\
&k_{12}^{3}=S_{z}^{*}, \quad k_{13}^{3}=S_{y}^{*}, \quad k_{14}^{3}=S_{\omega}^{*},\\
&k_{21}^{3}=-S_{z}^{*}, \quad k_{22}^{3}=2I_{z,x}^{*}, \quad k_{23}^{3}=2I_{yz,x}^{*}, \quad k_{24}^{3}=2I_{\omega z,x}^{*}+I_{\psi z}^{*},\\
&k_{31}^{3}=-S_{y}^{*}, \quad k_{32}^{3}=2I_{yz,x}^{*}, \quad k_{33}^{3}=2I_{y,x}^{*}, \quad k_{34}^{3}=2I_{\omega y,x}^{*}+I_{\psi y}^{*},\\
&k_{41}^{3}=-S_{\omega}^{*}, \quad k_{42}^{3}=2I_{\omega z,x}^{*}-I_{\psi z}^{*}, \quad k_{43}^{3}=2I_{\omega y,x}^{*}-I_{\psi y}^{*}, \quad k_{44}^{3}=2I_{\omega,x}^{*},\\
&k_{22}^{4}=I_{z}^{*}, \quad k_{23}^{4}=I_{yz}^{*}, \quad k_{24}^{4}=I_{\omega z}^{*}, \quad k_{32}^{4}=I_{yz}^{*}, \quad k_{33}^{4}=I_{y}^{*}, \quad k_{34}^{4}=I_{\omega y}^{*},\\
&k_{42}^{4}=I_{\omega z}^{*}, \quad k_{43}^{4}=I_{\omega y}^{*}, \quad k_{44}^{4}=I_{\omega}^{*},
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

- współczynniki macierzy bezwładności:

$$
\begin{aligned}
&m_{11}^{0}=A', \quad m_{14}^{0}=-S_{\lambda}', \quad m_{21}^{0}=S_{z,x}', \quad m_{22}^{0}=A', \quad m_{24}^{0}=S_{\vartheta_y}'-I_{\lambda z,x}',\\
&m_{31}^{0}=S_{y,x}', \quad m_{33}^{0}=A', \quad m_{34}^{0}=S_{\vartheta_z}'-I_{\lambda y,x}',\\
&m_{41}^{0}=-S_{\lambda}'+S_{\omega,x}', \quad m_{42}^{0}=S_{\vartheta_y}', \quad m_{43}^{0}=S_{\vartheta_z}', \quad m_{44}^{0}=I_{\lambda}'+I_{\vartheta_y}'+I_{\vartheta_z}',\\
&m_{12}^{1}=-S_{z}', \quad m_{13}^{1}=-S_{y}', \quad m_{14}^{1}=-S_{\omega}',\\
&m_{21}^{1}=S_{z}', \quad m_{22}^{1}=-I_{z,x}', \quad m_{23}^{1}=-I_{yz,x}', \quad m_{24}^{1}=-I_{\lambda z}'-I_{\omega z,x}',\\
&m_{31}^{1}=S_{y}', \quad m_{32}^{1}=-I_{yz,x}', \quad m_{33}^{1}=-I_{y,x}', \quad m_{34}^{1}=-I_{\lambda y}'-I_{\omega y,x}',\\
&m_{41}^{1}=S_{\omega}', \quad m_{42}^{1}=I_{\lambda z}'-I_{\omega z,x}', \quad m_{43}^{1}=I_{\lambda y}'-I_{\omega y,x}', \quad m_{44}^{1}=-I_{\omega,x}',\\
&m_{22}^{2}=-I_{z}', \quad m_{23}^{2}=-I_{yz}', \quad m_{24}^{2}=-I_{\omega z}', \quad m_{32}^{2}=-I_{yz}', \quad m_{33}^{2}=-I_{y}', \quad m_{34}^{2}=-I_{\omega y}',\\
&m_{42}^{2}=-I_{\omega z}', \quad m_{43}^{2}=-I_{\omega y}', \quad m_{44}^{2}=-I_{\omega}'.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Poszukiwany wektor rozwiązań $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ ma postać $\mathbf{f}(\mathrm{x}) = \left[u_{ox} \quad u_y \quad u_z \quad \theta \right]^{\mathbf{T}}$ gdzie:

$$
\begin{aligned}
u_\beta(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[u_\beta \right] C_k^{(\lambda)}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \beta = ox, y, z, \\
\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\theta \right] C_k^{(\lambda)}\left(x/a\right) \quad \text{gdy} \quad \lambda \neq 0
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

lub

$$
\begin{aligned}
u_\beta(x) &= \frac{1}{2} b_0 \left[u_\beta \right] T_0\left(\frac{x}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left[u_\beta \right] T_k\left(\frac{x}{a}\right), \ \beta = ox, y, z, \\
\theta &= \frac{1}{2} b_0 \left[\theta \right] T_0\left(x/a\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left[\theta \right] T_k\left(x/a\right), \quad \text{gdy} \quad \lambda = 0.
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

W przypadku równania różniczkowego czwartego rzędu $(n = 4)$ nieskończony układ równań (4.11) opisujący zależności między współczynnikami rozwinięcia poszukiwanej funkcji $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ określony jest wzorem

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{k}+\lambda+1)(\mathrm{k}+\lambda+2)(\mathrm{k}+\lambda+3)c_{k-4}\left[\mathbf{Q}_0(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)(\mathrm{k}+\lambda+3)c_{k-2}\left[\mathbf{Q}_0(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+6\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)(\mathrm{k}+\lambda)c_k\left[\mathbf{Q}_0(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&-4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)(\mathrm{k}+\lambda-3)c_{k+2}\left[\mathbf{Q}_0(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+(\mathrm{k}+\lambda-1)(\mathrm{k}+\lambda-2)(\mathrm{k}+\lambda-3)c_{k+4}\left[\mathbf{Q}_0(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+2\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\left[(\mathrm{k}+\lambda+1)(\mathrm{k}+\lambda+2)c_{k-3}\left[\mathbf{Q}_1(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\right.\\
&-3(\mathrm{k}+\lambda-1)(\mathrm{k}+\lambda+2)c_{k-1}\left[\mathbf{Q}_1(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&+3(\mathrm{k}+\lambda+1)(\mathrm{k}+\lambda-2)c_{k+1}\left[\mathbf{Q}_1(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&\left.-(\mathrm{k}+\lambda-1)(\mathrm{k}+\lambda-2)c_{k+3}\left[\mathbf{Q}_1(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\right]\\
&+4\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)\left[(\mathrm{k}+\lambda+1)c_{k-2}\left[\mathbf{Q}_2(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\right.\\
&-2(\mathrm{k}+\lambda)c_k\left[\mathbf{Q}_2(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\\
&\left.+(\mathrm{k}+\lambda-1)c_{k+2}\left[\mathbf{Q}_2(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\right.\\
&+8\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-1\right)\left[c_{k-1}\left[\mathbf{Q}_3(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\right.\\
&\left.-c_{k+1}\left[\mathbf{Q}_3(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]\right]\\
&+16\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-9\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-4\right)\left((\mathrm{k}+\lambda)^2-1\right)(\mathrm{k}+\lambda)c_k\left[\mathbf{Q}_4(x,\omega)\mathbf{f}(x)\right]=0,
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

gdy $k \geq n.$

Jak już wspomniano wcześniej układ ten po wyznaczeniu współczynników c_k rozwinięcia w szereg, występującego w tym wzorze iloczynu funkcji $\mathbf{Q}_i(x)\mathbf{f}(x)$ (patrz wzory (4.13) - (4.16)), sprowadza wyjściowy układ równań różniczkowych do nieskończonego układu równań algebraicznych.

Układ (5.24) spełniony dla $k \geq 4$ należy uzupełnić czternastoma równaniami opisującymi warunki brzegowe. Przy formułowaniu tych warunków wykorzystuje się następujące zależności określające wartości wielomianów Gegenbauera i ich pochodnych w punktach $x = \pm 1$ w przypadku:

gdy $\lambda \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
C_k^{(\lambda)}(1) &= \binom{k+2\lambda-1}{k}, \\
d^m C_k^{(\lambda)}(x)/dx^m \,|_{x=1} &= 2^m \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)} C_{k-m}^{(\lambda+m)}(x)|_{x=1} = 2^m \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)} \binom{k+m+2\lambda-1}{k-m}, \\
d^m C_k^{(\lambda)}(x)/dx^m \,|_{x=-1} &= (-1)^{k-m} d^m C_k^{(\lambda)}(x)/dx^m \,|_{x=1},
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

gdy $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
T_k(1) &= 1, \\
d^m T_k(x)/dx^m \,|_{x=1} &= \frac{k}{(2m-1)!} \prod_{l=-m+1}^{m-1} (k+l), \\
d^m T_k(x)/dx^m \,|_{x=-1} &= (-1)^{k-m} d^m T_k(x)/dx^m \,|_{x=1},
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Przykładowe równania opisujące warunek brzegowy $u_z(\mp a) = 0$ mają postać:

w przypadku gdy $\lambda \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
u_z(x)|_{x=a} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k[u_z](k+\lambda) C_k^{(\lambda)}(a/a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k[u_z](k+\lambda) \binom{k+2\lambda-1}{k} = 0, \\
u_z(x)|_{x=-a} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k[u_z](k+\lambda) C_k^{(\lambda)}(-a/a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k[u_z](-1)^k (k+\lambda) \binom{k+2\lambda-1}{k} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

w przypadku gdy $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
u_z(x)|_{x=a} &= \frac{1}{2} c_0[u_z] T_0(1) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k[u_z] T(1) = \frac{1}{2} c_0[u_z] + \sum_{k=1}^{\infty} c_k[u_z] = 0, \\
u_z(x)|_{x=-a} &= \frac{1}{2} c_0[u_z] T_0(-1) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k[u_z] T(-1) = \frac{1}{2} c_0[u_z] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k[u_z] = 0.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Tak otrzymany nieskończony układ równań po „obcięciu” go do układu skończonego pozwala na wyznaczenie współczynników $c_k[u_\beta]$, $\beta = ox, y, z$ oraz $c_k[\theta]$. Stąd po zastosowaniu relacji (4.18) otrzymuje się współczynniki $a_k[u_\beta]$, $\beta = ox, y, z$ oraz $a_k[\theta]$, względnie współczynniki $b_k[u_\beta]$, $\beta = ox, y, z$ oraz $b_k[\theta]$ rozwinięcia (5.22) lub (5.23),

w zależności od rzędu λ zastosowanych do aproksymacji wielomianów Gegenbauera. W dalszych obliczeniach stosowane będą wielomiany Gegenbauera rzędu $\lambda = 0$, które jak wspomniano po drobnej modyfikacji sprowadzają się do wielomianów Czebyszewa I rodzaju oraz $\lambda = 1,\ \lambda = 1/2$, otrzymuje się wtedy odpowiednio wielomiany Czebyszewa II rodzaju i wielomiany Legendre'a. Te trzy typy wielomianów będą stanowić bazy aproksymacyjne w analizowanych w dalszej części pracy przykładach obliczeniowych.

5.4. Przykłady numeryczne

W celu ilustracji proponowanej metody oraz w celu weryfikacji poprawności i numerycznej efektywności rozwiązano przykłady numeryczne. Analizowane przykłady rozwiązano, przyjmując jako funkcje aproksymacyjne wielomiany Czebyszewa I rodzaju. Poszukiwane formy własne aproksymowano z wykorzystaniem różnej wielkości baz aproksymacyjnych przyjmując do aproksymacji szeregi o 10, 15 i 20 wyrazach. Na potrzeby obliczeń numerycznych wykorzystano pakiet firmy Wolfram Mathematica 12 [122].

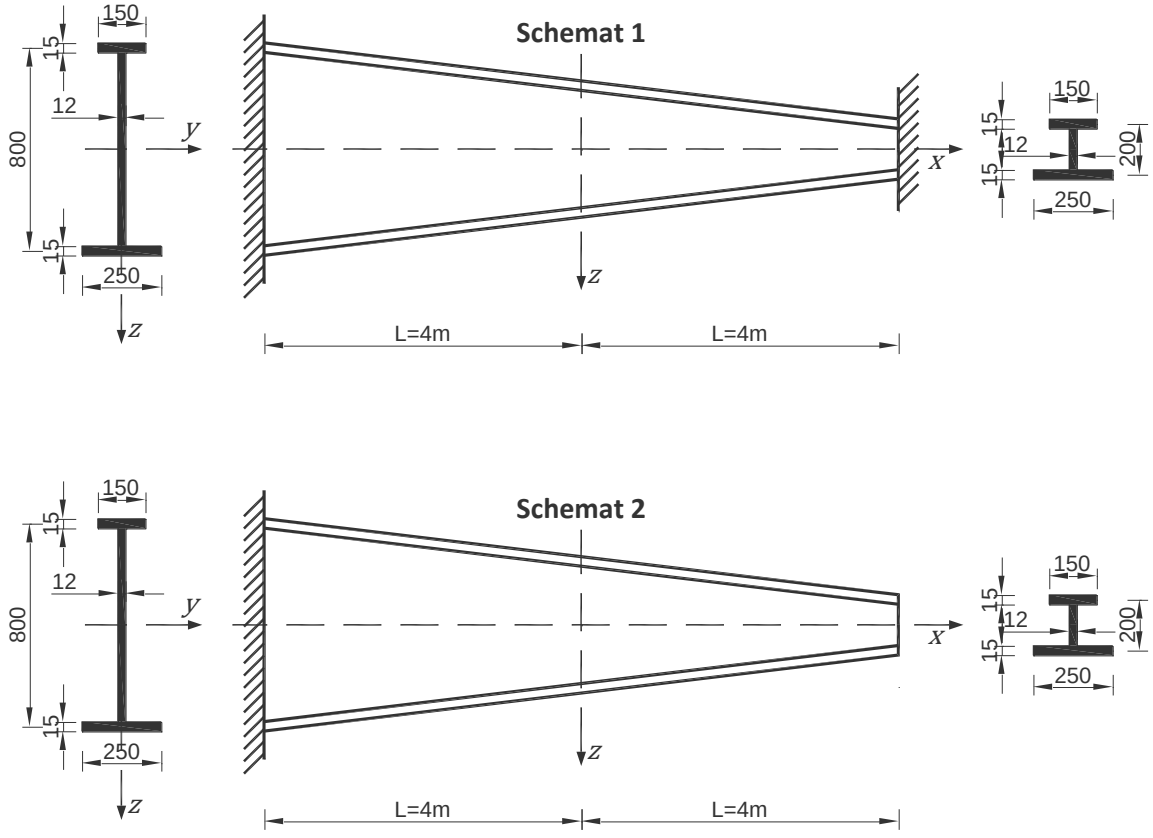
Wykorzystując wyprowadzone w rozdziale 3 wzory wykonano obliczenia charakterystyk geometrycznych przekroju. Obliczenia wykonano dla dwóch wariantów: w pierwszym charakterystyki wyznaczono zgodnie z wzorami (3.7) tj. z wykorzystaniem w obliczeniach tzw. grubości zredukowanej $g^* = \left(1+\beta^2\right)^{-\frac{3}{2}} g$, w wariancie drugim przy wyznaczaniu tych charakterystyk założono, że $\beta = 0$ tj. przyjęto $g^* = g$. Analiza tych wariantów pozwoliła na ocenę wpływu przyjęcia uproszczonej metody wyznaczania charakterystyk przekrojów na wartości częstości własnych. Ponadto zbadano wpływ wprowadzonego w modelu uogólnienia (w stosunku do modelu Wilde [120]), uwzględniającego zmienność położenia środków ścinania przekrojów opisanego funkcjami $C_y(x), C_z(x)$. W tym celu wykonano również obliczenia dla modelu Wilde (patrz praca [120]), pomijając we wszystkich wyprowadzonych wzorach składniki, w których jako czynniki pojawiają się pochodne $d^k C_y(x)/dx^k$, $d^k C_z(x)/dx^k$. W obliczeniach przyjęto $d^k C_y(x)/dx^k \equiv 0, \quad d^k C_z(x)/dx^k \equiv 0$ (w przypadku przekrojów dwuteowych monosymetrycznych $C_y(x) \equiv 0$).

W celu potwierdzenia poprawności modelu oraz skuteczności prezentowanej metody rozwiązania otrzymanych równań analizowane zagadnienia rozwiązano z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych. Do obliczeń wykorzystano program ABAQUS, w którym

do aproksymacji układu zastosowano prostokątne element powłokowe o wymiarach 0,02 x 0,02m, oraz program SOFiSTiK, w którym belki rozwiązano z wykorzystaniem cienkościennych elementów prętowym o 7 stopniach swobody (7DOF) w każdym końcu elementu prętowego. W przypadku obliczeń z wykorzystaniem programu SOFiSTiK pręty podzielono na 20, 25 i 50 pryzmatycznych elementów skończonych.

Przykład 1

Przedmiotem analizy jest niepryzmatyczna monosymetryczna belka dwuteowa o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego. Przykład ten analizowany był również w pracy autora [112]. Rozpatrywane są dwa schematy statyczne w postaci belki sztywno zamocowanej na obu końcach oraz belki wspornikowej. Schematy statyczne i wymiary przekroi poprzecznych przedstawiono na rysunku Rys. 5.1., parametry materiałowe analizowanej belki to $E' = 210\,\text{GPa}, G = 80,77\,\text{GPa}, \rho = 7850\,\text{kg/m}^3$.



Rys. 5.1. Analizowane belki dwuteowe i wymiary ich przekrojów poprzecznych

Otrzymane wyniki dla opisanych wariantów oraz wyniki uzyskane z wykorzystaniem MES przedstawiono w Tabelach 5.1. – 5.4..

Tabela 5.1. Częstości własne dla pręta sztywno zamocowanego na końcach (S-S) [Hz]

Numer częstości	Praca baza = 10	Praca baza = 15	Praca baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 40	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 80	MES ABAQUS elementy powłokowe ≤ 2cm
1	10,17	10,15	10,15	10,17	10,15	10,15	10,05
2	18,42	18,39	18,39	17,93	17,90	17,89	18,18
3	26,70	26,68	26,68	26,83	26,66	26,62	26,11
4	48,70	48,70	48,69	47,62	47,25	47,15	46,79 (lf)
5	51,99	50,72	50,72	49,49	49,33	49,29	48,18
6	53,05	52,92	52,92	51,86	51,24	51,09	49,32
7	86,27	82,39	82,34	83,58	81,66	81,18	67,38 (lf)
8	96,19	93,59	93,59	94,05	92,79	92,47	85,73 (lf)
9	106,15	121,79	121,63	125,56	121,21	120,11	86,59 (lf)
10	144,44	144,24	144,24	126,32	125,39	125,16	100,98 (lf)

Tabela 5.2. Częstości własne dla pręta wspornikowego (S-W) [Hz]

Numer częstości	Praca baza = 10	Praca baza = 15	Praca baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 40	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 80	MES ABAQUS elementy powłokowe ≤ 2cm
1	2,20	2,20	2,20	2,15	2,15	2,15	2,19
2	7,86	7,66	7,64	7,68	7,69	7,69	7,55
3	13,32	12,95	12,91	12,26	12,24	12,24	12,77
4	14,37	13,87	13,85	13,66	13,67	13,68	13,77
5	24,16	23,15	23,10	23,97	23,93	23,92	22,75
6	35,61	32,28	32,08	31,07	30,92	30,88	30,89
7	45,26	50,28	50,20	52,13	51,66	51,53	48,68 (lf)
8	60,65	58,09	57,71	57,68	57,23	57,11	52,96 (lf)
9	65,17	62,08	61,95	58,75	58,71	58,70	59,10
10	74,98	84,99	85,43	88,03	86,14	85,66	69,85 (lf)

Tabela 5.3. Częstości własne dla różnych modeli pręta sztywno zamocowanego na końcach (S-S) [Hz]

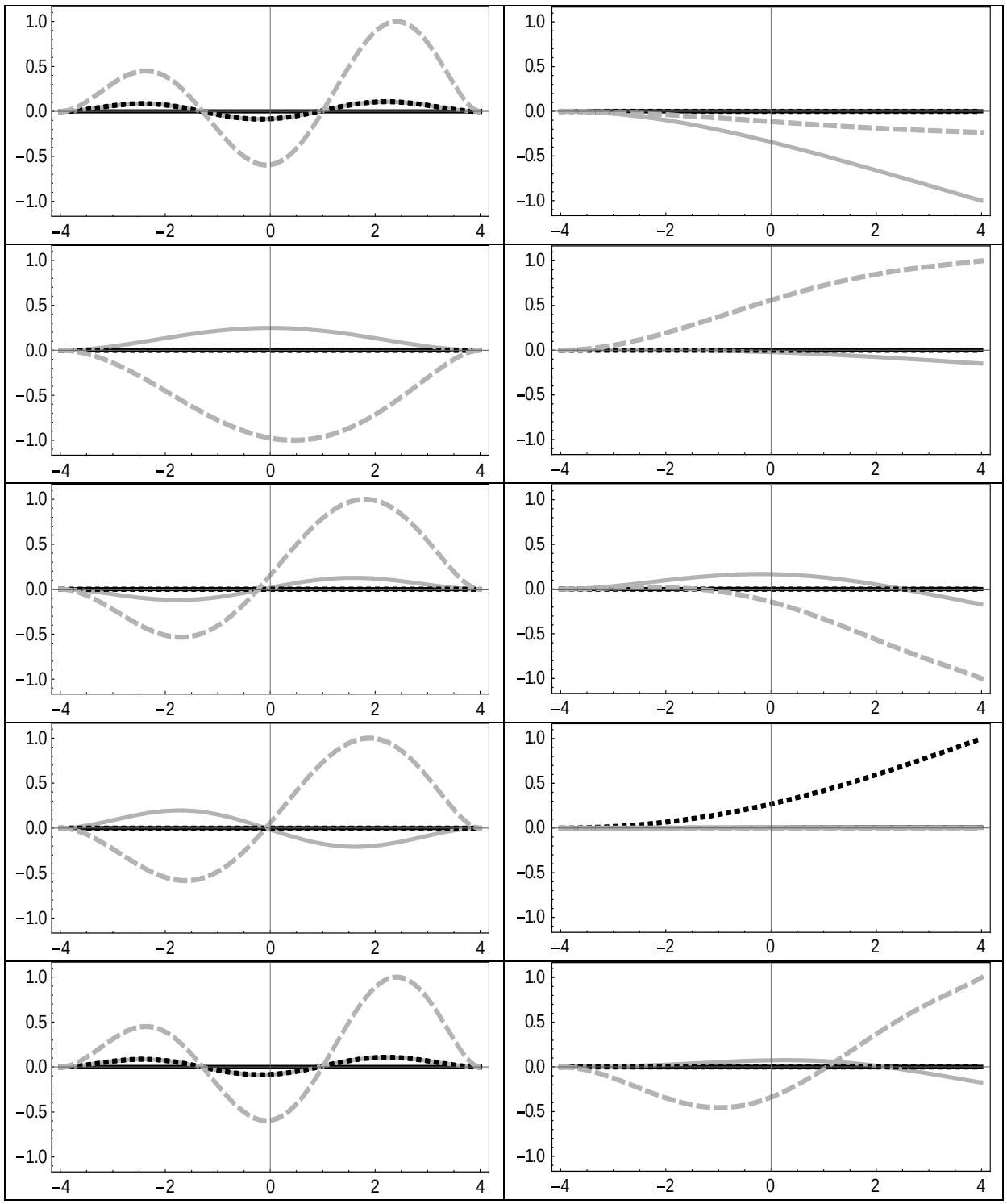
Numer częstości	Praca baza = 20	Praca $\beta = 0$ baza = 20	Praca $C_{z,x} = 0$ baza = 20
1	10,15	10,16	9,99
2	18,39	18,41	18,63
3	26,68	26,71	26,55
4	48,69	48,75	48,21
5	50,72	50,78	51,45
6	52,92	52,97	52,92
7	82,34	82,44	81,76
8	93,59	93,70	94,47
9	121,63	121,78	121,17
10	144,24	144,38	144,24

Tabela 5.4. Częstości własne dla różnych modeli pręta wspornikowego (S-W) [Hz]

Numer częstości	Praca baza = 20	Praca $\beta = 0$ baza = 20	Praca $C_{z,x} = 0$ baza = 20
1	2,20	2,20	2,21
2	7,64	7,64	7,46
3	12,91	12,93	13,34
4	13,85	13,86	13,85
5	23,10	23,12	22,41
6	32,08	32,12	33,26
7	50,20	50,26	48,67
8	57,71	57,76	59,76
9	61,95	62,01	61,95
10	85,43	85,53	84,17

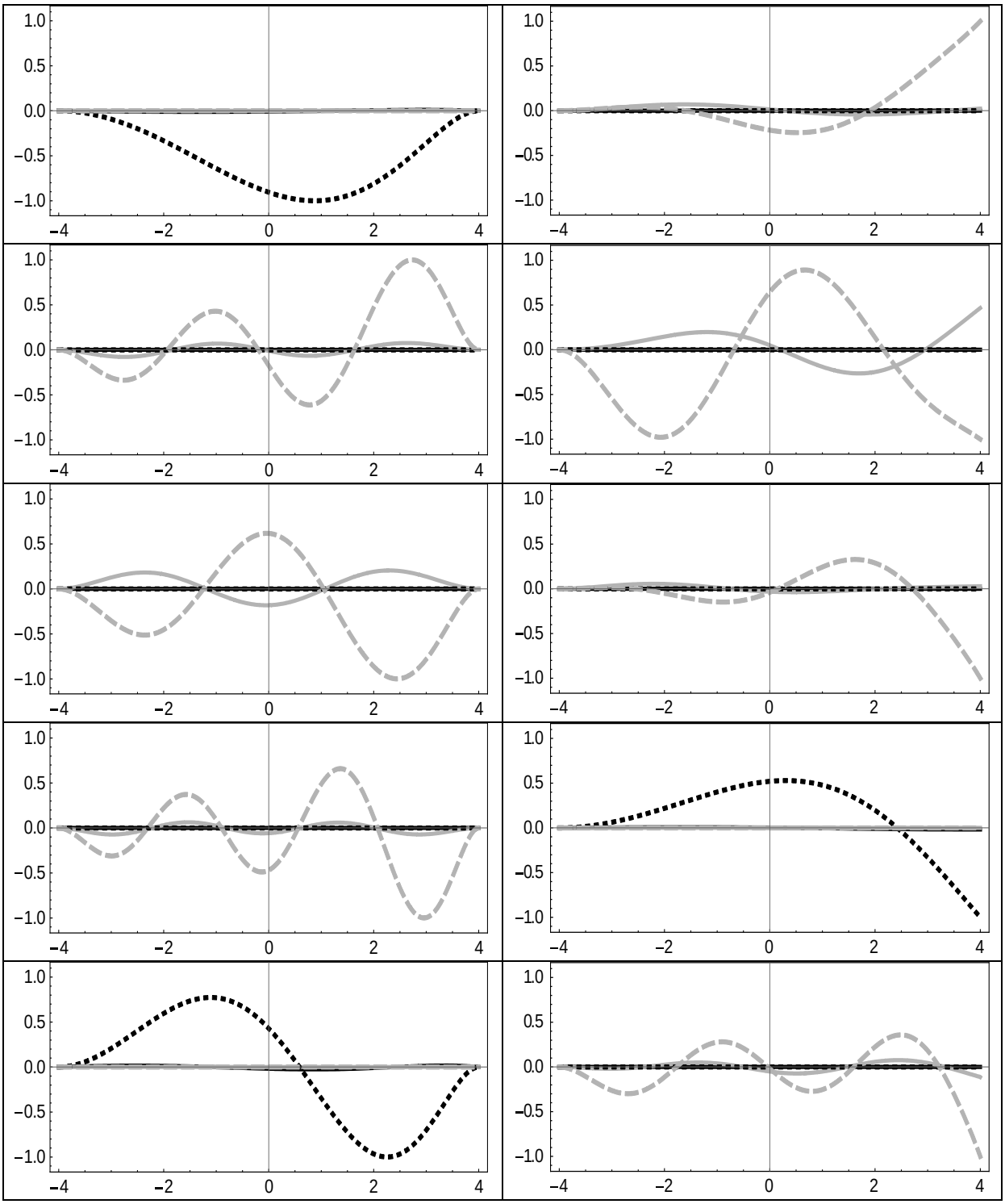
W przypadku rozwiązań z użyciem elementów powłokowych (ABAQUS) w rozwiązaniach odpowiadających wyższym częstościom własnym pojawiają się formy własne

związane z efektami lokalnymi polegającymi na lokalnych odkształceniach środnika. Formy te oznaczono w tabelach symbolem *lf* - '*lokalna forma*'. Postać form własnych otrzymanych z wykorzystaniem prezentowanej w pracy metody przedstawiono na Rys. 5.2. i Rys. 5.3.



Rys. 5.2. Wykresy form własnych od 1 do 5 dla dwuteowej belki sztywno-sztywnej (lewa kolumna) i belki wspornikowej (prawa kolumna)

(——— u_{ox} ——— u_y, ····· u_z, - - - - θ).



Rys. 5.3. Wykresy form własnych od 6 do 10 dla dwuteowej belki sztywno-sztywnej (lewa kolumna) i belki wspornikowej (prawa kolumna)

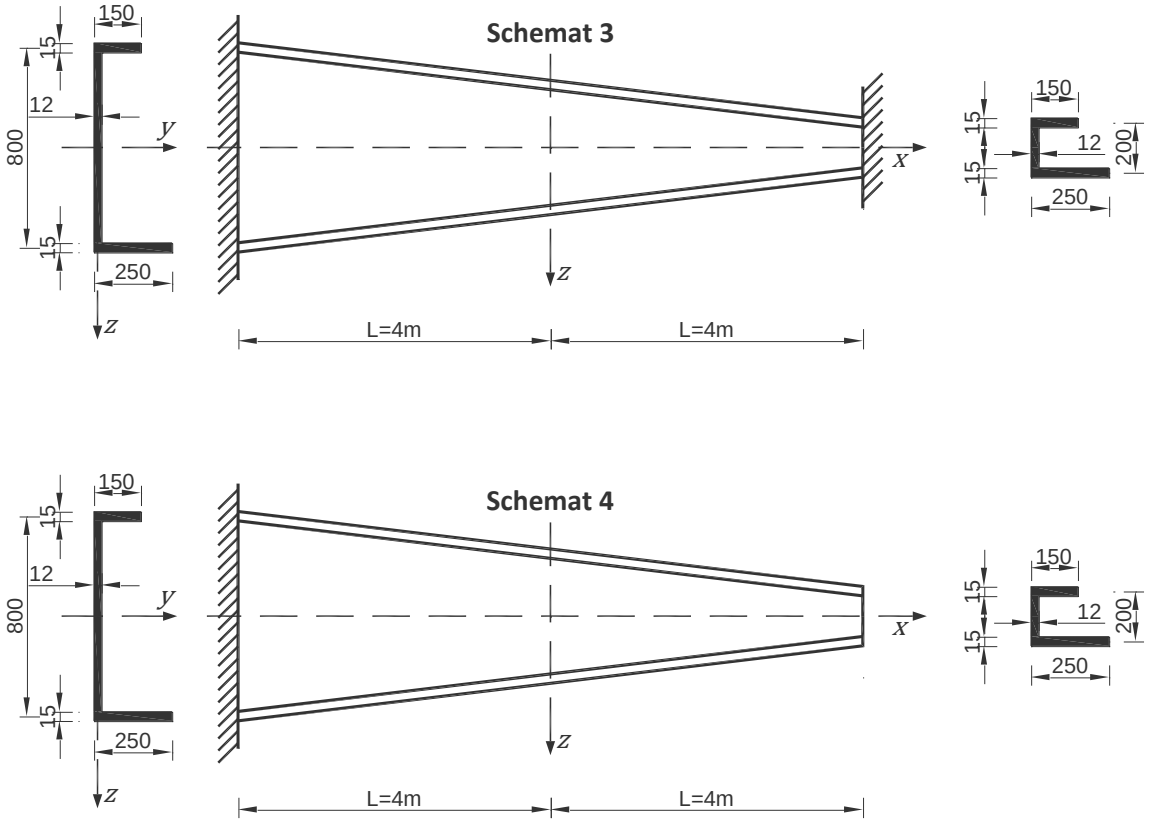
(u_{ox} u_y, u_z, θ).

Przykład 2

Przedmiotem analizy jest niepryzmatyczna belka ceowa o liniowo zmiennej wysokości przekroju poprzecznego bez cech symetrii przekroju poprzecznego. Rozpatrywane są dwa schematy statyczne w postaci belki sztywno zamocowanej na obu końcach oraz belki

wspornikowej. Schematy statyczne i wymiary przekroi poprzecznych przedstawiono na rysunku Rys. 5.4., parametry materiałowe analizowanej belki to $E' = 210\,\text{GPa}, G = 80,77\,\text{GPa}, \rho = 7850\,\text{kg/m}^3$.

Otrzymane wyniki dla opisanych wariantów oraz wyniki uzyskane z wykorzystaniem MES przedstawiono w Tabelach 5.5 – 5.8.. Postać form własnych otrzymanych z wykorzystaniem prezentowanej metody przedstawiono na Rys. 5.5. i Rys. 5.6..



Rys. 5.4. Analizowane belki ceowe i wymiary ich przekrojów poprzecznych

Tabela 5.5. Częstości własne dla pręta sztywno zamocowanego na końcach (S-S) [Hz]

Numer częstości	Praca baza = 10	Praca baza = 15	Praca baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 40	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 80	MES ABAQUS elementy powłokowe ≤ 2cm
1	14,24	14,20	14,20	13,48	13,46	13,45	13,99
2	21,65	21,63	21,63	20,34	20,29	20,28	21,26
3	34,33	34,25	34,25	35,25	35,03	34,97	33,05
4	51,78	51,75	51,74	50,86	50,50	50,40	46,69 (lf)
5	67,80	67,46	67,46	63,15	62,84	62,76	57,69 (lf)
6	71,35	71,32	71,32	69,31	68,53	68,34	64,70 (lf)
7	100,15	99,90	99,87	97,22	95,47	95,02	66,82 (lf)
8	118,97	116,81	116,80	118,05	115,89	115,34	75,72 (lf)
9	154,00	151,59	151,55	150,33	146,11	144,99	82,74 (lf)
10	180,84	183,71	183,69	157,95	156,45	156,10	93,08 (lf)

Tabela 5.6. Częstości własne dla pręta wspornikowego (S-W) [Hz]

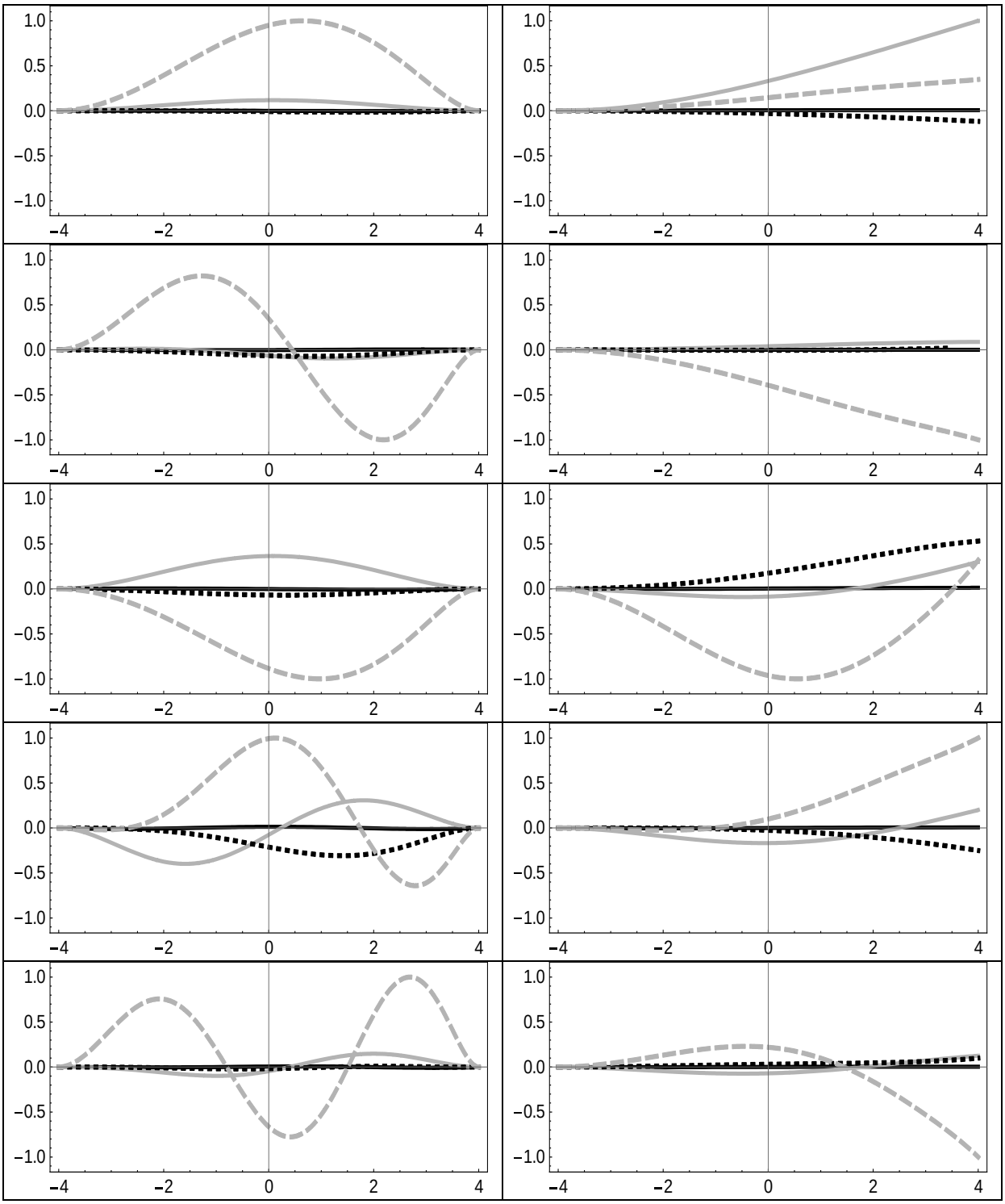
Numer częstości	Praca baza = 10	Praca baza = 15	Praca baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 20	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 40	MES SOFiSTiK elementy prętowe 7DOF baza = 80	MES ABAQUS elementy powłokowe ≤ 2cm
1	3,43	3,41	3,41	3,39	3,39	3,39	3,47
2	8,69	7,88	7,78	6,72	6,72	6,73	7,43
3	13,99	14,43	14,58	15,81	15,81	15,81	14,63
4	19,64	18,63	18,47	18,93	18,92	18,92	18,76
5	31,11	27,87	27,44	25,40	25,41	25,41	25,06
6	42,25	38,04	37,69	39,59	39,43	39,38	36,78
7	58,77	57,34	57,47	55,39	55,08	55,00	50,42 (lf)
8	67,32	69,09	68,57	72,60	71,86	71,67	59,64 (lf)
9	90,04	81,76	81,36	78,60	78,56	78,55	68,98 (lf)
10	102,77	106,89	105,56	101,94	100,46	100,07	70,58 (lf)

Tabela 5.7. Częstości własne dla różnych modeli pręta sztywno zamocowanego na końcach (S-S) [Hz]

Numer częstości	Praca baza = 20	Praca $\beta = 0$ baza = 20	Praca $C_{y,x} = 0$ $C_{z,x} = 0$ baza = 20
1	14,20	14,21	14,07
2	21,63	21,65	21,94
3	34,25	34,28	33,79
4	51,74	51,79	52,87
5	67,46	67,52	65,79
6	71,32	71,39	71,77
7	99,87	99,96	102,09
8	116,80	116,90	114,34
9	151,55	151,69	153,16
10	183,69	183,87	183,42

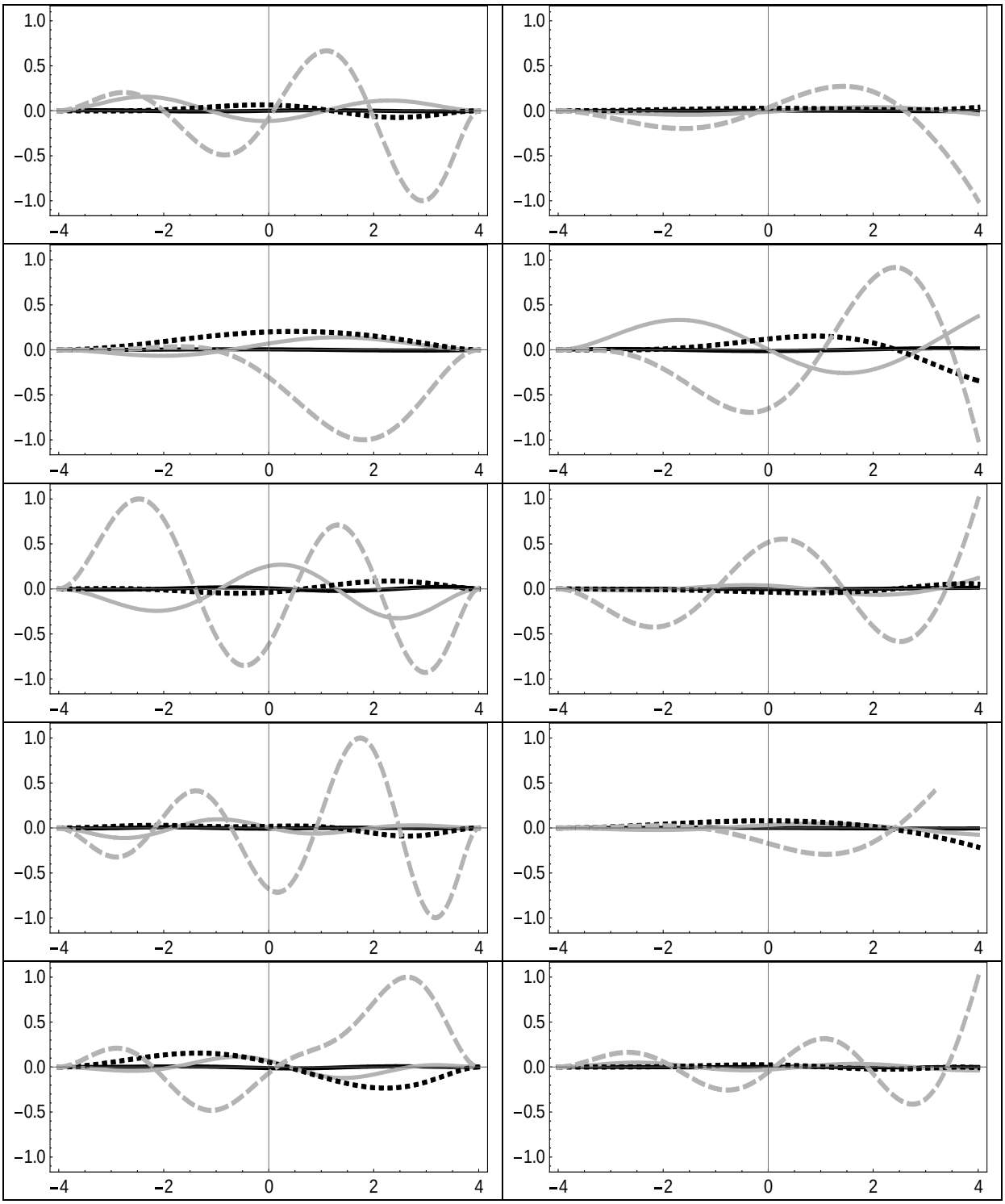
Tabela 5.8. Częstości własne dla różnych modeli pręta wspornikowego (S-W) [Hz]

Numer częstości	Praca baza = 20	Praca $\beta = 0$ baza = 20	Praca $C_{y,x} = 0$ $C_{z,x} = 0$ baza = 20
1	3,41	3,41	3,48
2	7,78	7,78	7,85
3	14,58	14,59	14,66
4	18,47	18,48	19,14
5	27,44	27,46	27,98
6	37,69	37,71	38,49
7	57,47	57,53	59,53
8	68,57	68,63	66,85
9	81,36	81,44	82.66
10	105,56	105,66	-



Rys. 5.5. Wykresy form własnych od 1 do 5 dla ceowej belki sztywno-sztywnej (lewa kolumna) i belki wspornikowej (prawa kolumna)

(——— u_{ox} ——— u_y , ····· u_z , - - - - θ) .



Rys. 5.6. Wykresy form własnych od 6 do 10 dla ceowej belki sztywno-sztywnej (lewa kolumna) i belki wspornikowej (prawa kolumna)

(——— u_{ox} ——— u_y , ····· u_z , - - - - θ) .

5.5. Analiza otrzymanych wyników

Na podstawie otrzymanych wyników i wykresów form własnych można wyciągnąć następujące wnioski:

- zastosowanie opisanej metody pozwala rozwiązać zagadnienie drgań własnych niepryzmatycznej belki cienkościennej o dowolnych parametrach geometrycznych,
- otrzymane rezultaty są zgodne z rezultatami otrzymanymi innymi metodami w tym również MES,
- zaproponowana metoda daje dobre rezultaty nawet dla małej bazy aproksymacyjnej, dla przekroju monosymetrycznego wystarczająca jest baza składająca się 15 wielomianów aproksymacyjnych, dla przekroju bez cech symetrii z uwagi na sprzężenia zasadne jest zastosowanie nieznacznie większej bazy aproksymacyjnej składającej z 20 wielomianów aproksymacyjnych,
- w analizowanym zagadnieniu drgań swobodnych przyjęcie uproszczonego sposobu wyznaczania geometrycznych charakterystyk przekroju nie wpływa istotnie na wartości częstości własnych rozważanych układów,
- różnice w wartościach częstości własnych wyznaczonych dla modelu Wilde oraz modelu uogólnionego przedstawionego w niniejszej pracy nie są zbyt duże (dla pierwszych dziesięciu częstości własnych wynoszą maksymalnie około 3%. Dokładniejsza analiza pozwala sformułować wniosek, że pominięcie pochodnych funkcji $C_y(x), C_z(x)$ generuje największe różnice w przypadku częstości odpowiadających formom, w których dominuje skręcania. Różnice są podobne zarówno dla modelu belki monosymetrycznej jak i dla modelu belki bez cech symetrii,

- różnice między wynikami otrzymanymi proponowaną metodą, a wynikami otrzymanymi metodą MES są większe dla belki bez cech symetrii z uwagi na większe sprzężenia drgań skrętnych z drganiami giętnymi.

6. Analiza wpływu zmiany położenia punktu podparcia, w ramach tego samego przekroju, na drgania belek cienkościennych

6.1. Wprowadzenie

Opisany model oraz przedstawioną metodę zastosowano do analizy wpływu, jaki na drgania swobodne belki ma zmiana położenia punktu podparcia belki. Przy czym chodziło tutaj o zmianę położenia punktu podparcia w ramach tych samych, ustalonych przekrojów pręta. W dalszej części pracy przekroje te nazwano „przekrojami podparcia". Przedmiotem analizy były belki podparte na końcach pręta. Na konieczność przeprowadzenia takiej analizy autor zwrócił uwagę w momencie, gdy „próbował" określić warunki brzegowe dla belki niepryzmatycznej. Przy określaniu tych warunków autor stanął bowiem przed problemem, jak w przypadku układu jednowymiarowego (jakim jest belka), opisanego względem dowolnym prostoliniowej osi odniesienia, określić te (brzegowe) warunki. A dokładniej w jaki punkcie przekroju podparcia mają być spełnione równania opisujące klasyczne sposoby podparcia belki (np. w przypadku swobodnego podparcia, w którym punkcie przekroju przyjąć zerowanie się przemieszczeń). W naturalny sposób ten problem jest pomijany w przypadku belek pryzmatycznych, gdzie warunki brzegowe domyślnie określa się w środku przekroju przez, który przechodzi prostoliniowa oś belki (lub w środku ścinania przekroju). W dalszej części niniejszego rozdziału przedmiotem analizy są belki pryzmatyczne: bisymetryczne, monosymetryczne i belki o przekroju, który nie posiada cech symetrii oraz belki niepryzmatyczne o przekroju ze zbieżnymi pasami i zbieżnym środnikiem. Zagadnienie to rozwiązano, przyjmując różne schematy statyczne. Dodatkowo w rozważanym przykładzie zbadano, które z zastosowanych do aproksymacji wielomianów (Czebyszewa I rodzaju, Czebyszewa II rodzaju, Legrange'a), w przypadku ograniczonej, „nielicznej" bazy aproksymacyjnej, dają dokładniejsze wyniki. Jako rozwiązanie dokładne przyjęto rozwiązanie uzyskane dla dostatecznie licznej bazy.

W wszystkich przykładach w celu weryfikacji poprawności przestawionego modelu i skuteczności metody rozwiązania, wyniki otrzymane z zastosowaniem prezentowanej w pracy metody porównano z wynikami wyznaczonymi z wykorzystaniem MES (program SOFiSTiK).

6.2. Sformułowanie zagadnienia

Układ równań opisujący zagadnienie drgań własnych jest identyczne ze sprzężonym układem równań (5.5) - (5.8) przedstawionym w poprzednim rozdziale. Nowym elementem są dodatkowe sprzężenia, które pojawiają się zarówno w kinematycznych jak i kinetycznych warunkach brzegowych. Warunki te zapewniają zerowanie przemieszczeń lub reakcji podporowych w dowolnych punktach przekroju podporowego, określanych jako punkt podparcia i stanowią kombinację liniową warunków podstawowych określonych poniżej:

$$\left[N\delta u_{ox}\right]_a^b = 0\,, \tag{6.1}$$

gdzie

$$N = E'\left(A^* u_{ox,x} - S_z^* u_{y,xx} - S_y^* u_{z,xx} - S_\omega^* \theta_{,xx} - S_\psi^* \theta_{,x} - S_\delta^* \theta\right),$$

$$\left[Q_y \delta u_y\right]_a^b = 0\,, \tag{6.2}$$

gdzie

$$Q_y = E'\left(-I_z^* u_{y,xx} + S_z^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{z,xx} - I_{\omega z}^* \theta_{,xx} - I_{\psi z}^* \theta_{,x} - I_{\delta z}^* \theta\right)_{,x}$$
$$-\rho\omega^2\left(-I_z' u_{y,x} + S_z' u_{ox} - I_{yz}' u_{z,x} - I_{\lambda z}' \theta - I_{\omega z}' \theta_{,x}\right),$$

$$\left[M_z \delta u_{y,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{6.3}$$

gdzie

$$M_z = -E'\left(-I_z^* u_{y,xx} + S_z^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{z,xx} - I_{\omega z}^* \theta_{,xx} - I_{\psi z}^* \theta_{,x} - I_{\delta z}^* \theta\right),$$

$$\left[Q_z \delta u_z\right]_a^b = 0\,, \tag{6.4}$$

gdzie

$$Q_z = E'\left(-I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right)_{,x}$$
$$-\rho\omega^2\left(-I_y' u_{z,x} + S_y' u_{0x} - I_{yz}' u_{y,x} - I_{\lambda y}' \theta - I_{\omega y}' \theta_{,x}\right),$$

$$\left[M_y \delta u_{z,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{6.5}$$

gdzie

$$M_y = E'\left(-I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right),$$

$$\left[M_x \delta\theta\right]_a^b = 0\,, \tag{6.6}$$

gdzie

$$M_x = E'\begin{pmatrix}\left(-I_\omega^*\theta_{,xx} + S_\omega^* u_{ox,x} - I_{\omega z}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* u_{z,xx} - I_{\psi\omega}^*\theta_{,x} - I_{\delta\omega}^*\theta\right)_{,x} \\ +\left(I_\psi^*\theta_{,x} - S_\psi^* u_{ox,x} + I_{\psi z}^* u_{y,xx} + I_{\psi y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^*\theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^*\theta\right)\end{pmatrix} + GI_s\theta_{,x}$$
$$-\rho\omega^2\left(-I'_\omega\theta_{,x} + S'_\omega u_{ox} - I'_{\omega z} u_{y,x} - I'_{\omega y} u_{z,x}\right),$$

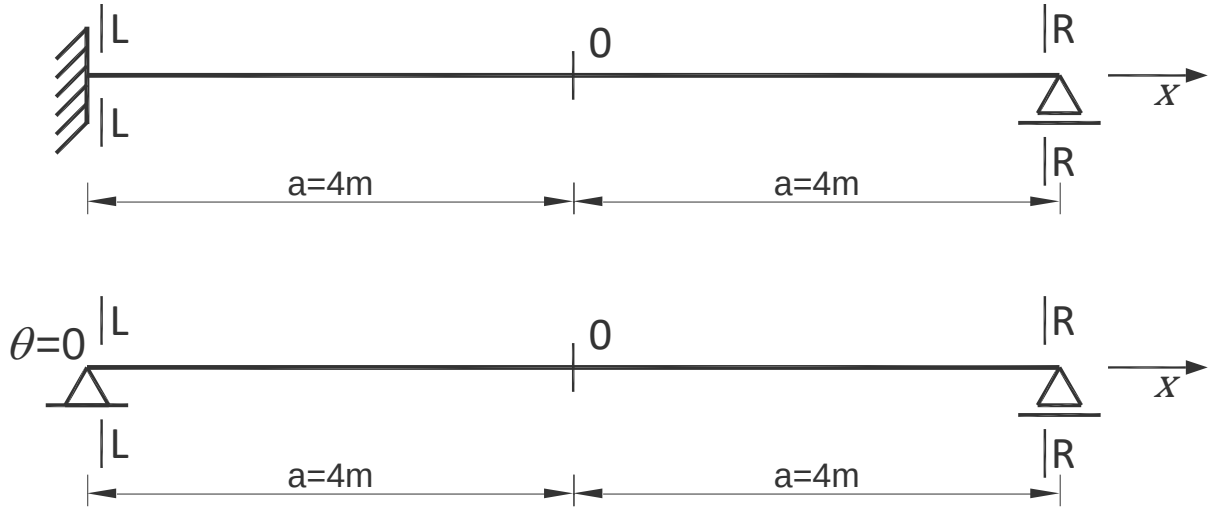
$$\left[B\delta\theta_{,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{6.7}$$

gdzie

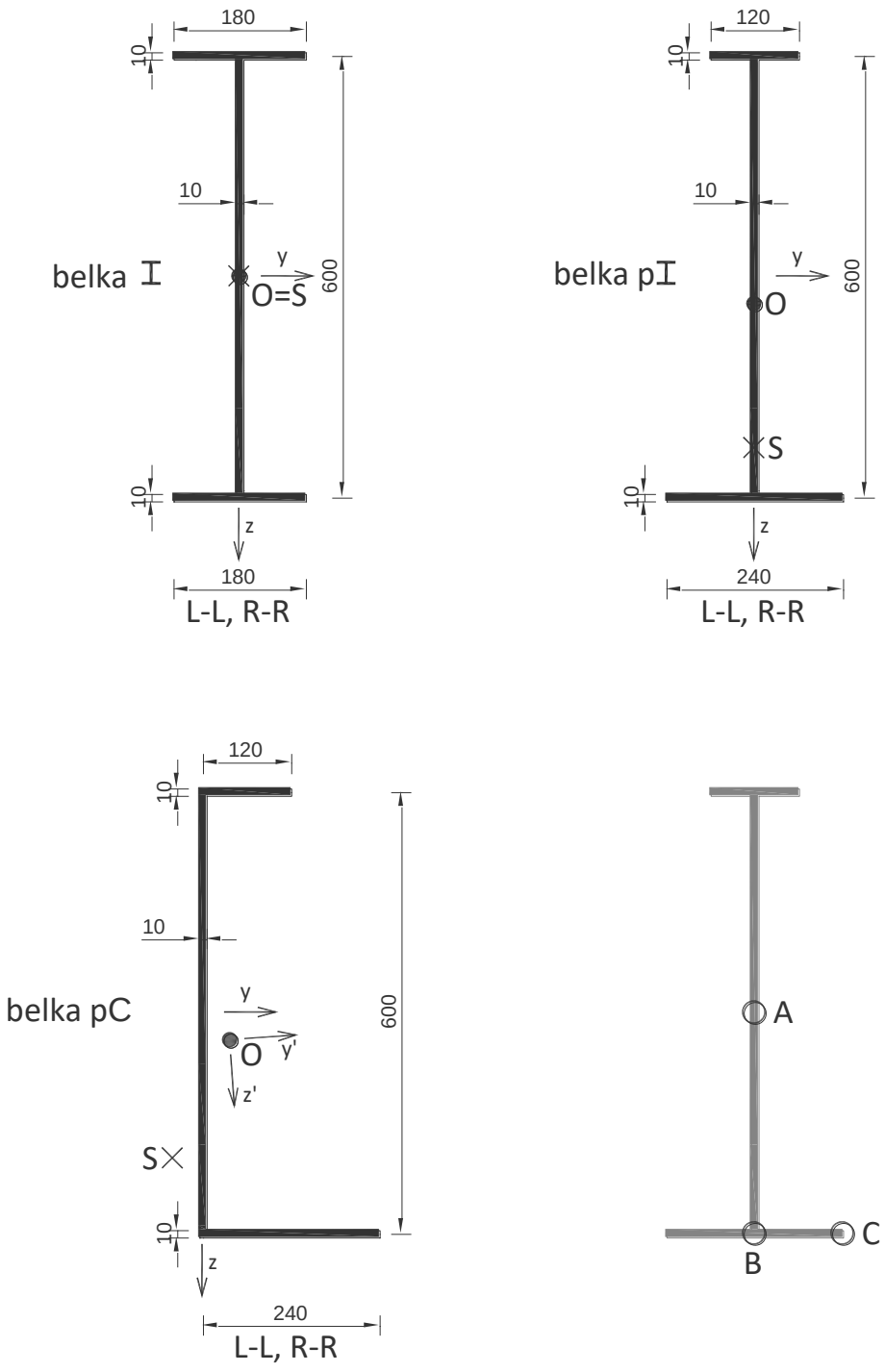
$$B = E'\left(I_\omega^*\theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^*\theta_{,x} + I_{\delta\omega}^*\theta\right).$$

6.3. Przykłady numeryczne

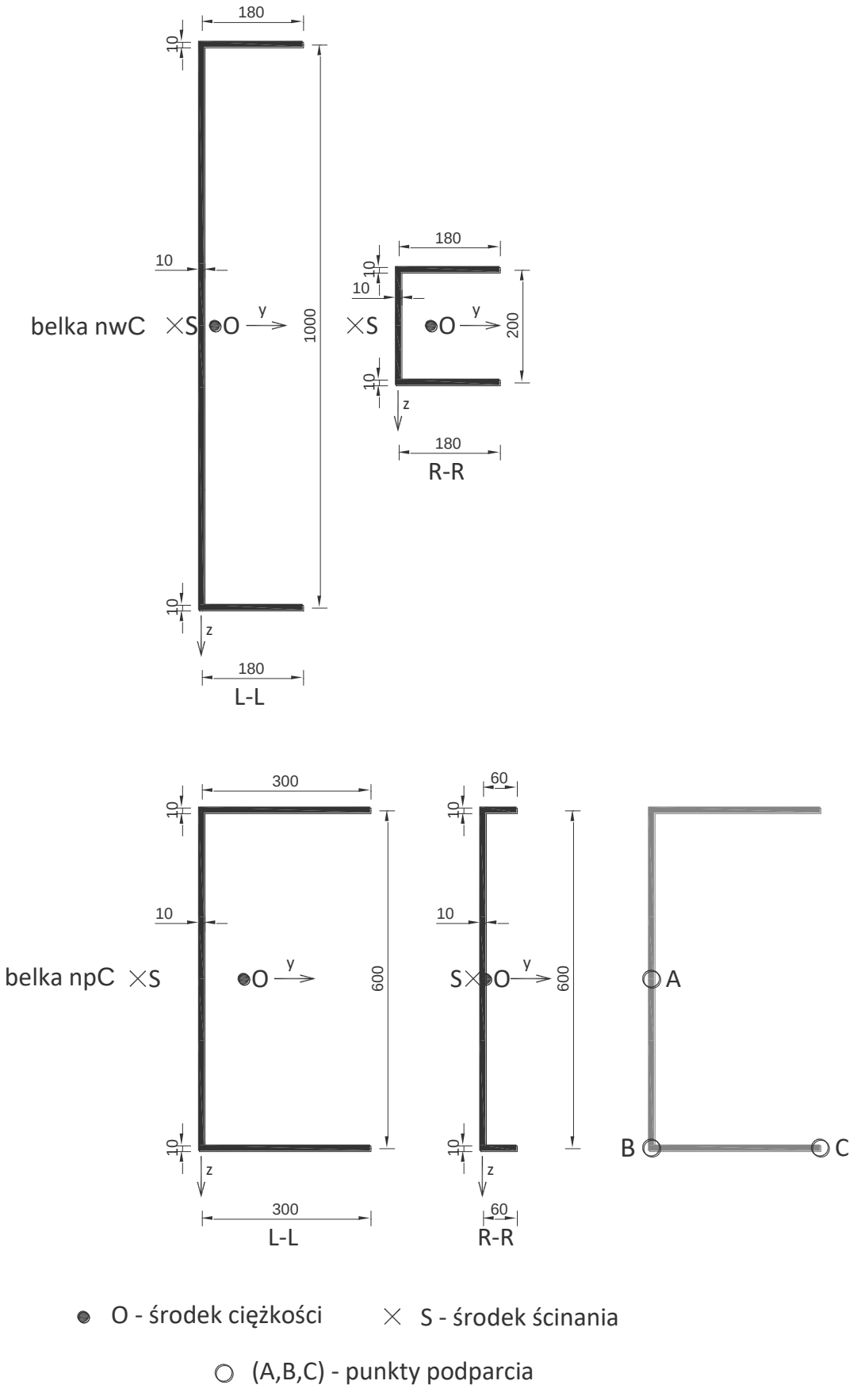
Przedmiotem analizy numerycznej były belki podparte na końcach pręta. Do aproksymacji wykorzystano trzy bazy aproksymacyjne: wielomiany Czebyszewa I rodzaju, wielomiany Czebyszewa II rodzaju oraz wielomiany Legendre'a. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem programu Wolfram Mathematica 12 [122]. Do aproksymacji poszukiwanych funkcji użyto 20 wyrazowe szeregi. Przedmiotem analizy były belki pryzmatyczne o przekroju bisymetrycznym, monosymetrycznym i o przekroju nie posiadającym żadnych cech symetrii oraz dwie belki niepryzmatyczne o przekroju C-owym o liniowo zmiennym środniku i liniowo zmiennych pasach. Parametry geometryczne belek wraz wymiarami przekrojów zastały przedstawione na Rys. 6.1. – Rys. 6.3.. Na rysunkach tych umieszczono również skrócone nazwy analizowanych belek używane w dalszej części pracy. Wszystkie analizowane belki mają jednakową długość i jednakową masę.



Rys. 6.1. Schematy statyczne analizowanych belek

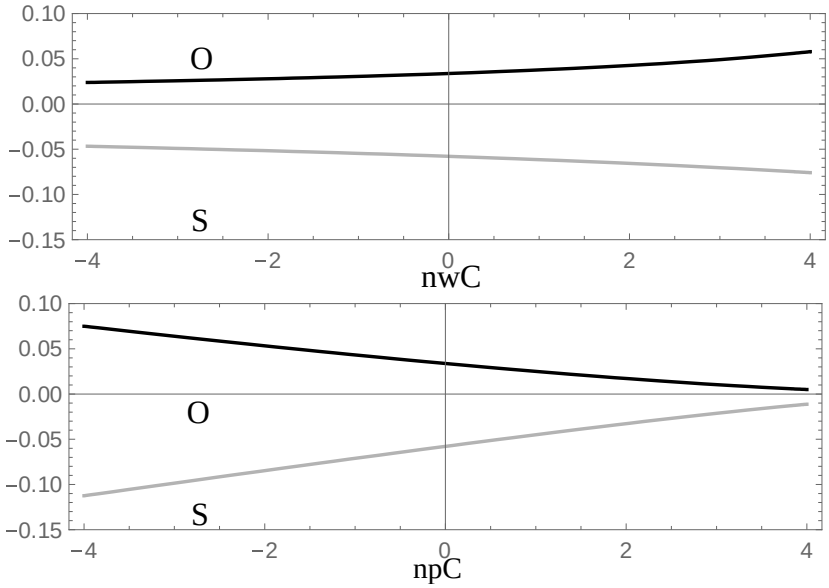


Rys. 6.2. Przekroje poprzeczne i punkty podparcia analizowanych belek pryzmatycznych



Rys. 6.3. Przekroje poprzeczne i punkty podparcia analizowanych belek niepryzmatycznych

W analizowanych belkach niepryzmatycznych osie wyznaczone przez środki ciężkości i środki ścinania są krzywoliniowe Rys. 6.4..



Rys. 6.4. Współrzędna y osi wyznaczonych przez środki ciężkości (O) i środki ścinania (S) dla belek *nwC* i *npC* (współrzędna z dla obu osi i obu belek jest stale równa 0)

Przyjęto następujące parametry materiałowe belek: $L = 2a = 8\text{m}$, $E' = 210\,\text{GPa}, G = 80,77\,\text{GPa}, \rho = 7850\,\text{kg/m}^3$. W każdym przekroju podparcia ($x = -a, x = a$) rozważano trzy punkty podparcia. Punkty te zaznaczono na Rys. 6.2. i Rys. 6.**3**. i oznaczono A, B, C. Punkt A jest środkiem środnika, punkt B jest miejscem styku środnika z pasem dolnym, a punkt C jest skrajnym punktem pasa dolnego. Podparcie w punktach A oraz B w przypadku przekroju dwuteowego jest fizycznie łatwo realizowalne. Podczas, gdy punkt podparcia C w przypadku przekroju dwuteowego oraz punkt B w przypadku przekroju ceowego są w praktyce trudne do realizacji i ich uwzględnienie w rozważaniach ma charakter teoretyczny. W przypadku belki o przekroju ceowym możliwym punktem podparcia jest punkt leżący pomiędzy punktem B i C. Podparcie w punkcie C analizowano w celu zbadania jak duży jest wpływ tej „skrajnej" lokalizacji na dynamiczną odpowiedź układu. W przykładzie przyjęto, że belka ma zablokowany obrót na lewej podporze oraz swobodę obrotu na prawej podporze ($\theta(-a) = 0, \theta(a) \neq 0$).

Przedmiotem analizy były kombinacje A-A, B-B, C-C. Dla każdej belki problem zagadnienia własnego analizowany jest dla dwóch schematów statycznych: przegubowo–przegubowego (P–P) i sztywno–przegubowego (S–P). Wszystkie belki I, pI, pC, nwC i npC są analizowane przy założeniu, że na lewej podporze (L-L) zablokowany jest obrót wzdłuż osi

podłużnej. Dodatkowo analizowane są przypadki, w których zablokowany jest obrót zarówno na lewej jak i na prawej podporze ($\theta(-a)=0, \theta(a)=0$) dla belki I i pI dla schematu przegubowo-przegubowego (P-P). Belka sztywno–swobodna (S-W) i sztywno-sztywna (S-S) nie są wrażliwe na zmianę punktu podparcia w związku z powyższym nie są analizowane w tym rozdziale.

W tym miejscu warto dodać kilka uwag dotyczących warunków brzegowych. W przypadku belki cienkościennej oprócz 12 klasycznych warunków brzegowych pojawiają się dodatkowe warunki wynikające z faktu uwzględnienia w modelu spaczenia przekroju poprzecznego.

W przypadku podpory, której przemieszczenie wzdłuż osi podłużnej jest nieograniczone ($x=a$) i swobodne spaczenie jest możliwe, ten warunek ma postać ($B(a)=0$). Postać tego warunku w rozpatrywanym problemie, gdy podpora uniemożliwia takie przemieszczenie ($x=-a$) wymaga wyjaśnienia. W tym przypadku w wyniku drgań wzdłużnych belki w punkcie podparcia powstaje siła reakcji (równoległa do osi), generująca dodatkowy bimoment w przekroju podporowym:

$$\begin{aligned} B(-a) &= \int_S \omega(s)\; t_x(s)\big|_{x=-a}\; ds = \int_S \omega(s)\; \delta(s-s_P)\big|_{x=-a}\; N(-a)\, ds = \omega(s_P)\big|_{x=-a}\; N(-a) = \\ &= \omega(s_P)\big|_{x=-a}\; E'\Big[A^* u_{ox,x} - S_z^* u_{y,xx} - S_y^* u_{z,xx} - S_\psi^* \theta_{,x} - S_\delta^* \theta\Big]\Big|_{x=-a}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

gdzie s_P określa współrzędną s punktu podparcia.

Otrzymane częstotliwości własne przedstawiono w Tabelach 6.1. – 6.12.. W celu weryfikacji poprawności modelu i wykazania skuteczności prezentowanej metody w tabelach tych przedstawiono również częstości własne wyznaczone za pomocą MES (oprogramowanie SOFiSTiK). W Tabelach 6.1. – 6.6. dodatkowo umieszczono informacje o typie wyznaczonych form własnych. W opisie tych form użyto następujących symboli wskazujących, które ze składowych wektora uogólnionego przemieszczenia są niezerowe:

U_y – składnik formy własnej $u_y \neq 0$ (zginanie w płaszczyźnie xy),

U_z – składnik formy własnej $u_z \neq 0$ (zginanie w płaszczyźnie xz),

A – składnik formy własnej $u_x \neq 0$ (ściskanie i rozciąganie),

T – składnik formy własnej $\theta \neq 0$ (skręcanie).

Kolejność występowania powyższych symboli dostarcza dodatkowych informacji. Pierwszy symbol reprezentuje największy składnik, a ostatni odnosi się do składnika

najmniejszego. I tak np. opis TB_y wskazuje, że forma jest formą giętno-skrętną i że skręcanie jest większe niż zginanie w płaszczyźnie xy. W Tabelach 6.1. – 6.3., które prezentują wartości częstości własnych belek pryzmatycznych: I (schemat statyczny (S-P)) i I (schemat statyczny (P-P), przypadki $(\theta(-a)=0,\ \theta(a)\neq 0)$ i $(\theta(-a)=0,\ \theta(a)=0)$, dla porównania podano również częstotliwości własne obliczone analitycznie. Wzory analityczne użyte do obliczeń przedstawiono w następnym podrozdziale. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem programu Mathematica 12 [122]. Pierwszych 5 postaci własnych dla belki I (schemat statyczny (S-P)) i belki pI (schemat statyczny (P-P), przypadek $\theta(-a)=0,\ \theta(a)\neq 0$)) oraz różnych punktów podparcia (A-A, B-B, C-C) przedstawiono na Rys. 6.5. i Rys. 6.6., natomiast pierwszych 10 formy własne dla belek I i pI (schemat statyczny (P-P) z warunkami $\theta(-a)=0,\ \theta(a)=0$)) pokazano na Rys. 6.7. – Rys. 6.10..

Tabela 6.1. Częstości własne dla belki I – schemat statyczny (S-P), $\theta(-a) = 0$, $\theta(a) \neq 0$

	A				**B**			**C**		
Numer częstości	ω [Hz]			Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej
	Praca	Wynik analityczny	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF	
1	3,67	3,67	3,67	T	2,56	2,56	T U_y	3,30	3,29	T U_y U_z
2	6,31	6,31	6,30	U_y	7,37	7,37	T U_y	7,43	7,42	T U_y U_z
3	14,72	14,41	14,73	T	12,26	12,26	T U_y	12,19	12,19	T U_y U_z
4	20,44	20,45	20,38	U_y	22,83	22,77	T U_y	22,61	22,55	T U_y U_z
5	35,57	35,61	35,64	T	31,63	31,65	T U_y	31,07	31,06	T U_y U_z
6	42,63	42,67	42,39	U_y	45,23	43,22	U_z	43,98	42,89	T U_y U_z
7	45,23	45,44	43,22	U_z	46,52	46,30	T U_y	48,90	47,84	T U_z U_y
8	66,81	66,93	67,08	T	60,99	61,11	T U_y	61,08	61,10	T U_y U_z
9	72,87	72,96	72,23	U_y	78,46	77,91	T U_y	78,10	77,45	T U_y U_z
10	108,44	108,77	109,21	T	100,36	100,70	T U_y	100,00	100,33	T U_y U_z

Tabela 6.2. Częstości własne dla belki *I* – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a) = 0$, $\theta(a) \neq 0$

	A				**B**			**C**		
Numer częstości	ω [Hz]			Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej
	Praca	Wynik analityczny	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF		Praca	MES7DOF	
1	2,64	2,64	2,64	T	1,62	1,62	T U_y	1,58	1,58	T U_y U_z
2	4,04	4,04	4,04	U_y	4,99	4,99	T U_y	4,94	4,93	T U_y U_z
3	11,58	11,58	11,59	T	9,37	9,37	T U_y	9,10	9,12	T U_y U_z A
4	16,15	16,16	16,13	U_y	18,27	18,25	T U_y	17,88	17,87	T U_y U_z A
5	28,97	29,09	28,49	U_z	26,12	26,15	T U_y	24,43	24,98	T U_y U_z A
6	29,69	29,72	29,74	T	28,56	28,11	U_z A	30,73	29,74	T U_z U_y A
7	36,33	36,35	36,23	U_y	39,86	39,77	T U_y	39,71	39,73	T U_y U_z A
8	58,23	58,34	58,46	T	52,89	53,02	T U_y	50,20	52,78	T U_y A U_z
9	64,55	64,63	64,22	U_y	69,72	69,45	T U_y	68,70	66,42	T U_y U_z A
10	97,22	97,50	97,88	T	89,72	90,09	T U_y	79,98	87,87	T U_y A U_z

Tabela 6.3. Częstości własne dla belki I – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a) = 0$, $\theta(a) = 0$

	A				**B**			**C**		
Numer częstości	ω [Hz]			Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej
	Praca	Wynik analityczny	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF	
1	4,04	4,04	4,04	U_y	4,04	4,04	U_y	4,03	4,03	U_y A
2	7,24	7,24	7,25	T	7,24	7,25	T	7,23	7,25	T A
3	16,15	16,16	16,13	U_y	16,15	16,13	U_y	16,07	16,15	U_y A T
4	23,21	23,22	23,24	T	23,21	23,24	T	22,99	23,24	T A
5	28,97	29,09	28,49	U_z	28,56	28,11	U_z A	28,54	28,09	U_z T A U_y
6	36,33	36,35	36,23	U_y	36,33	36,23	U_y	35,88	35,81	U_y T A U_z
7	49,42	49,48	49,59	T	49,42	49,59	T	48,24	49,59	T A U_y U_z
8	64,55	64,63	64,22	U_y	64,55	64,22	U_y	62,55	62,50	U_y T A U_z
9	85,99	86,17	86,53	T	85,99	86,53	T	79,01	86,53	T U_y A U_z
10	100,79	100,98	100,00	U_y	100,79	100,00	U_y	93,49	90,49	T U_y A U_z

Tabela 6.4. Częstości własne dla belki pI – schemat statyczny (S-P), $\theta(-a) = 0$, $\theta(a) \neq 0$

	A			**B**			**C**		
Numer częstości	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej
	Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF	
1	3,60	3,60	T U_y	2,24	2,24	T U_y	3,36	3,35	T U_y U_z
2	5,68	5,68	T U_y	7,71	7,70	T U_y	8,00	7,98	T U_y U_z
3	14,19	14,19	T U_y	11,61	11,60	T U_y	11,60	11,59	T U_y U_z
4	17,83	17,78	T U_y	18,77	18,76	T U_y	18,04	18,02	T U_y U_z
5	29,93	29,93	T U_y	33,90	33,87	T U_y	32,49	32,39	T U_y U_z
6	42,64	42,46	T U_y	35,87	35,75	T U_y	35,29	35,13	T U_y U_z
7	44,62	42,67	U_z A	44,62	42,67	U_z A	46,82	45,42	T U_z U_y
8	50,92	50,90	T U_y	55,82	55,83	T U_y	56,99	56,42	T U_z U_y
9	74,65	74,55	T U_y	72,10	71,54	T U_y	72,09	71,54	T U_z U_y
10	83,53	83,11	T U_y	82,35	82,50	T U_y	81,03	80,93	T U_y U_z

Tabela 6.5. Częstości własne dla belki pI – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a) = 0$, $\theta(a) \neq 0$

	A			**B**			**C**		
Numer częstości	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej
	Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF	
1	2,61	2,61	T U_y	1,70	1,70	T U_y	1,63	1,63	T U_z U_y
2	3,80	3,80	T U_y	5,57	5,56	T U_y	5,27	5,26	T U_y U_z A
3	11,43	11,43	T U_y	8,58	8,58	T U_y	8,45	8,45	T U_y U_z A
4	13,87	13,86	T U_y	15,71	15,71	T U_y	14,48	14,55	T U_y U_z A
5	25,82	25,83	T U_y	27,95	27,83	T U_y	26,71	26,35	T U_z U_y
6	28,58	28,11	U_z A	28,27	27,91	U_z A	27,94	27,61	T U_y U_z A
7	35,29	35,25	T U_y	30,56	30,57	T U_y	33,46	33,88	T U_z U_y A
8	45,28	45,30	T U_y	50,13	50,19	T U_y	49,49	49,22	T U_y U_z A
9	67,02	67,08	T U_y	61,75	61,51	T U_y	59,67	58,75	T U_y A U_z
10	73,49	73,30	T U_y	75,36	75,55	T U_y	71,73	73,47	T U_y U_z A

Tabela 6.6. Częstości własne dla belki pI – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a) = 0$, $\theta(a) = 0$

	A			**B**			**C**		
Numer częstości	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej	ω [Hz]		Typ formy własnej
	Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF		Praca	MES 7DOF	
1	3,69	3,69	T U_y	3,69	3,69	T U_y	3,69	3,69	T U_y A
2	8,02	8,02	T U_y	8,02	8,02	T U_y	8,00	7,99	T U_y A
3	12,19	12,19	T U_y	12,19	12,19	T U_y	12,16	12,17	T U_y A
4	25,63	25,65	T U_y	25,63	25,65	T U_y	25,49	25,58	T U_y A U_z
5	28,12	28,08	T U_y	28,12	27,83	T U_y	27,72	27,41	T U_y U_z A
6	28,58	28,11	U_z	28,27	28,08	Uz A	28,42	28,10	T U_z U_y A
7	44,30	44,36	T U_y	44,30	44,36	T U_y	43,91	44,21	T U_y A
8	61,67	61,43	T U_y	61,67	61,43	T U_y	59,67	58,73	T U_y A
9	68,24	68,40	T U_y	68,24	68,40	T U_y	67,35	68,08	T U_y A
10	97,47	97,80	T U_y	97,47	97,80	T U_y	89,58	89,39	T U_y A U_z

Tabela 6.7. Częstości własne dla belki pC – schemat statyczny (S-P), $\theta(-a) = 0,\ \theta(a) \neq 0$

	A		**B**		**C**	
Numer częstości	ω [Hz]		ω [Hz]		ω [Hz]	
	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF
1	4,24	4,72	2,95	2,74	6,10	5,85
2	8,42	8,58	11,13	11,26	10,94	10,86
3	19,84	18,66	15,61	14,57	15,64	14,97
4	25,59	24,96	27,89	28,34	24,21	24,80
5	46,40	46,23	46,41	45,80	46,29	45,82
6	46,76	46,46	49,53	46,38	49,51	46,46
7	59,82	57,11	54,32	54,31	61,37	60,20
8	80,53	80,32	87,52	87,79	82,20	82,33
9	112,06	102,46	102,56	93,64	102,67	94,55
10	124,53	121,77	129,17	129,74	121,01	121,20

Tabela 6.8. Częstości własne dla belki pC – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a) = 0,\ \theta(a) \neq 0$

	A		**B**		**C**	
Numer częstości	ω [Hz]		ω [Hz]		ω [Hz]	
	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF
1	2,56	2,56	1,74	1,74	1,54	1,54
2	5,63	5,71	8,18	8,38	6,38	6,70
3	14,74	13,50	10,45	9,78	10,32	9,78
4	20,19	19,84	22,72	23,33	19,00	19,65
5	29,96	31,76	30,12	30,65	36,91	35,79
6	39,62	39,22	39,29	36,54	38,34	36,33
7	49,15	46,97	46,63	47,09	45,46	46,71
8	71,36	71,36	77,07	78,53	70,81	69,86
9	97,23	89,26	87,29	80,18	81,21	78,93
10	111,88	110,00	108,68	107,41	99,75	101,74

Tabela 6.9. Częstości własne dla belki nwC – schemat statyczny (S-P), $\theta(-a) = 0,\ \theta(a) \neq 0$

	A		**B**		**C**	
Numer częstości	ω [Hz]		ω [Hz]		ω [Hz]	
	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF
1	7,91	8,84	6,60	7,41	10,04	10,15
2	11,00	10,90	11,61	11,89	11,84	12,91
3	22,96	24,46	20,42	21,78	20,40	21,55
4	34,82	33,97	33,46	35,40	33,25	34,12
5	38,87	39,29	41,20	40,56	36,28	36,95
6	58,06	60,76	56,91	56,55	67,94	65,57
7	72,24	69,04	70,66	71,48	70,25	70,83
8	84,18	87,29	84,31	83,92	83,44	83,06
9	123,00	114,79	116,83	119,32	115,26	112,96
10	123,12	122,39	131,94	122,23	125,25	121,72

Tabela 6.10. Częstości własne dla belki nwC – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a) = 0,\ \theta(a) \neq 0$

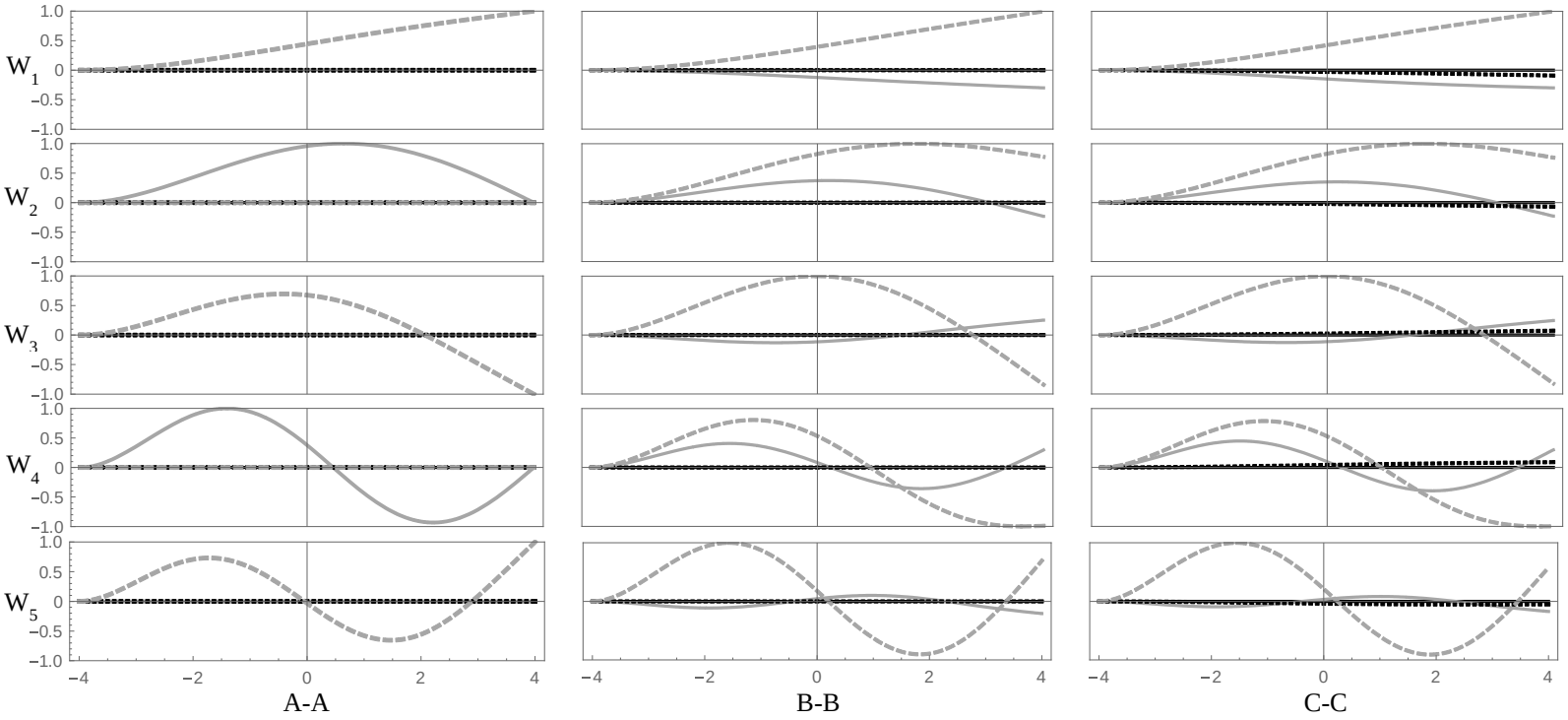
	A		**B**		**C**	
Numer częstości	ω [Hz]		ω [Hz]		ω [Hz]	
	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF
1	5,41	3,56	4,40	2,73	3,72	2,44
2	6,80	6,79	7,33	7,29	7,47	7,45
3	17,73	15,34	15,21	14,54	8,61	8,55
4	23,84	24,99	23,23	24,52	25,09	25,95
5	27,30	27,01	29,30	28,35	28,28	28,47
6	43,99	47,12	40,60	42,89	51,79	49,13
7	61,30	59,79	59,59	60,45	54,39	58,75
8	70,22	72,01	71,56	71,09	63,05	66,73
9	104,33	104,00	97,52	100,98	89,85	91,75
10	108,69	104,52	111,03	106,62	108,46	104,86

Tabela 6.11. Częstości własne dla belki npC – schemat statyczny (S-P), $\theta(-a)=0,\ \theta(a)\neq 0$

	A		**B**		**C**	
Numer częstości	ω [Hz]		ω [Hz]		ω [Hz]	
	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF
1	7,86	6,67	5,56	5,62	6,59	7,17
2	10,46	10,36	12,11	12,13	12,50	13,64
3	19,07	19,63	17,49	17,69	16,57	15,87
4	30,42	29,81	31,23	31,26	31,13	29,86
5	43,09	43,67	40,57	41,13	40,22	39,27
6	53,96	49,51	53,92	53,93	54,68	55,48
7	61,47	59,36	63,74	63,80	63,61	61,69
8	79,42	79,73	75,57	76,45	76,17	74,65
9	103,63	98,23	107,06	107,08	107,11	103,29
10	125,51	125,14	121,17	121,68	118,94	114,99

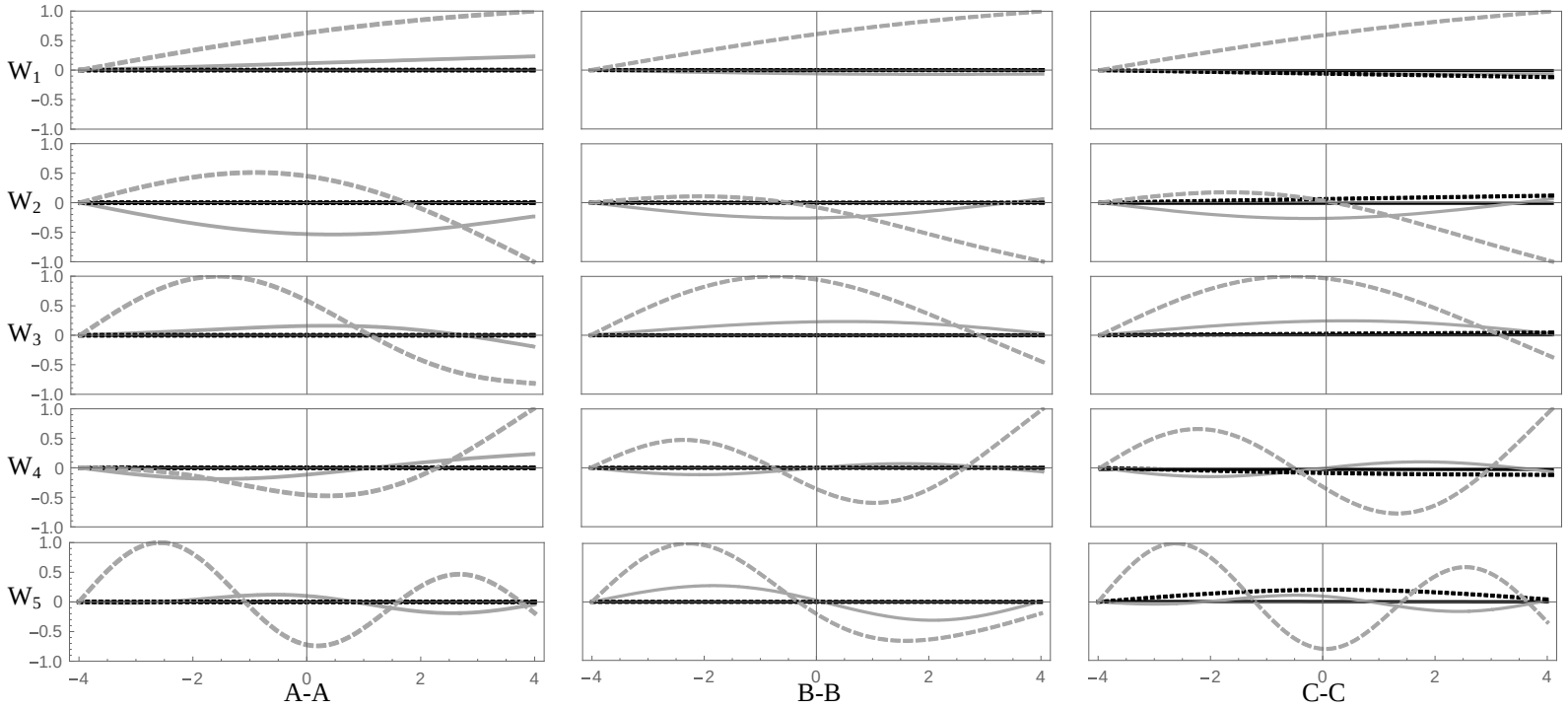
Tabela 6.12. Częstości własne dla belki npC – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a)=0,\ \theta(a)\neq 0$

	A		**B**		**C**	
Numer częstości	ω [Hz]		ω [Hz]		ω [Hz]	
	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF	Praca	MES 7DOF
1	2,98	2,94	1,78	1,77	1,76	1,76
2	5,66	5,63	6,71	6,64	6,76	6,75
3	13,52	14,03	12,15	12,32	11,16	10,72
4	23,17	22,91	23,40	23,95	23,26	22,44
5	32,78	31,61	31,55	31,17	30,57	31,40
6	36,23	36,03	34,91	33,30	35,72	36,83
7	51,38	50,23	53,46	53,06	53,35	51,90
8	68,26	68,66	63,81	64,10	59,85	62,91
9	90,41	87,10	93,76	91,71	92,93	86,52
10	111,42	111,32	102,47	105,92	94,54	98,69



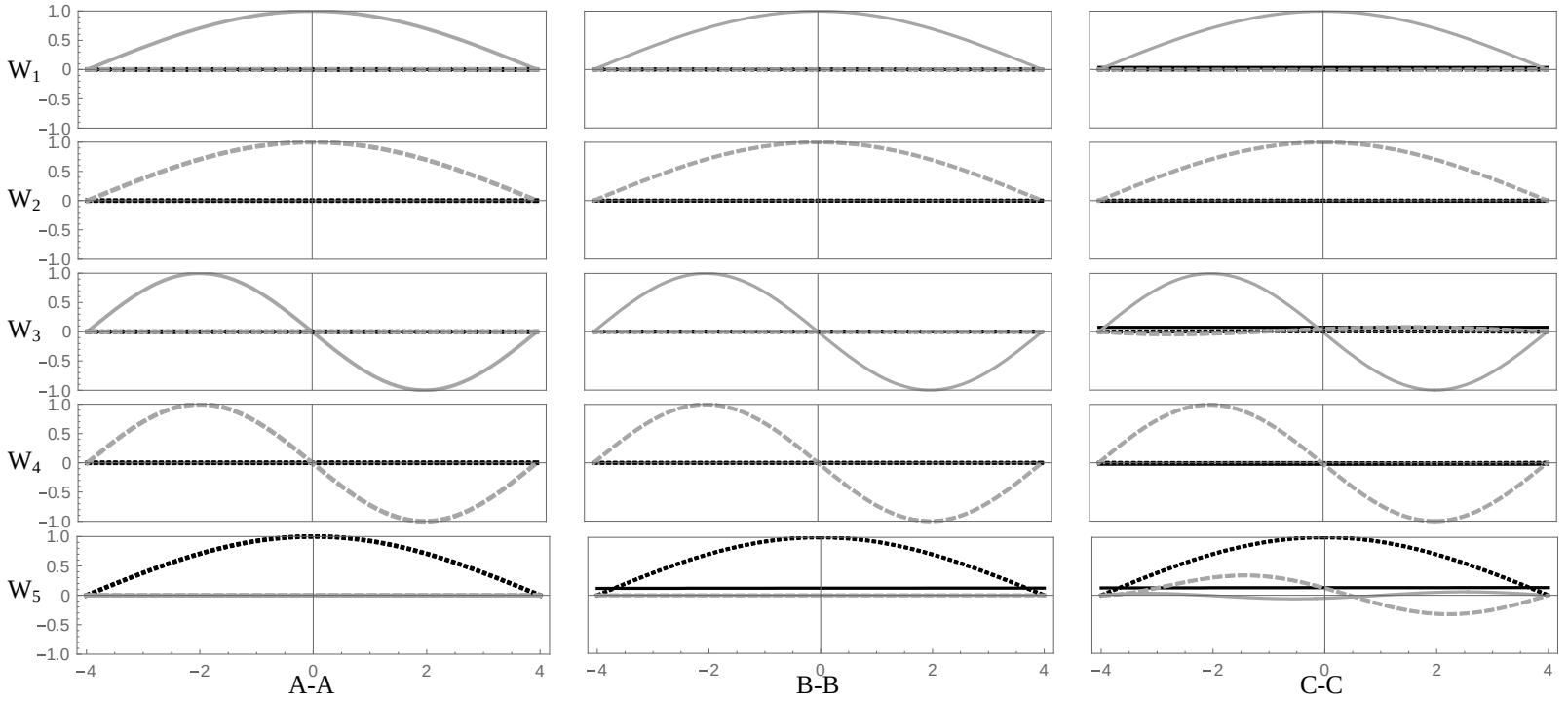
Rys. 6.5. Formy własne dla belki I o schemacie (S-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)\neq 0$, dla punktów podparcia A-A, B-B, C-C

(u_{ox} u_y, u_z, θ)



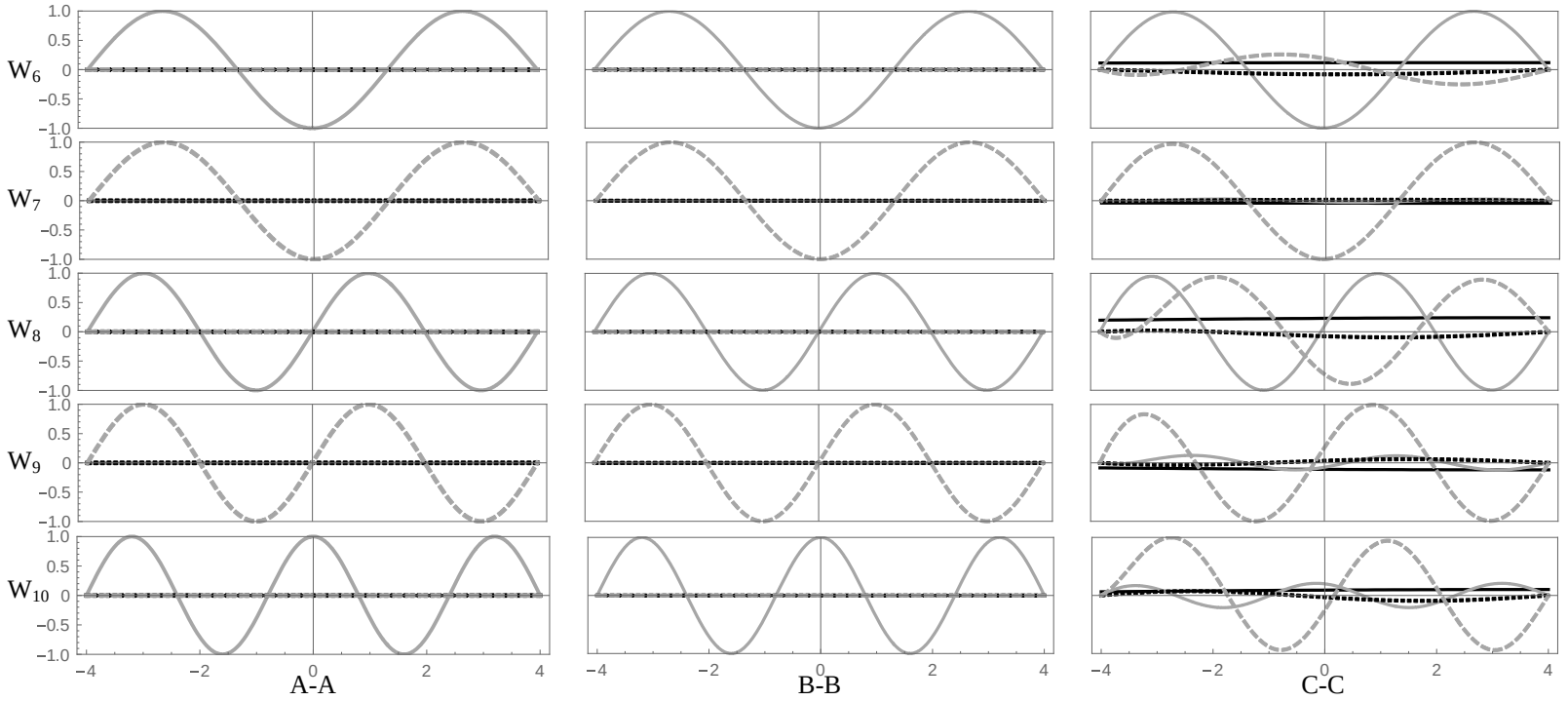
Rys. 6.6. Formy własne dla belki pI o schemacie (P-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)\neq 0$, dla punktów podparcia A-A, B-B, C-C

(—— u_{ox} ——— u_y, ····· u_z, - - - - θ)



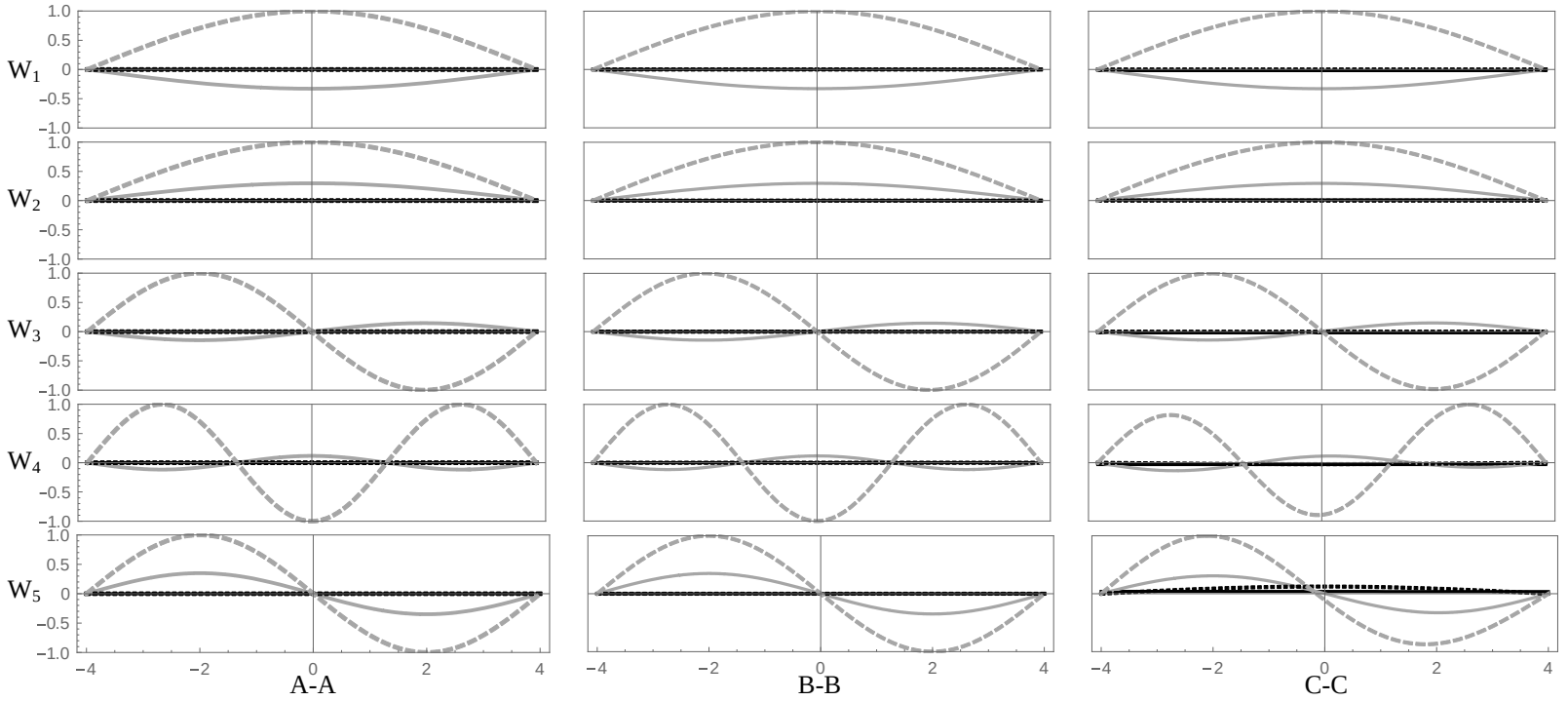
Rys. 6.7. Formy własne od 1 do 5 dla belki I o schemacie (P-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)=0$, dla punktów podparcia A-A, B-B, C-C

(—— u_{ox} ——— u_y, ····· u_z, - - - - θ)



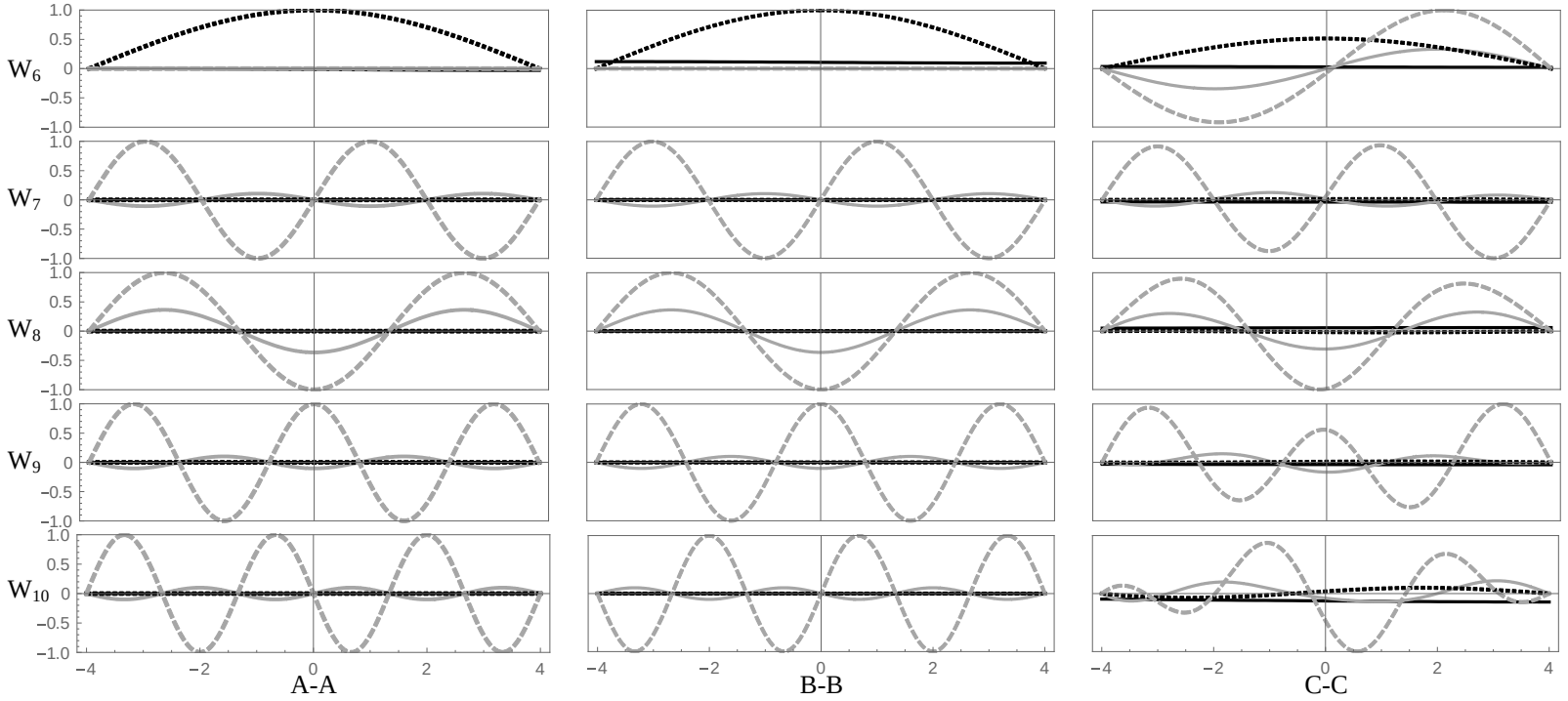
Rys. 6.8. Formy własne od 6 do 10 dla belki I o schemacie (P-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)=0$, dla punktów podparcia A-A, B-B, C-C

(—— u_{ox} ——— u_y, ····· u_z, - - - - θ)



Rys. 6.9. Formy własne od 1 do 5 dla belki pI o schemacie (P-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)=0$, dla punktów podparcia A-A, B-B, C-C

(—— u_{ox} ——— u_y, ····· u_z, - - - - θ)



Rys. 6.10. Formy własne od 6 do 10 dla belki pI o schemacie (P-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)=0$, dla punktów podparcia A-A, B-B, C-C

(—— u_{ox} ——— u_y, ····· u_z, - - - - θ)

W przypadku stasowania do rozwiązań metod aproksymacyjnych, ważnym elementem analizy są testy zbieżności. W tym celu dla wybranych spośród, opisanych wcześniej przykładów, wyznaczono rozwiązania stosując do aproksymacji różne wielkości baz aproksymacyjnych. Poszukiwane funkcje przybliżano dziesięcio-, piętnasto-, dwudziesto- i dwudziestopięcio-wyrazowymi szeregami. W przeprowadzonych testach analizowano belki podparte w punktach B-B. Wyniki badań dla belek pC i nwC przedstawiono w Tabelach 6.13. – 6.16.. W przypadku belek pC i nwC zbadano również, który z wielomianów (wielomiany Czebyszewa I i II rodzaju czy też wielomiany Lagrange'a) użyte do aproksymacji dają lepsze wyniki dla ograniczonej („nielicznej”) bazy aproksymacyjnej. We wszystkich tabelach dodatkowe oznaczenie „* ” wskazuje, że wartość w komórce jest częścią rzeczywistą zespolonego rozwiązania. Część urojona częstotliwości była znacznie mniejsza niż część rzeczywista otrzymanego rozwiązania. Powtarzanie się częstotliwości nie oznacza, że obliczona częstotliwość drgań własnych jest częstotliwością podwójną, ale wynika z faktu, że w rozwiązaniach pojawiają się dwie sprzężone wartości zespolone. Wraz ze wzrostem rozmiaru bazy aproksymacyjnej, wartości zespolone pojawiają się na coraz bardziej odległych pozycjach.

Tabela 6.13. Częstości własne dla belki pC – schemat statyczny (S-P), $\theta(-a)=0,\ \theta(a)\neq 0$, dla różnej wielkości bazy aproksymacyjnej

Rozmiar bazy		**d=10**			**d=15**			**d=20**			**d=25**		
Typ wielomianów aproks.		$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$
Częstości własne [Hz]	1	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95	2,95
	2	11,16	11,17	11,17	11,13	11,13	11,13	11,13	11,13	11,13	11,13	11,13	11,13
	3	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61	15,61
	4	28,46	28,57	28,68	27,89	27,89	27,89	27,89	27,89	27,89	27,89	27,89	27,89
	5	46,57*	46,14*	45,73*	46,41	46,41	46,41	46,41	46,41	46,41	46,41	46,41	46,41
	6	46,57*	46,14*	45,73*	49,53	49,53	49,53	49,53	49,53	49,53	49,53	49,53	49,53
	7	49,53	49,53	49,52	54,35	54,36	54,37	54,32	54,32	54,32	54,32	54,32	54,32
	8	83,31	88,84	93,82*	86,16	85,81	85,43	87,52	87,52	87,52	87,52	87,52	87,52
	9	108,71	102,96	93,82*	102,56	102,56	102,56	102,56	102,56	102,56	102,56	102,56	102,56
	10	119,91	111,81	116,41	126,45	125,96	125,58	129,17	129,14	129,10	129,25	129,25	129,25

Tabela 6.14. Częstości własne dla belki pC – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a)=0,\ \theta(a)\neq 0$, dla różnej wielkości bazy aproksymacyjnej

Rozmiar bazy		**d=10**			**d=15**			**d=20**			**d=25**		
Typ wielomianów aproks.		$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$
Częstości własne [Hz]	1	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74
	2	8,19	8,19	8,19	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18	8,18
	3	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45	10,45
	4	23,10	23,17	23,23	22,72	22,72	22,72	22,72	22,72	22,72	22,72	22,72	22,72
	5	30,43	30,50	30,58	30,12	30,12	30,12	30,12	30,12	30,12	30,12	30,12	30,12
	6	39,26	39,25	39,24	39,29	39,29	39,29	39,29	39,29	39,29	39,29	39,29	39,29
	7	42,74	42,17	41,59	46,65	46,66	46,67	46,63	46,63	46,63	46,63	46,63	46,63
	8	78,79*	77,31*	76,13*	76,66	76,55	76,45	77,07	77,07	77,07	77,07	77,07	77,07
	9	78,79*	77,31*	76,13*	87,27	87,27	87,26	87,29	87,29	87,29	87,29	87,29	87,29
	10	92,27	94,33	96,98	107,87	107,54	107,14	108,68	108,68	108,68	108,68	108,68	108,68

Tabela 6.15. Częstości własne dla belki nwC – schemat statyczny (S-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)\neq 0$, dla różnej wielkości bazy aproksymacyjnej

Rozmiar bazy		**d=10**			**d=15**			**d=20**			**d=25**		
Typ wielomianów aproks.		$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$
Częstości własne [Hz]	1	9,47	9,57	9,65	7,30	7,40	7,50	6,60	6,62	6,64	6,55	6,56	6,56
	2	11,34	11,31	11,29	11,58	11,58	11,57	11,61	11,61	11,61	11,62	11,62	11,62
	3	27,71	27,93	28,11	21,70	21,91	22,12	20,42	20,44	20,47	20,34	20,34	20,34
	4	33,68	33,69	33,69	33,49	33,49	33,50	33,46	33,46	33,46	33,46	33,46	33,46
	5	48,68	49,28	49,80	41,87	41,99	42,11	41,20	41,22	41,23	41,16	41,16	41,16
	6	61,94	62,65	63,29	57,25	57,31	57,36	56,91	56,92	56,93	56,88	56,88	56,88
	7	77,76*	77,41*	77,06*	70,67	70,67	70,66	70,66	70,66	70,66	70,66	70,66	70,66
	8	77,76*	77,41*	77,06*	85,91	86,20	86,49	84,31	84,35	84,38	84,20	84,21	84,21
	9	111,37	110,52	110,03	117,03	117,08	117,14	116,83	116,83	116,83	116,82	116,82	116,82
	10	121,70	126,23	139,03*	132,25	132,25	132,23	131,94	131,97	131,99	131,86	131,87	131,87

Tabela 6.16. Częstości własne dla belki nwC – schemat statyczny (P-P), $\theta(-a)=0$, $\theta(a)\neq 0$, dla różnej wielkości bazy aproksymacyjnej

7		**d=10**			**d=15**			**d=20**			**d=25**		
Typ wielomianów aproks.		$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$	$\lambda=0$	$\lambda=1/2$	$\lambda=1$
Częstości własne [Hz]	1	6,05	6,11	6,16	4,84	4,90	4,96	4,40	4,41	4,42	4,36	4,36	4,36
	2	7,08	7,06	7,05	7,29	7,29	7,28	7,33	7,33	7,33	7,33	7,33	7,33
	3	21,68	21,76	21,82	16,47	16,68	16,88	15,21	15,24	15,26	15,13	15,13	15,14
	4	24,66	24,91	25,13	23,23	23,24	23,24	23,23	23,23	23,23	23,24	23,24	23,24
	5	30,18	30,34	30,50	29,32	29,33	29,33	29,30	29,30	29,30	29,30	29,30	29,30
	6	50,22	51,01	51,75	41,71	41,89	42,07	40,60	40,62	40,64	40,52	40,52	40,52
	7	61,97	63,24	65,88	59,61	59,62	59,62	59,59	59,59	59,59	59,59	59,59	59,59
	8	77,44	75,39	71,41	72,93	73,20	73,45	71,56	71,59	71,62	71,48	71,48	71,48
	9	98,11	98,41	98,54	97,49	97,49	97,48	97,52	97,52	97,52	97,52	97,52	97,52
	10	114,19*	115,15*	114,82*	109,66	109,69	109,73	111,03	109,60	109,60	109,60	109,60	109,60

6.4. Analiza wyników numerycznych

Analiza wyników pokazuje, że zmiana położenia punktu podparcia w obrębie tego samego „przekroju podparcia" ma istotny wpływ na drgania własne układu. Względne różnice pomiędzy rozwiązaniami (dla poszczególnych typów belek) dla belek podpartych w punktach B-B i C-C oraz rozwiązaniami dla belki podpartej w punktach A-A (kombinacja referencyjna punktów) wynoszą:

- dla belek z warunkami $\theta(-a) = 0,\ \theta(a) \neq 0$

  belka I - schemat S-P: $-39,2\% \div 17,7\%$; schemat P-P: $-40,2\% \div 23,5\%$;
  belka pI - schemat S-P: $-37,8\% \div 40,8\%$; schemat P-P: $-37,5\% \div 46,6\%$;
  belka pC - schemat S-P: $-30,4\% \div 43,9\%$; schemat P-P: $-39,5\% \div 45,5\%$;
  belka nwC - schemat S-P: $-16,6\% \div 26,9\%$; schemat P-P: $-51,4\% \div 17,7\%$;
  belka npC - schemat S-P: $-29,3\% \div 19,5\%$; schemat P-P: $-40,9\% \div 19,4\%$;

- dla belek z warunkami $\theta(-a) = 0,\ \theta(a) = 0$

  belka I - schemat P-P: $-8,1\% \div 0,0\%$;
  belka pI - schemat P-P: $-8,1\% \div 0,0\%$.

Różnice są największe dla początkowych częstotliwości własnych. Bardziej szczegółowa analiza pokazuje, że największe zmiany częstotliwości zachodzą w formach, w których przeważa skręcanie (np. w formach odpowiadających początkowym częstościom własnym). Efekt ten jest mniejszy w formach, w których przeważa zginanie.

Wyniki uzyskane dla belek I i pI pokazują, że gdy obrót przekroju jest możliwy w co najmniej jednym przekroju podpory, efekty związane ze zmianą punktu podparcia (w obrębie tego samego przekroju) pojawiają się już w początkowych postaciach własnych. Natomiast gdy obrót jest niemożliwy w obu przekrojach, efekty związane ze zmianą punktu podparcia pojawiają się tylko w dalszych częstotliwościach własnych. Efekty wynikają z mimośrodowego działania podłużnych sił bezwładności (działających wzdłuż osi x) względem punktu podparcia w przekroju.

Biorąc pod uwagę wyniki przeprowadzonych testów zbieżności, można stwierdzić, że wystarczająco dokładne wyniki uzyskuje się już przy zastosowaniu 20-elementowej bazy aproksymacyjnej. W przypadku mniej „skomplikowanych" belek, np. belek pryzmatycznych, wystarczająco dokładny wynik uzyskuje się stosując bazy 15-elementowe. Gdy do

aproksymacji używa się 10 wyrazów szeregu, niedopuszczalne wartości zespolone pojawiają się w rozwiązaniach zbyt wcześnie (w obrębie pierwszych 10 częstotliwości własnych).

6.5. Rozwiązanie analityczne zagadnienia własnego dla drgań skrętnych

W przypadku belki pryzmatycznej bisymetrycznej ($C_y = C_z = 0$) równania opisujące zagadnienie własne separują się. Ponieważ równania opisujące drgania podłużne i giętne belki Eulera są powszechnie znane, ich opis w tym miejscu pominięto. Rozważane jest tylko równanie opisujące drgania skrętne belki. Równanie wyraża się wzorem

$$E'I_\omega \theta_{,xxxx} - GI_s \theta_{,xx} - \omega^2 \left(\rho I_0 \theta - \rho I_\omega \theta_{,xx}\right) = 0 . \tag{6.9}$$

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\theta(x) = C_1 \sin(\alpha l) + C_2 \cos(\alpha l) + C_3 \sinh(\beta l) + C_4 \cosh(\beta l), \tag{6.10}$$

gdzie:

$$\alpha = \sqrt{\frac{-\left(\mathrm{GI_s} - \rho \mathrm{I}_\omega \omega^2\right) + \sqrt{4\mathrm{E'I}_\omega \rho \mathrm{I}_0 \omega^2 + \left(\mathrm{GI_s} - \rho \mathrm{I}_\omega \omega^2\right)^2}}{2\mathrm{E'I}_\omega}},$$
$$\beta = \sqrt{\frac{\left(\mathrm{GI_s} - \rho \mathrm{I}_\omega \omega^2\right) + \sqrt{4\mathrm{E'I}_\omega \rho \mathrm{I}_0 \omega^2 + \left(\mathrm{GI_s} - \rho \mathrm{I}_\omega \omega^2\right)^2}}{2\mathrm{E'I}_\omega}}, \tag{6.11}$$

a l jest długością belki.

Po uwzględnieniu warunków brzegowych, które dla rozważanych warunków podparcia określają wzory

- podparcie widełkowe $\theta = 0,\ \theta_{,xx} = 0,$
- sztywne zamocowanie $\theta = 0,\ \theta_{,x} = 0,$
- podparcie umożliwiające swobodny obrót

$$\theta_{,xx} = 0, \quad GI_s \theta_{,x} - E'I_\omega \theta_{,xxx} - \omega^2 \rho I_\omega \theta_{,x} = 0$$

i dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy rozwiązania analizowanych problemów. Rozwiązania mają następującą postać:

- dla belki zamocowanej na jednym końcu i swobodnej na drugim końcu równanie pozwalające wyznaczyć częstotliwości własne przyjmuje postać

$$\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2\beta^2}\cos(\alpha l)\cosh(\beta l)-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}\sin(\alpha l)\sinh(\beta l)+2=0\,, \tag{6.12}$$

a funkcja opisująca jej formy własne określona jest wzorem

$$\begin{aligned}\theta(x)=\frac{\alpha\beta\sinh(\beta l)-\beta^2\sin(\alpha l)}{\alpha^2\cosh(\beta l)+\beta^2\cos(\alpha l)}\sin(\alpha x)-\cos(\alpha x)\\ -\frac{\alpha^2\sinh(\beta l)-\alpha\beta\sin(\alpha l)}{\alpha^2\cosh(\beta l)+\beta^2\cos(\alpha l)}\sinh(\beta x)+\cosh(\beta x),\end{aligned} \tag{6.13}$$

- dla belki podpartej widełkowo na jednym końcu i swobodnej (w zakresie obrotów) na drugim końcu, równanie pozwalające na obliczenie jej częstotliwości własnych oraz funkcja opisująca jej formy własne przyjmuje postać

$$\beta^3\tanh(\beta l)-\alpha^3\tan(\alpha l)=0\,, \tag{6.14}$$

$$\theta(x)=\sin(\alpha x)+\frac{\beta\cos(\alpha l)}{\alpha\cosh(\beta l)}\sinh(\beta x)\,. \tag{6.15}$$

Do wyprowadzenia powyższych równań został wykorzystany program Mathematica 12 [122]. Podstawiając $\rho \mathrm{I}_\omega = 0$ do wyprowadzonych równań (6.12) – (6.15) otrzymujemy równania i funkcje będące rozwiązaniem problemu drgań własnych opisanego równaniem

$$E'I_\omega\theta_{,xxxx}-GI_s\theta_{,xx}-\omega^2\rho I_0\theta=0\,. \tag{6.16}$$

Wyprowadzone w ten sposób wzory opisują rozwiązanie problemu drgań własnych (6.16) są tożsame z rozwiązaniami problemu drgań własnych przedstawionymi przez Gere'a w pracy [30].

6.6. Wnioski

Wykazano, że zmiana położenia punktów podparcia w obrębie tego samego „przekroju podporowego” ma istotny wpływ na wartości częstości własnych analizowanych układów. Efekt ten jest szczególnie widoczny w przypadku częstotliwości własnych związanych z postaciami własnymi, w których dominuje skręcanie belki. Świadomość tego faktu jest o tyle ważna, że prawidłowe (odpowiadające rzeczywistości) definiowanie

warunków brzegowych w rzeczywistych układach cienkościennych nastręczało i nadal nastręcza trudności. Autor zwraca uwagę, że we wszystkich znanych mu opracowaniach dotyczących teorii układów cienkościennych nie przeprowadza się pogłębionej analizy związanej z określaniem warunków podparcia i ich wpływu na zachowanie się badanej konstrukcji. Na przykład, gdy rozpatrywana jest tam prosta podpora, automatycznie przyjmuje się, że przemieszczenia są równe zeru w punktach, w których zdefiniowane są przemieszczenia opisujące analizowany model. W większości przypadków są to przemieszczenia środka ciężkości lub ścinania i np. w przypadku przekroju ceowego podparcie dotyczy punktu leżącego poza obrysem przekroju.

Jeśli chodzi o efektywność stosowanych do aproksymacji, poszczególnych rodzajów wielomianów, stwierdzono, że nawet w przypadku ograniczonej (małej) bazy aproksymacji różnice między wartościami rozwiązań otrzymanych dla trzech rodzajów wielomianów były w rozpatrywanych przypadkach niewielkie. Analizy wykazały również, że wystarczająco dokładne wyniki w rozpatrywanych przypadkach uzyskano już dla 20-elementowej bazy aproksymacyjnej (zastosowanej dla każdej z czterech poszukiwanych funkcji). Dobra zgodność wyników uzyskanych za pomocą prezentowanej w pracy metody z wynikami uzyskanymi za pomocą MES (oprogramowanie SOFiSTiK) potwierdza poprawność rozwiązań wyprowadzonych równań i metody stosowanej do ich rozwiązania.

7. Analiza wpływu „lekkiego” zakrzywienia osi pręta cienkościennego na odpowiedź dynamiczną układu

7.1. Wprowadzenie

Opisany we wcześniejszych rozdziałach model oraz przedstawioną metodę rozwiązywania równań zastosowano do analizy wpływu „niewielkiego” zakrzywienia osi pręta cienkościennego na jego częstości i formy własne. Przy czym przez określenie „niewielkie” rozumiemy takie zakrzywienie pręta, przy którym do opisu pręta nie jest stosowana teoria prętów zakrzywionych (taka jak dla łuków, czy dźwigarów zakrzywionych w planie), a stosuje się do jego opisu klasyczną teorię belek niepryzmatycznych. Przedmiotem analizy jest niepryzmatyczny pręt cienkościenny o przekroju otwartym i dowolnych parametrach geometrycznych.

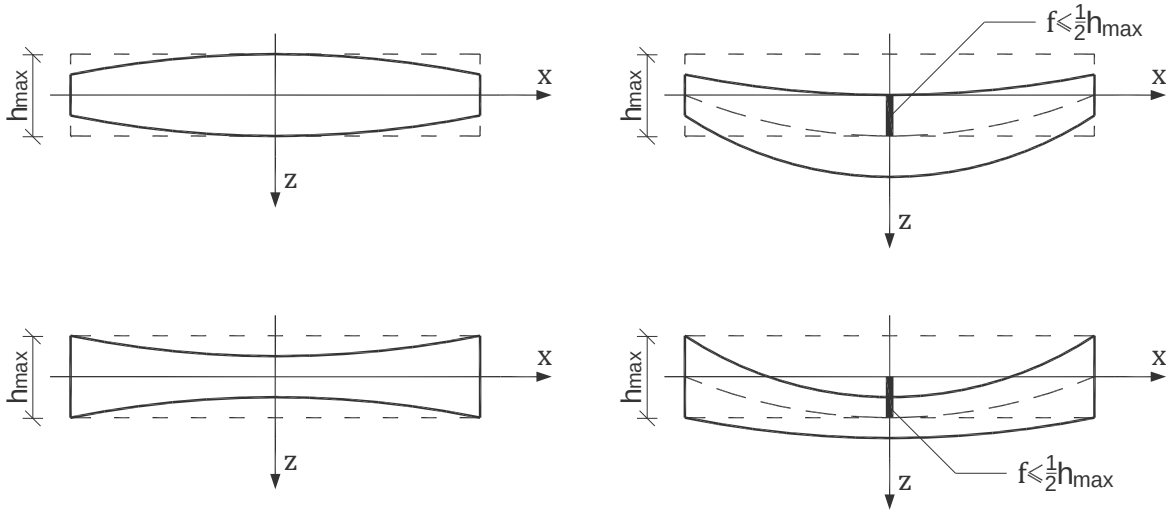
W dalszej części niniejszego rozdziału przedmiotem analizy są drgania własne sześciu belek. Pierwsza z nich to dwuteowa, niepryzmatyczna, bisymetryczna belka o osi prostoliniowej. Kolejne belki powstały w wyniku transformacji tej belki, polegającej na zmianie geometrii jej symetrycznych elementów: pasów i/lub środnika na elementy niesymetryczne. Przy czym w każdym przekroju transformacje te zachowywały podstawowe wymiary elementu (pasa, środnika) takie jak grubość, szerokość, wysokość. Otrzymany zbiór belek podzielono na trzy grupy. Każdą grupę tworzyły dwie belki o jednakowej konfiguracji pasów i identycznych charakterystykach geometrycznych przekrojów. Belki te natomiast różniły się geometrią środnika. Jedna z nich miała środnik symetryczny (belka o osi prostoliniowej w płaszczyźnie środnika), w drugiej środnik był niesymetryczny (belka o osi zakrzywionej w płaszczyźnie środnika).

W dalszej części wykazano, ze nawet „niewielkie” zakrzywienie osi belki ma istotny wpływ na jej częstości i formy własne. Potwierdzeniem poprawności otrzymanych wyników jest porównanie ich z wynikami otrzymanymi z zastosowaniem MES.

7.2. Sformułowanie zagadnienia

Jak już powiedziano we wstępie celem niniejszego rozdziału jest analiza wpływu „niewielkiego” zakrzywienia osi belki na jej częstości i formy własne. Ogólna definicja „niewielkiej” krzywizny jest podana we wstępie. Jednak ze względu na swoją ogólność

wymaga uszczegółowienia. W literaturze (patrz Nowacki [69]) przyjmuje się, że gdy belka o osi krzywoliniowej spełnia warunek $h/R \le 1/10$ (gdzie h/R jest stosunkiem wysokość belki do jej promienia krzywizny) i sposób podparcia nie generuje podłużnych sił rozporowych, to można taką belkę rozwiązywać metodami stosowanymi do belek o osi prostoliniowej. W niniejszej pracy, przystępując do badań nad prezentowanym zagadnieniem, przyjęto bardziej restrykcyjne wymagania dotyczące pojęcia „niewielkie" zakrzywienie belki. Przyjęto mianowicie, że belka ma „niewielkie" zakrzywienie, jeżeli strzałka (f) łuku utworzonego przez zakrzywioną oś belki spełnia warunek $f \le h_{max}/2$, gdzie h_{max} jest maksymalną wysokością przekroju belki (patrz Rys. 7.1.). Uwzględniając fakt, że w prowadzonych rozważaniach wykorzystywany jest model Eulera, a zatem spełniony jest warunek $h_{max}/l = h_{max}/2a \le 1/10$, o belce o „niewielkim" zakrzywieniu mówimy wtedy, gdy spełniony jest warunek $h/R \le 1/25$.



Rys. 7.1. „Niewielkie" zakrzywienie osi belki

7.3. Przykłady numeryczne

W ramach przeprowadzonej w pracy analizy rozwiązano zagadnienie własne i porównano uzyskane wyniki dla zbioru sześciu belek. Elementem bazowym tego zbioru jest dwuteowa, niepryzmatyczna, bisymetryczna, belka o osi prostoliniowej Zarówno wysokość środnika jak również szerokość obu półek opisane są wielomianami drugiego stopnia. Następnie belkę tę poddano transformacjom, polegającym na zmianie geometrii jej symetrycznych elementów: półek i/lub środnika na elementy niesymetryczne. Przy czym, co należy podkreślić, przekształcenia te w każdym przekroju zachowywały podstawowe

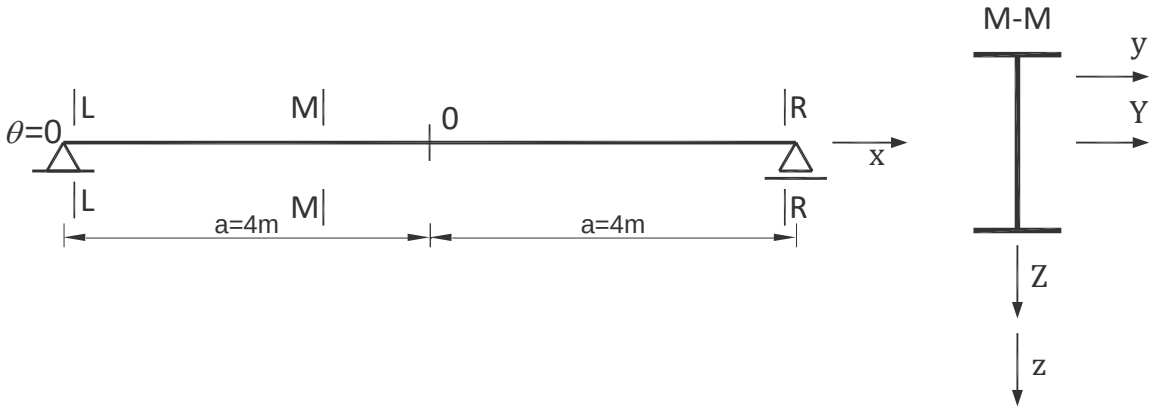
wymiary przekształconego elementu, takie jak grubość, szerokość, wysokość. W ten sposób wygenerowano zbiór sześciu belek. Belki te podzielono na trzy grupy. Każdą grupę tworzyły dwie belki o jednakowej konfiguracji pasów i identycznych charakterystykach geometrycznych przekrojów obliczanych względem centralnych osi przekroju (*Y*, *Z*) tj. osi przechodzących przez środek przekroju równoległych do osi y, z układu odniesienia. Belki te natomiast różniły się geometrią środnika. Jedna z nich miała środnik symetryczny (dalej nazywaną w skrócie belką „prostoliniową"), w drugiej środnik był niesymetryczny (dalej nazywaną w skrócie belką „zakrzywioną"). Określenia belka „prostoliniowa" nie należy traktować dosłownie jako belki o osi prostoliniowej, bo belka taka może mieć zakrzywienie w płaszczyźnie prostopadłej do środnika. Wszystkie analizowane belki miały długość $L = 2a = 8\text{m}$ i były belkami o schemacie statycznym przegubowo–przegubowym (Rys. 7.2), przy czym w przekroju L-L belka miała odebraną możliwość obrotu, natomiast w przekroju R-R mogła się swobodnie obracać. Zatem warunki podparcia belek są określone przez formuły:

- przekrój poprzeczy L-L

$$u_x(-a) = u_y(-a) = u_z(-a) = 0, \quad M_y(-a) = M_z(-a) = 0, \quad \theta(-a) = 0\,, \tag{7.1}$$

- przekrój poprzeczy R-R

$$u_x(a) = u_y(a) = u_z(a) = 0, \quad M_y(a) = M_z(a) = 0, \quad M_x(a) = 0\,. \tag{7.2}$$



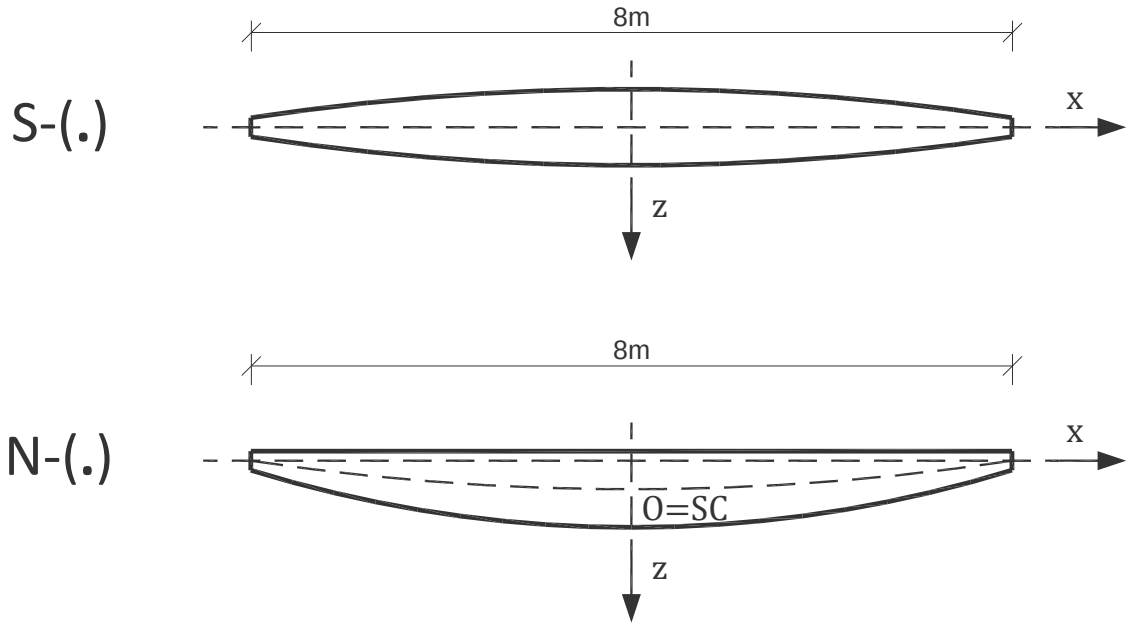
Rys. 7.2. Schemat statyczny belki

Belki miały identyczną masę. Wysokość środnika $h(x)$ oraz szerokość pasów $s(x)$ wszystkich analizowanych belek były opisane funkcjami:

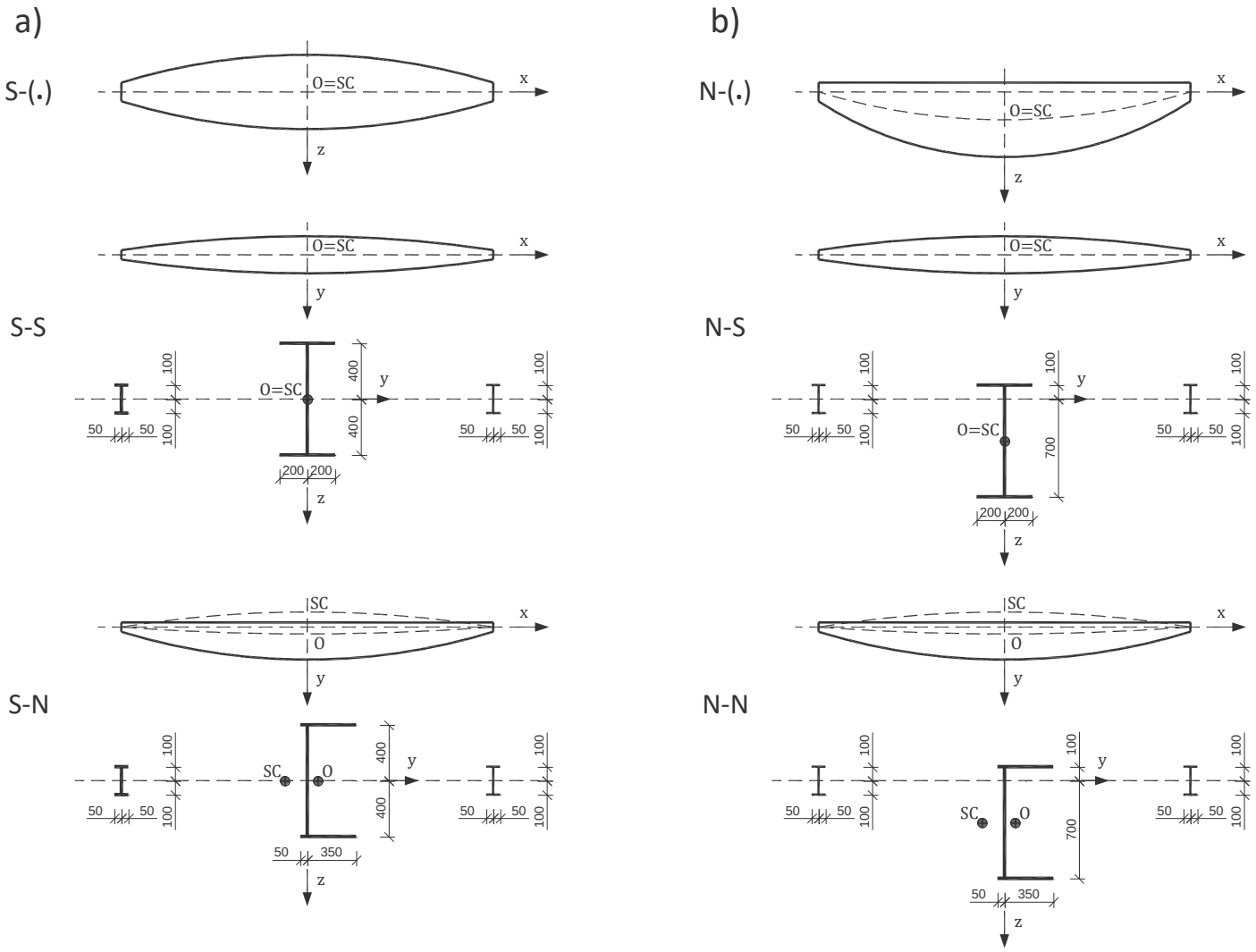
$$h(x) = 0,80 - 0,03750\,x^2,$$
$$s(x) = 0,40 - 0,01875\,x^2. \tag{7.3}$$

Belki te przedstawiono na Rys. 7.3-7.5.. Do oznaczenia poszczególnych belek zastosowano skrót W-F, w którym W opisuje cechę środnika, a F cechę pasów. W i F są „równe": S - w przypadku, gdy elementy te są symetryczne; N - gdy są niesymetryczne oraz dodatkowo, w przypadku pasów, A - gdy pasy są asymetryczne względem płaszczyzny środnika. Charakterystyki geometryczne analizowanych belek (obliczone względem osi centralnych Y, Z) przedstawiono w Tabeli 7.1.. Przyjęte parametry materiałowe belek to: moduł sprężystości $E' = 210\text{GPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, moduł Kirchhoffa $G = 80,77$ GPa i gęstość $\rho = 7850\,\text{kg/ m}^3$.

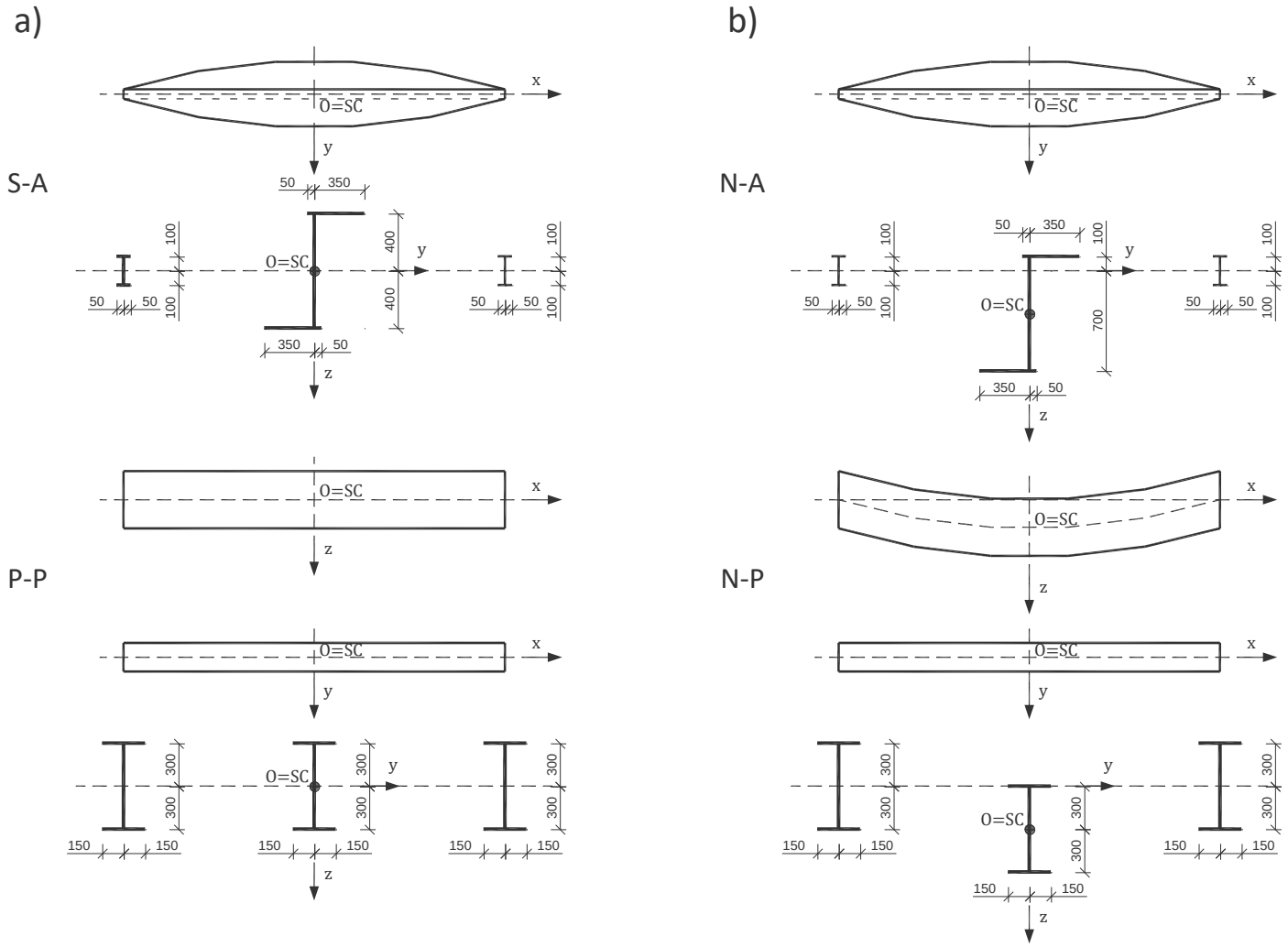
Obliczenia wykonano, stosując do aproksymacji poszukiwanych funkcji 30 wyrazowe szeregi Czebyszew I rodzaju. Porównania wykonano dla następujących par belek: S-S i N-S; S-N i N-N; S-A i N-A. Do obliczeń wykorzystano program Mathematica 12 [122].



Rys. 7.3. Rysunek belek z zachowaniem proporcji wymiarów



Rys. 7.4. Geometria analizowanych belek: a) belki o środniku symetrycznym, b) belki o środniku niesymetrycznym



Rys. 7.5. Geometria analizowanych belek: a) belki o środniku symetrycznym, b) belki o środniku niesymetrycznym

Tabela 7.1. Charakterystyki geometryczne belek (obliczone względem osi centralnych Y, Z)

Belka		S-S	N-S	S-N	N-N	S-A	N-A
A [cm^2]	$x = \mp 4$[m]	40	40	40	40	40	40
	$x = 0$[m]	160	160	160	160	160	160
I_Y [cm^4]	$x = \mp 4$[m]	2 666,7	2 666,7	2 666,7	2 666,7	2 666,7	2 666,7
	$x = 0$[m]	170 666,7	170 666,7	170 666,7	170 666,7	170 666,7	170 666,7
I_Z [cm^4]	$x = \mp 4$[m]	166,7	166,7	166,7	166,7	166,7	166,7
	$x = 0$[m]	10 666,7	10 666,7	19 666,7	19 666,7	28 666,7	28 666,7
I_{YZ} [cm^4]	$x = \mp 4$[m]	0	0	0	0	0	0
	$x = 0$[m]	0	0	0	0	48 000	48 000
I_S [cm^4]	$x = \mp 4$[m]	13,3	13,3	13,3	13,3	13,3	13,3
	$x = 0$[m]	53,3	53,3	53,3	53,3	53,3	53,3
I_ω [cm^6]	$x = \mp 4$[m]	16 666,7	16 666,7	16 666,7	16 666,7	16 666,7	16 666,7
	$x = 0$[m]	17 066 666,7	17 066 666,7	24 266 666,7	24 266 666,7	31 466 666,7	31 466 666,7
I_o [cm^4]	$x = \mp 4$[m]	2 833,3	2 833,3	2 833,3	2 833,3	2 833,3	2 833,3
	$x = 0$[m]	181 333,3	181 333,3	190 333,3	190 333,3	199 333,3	199 333,3

Aby wyeliminować możliwy wpływ czynników, związanych ze zmiennym na długości belki przekrojem, na zmiany częstości własnych i typu form własnych rozwiązano dodatkowy przykład. W przykładzie tym porównano rozwiązanie zagadnienie własnego dla belki pryzmatycznej o przekroju bisymetrycznym (oznaczonej w dalszej części pracy przez skrót P-P) z wynikami otrzymanymi dla belki o niesymetrycznym środniku (skrótowo oznaczonej N-P). W skrótowym oznaczeniu belek zastosowano tę samą konwencję co w poprzednich przykładach. W belce N-P przyjęto identyczną krzywiznę osi jak w belce N-S. Szerokość półek oraz wysokość środnika w obu belkach są identyczne i dobrano je tak, aby masa tych elementów był identyczna jak masa tych elementów w poprzednich przykładach (grubości ścianek nie uległy zmianie). Charakterystyki geometryczne analizowanych belek, obliczone względem osi przechodzących przez środek przekroju i równoległych do osi globalnego układu odniesienia, przyjmowały wartości: $A=120\,\mathrm{cm}^2$, $I_Y=72000\,\mathrm{cm}^4, I_Z=4000\,\mathrm{cm}^4, I_{YZ}=0, I_s=40\,\mathrm{cm}^4, I_\omega=4050000\,\mathrm{cm}^6, I_o=76500\,\mathrm{cm}^4$. Belki te przedstawiono na Rys. 7.5. W tym szczególnym przypadku, równania przemieszczeniowe opisujące drgania własne belki znacznie się upraszczają i w przypadku belki o osi zakrzywionej przyjmują postać

$$E'\left(A^* u_{ox,x}-\boxed{S_y^* u_{z,xx}}\right)_{,x}+\rho\omega^2\left(A' u_{ox}-\boxed{S_y' u_{z,x}}\right)=0\quad , \tag{7.4}$$

$$E'\left(I_z^* u_{y,xx}+\boxed{C_{z,xx} I_z^* \theta}\right)_{,xx}-\rho\omega^2\left(A' u_y+C_z A'\theta-I_z' u_{y,xx}-\boxed{C_{z,x} I_z'\theta_{,x}}\right)=0\quad , \tag{7.5}$$

$$, E'\left(I_y^* u_{z,xx}-\boxed{S_y^* u_{ox,x}}\right)_{,xx}-\rho\omega^2\left(A' u_z-I_y' u_{z,xx}+\boxed{S_y' u_{ox,x}}\right)=0\quad , \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned} &E'\left(\left(I_\omega^*\theta_{,xx}\right)_{,xx}+\boxed{C_{z,xx}^2 I_z^*\theta}+\boxed{C_{z,xx} I_z^* u_{y,xx}}\right)-G\left(I_s\theta_{,x}\right)_{,x}\\ &-\rho\omega^2\left(\boxed{C_{z,x}^2 I_z'\theta}+\left(I_0'+A'C_z^2-\boxed{2S_y' C_z'}\right)\theta-C_z A' u_y+\boxed{C_{z,x} I_z' u_{y,x}}-\left(I_\omega'\theta_{,x}\right)_{,x}\right)=0\quad , \end{aligned} \tag{7.7}$$

gdzie $I_o'=I_y'+I_z'$. Pomijając we wzorach (7.4) – (7.7) wyróżniane składniki $\boxed{(.)}$ otrzymuje się układ równań opisującej drgania belki pryzmatycznej. Widoczne jest, że w układzie równań (7.4) – (7.7) dodatkowe (wyróżnione składniki), które występują w przypadku belki N-P są związane tylko z zakrzywieniem osi belki $(S_y^*,\ S_y')$ i zakrzywieniem osi wyznaczonej przez środki ścinania $(C_z,\ C_{z,x},\ C_{z,xx})$.

Badanie wpływu tytułowego “lekkiego” zakrzywienia belki na drgania własne układu, sprowadza się do porównania rozwiązań dla belki o symetrycznym środniku S-S, S-A i P-P (oś tych belek jest prostoliniowa), z rozwiązaniami dla belki o niesymetrycznym środniku N-S, N-A i N-P (w przypadku tych belek oś jest krzywoliniowa). Analogiczne porównanie wykonano dla belek S-N i N-N. Z tym, że belki te miały „pierwotne” zakrzywienie osi w płaszczyźnie xy, wynikające z niesymetryczności pasów obu belek. W przypadku belki S-N rzut jej osi na płaszczyznę xz jest linią prostą. Natomiast w przypadku belki N-N oś „uzyskuje” dodatkową krzywiznę w płaszczyźnie środnika xz.

Obliczenia przeprowadzono z wykorzystaniem do aproksymacji poszukiwanych funkcji 30-wyrazowych szeregów Czebyszewa I rodzaju. Porównania wykonano dla następujących par belek: S-S i N-S, S-N i N-N, S-A i N-A, P-P i N-P, P-P i N-P. Do obliczeń wykorzystano pakiet Mathematica 12 [122] firmy Wolfram.

7.4. Wyniki numeryczne

Otrzymane wartości częstości własnych i typy odpowiadających im form własnych zestawiono w Tabeli 7.2.. W opisie typu form użyto następujących skrótów, informujących o tym, które ze składowych uogólnionego wektora przemieszczeń są niezerowe:

B_y – w formie własnej składowa $u_y \neq 0$ (zginanie w płaszczyźnie xy),

B_z – w formie własnej składowa $u_z \neq 0$ (zginanie w płaszczyźnie xz),

A – w formie własnej składowa $u_x \neq 0$ (ściskanie – rozciąganie),

T – w formie własnej składowa $\theta \neq 0$ (skręcanie).

Ponadto dodatkową informacją w opisie typu formy jest kolejność występowania powyższych skrótów. Pierwszy skrót odnosi się do składowej największej, ostatni do najmniejszej. I tak np. opis TB_y oznacza, że forma jest formą skrętno-giętną, przy czym skręcanie θ jest większe od zginania w płaszczyźnie xy.

Ze względu na sposób unormowania wektorów własnych wartości uogólnionych przemieszczeń, będących składowymi tych wektorów, są zawarte w przedziale $\langle -1;\ 1\rangle$. W opisie typu form w Tabeli 7.2., opisano tylko te składowe wektorów własnych, których maksymalne na długości pręta, bezwzględne wartość uogólnionych przemieszczeń są większe od $0{,}02$. Składowe, w których wartości uogólnionych przemieszczeń na długości pręta są zawarte w przedziale $\langle -0{,}02;\ 0{,}02\rangle$ potraktowano jako „mało istotne”.

Ze względu na znaczne różnice między wartościami dwóch pierwszych częstotliwości własnych belki N-P, wyznaczonymi proponowaną metodą oraz obliczonymi za pomocą programu SOFiSTiK (patrz Tabela 7.2.) dodatkowo porównano częstości wyznaczone opisaną w pracy metodą, z częstościami obliczonymi przy użyciu programu ABAQUS. Tabela 7.3. pokazuje różnice procentowe między częstotliwościami własnymi porównywanych belek (w danej parze). Różnice są wyrażone wzorem

$$\text{diff} = \left(\omega_S - \omega_N\right)/\omega_S \cdot 100\% \quad , \tag{7.8}$$

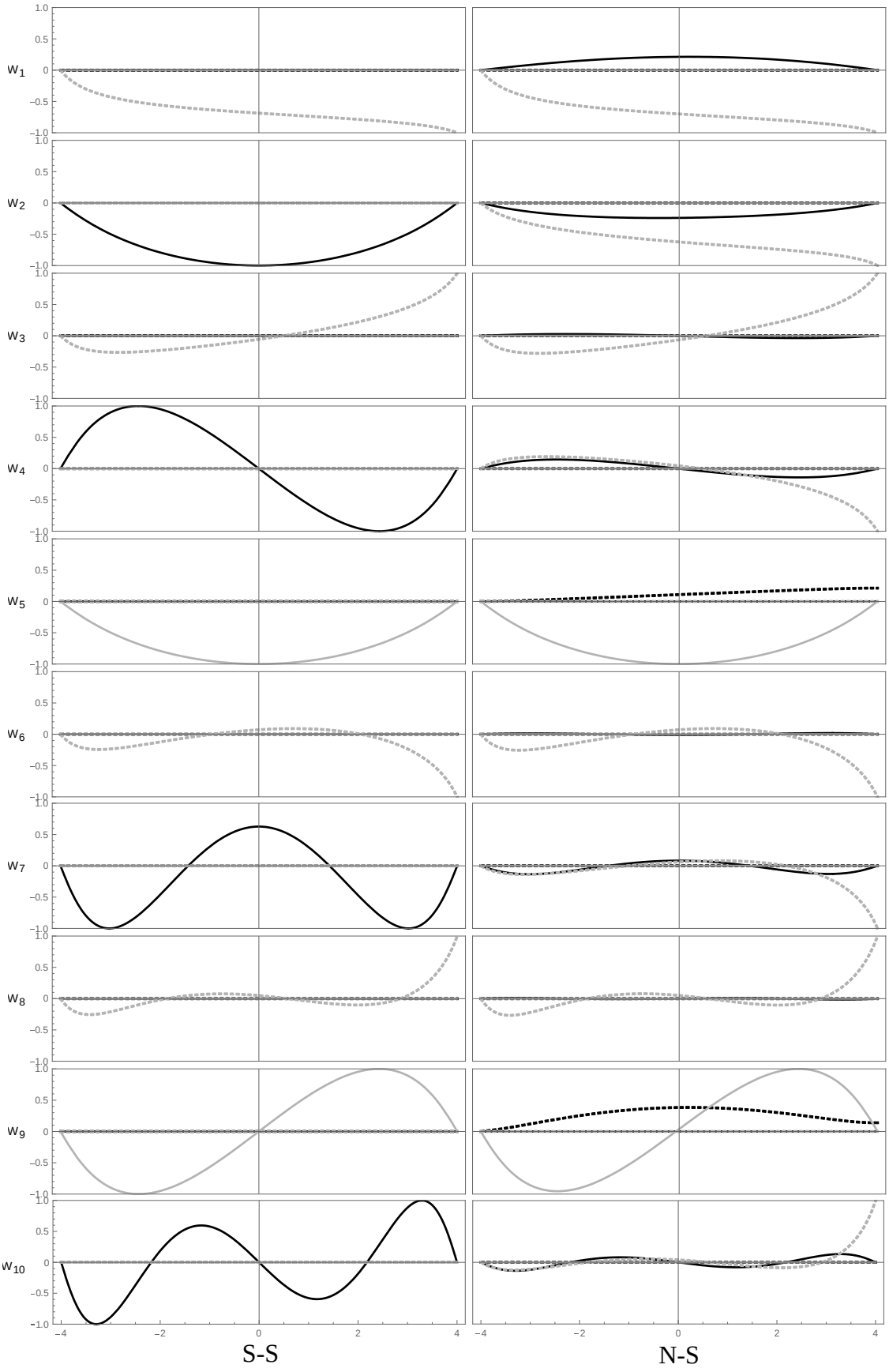
gdzie ω_S, ω_N są odpowiednio częstościami własnymi belki „prostoliniowej" i „zakrzywionej". Wykresy pierwszych 10 form własnych dla par S-S i N-S; S-N i N-N; S-A i N-A oraz P-P i N-P przedstawiono na Rys. 7.6 – Rys. 7.9..

Analizując 10 początkowych częstości i form własnych, można zauważyć, że w każdej porównywanej parze kolejne „odpowiadające" sobie formy własne (tj. formy o tym samym numerze) są w większości formami o innych typach. To znaczy, że jeżeli *i* - ta forma belki o symetrycznym środniku S-(.) jest formą pewnego (jakiegoś) typu , to typ *i* - tej formy własnej belki o niesymetrycznym środniku N-(.) jest zazwyczaj inny.

W przypadku pary S-S i N-S formy własne belki S-S są czystymi formami T, B_y, B_z („czysta forma" to forma, w której występuje tylko jedna niezerowa składowa wektora uogólnionych przemieszczeń, a pozostałe składowe są tożsamościowo równe zeru). Natomiast wśród form własnych belki N-S jedynymi czystymi formami są formy skrętne T. Początkowym, czystym formom własnym belki (S-S) typu skrętnego T, w belce (N-S) „odpowiadają" formy skrętno-giętne TB_y, a formy skrętne T odpowiadające wyższym częstościom własnym, w belce (N-S) pozostają nadal formami typu T. Natomiast czystym formom B_y belki S-S, „odpowiadają" w belce N-S formy skrętno-giętne TB_y, a formom B_z „odpowiadają" formy B_zA.

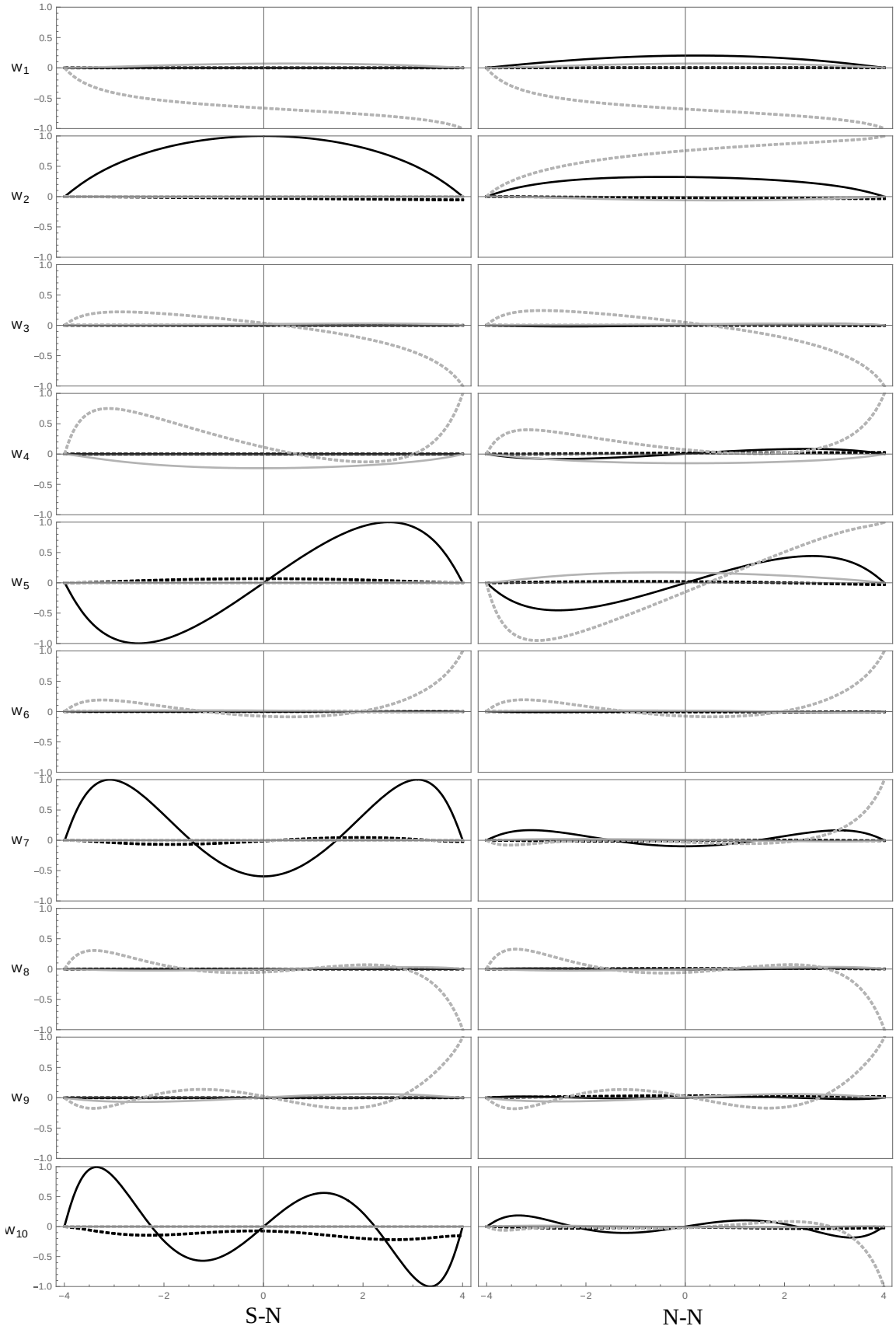
W drugiej parze porównywanych belek S-N i N-N jedynymi czystymi formami są formy skrętne T. Brak innych czystych form własnych wynika z faktu, że belki te (jako belki o niesymetrycznych pasach) są belkami o zakrzywionych w płaszczyźnie *xy* osiach. Oprócz form T w belce S-N generują się formy skrętno-giętne TB_z oraz formy typu B_yA i B_zA.

We wszystkich formach belki N-N (belce o niesymetrycznym środniku) występuje składowa skrętna T i jest w tych formach składową dominującą. W przypadku początkowych form w „miejscu", gdzie w belce S-N występują formy TB_z, w belce N-N generują się formy TB_yB_z, TB_zB_y. Dalsze formy TB_z praktycznie się nie zmieniają.



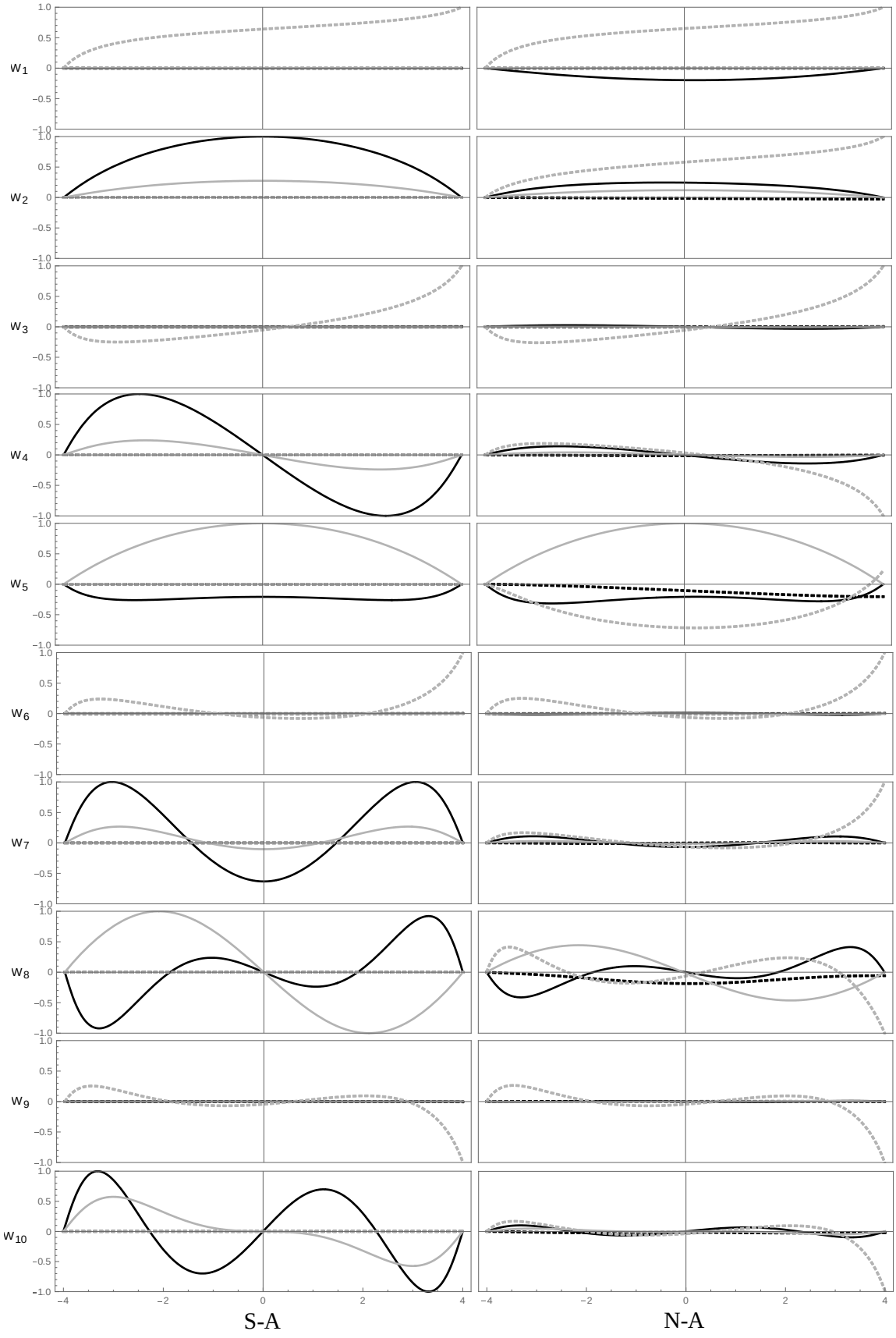
Rys. 7.6. Wykresy form własnych dla belek S-S i N-S

(····· u_{ox} —— u_y, —— u_z, ····· θ)



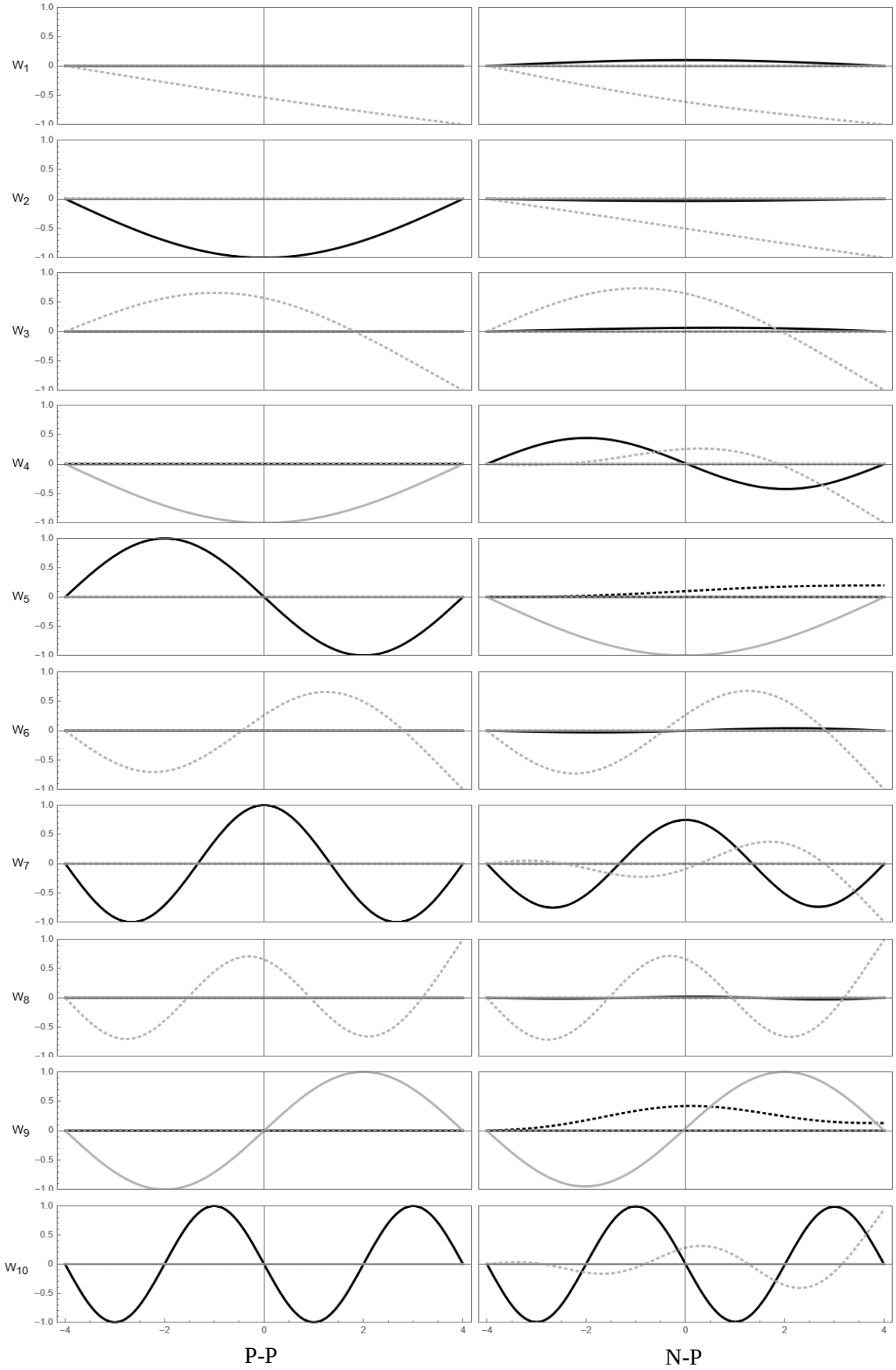
Rys. 7.7. Wykresy form własnych dla belek S-N i N-N

(u_{ox} u_y, u_z, θ)



Rys. 7.8. Wykresy form własnych dla belek S-A i N-A

(····· u_{ox} —— u_y, —— u_z, ····· θ)



Rys. 7.9. Wykresy form własnych dla belek P-P i N-P

(····· u_{ox} —— u_y, —— u_z, ····· θ)

W trzeciej parze belek S-A i N-A, w przypadku belki S-A wszystkie formy własne są czystymi formami skrętnymi T lub formami giętnymi B_yB_z, B_zB_y. Natomiast w belce N-A we wszystkie formach własnych pojawia się składowa skrętna T i jest ona składową dominującą. Wyjątkiem jest 5 forma własna, w której dominuje składowa B_z. W belce N-A w „miejscach", gdzie w belce S-A występowały czyste formy skrętne, pojawiają się formy skrętno-giętne TB_y (dotyczy to początkowych form skrętnych), natomiast dalsze formy skrętne T nie zmieniają się. Formom własnym belki S-A typu B_yB_z odpowiadają w belce N-A formy skrętno-giętne TB_yB_z lub TB_yB_zA, a forma B_zB_y przechodzi w formę B_zTB_yA.

W przypadku ostatniej pary belek P-P i N-P, którą tworzą belka pryzmatyczna i belka o niesymetrycznym środniku, wszystkie formy własne belki P-P są oczywiście formami czystymi. W większości przypadków formom T i B_y belki P-P, „odpowiadają" w belce N-P formy skrętno-giętne typu TB_y, a w przypadku formy 10 typu B_yT. Wyjątkiem jest tutaj forma 8, w której formie skrętnej T odpowiada forma typu TB_z. Natomiast formom B_z „odpowiadają" formy B_zA. Należy tutaj zwrócić uwagę na zmianę kolejności typu form nr 4 i 5 w belce N-P w stosunku do kolejności typu form w belce P-P. W belce pryzmatycznej forma 4 jest typu B_z, a forma 5 jest typu T, natomiast w belce N-P odpowiadające im formy B_zA i TB_y są odpowiednio formami nr 5 i 4. Przestawienie tej kolejności staje się zrozumiałe, jeżeli zwrócimy uwagę na niewielkie różnice wartości częstości własnych nr 4 i 5.

Prawie we wszystkich belkach o środniku N-(.) i N-P, w analizowanym zbiorze 10 form własnych, w których występowała składowa skrętna T, składowa T była dominująca.

W belkach N-S i S-N, w których osie są zakrzywiona odpowiednio w płaszczyźnie xz i xy, nie występują formy giętne B_z, względnie B_y. Zamiast tych form pojawiają się formy, w których drgania giętne sprzęgają się z drganiami podłużnymi tj. formy B_zA, B_yA.

Dodatkowym spostrzeżeniem dotyczącym analizowanych par (S-S i N-S, S-N i N-N, S-A i N-A, P-P i N-P) jest pewna prawidłowość związana ze zmianą wartości częstości własnych. I tak, jeżeli w belkach o symetrycznym środniku S-S, S-N, S-A i P-P częstość własna odpowiadała formie skrętnej T lub giętno-skrętnej TB_z, to „odpowiadająca" tej częstości, częstość własna belki o niesymetrycznym środniku: N-S, N-N, N-A była od tej częstości mniejsza. Analogicznie, wartości częstości własnych belek o symetrycznym środniku odpowiadające formom giętnymi B_y i B_z, w belkach o niesymetrycznym środniku odpowiednio zwiększały się (w przypadku B_y) i zmniejszały się (w przypadku B_z). Należy jednak podkreślić, że zależność ta nie jest ogólną prawidłowością, ponieważ dotyczy tylko pierwszej lub kilku, kolejnych, początkowych częstości odpowiadających danemu typowi formy.

Omawiając otrzymane wyniki należy zwrócić uwagę na ważny fakt, że istotne różnice (>10%) między częstościami drgań własnych belek o symetrycznym środniku S-(.), a odpowiadającymi im częstościami drgań belek o niesymetrycznym środniku N-(.) występują w dwóch pierwszy częstościach. Zmiany te dla pierwszych dwóch częstości własnych, odpowiednio dla kolejnych porównywanych par wynosiły: -15,1%, 29,9%; -14,2%, 26,4%; -13,9%, 24,7% i -22,2%, 20,1%. Zmiany kolejnych częstości (od ω_3 do ω_{10}) były dla: pary S-S i N-S w zakresie -4,7% ÷ 4,1%; pary S-N i N-N w zakresie -3,2% ÷ 4,6% pary S-A i N-A w zakresie -4,6% ÷ 3,7% oraz pary P-P i N-P w zakresie -2,2% ÷ 4,2%.

7.5. Analiza otrzymanych wyników

Wykonana analiza otrzymanych wyników, polegająca na porównaniu rozwiązań zagadnienia własnego dla belki o osi prostoliniowej z rozwiązaniami tego zagadnienia dla „odpowiadających" im belek o osi o „niewielkim" zakrzywieniu, pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

1. Otrzymane wyniki pokazują istotne zmiany ilościowe i jakościowe porównywanych rozwiązaniach. W zakresie częstości własnych znaczne różnice dotyczą początkowych częstości, natomiast w zakresie form własnych istotne zmiany dotyczą wszystkich 10 analizowanych form własnych.
2. Znaczne zmiany częstości w porównywanych parach belek dotyczą dwóch pierwszych częstości własnych. Względne różnice (w odniesieni do wartości wyznaczonych dla belek o symetrycznym środniku S-(.) i P-P) zawarte są w przedziale od 13,9% do 29,9%. Dla dalszych częstości własnych (tj. $\omega_3 \div \omega_{10}$) różnice są znacznie mniejsze i mieszczą się w przedziale od 0,1% do 4,7%.
3. Jakościowe zmiany, które pojawiały się w formach własnych belek o osi o „niewielkim" zakrzywieniu, polegały na wystąpieniu w tych formach sprzężeń drgań. Sprzężenia występowały między drganiami giętnymi B_y lub B_z, a drganiami skrętnymi T. W przypadku zakrzywienia osi belki w płaszczyźnie *xz* występowało sprzężenie drgań skrętnych T z drganiami giętnymi B_y (drganiami prostopadłymi do płaszczyzny zakrzywienia osi). Analogicznie w przypadku zakrzywienia osi belki w płaszczyźnie *xy* w formach własnych pojawiają się sprzężenia między drganiami skrętnymi T i drganiami prostopadłymi do płaszczyzny zakrzywienia osi tj. drganiami B_z. Oprócz sprzężeń giętno-skrętnych w formach własnych pojawiają się sprzężenia między drganiami giętnymi

i podłużnymi. W tym przypadku, jeżeli oś belki jest zakrzywiona w płaszczyźnie xz, to powstaje sprzężona forma B_zA. Analogicznie w przypadku zakrzywienia osi w płaszczyźnie xy generowana jest forma B_yA.

4. Jedynymi czystymi formami własnymi, w przypadku belek o osi zakrzywionej, są formy skrętne T.
5. Prawie we wszystkich formach, w których występuje skręcanie, składowa T jest składową dominującą. Nie jest to, co prawda, efekt bezpośrednio wynikający z zakrzywienia osi belki, a jest on skutkiem małej sztywności układu na skręcania.
6. Wyniki otrzymane dla pary belek P-P i N-P, w których przekrój na całej długości belek był niezmienny, potwierdził że czynnikiem powodującym tak istotne zmiany w rozwiązaniach zagadnienia własnego może być tylko zakrzywienie osi belki (nie wyklucza to oczywiście możliwego wpływu na to zjawisko również zmienności przekroju).

Przedstawione wnioski mają charakter ogólny. Wystąpienie sprzężonych form własnych oraz ich typu można przewidzieć analizując układ równania opisujących zagadnienie własne. Ilustracją takiego „przewidywania" może być układ równań (7.4) – (7.7) opisujący drgania belki N-P. W układzie tym, pierwsze równanie (7.4) i trzecie (7.6) są ze sobą sprzężone poprzez funkcje u_{ox} i u_z, a drugie równanie (7.5) tego układu i czwarte (7.7) są ze sobą sprzężone poprzez funkcje u_y i θ. „Skutkuje" to pojawieniem się formach własnych belki N-P form sprzężonych B_zA i TB_y (B_yT).

Otrzymane rezultaty i wnioski z nich wynikające wskazują na konieczność „ostrożnego" upraszczania analizowanych układów prętowych, uproszczenia polegającego na zastąpieniu w modelu prętów o osi o „niewielkim" zakrzywieniu, prętami o osi prostoliniowej, bo, jak wykazano w pracy, rozwiązanie takiego modelu w zakresie częstości i form własnych, istotnie różni się od rozwiązania dla pręta o „niewielkim" zakrzywieniu. Tym bardziej nie jest wskazana zamiana takiej belki (belki o osi zakrzywionej), belką pryzmatyczną.

Tabela 7.2. Częstości własne i typy odpowiadających im form własnych

Belka		S-S		N-S		S-N		N-N		S-A		N-A		P-P		N-P	
Numer częstości		ω [Hz]	typ	ω[Hz]	typ	ω[Hz]	typ	ω[Hz]	typ	ω[Hz]	typ	ω[Hz]	typ	ω[Hz]	typ	ω[Hz]	typ
1	Praca	2,32	T	1,97	TB_y	2,26	TB_z	1,94	TB_yB_z	2,31	T	1,99	TB_y	2,48	T	1,93	TB_y
	MES	2,35		1,82		2,26		1,79		2,28		1,8		2,48		1,34 1,92[A]	
2	Praca	8,57	B_y	11,13	TB_y	11,08	B_yA	14,01	TB_yB_zA	9,61	B_yB_z	11,98	TB_yB_zA	7,77	B_y	9,33	TB_y
	MES	8,57		10,55		11,02		13,04		9,59		11,52		7,76		12,21 7,94[A]	
3	Praca	19,75	T	18,83	TB_y	19,28	TB_z	18,88	TB_zB_y	22,18	T	21,17	TB_y	16,28	T	16,64	TB_y
	MES	19,54		17,75		19,26		18,17		22,52		20,37		16,31		16,96 16,02[A]	
4	Praca	28,71	B_y	29,88	TB_y	33,78	TB_z	33,05	TB_zB_y	31,61	B_yB_z	32,77	TB_yB_z	30,95	B_z	30,56	TB_y
	MES	28,69		31,23		33,02		33		31,48		32,84		30,21		29,86	
5	Praca	34,25	B_z	33,84	B_zA	35,6	B_yA	37,23	TB_yB_z	34,97	B_zB_y	35,29	B_zTB_yA	31,06	B_y	31,03	B_zA
	MES	32,68		32,44		35,24		36,93		33,29		34,46		30,88		33,82	
6	Praca	54,72	T	53,86	T	59,96	T	58,87	T	65,4	T	64,26	T	48,21	T	48,37	TB_y
	MES	64,83		59,67		70,32		69,08		71,9		69,78		48,4		46,74	
7	Praca	65,38	B_y	65,78	TB_y	81,65	B_zA	81,37	TB_y	72,93	B_yB_z	73,61	TB_yB_z	69,78	B_y	69,32	TB_y
	MES	64,93		71,43		79,66		81,41		80,65		84,83		68,89		71,22	
8	Praca	102,93	T	101,87	T	94,79	TB_z	94,33	TB_z	111,04	B_zB_y	108,69	TB_zB_yA	98,47	T	98,13	TB_y
	MES	103,07		101,84		100,84		101,88		102,32		100,46		99,23		96,49	
9	Praca	113,22	B_z	110,13	B_zA	134,77	TB_z	130,49	TB_z	123,91	T	122,73	T	122,14	B_z	119,46	B_zA
	MES	113,93		110,04		135,95		130,04		127,58		126,69		112,06		110,11	
10	Praca	115,61	B_y	115,37	TB_y	143,92	B_yA	143,34	TB_yA	132,97	B_yB_z	131,74	TB_yB_zA	123,81	B_y	122,97	B_yT
	MES	121,05		126,42		137,81		138,88		148,92		147,84		121,05		123,22	

$1,92^{A}$; $7,94^{A}$; $16,02^{A}$-wynik uzyskany za pomocą program ABAQUS

Tabela 7.3. Różnice między częstościami własnymi porównywanych par belek

Numer częstości	S-S	N-S		S-N	N-N		S-A	N-A		P-P	N-P	
	ω [Hz]		diff	ω[Hz]		diff	ω[Hz]		diff	ω[Hz]		diff
1	2,32	1,97	-15,1%	2,26	1,94	-14,2%	2,31	1,99	-13,9%	2,48	1,93	-22,2%
2	8,57	11,13	29,9%	11,08	14,01	26,4%	9,61	11,98	24,7%	7,77	9,33	20,1%
3	19,75	18,83	-4,7%	19,28	18,88	-2,1%	22,18	21,17	-4,6%	16,28	16,96	4,2%
4	28,71	29,88	4,1%	33,78	33,05	-2,2%	31,61	32,77	3,7%	30,95	30,56	-1,3%
5	34,25	33,84	-1,2%	35,6	37,23	4,6%	34,97	35,29	0,9%	31,06	31,03	-0,1%
6	54,72	53,86	-1,6%	59,96	58,87	-1,8%	65,4	64,26	-1,7%	48,21	48,37	0,3%
7	65,38	65,78	0,6%	81,65	81,37	-0,3%	72,93	73,61	0,9%	69,78	69,32	-0,7%
8	102,93	101,87	-1,0%	94,79	94,33	-0,5%	111,04	108,69	-2,1%	98,47	98,13	-0,3%
9	113,22	110,13	-2,7%	134,77	130,49	-3,2%	123,91	122,73	-1,0%	122,14	119,46	-2,2%
10	115,61	115,37	-0,2%	143,92	143,34	-0,4%	132,97	131,74	-0,9%	123,81	122,97	-0,7%

8. Zagadnienie stateczności pręta cienkościennego

8.1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań w niniejszym rozdziale jest zagadnienie stateczności niepryzmatycznych prętów cienkościennych o dowolnym przekroju otwartym. W ogólnym przypadku dla pręta niepryzmatycznego osie wyznaczone przez środki ciężkości oraz środki ścinania przekrojów poprzecznych pręta są osiami krzywoliniowymi, pomimo „prostoliniowego" charakteru pręta w rozumieniu typowo inżynierskim.

Chcąc zachować tę „prostoliniowość" w opisie niepryzmatycznego pręta cienkościennego, równania przemieszczeniowe wyprowadzono względem dodatkowej podłużnej, prostoliniowej oś odniesienia i towarzyszących jej pozostałych osi układu kartezjańskiego, względem których wyznaczamy parametry pręta cienkościennego wraz z jego charakterystykami przekroju poprzecznego. O prostoliniowej podłużnej osi odniesienia z reguły zakładamy, że przechodzi przez punkty, w których zdefiniowano podparcie na końcach pręta.

W rozdziale wyprowadzone zostały równania różniczkowe opisujące ogólne zagadnienie utraty stateczności dla dowolnego pręta cienkościennego przy dowolnym schemacie statycznym i dowolnym obciążeniu. Została też podana metoda wyznaczenia obciążenia krytycznego dla dowolnego przypadku z wykorzystaniem aproksymacji szeregami Gegenbauera.

W analizowanych przykładach numerycznych zagadnienie utraty stateczności rozwiązano dla belek niepryzmatycznych o przekroju bisymetrycznym i monosymetrycznym. Otrzymane wartości obciążeń krytycznych porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych oraz z wynikami uzyskanymi przez innych autorów.

8.2. Sformułowanie zagadnienia

Układ równań przemieszczeniowych opisujących zagadnienie statyczne z uwzględnieniem efektów II rzędu (zagadnienie teorii II rzędu) wyprowadzono z zasady minimum energii potencjalnej wykorzystując formułę (3.4). Otrzymany układ, to układ czterech sprzężonych równań różniczkowych 4 rzędu opisanych następującymi wzorami:

$$E\left(-A^*u_{ox,x}+S_z^*u_{y,xx}+S_y^*u_{z,xx}+S_\omega^*\theta_{,xx}+S_\psi^*\theta_{,x}+S_\delta^*\theta\right)_{,x}$$
$$+\chi\begin{pmatrix}-I^0_{x,1\,x,1}u_{ox,x}-I^0_{y,1\,x,1}u_{y,x}-I^0_{y,2\,x,1}u_{y,xx}-I^0_{z,1\,x,1}u_{z,x}-I^0_{z,2\,x,1}u_{z,xx}\\-I^0_{\theta\,x,1}\theta-I^0_{\theta,1\,x,1}\theta_{,x}-I^0_{\theta,2\,x,1}\delta\theta_{,xx}\end{pmatrix}_{,x}=\chi p_x\,, \tag{8.1}$$

$$E\left(I_z^*u_{y,xx}-S_z^*u_{ox,x}+I_{yz}^*u_{z,xx}+I_{\omega z}^*\theta_{,xx}+I_{\psi z}^*\theta_{,x}+I_{\delta z}^*\theta\right)_{,xx}$$
$$+\chi\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}I^0_{y,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{y,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{z,1\,y,2}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{z,xx}\\+I^0_{\theta\,y,2}\theta+I^0_{\theta,1\,y,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}\theta_{,xx}\end{pmatrix}_{,xx}\\-\begin{pmatrix}I^0_{y,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{y,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,1}u_{z,xx}\\+I^0_{\theta\,y,1}\theta+I^0_{\theta,1\,y,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,1}\theta_{,xx}\end{pmatrix}_{,x}\end{pmatrix}=\chi\left(\left(p_xy^p\right)_{,x}+p_y\right), \tag{8.2}$$

$$E\left(I_y^*u_{z,xx}-S_y^*u_{ox,x}+I_{yz}^*u_{y,xx}+I_{\omega y}^*\theta_{,xx}+I_{\psi y}^*\theta_{,x}+I_{\delta y}^*\theta\right)_{,xx}$$
$$+\chi\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}I^0_{z,2\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{z,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{z,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{z,2\,z,1}u_{z,x}\\+I^0_{\theta\,z,2}\theta+I^0_{\theta,1\,z,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,z,2}\theta_{,xx}\end{pmatrix}_{,xx}\\-\begin{pmatrix}I^0_{z,1\,z,1}u_{z,x}+I^0_{z,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{z,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{z,1\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{z,2\,z,1}u_{z,xx}\\+I^0_{\theta\,z,1}\theta+I^0_{\theta,1\,z,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,z,1}\theta_{,xx}\end{pmatrix}_{,x}\end{pmatrix}=\chi\left(\left(p_xz^p\right)_{,x}+p_z\right), \tag{8.3}$$

$$E\left(\left(I_\omega^*\theta_{,xx}-S_\omega^*u_{ox,x}+I_{\omega z}^*u_{y,xx}+I_{\omega y}^*u_{z,xx}+I_{\psi\omega}^*\theta_{,x}+I_{\delta\omega}^*\theta\right)_{,xx}\right.$$
$$+\left(-I_\psi^*\theta_{,x}+S_\psi^*u_{ox,x}-I_{\psi z}^*u_{y,xx}-I_{\psi y}^*u_{z,xx}-I_{\psi\omega}^*\theta_{,xx}-I_{\delta\psi}^*\theta\right)_{,x}$$
$$\left.+\left(I_\delta^*\theta-S_\delta^*u_{ox,x}+I_{\delta z}^*u_{y,xx}+I_{\delta y}^*u_{z,xx}+I_{\delta\omega}^*\theta_{,xx}+I_{\delta\psi}^*\theta_{,x}\right)\right)-G\left(I_s\theta_{,x}\right)_{,x}$$
$$+\chi\begin{pmatrix}\left(I^0_{\theta,2\,\theta,2}\theta_{,xx}+I^0_{\theta,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{\theta,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{\theta,2\,z,1}u_{z,x}+I^0_{\theta,2\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,\theta,2}\theta+I^0_{\theta,2\,\theta,1}\theta_{,x}\right)_{,xx}\\-\left(I^0_{\theta,1\,\theta,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{\theta,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{\theta,1\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{\theta,1\,z,1}u_{z,x}+I^0_{\theta,1\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,\theta,1}\theta+I^0_{\theta,2\,\theta,1}\theta_{,xx}\right)_{,x}\\+\left(I^0_{\theta\,\theta}\theta+I^0_{\theta\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{\theta\,y,1}u_{y,x}+I^0_{\theta\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{\theta\,z,1}u_{z,x}+I^0_{\theta\,z,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta,1\,\theta}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,\theta}\theta_{,xx}\right)\end{pmatrix}$$
$$=\chi\begin{pmatrix}\left(p_x\omega^p\theta_{,x}\right)_{,x}+p_x\left(y^pC_{z,x}-z^pC_{y,x}\right)\\-\left(p_y\left(z^p-C_z\right)+p_y\left(y^p-C_y\right)\theta-p_z\left(y^p-C_y\right)+p_z\left(z^p-C_z\right)\theta\right)\end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Zastępując w równaniach (8.1) - (8.3), występujące po prawej stronie wyrażenia, zerami oraz zastępując prawą stronę równania (8.4) wyrażeniem:

$$\chi\left(p_x\omega^p\theta_{,x}\right)_{,x}+p_y\left(y^p-C_y\right)\theta+p_z\left(z^p-C_z\right)\theta\ . \tag{8.5}$$

otrzymamy układ równań opisujący zagadnienie utraty stateczności niepryzmatycznego pręta cienkościennego. Towarzyszące im równania opisujące warunki brzegowe przedstawiają się następująco:

$$\left[N\delta u_{ox}\right]_a^b=0\,, \tag{8.6}$$

gdzie

$$N=E'\left(\begin{array}{l}A^*u_{ox,x}-S_z^*u_{y,xx}-S_y^*u_{z,xx}-S_\omega^*\theta_{,xx}-S_\psi^*\theta_{,x}-S_\delta^*\theta\\+\chi\left(I^0_{x,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,x,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,x,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,x,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,x,1}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,x,1}\theta+I^0_{\theta,1\,x,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,x,1}\delta\theta_{,xx}\right)\end{array}\right),$$

$$\left[Q_y\delta u_y\right]_a^b=0\,, \tag{8.7}$$

gdzie

$$Q_y=E'\left(\begin{array}{l}\left(-I_z^*u_{y,xx}+S_z^*u_{ox,x}-I_{yz}^*u_{z,xx}-I_{\omega z}^*\theta_{,xx}-I_{\psi z}^*\theta_{,x}-I_{\delta z}^*\theta\right)_{,x}\\-\chi\left(I^0_{y,1\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,1\,y,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,1}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,1}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,y,1}\theta+I^0_{\theta,1\,y,1}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,1}\theta_{,xx}\right)\\-\chi\left(I^0_{y,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,2}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,y,2}\theta+I^0_{\theta,1\,y,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}\theta_{,xx}\right)_{,x}\end{array}\right),$$

$$\left[M_z\delta u_{y,x}\right]_a^b=0\,, \tag{8.8}$$

gdzie

$$M_z=-E'\left(\begin{array}{l}-I_z^*u_{y,xx}+S_z^*u_{ox,x}-I_{yz}^*u_{z,xx}-I_{\omega z}^*\theta_{,xx}-I_{\psi z}^*\theta_{,x}-I_{\delta z}^*\theta\\+\chi\left(I^0_{y,2\,x,1}u_{ox,x}+I^0_{y,2\,y,1}u_{y,x}+I^0_{y,2\,y,2}u_{y,xx}+I^0_{z,1\,y,2}u_{z,x}+I^0_{z,2\,y,2}u_{z,xx}+I^0_{\theta\,y,2}\theta+I^0_{\theta,1\,y,2}\theta_{,x}+I^0_{\theta,2\,y,2}\theta_{,xx}\right)\end{array}\right),$$

$$\left[Q_z\delta u_z\right]_a^b=0\,, \tag{8.9}$$

gdzie

$$Q_z = E'\begin{pmatrix} \left(-I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta\right)_{,x} \\ +\chi\left(I^0_{\substack{z,1\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{z,1\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{z,1\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{z,1\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{z,2\\z,1}} u_{z,xx} + I^0_{\substack{\theta\\z,1}} \theta + I^0_{\substack{\theta,1\\z,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,1}} \theta_{,xx}\right) \\ -\chi\left(I^0_{\substack{z,2\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{z,2\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{z,2\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{z,1\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{z,2\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\substack{\theta\\z,2}} \theta + I^0_{\substack{\theta,1\\z,2}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} \theta_{,xx}\right)_{,x} \end{pmatrix}$$

$$\left[M_y \delta u_{z,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{8.10}$$

gdzie

$$M_y = E'\begin{pmatrix} -I_y^* u_{z,xx} + S_y^* u_{ox,x} - I_{yz}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* \theta_{,xx} - I_{\psi y}^* \theta_{,x} - I_{\delta y}^* \theta \\ +\chi\left(-I^0_{\substack{z,2\\x,1}} u_{ox,x} - I^0_{\substack{z,2\\y,1}} u_{y,x} - I^0_{\substack{z,2\\y,2}} u_{y,xx} - I^0_{\substack{z,1\\z,1}} u_{z,x} - I^0_{\substack{z,2\\z,2}} u_{z,xx} - I^0_{\substack{\theta\\z,2}} \theta - I^0_{\substack{\theta,1\\z,2}} \theta_{,x} - I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} \theta_{,xx}\right) \end{pmatrix},$$

$$\left[M_x \delta\theta\right]_a^b = 0\,, \tag{8.11}$$

gdzie

$$M_x = E'\begin{pmatrix} \left(-I_\omega^* \theta_{,xx} + S_\omega^* u_{ox,x} - I_{\omega z}^* u_{y,xx} - I_{\omega y}^* u_{z,xx} - I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} - I_{\delta\omega}^* \theta\right)_{,x} \\ +\left(I_\psi^* \theta_{,x} - S_\psi^* u_{ox,x} + I_{\psi z}^* u_{y,xx} + I_{\psi y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,xx} + I_{\delta\psi}^* \theta\right) + \\ -\chi\left(I^0_{\substack{\theta,1\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{\theta,1\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{\theta,1\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{\theta,1\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{\theta,1\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\theta} \theta + I^0_{\substack{\theta,1\\\theta,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,1}} \theta_{,xx}\right) \\ -\chi\left(I^0_{\substack{\theta,2\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\theta} \theta + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,2}} \theta_{,xx}\right)_{,x} \end{pmatrix} + GI_s \theta_{,x}$$

$$\left[B\delta\theta_{,x}\right]_a^b = 0\,, \tag{8.12}$$

gdzie

$$B = E'\begin{pmatrix} I_\omega^* \theta_{,xx} - S_\omega^* u_{ox,x} + I_{\omega z}^* u_{y,xx} + I_{\omega y}^* u_{z,xx} + I_{\psi\omega}^* \theta_{,x} + I_{\delta\omega}^* \theta \\ +\chi\left(I^0_{\substack{\theta,2\\x,1}} u_{ox,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,1}} u_{y,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\y,2}} u_{y,xx} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,1}} u_{z,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\z,2}} u_{z,xx} + I^0_{\theta} \theta + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,1}} \theta_{,x} + I^0_{\substack{\theta,2\\\theta,2}} \theta_{,xx}\right) \end{pmatrix}.$$

8.3. Rozwiązanie zagadnienia

Sformułowany w poprzednim podrozdziale układ równań sprowadzono do następującej postaci macierzowej

$$\sum_{i=0}^{4}\left(\mathbf{P}_i\left(x\right)+\chi\ \mathbf{R}_i\left(x\right)\right)\mathbf{f}^{(i)}\left(x\right)=\mathbf{0} \tag{8.13}$$

W celu wyznaczenia mnożnika χ określającego obciążenie krytyczne, rozwiązuje się zagadnienie własne, ograniczając się do „pierwszej" wartości χ_{kryt}, dla której równanie macierzowe (8.13) ma niezerowe rozwiązanie $\mathbf{f}\left(x\right)$.

Odpowiadające temu równaniu funkcje $\mathbf{Q}_i\left(x\right)$ (patrz wzór (4.10)) określone są w analizowanym zagadnieniu wzorem

$$\mathbf{Q}_i\left(x,\chi\right)=\sum_{j=i}^{4}\left(-1\right)^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ j-i \end{pmatrix}\left(\mathbf{P}_j\left(x\right)+\chi\,\mathbf{R}_j\left(x\right)\right)^{(j-i)}\ ,\quad i=1,2,3,4 \tag{8.14}$$

gdzie występujące we wzorach, (8.14) macierze $\mathbf{P}_i$ oraz $\mathbf{R}_i$ przyjmują następującą postać:

$$\mathbf{P}_0=E\begin{bmatrix}0&0&0&k_{14}^0\\0&0&0&k_{24}^0\\0&0&0&k_{34}^0\\0&0&0&k_{44}^0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_1=E\begin{bmatrix}k_{11}^1&0&0&k_{14}^1\\k_{21}^1&0&0&k_{24}^1\\k_{31}^1&0&0&k_{34}^1\\k_{41}^1&0&0&k_{44}^1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_2=E\begin{bmatrix}k_{11}^2&k_{12}^2&k_{13}^2&k_{14}^2\\k_{21}^2&k_{22}^2&k_{23}^2&k_{24}^2\\k_{31}^2&k_{32}^2&k_{33}^2&k_{34}^2\\k_{41}^2&k_{42}^2&k_{43}^2&k_{44}^2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3=E\begin{bmatrix}0&k_{12}^3&k_{13}^3&k_{14}^3\\k_{21}^3&k_{22}^3&k_{23}^3&k_{24}^3\\k_{31}^3&k_{32}^3&k_{33}^3&k_{34}^3\\k_{41}^3&k_{42}^3&k_{43}^3&k_{44}^3\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}_4=E\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&k_{22}^4&k_{23}^4&k_{24}^4\\0&k_{32}^4&k_{33}^4&k_{34}^4\\0&k_{42}^4&k_{43}^4&k_{44}^4\end{bmatrix}, \tag{8.15}$$

$$\mathbf{R}_0=\begin{bmatrix}0&0&0&r_{14}^0\\0&0&0&r_{24}^0\\0&0&0&r_{34}^0\\0&0&0&r_{44}^0\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}r_{11}^1&r_{12}^1&r_{13}^1&r_{14}^1\\r_{21}^1&r_{22}^1&r_{23}^1&r_{24}^1\\r_{31}^1&r_{32}^1&r_{33}^1&r_{34}^1\\r_{41}^1&r_{42}^1&r_{43}^1&r_{44}^1\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_2=\begin{bmatrix}r_{11}^2&r_{12}^2&r_{13}^2&r_{14}^2\\r_{21}^2&r_{22}^2&r_{23}^2&r_{24}^2\\r_{31}^2&r_{32}^2&r_{33}^2&r_{34}^2\\r_{41}^2&r_{42}^2&r_{43}^2&r_{44}^2\end{bmatrix}, \tag{8.16}$$

$$\mathbf{R}_3=\begin{bmatrix}0&r_{12}^3&r_{13}^3&r_{14}^3\\r_{21}^3&r_{22}^3&r_{23}^3&r_{24}^3\\r_{31}^3&r_{32}^3&r_{33}^3&r_{34}^3\\r_{41}^3&r_{42}^3&r_{43}^3&r_{44}^3\end{bmatrix},\quad \mathbf{R}_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&r_{22}^3&r_{23}^3&r_{24}^3\\0&r_{32}^3&r_{33}^3&r_{34}^3\\0&r_{42}^3&r_{43}^3&r_{44}^3\end{bmatrix}.$$

Współczynniki macierzy sztywności mają postać:

$$
\begin{aligned}
&k_{14}^{0}=S_{\delta,x}^{*}, \quad k_{24}^{0}=I_{\delta z,xx}^{*}, \quad k_{34}^{0}=I_{\delta y,xx}^{*}, \quad k_{44}^{0}=I_{\delta\omega,xx}^{*}-I_{\delta\psi,x}^{*}+I_{\delta}^{*},\\
&k_{11}^{1}=-A_{,x}^{*}, \quad k_{14}^{1}=S_{\psi,x}^{*}+S_{\delta}^{*}, \quad k_{21}^{1}=-S_{z,xx}^{*}, \quad k_{24}^{1}=I_{\psi z,xx}^{*}+2I_{\delta z,x}^{*},\\
&k_{31}^{1}=-S_{y,xx}^{*}, \quad k_{34}^{1}=I_{\psi y,xx}^{*}+2I_{\delta y,x}^{*}, \quad k_{41}^{1}=-S_{\omega,xx}^{*}+S_{\psi,x}^{*}-S_{\delta}^{*},\\
&k_{44}^{1}=I_{\psi\omega,xx}^{*}+2I_{\delta\omega,x}^{*}-I_{\psi,x}^{*}-\frac{G}{E}I_{s,x},\\
&k_{11}^{2}=-A^{*}, \quad k_{12}^{2}=S_{z,x}^{*}, \quad k_{13}^{2}=S_{y,x}^{*}, \quad k_{14}^{2}=S_{\omega,x}^{*}+S_{\psi}^{*},\\
&k_{21}^{2}=-2S_{z,x}^{*}, \quad k_{22}^{2}=I_{z,xx}^{*}, \quad k_{23}^{2}=I_{yz,xx}^{*}, \quad k_{24}^{2}=I_{\omega z,xx}^{*}+2I_{\psi z,x}^{*}+I_{\delta z}^{*},\\
&k_{31}^{2}=-2S_{y,x}^{*}, \quad k_{32}^{2}=I_{yz,xx}^{*}, \quad k_{33}^{2}=I_{y,xx}^{*}, \quad k_{34}^{2}=I_{\omega y,xx}^{*}+2I_{\psi y,x}^{*}+I_{\delta y}^{*},\\
&k_{41}^{2}=-2S_{\omega,x}^{*}+S_{\psi}^{*}, \quad k_{42}^{2}=I_{\omega z,xx}^{*}-I_{\psi z,x}^{*}+I_{\delta z}^{*}, \quad k_{43}^{2}=I_{\omega y,xx}^{*}-I_{\psi y,x}^{*}+I_{\delta y}^{*},\\
&k_{44}^{2}=I_{\omega,xx}^{*}+I_{\psi\omega,x}^{*}+2I_{\delta\omega}^{*}-I_{\psi}^{*}-\frac{G}{E}I_{s},\\
&k_{12}^{3}=S_{z}^{*}, \quad k_{13}^{3}=S_{y}^{*}, \quad k_{14}^{3}=S_{\omega}^{*},\\
&k_{21}^{3}=-S_{z}^{*}, \quad k_{22}^{3}=2I_{z,x}^{*}, \quad k_{23}^{3}=2I_{yz,x}^{*}, \quad k_{24}^{3}=2I_{\omega z,x}^{*}+I_{\psi z}^{*},\\
&k_{31}^{3}=-S_{y}^{*}, \quad k_{32}^{3}=2I_{yz,x}^{*}, \quad k_{33}^{3}=2I_{y,x}^{*}, \quad k_{34}^{3}=2I_{\omega y,x}^{*}+I_{\psi y}^{*},\\
&k_{41}^{3}=-S_{\omega}^{*}, \quad k_{42}^{3}=2I_{\omega z,x}^{*}-I_{\psi z}^{*}, \quad k_{43}^{3}=2I_{\omega y,x}^{*}-I_{\psi y}^{*}, \quad k_{44}^{3}=2I_{\omega,x}^{*},\\
&k_{22}^{4}=I_{z}^{*}, \quad k_{23}^{4}=I_{yz}^{*}, \quad k_{24}^{4}=I_{\omega z}^{*}, \quad k_{32}^{4}=I_{yz}^{*}, \quad k_{33}^{4}=I_{y}^{*}, \quad k_{34}^{4}=I_{\omega y}^{*},\\
&k_{42}^{4}=I_{\omega z}^{*}, \quad k_{43}^{4}=I_{\omega y}^{*}, \quad k_{44}^{4}=I_{\omega}^{*},
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

Współczynniki macierzy sztywności geometrycznej mają postać:

$$
\begin{aligned}
&r_{14}^{0}=-\left(I_{\theta\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{24}^{0}=-\left(I_{\theta\ y,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta\ y,2}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{34}^{0}=-\left(I_{\theta\ z,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta\ z,2}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{44}^{0}=I_{\theta\ \theta}^{0}-\left(I_{\theta,1\ \theta}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ \theta}^{0}\right)_{,xx}-p_y\left(y^p-C_y\right)-p_z\left(z^p-C_z\right)\\
&r_{11}^{1}=-\left(I_{x,1\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{12}^{1}=-\left(I_{y,1\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{13}^{1}=-\left(I_{z,1\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{14}^{1}=-I_{\theta\ x,1}^{0}-\left(I_{\theta,1\ x,1}^{0}\right)_{,x}\\
&r_{21}^{1}=-\left(I_{y,1\ x,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{y,2\ x,1}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{22}^{1}=-\left(I_{y,1\ y,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{y,2\ y,1}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{23}^{1}=-\left(I_{z,1\ y,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{z,1\ y,2}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{24}^{1}=-I_{\theta\ y,1}^{0}-\left(I_{\theta,1\ y,1}^{0}\right)_{,x}+2\left(I_{\theta\ y,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,1\ y,2}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{31}^{1}=-\left(I_{z,1\ x,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{z,2\ x,1}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{32}^{1}=-\left(I_{z,1\ y,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{z,2\ y,1}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{33}^{1}=-\left(I_{z,1\ z,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{z,2\ z,1}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{34}^{1}=-I_{\theta\ z,1}^{0}-\left(I_{\theta,1\ z,1}^{0}\right)_{,x}+2\left(I_{\theta\ z,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,1\ z,2}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{41}^{1}=I_{\theta\ x,1}^{0}-\left(I_{\theta,1\ x,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ x,1}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{42}^{1}=I_{\theta\ y,1}^{0}-\left(I_{\theta,1\ y,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ y,1}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{43}^{1}=I_{\theta\ z,1}^{0}-\left(I_{\theta,1\ z,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ z,1}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{44}^{1}=-\left(I_{\theta,1\ \theta,1}^{0}\right)_{,x}+2\left(I_{\theta,2\ \theta}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ \theta,1}^{0}\right)_{,xx}-\left(p_x\omega^p\right)_{,x}\\
&r_{11}^{2}=-I_{x,1\ x,1}^{0} \quad r_{12}^{2}=-I_{y,1\ x,1}^{0}-\left(I_{y,2\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{13}^{2}=-I_{z,1\ x,1}^{0}-\left(I_{z,2\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{14}^{2}=-I_{\theta,1\ x,1}^{0}-\left(I_{\theta,2\ x,1}^{0}\right)_{,x}\\
&r_{21}^{2}=-I_{y,1\ x,1}^{0}+2\left(I_{y,2\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{22}^{2}=-I_{y,1\ y,1}^{0}+\left(I_{y,2\ y,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{y,2\ y,2}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{23}^{2}=-I_{z,1\ y,1}^{0}-\left(I_{z,2\ y,1}^{0}\right)_{,x}+2\left(I_{z,1\ y,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{z,2\ y,2}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{24}^{2}=-I_{\theta,1\ y,1}^{0}+I_{\theta\ y,2}^{0}-\left(I_{\theta,2\ y,1}^{0}\right)_{,x}+2\left(I_{\theta,1\ y,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ y,2}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{31}^{2}=-I_{z,1\ x,1}^{0}+2\left(I_{z,2\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{32}^{2}=-I_{z,1\ y,1}^{0}+2\left(I_{z,2\ y,1}^{0}\right)_{,x}-\left(I_{z,1\ y,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{z,2\ y,2}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{33}^{2}=-I_{z,1\ z,1}^{0}+\left(I_{z,2\ z,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{z,2\ z,2}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{34}^{2}=-I_{\theta,1\ z,1}^{0}+I_{\theta\ z,2}^{0}-\left(I_{\theta,2\ z,1}^{0}\right)_{,x}+2\left(I_{\theta,1\ z,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ z,2}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{41}^{2}=-I_{\theta,1\ x,1}^{0}+2\left(I_{\theta,2\ x,1}^{0}\right)_{,x} \quad r_{42}^{2}=-I_{\theta,1\ y,1}^{0}+I_{\theta\ y,2}^{0}+2\left(I_{\theta,2\ y,1}^{0}\right)_{,x}-\left(I_{\theta,1\ y,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ y,2}^{0}\right)_{,xx}\\
&r_{43}^{2}=-I_{\theta,1\ z,1}^{0}+I_{\theta\ z,2}^{0}+2\left(I_{\theta,2\ z,1}^{0}\right)_{,x}-\left(I_{\theta,1\ z,2}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ z,2}^{0}\right)_{,xx} \quad r_{44}^{2}=-I_{\theta,1\ \theta,1}^{0}+2I_{\theta\ \theta,2}^{0}+\left(I_{\theta,2\ \theta,1}^{0}\right)_{,x}+\left(I_{\theta,2\ \theta,2}^{0}\right)_{,xx}-p_x\omega^p\\
&r_{12}^{3}=-I_{y,2\ x,1}^{0} \quad r_{13}^{3}=-I_{z,2\ x,1}^{0} \quad r_{14}^{3}=-I_{\theta,2\ x,1}^{0} \quad r_{21}^{3}=I_{y,2\ x,1}^{0} \quad r_{22}^{3}=2\left(I_{y,2\ y,2}^{0}\right)_{,x} \quad r_{23}^{3}=-I_{z,2\ y,1}^{0}+I_{z,1\ y,2}^{0}+2\left(I_{z,2\ y,2}^{0}\right)_{,x}\\
&r_{24}^{3}=-I_{\theta,2\ y,1}^{0}+I_{\theta,1\ y,2}^{0}+2\left(I_{\theta,2\ y,2}^{0}\right)_{,x} \quad r_{31}^{3}=I_{z,2\ x,1}^{0} \quad r_{32}^{3}=I_{z,2\ y,1}^{0}-I_{z,1\ y,2}^{0}+2\left(I_{z,2\ y,2}^{0}\right)_{,x} \quad r_{33}^{3}=2\left(I_{z,2\ z,2}^{0}\right)_{,x}\\
&r_{34}^{3}=-I_{\theta,2\ z,1}^{0}+I_{\theta,1\ z,2}^{0}+2\left(I_{\theta,2\ z,2}^{0}\right)_{,x} \quad r_{41}^{3}=I_{\theta,2\ x,1}^{0} \quad r_{42}^{3}=I_{\theta,2\ y,1}^{0}-I_{\theta,1\ y,2}^{0}+2\left(I_{\theta,2\ y,2}^{0}\right)_{,x} \quad r_{43}^{3}=I_{\theta,2\ z,1}^{0}-I_{\theta,1\ z,2}^{0}+2\left(I_{\theta,2\ z,2}^{0}\right)_{,x}\\
&r_{44}^{3}=2\left(I_{\theta,2\ \theta,2}^{0}\right)_{,x} \quad r_{22}^{4}=I_{y,2\ y,2}^{0} \quad r_{23}^{4}=I_{z,2\ y,2}^{0} \quad r_{24}^{4}=I_{\theta,2\ y,2}^{0} \quad r_{32}^{4}=I_{z,2\ y,2}^{0} \quad r_{33}^{4}=I_{z,2\ z,2}^{0}\\
&r_{34}^{4}=I_{\theta,2\ z,2}^{0} \quad r_{42}^{4}=I_{\theta,2\ y,2}^{0} \quad r_{43}^{4}=I_{\theta,2\ z,2}^{0} \quad r_{44}^{4}=I_{\theta,2\ \theta,2}^{0}
\end{aligned}
\tag{8.18}
$$

Poszukiwany wektor rozwiązań $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ ma postać $\mathbf{f}(\mathrm{x}) = \left[u_{ox} \quad u_y \quad u_z \quad \theta \right]^{\mathbf{T}}$, gdzie:

$$
\begin{aligned}
u_\beta(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[u_\beta \right] C_k^{(\lambda)}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \beta = ox, y, z, \\
\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\theta \right] C_k^{(\lambda)}(x/a) \quad \text{gdy} \quad \lambda \neq 0,
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

lub:

$$
\begin{aligned}
u_\beta(x) &= \frac{1}{2} b_0 \left[u_\beta \right] T_0\left(\frac{x}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left[u_\beta \right] T_k\left(\frac{x}{a}\right), \ \beta = ox, y, z, \\
\theta &= \frac{1}{2} b_0 \left[\theta \right] T_0(x/a) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left[\theta \right] T_k(x/a), \quad \text{gdy} \quad \lambda = 0.
\end{aligned}
\tag{8.20}
$$

W przypadku równania różniczkowego czwartego rzędu $(n = 4)$ nieskończony układ równań (4.11) opisujący zależności między współczynnikami rozwinięcia poszukiwanej funkcji $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ określony jest wzorem

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{k}+\lambda+1\right)\left(\mathrm{k}+\lambda+2\right)\left(\mathrm{k}+\lambda+3\right)c_{k-4}\left[\mathbf{Q}_0\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&-4\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-4\right)\left(\mathrm{k}+\lambda+3\right)c_{k-2}\left[\mathbf{Q}_0\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&+6\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-9\right)\left(\mathrm{k}+\lambda\right)c_k\left[\mathbf{Q}_0\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&-4\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-4\right)\left(\mathrm{k}+\lambda-3\right)c_{k+2}\left[\mathbf{Q}_0\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&+\left(\mathrm{k}+\lambda-1\right)\left(\mathrm{k}+\lambda-2\right)\left(\mathrm{k}+\lambda-3\right)c_{k+4}\left[\mathbf{Q}_0\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&+2\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-9\right)\left[\left(\mathrm{k}+\lambda+1\right)\left(\mathrm{k}+\lambda+2\right)c_{k-3}\left[\mathbf{Q}_1\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\right.\\
&-3\left(\mathrm{k}+\lambda-1\right)\left(\mathrm{k}+\lambda+2\right)c_{k-1}\left[\mathbf{Q}_1\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&+3\left(\mathrm{k}+\lambda+1\right)\left(\mathrm{k}+\lambda-2\right)c_{k+1}\left[\mathbf{Q}_1\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&\left.-\left(\mathrm{k}+\lambda-1\right)\left(\mathrm{k}+\lambda-2\right)c_{k+3}\left[\mathbf{Q}_1\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\right]\\
&+4\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-9\right)\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-4\right)\left[\left(\mathrm{k}+\lambda+1\right)c_{k-2}\left[\mathbf{Q}_2\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\right.\\
&-2\left(\mathrm{k}+\lambda\right)c_k\left[\mathbf{Q}_2\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\\
&\left.+\left(\mathrm{k}+\lambda-1\right)c_{k+2}\left[\mathbf{Q}_2\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\right]\\
&+8\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-9\right)\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-4\right)\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-1\right)\left[c_{k-1}\left[\mathbf{Q}_3\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\right.\\
&\left.-c_{k+1}\left[\mathbf{Q}_3\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]\right]\\
&+16\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-9\right)\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-4\right)\left(\left(\mathrm{k}+\lambda\right)^2-1\right)\left(\mathrm{k}+\lambda\right)c_k\left[\mathbf{Q}_4\left(x,\chi\right)\mathbf{f}\left(x\right)\right]=0\,,
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

gdy $k \geq n$.

Układ ten, spełniony gdy $k \geq 4$, należy uzupełnić czternastoma równaniami opisującymi warunki brzegowe. Przy formułowaniu tych warunków wykorzystuje się zależności określające wartości wielomianów Gegenbauera i ich pochodnych w punktach $x = \pm 1$ Zależności te opisują wzory (5.25) i (5.26). Przykładowe równania opisujące warunki brzegowy mają postać (5.27), (5.28).

Tak otrzymany nieskończony układ równań (8.21) po „obcięciu” go do układu skończonego (uwzględniamy $4M$ pierwszych równań) przyjmuje postać

$$\mathbf{A}\left(\chi\right)\mathbf{c} = 0 \tag{8.22}$$

gdzie

$\mathbf{A}$ - macierz współczynników zależna od χ, $\dim \mathbf{A} = 4M \times 4M$,

$\mathbf{c} = \left[c_0\left[u_{ox}\right], c_0\left[u_y\right], c_0\left[u_z\right], c_0\left[\theta\right], \ldots \;, c_M\left[u_{ox}\right], c_M\left[u_y\right], c_M\left[u_z\right], c_M\left[\theta\right]\right]^T$

- wektor współczynników rozwinięcia poszukiwanych funkcji opisujących uogólnione przemieszczenie układu,

χ - mnożnik obciążenia.

Wartość mnożnika obciążenia krytycznego χ_{kryt} powodującego utratę stateczności wyznaczamy z warunku

$$\det\left(\mathbf{A}\left(\chi_{kryt}\right)\right)=0\,. \tag{8.23}$$

Po rozwiązanie równania (8.23) i wykonaniu podstawieniu $\chi=\chi_{kryt}$ w równaniu (8.22) otrzymamy jednorodny układ równań algebraicznych pozwalający na wyznaczenie formy utraty stateczności

$$\mathbf{A}\left(\chi_{kryt}\right)\mathbf{c}=0\,. \tag{8.24}$$

W wyniki rozwiązania układu (8.24) otrzymujemy ciąg współczynników $c_k\left[u_\beta\right]$, $\beta=ox,y,z$ oraz $c_k\left[\theta\right]$. Stąd po zastosowaniu relacji (4.18) otrzymuje się współczynniki $a_k\left[u_\beta\right]$, $\beta=ox,y,z$ oraz $a_k\left[\theta\right]$ względnie współczynniki $b_k\left[u_\beta\right]$, $\beta=ox,y,z$ oraz $b_k\left[\theta\right]$, rozwinięcia w szereg poszukiwanych funkcji (8.19) lub (8.20), w zależności od rzędu λ, zastosowanych do aproksymacji, wielomianów Gegenbauera. W dalszych obliczeniach stosowano wielomiany Gegenbauera rzędu $\lambda=0$, które jak wspomniano wcześniej po drobnej modyfikacji sprowadzają się do wielomianów Czebyszewa I rodzaju oraz wielomiany rzędu $\lambda=1,\ \lambda=1/2$, tj. wielomiany Czebyszewa II rodzaju i wielomiany Legendre'a. Te trzy typy wielomianów będą tworzyły bazy aproksymacyjne w analizowanych w dalszej części pracy przykładach numerycznych.

8.4. Przykłady numeryczne

Przykład 1

W celu weryfikacji opisanego algorytmu zastosowano go do rozwiązania przykładu zaczerpniętego z pracy [7]. W przykładzie tym analizuje się zagadnienie zwichrzenia niepryzmatycznej dwuteowej belki swobodnie podpartej o następujących parametrach: $L=4,0$ m i $L=6,0$ m; $E'=210$ GPa; $\nu=0,3$ $h_{min}=\alpha h_{max}$; $\alpha=0,6;\ 0,8;\ 1,0$. Belka ta jest

obciążona na końcach momentami skupionymi $M_L = M_0$ i $M_R = \psi M_0$ (Rys. 8.1.). W przykładzie tym rozważono dwa warianty:

- w wariancie I belka miała przekrój bisymetryczny,
- w wariancie II przekrój belki był monosymetryczny,

(wymiary przekrojów belki, dla obu wariantów, zostały pokazane na Rys. 8.1)

oraz analizowano dwa schematy statyczne tj.:

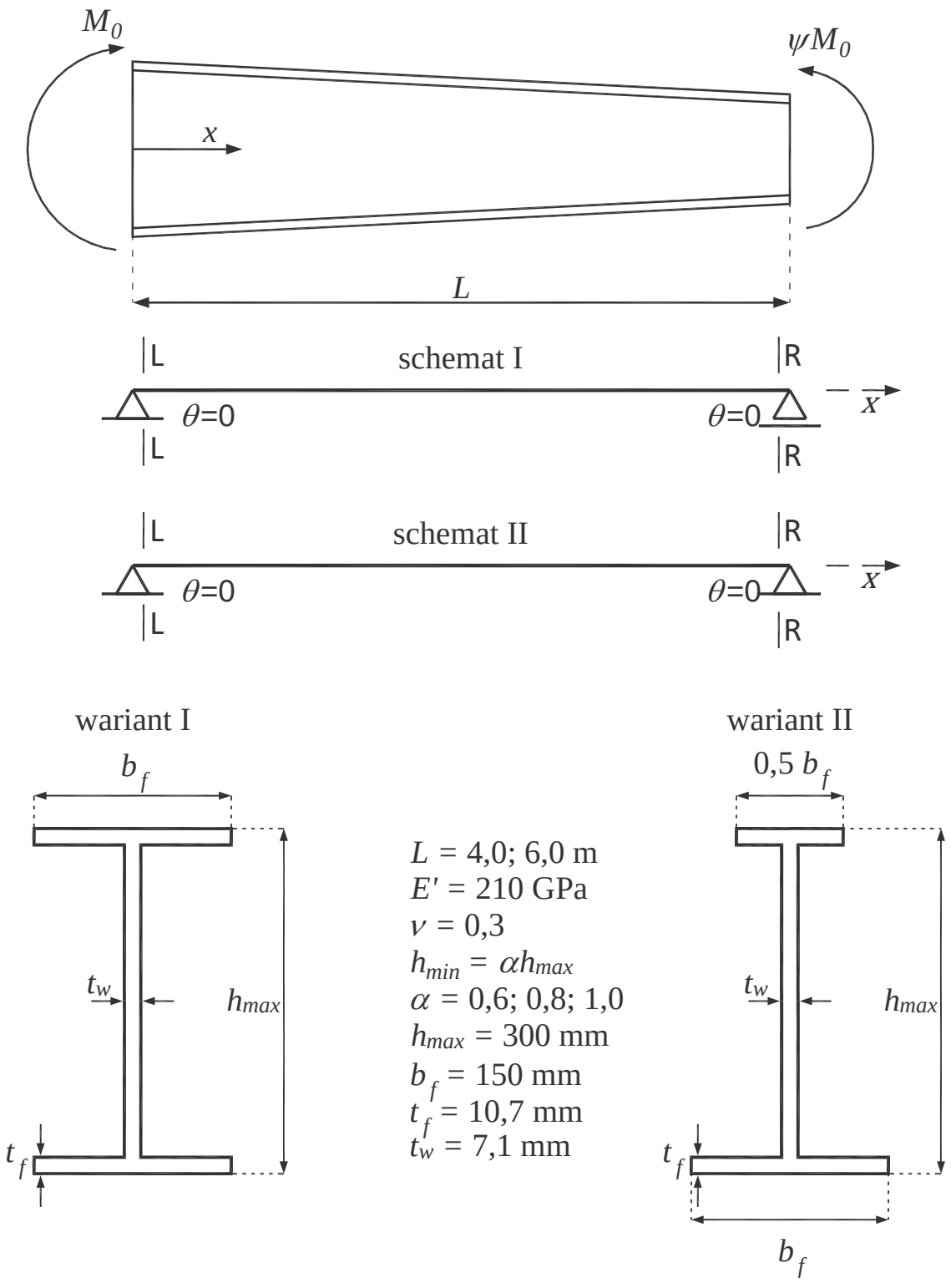
- schemat I w postaci belki przegubowo-przegubowej z jedną podporą zapewniającą swobodę przesuwu na kierunku podłużnym na prawej podporze (tak jak w pracy [7]),
- schemat II belki przegubowo-przegubowej z zablokowanym przesuwem na kierunku podłużnym na obu podporach.

We wszystkich schematach założono zablokowanie obrotu względem osi podłużnej na obu podporach $\theta = 0$. Dla belki z zablokowanym przesuwem na obu podporach dokonano analizy wpływu zmiany punktu podparcia na wartości obciążenia krytycznego. Analizowano następujące punkty podparcia:

- środek środnika,
- środek ciężkości,
- środek ścinania,
- spód pasa dolnego.

Przy czym dla belki o przekroju bisymetrycznym punkt środka środnika pokrywa się z punktem środka ciężkości i środka ścinania.

Obliczone, z zastosowaniem przedstawionej w pracy metody, wartości momentów krytycznych dla wariantu ze swobodnym przesuwem na jednej podporze przedstawiono w Tabeli 8.1. (belka o przekroju bisymetrycznym) i w Tabeli 8.2. (belka o przekroju monosymetrycznym). Wartości momentów krytycznych dla belek o schemacie z zablokowanym przesuwem podłużnym na obu podporach umieszczono odpowiednio w Tabelach 8.3. – 8.8.. W Tabeli 8.1. i Tabeli 8.2. przedstawiono również momenty krytyczne otrzymane przez autorów pracy [7]. W tabelach, dla wszystkich analizowanych przypadków, przedstawiono również wyniki wyznaczone z wykorzystaniem MES (program Sofistik).



Rys. 8.1. Schematy statyczne oraz wymiary przekrojów poprzecznych belek

Tabela 8.1. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm] - wariant I belki, schemat I.

L	α	$\psi = 0,25$			$\psi = 0,50$			$\psi = 0,75$			$\psi = 1,0$		
		Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik	Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik	Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik	Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik
	0,6	206,5	207,4	206,4	174,7	175,5	174,6	150,1	150,8	150,1	131,1	131,7	131,0
4 m	0,8	219,7	220,1	219,5	186,5	186,9	186,4	160,8	161,1	160,6	140,7	140,9	140,6
	1,0	232,9	233,0	232,6	198,3	198,3	198,1	171,3	171,3	171,2	150,2	150,2	150,1
	0,6	118,6	118,7	118,6	100,6	100,8	100,6	86,6	86,8	86,6	75,7	75,8	75,7
6 m	0,8	123,5	123,5	123,4	105,1	105,0	105,0	90,7	90,7	90,6	79,4	79,3	79,3
	1,0	128,4	128,8	128,4	109,6	109,4	109,5	94,7	94,6	94,7	83,1	82,9	83,0

Tabela 8.2. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm] - wariant II belki, schemat I.

L	α	$\psi = 0,25$			$\psi = 0,50$			$\psi = 0,75$			$\psi = 1,0$		
		Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik	Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik	Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik	Praca	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik
	0,6	66,0	59,0	66,0	57,7	53,9	57,7	50,7	49,0	50,7	44,9	44,6	44,9
4 m	0,8	66,8	63,0	66,7	58,0	55,8	58,0	50,7	49,6	50,6	44,6	44,2	44,6
	1,0	67,7	67,7	67,7	58,5	58,0	58,4	50,8	50,4	50,8	44,6	43,9	44,6
	0,6	47,3	43,5	47,3	41,6	39,3	41,6	36,6	35,6	36,6	32,4	32,1	32,4
6 m	0,8	47,5	46,4	47,5	41,5	40,2	41,5	36,3	35,7	36,3	32,0	31,7	32,0
	1,0	47,8	46,9	47,8	41,5	41,2	41,5	36,2	35,9	36,2	31,8	31,6	31,8

Tabela 8.3. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm], wariant I belki, schemat II – podparcie w środku środnika

L	α	$\psi = 0,25$		$\psi = 0,50$		$\psi = 0,75$		$\psi = 1,0$	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,6	206,5	206,4	174,7	174,6	150,1	150,1	131,1	131,0
	0,8	219,7	219,5	186,5	186,4	160,8	160,6	140,7	140,6
	1,0	232,9	232,6	198,3	198,1	171,3	171,2	150,2	150,1
6 m	0,6	118,6	118,6	100,6	100,6	86,6	86,6	75,7	75,7
	0,8	123,5	123,4	105,1	105,0	90,7	90,6	79,4	79,3
	1,0	128,4	128,4	109,6	109,5	94,7	94,7	83,1	83,0

Tabela 8.4. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm], wariant I belki, schemat II – podparcie spodu pasa dolnego

L	α	$\psi = 0,25$		$\psi = 0,50$		$\psi = 0,75$		$\psi = 1,0$	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,6	198,4	197,7	165,5	165,0	141,3	140,8	122,8	122,5
	0,8	216,1	215,6	181,8	181,4	156,0	155,7	136,3	136,0
	1,0	230,0	232,5	197,1	196,7	169,8	169,5	148,8	148,5
6 m	0,6	98,7	98,6	81,6	81,5	69,4	69,3	60,2	60,1
	0,8	107,2	107,1	89,6	89,5	76,7	76,6	66,9	66,8
	1,0	115,0	114,9	96,8	96,7	83,3	83,2	72,9	72,9

Tabela 8.5. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm], wariant II belki, schemat II – podparcie w środku środnika

L	α	$\psi = 0,25$		$\psi = 0,50$		$\psi = 0,75$		$\psi = 1,0$	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,6	87,9	87,8	80,4	80,3	72,5	72,4	65,0	64,8
	0,8	87,4	87,4	78,5	78,4	69,7	69,7	61,8	61,8
	1,0	88,0	87,9	77,9	77,9	68,5	68,5	60,3	60,3
6 m	0,6	65,4	65,4	60,9	60,9	55,6	55,6	50,0	50,0
	0,8	64,1	64,1	58,6	58,6	52,6	52,6	46,8	46,8
	1,0	63,6	63,6	57,3	57,3	50,9	50,9	45,0	45,0

Tabela 8.6. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm], wariant II belki, schemat II – podparcie w środku ciężkości

L	α	$\psi = 0,25$		$\psi = 0,50$		$\psi = 0,75$		$\psi = 1,0$	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,6	66,2	66,0	57,9	57,7	50,9	50,7	45,0	44,9
	0,8	66,8	66,7	58,0	58,0	50,7	50,6	44,6	44,6
	1,0	67,7	67,7	58,5	58,4	50,8	50,8	44,6	44,6
6 m	0,6	47,5	47,3	41,7	41,6	36,7	36,6	32,5	32,4
	0,8	47,6	47,5	41,5	41,5	36,4	36,3	32,1	32,0
	1,0	47,8	47,8	41,5	41,5	36,2	36,2	31,8	31,8

Tabela 8.7. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm], wariant II belki, schemat II – podparcie w środku ścinania

L	α	$\psi = 0,25$		$\psi = 0,50$		$\psi = 0,75$		$\psi = 1,0$	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,6	56,3	56,2	48,2	48,1	41,7	41,7	36,7	36,6
	0,8	57,8	57,8	49,4	49,4	42,8	42,8	37,6	37,5
	1,0	59,3	59,2	50,6	50,5	43,8	43,7	38,4	38,3
6 m	0,6	36,0	35,9	30,4	30,3	26,1	26,1	22,8	22,8
	0,8	37,2	37,1	31,5	31,5	27,2	27,2	23,8	23,8
	1,0	38,1	38,1	32,4	32,4	28,0	28,0	24,5	24,5

Tabela 8.8. Wartości krytycznych momentów zginających [kNm], wariant II belki, schemat II – podparcie spodu pasa dolnego

L	α	$\psi = 0,25$		$\psi = 0,50$		$\psi = 0,75$		$\psi = 1,0$	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,6	63,2	63,0	54,3	54,2	47,1	47,0	41,4	41,3
	0,8	65,2	65,1	56,1	56,0	48,6	48,6	42,7	42,6
	1,0	67,2	67,1	57,7	57,6	50,0	50,0	43,9	43,8
6 m	0,6	39,1	39,0	33,0	32,9	28,3	28,2	24,7	24,6
	0,8	40,8	40,7	34,6	34,5	29,8	29,8	26,1	26,1
	1,0	42,1	42,1	35,9	35,9	31,0	31,0	27,2	27,2

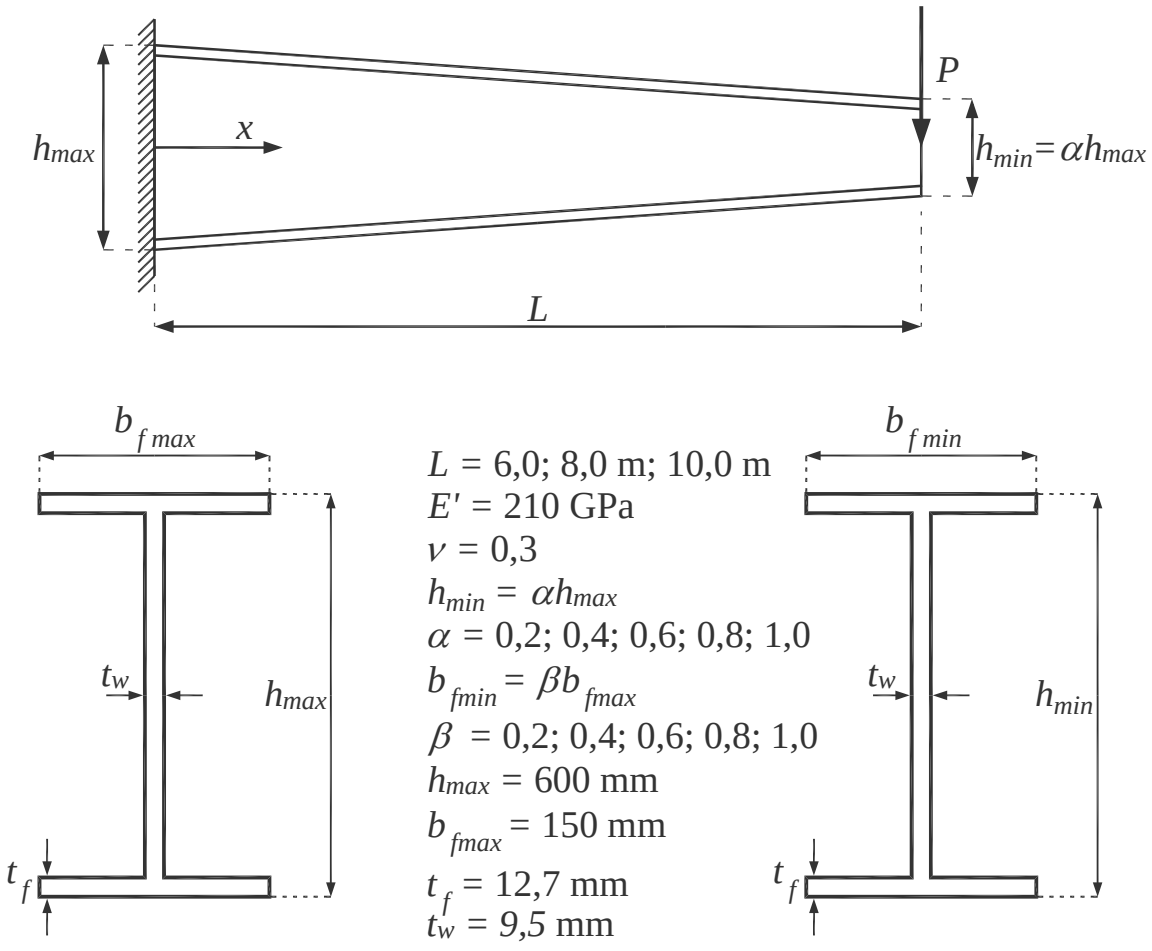
Przykład 2

Kolejnym przykładem zaczerpniętym z pracy [7] jest belka wspornikowa obciążona na swoim swobodnym końcu siłą skupioną $P = \chi$ przyłożoną do środka ścinania C przekroju poprzecznego. Analizowane są dwa rodzaje belek bisymetrycznych:

- wspornik ze stałą szerokością półki b_{max} i liniowo zmienną wysokością środnika $h_{p,\min} = \alpha h_{p,\max}$,
- wspornik o stałej wysokości $h_{p,max}$ i liniowo zmiennej szerokości półki $b_{min} = \beta b_{max}$.

Wymiary przekrojów poprzecznych analizowanych belek przedstawiono na Rys. 8.2. W obliczeniach przyjęto różne długości belek L. Pozostałe parametry przyjmują takie same wartości jak w Przykładzie 1.

Obliczone wartości siły krytycznej P_{kryt} przedstawiono w Tabeli 8.9. i podobnie jak w Przykładzie 1 porównano je z wynikami podanymi przez autorów w [7] oraz z wynikami wyznaczonymi z wykorzystaniem MES.



Rys. 8.2. Belka wspornikowa oraz wymiary przekrojów poprzecznych

Tabela 8.9. Wartości siły krytycznej [kN] powodującej zwichrzenie belki wspornikowej

L	α lub β	Zbieżny środnik				Zbieżne pasy			
		Praca dim=20	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik element prętowe 7DOF	MES ABAQUS elementy płytowe	Praca dim=20	Asgarian i in. [7]	MES Sofistik element prętowe 7DOF	MES ABAQUS elementy płytowe
6 m	0,2	41,99	42,72	41,89	42,88	13,71	14,35	13,69	13,46
	0,4	43,52	43,58	43,26	43,30	21,65	22,34	21,61	21,20
	0,6	44,94	44,65	44,55	43,89	29,76	30,02	29,69	29,02
	0,8	46,08	45,08	45,77	44,75	38,23	38,32	38,11	37,24
	1,0	47,18	-	46,93	45,87	47,18	-	46,93	45,87
8 m	0,2	20,72	20,92	20,69	20,89	7,03	7,33	7,03	6,91
	0,4	21,43	21,42	21,28	21,21	10,89	11,19	10,88	10,66
	0,6	21,99	21,81	21,86	21,59	14,77	14,92	14,75	14,45
	0,8	22,52	22,13	22,42	22,05	18,81	18,87	18,77	18,40
	1,0	23,05	-	22,97	22,57	23,05	-	22,97	22,57
10 m	0,2	12,20	12,24	12,16	12,18	4,25	4,42	4,25	4,18
	0,4	12,53	12,52	12,46	12,37	6,49	6,64	6,49	6,36
	0,6	12,82	12,59	12,76	12,60	8,71	8,80	8,70	8,53
	0,8	13,11	11,60	13,06	12,86	11,00	11,04	10,98	10,78
	1,0	13,39	-	13,36	13,14	13,39	-	13,36	13,14

Przykład 3

Podobnie jak w Przykładzie 2 analizowana jest belka wspornikowa o stałej wysokości $h_{p,max}$ i liniowo zmiennej szerokości półki $b_{min} = \beta b_{max}$. W tym przykładzie belka na całej swojej długości jest obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem $q = \chi$. Przyjmuje się trzy różne punkty przyłożenia obciążenia: środek ciężkości, półkę górną i półkę dolną. Analizowano belki o różnej długości belek L. Pozostałe parametry przyjmuje się podobnie jak w Przykładzie 2. Wyznaczone wartości obciążenia krytycznego q_{kryt} przedstawiono w Tabeli 8.10. i porównano z wartościami uzyskanymi za pomocą MES.

Tabela 8.10. Wartości obciążenia krytycznego [kN/m] powodującego zwichrzenie belki wspornikowej

L	β	Pas górny		Środek ścinania		Pas dolny	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
6 m	0,2	7,62	7,57	12,94	12,88	18,97	18,91
	0,4	9,19	9,16	17,39	17,31	26,13	26,03
	0,6	10,60	10,55	21,84	21,73	33,40	33,27
	0,8	11,89	11,83	26,41	26,25	40,95	40,79
	1,0	13,11	13,04	31,11	30,89	48,81	48,63
8 m	0,2	3,20	3,18	4,81	4,79	6,57	6,56
	0,4	3,89	3,88	6,35	6,33	8,89	8,87
	0,6	4,52	4,50	7,89	7,86	11,24	11,21
	0,8	5,10	5,08	9,47	9,42	13,66	13,62
	1,0	5,66	5,63	11,09	11,03	16,16	16,13
10 m	0,2	1,63	1,62	2,27	2,26	2,95	2,94
	0,4	2,00	1,99	2,96	2,95	3,93	3,92
	0,6	2,33	2,32	3,64	3,63	4,92	4,90
	0,8	2,64	2,63	4,33	4,32	5,93	5,91
	1,0	2,94	2,93	5,04	5,02	6,98	6,96

8.5. Analiza otrzymanych wyników

Testy numeryczne potwierdziły poprawność algorytmu zastosowanego do rozwiązania problemu zwichrzenia niepryzmatycznej cienkościennej belki dwuteowej o przekroju otwartym. Porównania wykazały bardzo dobrą zgodność pomiędzy wyznaczonymi

momentami krytycznymi i siłami krytycznymi oraz wartościami podanymi przez autorów [7] i wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem MES. Większe różnice można zauważyć dopiero w Przykładzie 2, gdzie wartości uzyskane przez autora są o około 0,3-13,0% wyższe niż podane w [7], ale różnią się tylko nieznacznie od wartości uzyskanych za pomocą MES.

Na uwagę zasługuje fakt istotnego wpływy zmiany lokalizacji punktu podparcia na nośność zwichrzeniową belki dwuteowej. Wpływ ten analizowano w Przykładzie 1. Efekt zmiany punktu podparcia widoczny jest zarówno dla belki o przekroju bisymetrycznym jak i dla belki o przekroju monosymetrycznym, przy czym dla belki o przekroju monosymetrycznym wpływ zmiany przesunięcia punktu podparcia jest większy. Dla analizowanego przykładu podparcie w środku ścinania w skrajnych przypadkach zmniejszało nośność zwichrzeniową o 54,4% w stosunku do podparcia w środku środnika. Efekt zmian nośności krytycznej wynikający ze zmiany lokalizacji punktu podparcia jest związany z pojawieniem się istotnej składowej siły osiowej oraz zmiany lokalizacji punktu podparcia względem osi obrotu wyznaczonej przez środki ścinania. Analiza tego zjawiska jest ważna z praktycznego punktu widzenia i pokazuje, że pominięcie w analizie układu faktycznej lokalizacji punktu podparcia może generować istotne różnice w wynikach i może prowadzić do zawyżenia obliczonej nośności krytycznej w stosunku do stanu faktycznego.

Podobny efekt zmiany nośności krytycznej obserwowano w przypadku zmiany lokalizacji poziomu obciążenia w Przykładzie 3. Przy czym efekt ten dla belek pryzmatycznych jest powszechnie znany w literaturze i uwzględniony w opracowaniach normowych i programach inżynierskich. Dla analizowanego przykładu nośność krytyczna jest najmniejsza, gdy obciążenie zlokalizowane jest na pasie górnym tj. powyżej osi obrotu wyznaczonej przez osi środków ścinania. Największą nośność krytyczną otrzymujemy w przypadku lokalizacji obciążenia na spodzie pasa dolnego tj. poniżej osi obrotu.

9. Analiza stateczności cienkościennego układu prętowego

9.1. Wprowadzenie

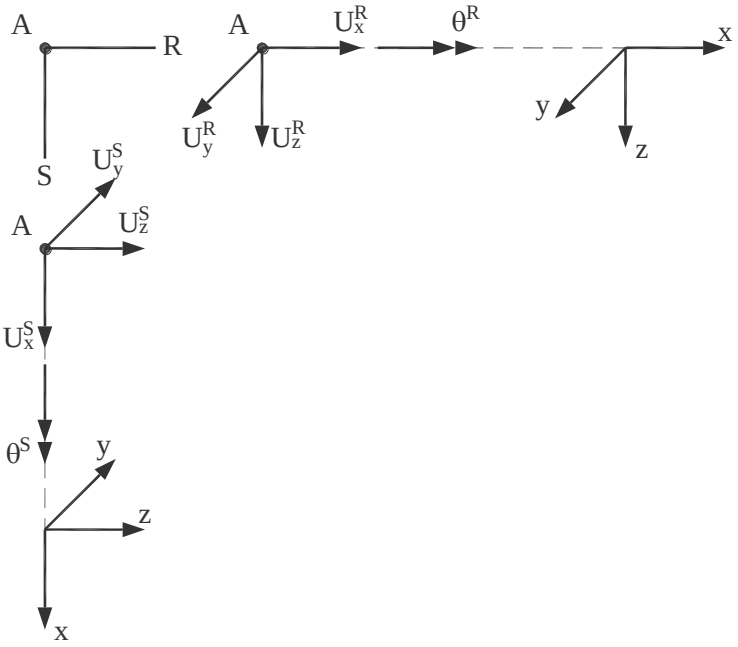
Prezentowana metoda analizy drgań własnych oraz analizy utraty stateczności nie ogranicza się jedynie do pojedynczych wyizolowanych prętów konstrukcyjnych. W celu zobrazowania tego, opisany model oraz przedstawioną metodę zastosowano do analizy utraty stateczności prostego układu prętowego. Przedstawiony sposób postępowania pokazuje, że metodę łatwo można wykorzystać do analizy bardziej złożonych układów konstrukcyjnych. Metoda może być zastosowana do analizy zagadnienia własnego oraz zagadnienie utraty stateczności dla dowolnego przestrzennego układu prętowego.

W dalszej części niniejszego rozdziału przedmiotem analizy jest prosta rama złożona ze słupa i rygla. Słup i rygiel wykonane są z prętów niepryzmatycznych o przekrojach dwuteowych bisymetrycznych. Rama obciążona będzie pionową siłą skupioną przyłożoną w swoim narożu w środku środnika.

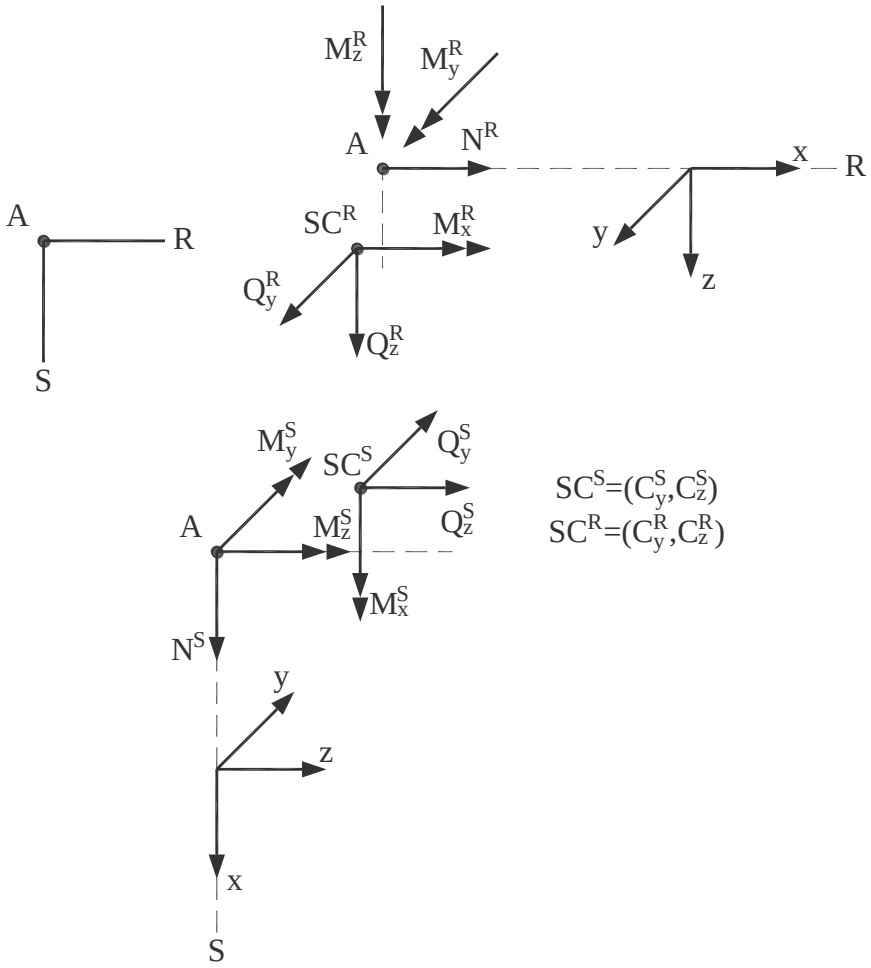
We wszystkich przykładach w celu weryfikacji poprawności przestawionego modelu i skuteczności metody rozwiązania, wyniki otrzymane z zastosowaniem prezentowanej w pracy metody, porównano z wynikami wyznaczonymi z wykorzystaniem MES (program SOFiSTiK).

9.2. Sformułowanie zagadnienia

Sprzężone równania opisujące zagadnienie utraty stateczności są identyczne z równaniami zawartymi w poprzednim rozdziale. Dla każdego pręta układu generowane są odrębne podmacierze sztywności i sztywności geometrycznej zgodnie z procedurą pokazaną w poprzednim rozdziale. Następnie, wykorzystując warunki zgodności między przemieszczeniami uogólnionymi i siłami przywęzłowymi połączonych prętów, podmacierze te są agregowane w globalną macierz sztywności i globalną macierz sztywności geometrycznej układu. Nową cechą wygenerowanych równań są dodatkowe sprzężenia występujące w warunkach brzegowych zarówno kinematycznych jak i kinetycznych zapewniające zgodność przemieszczeń i sił przywęzłowych w miejscu połączenia poszczególnych prętów. Przyjęto, że elementy prętowe łączone są ze sobą, za pośrednictwem sztywnych elementów węzłowych (patrz Rys. 9.1 i Rys. 9.2). Dodatkowo założono że lokalne osie podłużne x prętów przecinają się w punkcie A.



Rys. 9.1. Uogólnione przemieszczenia dla słupa i rygla



Rys. 9.2. Uogólnione siły wewnętrzne dla słupa i rygla

Kinematyczne warunki zgodności przemieszczeń przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} U_x^R &= U_z^S, \\ U_y^R &= -U_y^S, \\ U_z^R &= U_x^S, \\ U_{y,x}^R &= \theta^S, \\ U_{z,x}^R &= -U_{z,x}^S, \\ \theta^R &= U_{y,x}^S. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Kinetyczne warunki zgodności przemieszczeń przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} N^R &= -Q_z^S, \\ Q_y^R &= Q_y^S, \\ Q_z^R &= -N^S, \\ M_y^R &= M_y^S, \\ M_z^R &= -M_x^S + C_z^S Q_y^S - C_y^S Q_z^S, \\ M_z^S &= -M_x^R + C_z^R Q_y^R - C_y^R Q_z^R. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Dodatkowo z uwagi na wzajemne usztywnienie prętów ramy, przyjmujemy, że w węźle ramy zachodzi warunek braku spaczenia:

$$\begin{aligned} \theta_{,x}^R &= 0, \\ \theta_{,x}^S &= 0. \end{aligned} \tag{9.3}$$

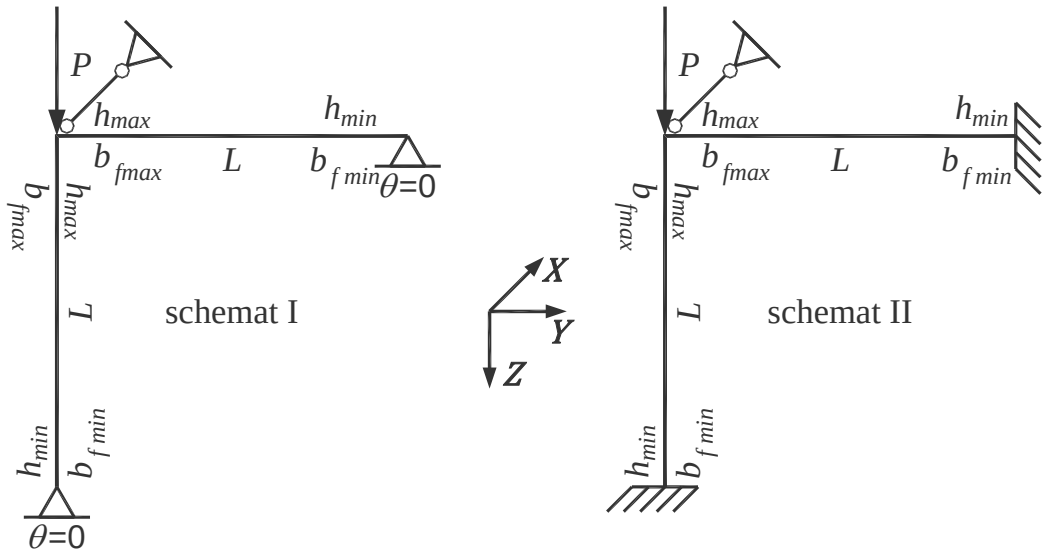
9.3. Przykłady numeryczne

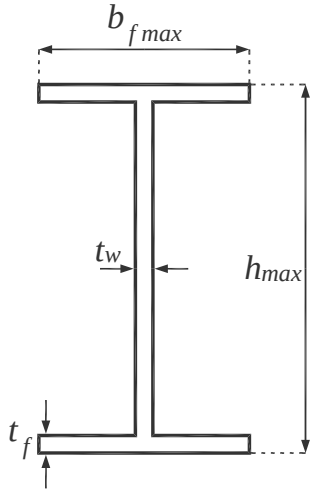
W przykładzie numerycznym analizuje się zagadnienie utraty stateczności niepryzmatycznej ramy stalowej zbudowanej z dwóch prętów o przekroju dwuteowym o następujących parametrach: $L = 4,0\ \text{m}; 6,0\ \text{m}; 8,0\ \text{m};\ E' = 210\ \text{GPa};\ \nu = 0,3$ oraz stopniach zbieżności $h_{min} = \alpha h_{max};\ \alpha = 0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ 1,0$; $b_{min} = \beta b_{max};\ \beta = 0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ 1,0$. Rama ta jest obciążona w narożu siłą skupioną przyłożoną w środku środnika $P = \chi$ (Rys. 9.3.). W przykładzie tym rozważono ramę o bisymetryczny przekrój prętów. Wymiary przekrojów ramy zostały pokazane na Rys. 9.3, dla ramy przeanalizowano dwa schematy statyczne tj.:

- schemat I w postaci ramy z podporami przegubowymi z zablokowanym przesuwem na podporach we wszystkich kierunkach oraz z zablokowanymi obrotami na kierunku podłużnym w miejscu podpór słupa i rygla,
- schemat II w postaci ramy z podporami utwierdzonymi z zablokowanym przesuwem i obrotami na podporach we wszystkich kierunkach.

We wszystkich schematach założono zablokowanie przesuwu na kierunku prostopadłym do płaszczyzny ramy węzła w którym przyłożono siłę skupioną, miejsce podparcia pokrywa się z miejscem przyłożenia siły skupionej.

Obliczone z zastosowaniem przedstawionej w pracy metody wartości sił krytycznych przedstawiono w Tabelach 9.1. i 9.2.. W tabelach przedstawiono również siły krytyczne obliczone z wykorzystaniem MES (program Sofistik).





L = 4,0; 6,0; 8,0 m
E' = 210 GPa
ν = 0,3
$h_{min} = \alpha h_{max}$
α = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0
$b_{fmin} = \beta b_{fmax}$
β = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0
h_{max} = 300 mm
b_f = 150 mm
t_f = 10,7 mm
t_w = 7,1 mm

Rys. 9.3. Schematy statyczne oraz wymiary przekrojów poprzecznych

Tabela 9.1. Wartości siły krytycznej [kN] dla ramy o schemacie I

L	α lub β	Zbieżny środnik		Zbieżne pasy	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,2	774,48	779,33	84,88	85,80
	0,4	774,70	779,57	209,73	211,69
	0,6	774,82	779,76	367,85	370,96
	0,8	774,81	779,93	556,67	560,95
	1,0	774,67	780,09	774,67	780,09
6 m	0,2	345,18	346,83	37,78	38,11
	0,4	345,24	346,88	93,38	94,07
	0,6	345,53	346,93	163,84	164,89
	0,8	345,53	346,98	248,09	249,43
	1,0	345,50	347,02	345,50	347,02
8 m	0,2	194,32	195,15	21,27	21,43
	0,4	194,34	195,20	52,56	52,91
	0,6	194,48	195,22	92,21	92,75
	0,8	194,48	195,24	139,64	140,33
	1,0	194,47	195,26	194,47	195,26

Tabela 9.2. Wartości siły krytycznej [kN] dla ramy o schemacie II

L	α lub β	Zbieżny środnik		Zbieżne pasy	
		Praca	MES Sofistik	Praca	MES Sofistik
4 m	0,2	1582,84	1587,85	167,14	170,90
	0,4	1581,57	1590,20	421,75	429,39
	0,6	1583,93	1592,73	745,33	757,93
	0,8	1581,45	1595,43	1135,43	1149,08
	1,0	1578,46	1598,27	1578,46	1598,27
6 m	0,2	705,78	708,12	74,60	75,78
	0,4	705,58	708,63	188,40	190,47
	0,6	707,12	709,17	333,06	336,39
	0,8	706,61	709,74	507,59	510,32
	1,0	706,00	710,34	706,00	710,34
8 m	0,2	397,35	398,77	42,02	42,59
	0,4	397,29	398,95	106,16	107,06
	0,6	397,13	399,13	187,70	189,11
	0,8	396,94	399,32	284,87	286,95
	1,0	396,72	399,53	396,72	399,53

9.4. Analiza otrzymanych wyników

Testy numeryczne potwierdziły poprawność algorytmu. Porównania wykazały bardzo dobrą zgodność pomiędzy wyznaczonym obciążeniem krytycznym z wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem MES.

W analizowanym przykładzie numerycznym wpływ zmiany wysokości środnika miał znikomy wpływ na nośność krytyczną. Istotny wpływ na zmianę nośności krytycznej miała zmiana szerokości pasów z uwagi na charakter utraty stateczności w postaci wyboczenia słupa z płaszczyzny ramy.

Zaprezentowana metoda może być wykorzystana do wyznaczania długości wyboczeniowych słupów dla ram o węzłach przesuwnych w przypadku prętów niepryzmatycznych. Metoda może również być z powodzeniem zastosowana do analiz bardziej złożonych układów prętowych z uwzględnieniem wpływów które były analizowane w poprzednich rozdziałach. Można ją również zastosować do bardziej złożonych przekrojów poprzecznych występujących w układach prętowych. Metoda nie ogranicza się do płaskich ustrojów prętowych i może z powodzeniem być wykorzystana do analizy przestrzennych układów prętowych.

10. Podsumowanie

W pracy wyznaczono zależności opisujących przemieszczenie przekroju poprzecznego pręta cienkościennego o dowolnie zmiennym przekroju otwartym, przy uwzględnieniu założeniu Własowa [121], wyprowadzono zależności kinematyczne dla przemieszczeń pręta cienkościennego. Wyprowadzono również zależności opisujące stan odkształceń i stan naprężenia dla zagadnienia liniowego i nieliniowego. Opisane zależności wyprowadzono względem dowolnej prostoliniowej osi odniesienia.

Następnie dla wyprowadzonych zależności kinematycznych, opisu stanu odkształcenia i stanu naprężenia zastosowano metody wariacyjne w tym zasadę minimum energii potencjalnej oraz zasadę minimalnego działania Hamiltona. Na podstawie wariacji funkcjonałów energii potencjalnej, kinetycznej oraz pracy obciążenia zewnętrznego wyprowadzono składniki równań przemieszczeniowych opisujących zachowanie pręta cienkościennego dla podstawowych zagadnień mechaniki w szczególności dla zagadnienia własnego i zagadnienia utraty stateczności. Równania opisujące zagadnienia mechaniki prętów cienkościennych wyprowadzono względem prostoliniowej osi odniesienia.

Na podstawie wyznaczonych równań opisujących zagadnienie drgań i stateczności niepryzmatycznych, cienkościennych elementów konstrukcji prętowych opracowano algorytmy wykorzystywane do rozwiązania wyprowadzonych równań. Algorytmy te zostały opracowane z zastosowaniem twierdzenia opisującego metodę przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych z wykorzystaniem wielomianów ortogonalnych Gegenbauera (patrz [52][53]). W metodzie tej układ równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach sprowadzony zostaje do nieskończonego układu równań algebraicznych. Niewiadomymi nieskończonego układu równań algebraicznych są współczynniki rozwinięcia poszukiwanych funkcji rozwiązania w szeregi Gegenbauera. Postać tych algorytmów umożliwia rozwiązanie układów, których zmienne parametry opisane są dowolnymi funkcjami. Wymagane jest jedynie, by pewne liniowe kombinacje tych funkcji i ich pochodnych dawały się rozwinąć w zbieżne szeregi Gegenbauera. Uzyskane algorytmy prowadzą do nieskończonego układu równań algebraicznych. Współczynniki tych równań są opisane zamkniętymi formułami analitycznymi.

W pracy analizowane były niepryzmatyczne pręty cienkościenne, których osie środków ciężkości i środków ścinania w ogólnym przypadku nie są prostoliniowe. Wyprowadzone zostały równania różniczkowe, opisujące drgania własne i zagadnienie utraty

stateczności takich prętów oraz przedstawiono ich rozwiązanie z wykorzystaniem aproksymacji szeregami Gegenbauera oraz opisanego w [52] twierdzenia.

W ramach przykładów analizowano zagadnienie własne i zagadnienie utraty stateczności wraz z przykładami numerycznymi. Wyprowadzone w tym przypadku równania różniczkowe, opisujące drgania własne pręta cienkościennego i zagadnienie utraty stateczności, stanowią układ czterech sprzężonych ze sobą równań różniczkowych czwartego stopnia o zmiennych współczynnikach.

W ramach przykładów numerycznych przeanalizowano wpływ rozmiaru bazy aproksymacyjnej na dokładność wyników dla zagadnienia własnego. Oszacowano zalecaną wielkości bazy aproksymacyjnej dla przekroju monosymetrycznego na poziomie 15 wielomianów aproksymacyjnych, dla przekroju bez cech symetrii, z uwagi na sprzężenia, zasadne jest zastosowanie nieznacznie większej bazy aproksymacyjnej składającej z 20 wielomianów aproksymacyjnych. Dodatkowo przeanalizowano wpływ uproszczeń polegających na pominięciu parametru β opisującego nachylenie ścianek w stosunku do osi podłużnej belki oraz pominięciu dodatkowych składników zawierających pochodne funkcji opisujących zmienne położenia środków ścinania. Stwierdzono, że pominięcie parametru β dla analizowanych przykładów, powodowało różnice w częstościach własnych na poziomie do 0,1%. Pozwala to na wyciągnięcie wniosku, że wpływ parametru β jest numerycznie pomijalny. Natomiast w przypadku pominięcia pochodnych funkcji $C_y(x), C_z(x)$ różnice w wynikach wynosiły maksymalnie około 3%. Te rezultaty również pozwalają na wyciągnięcie wniosku, że wpływ pominięcia pochodnych funkcji $C_y(x), C_z(x)$ z praktycznego punktu widzenia jest dopuszczalny. Jednak należy mieć na uwadze, że analizowane przykłady charakteryzowały się stosunkowo niedużą niepryzmatycznością powodującą niedużą zmiennością położenia osi środków ścinania, a co za tym idzie ich pochodne były małe. W przypadku gdy ta zmienność byłaby większa oraz w przypadku stosowania zaproponowanej w niniejszej rozprawie metody do weryfikacji innych metod numerycznych, zasadne jest uwzględnienie wpływy pochodnych funkcji $C_y(x), C_z(x)$.

W pracy zbadano wpływ na rozwiązanie zagadnienia drgań własnych prętów czynnika związanego z geometrią pręta i jego schematem statycznym. Przedmiotem analizy było również sprawdzenie, jaki wpływ na rozwiązanie zagadnienie własnego ma zmiana punktu podparcia (przy czym zmiana położenia tego punku odbywała się tylko w ramach ustalonego tego samego przekroju pręta). Analiza tego zagadnienia, w znanej autorowi niniejszej pracy

literaturze, jest pomijana. Na podstawie wykonanych analiz stwierdzono, że zmiana tego punktu ma istotny wpływ na otrzymywane wyniki. W skrajnych przypadkach zmiana punktu podparcia w ramach ustalonego przekroju poprzecznego pręta generowała różnice w częstościach własnych wynoszące 51,4%. Dodatkowo przy zmianie punktu podparcia zmieniała się również kolejność form własnych i ich charakter. Największe różnice obserwuje się w przypadku belki ze swobodą obrotu względem osi podłużnej na jednej z podpór.

W przypadku zagadnienia własnego dokonano również porównania wyników przy zastosowaniu różnych wielomianów aproksymacyjnych przy różnych wielkościach bazy aproksymacyjnej. Stwierdzono, że w przypadku analizowanych przykładów, różnice wyników dla wszystkich trzech typów wielomianów aproksymacyjnych branych pod uwagę, są niewielkie.

W pracy wykonano również analizę wpływu na rozwiązania zagadnienia własnego „niewielkiego" zakrzywienia osi pręta przy zachowaniu tego samego przekroju poprzecznego. Otrzymane wyniki pokazały istotne zmiany ilościowe i jakościowe w porównywanych rozwiązaniach. W zakresie częstości własnych znaczne różnice dotyczą początkowych częstości, natomiast w zakresie form własnych istotne zmiany dotyczą wszystkich 10 analizowanych form własnych. Znaczne zmiany częstości w porównywanych parach belek dotyczą dwóch pierwszych częstości własnych. Względne różnice (w odniesieni do wartości wyznaczonych dla belek o osi prostoliniowej) zawarte są w przedziale od 13,9% do 29,9%. Dla dalszych częstości własnych różnice są znacznie mniejsze i mieszczą się w przedziale od 0,1% do 4,7%. Jakościowe zmiany, które pojawiały się w formach własnych belek o osi o „niewielkim" zakrzywieniu, polegały na wystąpieniu w tych formach sprzężeń drgań. Sprzężenia występowały między drganiami giętnymi B_y lub B_z, a drganiami skrętnymi T. W przypadku, zakrzywienie osi belki w płaszczyźnie xz występowało sprzężenie drgań skrętnych T z drganiami giętnymi B_y (drganiami prostopadłymi do płaszczyzny zakrzywienia osi). Analogicznie w przypadku zakrzywienia osi belki w płaszczyźnie xy w formach własnych pojawiają się sprzężenia między drganiami skrętnymi T i drganiami prostopadłymi do płaszczyzny zakrzywienia osi tj. drganiami B_z. Oprócz sprzężeń giętno-skrętnych w formach własnych pojawiają się sprzężenia między drganiami giętnymi i podłużnymi. W tym przypadku, jeżeli oś belki jest zakrzywiona w płaszczyźnie xz, to powstaje sprzężona forma BzA . Analogicznie w przypadku zakrzywienia osi w płaszczyźnie xy generowana jest forma ByA.

W ramach analizy zagadnienia utraty stateczności prętów cienkościennych, rozwiązano zagadnienie zwichrzenia belki przegubowo-przegubowej o liniowo zmiennym monosymetrycznym i bisymetrycznym przekroju poprzecznym, obciążonej momentami skupionymi na końcach. W analizie uwzględniono zmianę lokalizacji punktu podparcia w ustalonym przekroju podporowym. Efekt zmiany punktu podparcia widoczny był zarówno dla belki o przekroju bisymetrycznym jak i dla belki o przekroju monosymetrycznym, przy czym dla belki o przekroju monosymetrycznym wpływ zmiany przesunięcia punktu podparcia jest większy. Dla analizowanego przykładu podparcie w środku ścinania w skrajnych przypadkach zmniejszało nośność zwichrzeniową o 54,4% w stosunku do podparcia w środku środnika. Przeanalizowano również przykład belki wspornikowej o liniowo zmiennym bisymetrycznym przekroju poprzecznym, obciążoną siłą skupioną na końcu wspornika. Dokonano również analizy wpływu punktu przyłożenia obciążenia dla niepryzmatycznej belki bisymetrycznej o obciążeniu równomiernie rozłożonym.

W pracy zaprezentowano również metodę analizy stateczności prętów cienkościennych do rozwiązania zagadnienia stateczności prostego niepryzmatycznego układu prętowego w postaci ramy złożonej z dwóch prętów o liniowo zmiennym bisymetrycznym przekroju poprzecznym obciążonej siłą skupioną w węźle. Testy numeryczne potwierdziły poprawność algorytmu. Porównania wykazały bardzo dobrą zgodność pomiędzy wyznaczonym obciążeniem krytycznym z wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem MES. Różnice między otrzymanymi wynikami mieściły się w zakresie około 1%. W analizowanym przykładzie numerycznym wpływ zmiany wysokości środnika miał znikomy wpływ na nośność krytyczną. Istotny wpływ na zmianę nośności krytycznej miała zmiana szerokości pasów z uwagi na charakter utraty stateczności w postaci wyboczenia słupa z płaszczyzny ramy. Zaprezentowana metoda może być wykorzystana do wyznaczania długości wyboczeniowych słupów dla ram o węzłach przesuwnych w przypadku prętów niepryzmatycznych.

Otrzymana w pracy końcowa postać układu równań pozwala na bezpośrednie rozwiązanie zagadnienia drgań własnych i stateczności niepryzmatycznych, cienkościennych elementów konstrukcji prętowych o dowolnych parametrach. Wystarczy tylko podstawić we wzorach określających współczynniki układu równań odpowiednie funkcje określające parametry prętów. W przypadku zmiany warunków podparcia należy również zmodyfikować równania określające warunki brzegowe. Metoda może również być z powodzeniem zastosowana do analiz bardziej złożonych układów prętowych z uwzględnieniem wpływów które nie były analizowane w niniejszej pracy. Można ją również zastosować do bardziej

złożonych przekrojów poprzecznych występujących w układach prętowych. Metoda nie ogranicza się do płaskich ustrojów prętowych i może z powodzeniem być wykorzystana do analizy przestrzennych układów prętowych.

Rozwiązane przykłady numeryczne pokazują dużą zgodność otrzymanych wyników z wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem innych metod: metody elementów skończonych, aproksymacji klasycznymi szeregami potęgowymi Taylora. Ponadto w szczególnych przypadkach, gdy problem ma zamknięte rozwiązanie analityczne, zaobserwowano bardzo dużą dokładność wyników otrzymanych przy użyciu przedstawionej metody. Otrzymane rozwiązania praktycznie nie różniły się od wyników wyznaczonych analitycznie.

Należy zwrócić uwagę, że rozwiązanie z wykorzystaniem wielomianów Gegenbauera umożliwia wyznaczenie wyższych częstości własnych analizowanego układu niż rozwiązanie uzyskane z zastosowaniem aproksymacji szeregami potęgowymi Taylora (przy jednakowym rozmiarze bazy aproksymacyjnej).

Przedstawione przykłady i uzyskane wyniki pokazują zatem, że rozwiązania otrzymane z wykorzystaniem przedstawionej w pracy metody są obarczone bardzo małymi błędami względnymi, nawet o kilka rzędów mniejszymi niż rozwiązania uzyskane innymi metodami. Otrzymane rozwiązania mogą zatem służyć do testowania innych metod rozwiązania. Rozwiązane w pracy przykłady pokazują także, że uzyskanie dokładnych wyników wymaga stosunkowo niedużej bazy aproksymacyjnej. Aproksymacja każdej z poszukiwanych funkcji około 15-20 wyrazami szeregu daje wystarczająco dokładne rozwiązania.

Podsumowując, można stwierdzić, że wyprowadzone algorytmy umożliwiają rozwiązanie układu o dowolnych parametrach geometrycznych i mechanicznych, zatem przedstawiona w pracy metoda jest ogólna. Porównanie otrzymanych wyników z wynikami uzyskanymi z zastosowaniem innych metod potwierdziło poprawność przedstawionej metody. Można także stwierdzić, że prezentowana metoda dobrze przybliża rozwiązanie dokładne, dając bardzo małe błędy względne, zaś uzyskanie wystarczająco dokładnych wyników wymaga stosunkowo niewielkiej bazy aproksymacyjnej.

Zaletą metod aproksymacyjnych jest uzyskiwanie rozwiązania w postaci półanalityczej, która to umożliwia dogodne wykonywanie dalszych przekształceń. Następnie dla wyprowadzonych zależności kinematycznych, opisu stanu odkształcenia i stanu naprężenia dla niepryzmatycznych konstrukcji cienkościennych możliwe jest prowadzenie dalszych badań.

Obszerność i złożoność problemów dotyczących mechaniki prętowych konstrukcji cienkościennych powoduje, że niniejsza praca stanowi potencjalny punkt wyjścia do dokonywania dalszych bardziej złożonych analiz takich jak np. analiza drgań wymuszonych kinematycznie, analiza wpływ usztywnień na długości pręta, analiza wpływów nieliniowych. Opracowane równania, opisujące mechanikę prętowych konstrukcji cienkościennych i algorytmy ich rozwiązywania przy nieznacznych modyfikacjach mogą być z powodzeniem zastosowane do analizy innych zagadnień dotyczących prętowych konstrukcji cienkościennych, nie poruszanych w niniejszej rozprawie.

Literatura

[1] ACHOUR B., ROBERTS T. M., *Nonlinear strains and instability of thin-walled bars,* Journal of Constructional Steel Research (2000), 56 (3), s. 237–252.

[2] AMBROSINI R. D., RIERA J. D., DANESI R. F., *A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams,* Engineering Structures (2000), 22 (8), s. 890-900.

[3] ANDRADE A., CAMOTIM D., *Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: Theory and applications,* Journal of Engineering Mechanics (2005), 131 (6), s. 586-597.

[4] ANDRADE A., CAMOTIM D., DINIS P. B., *Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA,* Computers & Structures (2007), 85 (17-18), s. 1343-1359.

[5] ANDRADE A., PROVIDÊNCIA P., CAMOTIM D., *Elastic lateral-torsional buckling of restrained web-tapered I-beams,* Computers & Structures (2010), 88 (21-22), s. 1179-1196.

[6] ARPACI A., BOZDAG S. E., *On free vibration analysis of thin-walled beams with nonsymmetrical open cross-sections,* Computers & Structures (2002), 80 (7-8), s. 691-695.

[7] ASGARIAN B., SOLTANI M., MOHRI F., *Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections,* Thin-Walled Structures (2013), 62, s. 96-108.

[8] BAZANT Z. P., CEDOLIN L., *Stability of structures. Elastic, inelastic, fracture and damage theories,* Dover Publications, New York, 1991.

[9] BENYAMINA A. B., MEFTAH S. A., MOHRI F., DAYA E. M., *Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams,* Engineering Structures (2013), 56, s. 1207-1219.

[10] BIEGUS A., *Stalowe budynki halowe,* Arkady, Warszawa 2004.

[11] BORBÓN F., AMBROSINI D., *On free vibration analysis of thin-walled beams axially loaded,* Thin-Walled Structures (2010), 48 (12), s. 915-920.

[12] BRANFORD M. A., *Inelastic buckling of tapered monosymmetric I-beams,* Engineering Structures (1989), 11 (2), s. 119-126.

[13] BRANFORD M. A., *Stability of tapered I-beams,* Journal of Constructional Steel Research (1988), 9 (3), s. 195-216.

[14] BRANFORD M. A., CUK P. E., *Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams,* Journal of Structural Engineering (1988), 114 (5), s. 977-996.

[15] BREZINA V., *Stateczność prętów konstrukcji metalowych*, Arkady, Warszawa 1966.

[16] BRZOSKA Z., *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1965.

[17] CHALLAMEL N., ANDRADE A., CAMOTIM D., *An analytical study on the lateral-torsional buckling of linearly tapered cantilever strip beams,* International Journal of Structural Stability and Dynamics (2007), 7 (3), s. 441-456.

[18] CHALLAMEL N., WANG C. M., *Exact lateral–torsional buckling solutions for cantilevered beams subjected to intermediate and end transverse point loads,* Thin-Walled Structures (2010), 48 (1), s. 71-76.

[19] CHEN C. N., *Variational derivation of the dynamic equilibrium equations of nonprismatic thin-walled beams defined on an arbitrary coordinate system*, Mechanics of Structures and Machines (1998), 26 (2), s. 219-237.

[20] CHEN W. F., LUI E. M., *Structural stability, theory and implementation*, Elsevier, New York 1987

[21] EGIDIO A. D., VESTRONI F., *Static behavior and bifurcation of a monosymmetric open cross-section thin-walled beam: Numerical and experimental analysis*, International Journal of Solids and Structures (2011), 48, s. 1894-1905.

[22] EISENBERGER M., *Torsional vibrations of open and variable cross-section bars*, Thin-Walled Structures (1997), 28 (3-4), s. 269-278.

[23] EL-MAHDY G. M., EL-SAADAWY M. M., *Ultimate strength of singly symmetrical I-section steel beams with variable flange ratio*, Thin-Walled Structures (2015), 87, s. 149-157.

[24] ERKMEN R. E., MOHAREB M., *Buckling analysis of thin-walled open members - A complementary energy variational principle*, Thin-Walled Structures (2008), 46 (6), s. 602-617.

[25] ERKMEN R. E., MOHAREB M., *Buckling analysis of thin-walled open members - A finite element formulation*, Thin-Walled Structures (2008), 46 (6), s. 618-636.

[26] FUNG Y. C., *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1969.

[27] GAWĘCKI A., *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Tom 1*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1998.

[28] GAWĘCKI A., *Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Tom II*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1998.

[29] GELFAND I. M., FOMIN S. W., *Rachunek wariacyjny*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970.

[30] GERE J. M., *Torsional Vibrations of Beams of Thin-Walled Open Section.* Journal of Applied Mechanics (1954), 21(4), s. 381-387.

[31] GIŻEJOWSKI M., *Zwichrzenie belek stalowych o ograniczonej zdolności do obrotu na podporach*, Inżynieria i Budownictwo (2001), 10, s. 589-594.

[32] GJELSVIK A., *The theory of thin walled bars*, Wiley, New York 1981.

[33] GHAZARYAN D., BURLAYENKO V. N., AVETISYAN A., BHASKAR A., *Free vibration analysis of functionally graded beams with non-uniform cross-section using the differential transform method*, Journal of Engineering Mathematics (2018), 110, s. 97-121.

[34] GLABISZ W., *MATHEMATICA w zagadnieniach mechaniki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003.

[35] GOSOWSKI B., *Skręcanie i zginanie elementów konstrukcji metalowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004.

[36] GREEN A. E., ZERNA W., *Theoretical elasticity*, Clarendon Press, Oxford 1954.

[37] GUPTA P., WANG S. T., BLANDFORD G. E., *Lateral-torsional buckling of nonprismatic I-beams*, Journal of Structural Engineering (1996), 122 (7), s. 748-755.

[38] IBAÑEZ J. R., SERNA M. A., *Equivalent moment approach for elastic lateral-torsional buckling of tapered beams*, International Journal of Structural Stability and Dynamics (2010), 10 (3), s. 387-409.

[39] JANG G. W., KIM Y. Y., *Theoretical analysis of coupled torsional, warping and distortional waves in a straight thin-walled box beam by higher-order beam theory*, Journal of Sound and Vibration (2011), 330, s. 3024-3039.

[40] KIM B., OLIVER A., VYSE J., *Bending stresses of steel web tapered tee section cantilevers*, Journal of Civil Engineering and Architecture (2013), 7(11), s. 1329-1342.

[41] KIM M. Y., KIM N. I., YUN H. T., *Exact dynamic and static stiffness matrices of shear deformable thin-walled beam-columns*, Journal of Sound and Vibration (2003), 267, s. 29-55.

[42] KIM S. B., KIM M. Y., *Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frame*, Engineering Structures (2000), 22 (5), s. 446-458.

[43] KITIPORNCHAI S., TRAHAIR N. S., *Elastic stability of tapered I-beams*, Journal of the Structural Division (1972), 98 (3), s. 713-728.

[44] KITIPORNCHAI S., TRAHAIR N. S., *Elastic behavior of tapered monosymmetric I-beams*, Journal of the Structural Division (1975), 101 (8), s. 1661-1678.

[45] KLEIBER M., red., *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, Mechanika Techniczna, T. XI, PWN, Warszawa 1995, Praca pod redakcją M. Kleibera, Autorzy: A. Borkowski, T. Burczyński, L. Demkowicz, K. Dems, J. Grabacki, W. Gutkowski, Z. Kączkowski, M. Kleiber, J. Kruszewski, Z. Mróz, J. Orkisz, Z. Waszczyszyn.

[46] KOZŁOWSKI T., PIECHNIK S., STOJEK Z., *Zastosowanie rachunku wariacyjnego do zagadnień mechaniki budowli*, Biblioteka Inżynierii i Budownictwa, Warszawa 1967.

[47] KUŚ J., *Analiza stateczności belek ze zbieżnymi przekrojami poprzecznymi (rozprawa doktorska),* Politechnika Opolska, Opole, 2012.

[48] KUŚ J., *Lateral-torsional buckling steel beams with simultaneously tapered flanges and web*, Steel and Composite Structures (2015), 19 (4), s. 897-916.

[49] KUŚ J., *Momenty krytyczne zwichrzenia stalowych belek dwuteowych z liniowo zmiennymi wysokością środnika i szerokością pasa*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej s. Budownictwo i Inżynieria Środowiska (2012), 59, s. 217-224.

[50] LEE J., *Lateral buckling analysis of thin-walled laminated composite beams with monosymmetric sections*, Engineering Structures (2006), 28 (14), s. 1997-2009.

[51] LEUNG A. Y. T., *Exact dynamic stiffness for axial-torsional buckling of structural frames*, Thin-Walled Structures (2008), 46 (1), s. 1–10.

[52] LEWANOWICZ S., *A new approach to the problem of constructing recurrence relations for the Jacobi coefficients*, Applicationes Mathematicae (1991), 21, s. 303-326.

[53] LEWANOWICZ S., *Construction of a recurrence relation of the lowest order for coefficients of the Gegenbauer series*, Applicationes Mathematicae (1976), 15 (3), s. 345-396.

[54] LIBRESCU P. L., OH S. Y., SONG O., *Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability*, Journal of Thermal Stresses (2005), 28 (6–7), s. 649-712.

[55] ŁUBIŃSKI M., FILIPOWICZ A., ŻÓŁTOWSKI W., *Konstrukcje metalowe. Część 1. Podstawy projektowania*, Arkady, Warszawa 2007.

[56] ŁUBIŃSKI M., ŻÓŁTOWSKI W., *Konstrukcje metalowe. Część 2. Obiekty budowlane,* Arkady, Warszawa 2015.

[57] MACHADO S. P., CORTÍNEZ V. H., *Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations,* Engineering Structures (2007), 29 (3), s. 372-382.

[58] MACHADO S. P., CORTÍNEZ V. H., *Non-linear model for stability of thin-walled composite beams with shear deformation,* Thin-Walled Structures (2005), 43 (10), s. 1615-1645.

[59] MEISSNER M., *Analiza drgań niepryzmatycznych, krzywoliniowych dźwigarów prętowych z wykorzystaniem wielomianów Czebyszewa (rozprawa doktorska),* Politechnika Wrocławska, Wrocław 2015.

[60] MOHRI F., AZRAR L., POTIER-FERRY M., *Vibration analysis of buckled thin-walled beams with open sections,* Journal of Sound and Vibration (2004), 275 (1-2), s. 434-446.

[61] MOHRI F., BROUKI A., ROTH J. C., *Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams*, Journal of Constructional Steel Research (2003), 59 (1), s. 63-90.

[62] MOHRI F., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *Large torsion finite element model for thin-walled beams,* Computers & Structures (2008), 86 (7-8), s. 671-683.

[63] MOHRI F., DAMIL N., POTIER-FERRY M., *Linear and non-linear stability analyses of thin-walled beams with monosymmetric I sections,* Thin-Walled Structures (2010), 48 (4-5), s. 299-315.

[64] NGUYEN C. T., MOON J., LE V. N., LEE H., *Natural frequency for torsional vibration of simply supported steel I-girders with intermediate bracings,* Thin-Walled Structures (2011), 49 (4), s. 534-542.

[65] NGUYEN N. D., NGUYEN T. K., VO T. P., NGUYEN T. N., LEE S., *Vibration and buckling behaviours of thin-walled composite and functionally graded sandwich I-beams,* Composites Part B: Engineering (2019), 166, s. 414-427.

[66] NGUYEN T. T., THANG P. T., LEE J., *Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams,* Thin-Walled Structures (2017), 110, s. 88-96.

[67] NGUYEN T. T., THANG P. T., LEE J., *Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams,* Composite Structures (2017), 160, s. 952-963.

[68] NOWACKI W., *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.

[69] NOWACKI W., *Mechanika budowli*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.

[70] OSMANI A., MEFTAH S. A., *Lateral buckling of tapered thin walled bi-symmetric beams under combined axial and bending loads with shear deformations allowed*, Engineering Structures (2018), 165 (15), s. 76-87.

[71] PASQUINO M., MAROTTI DE SCIARRA F., *Buckling of thin-walled beams with open and generically variable section,* Computer & Structures (1992), 44 (4), s. 843-849.

[72] PASZKOWSKI S., *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.

[73] POLYZOIS D., RAFTOYIANNIS I. G, *Lateral-torsional stability of steel web-tapered I-beams*, Journal of Structural Engineering (1998), 124 (10), s. 1208-1216.

[74] RAFTOYIANNIS I. G., ADAMAKOS T., *Critical Lateral-Torsional Buckling Moments of Steel Web-Tapered I-beams*, The Open Construction and Building Technology Journal (2010), 4, s. 105-112.

[75] RAFTOYIANNIS I. G., ERMOPOULOS J. C., *A Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections*, Engineering Structures (2005), 27 (8), s. 1248-1257.

[76] RAJASEKARAN S., KHANIKI H. B., *Bi-directional functionally graded thin-walled non-prismatic Euler beams of generic open/closed cross section Part I: Theoretical formulations*, Thin-Walled Structures (2019), 141, s. 627-645.

[77] RAJASEKARAN S., KHANIKI H. B., *Bi-directional functionally graded thin-walled non-prismatic Euler beams of generic open/closed cross section Part II: Static, stability and free vibration*, Thin-Walled Structures (2019), 141, s. 646-674.

[78] RAJASEKARAN S., NALINAA K., *Stability and vibration analysis of nonprismatic thin-walled composite spatial members of generic section*, International Journal of Structural Stability and Dynamics (2005), 5 (4), s. 489-520.

[79] REZAIEE-PAJAND M., MASOODI A. R., ALEPAIGHAMBAR A., *Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing*, Steel and Composite Structures (2018), 28 (4), s. 403-414.

[80] RONAGH H. R., BRADFORD M. A., *A rational model for the distortional buckling of tapered members*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1996), 130 (3-4), s. 263-277.

[81] RONAGH H. R., BRADFORD M. A., ATTARD M. M., *Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory*, Computers & Structures (2000), 77 (3), s. 285-299.

[82] RONAGH H. R., BRADFORD M. A., ATTARD M. M., *Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Application*, Computers & Structures (2000), 77 (3), s. 301-313.

[83] RUTA P., *Application of Chebyshev series to solution of non-prismatic beam vibration problems*, Journal of Sound and Vibration (1999), 227(2), s. 449–467.

[84] RUTA P., *Dynamic stability problem of non-prismatic rod*, Journal of Sound and Vibration (2002), 250 (3), s. 445–464.

[85] RUTA P., *The application of Chebyshev polynomials to the solution of the nonprismatic Timoshenko beam vibration problem*, Journal of Sound and Vibration (2006), 296 (1–2), s. 243–263.

[86] RUTA P., *Zastosowanie wielomianów Czebyszewa w dynamice dźwigarów o zmiennych parametrach geometrycznych i mechanicznych*, Oficyna Wydawnicza PWr, Wrocław 2007.

[87] RUTA P., MEISSNER M., *Out-of-plane vibrations of curved nonprismatic beam under a moving load*, Journal of Civil Engineering and Management (2012), 18 (6), s.773-782.

[88] RUTA P., SZYBIŃSKI J., *Free vibration of non-prismatic sandwich beams using the Chebyshev series*, Procedia Engineering (2014), 91, s. 105–111.

[89] RUTA P., SZYBIŃSKI J., *Lateral stability of bending non-prismatic thin-walled beams using orthogonal series*, Procedia Engineering (2015), 111, s. 694–701.

[90] RUTA P., SZYBIŃSKI J., *Nonlinear analysis of nonprismatic Timoshenko beam for different geometric nonlinearity models*, International Journal of Mechanical Sciences (2015), 101–102, s. 349–362.

[91] RUTECKI J., *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1957.

[92] RUTECKI J., *Cienkościenne konstrukcje nośne. Obliczenia wytrzymałościowe*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966.

[93] RYKALUK K., *Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych,* Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2012.

[94] SAKA M. P., *Optimum design of steel frames with tapered members*, Computers & Structures (1997), 63, s. 797-811.

[95] Simulia ABAQUS User's Manuals, ver. 6.14-2, 2014.

[96] SHEN Y., ZHU Z., WANG S., WANG G., *Dynamic analysis of tapered thin-walled beams using spectral finite element method*, Shock and Vibration (2019), Article ID 2174209.

[97] SMITH W. G., *Analytic solutions for tapered column buckling*, Computers & Structures (1988), 28 (5), s. 677-681.

[98] SOFiSTiK v2022. User's Manuals. SOFISTIK AG. Oberschleissheim, Niemcy, 2022.

[99] SOLTANI M., *A novel approach for lateral buckling assessment of double tapered thin-walled laminated composite I-beams*, Mechanics of Advanced Composite Structures (2022), 9, s. 11-23.

[100] SOLTANI M., ASGARIAN B., *Exact stiffness matrices for lateral–torsional buckling of doubly symmetric tapered beams with axially varying material properties*, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering (2021), 45, s. 589-609.

[101] SOLTANI M., ASGARIAN B., *Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section*, Mechanics of Composite Materials (2020), 56, s. 39-54.

[102] SOLTANI M., ASGARIAN B., *New hybrid approach for free vibration and stability analyses of axially functionally graded Euler-Bernoulli beams with variable cross-section resting on uniform Winkler-Pasternak foundation*, Latin American Journal of Solids and Structures (2019), 16 (3), e173.

[103] SOLTANI M., ASGARIAN B., MOHRI F., *Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method*, Journal of Constructional Steel Research (2014), 96, s. 106-126.

[104] SOLTANI M., ASGARIAN B., MOHRI F., *Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams*, Thin-Walled Structures (2014), 82, s. 245-261.

[105] SOLTANI M., ASGARIAN B., MOHRI F., *Improved finite element model for lateral stability analysis of axially functionally graded nonprismatic I-beams*, International Journal of Structural Stability and Dynamics (2019), 19 (9), 1950108.

[106] SOLTANI M., ATOUFI F., MOHRI F., DIMITRI R., *Nonlocal elasticity theory for lateral stability analysis of tapered thin-walled nanobeams with axially varying materials*, Thin-Walled Structures (2021), 159, 107268.

[107] SOLTANI M., ATOUFI F., MOHRI F., DIMITRI R., TORNABENE F., *Nonlocal analysis of the flexural-torsional stability for FG tapered thin-walled beam-columns*, Nanomaterials (Basel) (2021), 11 (8), 1936.

[108] SOLTANI M., GHAREBAGHI S. A., MOHRI F., *Lateral stability analysis of steel tapered thin-walled beams under various boundary conditions*, Journal of Numerical Methods in Civil Engineering (2018), 3 (1) , 13-25.

[109] SURYOATMONO B., HO D., *The moment–gradient factor in lateral–torsional buckling on wide flange steel sections*, Journal of Constructional Steel Research (2002), 58 (9), s. 1247-1264.

[110] SZYBIŃSKI J., RUTA P., *An analysis of the effect of a change in the support point location on the vibration of thin-walled beams,* International Journal of Structural Stability and Dynamics (2021)., 21 (9), art. 2150125, s. 1–39.

[111] SZYBIŃSKI J., RUTA P., *Analiza drgań swobodnych niepryzmatycznego pręta cienkościennego,* Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury (2014)., t. 31, z. 61, nr 2, s. 173–184.

[112] SZYBIŃSKI J., RUTA P., *Analysis of thin-walled beams with variable monosymmetric cross section by means of Legendre polynomials,* Studia Geotechnica et Mechanica (2019)., 41 (1), s. 1–12.

[113] SZYBIŃSKI J., RUTA P., *Effect of a "slight" curvature of the axis of a thin-walled nonprismatic beam on its free vibration,* International Journal of Structural Stability and Dynamics (2022)., 22 (7), art. 2250041, s. 1–25.

[114] TIMOSHENKO S. P., *Teoria sprężystości,* Arkady, Warszawa 1962.

[115] TIMOSHENKO S. P., GERE J. M., *Mechanics of materials,* Van Nostrand Reinhold Company, New York 1972.

[116] TIMOSHENKO S. P., GERE J. M., *Theory of elastic stability,* McGraw-Hill Book, London, 1961.

[117] WANG C. M., THEVENDRAN V., TEO K. L., KITIPORNCHAI S., *Optimal design of tapered beams for maximum buckling strength,* Engineering Structures (1986), 8 (4), s. 276-284.

[118] WASHIZU K., Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, Oxford 1982.

[119] WEISS S., GIŻEJOWSKI M., *Stateczność konstrukcji metalowych. Układy prętowe,* Arkady, Warszawa 1991.

[120] WILDE P., *The torsion of thin-walled bars with variable cross-section,* Archiwum Mechaniki Stosowanej (1968), 4 (20), s. 431–443.

[121] WŁASOW W. Z., *Tonkostiennyje uprugije stierżni.* Wyd. I, 1940, Wyd. II. Gosudarstwiennoje Izdztielstwo Fiziko-Matiematiczeskoj Litieratury, Moskwa 1959.

[122] Wolfram Mathematica 12. Wolfram Research ©Copyright 1988-2019.

[123] YANG Y. B., YAU J. D., *Stability of beams with tapered I-sections,* Journal of Engineering Mechanics (1987), 113 (9), s. 1337-1357.

[124] YAU J. D., *Stability of tapered I-Beams under torsional moments,* Finite Elements in Analysis and Design (2006), 42 (10), s. 914-927.

[125] ZHANG L., TONG G. S., *Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory,* Journal of Constructional Steel Research (2008), 64 (12), s. 1379-1393.

Streszczenie

Przedmiotem analizy w niniejszej pracy było zagadnienie drgań własnych i zagadnienie utraty stateczności dla niepryzmatycznych, cienkościennych elementów konstrukcji prętowych. Rozważane były niepryzmatyczne pręty cienkościenne o dowolnej zmienności parametrów geometrycznych na długości pręta. W przypadku ogólnym tj. w przypadku braku cech symetrii przekroju poprzecznego, osie wyznaczone przez środki ciężkości i środki ścinania przekrojów poprzecznych są osiami krzywoliniowymi zarówno w płaszczyźnie pionowej jak i w płaszczyźnie poziomej. Wykorzystując bezmomentową teorię powłok oraz założenia teorii Własowa, zagadnienia drgań własnych i utraty stateczności dla takich prętów cienkościennych zostały opisane układem równań różniczkowych czwartego stopnia o zmiennych współczynnikach. Równania wyprowadzone zostały względem dowolnej prostoliniowej osi odniesienia. W celu rozwiązania otrzymanego układu równań różniczkowych, zastosowano metodę aproksymacyjną, w której rozwiązań poszukuje się w postaci rozwinięć funkcji przemieszczeń uogólnionych w szeregi wielomianów ortogonalnych Gegenbauera. W wyniku zastosowania tej metody otrzymano nieskończony układ równań algebraicznych. Wyprowadzone równania pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie współczynników rozwinięć poszukiwanych funkcji przemieszczeń.

Opisaną metodę w pierwszej kolejności zastosowano do rozwiązania zagadnienia drgań własnych dowolnego niepryzmatycznego pręta cienkościennego o przekroju otwartym. Wyprowadzono ogólne równania, opisujące zagadnienie drgań własnych i przedstawiono ich rozwiązanie zaprezentowaną w pracy metodą. W przypadku ogólnym dla pręta bez cech symetrii przekroju poprzecznego otrzymano przestrzenne sprzężone formy drgań własnych. Poprawność wyprowadzonych równań i zastosowanej metody aproksymacyjnej sprawdzono, porównując otrzymane wyniki częstości własnych z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych. W ramach wykonanych analiz numerycznych zbadano wpływ rozmiaru bazy aproksymacyjnej oraz wpływ pominięcia pochodnych funkcji opisujących położenie środka ścinania na dokładność rozwiązania.

W następnym etapie bazując na otrzymanych równaniach, opisujących zagadnienie własne, zbadano wpływ zmiany położenia punktu podparcia na drgania swobodne pręta cienkościennego. Analiza dotyczyła zmiany punktu podparcia w ramach ustalonego przekroju podporowego. Na podstawie przeprowadzonych analiz numerycznych stwierdzono istotny

wpływ zmiany położenia punktu podparcia na drgania swobodne pręta cienkościennego, a co za tym idzie również na inne cechy, opisując zachowanie konstrukcji. Potwierdzeniem poprawności otrzymanych wyników było porównanie ich z wynikami otrzymanymi z zastosowaniem MES.

Kolejnym elementem niniejszej rozprawy było zbadanie wpływu „niewielkiego" zakrzywienia osi pręta cienkościennego na drgania swobodne. Przy czym przez określenie „niewielkie" rozumiano takie zakrzywienie pręta, przy którym do jego opisu stosuje się klasyczną teorię belek niepryzmatycznych. W pracy wykazano, że nawet „niewielkie" zakrzywienie osi belki ma istotny wpływ na jej częstości i formy własne. Wyniki porównano z wynikami otrzymanymi z zastosowaniem MES.

Drugim niezwykle istotnym z punktu widzenia praktycznego zagadnieniem analizowanym w pracy było zagadnienie utraty stateczności. Wyprowadzono ogólne równania, opisujące zagadnienie utraty stateczności dla dowolnego niepryzmatycznego pręta cienkościennego o przekroju otwartym i przedstawiono ich rozwiązanie zaprezentowaną w pracy metodą aproksymacyjną. Pokazano dobrą zgodność wyników obciążenia krytycznego otrzymanych prezentowaną metodą z rezultatami otrzymanymi metodą elementów skończonych oraz z wynikami otrzymanymi przez innych autorów. W ramach analizy zagadnienia utraty stateczności zbadano również wpływ zmiany położenia punktu podparcia na obciążenie krytyczne dla pręta cienkościennego. Wykazano istotny wpływ zmiany punktu podparcia w przypadku podpór przegubowo nieprzesuwnych na wartość obciążenia krytycznego.

Następnie na bazie rozwiązania dla pojedynczego pręta pokazano możliwość zastosowania opisanej metody do wyznaczenia obciążenia krytycznego dla dowolnego złożonego układu prętowego na przykładzie prostej dwupręto wej ramy. Dla analizowanej ramy zdefiniowano konieczne do zastosowania warunki zgodności sił i przemieszczeń w węźle łączącym pręty. Wyniki porównano z wynikami otrzymanymi z zastosowaniem MES.

Otrzymane rozwiązania prezentowaną w pracy metodą mają charakter ogólny i opracowane na ich podstawie algorytmy mogą być zastosowane do analizy niepryzmatycznych cienkościennych układów prętowych o dowolnych parametrach. Duża dokładność otrzymanych rozwiązań przy stosunkowo małej bazie aproksymacyjnej pozwala również na stosowanie ich do testowania rozwiązań otrzymanych innymi metodami. Ponadto otrzymana postać wyników w formie półanalitycznej pozwala na wygodne zastosowanie wyników do dalszych analiz.

Analysis of the vibration and stability of thin-walled nonprismatic members of beam structures

Abstract

The subject of this doctoral research work was the vibration and buckling of thin-walled nonprismatic members of beam structures. Thin-walled nonprismatic beams with their geometric parameters arbitrarily varying along their length were analysed. In the general case, i.e. when the cross section is devoid of symmetry, the axes defined by the centroids and shear centres of the cross sections are spatially curvilinear.

A thin-walled model, being a generalization of the model proposed by P. Wilde who derived the equations describing the model on the basis of the momentless theory of shells and the Vlasov theory assumptions, was used to analyse the problems considered in this doctoral dissertation. The model generalization derived by the author of this dissertation consisted in taking the terms (disregarded by Wilde) dependent on the derivatives of the functions defining the variable-along-beam-length location of shear centres into account in the equations. Hamilton's principle was used to derive the displacement equations describing the vibration of the beam. The derived displacement equations, describing the vibration problem and the buckling problem for the beams, form a system of four fourth-order coupled differential equations with variable coefficients. The equations were derived relative to an arbitrary rectilinear reference axis. An approximation method in which solutions are sought in the form of series expansions of the functions of generalized displacements with respect to Gegenbauer orthogonal polynomials was used to solve the obtained system of differential equations. By applying this method to the problems being solved in this doctoral research work an infinite system of algebraic equations, making it possible to directly determine the coefficients of the expansions of the sought displacement functions, was obtained.

The above method was used to solve the free vibration problem for any thin-walled nonprismatic beam with an open cross section. General equations describing the free vibration problem were derived and their solution by means of the approximation method was presented. In the general case, coupled spatial forms of free vibration were obtained for a beam devoid of symmetry. The derived equations and the approximation method were verified by comparing the obtained free vibration values with the ones yielded by the finite element method. As part of the numerical analyses the effect of approximation base size and

the effect of omitting the derivatives of the shear centre location describing functions on the accuracy of the solution were examined.

Then the effect of a change in the location of the point of support within a specified support section was examined using the derived equations describing the free vibration problem. Numerical analyses showed a significant effect of a change in support point location on the free vibration of the thin-walled beam, and so on the characteristics describing the behaviour of the structure. The results were validated by comparing them with the results obtained using FEM.

Subsequently the effect of a "slight" curving of a thin-walled beam's axis on its free vibration was studied. A "slight' curving is understood to be such a curving of a thin-walled beam at which the classical theory of nonprismatic beams is used to describe this beam. It was found that even a "slight" curving of the axis of a thin-walled beam has a significant effect on its eigenfrequencies and eigenforms. The results were compared with the results obtained using FEM and were found to be correct.

Then the buckling problem, which is highly important from the practical point of view, was analysed. General equations describing the buckling problem for any thin-walled nonprismatic beam with an open cross section were derived and solved using the proposed approximation method. The critical load values obtained using this method showed good agreement with the ones yielded by the finite element method and with the results reported by other authors. As part of the analysis of the buckling problem also the effect of a change in support point location on critical loads was examined for a thin-wall beam. The analyses showed that a change in the location of the support point has a significant effect on the critical load value in the case of pinned supports.

Finally, applying the solutions for a single beam to an exemplary two-beam frame it was demonstrated that the proposed approximation method can be used to determine the critical load for any complex beam system. The results were compared with the ones yielded by FEM.

The solutions obtained using the method presented in this doctoral dissertation have a general character and the algorithms developed on their basis can be applied in the analysis of thin-walled nonprismatic beam systems with any parameters. Owing to the high accuracy of the solutions at a relatively small approximation base they can also be used to test the correctness and accuracy of solutions obtained by other methods. Moreover, thanks to the solution's semi-analytical series form the obtained results can be conveniently used for further analyses.