

Prace Naukowe Instytutu Architektury i Urbanistyki
Politechniki Wrocławskiej
Seria: Monografie

25
14

Janusz Rębielak

Modularne struktury powierzchniowe

Wrocław 1988

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
MAGAZYN
KOWALE



PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Architecture and Town Planning
No 25 of Wrocław Technical University No 25

Monographs No 14 1988

Janusz REBIELAK

Modular surface frames

Prace Naukowe Instytutu Architektury i Urbanistyki
Politechniki Wrocławskiej

25

Seria:
Monografie

14

Janusz Rębielak

Modularne struktury powierzchniowe



Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej Wrocław 1988

Recenzenci

Władysław BORUSIEWICZ

Zygmunt MIESZKOWSKI

Redaktor naczelny

Jerzy CIEKOT

Redaktor naukowy

Tadeusz IZBICKI

Opracowanie redakcyjne

Alina KACZAK

Korekta

Maria IZBICKA

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1988

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324 – 9905

Nakład 150 + 70 egz. Ark. wyd. 6,75. Ark druk. 5³/₄. Papier offset. kl.III, 70 g, B1.

Oddano do druku w kwietniu 1988 r. Druk ukończono w maju 1988 r.

Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 2757/88. Cena zł 170,-

*Powłoka, siatka sferyczna,
struktura przestrzenna*

Janusz RĘBIELAK *

MODULARNE STRUKTURY POWIERZCHNIOWE

Przekrycia strukturalne realizowane w interesujących systemach konstrukcyjnych posiadają równocześnie atrakcyjną formę architektoniczną. Uwarunkowania geometryczne przekryć o dowolnych formach sprawiają, że ich budowa jest w znacznej mierze ograniczona trudnościami technologicznymi. Opracowanie zasad kształtowania różnorodnych form przekryć za pomocą możliwie małej liczby różnych elementów składowych może przyczynić się do poszerzenia zakresu stosowania w praktyce struktur przestrzennych. Dzięki temu mogłyby się one stać integralnym środkiem konstrukcyjno-formalnym dla kształtowania indywidualnej przestrzeni. Propozycję określenia takich zasad dla systemu konstrukcyjnego struktur przestrzennych przedstawiono na przykładzie przekrycia kopułowego i reprezentującego dwukrzywiznowe formy przekryć.

WPROWADZENIE

Jedną z ważniejszych dziedzin wiedzy nadającej architekturze jej materialne urzeczywistnienie jest technika budowlana. Techniczne uwarunkowania architektury, podobnie jak warunki społeczno-ekonomiczne mające wpływ na formę architektoniczną, zmieniały się w toku rozwoju cywilizacji. Zmiany można prześledzić na wybranym problemie rozwiązywania przekryć dużych rozpiętości, a zwłaszcza przekryć kopułowych.

Na rozwój materialnych podstaw współczesnych dziedzin życia olbrzymi wpływ miała rewolucja przemysłowa. Istota produkcji przemysłowej, polegająca na dążeniu do minimalizacji kosztów wytwarzania produktów, musiała wpłynąć dzięki nowym rozwiązaniom naukowo-technicznym, inspirowa-

*) Instytut Architektury Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

nym przede wszystkim jej potrzebami, na rozwój nowoczesnych metod budowania. Elementy budowlane produkowane metodami przemysłowymi podlegają ogólnym prawom tej produkcji, której zadaniem jest wytwarzanie produktów o określonych walorach użytkowych przy jak najmniejszym koszcie. Konkurencja między poszczególnymi producentami zmuszała do poszukiwania coraz to nowszych rozwiązań technicznych i technologicznych. Katalizatorem wszystkich tych poczynąń były organizowane już pod koniec XVIII wieku wystawy przemysłowe, których rozkwit datuje się od połowy XIX wieku. Wystawy światowe wpływały na rywalizację w coraz to nowszych i trudniejszych zadaniach, stanowiły pole doświadczalne dla nowatorskiej myśli technicznej. Istotną cechą większości wznoszonych pawilonów wystawowych był ich tymczasowy charakter, zmuszający inżynierów do stosowania konstrukcji składających się z powtarzalnych elementów budowlanych, nie wymagających skomplikowanych procesów produkcyjnych oraz obróbki na placu budowy, co umożliwiało tani i szybki montaż budowli. Doświadczenia zdobyte przy projektowaniu i budowie pawilonów wystawowych posłużyły następnie do opracowania wielu systemów budowlanych opartych na zasadzie prefabrykacji. Przykłady przekryć powłokowych wykonywanych w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat zgodnie z tą zasadą pozwalają sądzić, iż powszechne wprowadzenie prefabrykacji w tej dziedzinie architektury nie będzie miało tylu ujemnych cech, jak w budownictwie mieszkaniowym [1].

Przy konstruowaniu przekryć dużych rozpiętości powstało ostatnio wiele systemów prefabrykowanych struktur przestrzennych o zunifikowanych prętach i węzłach. Odnaczają się one dużą lekkością, sztywnością, elastycznością kształtowania, łatwością montażu oraz interesującą formą architektoniczną, dzięki czemu są bardzo często wykorzystywane do wielu funkcji użytkowych (niekoniecznie związanych z przekryciem dachowym). Udane są także próby wykorzystania tej formy konstrukcyjnej na potrzeby przekryć powłokowych, które dzięki swym krzywiznom charakteryzują się bardzo dużą wydajnością pracy statycznej materiału [2], [3], [4], [5].

Zasadnicze trudności stwarzają jednak ograniczenia natury geometrycznej, gdyż pręty dwukrzywiznowych konstrukcji muszą mieć różne długości, co z kolei powoduje duże zróżnicowanie asortymentu węzłów przestrzennej struktury prętowej. Ograniczenie zakresu różnych długości prętów, jak i asortymentu węzłów uzyskuje się poprzez stosowanie regularnych siatek przestrzennych opisujących krzywizny danej powłoki. Właściwości geometryczne dwukrzywiznowych przekryć powłokowych sprawiają, że opracowanie jednolitego systemu konstrukcyjnego, pozwalającego kształtować różnorodne formy przekryć jest zadaniem bardzo skomplikowanym i zmuszają do indywidualnego projektowania konstrukcji dla każdej formy przekrycia. Próbę opracowania tak zdefiniowanego uniwersalnego systemu konstrukcyjnego przedstawiono na przykładzie przekrycia w formie kopuły ku-

listej. Ta od bardzo dawna stosowana forma przekrycia, ze względu na swe właściwości statyczne i geometryczne, może z powodzeniem reprezentować wszelkie grupy form przekryć powłokowych.

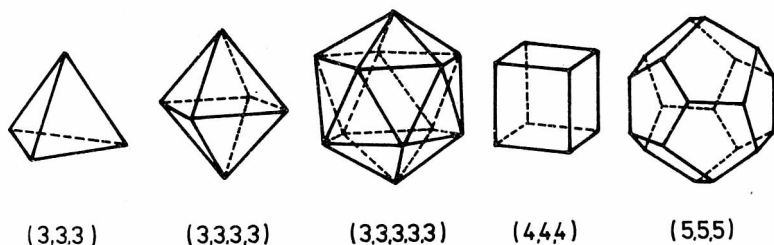
1. OPIS PROBLEMU

W prefabrykacji przekryć powłokowych dużą rolę odgrywa siatka geometryczna opisująca daną powierzchnię. Siatka ta, składająca się z odcinków prostych, powinna przede wszystkim zapewniać geometryczną niezmienną całości ustrojowi i jak najwierniej oddawać krzywizny danej powłoki; długości poszczególnych jej odcinków nie mogą być zbyt zróżnicowane, a kąty pomiędzy poszczególnymi odcinkami powinny przyjmować wartości z jak najmniejszego zakresu możliwych i koniecznych ich zmian. Aby można ją nazwać siatką równomierną-optymalną, powinna równocześnie składać się z jak najmniejszej liczby odcinków o różnych długościach oraz z jak największej liczby jednakowych pól zawartych pomiędzy tymi odcinkami. Siatka taka ułatwia stosowanie powtarzalnych elementów w konstruowaniu przekryć powłokowych. Rysunek siatki geometrycznej wpływa również na sposób pracy i nośność projektowanego przekrycia.

Najprostszą, a zarazem geometrycznie niezmienną figurą płaską jest trójkąt i dlatego siatka trójkątna będzie najwłaściwsza dla naszych rozważań. Siatka składająca się wyłącznie z trójkątów równobocznych, gdzie wszystkie odcinki mają tę samą długość, byłaby tu najkorzystniejsza, lecz można ją opisać jedynie płaszczyzną oraz powierzchnię walcową. Wyjątek stanowią tu siatki sferyczne wielościanów foremnych, np. równoboczna trójkątna siatka sferyczna 20-ścianu foremnego. Wszystkie powierzchnie dwukrzywiznowe, ze względu na swoje właściwości geometryczne muszą być opisywane z konieczności siatkami trójkątnymi o zróżnicowanych długościach odcinków i wielkościach zawartych między nimi trójkątnych pól.

W dalszych rozważaniach będziemy zajmowali się powłoką kulistą jako jedną z najstarszych i stosunkowo często stosowaną formą przekrycia. Powierzchnia ta należy zarazem do najtrudniejszych form geometrycznych pod względem znalezienia na niej siatki trójkątnej; związki miarowe w poszczególnych oczkach siatki są bardzo skomplikowane.

Podstawę do opracowania trójkątnych siatek sferycznych stanowią wielościany prawidłowe, których krawędzie mają jednakową długość, przy czym najczęściej wykorzystuje się te, których ścianami są trójkąty równoboczne, tzn. 4-ścian foremny, 8-ścian foremny i 20-ścian foremny (rys. 1). Daje to gwarancję, że opracowane na ich podstawie siatki sferyczne będą w dużym stopniu spełniały warunek niewielkiego zróżnicowa-



Rys. 1. Podstawowe wielościany foremne
Fig. 1. Basic regular polyhedrons

nia długości odcinków, ponieważ płaski trójkąt równoboczny przekształca się w odpowiadający mu równoboczny trójkąt sferyczny kuli, opisanej na danym wielościanie [7], [8].

Wielościany podstawowe oraz powstałe na ich podstawie wielościany o dużej liczbie ścian oznacza się kodem, będącym matematycznym opisem danej bryły, gdzie:

- 1, j, ..., m - oznacza, że dana ściana bryły jest i-kątem, j-kątem, ..., m-kątem,
- (1, j, ..., m) - oznacza, że każdy wierzchołek wielościanu tworzą krawędzie, będące bokami i-kąta, j-kąta, m-kąta, które to wielokąty są ścianami wielościanu [9], [10].

Pojęcia wielościanu i siatki sferycznej będziemy stosować zamieniając, ze względu na ich tożsamość w określaniu położenia wierzchołków wielościanu oraz węzłów siatki trójkątnej na powierzchni kuli.

Istnieje wiele sposobów otrzymywania wielościanów o dużej liczbie ścian. Opierają się one na podziale równobocznych lub równoramiennych trójkątów sferycznych w zależności od rodzaju wielościanu podstawowego przyjętego w danej metodzie.

Na rysunku 1 przedstawiono 5 podstawowych wielościanów foremnych, od czworościanu foremnego (3, 3, 3), poprzez 6-ścian (4, 4, 4), 8-ścian foremny (3, 3, 3, 3), i 12-ścian foremny (5, 5, 5) do 20-ścianu foremnego (3, 3, 3, 3, 3).

Każdy sposób można ocenić i porównać z innym na podstawie charakterystyk wielościanów otrzymywanych w wyniku jego zastosowania. Charakterystyka danego sposobu składa się z kryteriów oznaczonych kolejno:

- c - liczba wszystkich wierzchołków wielościanu,
- c_k - liczba różnych kątów bryłowych wielościanu,
- e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu,
- e_k - liczba różnych krawędzi wielościanu,
- l - liczba wszystkich ścian wielościanu,

- l_k - liczba różnych ścian wielościanu,
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych pomiędzy krawędziami ścian wielościanu,
 η - stosunek długości krawędzi najdłuższej do długości krawędzi najkrótszej wielościanu [10], [11].

Wartości tych współczynników zależą od rodzaju wielościanu podstawowego oraz od stopnia podziału łuków na n równych części, odpowiadających krawędziom wielościanu. Współczynnik η jest miarą zróżnicowania długości odcinków całej siatki i wraz ze współczynnikami e_k i l_k świadczy najlepiej o jej regularności.

Jak już wspomniano, większość sposobów budowania wielościanów o dużej liczbie ścian opiera się na podziale równobocznych i równoramiennych trójkątów sferycznych. Ze względu na podane kryteria najlepsze wyniki uzyskuje się z podziału równobocznych trójkątów sferycznych. Aby uzyskać regularny wielościan o dużej liczbie ścian, jako podstawę do ich opracowania wykorzystuje się najczęściej 20-ścian foremny. Wielościan ten ma największą ze wszystkich wielościanów foremnych liczbę ścian, będących trójkątami równobocznymi. Oznacza to jednocześnie, iż odpowiadający każdej trójkątnej ścianie, równoboczny trójkąt sferyczny jest najmniejszy. Kolejne jego wewnętrzne podziały tworzą w rezultacie siatkę sferyczną bardziej regularną od takich samych podziałów trójkątów sferycznych przeprowadzonych na podstawie innych wielościanów.

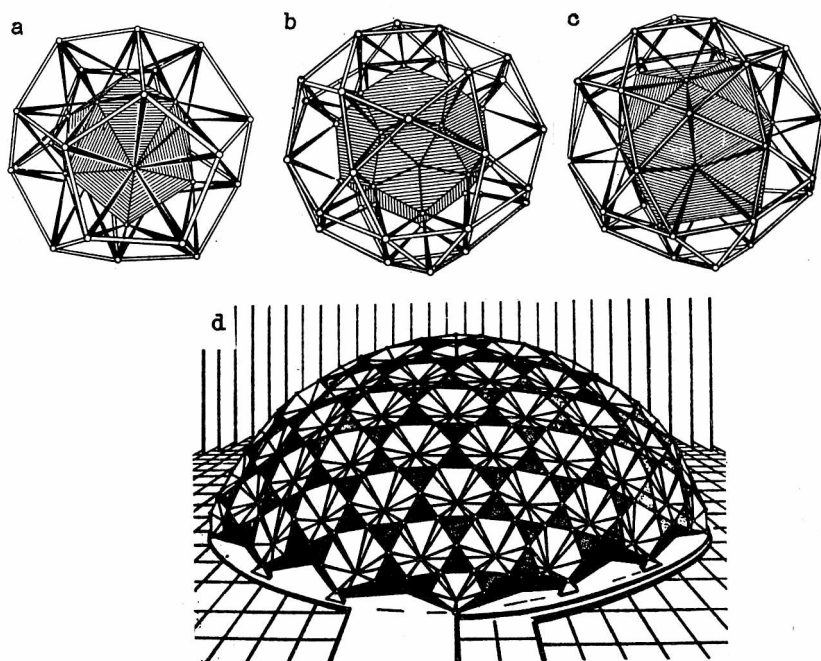
Sposoby podziału trójkątów sferycznych zapoczątkował Fuller, twórca kopuł geodezyjnych. Opracowanie siatek sferycznych jest punktem wyjścia do projektowania jedno- i dwuwarstwowych powłok kulistych. Sposób umożliwiający jednocześnie tworzenie jedno- i dwuwarstwowych kratownic na powierzchni sferycznej podał Fuliński, na podstawie analizy wielościanów foremnych.

Dwuwarstwowe siatki przestrzenne składają się z warstwy wewnętrznej, która jest wielościanem wypukłym, warstwy pośredniej, którą stanowią odcinki łączące warstwę wewnętrzną i zewnętrzną, warstwa zewnętrzna zaś jest wielościanem powstałym przez przekształcenie wielościanu wewnętrznego.

Dwuwarstwowe siatki przestrzenne otrzymuje się z następujących przekształceń:

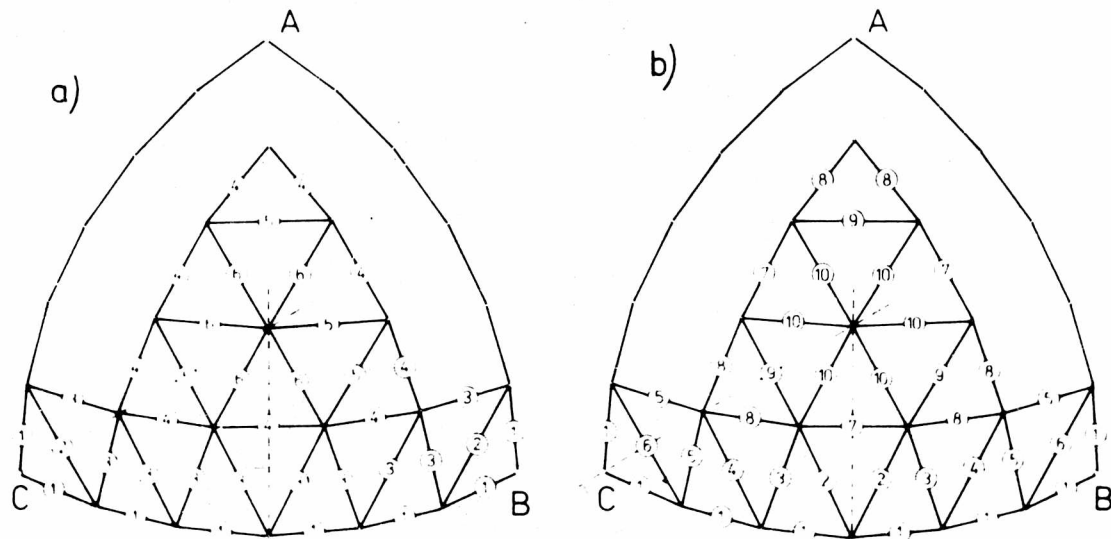
- I - 20-ścianu foremnego w 12-ścian foremny (rys. 2a),
 II - 12-ścianu foremnego w 32-ścian, tzn. schemat 60-ścianu w schemat 80-ścianu (rys. 2b),
 III - 20-ścianu w schemat 80-ścianu (rys. 2c) [7], [8].

Przykładem kratownicy przestrzennej, której genezą powstania było przekształcenie III rodzaju, jest kopuła dwuwarstwowa pokazana na rys. 2d. Powstała ona przez odwzorowanie 540-ścianu w 2160-ścian.



Rys. 2. Tworzenie siatek sferycznych za pomocą przekształceń wielościanów [7], [8]
 Fig. 2. Formation of spherical networks by means of the transformation of polyhedrons (J. Fuliński) [7], [8]

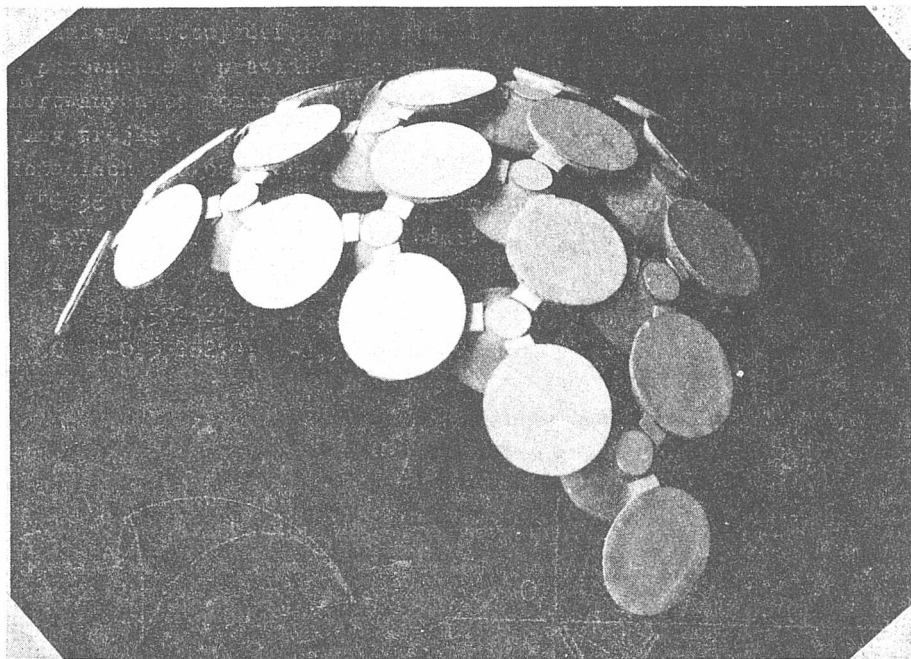
Do najbardziej znanych metod podziału trójkątów sferycznych należą: metoda połówkowego podziału boków, metoda koła opisanego na trójkącie oraz niedawno powstałe metody podziału równobocznych trójkątów sferycznych przedstawione przez Tarnaia i Makaia Jr'a. Szczegółowe omówienie ważniejszych metod wraz z bogatą analizą porównawczą zawierają prace [10], [11]. Z analizy tej wynika, iż najlepszą metodą w świetle podanych wcześniej kryteriów jest metoda Tarnaia. Charakteryzuje się ona stosunkowo małą wartością współczynnika η , przy niewielkiej liczbie różnych długości odcinków, oraz małej liczbie różnych ścian. W metodzie zaproponowanej przez Makaia wartość współczynnika η dla 20-ścianu foremego jest bliska wartości granicznej dla tego wielościanu ($\eta = 1,1756$) wynosi 1,1780. Zalety związanej z tak małą wartością η nie ma jednak współczynnik e_k określający liczbę różnych długości oraz l_k informujący o liczbie różnych pól trójkątnych w całej siatce. Na rysunku 3 przedstawiono rozmieszczenie odcinków o różnych długościach w obrębie równobocznego trójkąta sferycznego dla stopnia podziału jego boków $n = 6$ przeprowadzonego metodą Tarnaia (rys. 3a) oraz metoda Makaia (rys. 3b). Odcinki o takich samych numerach porządkowych mają tę samą długość.



Rys. 3. Rozkład różnych długości odcinków w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego dla $n = 6$:
a) metoda Tarnaia, b) metoda Makai
Fig. 3. Distribution of various lengths of segments in the area of an equilateral spherical triangle
when $n = 6$: a) the Tarnai method, b) the Makai method

2. METODA DEFORMACJI SIATKI WTÓRNEJ

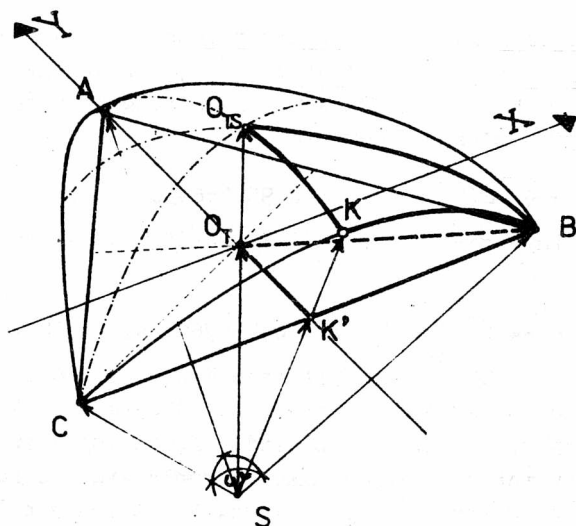
W pracy [6] omówiono metodę kół wpisanych, która wymaga, aby siatka opisująca daną powierzchnię była siatką równomierną. Model trójkąta sferycznego wykonanego według tej metody przedstawiono na rys. 4. Modularne elementy stożkowe są połączone ze sobą za pomocą elementów klinowych, które równocześnie regulują ułożenie elementów modularnych w trójkątnych polach regularnej siatki sferycznej.



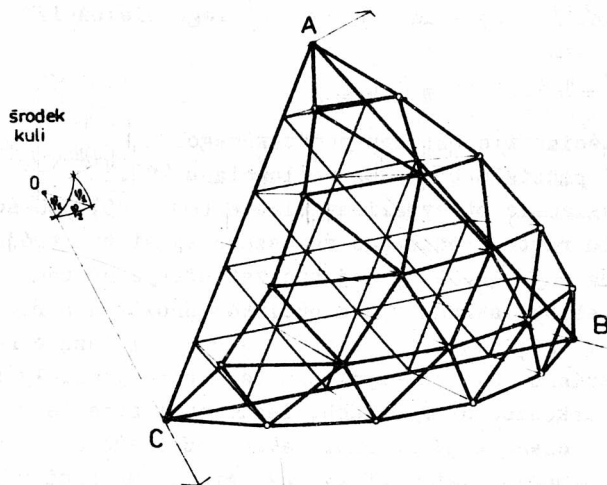
Rys. 4. Model trójkąta sferycznego wykonanego ze stożkowych elementów modularnych

Fig. 4. Shape of spherical triangle made of conical modular elements

W wyniku opracowania takiej siatki sferycznej na podstawie teorii kół wpisanych w siatkę trójkątną powstała metoda deformacji siatki wtórnej. W metodzie tej wykorzystano właściwości rzutu środkowego ściany wielościanu na współśrodkową kulę. Zajmijmy się ścianą 20-ścianu foremnego (rys. 5). Ponieważ ściana ABC jest trójkątem równobocznym, należy poznać związki miarowe jedynie w $1/6$ części odpowiadającego mu równobocznego trójkąta sferycznego ABC. Stanowić to będzie $1/120$ część opraco-



Rys. 5. Trójkąt sferyczny odpowiadający trójkątnej ścianie wielościanu foremnego
 Fig. 5. Equilateral spherical triangle corresponding to the face of a regular polyhedron



Rys. 6. Trójkątna siatka sferyczna
 Fig. 6. Triangular spherical network

wanych wielościanów. Za podstawę wszelkich związków miarowych przyjmuje się długość krawędzi wielościanu i oznacza się ją przez a .

Na rysunku 4 odcinki $SA=SB=SC=SK=SO$ mają długość równą promieniowi kuli opisanej na 20-ścianie foremnym:

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} a = 0,9510564 a.$$

Odcinek SO jest równy promieniowi kuli wpisanej w 20-ścian foremny i ma długość:

$$R_w = \frac{1}{12} \sqrt{3(3 + \sqrt{5})} a = 0,7557615 a.$$

Kąt bryłowy ω dla 20-ścianu foremnego wynosi $63^{\circ}26'6''$. Krawędzie ściany ΔABC odwzorowują się w rzucie środkowym z punktu S w łuki kół wielkich sfery opisanej na 20-ścianie. Podzielmy krawędź wielościanu na $n = 5$ równych odcinków liniami równoległymi do każdego z boków trójkąta, będącego ścianą 20-ścianu (rys. 6). W ten sposób podzieliśmy ścianę 20-ścianu na $n_s = 25$ przystających trójkątów równobocznych.

Jeżeli teraz za pomocą rzutu środkowego rzucimy tę zagęszczoną siatkę na współśrodkową kulę, otrzymamy siatkę sferyczną składającą się z różnej wielkości trójkątów sferycznych. Po połączeniu odcinkami prostymi wierzchołków nowych trójkątów sferycznych wyznaczmy siatkę trójkątną wielościanu, będącego wielokrotnością wewnętrznego podziału 20-ścianu foremnego. Liczbę ścian nowo powstałego wielościanu obliczymy ze wzoru:

$$W = M \times n^2,$$

gdzie: M - liczba ścian wielościanu podstawowego,

n - stopień podziału krawędzi wielościanu [8].

W naszym przykładzie otrzymaliśmy siatkę (20×25) 500-ścianu.

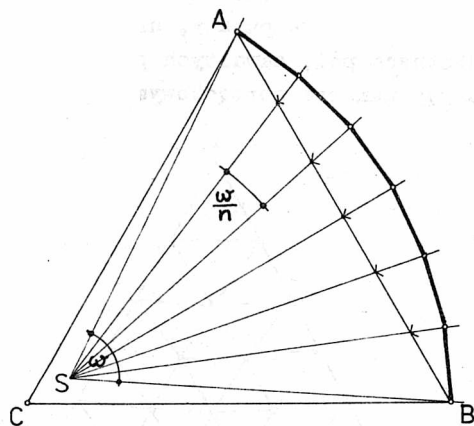
Przy omawianiu rzutu środkowego zagęszczonej siatki trójkątnej ściany 20-ścianu na odpowiadający jej trójkąt sferyczny zauważyliśmy, że nowo otrzymana siatka składa się z odcinków prostych o różnych długościach. Najkrótszymi odcinkami tej siatki są odcinki leżące najbliżej wierzchołka wielościanu, najdłuższymi zaś te, które powstały z rzutowania odcinków o jednakowych długościach, leżących w strefie środkowej trójkąta, będącego ścianą wielościanu. Takie rozmieszczenie różnych długości odcinków otrzymanej siatki sferycznej wraz z mechanizmem jej powstawania nasuwa pytanie: czy można, przy zachowanych właściwościach rzutu środkowego i odpowiednio zdeformowanej siatce trójkątnej na płaskiej ścianie wielościanu, uzyskać na powierzchni sferycznej siatkę trójkątną, o długościach poszczególnych odcinków nieznacznie różniących się od siebie? Stopień tego zdeformowania zależeć będzie od odległości ściany wie-

łościanu od środka kuli i dlatego będzie największy dla ściany 4-ścianu foremnego, a najmniejszy dla ścian 20-ścianu foremnego.

Inspiracją do powstania metody otrzymywania równomiernych siatek sferycznych były obrazy deformacji sieci krystalicznej wywołane atomem międzywęzłowym (rys. 7a) oraz luką węzłową w metalu (rys. 7b) [12].

Za pomocą proponowanej metody należy podzielić łuk koła wielkiego kuli ograniczonego wierzchołkami ΔABC na n równych części. Całość rozumowania przeprowadzimy dla $n = 6$, którego wynikiem będzie siatka 720-ścianu ($20 \times 6^2 = 20 \times 36 = 720$). Podzielimy więc łuk koła wielkiego kuli, zawartego pomiędzy punktami A i B odcinka stanowiącego krawędź wielościanu, na którym opisaliśmy kulę, na $n = 6$ równych odcinków.

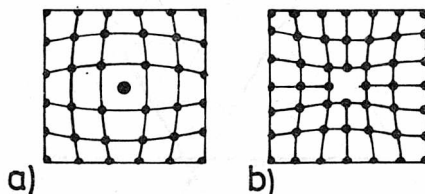
Rysunek 8 jest złożeniem widoku ściany 20-ścianu foremnego z przekrojem kuli płaszczyzną, przechodzącą przez wierzchołki wielościanu A i B oraz środek kuli opisanej S.



Rys. 8. Nowy podział krawędzi ściany wielościanu foremnego
Fig. 8. Determination of the new sectioning of lateral edges of a polyhedron face

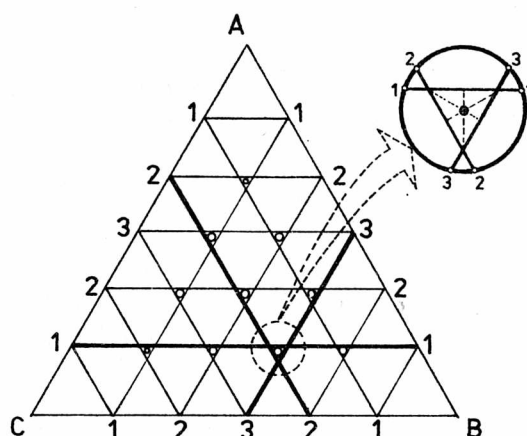
jej łuku koła wielkiego kuli otrzymamy odcinki o równych długościach.

Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, zatem takie samo uporządkowanie powstaje na pozostałych krawędziach BC i CA (rys. 9).



Rys. 7. Obrazy deformacji sieci krystalicznej
Fig. 7. Patterns of deformation of a crystal lattice

Łuk AB jest podzielony na 6 równych części, również kąt ASB jest podzielony na 6 równych części. Z punktów równego podziału łuku AB prowadzimy proste ogniskujące się w punkcie S, będącym środkiem kuli. Punkty przecięcia się tych prostych z krawędzią AB wielościanu tworzą jej nowe uporządkowanie, właściwe dla zasad rzutu środkowego. Odcinki leżące w pobliżu środka krawędzi AB są najkrótsze, odcinki zaś przylegające do punktów A i B najdłuższe. Jeżeli teraz ponownie rzutujemy tak uporządkowaną krawędź AB, to na odpowiadającym



Rys. 9. Wyznaczanie położenia węzłów zdeformowanej siatki trójkątnej na płaskiej ścianie wielościanu foremnego

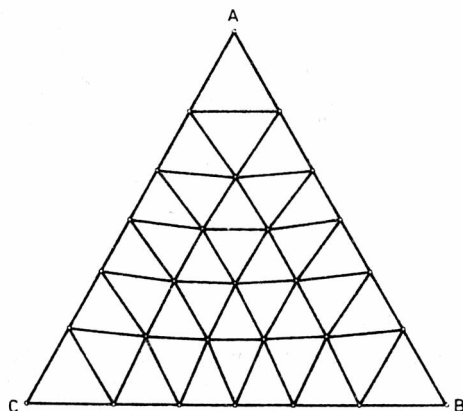
Fig. 9. Determination of the position of vertexes of the deformed triangular network on the flat face of a regular polyhedron

rze ΔABC nowej siatki trójkątnej. Aby znaleźć te punkty, należy wyznaczyć położenie środków ciężkości trójkątnych pól, zawartych pomiędzy odcinkami biegnącymi do punktów o tym samym numerze porządkowym (rys. 8). Wszystkie tak określone pola są małymi trójkątami równobocznymi, stąd środki ciężkości pokrywają się ze środkami kół wpisanych w te trójkąty. Po połączeniu środków ciężkości odpowiednich wewnętrznych pól, otrzymamy siatkę taką, jak na rys. 10.

Wyznaczona w ten sposób siatka geometryczna, składająca się z trójkątów o różnej wielkości, zależnej od ich położenia w obrębie płaskiej ściany wielościanu, ma zakodowane w swej konstrukcji właściwości rzutu środkowego. Ze środka kuli rzutujemy na powierzchnię sferyczną o promieniu określonym przez typ wielościanu i otrzymujemy na wszystkich łukach odpowiadających krawędziom wielościanu odcinki o równych długościach.

Odkładamy to uporządkowanie na wspomnianych krawędziach, następnie łączymy liniami równoległymi do każdej z podstaw ΔABC punkty o tych samych numerach porządkowych. Numerację taką wprowadzono w celu łatwiejszego określania zdeformowanej siatki trójkątnej na płaskiej ścianie wielościanu. Po połączeniu wszystkich punktów otrzymamy siatkę wewnętrzną, w której występują trójkąty o różnej wielkości. W jednym punkcie przecinają się tylko dwie proste wyznaczone nowym uporządkowaniem krawędzi.

Wewnątrz ΔABC nie ma ani jednego takiego punktu, w którym schodziłyby się trzy proste. Istnienie takich punktów jest nieodzowne do określenia w całym obsza-



Rys. 10. Obraz zdeformowanej siatki trójkątnej na płaskiej ścianie 20-ścianu foremnego

Fig. 10. Pattern of the deformed triangular network on the flat face of a regular icosahedron

Odpowiednie zdeformowanie siatki trójkątnej na ścianie wielościanu daje nam gwarancję, że po zrutowaniu wnętrza ΔABC na powierzchnię kuli otrzymamy siatkę sferyczną, której oczkami będą trójkąty zbliżone do trójkątów równobocznych, dlatego też długości ich boków tylko nieznacznie będą się różnić od siebie. Wyznaczanie długości poszczególnych odcinków siatki sferycznej nie jest już trudne i można całość obliczeń sprowadzić do prostego rozwiązywania szeregu płaskich trójkątów, co pokazemy na przykładzie 10-krotnego podziału krawędzi ścian 20-ścianu foremnego. Otrzymamy więc siatkę sferyczną 2000-ścianu. Po znalezieniu długości poszczególnych krawędzi tego wielościanu otrzymamy obraz zróżnicowania oczek sferycznych siatek trójkątnych uzyskanych tą metodą i sprawdzenie słuszności jej założeń.

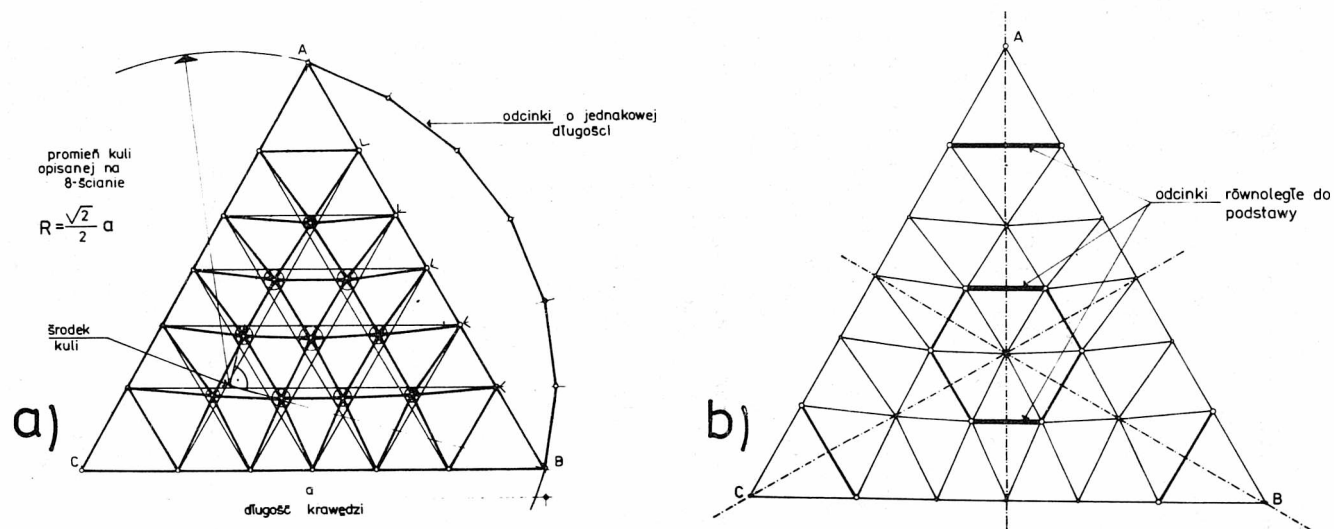
Potwierdzeniem prawidłowości założeń i całego toku rozumowania jest już sam rysunek zdeformowanej siatki trójkątnej. Zdeformowanie tej siatki będzie większe dla wielościanów o mniejszej liczbie ścian i dlatego jest ono bardziej czytelne przy tym samym stopniu podziału krawędzi dla 8-ścianu foremnego. Na rysunku 11a pokazano w złożeniu całość toku postępowania przy wyznaczeniu wtórnej siatki trójkątnej na ścianie tego wielościanu, na rys. 11b zaś przedstawiono prawidłowości występujące w rysunku tej siatki.

Prawidłowość pierwsza: trójkątne pola leżące w centrum ściany wielościanu są najmniejsze, ponieważ są najbardziej oddalone od powierzchni sferycznej, na którą zostaną odwzorowane rzutem środkowym ze środka danego wielościanu.

Prawidłowość druga: przy parzystym stopniu podziału krawędzi wielościanu odcinki zdeformowanej wewnętrznej siatki trójkątnej przecinające osie symetrii ΔABC są do nich prostopadłe, a zatem są równoległe do odpowiednich podstaw tego trójkąta. Istotną cechą jest również to, że odpowiednie odcinki wewnątrz ΔABC układają się w krzywe łamane zwrócone swymi wypukłościami w kierunku każdej z jego podstaw (rys. 11b).

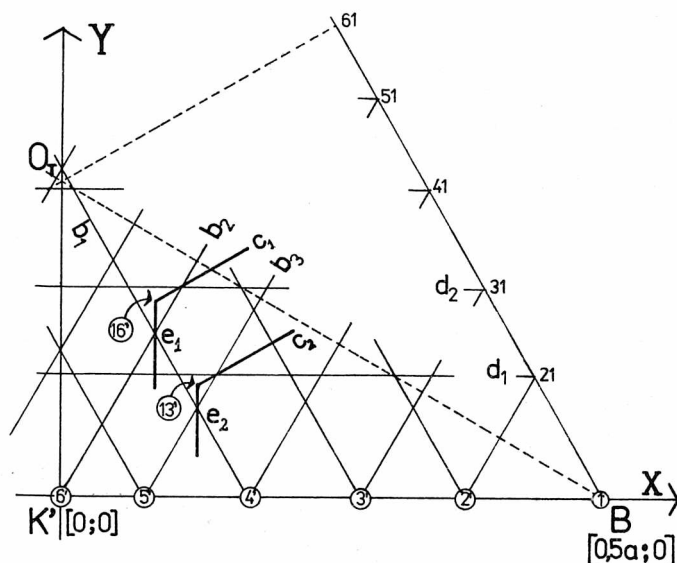
3. SIATKA SFERYCZNA 2000-ŚCIANU

Na podstawie dwudziestościanu foremnego wyznaczamy wg omawianej metody siatkę sferyczną 2000-ścianu. Dzielimy łuk koła wielkiego sfery opisanej na tym wielościanie i ograniczony dwoma sąsiednimi wierzchołkami na $n = 10$ równych części (por. rys. 8). Proste, wychodzące z punktów równego podziału łuków i ogniskujące się w środku kuli, przecinają krawędzie wielościanu i wyznaczają nowe ich uporządkowanie właściwe dla zasad rzutu środkowego.



Rys. 11. Schemat otrzymywania wtórnej siatki trójkątnej dla 8-ścianu foremnego (a), prawidłowości występujące we wtórnej siatce sferycznej (b)

Fig. 11. Diagram of obtaining a secondary triangular network for a regular octahedron (a), regularities occurring in a secondary triangular spherical network (b)



Rys. 12. Określanie związków miarowych w 1/6 części trójkątnej ściany
wielościenu
Fig. 12. Defining of dimension relation of one-sixth of the triangular
face on an icosahedron

Na rysunku 12 przedstawiono 1/6 część ściany dwudziestościanu foremego. Jednostką wszelkich związków miarowych jest tu długość krawędzi wielościenu i jak poprzednio oznaczamy ją przez a . Punkty 1-6 na krawędzi BC wyznaczone podziałem kąta $\omega = 63^{\circ}26'6''$ na 10 równych części mają w płaszczyźnie XOY następujące współrzędne:

punkt 1' = B'	[0,5a ; 0,0a]
punkt 2'	[0,3836994a; 0,0a]
punkt 3'	[0,2790487a; 0,0a]
punkt 4'	[0,1821271a; 0,0a]
punkt 5'	[0,0899379a; 0,0a]
punkt 6'	[0,0a ; 0,0a]

Gdy mamy współrzędne podanych punktów, łatwo można obliczyć współrzędne punktu 21 i punktu 31 na krawędzi AB. Współrzędne y tych punktów będą równaniami prostych d_1 i d_2 (rys. 12). Współrzędne środków ciężkości odpowiednich wewnętrznych trójkątów, tak jak dla przykładowo wybranego punktu 16', wyznaczamy przez rozwiązanie układu równań prostych:

$$\begin{aligned} b_1 y &= -\sqrt{3}x + 0,3154533 a \text{ (przechodzi przez punkt 4')}, \\ b_2 y &= +\sqrt{3}x \text{ (przechodzi przez punkt 6' = K)}. \end{aligned}$$

Z rozwiązania układu tych równań otrzymujemy równanie prostej:

$$x = e_1, \quad x = 0,1360324 a,$$

natomiast z układu równań prostych:

$$b_2 y = \sqrt{3}x \quad (\text{przechodzi przez punkt } 6' = K'),$$

$$d_2 y = 0,1913496 a \quad (\text{współrzędna } y \text{ punktu } 31)$$

otrzymujemy równanie prostej C_1 :

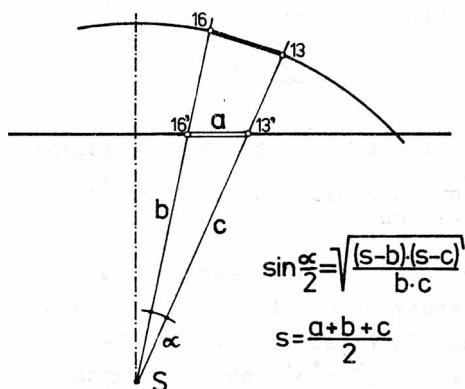
$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b_2 \quad (\text{przechodzi przez punkt przecięcia się prostych } b_2 \text{ i } d_2).$$

Tak samo postępujemy przy wyznaczaniu współrzędnych punktu $13'$, sąsiadującego z punktem $16'$, korzystamy z układów równań prostych b_1 i b_2 oraz e_2 i c_2 :

Po obliczeniu równań i rozwiązaniu podanych układów znajdujemy współrzędne punktów:

$$\text{pkt } 13' \quad [0,1360324 a; \quad 0,0973858 a],$$

$$\text{pkt } 16' \quad [0,0910635 a; \quad 0,1801419 a].$$



Rys. 13. Trygonometryczny sposób wyznaczania długości odcinków trójkątnej siatki sferycznej 2000-ścianu

Fig. 13. Trigonometrical way of defining the lengths of sections of a triangular spherical network of a 2000-hedron

Odległość między tymi punktami na płaskim trójkącie ABC jest równa:

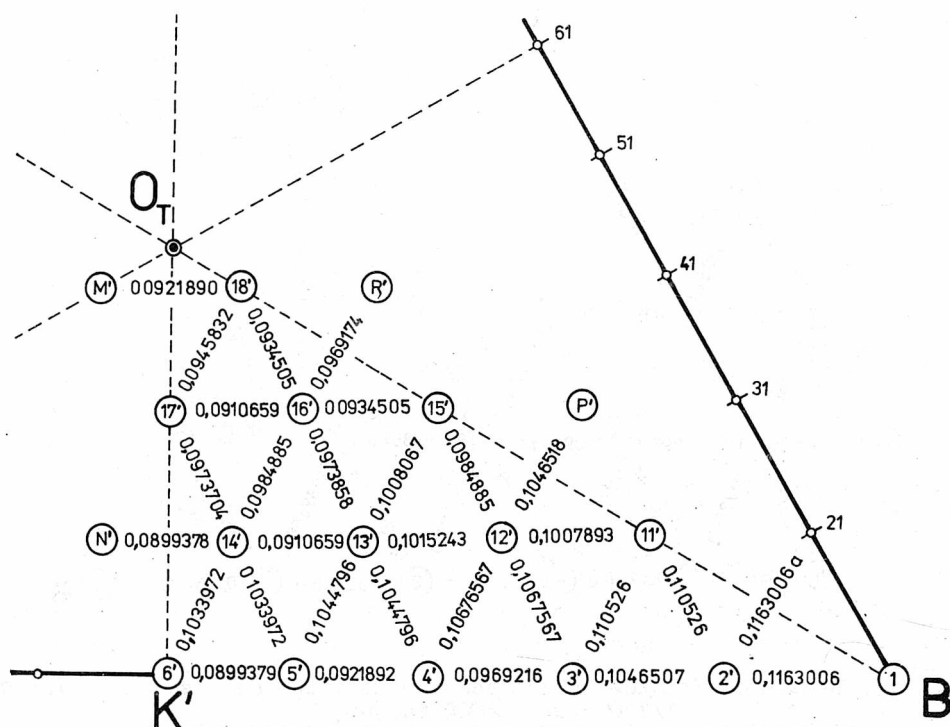
$$i = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0,0973858 a$$

Gdy zastosujemy ogólny wzór podany na rys. 13 i odpowiednio przekształcimy wynik, łatwo obliczymy połowę odległości między punktami 13-16 na powierzchni sfery. Podwojona, a więc właściwa odległość tych punktów wynosi: $j = 0,1152058 a$.

Na rysunku 14 przedstawiono wszystkie odległości pomiędzy sąsiadującymi ze sobą punktami, występujące w 1/6 części płaskiego trójkąta ABC, na rys. 15 zaś pokazano związki miarowe 1/120 części 2000-ścianu. Po-

prawność tych obliczeń sprawdzona i potwierdzona została za pomocą opracowanego programu w języku FORTRAN 1900 na emc.

Procedura postępowania dla tego programu jest nieco inna i opiera się w swej drugiej części na bezpośrednim rzutowaniu węzłów zdeformowanej siatki trójkątnej ściany wielościanu na powierzchnię kuli. Określa się w ten sposób współrzędne sferyczne wierzchołków nowo powstających wielościanów, co stanowi podstawę do obliczenia wszystkich odległości pomiędzy sąsiadującymi wierzchołkami.

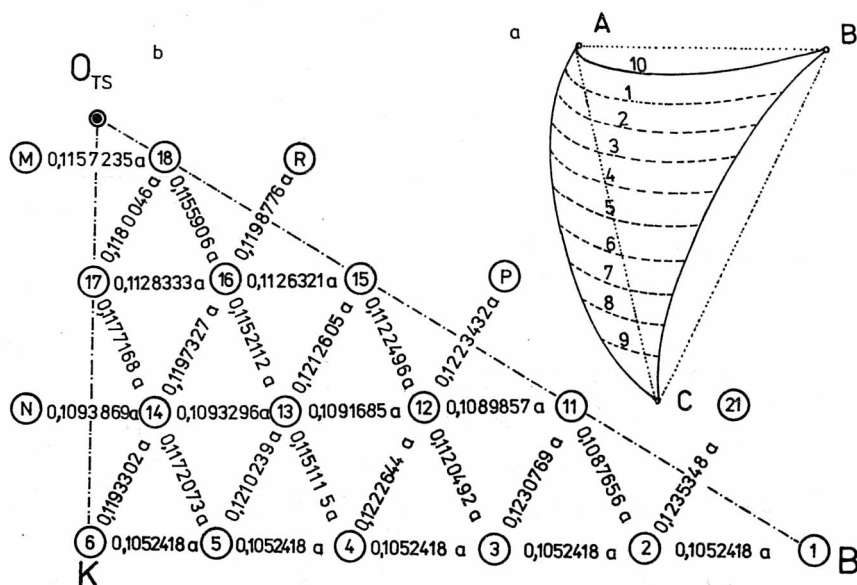


Rys. 14. Związki miarowe 1/6 części zdeformowanej siatki trójkątnej na płaskiej ścianie 20-ścianu foremnego dla $n = 10$
 Fig. 14. Dimension relations of one-sixth of the deformed triangular network on the flat face of an icosahedron for $n = 10$

Z analizy rys. 15 wynika, że długości odcinków leżących w pasach, nazwijmy je równoległymi do podstaw trójkąta ABC, różnią się tak nieznacznie od siebie, że można je uznać za odcinki o równych długościach. Różnice te mogą być rezultatem błędów pochodzących z niedokładności obliczeń³⁵⁾. Tak więc dla 10-krotnego podziału boków ΔABC uzyskamy w całej siatce sferycznej zaledwie 10 rodzajów prętów o różnych długościach (rys. 15a). Dzięki temu metodę tę można z powodzeniem stosować w projektowaniu powierzchniowych struktur prętowych.

Miarą zróżnicowania długości odcinków całej siatki sferycznej jest współczynnik η , określony jako stosunek długości odcinka najdłuższego do długości odcinka najkrótszego siatki. Z rysunku 15 wynika, iż najdłuższymi odcinkami są odcinki leżące tuż przy wierzchołkach trójkąta sferycznego, tak jak odcinek 2-21 dla schematu krawędzi 2000-ścianu; od-

³⁵⁾ Obliczenia długości krawędzi 2000-ścianu przeprowadzono na kalkulatorze Santronic 81 SR.



Rys. 15. Ułożenie odcinków o równych długościach (a), związki miarowe 1/120 części 2000-ścianu (b)

Fig. 15. Positioning of segments of equal lengths (a), dimension relations of a 1/120 part of a 2000-hedron (b)

ciągami najkrótszymi są odcinki leżące na łukach kół wielkich sfery i odpowiadające krawędziom dwudziestościanu foremnego (rys. 1-2).

Współczynnik η dla 10-krotnego podziału boków trójkąta sferycznego jest równy:

$$\eta = \frac{0,1235300}{0,1052418} a = 1,173731.$$

Za pomocą programu na maszynie cyfrową zbadano charakterystykę zmian wartości współczynnika η . Zależność współczynnika η od stopnia podziału krawędzi 20-ścianu foremnego na n równych odcinków pokazano na rys. 16.

Na podstawie usytuowania odcinków najdłuższych i najkrótszych w całej siatce oraz z przebiegu wzrostu współczynnika η w zależności od liczby n możemy stwierdzić, że w prezentowanej metodzie przy $n \rightarrow \infty$ współczynnik η osiąga wartość graniczną dla 20-ścianu foremnego, tzn. $\eta = 1,1756$ [11].

Graniczną wartość współczynnika η przy $n \rightarrow \infty$ można wyznaczyć na podstawie prostych zależności trygonometrycznych ze względu na usytuowanie odcinków najdłuższych i najkrótszych trójkątnej siatki sfery-

cznej w wierzchołkach wielościanu. W każdym wierzchołku dwudziesto - ścianu foremnego schodzi się pięć trójkątów równobocznych i przy podziale odpowiadającym krawędziom wielościanu łuków kół wielkich na $n \rightarrow \infty$ równych odcinków prostych, odcinki znajdujące się tuż przy wierzchołku będą leżeć niemal na jednej płaszczyźnie, zatem miary tych odcinków będą dążyć do miar boków i wewnętrznych przekątnych występujących w pięciokącie prawidłowym (rys. 17).

Odcinkiem najdłuższym jest odcinek BA, najkrótszym np. odcinek WA. Ponieważ kąt BWA jest równy 72° , zatem stosunek długości odcinka BA do długości odcinka WA obliczamy ze wzoru:

$$\eta = 2 \sin 36^\circ = 1,1756.$$

Pełną charakterystykę siatek sferycznych (wielościanów) według podanych w punkcie 1 kryteriów zawiera tablica 1. Wielkości niektórych współczynników w zależności od n wyrażają się następującymi wzorami:

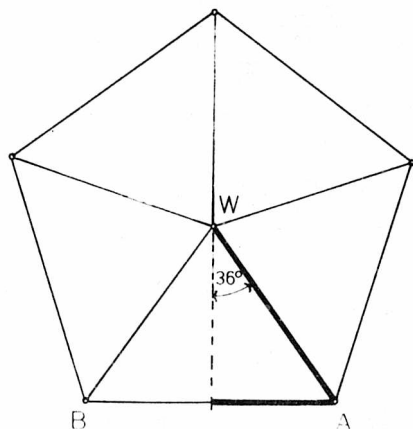
$$c = 10 n^2 + 2,$$

$$e = 30 n^2,$$

$$e_k = n,$$

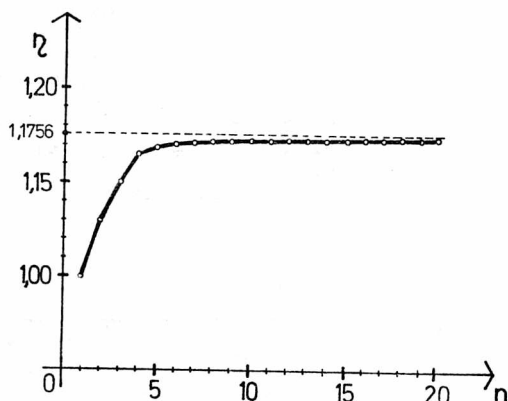
$$l = 20 n^2.$$

Wartości pozostałych współczynników obliczono indywidualnie, dla każdego n (od $n = 1$ do $n = 20$), wartości zaś współczynnika η za pomocą programu na maszynie cyfrowej.



Rys. 17. Długości odcinków w wierzchołku 20-ścianu przy $n \rightarrow \infty$

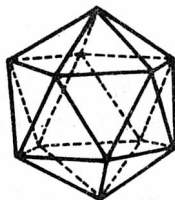
Fig. 17. Length of segments at the vertex of an icosahedron when $n \rightarrow \infty$



Rys. 16. Zależność między stopniem podziału boków trójkąta sferycznego (n) a współczynnikiem (η) dla siatek sferycznych opracowanych na podstawie 20-cianu foremnego metodą deformacji siatki wtórnej

Fig. 16. Relations between the sectioning degree of the edges of a spherical triangle (n) and the coefficient η for the spherical networks worked out on the basis of a regular icosahedron by the method of a secondary network deformation

- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego do dł. odcinka najkrótszego



(3,33,33)

T a b e l a 1

n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	12	1	30	1	20	1	1	1,00
2	42	2	120	2	80	2	3	1,1308298
3	92	3	270	3	180	3	6	1,1556196
4	162	5	480	4	320	5	10	1,1643409
5	252	7	750	5	500	7	15	1,1683931
6	362	9	1080	6	720	9	21	1,1705856
7	492	12	1470	7	980	12	28	1,17193413
8	642	15	1920	8	1280	15	36	1,17277718
9	812	18	2430	9	1620	18	45	1,17337132
10	1002	22	3000	10	2000	22	55	1,1738777
11	1212	26	3630	11	2420	26	66	1,17416668
12	1442	30	4320	12	2880	30	78	1,17435169
13	1692	35	5070	13	3380	35	91	1,17454815
14	1962	40	5880	14	3920	40	105	1,17477512
15	2252	45	6750	15	4500	45	130	1,1748304
16	2562	51	7680	16	5120	51	146	1,1749086
17	2892	57	8670	17	5780	57	163	1,17511845
18	3242	63	9720	18	6480	63	181	1,1750583
19	3612	70	10830	19	7220	70	200	1,1752014
20	4002	77	12000	20	8000	77	220	1,1753339

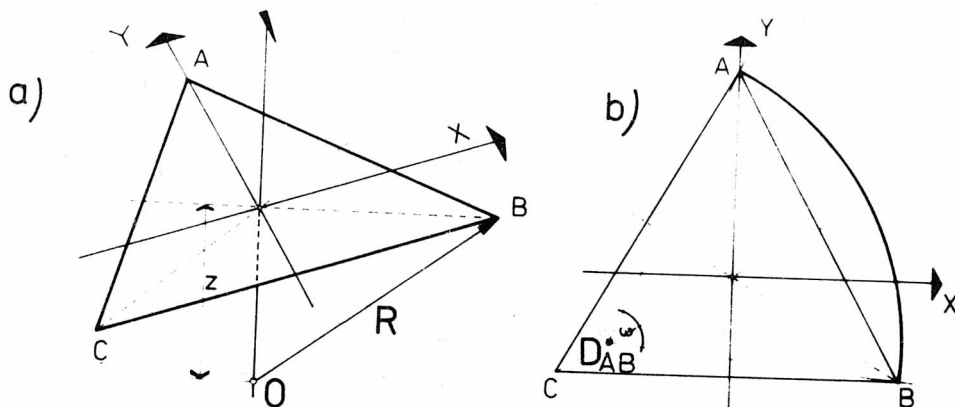
4. SIATKI SFERYCZNE WIELOŚCIANÓW UZYSKIWANE METODĄ DEFORMACJI SIATKI WTÓRNEJ NA PODSTAWIE 8-ŚCIANU FOREMNEGO

Punktem wyjścia do określenia siatek sferycznych wielościanu powstałych na podstawie 8-ścianu i 20-ścianu foremnego jest program na maszynę cyfrową opracowany dla metody deformacji siatki wtórnej.

Danymi wyjściami dla tego programu są:

- współrzędne wierzchołków trójkątnej ściany ABC podane w płaszczyźnie XOY,

- współrzędne punktów D_{AB} , D_{BC} i D_{CA} odpowiadających położeniom środka kuli opisanej na danym wielościanie i odpowiadającym kolejnym krawędziom ABC (rys. 18),



Rys. 18. Położenie punktów, których współrzędne stanowią dane wejściowe programu na emc

Fig. 18. Position of the points, the coordinates of which constitute the input data of the program on emc

- odległość między punktem D_{AB} a punktem A jest równa odległości między punktem D_{AB} a punktem B i równa promieniowi kuli opisanej na wielościanie,

- współrzędne położenia środka kuli na osi OZ (Z),

- długość promienia kuli opisanej (R),

- stopień podziału boków trójkąta sferycznego (n).

Danymi wejściowymi omawianego programu do obliczeń siatek sferycznych wielościanów powstających na podstawie 8-ścianu foremnego są:

- współrzędne trójkątnej ściany na płaszczyźnie XOY

A [0,0 a; 0,5773502 a]

B [0,5 a; -0,2886751 a]

C [-0,5 a; -0,2886751 a]

- współrzędne punktów D

D_{AB} [-0,1830125 a; -0,1026623 a]

D_{BC} [0,0 a; 0,2113249 a]

D_{CA} [0,1830125 a; -0,1056623 a]

- współrzędne środka kuli opisanej na 8-ścianie foremnym

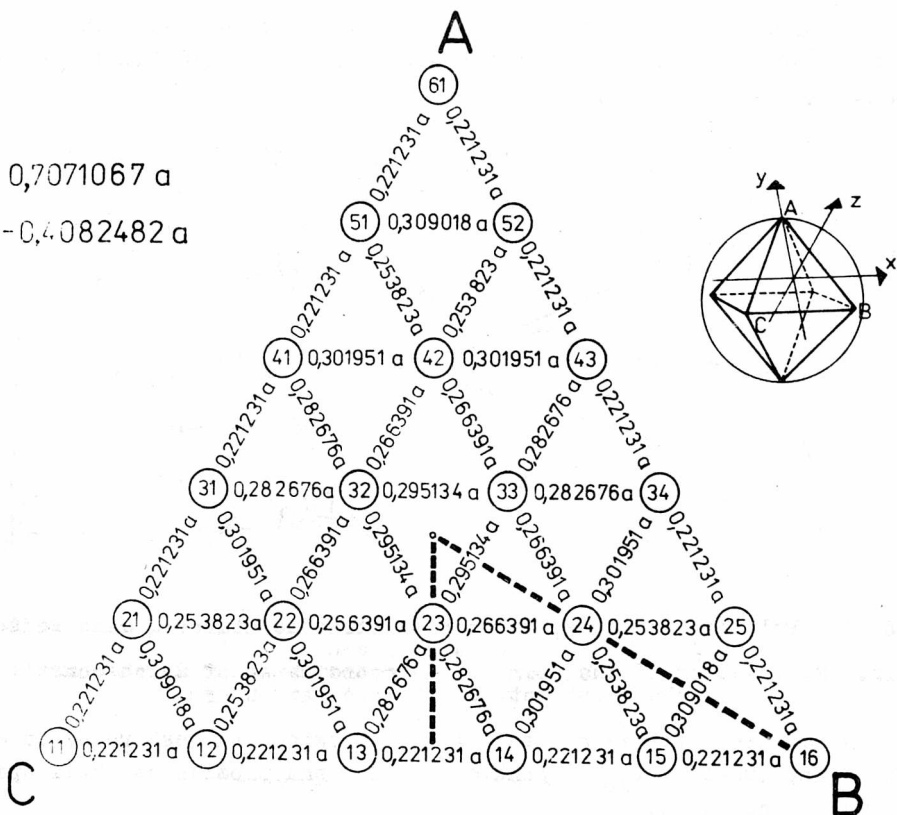
Z [0; 0; -0,4082482 a]

- długość promienia kuli opisanej

R = 0,7071066 a

$$R = 0,7071067 a$$

$$Z = -0,4082482 a$$



Rys. 19. Związki miarowe w 1/8 części 2000-ścianu
Fig. 19. Dimension relations at one-eighth of a 2000-hedron

Na rysunku 19 przedstawiono związki miarowe 200-ścianu ($8 \times 5^2 = 8 \times 25$) opracowane dla 8-ścianu foremnego stanowiącego 1/8 część całego wielościanu. Wyniki otrzymane na podstawie tego programu pozwoliły na podanie charakterystyk rodziny wielościanów powstałych za pomocą metody deformacji siatki wtórnej 8-ścianu foremnego, przedstawiono je w tablicy 2.

Wielkości niektórych współczynników w zależności od n wyrażają się następującymi wzorami:

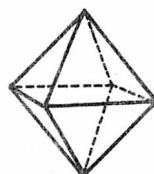
$$c = 4n^2 + 2,$$

$$e = 12n^2,$$

$$e_k = n,$$

$$l = 8n^2.$$

- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego do dł. odcinka najkrótszego



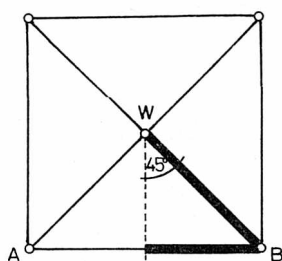
(3,3,3,3)

T a b e l a 2

n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	6	1	12	1	8	1	1	1,00
2	18	2	48	2	32	2	3	1,3065662
3	38	3	108	3	72	3	6	1,3660297
4	58	5	192	4	128	5	10	1,3870525
5	102	7	300	5	200	7	15	1,39681911
6	146	9	432	6	288	9	21	1,4021329
7	198	12	588	7	412	12	28	1,4053497
8	258	15	768	8	512	15	36	1,4074287
9	326	18	972	9	648	18	45	1,4088468
10	402	22	1200	10	800	22	55	1,4099283
11	486	26	1452	11	968	26	66	1,4106407
12	578	30	1728	12	1152	30	78	1,4112253
13	678	35	2028	13	1352	35	91	1,4117202
14	786	40	2332	14	1568	40	105	1,41214085
15	902	45	2700	15	1800	45	130	1,4123563
16	1026	51	3072	16	2048	51	146	1,4126567
17	1158	57	3468	17	2312	57	163	1,4127540
18	1298	63	3888	18	2592	63	181	1,4130020
19	1526	70	4332	19	3048	70	200	1,41310310
20	1602	77	4800	20	3200	77	220	1,4134264

Wartości pozostałych współczynników, obliczono indywidualnie dla każdego n (od $n = 1$ do $n = 20$).

Podobnie jak dla siatek sferycznych, powstałych metodą deformacji siatki wtórnej 20-ścianu foremnego, możemy również i tu wyznaczyć górną graniczną wartość współczynnika η . Ponieważ odcinki najdłuższe i najkrótsze są usytuowane w wierzchołkach wielościanu (8-ścian foremny), zatem w każdym jego wierzchołku schodzą się cztery równoboczne trójkąty sferyczne. Przy podziale łuków odpowiadających krawędziom wielościanu na $n \rightarrow \infty$ równych części, odcinki leżące w sąsiedztwie każdego wierzchołka leżeć będą niemal na jednej płaszczyźnie (rys. 20). Odcinkiem



Rys. 20. Długości odcinków w wierzchołku 8-ścianu foremnego przy $n \rightarrow \infty$

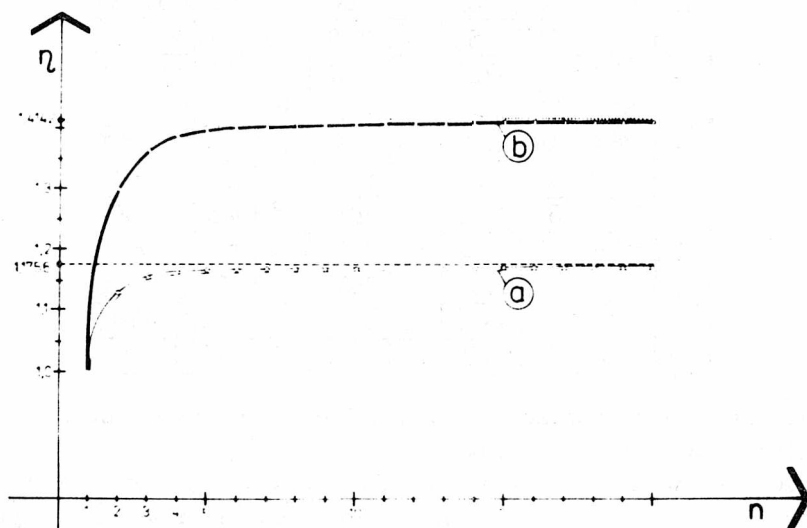
Fig. 20. Length of segments at the vertexes of a regular octahedron when $n \rightarrow \infty$

najdłuższym będzie odcinek WB, najkrótszym zaś odcinek AB, a ponieważ kąt AWB dąży do wartości 45° , stąd współczynnik η dla $n \rightarrow \infty$ osiągnie wartość:

$$\eta = 2 \sin 45^\circ = 1,4142135.$$

Z analizy porównawczej tabeli 1 z tabelą 2, charakteryzujących rodziny wielościanów określonych metodą deformacji siatki wtórnej 20-ścianu i 8-ścianu, wynika, że także w prezentowanej metodzie najlepsze pod każdym względem są siatki powstałe na podstawie 20-ścianu foremnego. Jednym z najważniejszych kryteriów do takiej oceny jest przebieg wzrostu wielkości współczynnika η dla każdego n , co pokazano na rys. 21.

W metodzie deformacji siatki wtórnej dla siatek sferycznych rozpiętych nad trójkątnymi ścianami wielościanów wartość współczynnika η określona jest przez stosunek długości odcinka leżącego najbliżej wierzchołka, jako najdłuższego w całej siatce, do długości jednego z odcinków leżących na łukach



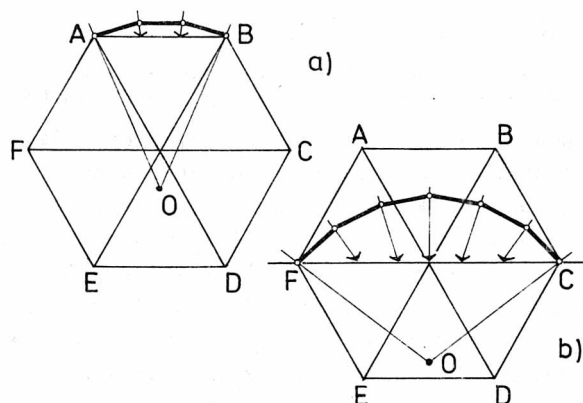
Rys. 21. Wielkości graniczne oraz przebieg współczynnika η w zależności od n dla siatek sferycznych powstałych na podstawie: a) 20-ścianu foremnego, b) 8-ścianu foremnego

Fig. 21. Limiting values and the course of the coefficient η depending on n for spherical networks which arose from: a) a regular icosahedron, b) a regular octahedron

odpowiadających krawędziom wielościanu, jako najkrótszym odcinkom siatki sferycznej i osiąga tym samym najmniejsze graniczne wartości współczynnika η dla prezentowanej grupy wielościanów. Ważne jest, że liczba różnych długości odcinków oznaczona przez e_k jest równa liczbie określającej stopień podziału boków równobocznego trójkąta sferycznego na n równych części. Ma to istotne znaczenie w projektowaniu i wykonywaniu prętowych powłok kulistych.

5. REGULARNE SIATKI SFERYCZNE ROZPIĘTE NAD RZUTEM SZEŚCIOKĄTNYM I CZWOROKĄTNYM

Metodę deformacji siatki wtórnej można łatwo przystosować do określania regularnych siatek sferycznych rozpiętych nad różnymi typami wielokątów, poszerzając tym samym podstawę wielościanów podstawowych. Znały już schemat postępowania przy wyznaczaniu równomiernej siatki sferycznej przeprowadzimy dla rzutu sześciokątnego, zbudowanego z sześciu przystających trójkątów równobocznych. Rysunki 22a i b są złożeniami rzutu podstawy z przekrojami przez sferę wyznaczonymi odcinkami AB i FC oraz punktem O. Łuk AB dzielimy na n równych części, łuk FC zaś, odpowiadający przekątnej FC, dzielimy na $2n$ równych części. Nowe uporządkowanie krawędzi AB odkładamy na pozostałych bo-

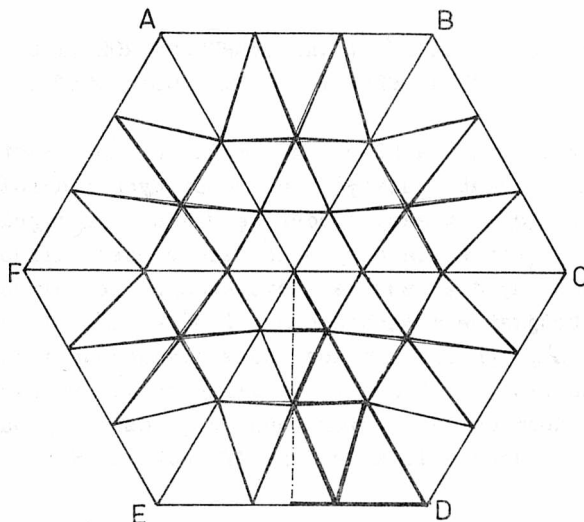


Rys. 22. Podział rzutem środkowym krawędzi bocznych (a) oraz przekątnych (b) sześciokąta ABCDEF
Fig. 22. Sectioning by central projection of edges (a) and diagonals (b) of the hexagonal ABCDEF

kach sześciokąta ABCDEF, a uporządkowanie przekątnej FC wprowadzamy na przekątnych AD i BE. Dwie fazy tej operacji są tu konieczne, ponieważ kąt FOC jest ponad dwukrotnie większy od kąta AOB, mimo iż

odległości $AO = BO = FO = CO = R$, gdzie R jest dowolnie przyjętym promieniem kuli.

Gdy mamy tak uporządkowane boki oraz przekątne sześciokąta $ABCDEF$, przystępujemy do wykreślenia zdeformowanej siatki trójkątnej. Postępujemy podobnie jak dla trójkątnej ściany wielościanu, z tym że poszukiwane trójkąty są nieco mniejsze (rys. 23). Następnie rzutujemy zdeformowaną siatkę na sferę o założonym promieniu oraz strzałce (por. rys. 5).



Rys. 23. Zdeformowana siatka trójkątna wewnątrz sześciokąta $ABCDEF$
Fig. 23. Deformed triangular network in the hexagonal $ABCDEF$

Otrzymamy w ten sposób siatkę sferyczną równomierną. Różnice w długościach poszczególnych odcinków siatki mogą być nieco większe, gdyż przy wprowadzaniu nowego uporządkowania potrzebnych krawędzi pojawiają się dwa rodzaje różnych długości odcinków wyjściowych, tzn. długości boków sześciokąta oraz jego przekątnej. Zróżnicowanie długości odcinków określonych na przekątnych sześciokąta $ABCDEF$ jest większe od zróżnicowania długości podobnych odcinków na jego bokach. Aby móc zbudować siatkę sferyczną dla tego typu rzutu, musimy poznać związki miarowe jedynie w $1/12$ jego obszaru (rys. 23).

Aby sprawdzić poprawność przyjętych założeń i cały tok postępowania, określono trójkątną siatkę sferyczną rozpiętą na powierzchni kuli usytuowanej stosunkowo blisko płaszczyzny sześciokąta $ABCDEF$ (rys. 24). Całość obliczeń wykonano na emc dla: $R = 2,2360678$ a oraz $Z = -2,00$ a.

Określenie siatek sferycznych rozpiętych nad tego typu rzutem jest przykładem zastosowania proponowanej metody dla wprowadzenia regularnych podziałów wewnątrz równoramiennych trójkątów sferycznych. Za podstawę wszelkich związków miarowych przyjęto długość boków sześciokąta ABCDEF i oznaczono również przez a . Ponieważ jest on sześciokątem prawidłowym, jego przekątne będą miały długość równą $2a$.

Z przedstawionych na rys. 24 związków miarowych wynika, że odcinki o długościach dających się określić mianem jednakowych układają się wewnątrz równoramiennego trójkąta sferycznego E61D w dwie główne grupy linii. Jedna z nich równoległa jest do podstawy tego trójkąta wyznaczonej punktami E i D, druga równoległa równocześnie do obu pozostałych jego boków, tzn. do boków E61 i D61. Dla podziału łuków bocznych równoramiennych trójkąta sferycznego E61D na $n = 5$ równych części, liczba odcinków siatki o różnych długościach wynosi: $e_k = 2n$. Odcinki najdłuższe w całej siatce są usytuowane tuż obok każdego z punktu podparcia czaszy, np. odcinek 15-25, odcinki najkrótsze leżą na łukach kół wielkich odpowiadających w rzucie środkowym krawędziom bocznym sześciokąta ABCDEF i ich reprezentantem jest odcinek zawarty między punktami 15-16 leżący na łuku ED. Współczynnik η jest równy:

$$\eta = \frac{0,212540}{0,201636} \frac{a}{a} = 1,0540776$$

i dla $n = 25$ osiąga wartość $\eta = 1,09533119$.

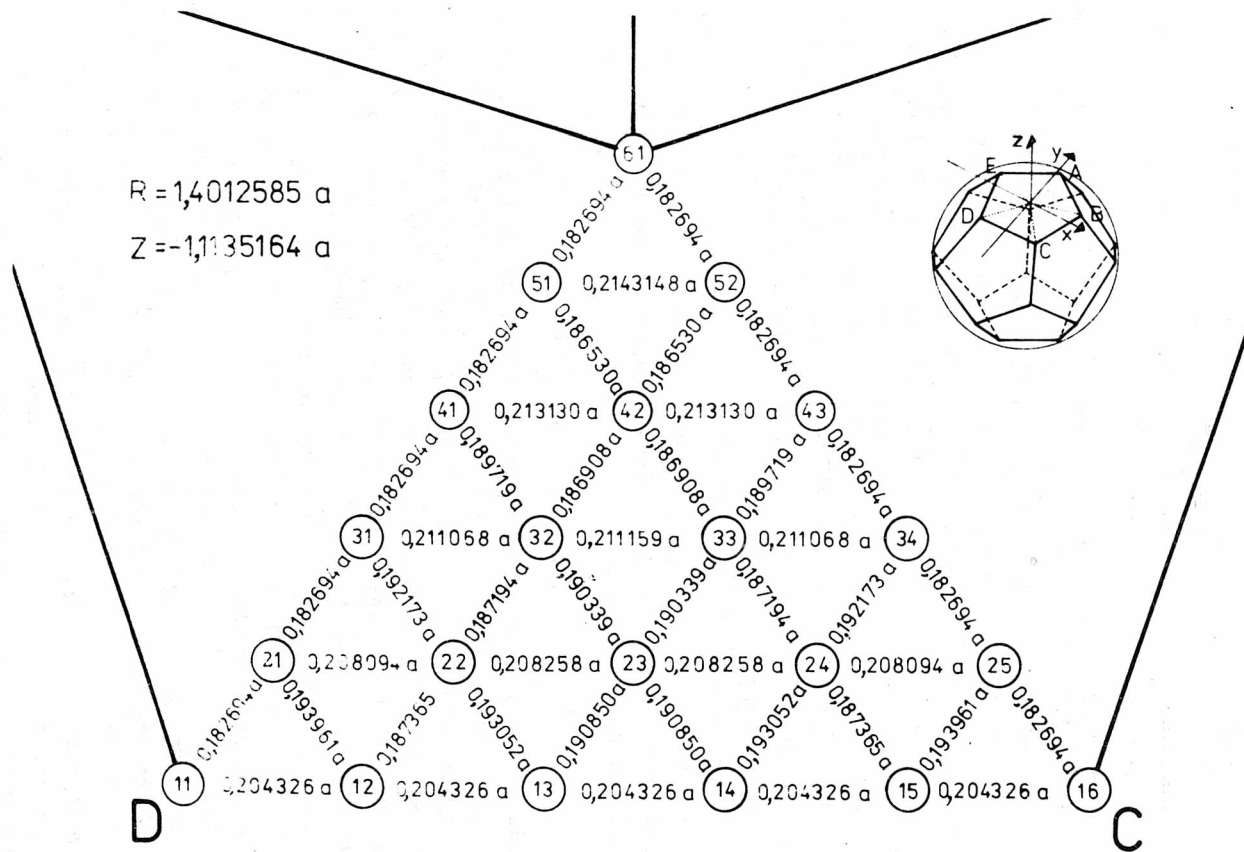
Stosunkowo mała wartość współczynnika η wiąże się z niewielką wyniosłością projektowanego przekrycia. Oszacowanie wartości granicznej współczynnika η napotyka duże trudności, mimo tak korzystnego usytuowania odcinków o ekstremalnych długościach. Z analizy różnych siatek sferycznych rozpiętych nad tym rzutem wynika, iż graniczna wartość współczynnika η jest funkcją stosunku długości promienia sfery do odległości środka sfery od płaszczyzny ABCDEF. Siatki sferyczne opisane na kuli, której środek leży bliżej tej płaszczyzny, odznaczają się dla tych samych n większą wartością współczynnika η od siatek wyznaczonych na sferach, których środki są bardziej oddalone od płaszczyzny rzutu.

Zupełnie podobnie przedstawia się określenie siatek sferycznych rozpiętych nad pięciokątem prawidłowym. Dla tego typu rzutu przyjmujemy wartość R równą długości promienia kuli opisanej na 12-ścianie foremnym, wartość Z zaś równą się długości promienia kuli wpisanej w ten wielościan. Całość obliczeń na emc wykonano dla następujących danych:

punkt D $[-0,5 a; -0,6881909 a]$

punkt C $[+0,5 a; -0,6881909 a]$

punkt 61 $[0; 0]$



Rys. 25. Związki miarowe występujące w $1/60$ części 1500-ścianu
 Fig. 25. Dimension relations occurring at one-sixtieth of a 1500-hedron

$$D_{DC} \quad [0 \quad ; \quad 0,6208252 \text{ a}]$$

$$D_{C61} \quad [-0,9008536 \text{ a}; \quad -0,6545084 \text{ a}]$$

$$D_{C61} \quad [+0,9008536 \text{ a}; \quad -0,6545084 \text{ a}]$$

$$Z = -1,1135164 \text{ a}$$

$$R = 1,4012385 \text{ a}$$

Przez a oznaczono długość krawędzi 12-ścianu foremnego. Na rysunku 25 przedstawiono wynik tych obliczeń dla $n = 5$. Otrzymamy w ten sposób siatkę sferyczną $12 \times 5 \times 5^2 = 1500$ -ścianu.

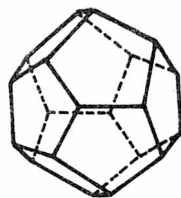
Pewne prawidłowości dotyczące ułożenia odcinków, które uważać możemy za równe co do swych długości zachodzą również i w tym przypadku, lecz położenia odcinków najkrótszego i najdłuższego w całej siatce są odmienne niż dla podanych siatek rozpiętych nad rzutem sześciokątnym. W siatce 1500-ścianu najdłuższym odcinkiem jest odcinek zawarty między punktami 51-52, najkrótszymi zaś odcinki leżące na łukach kół wielkich kuli i odpowiadające bokom wewnętrznych trójkątów składających się na pięciokąt prawidłowy.

Współczynnik η określony długościami sąsiadujących ze sobą odcinków siatki sferycznej, leżących w zworniku przekrycia dla 1500-ścianu powstałego na podstawie 12-ścianu foremnego przez zastosowanie metody deformacji siatki wtórnej, będzie więc równy:

$$\eta = \frac{0,2143148 \text{ a}}{0,182694 \text{ a}} = 1,173080.$$

Bardzo ciekawy i zaskakujący jest przebieg zmian wartości współczynnika η w zależności od stopnia podziału odpowiednich łuków na n równych części. Z usytuowania odcinków najdłuższych i najkrótszych w sąsiedztwie zwornika trójkątnej siatki sferycznej rozpiętej nad pięciokątną ścianą 12-ścianu foremnego możemy wnosić, że przy $n \rightarrow \infty$ wartość współczynnika η osiągnie swą górną granicę równą 1,1756. Tak się jednak nie dzieje, czego dowodem są wartości współczynnika η wyznaczone od $n = 1$ do $n = 20$ na emc i podane w tabeli 3. Przypuszczenia nasze sprawdzają się jedynie dla wartości η wyznaczonych od $n = 1$ do $n = 13$, potem następuje dość gwałtowny i skokowy wzrost wartości η . Aby rozwiać wątpliwości dotyczące przede wszystkim sposobu obliczeń, sprawdzono prawidłowość danych wejściowych, które okazały się poprawne w skali dokładności przyjętej do siedmiu cyfr znaczących. Następnie, aby wykluczyć podejrzenie o zakłócenie cyklu pracy maszyny cyfrowej, przeprowadzono jeszcze dwukrotnie proces obliczeń, których wyniki zgadzały się z wynikami otrzymanymi pierwotnie. Dokładna ich analiza wykazała, że nagły wzrost wartości współczynnika η dla $n \geq 14$ jest spowodowany zmianą usytuowania odcinków o ekstremalnych długościach. Odcinkami najkrótszymi pozostają nadal odcinki leżące na łukach, odpowiadających w

- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego do dł. odcinka najkrótszego



(555)

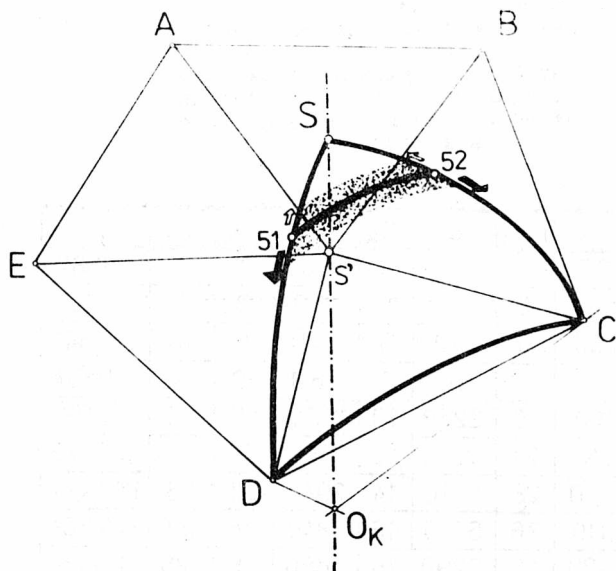
T a b e l a 3

n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	20	1	90	1	60	1	1	1,113587
2	110	3	360	4	240	3	7	1,159976
3	260	6	810	6	540	6	15	1,168641
4	470	10	1440	8	960	10	26	1,171684
5	740	15	2250	10	1500	15	40	1,173091
6	1070	21	3240	12	2160	21	56	1,173873
7	1460	28	4410	14	2940	28	76	1,174314
8	1910	36	5760	16	3840	36	99	1,174664
9	2420	45	7290	18	4860	45	125	1,174839
10	2990	55	9000	20	6000	55	154	1,175031
11	3620	66	10890	22	7260	66	186	1,175091
12	4310	78	12960	24	8640	78	221	1,175275
13	5060	91	15210	26	10140	91	259	1,175235
14	5870	105	17640	28	11760	105	300	1,202566
15	6740	120	20250	30	13500	120	344	1,201115
16	7670	136	23040	32	15360	136	391	1,200331
17	8660	153	26010	34	17340	153	442	1,198781
18	9710	171	29160	36	19440	171	496	1,198126
19	10820	190	32490	38	21660	190	553	1,215043
20	11990	210	36000	40	24000	210	613	1,213571

rzucie środkowym wewnętrznym krawędziom DS i CS pięciokrotnej ściany 12-ścianu foremnego (patrz rys. 26).

Odcinki najdłuższe dla $n \geq 14$ są usytuowane również w pasach równoległych do podstawy pięciokątnego rzutu, jednak bardziej oddalonych od zwornika przekrycia S. Dla kolejnych coraz większych n , pasma zawierające najdłuższe odcinki przesuwają się stopniowo w kierunku łuku CD. Pasma zawierające najdłuższe odcinki dla n będzie zlokalizowane jednak zapewne w górnej części równoramiennego trójkąta sferycznego DSB.

Na podstawie wydruków z drugiej i trzeciej tury obliczeń na emc uzupełniono do $n = 25$ wartości współczynnika η :



Rys. 26. Zmiany położenia odcinków o maksymalnych długościach w trójkątnej siatce sferycznej nad pięciokątnym rzutem podstawy
 Fig. 26. Changes of position of the segments of maximum length in a triangular spherical network above a pentahedron projection of the base

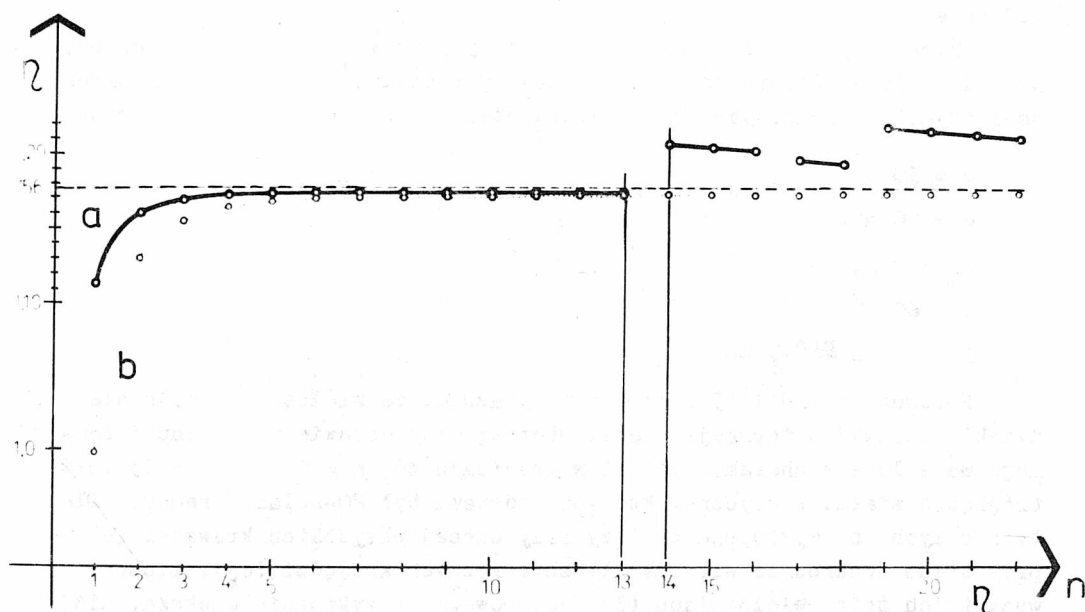
$n = 21$	$\eta = 1,212522,$
$n = 22$	$\eta = 1,213213,$
$n = 23$	$\eta = 1,223253,$
$n = 24$	$\eta = 1,222670,$
$n = 25$	$\eta = 1,221363.$

Gdy zestawimy te wartości z podanymi w tabeli 3 zauważymy, że dla kilku kolejnych $n \geq 14$ wielkości współczynnika η są bardzo zbliżone do siebie. Możemy wyróżnić kilka grup

- I - wartości dla $n \in [14 + 16]$
- II - wartości dla $n \in [17 + 18]$
- III - wartości dla $n \in [19-22]$
- IV - wartości dla $n \in [23-25]$

W ramach każdej grupy obserwujemy zmniejszające się wraz ze zwiększaniem n wartości η , co decyduje o "pilastym" charakterze wykresu zależności η od n dla $n > 14$ (rys. 26). Taki charakter wykresu świadczy o oddalaniu się linii zawierających odcinki najdłuższe od zwornika siatki sferycznej rozpiętej nad pięciokątną ścianą 12-ścianu foremnego.

Porównanie wielkości współczynników η dla siatek sferycznych pow-



Rys. 27. Wielkości współczynników η w zależności od n dla siatek sferycznych powstałych na podstawie: a) 12-ścianu foremnego, b) 20-ścianu foremnego

Fig. 27. Coefficient values η depending on n for spherical networks formed on the basis of: a) a regular dodecahedron, b) a regular icosahedron

stałych na podstawie 12-ścianu i 20-ścianu foremnego w metodzie deformacji siatki wtórnej przedstawiono na rys. 27.

Współczynnik η , charakteryzujący zróżnicowanie długości wszystkich odcinków w siatkach sferycznych powstałych w metodzie deformacji siatki wtórnej na podstawie 12-ścianu foremnego, zwiększa się dla n od 1 do 13 nieco szybciej, niż dla podobnych siatek rozpiętych nad ścianami 20-ścianu foremnego i zbliża się stopniowo wydawałoby się ku wspólnej granicznej wartości równej 1,1756. Jednak od $n = 14$ współczynnik η dla siatek sferycznych rozpiętych nad pięciokątną ścianą 12-ścianu zwiększa się skokowo i dla kilku kolejnych n ma zbliżone do siebie wartości.

Na rysunku 27 wzrost wartości współczynnika η dla $n \geq 14$ przedstawiono w sposób bardziej uwidaczniający zmiany, niż wynikałoby to z wartości podanych dla $n = 14-25$. Ustalenie granicznej wartości współczynni-

ka η dla siatek sferycznych, powstałych metodą deformacji siatki wtórnej na podstawie 12-ścianu foremego, jest więc problemem bardzo złożonym i wymaga szczegółowej analizy związków miarowych siatek, wyznaczonych przez wprowadzanie bardzo gęstych podziałów trójkąta sferycznego DSC (rys. 26).

Charakterystykę wielościanów powstałych po zastosowaniu tej metody na podstawie 12-ścianu foremego podano w tabeli 3. Wartości niektórych współczynników zależnych od n można obliczyć z następujących wzorów:

$$c = 30 n^2 - 10,$$

$$e = 90 n^2,$$

$$e_k = 2 n,$$

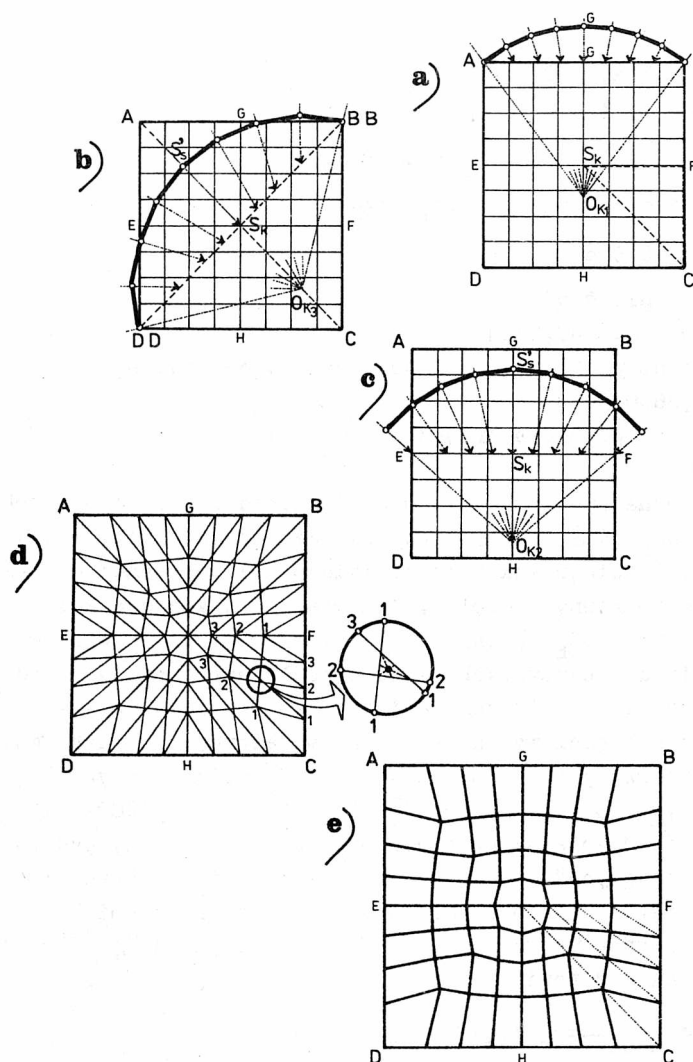
$$l = 60 n^2,$$

$$l_k = c_k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Porównanie tabeli 3 z tabelą 1 wykazuje, że wielościany powstałe dzięki metodzie deformacji siatki wtórnej na podstawie 12-ścianu foremego mają lepsze charakterystyki w granicach od $n = 1$ do $n = 13$, niż trójkątne siatki sferyczne, których podstawą był 20-ścian foremny. Dla tych samych n występuje tu trzy razy więcej wszystkich krawędzi (e) przy tylko dwukrotnie większej liczbie różnych krawędzi (e_k). Liczba wszystkich ścian wielościanu (l) jest również trzykrotnie większa, niż dla wielościanów powstałych na podstawie 20-ścianu, przy czym procent różnych ścian w całej siatce (l_k) jest dużo większy.

Z tych też względów siatki sferyczne powstałe na podstawie 12-ścianu foremego, mimo znacznego wzrostu wartości współczynnika η dla $n \leq 13$, mogą konkurować z siatkami sferycznymi określonymi na podstawie 20-ścianu foremego.

Wyznamy zdeformowaną siatkę trójkątną dla fragmentu sfery rozpiętej nad kwadratowym rzutem ABCD. Ograniczmy się jedynie do 1/8 części całego obszaru, tzn. do trójkąta S_kFC (rys. 28), ze względu na występującą tu również symetrię. Wyznamy rzutem środkowym z punktu O (środek kuli) uporządkowanie krawędzi bocznych (rys. 28a), następnie odcińków EF i GH (rys. 28c) oraz przekątnych BD i AC (rys. 28b). Omówionym poprzednio sposobem określamy położenia wierzchołków zdeformowanej siatki trójkątnej w obszarze równoramiennego trójkąta S_kFC (rys. 28d). Łącząc środki ciężkości odpowiednich wewnętrznych pól liniami "równoległymi" do boków kwadratu ABCD, wyznaczmy rysunek siatki, o oczkach czworokątnych, zdeformowanej rzutem środkowym. Pozwala ona wyznaczać na powierzchni sferycznej regularną siatkę czworokątną, jako najbardziej odpowiadającą tej formie rzutu. W ten sposób otrzymuje się przede wszystkim siatki sferyczne o oczkach trójkątnych. Długości prze-



Rys. 28. Schemat wyznaczania rzutem środkowym zdeformowanej siatki wtórnej wewnątrz podstawy w formie kwadratu

Fig. 28. Determination by a central projection of the deformed secondary network on a base in the form of a square

kątnych odpowiednich oczek czworokątnych posłużą do kontrolowania prawidłowego montażu prętów konstrukcji na powierzchni sferycznej (rys. 28e).

Według opisanego schematu określmy trójkątną siatkę sferyczną nad kwadratową ścianą 6-ścianu, jako szczególnego rodzaju przypadek całej rodziny siatek sferycznych rozpiętych nad rzutami czworokątnymi. Całość obliczeń wykonano dla następujących danych:

$$H \quad [0 \quad ; \quad -0,5 \text{ a}]$$

$$C \quad [0,5 \text{ a}; \quad -0,5 \text{ a}]$$

$$S_K \quad [0 \quad ; \quad 0 \quad]$$

$$D_{HC} \quad [0: \quad ; \quad 0,2071066 \text{ a}]$$

$$D_{CS} \quad [-0,3535533 \text{ a}; \quad -0,3535533 \text{ a}]$$

$$D_{SKH} \quad [0,5 \text{ a} \quad ; \quad 0 \quad]$$

- położenia środka kuli

$$Z = [0, \quad 0, \quad -0,5 \text{ a}]$$

- długość promienia kuli opisanej na 6-ścianie

$$R = 0,8660254 \text{ a}$$

- stopień podziału krawędzi wielościanu

$$n = 10$$

Program na emc wymagał, aby obliczenia wykonano w obrębie równoramiennego HCS_K dla $n = 5$, co równocześnie oznacza, że odpowiadający krawędzi wielościanu łuk koła wielkiego kuli opisanej na 6-ścianie podzielono na 10 równych części. Tak więc, dla każdego kolejnego podziału boków trójkąta HCS_K poznamy związki miarowe wielościanów powstałych w tej metodzie dla parzystych liczb określających stopień podziału krawędzi 6-ścianu na n równych odcinków. Po podzieleniu krawędzi 6-ścianu na 10 równych części wyznaczamy metodą deformacji siatki wtórnej trójkątną siatkę sferyczną $25 \times 8 \times 6 = 1200$ -ścianu (rys. 29). W przedstawionej na rys. 29 $1/48$ części siatki sferycznej 1200-ścianu odcinki o zbliżonych do siebie długościach układają się w trzy podstawowe grupy linii "równoległych" do odpowiedniej krawędzi trójkąta HCS' . Najdłuższy w tej siatce jest odcinek zawarty między punktami 21-72, najkrótsze są odcinki leżące na krawędzi $H'C$. Współczynnik η dla 1200-ścianu powstałego na podstawie 6-ścianu dla $n = 6$ jest równy:

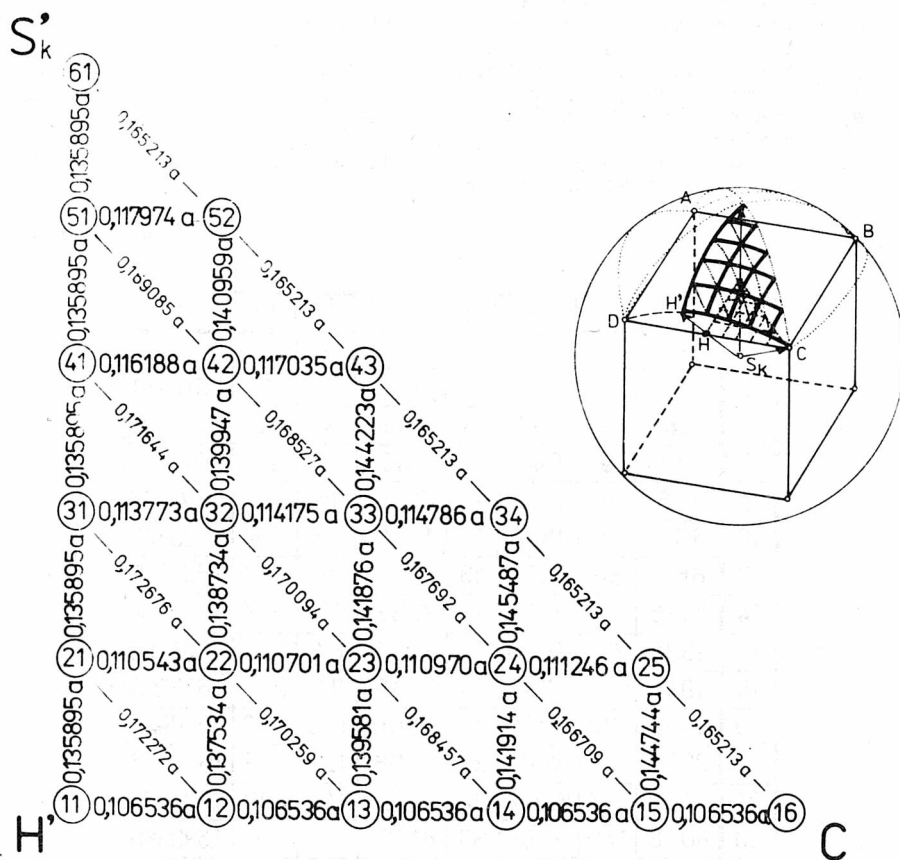
$$\eta = \frac{0,172272 \text{ a}}{0,106536 \text{ a}} = 1,6170309.$$

Pełną charakterystykę tego typu wielościanów podano w tabeli 4.

Odcinki wyznaczające czworokątną siatkę sferyczną dla wielościanów powstałych na podstawie 6-ścianu wykazują mniejsze zróżnicowanie długości. Najdłuższym odcinkiem jest odcinek zawarty między punktami 24-34, najkrótsze są odcinki HCS_K tak jak poprzednio. Współczynnik η dla takiej siatki wynosi:

$$\eta = \frac{0,145487 \text{ a}}{0,105536 \text{ a}} = 1,3656135.$$

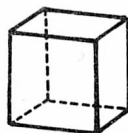
Ponieważ odcinki najdłuższe i najkrótsze w czworokątnej siatce sferycznej są usytuowane w pobliżu wierzchołów 6-ścianu, wartość η dla tego typu siatek przy $n \rightarrow \infty$ przyjmuje wartości w okolicy liczby $\sqrt{2} = 1,414213$.



Rys. 29. 1/48 część trójkątnej siatki sferycznej 1200-ścianu
Fig. 29. 1/48 part of a triangular spherical network of a 1200-hedron

Zróźnicowanie długości poszczególnych odcinków w ramach jednej linii, np. 12-52, jest większe i wynika z właściwości rzutu środkowego dość znacznie oddalonej ściany 6-ścianu na współśrodkową kulę. Wpływ na to zróźnicowanie długości odcinków mają: typ trójkąta $H'CS_k$, który jest trójkątem równoramiennym, położenie tego trójkąta na płaskiej ścianie wielościanu (rys. 29), a także w niewielkim stopniu niedokładności procesu obliczeń, a ściślej, niedokładności wynikłych z przybliżonych danych wyjściowych. Dane wyjściowe programu na emc obliczono na kalkulatorze Santronic 81SR i podano z dokładnością ograniczoną do siedmiu liczb znaczących. Może to mieć pewne znaczenie, ponieważ do wyznaczenia danych wyjściowych potrzebne były wartości takich liczb niewymiernych, jak $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, które to wartości były następnie wielokrotnie przetwarzane w procesie obliczeń.

- c - liczba wszystkich wierzchołków
 c_k - liczba różnych kątów bryłowych
 e - liczba wszystkich krawędzi wielościanu
 e_k - liczba różnych krawędzi
 l - liczba wszystkich ścian wielościanu
 l_k - liczba różnych ścian
 s_k - liczba różnych kątów płaskich zawartych pomiędzy krawędziami ścian wielościanu
 η - stosunek długości odcinka najdłuższego do dł. odcinka najkrótszego



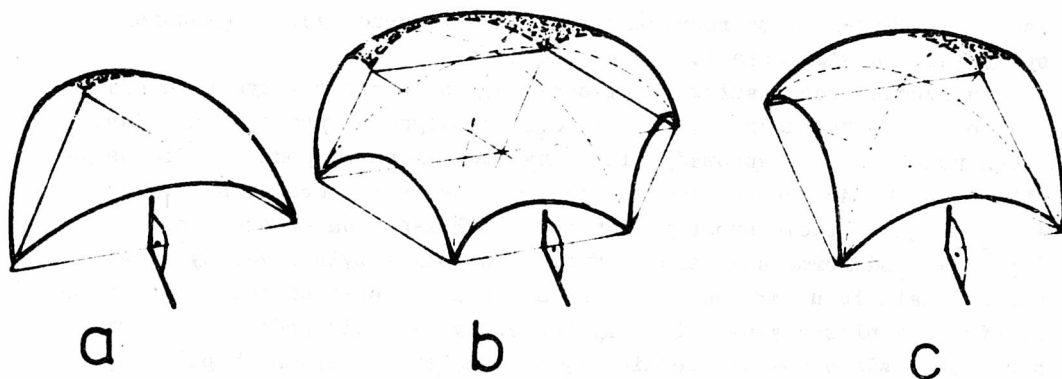
(4,4,4)

T a b e l a 4

n	c	c_k	e	e_k	l	l_k	s_k	η
1	8	1	12	1	6	1	1	1,0
2	26	1	72	3	48	1	1	1,517638
4	98	4	288	6	192	4	12	1,595050
6	218	9	648	9	432	9	27	1,609572
8	386	16	1152	12	768	16	48	1,614666
10	602	25	1800	15	1200	25	75	1,620825
12	866	36	2592	18	1728	36	108	1,623699
14	1178	49	3528	21	2352	49	147	1,625066
16	1538	64	4608	24	3072	64	192	1,626853
18	1946	81	5832	27	3888	81	243	1,628203
20	2402	100	7200	30	4800	100	300	1,628922
22	2906	121	8712	33	5808	121	363	1,629576
24	3458	144	10368	36	6212	144	432	1,630409
26	4058	169	12168	39	8112	169	507	1,630880
28	4706	196	14112	42	9408	196	588	1,631132
30	5402	225	16200	45	10800	225	675	1,632310
32	6146	256	18432	48	12288	256	768	1,632775
34	6938	289	20808	51	13872	289	867	1,633077
36	7778	324	23328	54	15552	324	972	1,633360
38	8666	361	25992	57	17328	361	1083	1,633691

6. WYZNACZANIE SIATEK SFERYCZNYCH METODĄ DEFORMACJI SIATKI WTÓRNEJ RZUTEM PROSTOPADŁYM NA PŁASZCZYZNĘ

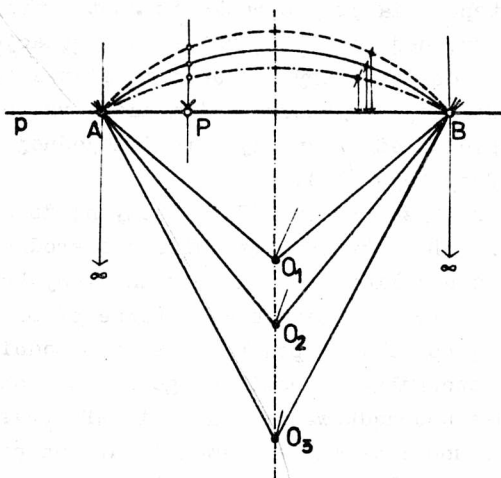
Podane w punktach 1.5 i 1.6 schematy postępowania służą do określania siatek sferycznych na podstawie analizy wielościanów, których ścianami mogą być różne wielokąty. Podział tych wielokątów na odpowiednie trójkąty stanowił punkt wyjścia do określenia siatek sferycznych za pomocą rzutu środkowego ścian wielościanu na opisaną na nim kulę. W praktyce wykorzystuje się również przekrycia kopułowe nad różnymi kształta-



Rys. 30. Powierzchnie sferyczne ograniczone płaszczyznami prostopadłymi do płaszczyzny podstawy
 Fig. 30. Spherical surfaces restricted by perpendicular planes to the plane of the base

mi podstaw, których brzegi w rzucie poziomym pokrywają się z krawędzią podstawy (rys. 30).

W celu określenia na nich siatek sferycznych posłużymy się znaną już metodą wykorzystującą właściwości rzutu prostopadłego na płaszczyznę, jako granicznego przypadku rzutu środkowego, gdzie punkt rzutowania został przesunięty do nieskończoności (rys. 31).



Rys. 31. Właściwości rzutu prostopadłego na płaszczyznę
 Fig. 31. Properties of the perpendicular projection onto the plane

Mimo niezmiennego położenia punktu rzutowania (w nieskończoności), możliwości wariantowania przypadków pozostają takie same, jak przy wykorzystywaniu rzutu środkowego ścian ze środka kuli opisanej na danym wie-

łościanie. Możemy więc regulować wyniosłością przekrycia i gęstością opisywanej na wielościanie siatki sferycznej.

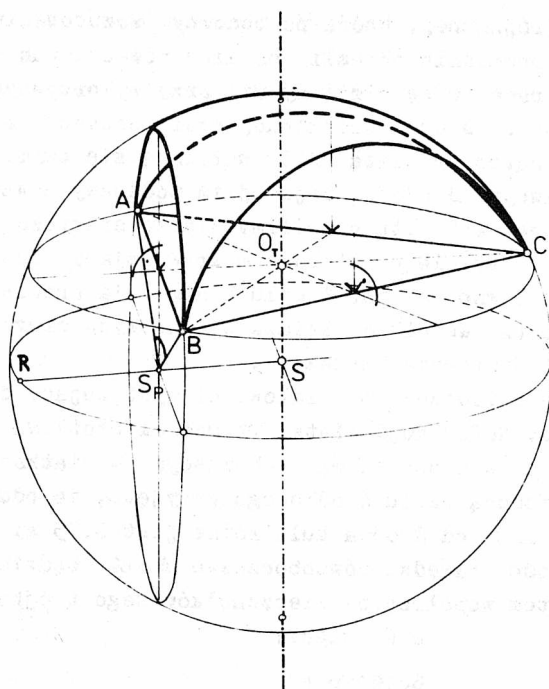
W rzucie prostopadłym na płaszczyznę p obrazem wszystkich punktów ze sfer o środkach O_1 , O_2 i O_3 , leżących na prostej K , jest jeden punkt P . Po wprowadzeniu jednakowego stopnia podziału dla wszystkich łuków AB punkty równego podziału ze sfer o środkach O_1 , O_2 i O_3 mają w rzucie prostopadłym różne położenie na płaszczyźnie (rys. 31). Zdeformowanie siatki wtórnej na płaszczyźnie zależy od stopnia podziału łuku AB na n równych odcinków, oraz od odległości środka sfery od płaszczyzny p . Przy jednakowym stopniu podziału odpowiednich łuków zdeformowanie będzie większe dla sfer o środkach położonych bliżej płaszczyzny rzutu. Tok postępowania jest podobny do opisanego wcześniej i przedstawimy go również dla trzech podstawowych przypadków, tzn. dla fragmentów sfer rozpiętych nad regularnymi rzutami trójk-, cztero-, i sześciokątnymi (rys. 30). Zasady wyznaczania rzutem prostopadłym siatki wtórnej dla wycinka sfery rozpiętej nad trójkątem równobocznym będą obowiązywały również przy wyznaczaniu podobnych siatek dla czasz rozpiętych nad sześci- i czworokątem.

7. SIATKA SFERYCZNA ROZPIĘTA NAD TRÓJKĄTEM RÓWNOBOCZNYM

Procedura postępowania przy określaniu rzutem prostopadłym na płaszczyznę siatki sferycznej rozpiętej nad rzutem będącym trójkątem równobocznym jest podobna do procedury wyznaczania siatek sferycznych metodą deformacji siatki wtórnej z wykorzystaniem zasad rzutu środkowego, z tym że w pierwszym etapie należy wyznaczyć promień jednej z trzech równych krawędzi wycinka sfery (rys. 32).

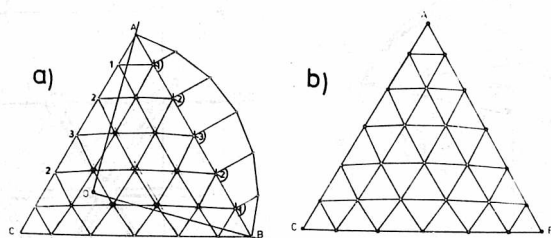
Przecinamy płaszczyznę rzutu ABC płaszczyzną do niej prostopadłą i zawierającą odcinek AB , otrzymujemy położenie środka okręgu S_p na odcinku SR . Okrąg ten zawiera łuk AB ograniczony kątem AS_pB . Długości odcinków AS_p i BS_p są jednakowe i równe promieniowi poszukiwanego okręgu. Etap drugi przebiega podobnie jak poprzednio, z tą tylko różnicą, że rzutem prostopadłym z podzielonego na n równych części łuku AB wprowadzamy nowe uporządkowanie krawędzi AB (rys. 32).

Odkładamy nowe uporządkowanie krawędzi AB na pozostałych bokach $\triangle ABC$ i prostymi równoległymi do jego podstaw łączymy odpowiednie pary punktów (rys. 33a). Następnie znajdujemy środki ciężkości trójkątów wewnętrznych tak określonych, jak uprzednio, które to środki ciężkości wyznaczają wierzchołki zdeformowanej siatki trójkątnej w obszarze $\triangle ABC$. Po połączeniu odcinkami prostymi wszystkich sąsiadujących ze sobą wierzchołków otrzymamy rysunek zdeformowanej rzutem prostopadłym na płas-



Rys. 32. Wyznaczanie promienia wycinka sfery rozpiętej nad równobocznym trójkątem ABC

Fig. 32. Determination of the radius of the sphere sector extended over the equilateral triangle ABC



Rys. 33. Schemat wyznaczania zdeformowanej siatki wtórnej dla zasad rzutu prostopadłego na płaszczyznę

Fig. 33. Determination of the deformed secondary network for the principles of the perpendicular projection onto the plane

Promień okręgu o środku w punkcie S_E (rys. 34a), którego częścią jest jeden z trzech równych łuków odpowiadających w rzucie prostopadłym krawędziom ABC, obliczymy na podstawie znanych długości odcinków $K'B = 1/2 CB = 0,5728219$ a oraz długości odcinka $K'S = 0,75$ a. Ponieważ odcinki te są przyprostokątnymi w prostokątnym trójkącie $K'S_E$, więc długość przeciwprostokątnej $S_E B$ równa długości promienia łuku CB wyniesie:

$$S_E B = \sqrt{(0,75 \text{ a})^2 + (0,5728219 \text{ a})^2} = 0,9437293 \text{ a}.$$

Całość obliczeń przeprowadzono przy użyciu kalkulatora dla $n = 6$, czyli podziale łuków brzegowych na sześć równych części. Gdy mamy już podstawowe dane, przystępujemy do wyznaczania nowego uporządkowania rzutu prostopadłym na płaszczyznę boków trójkąta ABC. W pierwszym etapie należy podzielić łuk okręgu o środku w punkcie S i ograniczony krawędzią BC na sześć równych części.

Na podstawie prostych zależności trygonometrycznych występujących w prostokątnym trójkącie $BK'S_E$ obliczamy wartość kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,75 \text{ a}}{0,5728219 \text{ a}} = 1,309307, \quad \text{stad} \quad \alpha = 52,628772^\circ$$

Kąt $K'S_E B$ ma wartość $90^\circ - \alpha = 37,371235^\circ$, trzecia zaś jego część równa $12,457078^\circ$ posłużyła do wyznaczenia miar kątów β i γ

$$\beta = 65,085943^\circ, \quad \text{stad} \quad \operatorname{tg} \beta = 2,1529225,$$

$$\gamma = 77,542921^\circ, \quad \text{stad} \quad \operatorname{tg} \gamma = 4,5267537.$$

Wartości tangensów kątów β i γ są wyznacznikami kierunkowymi prostych wychodzących z punktu S_E i dzielących połowę łuku BC na trzy równe części. Punkty przecięcia się tych prostych z łukiem okręgu o środku w punkcie S_E są punktami równego podziału łuku $K'B$, które następnie, po zrzutowaniu ich rzutem prostopadłym na płaszczyznę, wyznaczają współrzędne punktów 15 i 16 na odcinku $K'B$. Znajomość tych współrzędnych stanowi z kolei punkt wyjścia do określenia położenia wierzchołków zdeformowanej siatki trójkątnej w 1/6 części trójkąta ABC (podobnie jak dla 1/6 części trójkątnej ściany 20-ścianu foremnego przy wyznaczaniu siatki sferycznej 2000-ścianu, generowanej rzutem środkowym, patrz pkt 3).

Właściwości rzutu prostopadłego na płaszczyznę pozwalają na stosunkowo proste i szybkie uzyskanie potrzebnych wyników, ponieważ dla każdego z pokazanych na rys. 34b punktów należy napisać równanie prostej prostopadłej do płaszczyzny XOY. Punkty przecięcia się tych prostych z powierzchnią kuli wyznaczają położenia węzłów trójkątnej siatki sferycznej rozpiętej nad równobocznym trójkątem ABC. Współrzędne sferyczne węzłów tej siatki, odpowiadające numerom węzłów zdeformowanej siatki

trójkątnej na płaszczyźnie XOY są następujące:

pkt B = 17	[0,5728219 a;	-0,3307188 a;	0,75 a]
pkt 16	[0,3975589 a;	-0,3307188 a;	0,8559036 a]
pkt 15	[0,2035701 a;	-0,3307188 a;	0,9215188 a
pkt K = 14	[0 ;	-0,3307188 a;	0,9437293 a]
pkt 26	[0,4851904 a;	-0,1789366 a;	0,8559042 a]
pkt 25	[0,3005644 a;	-0,1735309 a;	0,9378422 a]
pkt 24	[0,1017850 a;	-0,1707651 a;	0,9800403 a]
pkt 23	[0,1017850 a;	-0,1707651 a;	0,9800403 a]
pkt 34	[0,1987794 a;	-0,0027657 a;	0,9800403 a]
pkt O _T = 33	[0 ;	0 ;	1,0 a

Współrzędne XY określają położenia omawianych punktów w obszarze płaskiego trójkąta ABC.

Odległości między sąsiadującymi ze sobą węzłami trójkątnej siatki sferycznej obliczono ze wzoru:

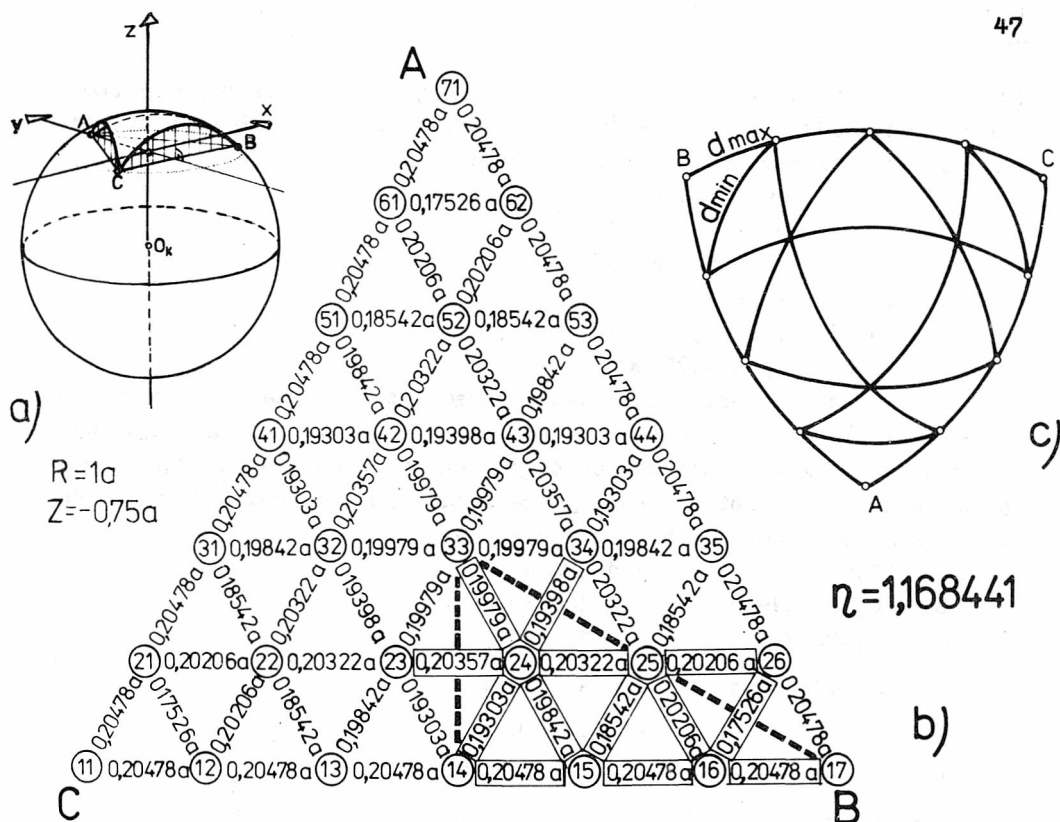
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

i przedstawiono je wraz z ich położeniem w równobocznym trójkącie sferycznym na rys. 35b.

Z analizy związków trójkątnej siatki sferycznej przedstawionej na rys. 35b wynika, że odcinki o zbliżonych do siebie długościach układają się w linie równoległe do każdej z podstaw równobocznego trójkąta ABC. Różnice w wartościach długości odcinków leżących na jednym pasmie są największe dla pasm leżących najbliżej podstaw trójkąta ABC, np. w pasmie ograniczonym punktami nr 21 i 26. W obrębie tego pasma odcinkiem najdłuższym jest odcinek zawarty między punktem 23 a 24, odcinkami zaś najkrótszymi są odcinki zawarte pomiędzy punktami 25 i 26 oraz ze względu na symetrię między punktem 21 a 22. Współczynnik η dla tego pasma jest bardzo mały i równy:

$$\eta = \frac{0,20357 \text{ a}}{0,20206 \text{ a}} = 1,007473.$$

Dla omawianego pasma średnia wartość leżących na nim odcinków wynosiłaby 0,202815 a i zmieniała się w granicach $\pm 0,000755$ a, co stanowiłoby 0,37% jej długości podstawowej. Pozwala to określić odcinki leżące w ramach jednego pasma mianem odcinków o równych długościach. Tak więc, dla prezentowanej metody w siatkach sferycznych generowanych rzutem prostopadłym na płaszczyznę i rozpiętych nad równobocznym ΔABC , przy podziale łuków bocznych na n równych części, występuje na ogólną liczbę $(n/(n+1))/2$ odcinków, jedynie n odcinków o różnych długościach. Właściwość ta pokrywa się z właściwościami siatek trójkątnych sferycznych, powstałych dzięki metodzie deformacji siatki wtórnej na podstawie wielo-



Rys. 35. Związki miarowe siatki sferycznej wyznaczonej nad równobocznym trójkątem ABC dla $n = 6$ metodą deformacji siatki wtórnej z wykorzystaniem rzutu prostokątnego na płaszczyznę

Fig. 35. Dimension relations of the spherical network determined over the equilateral triangle ABC when $n = 6$, by the method of a secondary network deformation with the help of the perpendicular projection onto the plane

ścianów foremnych. Nieco inaczej natomiast przedstawia się usytuowanie odcinków najdłuższych i najkrótszych w całej siatce sferycznej. Odcinkami najdłuższymi siatki są odcinki leżące na krawędziach równobocznego trójkąta sferycznego ABC, np. odcinek zawarty między punktami 16 a 17 o długości równej 0,20478 a. Odcinkami najkrótszymi są odcinki leżące tuż przy wierzchołkach Δ ABC, jak np. odcinek 16-26, którego długość równa się 0,17526 a. Współczynnik η dla tej siatki przy $n = 6$ wynosi:

$$\eta = \frac{0,20478 \text{ a}}{0,17526 \text{ a}} = 1,168441.$$

Mimo iż ta siatka sferyczna została określona rzutem prostokątnym na płaszczyznę, to jednak z powodu wykorzystywania zasad metody deformacji siatki wtórnej możemy przypuszczać, że charakter wzrostu współczynnika η w zależności od n będzie podobny do przebiegu współczynnika η

dla siatek sferycznych, powstałych za pomocą rzutu środkowego na podstawie prezentowanych wielościanów foremnych. Potwierdzeniem tych oczekiwań są wartości współczynnika η obliczone dla następujących n :

$n = 2$	$\eta = 1,055642$
$n = 4$	$\eta = 1,129932$
$n = 8$	$\eta = 1,188335$
$n = 10$	$\eta = 1,201068$
$n = 200$	$\eta = 1,254506$
$n = 1000$	$\eta = 1,255000$

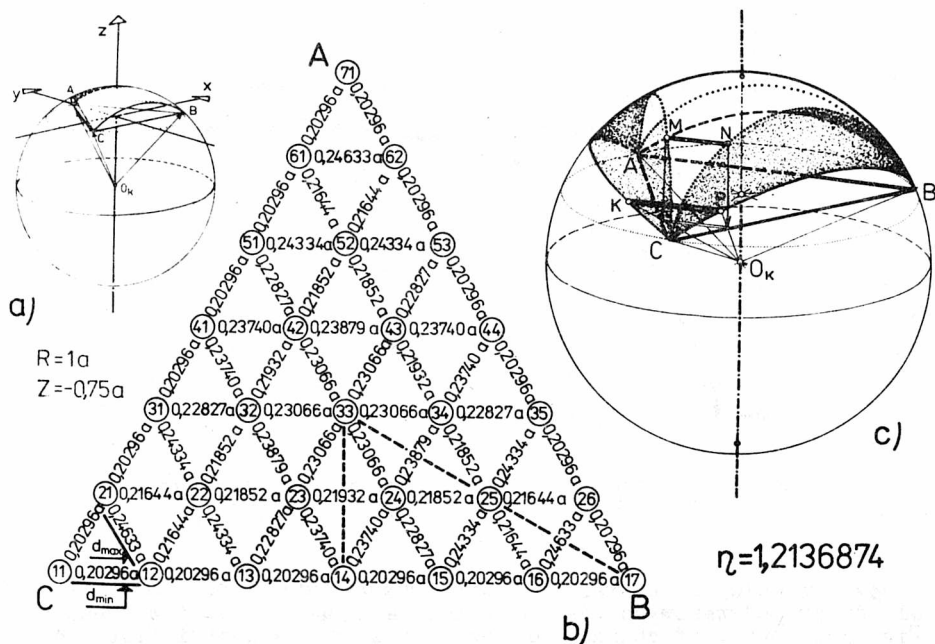
W celu pełnego porównania dwóch zasadniczych odmian metody deformacji siatki wtórnej, określono nad tym samym rzutem, tzn. nad równobocznym trójkątem ABC i dla takich samych warunków wstępnych, siatki sferyczne generowane rzutem środkowym ze środka kuli o promieniu 1 a. Obliczeń dokonano na emc dla następujących danych:

A	[0,0 a ; 0,6614376 a]
B	[0,5728219 a; -0,3307188 a]
C	[-0,5728219 a; -0,3307188 a]
D_{AB}	[-0,4234526 a; -0,2444804 a]
D_{BC}	[0,0 ; 0,4889610 a]
D_{CA}	[0,4234526 a; -0,2444804 a]
Z	[0,0; 0,0; -0,75 a]
R	1,0 a

Otrzymane wyniki dla $n = 6$ przedstawiono na rys. 36b.

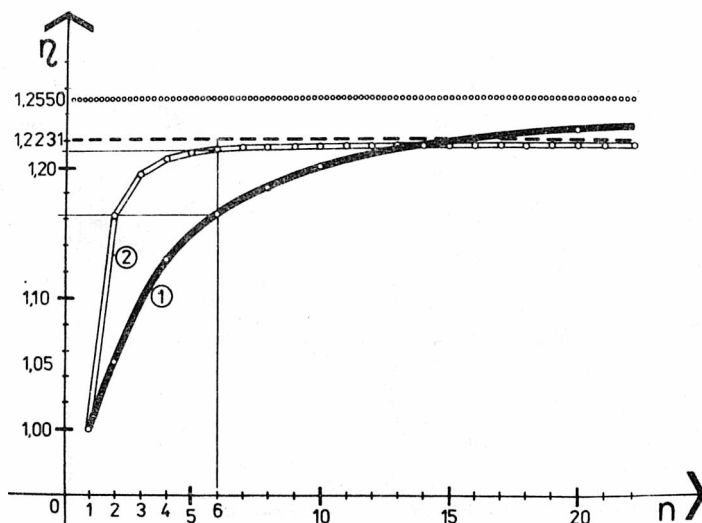
W prezentowanej siatce dla $n = 6$ współczynnik $\eta = 1,213674$, jest więc znacznie większy od współczynnika η charakteryzującego rozrzut długości odcinków w siatce sferycznej generowanej rzutem prostopadłym na płaszczyznę. Wiąże się to z odmiennym rozmieszczeniem odcinków o ekstremalnych długościach w wierzchołkach równobocznego trójkąta sferycznego dla porównywanych odmian metody deformacji siatki wtórnej. Odcinek MN na rys. 36c jest najkrótszy w siatkach sferycznych generowanych rzutem prostopadłym na płaszczyznę. Równoległy do niego odcinek KP jest z kolei najdłuższy w siatkach sferycznych, powstałych nad tym samym rzutem przy wykorzystaniu zasad rzutu środkowego. Na tej podstawie można by przypuszczać, że relacje wartości współczynników η dla $n \rightarrow \infty$ będą w dużym stopniu odpowiadały wzajemnym relacjom wartości η obliczonych przy $n = 6$ dla obu odmian metody deformacji siatki wtórnej.

W celu potwierdzenia tych oczekiwań, obliczono na emc wartości η dla siatek generowanych rzutem środkowym nad omawianym ΔABC , przedstawiono je na rys. 37 w zestawieniu z wartościami η dla podobnych siatek, powstałych dzięki wykorzystaniu zasad rzutu prostopadłego na płaszczyznę.

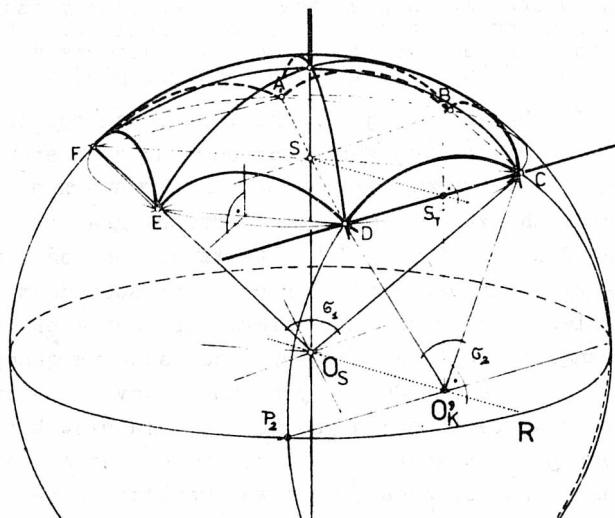


Rys. 36. Związki miarowe siatki sferycznej dla $n = 6$ otrzymanej metodą deformacji siatki wtórnej wykorzystującej zasady rzutu środkowego
 Fig. 36. Dimension relations of the spherical network when $n = 6$ obtained by means of the method of secondary network deformation making use of the principles of central projection

Krzywa 1 charakteryzuje przebieg wartości współczynnika η w zależności od n dla siatek generowanych rzutem prostokątnym na płaszczyznę, krzywa 2 zaś obrazuje wzrost wartości współczynnika η (n) dla siatek generowanych rzutem środkowym. Wartości graniczne w obu przypadkach obliczono dla $n = 1000$. Tak więc wzrost wartości współczynnika η dla siatek sferycznych określanych rzutem prostokątnym na płaszczyznę jest łagodny, lecz dla dużych n osiąga wartości większe od początkowo gwałtownie rosnącego współczynnika η , charakteryzującego rozrzut długości odcinków w siatkach sferycznych generowanych rzutem środkowym. Poznanie przebiegu wzrostu współczynników η dla siatek sferycznych uzyskiwanych w obu prezentowanych odmianach metody deformacji siatki wtórnej pozwala na pełną ich ocenę, ponieważ wszelkie inne kryteria oceny przybierają w obu przypadkach jednakowe wartości, co jest konsekwencją podobnego, mimo wszystko, usytuowania odcinków o jednakowych długościach w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego. Metodę deformacji siatki wtórnej wykorzystującą właściwości rzutu prostokątnego na płaszczyznę możemy z powodzeniem stosować dla wyznaczania związków miarowych siatek sferycznych rozpiętych nad różnymi typami rzutów.



Rys. 37. Przebieg zmian wartości współczynników η w zależności od n dla dwóch podstawowych odmian metody deformacji siatki wtórnej
 Fig. 37. Course of changes of the values of the coefficients η depending on n for two basic variations of the method of secondary network deformation



Rys. 38. Określenie promienia łuków bocznych czaszy rozpiętej nad rzutem sześciokątnym
 Fig. 38. Determination of the radius of lateral arcs of the cap extended over the hexagonal projection

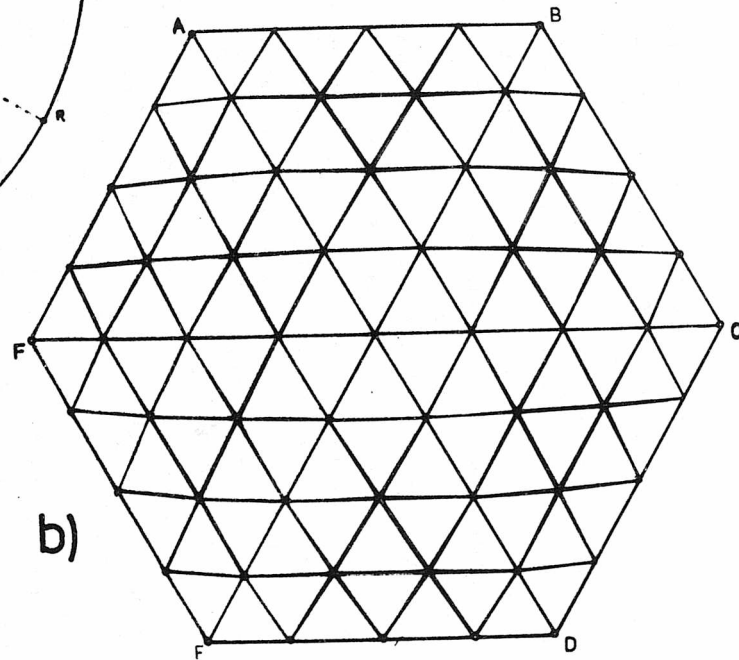
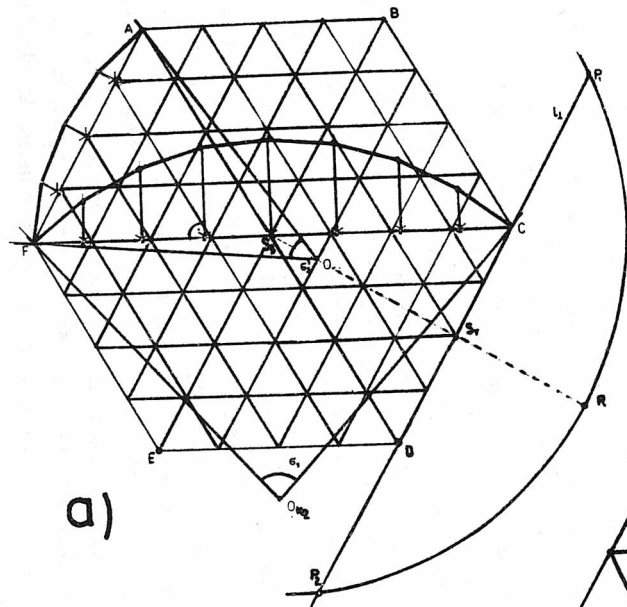
8. SIATKI SFERYCZNE

W obu odmianach metody deformacji siatki wtórnej, przy zastosowaniu podobnych procedur postępowania, uzyskuje się regularne siatki sferyczne, co sprawdzono na przykładzie siatek rozpiętych nad rzutem w formie trójkąta równobocznego. Możemy więc być pewni, że określone odmianą tej metody, wykorzystującej zasady rzutu prostopadłego na płaszczyznę, siatki sferyczne rozpięte nad innymi typami rzutów będą również siatkami regularnymi, dlatego też ograniczymy się jedynie do przedstawienia schematu postępowania przy ich wyznaczaniu.

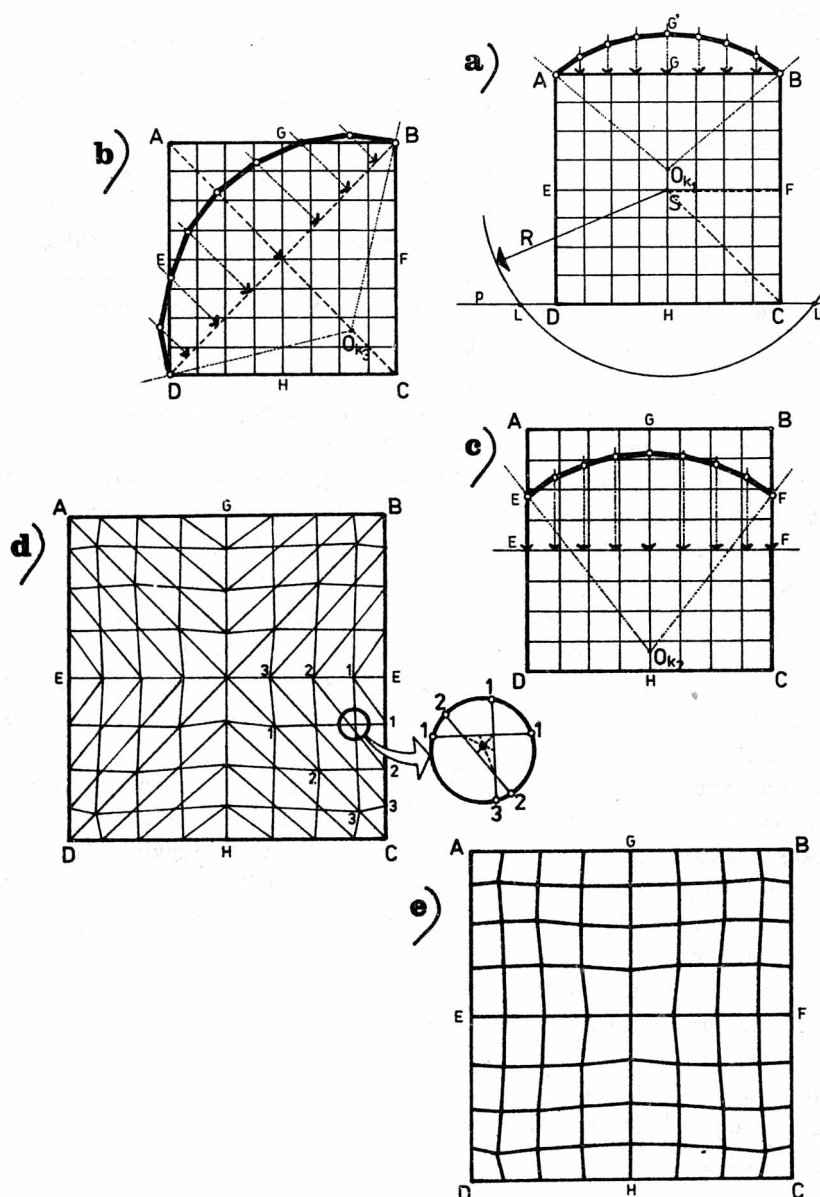
Przed przystąpieniem do wyznaczania zdeformowanej siatki trójkątnej dla czaszy rozpiętej nad rzutem w formie sześciokąta prawidłowego musimy określić położenie środka i promień okręgu, na którym leżą łuki odpowiadające w rzucie prostopadłym krawędziom bocznym sześciokąta $ABCDEF$ (rys. 38). Położenie środka i promień łuku DC znajdziemy po przecięciu płaszczyzny rzutu $ABCDEF$ płaszczyzną do niej prostopadłą i zawierającą odcinek DC .

Gdy mamy jednoznacznie określony kąt DO_KC oraz łuk DC podzielony na n równych części, wprowadzamy rzutem prostopadłym nowe uporządkowanie krawędzi DC (rys. 39). Odkładamy to uporządkowanie na pozostałych bokach sześciokąta $ABCDEF$. Następnie dzielimy łuk odpowiadający jednej z przekątnych, np. FC , na $2n$ równych części (rys. 39a). Łuk FC jest cięciwą koła wielkiego kuli o środku O_s ograniczoną przez kąt FO_sC , gdzie długości odcinków FO_s i CO_s są równe długości promienia kuli. Rzutem prostopadłym znajdujemy odwzorowanie punktów równego podziału łuku FC na odpowiadającej mu przekątnej sześciokąta $ABCDEF$. Przez obrót dokoła punktu S wprowadzamy to nowe uporządkowanie na pozostałych przekątnych AD i BE . Dalej postępujemy tak samo, tzn. wyznaczamy odpowiednie linie i znajdujemy środki ciężkości ograniczonych przez nie wewnętrznych trójkątnych pól, a po ich wzajemnym połączeniu otrzymamy rysunek nowej, zdeformowanej siatki trójkątnej (rys. 39b). Siatka ta stanowi punkt wyjścia do opracowania siatki sferycznej na czaszy o zadany promieniu i rozpiętej nad sześciokątnym rzutem $ABCDEF$. Ponowne rzutowanie wierzchołków zdeformowanej siatki rzutem prostopadłym do płaszczyzny sześciokąta daje równomierną siatkę sferyczną.

Zgodnie z obowiązującymi zasadami deformowania wewnętrznych siatek dla rzutu trójkątnego i sześciokątnego przystępujemy do wyznaczania rzutem prostopadłym zdeformowanej siatki czworokątnej wewnątrz kwadratu $ABCD$, będącego podstawą fragmentu czaszy, o zadany wstępnie promieniu. Aby ją uzyskać, należy, zgodnie z podanymi wcześniej zasadami, uporządk-



Rys. 39. Schemat postępowania przy
wyznaczaniu rzutem prostokątnym zde-
formowanej siatki trójkątnej w ob-
szarze sześciokątnej podstawy rzutu
Fig. 39. Determination procedure of
the deformed triangular network
within the area of the hexagonal
projection base by means of the
perpendicular projection



Rys. 40. Schemat wyznaczania rzutem prostopadłym na płaszczyznę zdeformowanej siatki wtórnej wewnątrz podstawy w formie kwadratu ABCD
 Fig. 40. Determination of the deformed triangular network by means of the hexagonal projection on to the plane inside the base in the form of the square ABCD

kować rzutem prostopadłym krawędzie boczne, tak jak na przykładzie krawędzi AB.

Na rysunku 40a odcinki AO_{K1} i BO_{K1} równe są długościom odcinków HP_1 i HP_2 i jednocześnie równe promieniowi łuków wszystkich krawędzi bocznych czaszy rozpiętej nad rozpatrywanym kwadratem podstawy. Procedura wyznaczania długości promienia tych łuków przebiega podobnie jak dla rzutów podstawy w formie trójkąta lub sześciokąta. Następnie, rzutem prostopadłym wprowadzamy nowe uporządkowanie punktów na liniach ograniczonych punktami EF i GH (rys. 40c) oraz na przekątnych BD i AC (rys. 40b). Łuki odpowiadające krawędziom bocznym i odcinkom EF i GH dzielimy na n równych części, łuki zaś odpowiadające przekątnym BD i AC na $2n$ równych części. Położenie wierzchołków zdeformowanej siatki trójkątnej możemy wyznaczyć tylko w obszarze jednego z przystających równoramiennych trójkątów prostokątnych, np. w trójkącie SFC, określając położenia środków ciężkości odpowiednich wewnętrznych trójkątów (rys. 40d). Pozwoli to na znalezienie w całym obszarze kwadratu ABCD wierzchołków i rysunku zdeformowanej siatki czworokątnej (rys. 40e). Tak zdeformowana siatka pozwoli na uzyskanie regularnej, sferycznej siatki czworokątnej rozpiętej nad danym rzutem, gdy ponownie rzutem prostopadłym odwzorujemy węzły tej siatki na powierzchnię sfery o zadanym na wstępie promieniu i odległości jej środka od płaszczyzny rzutu. Zdeformowanie to będzie odwrotnie proporcjonalne do odległości środka kuli od płaszczyzny rzutu i będzie większe dla sfer, których środki leżą bliżej tej płaszczyzny.

Warto zwrócić uwagę na charakterystyczny rysunek zdeformowanej w ten sposób siatki czworokątnej i porównać z rysunkiem również czworokątnej siatki zdeformowanej rzutem środkowym na płaszczyznę. Różnice w rysunku tych dwóch siatek są na przykładzie rzutu w formie czworokąta bardziej widoczne, niż dla podobnych siatek powstałych w obszarach podstawy trójkątnej bądź sześciokątnej.

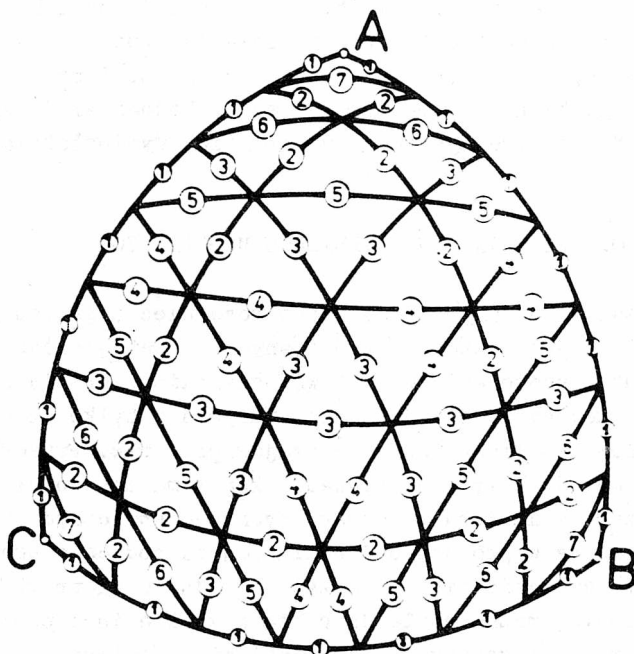
Dla każdej formy rzutu proces określania położenia węzłów zdeformowanej siatki przeprowadzono kolejno dla tych samych danych początkowych. Oznacza to, że np. dla podstawy w formie trójkąta równobocznego w obu prezentowanych odmianach metody deformacji siatki wtórnej przyjęto takie same długości promienia kuli, jak i oddalenia jej środka od płaszczyzny rzutu.

9. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA METODY DEFORMACJI SIATKI WTÓRNEJ

Przedstawiona metoda deformacji siatki wtórnej służy do otrzymywania regularnych siatek sferycznych. Stosowanie jej znacznie upraszcza i

przyspiesza proces obliczeń. Można ją z powodzeniem stosować do określania siatek sferycznych na bazie różnorodnych wielościanów, wykorzystując do tego celu rzut środkowy ściany wielościanu na współśrodkową kulę, a także za pomocą rzutu prostokątnego na płaszczyznę kształtować siatki sferyczne rozpięte nad różnymi typami rzutów.

Jednym z kryterium regularności danej siatki sferycznej jest liczba określająca liczbę odcinków o różnych długościach w całym jej obszarze (e_k). Metoda deformacji siatki wtórnej pozwala na uzyskanie w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego liczby różnych odcinków, odpowiadającej liczbie podziału jego boków na n równych odcinków (rys. 41).



Rys. 41. Ułożenie odcinków o różnych długościach w obszarze równobocznego trójkąta sferycznego uzyskiwane w metodzie deformacji siatki wtórnej. Odcinki o takich samych numerach porządkowych posiadają tę samą długość Fig. 41. Position of the segments of various length within the area of the spherical equilateral triangle obtained by the method of secondary network deformation. The segments with the same ordinal numbers have the same length

Najważniejszym kryterium przydatności tego typu siatek w konstrukcjach prętowych jest stosunek długości odcinków najdłuższych do długości odcinków najkrótszych, uzyskiwanych w wyniku stosowania danej metody.

Przy stosowaniu omawianej metody na podstawie dwudziestościanu foremego stosunek ten, określony przez współczynnik η , osiąga najmniej

szą, graniczną wartość dla tego typu wielościanu (1,1756). Zróżnicowanie długości wszystkich odcinków jest więc minimalne, jednak długość odcinków leżących w poszczególnych pasach różni się na tyle, aby wyeliminować ewentualne pomyłki dotyczące montażu prętów w rzeczywistej konstrukcji. Z tych też względów siatki sferyczne otrzymywane w metodzie deformacji siatki wtórnej można określić jako optymalne.

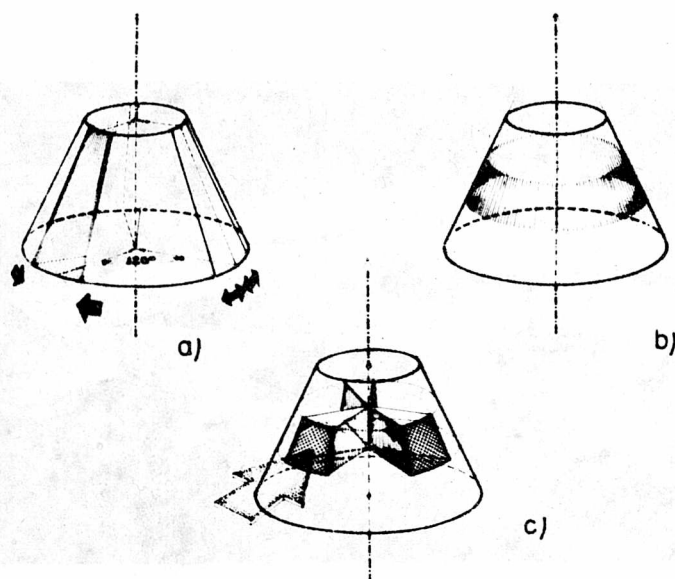
Idea otrzymywania regularnych siatek sferycznych może być także wykorzystana do potrzeb innych form powłok obrotowych, np. dla paraboloidy obrotowej. W tym przypadku należy w okręgu podstawy określić taki wielokąt, aby jego wierzchołki łącznie z punktem zwornikowym kopuły tworzyły jednakowe trójkąty równoramienne. Siatka trójkątna w obszarze każdego z trójkątów jest deformowana rzutem środkowym do ogniska właściwej dla formy przekrycia paraboli. Ponowne rzutowanie rzutem środkowym z ogniska paraboloidy tej zdeformowanej siatki daje na powierzchni powłoki bardzo regularną trójkątną siatkę przestrzenną. Najbardziej regularne siatki uzyskuje się na przekryciach o niewielkich wyniosłościach.

10. EWOLUCJA FORMY ELEMENTU MODULARNEGO

Poniższe rozważania są próbą dalszego rozwinięcia geometrycznej teorii konstruowania powłok metodą kół wpisanych w siatkę trójkątną. Istotą tej metody jest zastosowanie w możliwie szerokim zakresie modułów geometryczno-konstrukcyjnych. Metoda ta ma służyć nie tylko do konstruowania kopuł, lecz również wielu innych rodzajów przekryć. Przedstawienie przydatności tej metody przy konstruowaniu kopuł ma zasadnicze znaczenie, gdyż powierzchnia kulista z powodu swych geometrycznych właściwości jest bardzo trudna w próbach budowania jej za pomocą elementów modularnych. Jeżeli zatem udaje się rozwiązać to zadanie na przykładzie przekrycia kopułowego, można stwierdzić, że wszelkie inne powierzchnie, oczywiście pod pewnymi istotnymi zastrzeżeniami właściwymi każdej z nich, można budować wykorzystując tę metodę. Wnioski wypływające z podstawowych założeń metody kół wpisanych w siatkę trójkątną doprowadziły do powstania metody deformacji siatki wtórnej, dzięki której otrzymuje się bardzo regularne siatki sferyczne. Potwierdza to w jakimś stopniu słuszność zasad przyjętych w metodzie kół wpisanych i pozwala sądzić, że przeprowadzone na jej podstawie rozważania, zdążające do określenia optymalnego elementu modularnego, mogą doprowadzić do zadowalających rozwiązań tego problemu.

Gdy przyjmiemy dosłownie stożek za moduł przestrzenno-konstrukcyjny i ułożymy go odpowiednio na powierzchni kulistej oraz złączymy go odpowiednimi klinami, wówczas możemy zbudować kopułę. W takim przypadku

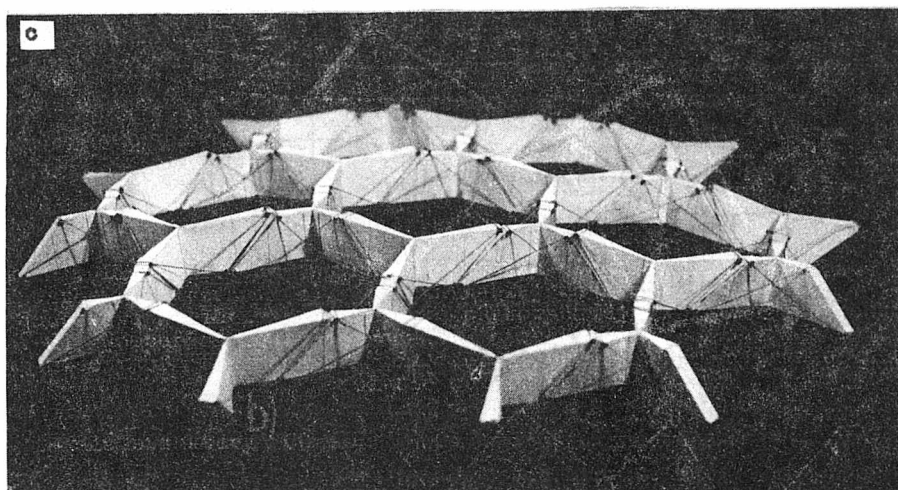
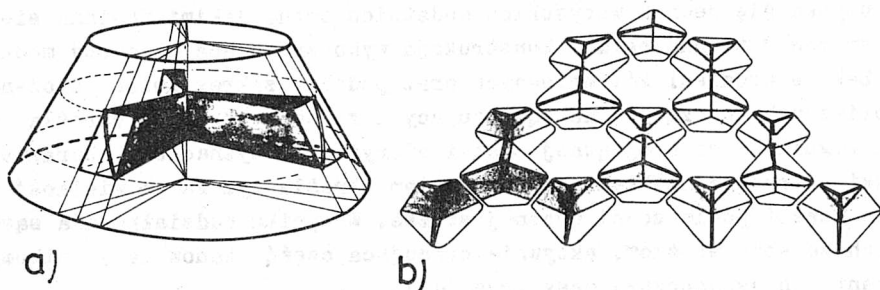
nie uzyska się jednak wszystkich dodatnich cech, jakimi powinna się charakteryzować technologia i konstrukcja wykorzystująca elementy modułarne. Zakres promieni kół wpisanych oraz podobny zakres zmian położenia najbliższych tworzących na sąsiadujących ze sobą stożkach określa stopień regularności trójkątnej siatki sferycznej. Wyznaczony charakterem siatki sferycznej zakres podanych zmian określa tym samym wielkość aktywnych części powierzchni bocznej stożka. W wyniku oddziaływania sąsiadujących ze sobą stożków, aktywnie pracująca część stanowiłaby znikomy procent ich wewnętrznej masy (rys. 42).



Rys. 42. Zakres aktywnych części elementu stożkowego
Fig. 42. Range of active parts of the conical element

Przy założeniu, że stożki te byłyby pełnymi bryłami, duża część ich materiału nie brałaby udziału w pracy konstrukcji, lecz stanowiłaby tylko dodatkowe obciążenie całości. Próba podniesienia efektywności elementu musi polegać na wyodrębnieniu i stosowaniu tylko aktywnych części stożka. Po odrzuceniu zbędnej masy otrzymamy formę, taką jak na rys. 43a.

Tak wykształcony element ma swobodę ruchu, polegającą na obrocie wokół osi symetrii stożka. Pozwala to na dostosowanie się go do zmieniających się wymagań położenia na powierzchni kuli, wynikającego ze zróżnicowania wielkości trójkątnej pól w siatce sferycznej. Elementy są ograniczane przez zakres zmian położenia najbliższych tworzących na pobocznicę stożków; wzajemne ich oddziaływanie będzie się odbywać przede wszyst-

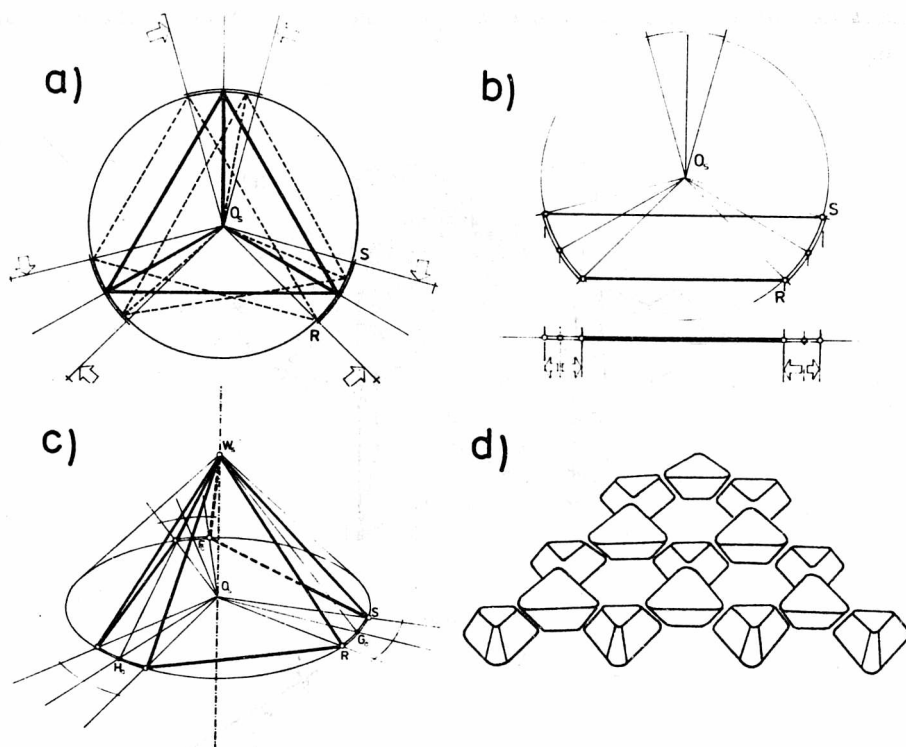


Rys. 43. Idea wykorzystania aktywnych części elementu stożkowego
Fig. 43. Idea of application of the active parts of the conical element
kim w płaszczyznach zawartych między osiami stożków i tworzyć geometryczną siatkę o oczkach sześciokątnych (rys. 43b).

Wystarczy więc stosować płaskie elementy o zmiennych długościach, układane prostopadle do powierzchni środkowej powłoki, aby zgodnie z warunkami oszczędności materiału zapewnić prawidłowe warunki pracy konstrukcji. Pojawia się tu sprzeczność, gdyż stosowanie elementu konstrukcyjnego o zmiennej długości jest podstawową trudnością, którą staramy się ominąć poprzez wprowadzenie formy stożka jako podstawowego modułu geometryczno-konstrukcyjnego. Taki system konstrukcyjny byłby jednak do przyjęcia pod warunkiem nadania całemu ustrojowi większej sztywności przez wprowadzenie systemu krzyżujących się ciągłych (rys. 43c).

Zmiana długości poszczególnych zestawów elementów wynikająca z właściwości geometrycznych dwukrzywiznowej powierzchni, na której są one

układane, przeprowadzona byłaby podobnie jak dla elementów stożkowych poprzez wzajemne ich przemieszczanie i łączenie za pomocą klina o zmieniających wartościach wychyleń. Powodować to będzie konieczną zmianę długości krzyżujących się cięgien sprężających tę konstrukcję. Ponadto, schemat statyczny jej przekroju poprzecznego jest tak samo niekorzystny, jak dla elementów stożkowych usytuowanych wg zasad metody kół wpisanych. Dlatego dalsze kontynuowanie w tym kierunku naszych dociekań najprawdopodobniej nie dałoby określonych na wstępie efektów.

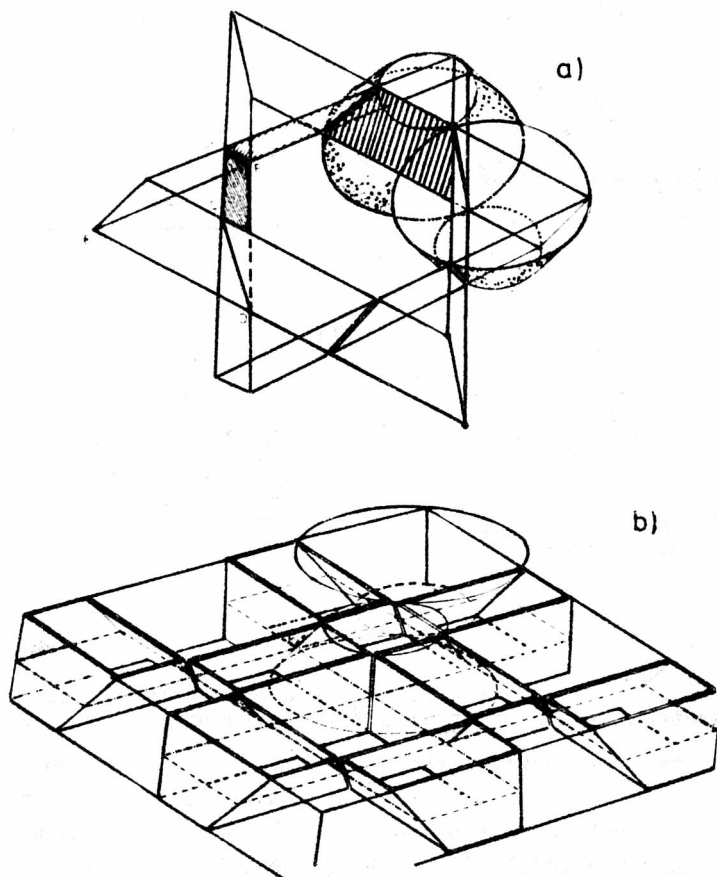


Rys. 44. Określenie innych aktywnych części elementu stożkowego
Fig. 44. Determination of other active parts of the conical element

Mankamenty poprzedniego schematu zmuszają do ponownego skierowania uwagi na element modułarny w postaci stożka, a ściślej jego podstawy. Zakres położenia aktywnych tworzących na poboczniczy stożka wyznacza w obrębie podstawy wielkości różnych trójkątów, które w dużym stopniu odpowiadają kształtom trójkątów siatki sferycznej (rys. 44d). Poprzez przyjęcie maksymalnej i koniecznej wartości tych zmian, wyrażonej miarą kąta RO_S , wyznaczmy minimalną i maksymalną długość cięciwy okręgu

o środku w punkcie O_s (rys. 44b). Najważniejsza jest jednak minimalna długość cięciwy, określająca zbędne części stożka przyległe do jego powierzchni bocznej (rys. 44c).

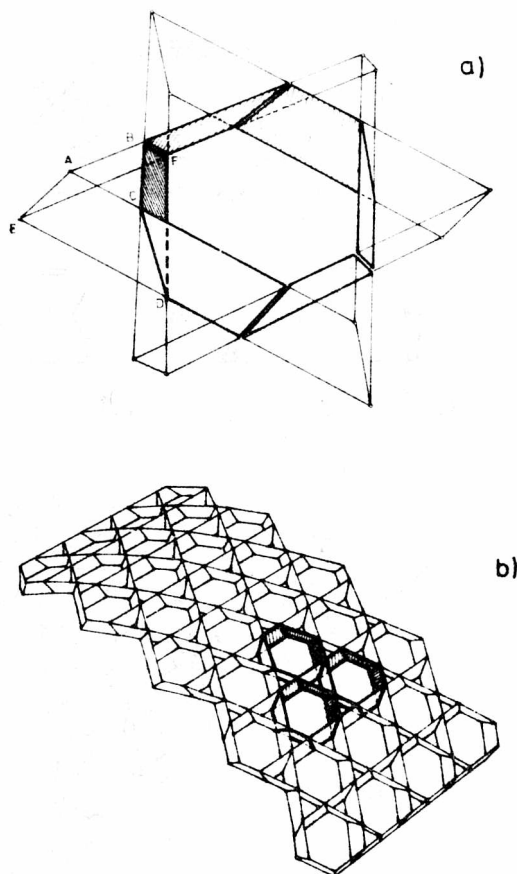
Po odrzuceniu proponowanych części element stożkowy znacznie straci na swej objętości. Powierzchnie wyznaczone punktami R i S oraz wierzchołkiem W_s pozostaną nadal odcinkami powierzchni bocznej stożka, pozostałe będą trójkątnymi ścianami płaskimi. Tak określone elementy sąsiadować będą ze sobą wzdłuż pozostałości swych powierzchni stożkowych i podobnie jak stożki łączone będą za pomocą elementu klinowego (rys. 44d). System ten ma więc wady charakterystyczne dla ułożenia samych stożków na powierzchni kuli, nie zamyka jednak drogi do dalszych poszukiwań.



Rys. 45. Usytuowanie modularnych elementów trapezowych
Fig. 45. Position of modular trapezoidal elements

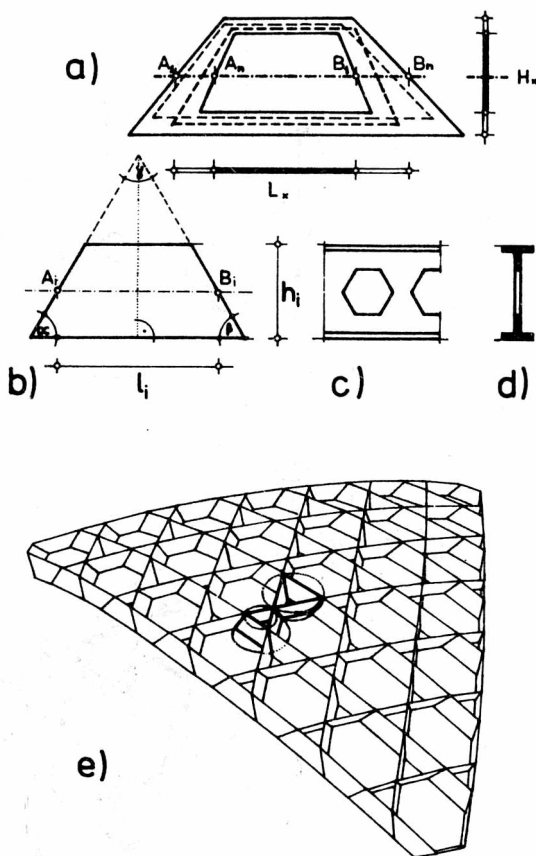
Dysponując regularną siatką sferyczną można zmniejszyć do minimum wartość kąta RO_gS , zmniejszając w takim samym stopniu wielkość powierzchni stożkowej na sąsiadujących elementach, co ujednolici ich asortyment, nie spowoduje jednak żadnych istotnych zmian w takim systemie, a tym bardziej nie zlikwiduje jego wad. Należy więc pogodzić się z różnymi wielkościami trójkątnych ścian bocznych. Spójrzmy raz jeszcze na wymagane przez teorię kół wpisanych wzajemne usytuowanie stożków (rys. 45).

Jeżeli tego typu elementy układać będziemy na płaszczyźnie, to najbliższe tworzące stożków będą równoległe do siebie, a w przypadku cias-



Rys. 46. Sześciokątny zestaw elementów trapezowych (a), fragment powierzchni walcowej wykonanej z elementów trapezowych (b)
 Fig. 46. Hexagonal set of trapezoidal elements (a), fragment of a cylindrical surface made of trapezoidal elements (b)

nego ułożenia stożków będą stykały się ze sobą. Podstawą elementów odciętych wyżej opisanym sposobem będzie trójkąt równoboczny; odpowiednie powierzchnie będą trójkątami równobocznymi, a po ich obcięciu (jak na rys. 45a) będą tej samej wielkości prostymi trapezami. Wymieniona właściwość pozwala na łączenie tych ścian w segmenty. Gdy traktujemy materiał konstrukcyjny jako pasmo o pewnej wysokości, przez zagięcie go wzdłuż określonych linii odpowiadających krawędziom trapezów możliwe staje się łączenie tych ścian w sześcioboczne elementy. Na tej zasadzie można kształtować segmenty w formie czworoboków, które następnie przez kolejne ich dodawanie i łączenie wzdłuż załamanych krawędzi pasma utworzą ciekawą strukturę przestrzenną, zdolną do przeniesienia pewnych obciążeń (rys. 45b). Przyjęcie zróżnicowanych długości ścian trapezowych,



Rys. 47. Określanie wymiarów geometrycznych modułów trapezowych dla przekrycia o dwukrzywiznowej formie

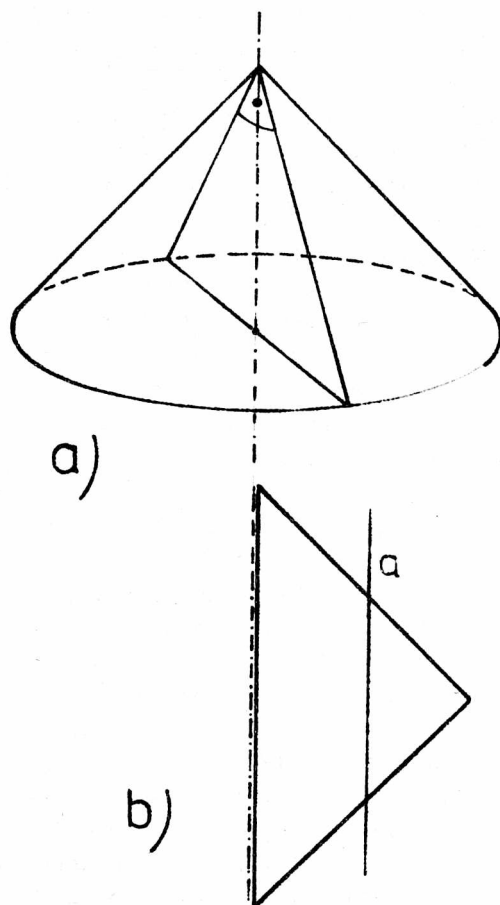
Fig. 47. Determination of the geometric dimensions of trapezoidal modules for the construction needs of a bicurvature form of covering.

koniecznych w przypadku jedno- i dwukrzywiznowych form przekryć nie wyklucza możliwości zastosowania do ich potrzeb tej formuły konstrukcyjnej. W jednokrzywiznowych powłokach walcowych, dla przedstawionego na rys. 46 sposobu ułożenia segmentów, występują trzy rodzaje wielkości trapezowych ścian. Przy stosunkowo dużych promieniach krzywizny przekrycia zróżnicowanie wysokości tych trapezów jest tak niewielkie, że mogą być one "gięte" z pasma o tej samej wysokości.

Dla innych form przekryć konieczne staje się indywidualne określenie parametrów trapezowych ścian, a zróżnicowanie ich wielkości zależy od regularności siatki przestrzennej i wielkości krzywizn (rys. 47a i b). Trapezowe elementy ścian mogą być wykonywane z odpowiednio przygotowanych blach stalowych lub kształtowników (rys. 47c i d), a następnie połączone przegubowo za pomocą łączy zawiasowych lub sztywno przez zespawanie kolejnych krawędzi bocznych. Prezentowany system mógłby być szczególnie użyteczny w konstrukcjach niewielkich przekryć kopułowych, wykonywanych z kolejnych elementów drewnianych, zapewniając im jednocześnie bardzo ciekawą formę plastyczną. Z przyczyn podanych wyżej nie można traktować tego systemu jako uniwersalnego, tzn. spełniającego podane na wstępie założenia, dlatego ponownie zajmijmy się formą wyjściową elementu modularnego jakim jest stożek.

Jedynym wymogiem stawianym wobec elementu stożkowego w metodzie kół wpisanych jest to, aby był on stożkiem prostym o podstawie kołowej. Wysokość tego elementu, oprócz wielkości ekstremalnych, nie odgrywa więc żadnej roli. Założmy, dla uproszczenia rozważań, że jego przekrój poprzeczny przecinający wierzchołek oraz podstawę w jej środku jest równoramiennym trójkątem prostokątnym (rys. 48a). We wszystkich poprzednich rozważaniach, jak i w teorii kół wpisanych, oś stożka przecinała jego podstawę zawsze pod kątem prostym. Obracamy teraz trójkątny przekrój stożka tak, aby jego przeciwprostokątna była styczna do poprzedniej jego osi (rys. 48b). Dodatkowo dzielimy ten trójkąt linią a , równoległą do podstawy. Podzielony w ten sposób trójkąt będzie podstawą mechanizmu otrzymywania szerokiego zakresu różnych długości przy użyciu wąskiego asortymentu części składowych (rys. 49).

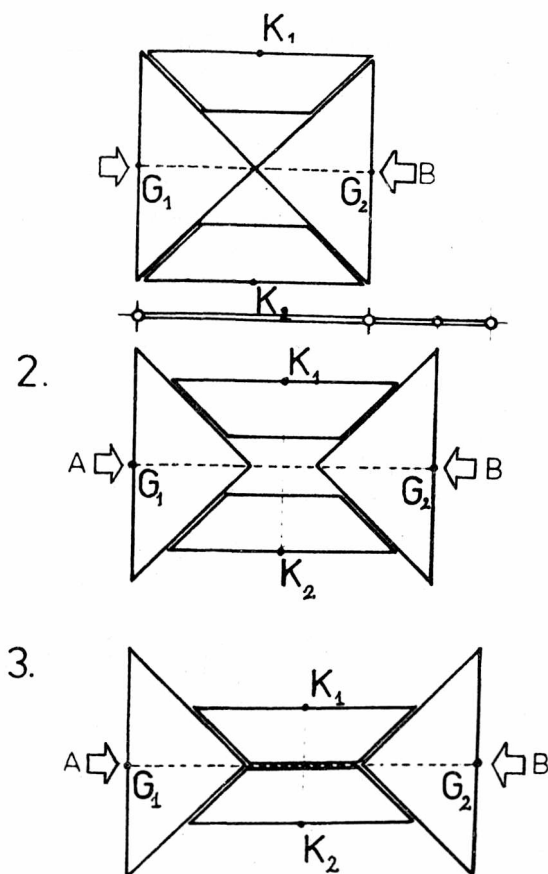
W położeniu 1 (rys. 49) mniejsze trójkąty mogą pozostać na swoim miejscu, gdyż nie przeszkadzają innym elementom pracującym w tym schemacie. Położenie to odpowiada najkrótszemu elementowi przekrycia. W położeniach 2 oraz 3 mniejsze elementy trójkątne należy usunąć, ponieważ ich pozostanie w swoim miejscu uniemożliwia wzajemne przesunięcia pozostałych elementów. Przyjęcie tego modelu umożliwia uzyskanie szerokiego, praktycznie uzasadnionego zakresu zmian długości ok. 50-60% i zależęć będzie od wysokości na jakiej podzielimy linią a dany trójkąt. Ścisłe ułożone trapezy, pochodzące z tego samego trójkąta, pod działaniem sił



Rys. 48. Wyznaczenie nowego elementu modularnego
Fig. 48. Determination of a new modular element

ściskających przenoszą obciążenia na elementy trójkątne, których podstawy leżą na prostych wychodzących ze środka sfery, przy działaniu zaś sił rozciągających nadają geometryczną sztywność układowi. Elementy trapezowe i trójkątne są połączone krzyżującymi się cięgnami umiejscowionymi w środkowej strefie ich przekrojów poprzecznych. Cięgna te regulują rozstaw elementów podstawowych zależnie od długości odcinka AB (rys. 49). Pod działaniem sił ściskających cięgno K_1K_2 będzie poddane działaniu sił rozciągających. Dodatkową zaletą przyjętego modułu jest łatwiejsze wprowadzanie dodatkowego elementu klinowego niezbędnego przy kształtowaniu krzywizn powłoki.

Wykonane z takich elementów przekrycie byłoby stosunkowo ciężkie. Zalety wynikłe z ograniczenia liczby części składowych niweluje niewiel-



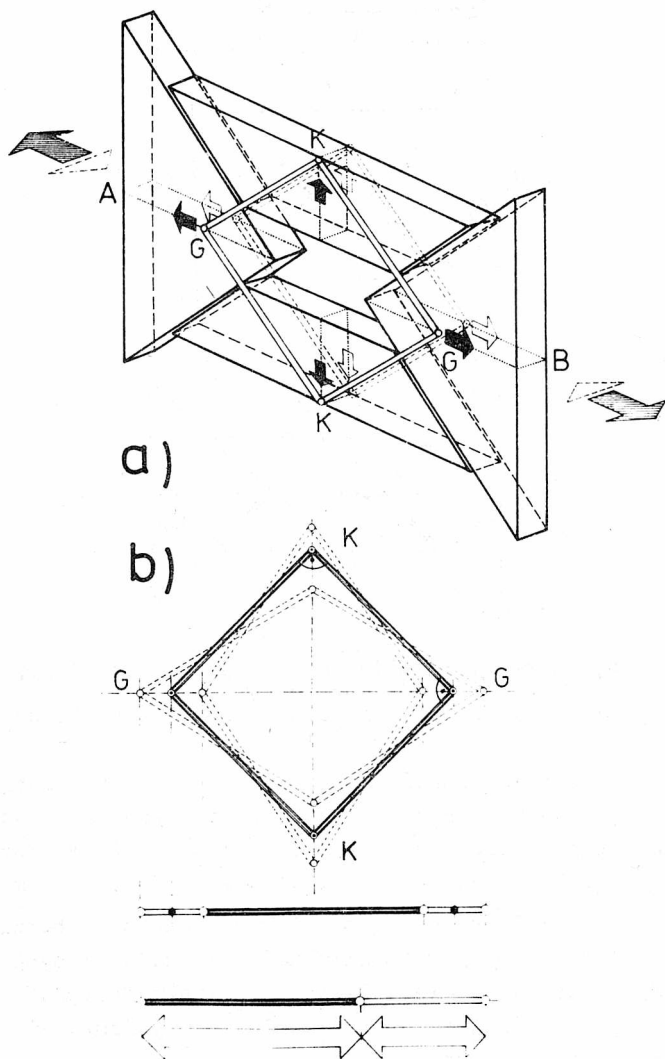
Rys. 49. Schematy uzyskiwania różnych długości zestawu trójkątnych elementów podstawowych

Fig. 49. Obtaining of various lengths of a set of triangular basic elements

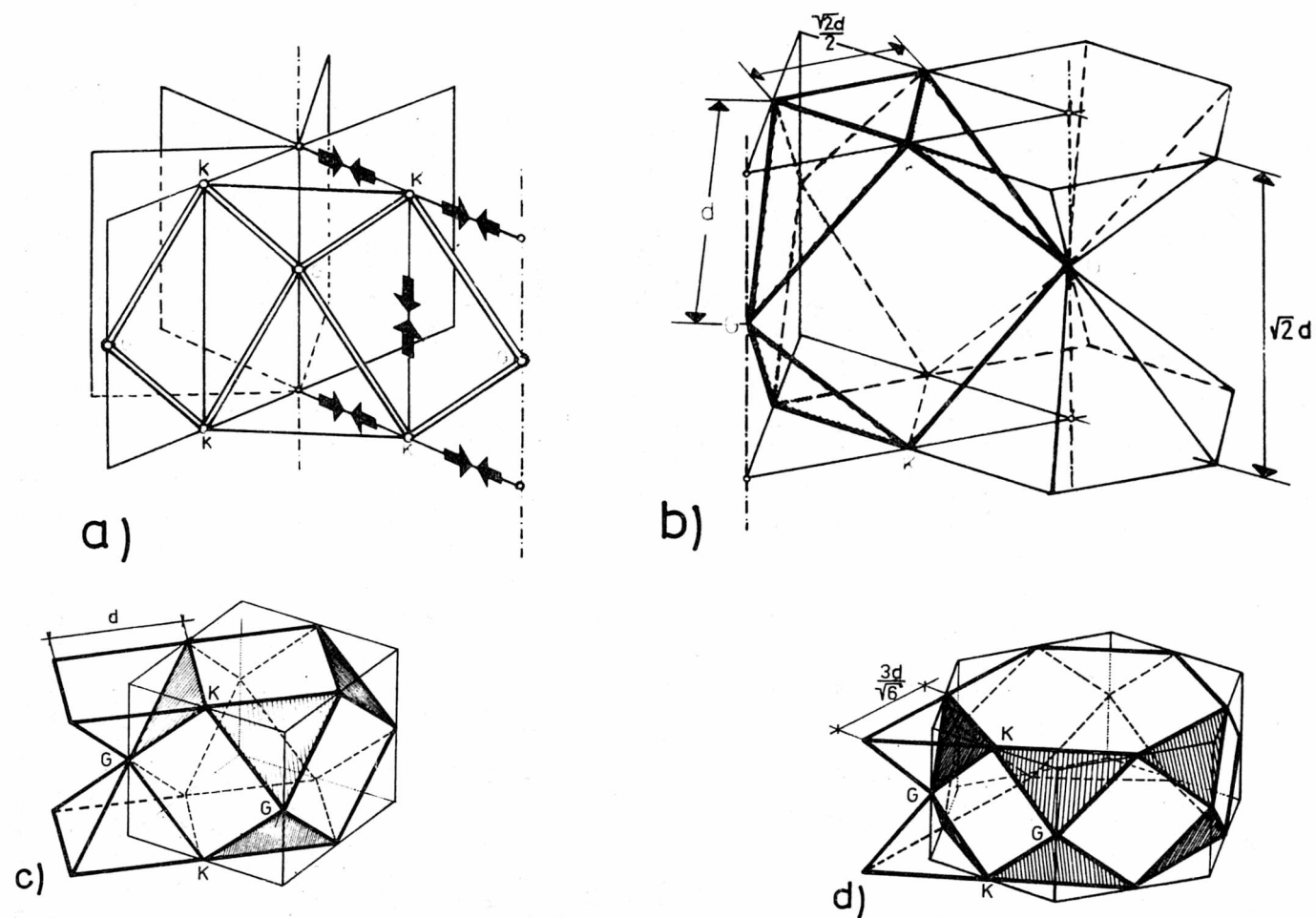
ki stopień wykorzystania nośności materiałów konstrukcyjnych zużytych na ewentualną ich budowę. Zawarta jednak w jego schemacie idea otrzymywania różnych długości poszczególnych elementów umożliwia wykonanie różnorodnych form przekryć powłokowych i dlatego będzie przedmiotem dalszych rozważań. Pod wpływem obciążeń element modułarny będzie doznawał odkształceń, które mogą wywołać działanie sił ściskających w elementach określonych mianem ciągn. Dlatego terminem "ciągn" określono pręt sztywny mający możliwość płynnej zmiany swej długości, np. przez odpowiednią konstrukcję jego końcówek.

11. UWARUNKOWANIA GEOMETRYCZNE PRĘTOWO-CIĘGNOWEGO SYSTEMU MODULARNEGO

Spójrzmy raz jeszcze na podstawowy moduł konstrukcyjny omawianego ostatnio systemu (rys. 49). Siły od obciążeń zewnętrznych przebiegać będą w nim wzdłuż płaszczyzn wyznaczonych punktami zamocowania cięgien.



Rys. 50. Zmodyfikowany element konstrukcyjny
Fig. 50. A modified construction element



Rys. 51. Podstawowe układy bryłowe przestrzennego ustroju prętowo-ciężnowego
 Fig. 51. Basic solid systems of a spatial rod-tie structure

Wady tego modułu mogą ulec znacznej redukcji, jeżeli jego elementy składowe będą połączone zestawami prętów, usytuowanych po obu stronach tego modułu (rys. 50a). Czworokątne zestawy prętów o stałych długościach są połączone punktowo w swych węzłach z elementami składowymi modułu tak, aby uzyskać duży zakres koniecznych zmian długości modułu konstrukcyjnego układanego na powierzchni sferycznej (rys. 50b). Taka konfiguracja prętów może stanowić podstawę do uformowania osobnego układu konstrukcyjnego, składającego się z czworokątnych, przegubowo połączonych ze sobą zestawów prętów, które mają stałą długość d (rys. 51). Zestawy prętów o stałych długościach są połączone ze sobą za pośrednictwem prętów-cięgien o płynnie regulowanych długościach. Czworokątne zestawy prętów będą usytuowane w płaszczyznach prostopadłych do powierzchni środkowej przekrycia. Regulacja wymiarów geometrycznych takiego zestawu prętów będzie dokonywana za pośrednictwem pionowego pręta-cięgna rys. (rys. 51 a), którego długość w płaskiej warstwie przekrycia osiągnie wartość $\sqrt{2} d$ i będzie wysokością tej struktury, jeśli czworokątne zestawy prętów będą miały formę kwadratów. Warstwy dolną i górną tej struktury tworzyć będą pręty-cięgna o regulowanych długościach, umożliwiających dostosowywanie wymiarów modułów konstrukcji do wymagań geometrycznych danej formy przekrycia. Odpowiednie, wstępne sprężenie, wprowadzone np. przez skrócenie długości pionowych prętów-cięgien, sprawi, iż czworokątne zestawy prętów o stałych długościach będą poddane działaniu sił ściskających, a w dolnej i górnej warstwie prętów-cięgien będą działać siły rozciągające.

W wewnętrznej budowie proponowanej struktury przestrzennej wyróżniają się dwa typy węzłów. Pierwszy z nich będzie służyć do łączenia ze sobą czworokątnych zestawów prętów węzeł typu G i usytuowany zostanie w środkowej strefie tej struktury. Drugi rodzaj węzła (węzeł typu K) musi umożliwiać łączenie pod różnymi kątami cięgien obu warstw proponowanej struktury, do górnych i dolnych przegubowych węzłów czworokątnych zestawów prętów. W węźle typu K jest połączone także pionowe cięgno czworokątnego zestawu prętów.

Na tym przykładzie możemy uporządkować i opisać warianty ustawień powtarzalnych elementów modularnych. W analizie geometrycznej pręty i cięgna traktować będziemy tak samo, tzn. jako krawędzie brył powstałych przez odpowiednie rozmieszczenie prętów i cięgien w przestrzeni, właściwe dla każdego układu.

Jeśli w węźle typu G schodzić się będzie sześć zestawów prętowych, to pręty wraz z węzłami wyznaczają w przestrzeni dwa rodzaje dopełniających się wzajemnie brył o układzie pokazanym na rys. 51b. Podstawową bryłą dla tego układu jest 11-ścian, którego długości krawędzi podano również na tym rysunku. Dopełnienie tej bryły w płaskiej warstwie prze-

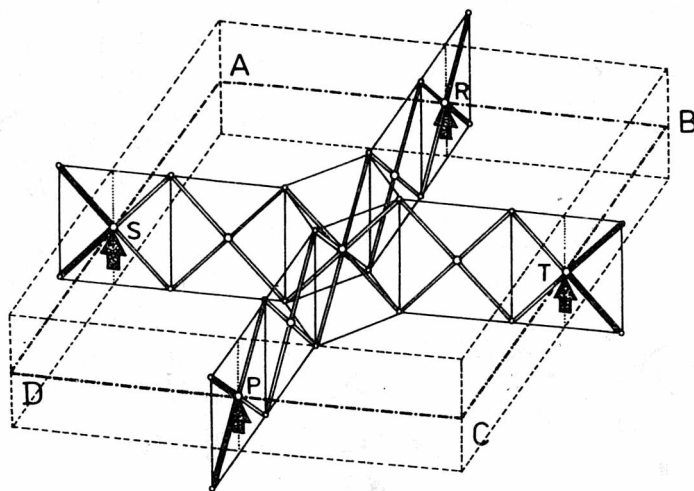
krycia stanowią dwa przeciwnie skierowane ostrosłupy proste o sześciokątnych podstawach. Tak więc układ ten składa się z 11-ścianu (JDN) oraz dwóch ostrosłupów ($2 \times OPS$) i będziemy oznaczać go skrótem JDN + $2 \times OPS$.

Gdy w węźle G schodzą się cztery zestawy prętów, wówczas pręty te połączone cięgnami wyznaczają bryłę podstawową w formie 14-ścianu (CO) oraz dopełniające ją dwie połówki 8-ścianu ($2 \times \frac{1}{2} O$), zatem będziemy go oznaczać jako CO + $2 \times \frac{1}{2} O$. Bryły te charakteryzują się tą samą długością krawędzi bocznych i równą d , czyli długości pręta podstawowego (rys. 51c).

Schodzące się w węźle typu G trzy zestawy prętów określają wysokość płaskiej warstwy przekrycia równą $\sqrt{2} d$. Układ brył składający się z 22-ścianu (DWS) oraz dopełniających strukturę dwóch przeciwnie skierowanych 4-ścianów (T) będziemy określać skrótem DWS + 2 T. Podstawowe związki miarowe tych brył przedstawiono na rys. 51d.

12. ZASADY PRACY STATYCZNEJ PRZESTRZENNYCH STRUKTUR PRĘTOWO-CIĘGNOWYCH

Zadaniem prezentowanych struktur prętowo-cięgnowych jest konstruowanie różnorodnych form przekryć powłokowych. W tym przypadku siły wywołane lokalnym zginaniem mają zwykle charakter drugorzędny, natomiast

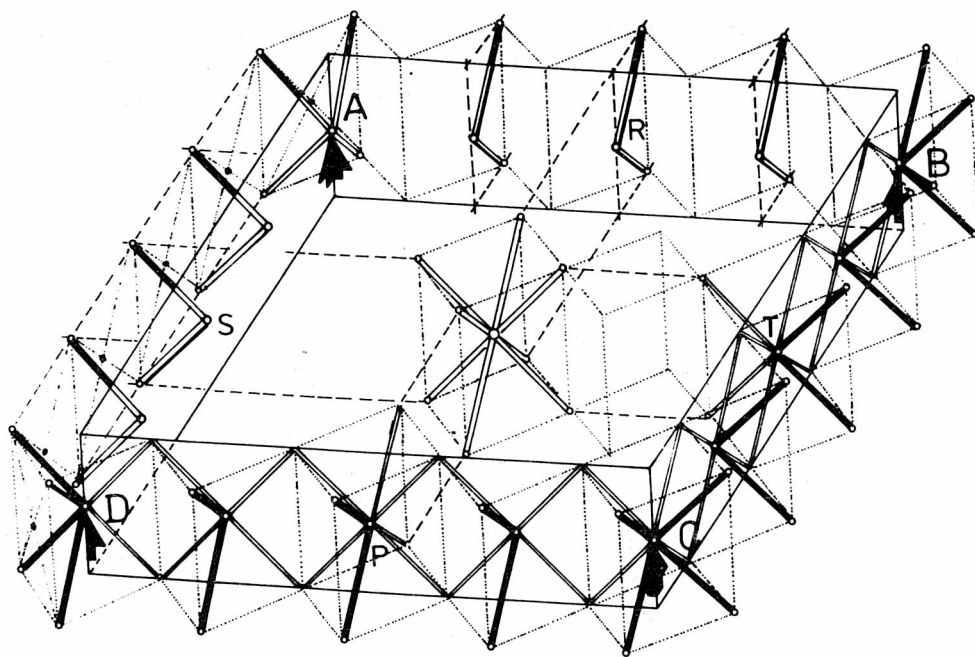


Rys. 52. Zasada pracy statycznej przestrzennej struktury prętowo-cięgnowej

Fig. 52. Principle of static work of the spatial rod-tie structure

dominującą rolę odgrywają siły ściskania, rozciągania i ścinania działające wzdłuż powierzchni środkowych przekryć o tego typu formach. Podstawową analizę statyczną struktur o podanych wyżej układach bryłowych przedstawimy na przykładzie dwóch czterokątnych zestawów prętów połączonych w węzle G, (rys. 51a). Siły osiowo ściskające przejmowane będą przez czworokątne zestawy prętów, które będą poddane działaniu sił ściskających. Siły rozciągające będą przejmowane przez ciąguna. Warunkiem koniecznym założonego na wstępie podziału pracy statycznej elementów struktury jest wstępne sprzężenie odpowiednimi wielkościami sił całej struktury.

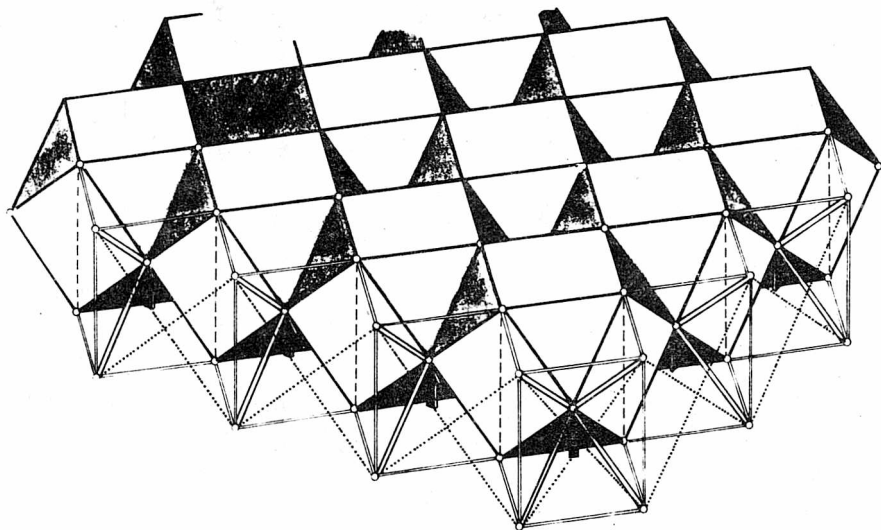
Tę zasadę konstrukcyjną przeniesiemy na przestrzenne struktury prętowe o ustalonych wcześniej układach bryłowych. Ponieważ w układzie $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$ segmenty prętowe są do siebie w każdej płaszczyźnie prostopadłe, zasady pracy statycznej dla tego układu będą najbardziej przejrzyste. Na rysunku 52 przedstawiono przestrzenne rozwinięcie omawianej zasady konstrukcyjnej. Położone w strefie środkowej pręty łączą się za pomocą cięgien zgodnie z układem bryłowym $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$. W celu



Rys. 53. Schemat stężeń brzegowych prętowo-ciężnowej struktury przestrzennej
Fig. 53. Diagram of the edge concentration of the spatial rod-tie structure

równomiernego rozłożenia obciążeń na wszystkie elementy konstrukcji, należy na brzegach przekrycia, w punktach jego podparcia, zastosować dodatkowe pręty leżące poza obrębem kwadratowego rzutu ABCD. Na rysunku 53 przedstawiono rozmieszczenie wszystkich dodatkowych prętów na obwodzie przekrycia oraz sposób ich połączenia za pomocą cięgien z pozostałymi prętami struktury. W narożnych punktach podparcia należy dodać dwie pary prętów, aby było ono rzeczywiście przekryciem strukturalnym.

Rozpatrywana struktura prętowo-ciężnowa, pod działaniem obciążeń równomiernie rozłożonych na jej węzły górne, w swych przekrojach głównych charakteryzuje się prawidłową, wg podanych wstępnie założeń, pracą elementów składowych, polegającą na osiowym przekazywaniu sił oraz prawidłowym pod względem geometrycznym ułożeniu poszczególnych segmentów. Pod działaniem obciążeń nierównomiernie rozłożonych na powierzchni i pochodzących np. od parcia wiatru, struktura ta ma tendencję do skręcania wzdłuż swej powierzchni środkowej. Konieczne staje się wprowadzenie stężeń brzegowych na całym obwodzie przekrycia, które na rys. 53 zaznaczono w obrębie krawędzi AD. Bardziej czytelnie przedstawiono je na rys. 54. Na rysunku, gdzie samą strukturę przedstawiono w układzie bry-

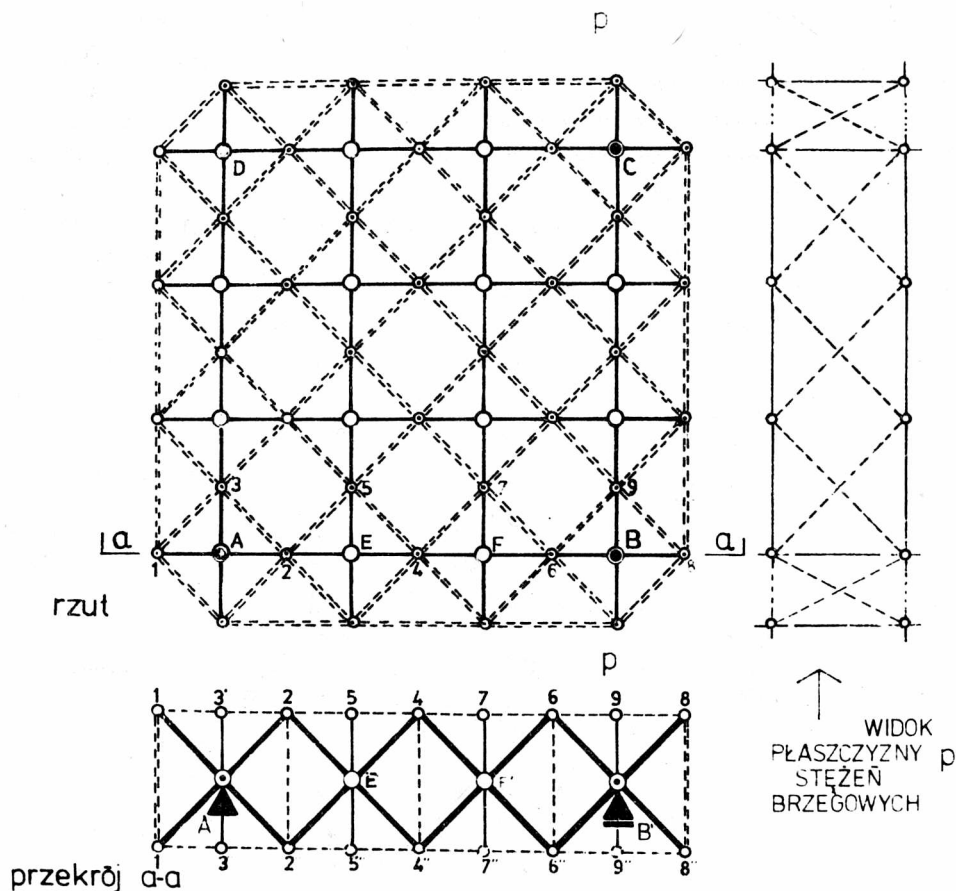


Rys. 54. Stężenia brzegowe struktury prętowo-ciężnowej o układzie

Fig. 54. Edge concentration of a spatial rod-tie structure of the system $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$

lowym, szczególnie dobrze widoczny jest na jej obwodzie system dodatkowych par prętów oraz ich usytuowania w narożach przekrycia. Połączenie końców prętów krzyżującymi się cięgnami w krawędziach bocznych jest ko-

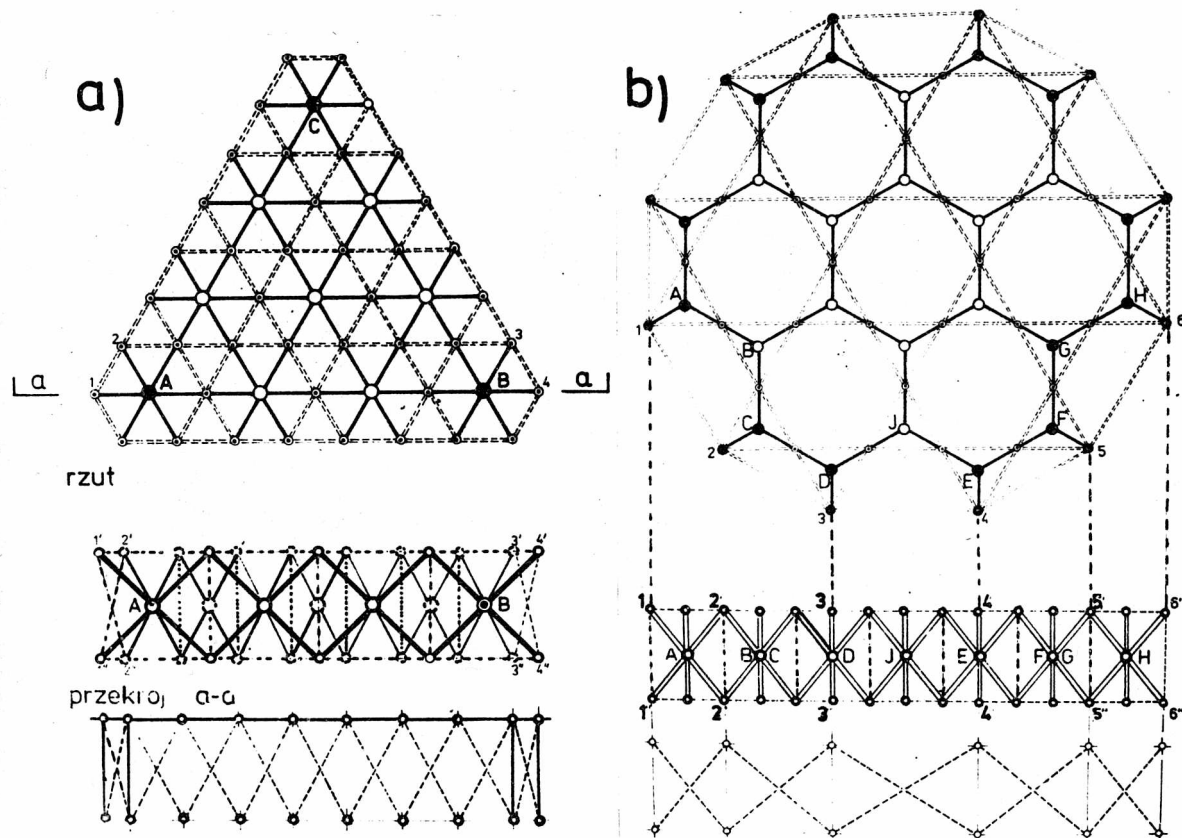
niecznym warunkiem prawidłowej pracy struktur prętowo-ciężnowych we wszystkich proponowanych układach przestrzennych. Na rysunku 55 przedstawiono rzut oraz przekrój prętowo-ciężnowej struktury o układzie $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$, na rysunku 56a strukturę o układzie $JDN + 2 \times OPS$, a na rysunku 56b przedstawiono strukturę o układzie prętów i ciężarów określoną skrótem $DWS + 2 T$.



Rys. 55. Przestrzenna struktura prętowo-ciężnowa o układzie $CO + 2 \times \frac{18}{2} O$

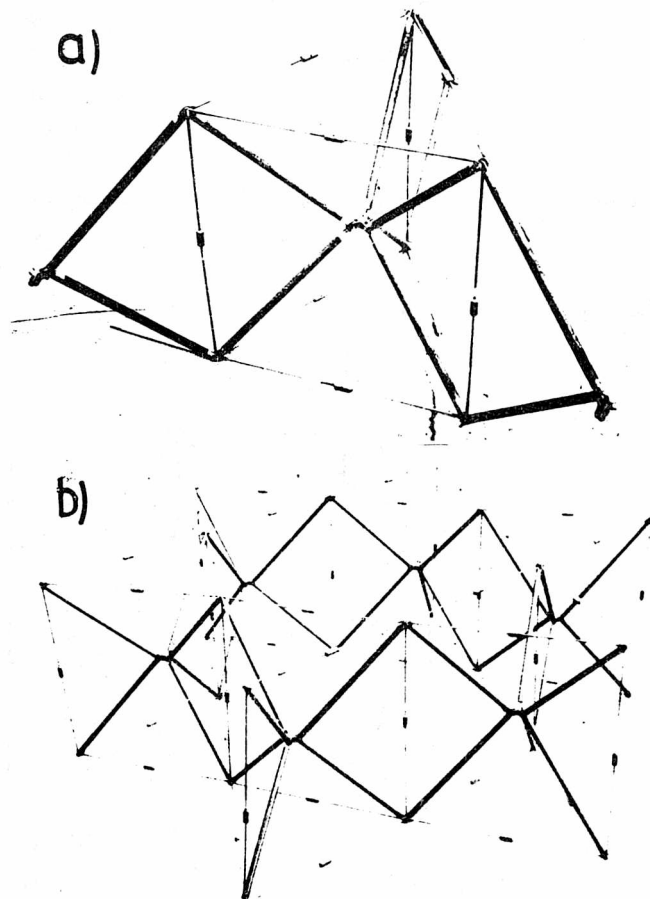
Fig. 55. Spatial rod-tie structure of the system $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$

Na rysunku 57 przedstawiono model elementów struktury o układzie bryłowym $DWS + 2 \times T$. Metalowe pręty ściskane mają przekrój rurowy z odpowiednio wykształconymi końcówkami, umożliwiającymi osiowe połączenia prętów w węzłach. Ciężna są wykonane w postaci sztywnych prętów o



Rys. 56. Struktury prętowo-ciężnowe o układach kryształowych: a) JDN + 2 x OPS; b) DWS + 2 T
 Fig. 56. Rod-tie structures of the solid systems: a) JDN + 2 x OPS, b) DWS + 2 T

znacznie mniejszej powierzchni pełnego przekroju poprzecznego niż pręty ściskane. Ciężna w połowie swych długości posiadają nakrętki "rzymskie". Nakrętki te umożliwiają dostosowywanie wymiarów pojedynczych przestrzennych modułów konstrukcyjnych (rys. 57a) do wymagań geometrycznych danej formy przekrycia oraz wprowadzanie odpowiednich wartości sił sprężających. Znaczna liczba elementów łączących się w węzłach sprawia, że opracowanie prostej ich konstrukcji jest zadaniem bardzo złożonym [13], [14], [15], [16].



Rys. 57. Elementy składowe oraz model podstawowego modułu konstrukcyjnego struktury o układzie DWS + 2 x T
 Fig. 57. Component elements and model of the basic module structure of the system DWS + 2 x T

13. GŁÓWNE KRYTERIA EKONOMICZNE STRUKTUR PRĘTOWO-CIĘGNOWYCH

W ukształtowanym ostatecznie segmencie prętowo-cięgnowym podstawą do obliczeń zmiennych długości wszystkich ciągów jest stała długość ukośnie biegnących prętów ściskanych. Ciągna o regulowanej długości wraz z przegubowym połączeniem wszystkich elementów umożliwia układanie tych segmentów na powierzchniach o dowolnych kształtach. Regularność opisującej krzywizny powłoki siatki przestrzennej pozwoli na zmniejszenie zakresu zmian długości ciągów. Odpowiednie sprężenie całej struktury prętowo-cięgnowej sprawi, iż jej pręty będą poddane działaniu sił ściskających.

Elementy prętowe są najkrótszymi elementami całej struktury. Ta właściwość proponowanych struktur ma szczególnie duże znaczenie ze względu na to, że stateczność całej konstrukcji przy zadanych właściwościach materiału konstrukcyjnego i kształcie przekroju określona jest długością wyboczeniową jednego lub kilku prętów znajdujących się w najbardziej wyężonej strefie przekrycia. Z tych też powodów, optymalną wysokość dwuwarstwowych struktur prętowych określa stosunek [13]:

$$\frac{h \text{ (wysokość ustroju prętowego)}}{d \text{ (długość pręta pasa)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

W naszym przypadku jest dokładnie odwrotnie:

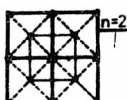
$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

Oznacza to, że dla krytycznych długości prętów ściskanych wysokość struktur prętowo-cięgnowych mogłaby być dwukrotnie mniejsza lub inaczej, dla takich samych warunków podparcia i wysokości struktur rozpiętość struktury prętowo-cięgnowej byłaby dwukrotnie większa od rozpiętości przestrzennego ustroju prętowego. Tak znaczny wzrost maksymalnych rozpiętości przekrycia nie będzie jednak możliwy ze względu na zwiększenie wartości sił ściskających w prętach spowodowane wstępnym sprężeniem struktur prętowo-cięgnowych. Te przypuszczenia należałoby zweryfikować na drodze doświadczalnej, ponieważ mają one charakter szacunkowy i nie uwzględniają odmiennych warunków pracy elementów w obu porównywanych ze sobą strukturach. Wydaje się jednak, że przy odpowiednio skonstruowanych, zgodnie z wymogami struktury prętowo-cięgnowej węzłach, jej rozpiętość może być większa od rozpiętości struktury prętowej o tej samej wysokości konstrukcyjnej oraz może być ona równocześnie znacznie lżejsza od podobnej przestrzennej struktury prętowej. Uzasadniają tę tezę właściwości materiałów konstrukcyjnych, które określają wielkość przekrojów elementów konstrukcyjnych, te zaś są znacznie większe dla elementów pracujących na ściskanie od elementów przejmujących siły rozciągają-

T a b e l a 5

$$p = (n-1)^2 \cdot d^2$$

$$m = 8n^2$$



n	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	8	—
2	10	32	32,00
3	40	72	18,00
4	90	128	14,22
5	160	200	12,50
6	250	288	11,52
7	360	392	10,888
8	490	512	10,4489
9	640	648	10,1250
10	810	800	9,876543
50	2401	20 000	8,329862
100	9801	80 000	8,1624324
1000	998001	8000 000	8,018024
10 000	9998 001	800 000 000	8,0018003

T a b e l a 6

$$p = \frac{\sqrt{3}}{4} (n-1) \cdot d^2$$

$$m = 1,5(3n+n)$$



n	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	6	—
2	0,433012	21	48,497423
3	1,732050	45	25,980762
4	3,8971143	78	20,014809
5	6,928203	120	17,320508
6	10,825318	171	15,796303
7	15,58845	231	14,818657
8	21,21762	300	14,139191
9	27,712813	378	13,639960
10	35,07603	465	13,256917
50	1739,663	11 325	10,892948
100	4243,957	45 150	10,638655
1000	432147,11	4 501 500	10,416592
10 000	43 292 610	45 001 500	10,39473

ce, dlatego cięgna mają mniejszą masę od prętów. W celu sprawdzenia tej tezy, przeprowadzimy analizę porównawczą liczby prętów przypadających na jednostkę przekrywanej powierzchni dla struktur prętowych i proponowanych układów struktur prętowo-cięgnowych. Taka analiza pozwoli równocześnie na wyróżnienie najbardziej ekonomicznego układu struktur prętowo-cięgnowych.

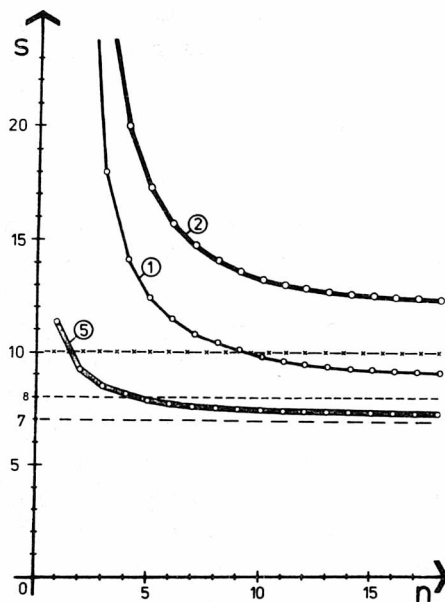
Ponieważ w strukturach prętowo-cięgnowych występuje tylko jedna długość pręta, zatem będziemy je porównywać z przestrzennymi strukturami prętowymi, które są tworzone z prętów o jednakowych długościach. Takie są struktury prętowe o układach bryłowych ($\frac{1}{2} O + T$) oraz $(O + T)$. Pole powierzchni (p) oraz liczbę prętów (m) użytych na jej przekrycie w danych strukturach będziemy obliczać w zależności od liczby prętów (n) leżących na bokach wielokąta, stanowiącego najwłaściwszą dla danego układu bryłowego formę przekrycia. Powierzchnia przekrycia jest liczona jako wielkość pola ograniczonego brzegowymi punktami podparcia właściwymi dla każdego układu. Przez (s) oznaczamy stosunek liczby prętów do wielkości tak określonej powierzchni przekrycia. Tak określone wielkości dla struktury prętowej o układzie ($\frac{1}{2} O + T$) przedstawiono w tabeli 5, dla przestrzennej zaś struktury prętowej o układzie $(O + T)$ w tabeli 6. Charakterystykę zmian wartości (s), określającej liczbę prętów przypadających na jednostkę przekrywanej powierzchni, przedstawiono na rys. 58.

Krzywa nr 1 obrazuje tę liczbę dla układu ($\frac{1}{2} O + T$), a krzywa nr 2 wartości (s) w układzie bryłowym $(O + T)$. Na podstawie wartości (s) dla bardzo dużych n możemy stwierdzić, że w ruszcie przestrzennym o układzie ($\frac{1}{2} O + T$) na jednostkę przekrywanej powierzchni przypada około 8 prętów, w ruszcie o układzie $(O+T)$ natomiast na tę samą jednostkę powierzchni należy zużyć około 10 prętów.

Najbardziej ekonomiczny pod względem liczby prętów przypadających na jednostkę powierzchni przekrycia jest tzw. układ ortogonalny-diagonalny określany jako ($\frac{1}{2} CO + \frac{1}{2} O$) lub ruszt OD. Składa się on z połówek 14-ścianu ($\frac{1}{2} CO$) oraz połówki 8-ścianu ($\frac{1}{2} O$). Pręty warstwy górnej oraz pręty ukośne mają jednakową długość (d), pręty zaś warstwy dolnej mają długość równą $\sqrt{2} d$. Pole powierzchni przekrycia dla tego układu jest równe $S = \sqrt{2} d^2$, a liczba prętów $m = 10 n^2 + 6 n$.

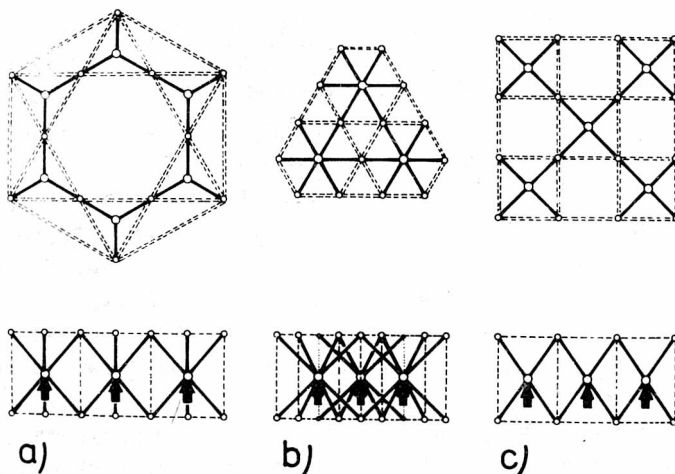
Krzywa nr 5 na rys. 58 określa liczbę prętów przypadającą na jednostkę powierzchni przekrycia dla struktury prętowej o układzie ($\frac{1}{2} CO + \frac{1}{2} O$). Dla tego rusztu na jednostkę powierzchni przekrycia przypada tylko około 7 prętów.

Aby wyznaczyć podobne wielkości dla struktur prętowo-cięgnowych, należy dla każdego układu bryłowego, zgodnie z brzegowymi warunkami podparcia, określić najmniejszą liczbę segmentów tworzących fragment stru-



Rys. 58. Liczby prętów przypadające na jednostkę powierzchni przestrzennych struktur prętowych (opis w tekście)

Fig. 58. Number of rods in space rod structures for a surface unit (account in text)



Rys. 59. Podstawowe motywy konstrukcyjne przestrzennych struktur prętowo-ciężnowych

Fig. 59. Basic construction motives of spatial rod-tie structures

ktury i nazywać je będziemy podstawowymi motywami konstrukcyjnymi. Na rysunku 59 przedstawiono podstawowe motywy kolejno dla układów:

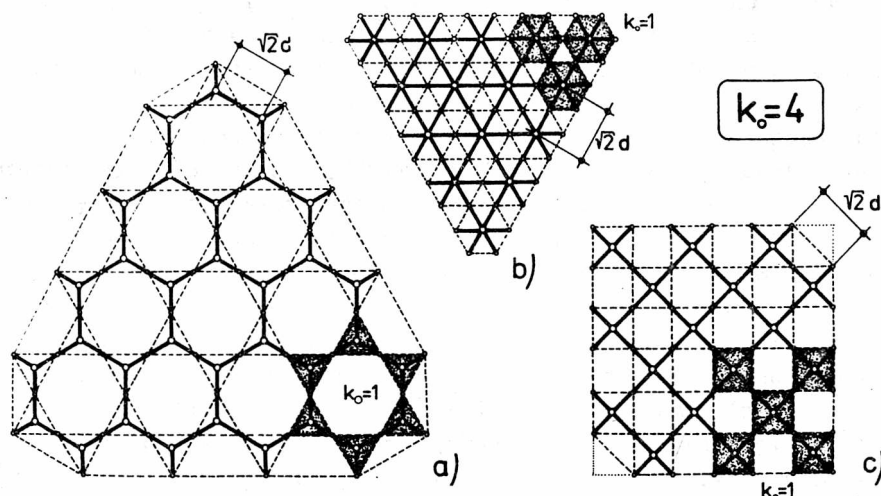
DWS + 2 × T (a),

JDN + 2 OPS (b),

CO + 2 × $\frac{1}{2}$ O (c).

Na podstawie rys. 59a określimy pomocną później liczbę cięgien przypadających na jeden pręt. W podstawowym motywie konstrukcyjnym struktury DWS + 2 × OPS liczba prętów równa jest $6 \times 3 \times 2 = 36$, podczas gdy liczba cięgien łączących dolne i górne węzły typu K wynosi $6 \times 3 \times 2 + 12 = 48$, zatem na jeden pręt przypada $1\frac{1}{3}$ cięgna. W strefie środkowej, bardziej rozbudowanych struktur, liczba ta spadnie do $1\frac{1}{4}$ cięgna przypadającego na 1 pręt. Ponieważ zasady współpracy prętów i cięgien są identyczne we wszystkich układach struktur prętowo-ciężnowych, tak więc podane liczby będą się odnosić również do nich.

W celu czytelności przekrojów omawianych struktur, najmniejsze fragmenty przedstawiono na rysunku w stałym układzie cięgien, tzn. gdy są one usytuowane w pasach górnych i dolnych. Pobieźna analiza wizualna pozwala stwierdzić, że najbardziej ekonomicznym układem prętów będzie się charakteryzować struktura o układzie (DWS + 2 × T) (rys. 59a). W sześciu prostopadłościennych segmentach znajduje się 36 prętów, pod-



Rys. 60. Porównanie wielkości powierzchni przekrywanych strukturami prętowo-ciężnowymi

Fig. 60. Comparison of the size of surfaces covered with rod-tie structures

czas gdy w trzech segmentach struktury JDN + 2 × OPS, przekrywających dużo mniejszą powierzchnię ograniczoną węzłami typu G, znajduje się

również $3 * (2 * 6) = 36$ prętów. Obrazowe porównanie wielkości przekrywanych powierzchni dla trzech układów struktur pokazano na rys. 60, gdzie przez k_0 oznaczono liczbę segmentów na bokach wielokątów, przylegających do podstawowego motywu danej struktury i koniecznych do jej dalszej rozbudowy.

Ze względu na trudności w obliczaniu potrzebnych pól powierzchni różnych struktur, wynikających z odmiennego łączenia segmentów w podstawowe motywy konstrukcyjne, oraz ich dalszą rozbudowę, przyjęto następujący sposób: dla struktury prętowo-ciężnowej o układzie $DWS + 2 * T$ wielkość powierzchni i liczbę prętów obliczano w zależności od (k) oznaczającego liczbę podstawowych motywów konstrukcyjnych leżących na boku trójkąta, stanowiącego właściwą dla tego układu formę przekrycia. Do obliczeń potrzebnych wielkości pozostałych układów struktur prętowo-ciężnowych przez k oznaczono liczbę prostopadłościennych segmentów leżących na bokach odpowiednich wielokątów. Przyjęcie takiego założenia nie prowadzi do fałszywych wyników, uwzględnia jedynie odmienny charakter łączenia i budowy struktury $DWS + 2 * T$. Tak jak poprzednio, za jednostkę obliczeń przyjęto długość podstawowego pręta. Liczbę prętów oraz wielkość powierzchni każdej struktury obliczano ze wzorów podanych kolejno w tabeli 7, 8 i 9.

Dla każdej struktury podano wartości (s) oznaczające liczbę prętów przypadającą na jednostkę przekrywanej powierzchni. Przebieg zmian wartości (s) w zależności od (k) , dla każdej analizowanej struktury prętowo-ciężnowej przedstawiono na rys. 61a. Przebieg krzywej nr 3 charakteryzujący strukturę $DWS + 2 * T$ potwierdza zaobserwowaną na wstępie prawidłowość. Strukturę tę cechuje najmniejsza liczba prętów przypadających na jednostkę powierzchni przekrycia (2,31). Równie małą wartością $s = 4,0$ charakteryzuje się przestrzenna struktura prętowo-ciężnowa o układzie $CO + 2 * \frac{1}{2} O$, a najmniej korzystnie wypada struktura $JDN + 2 * OPS$, gdzie na jednostkę powierzchni przekrycia przypada około 6,93 pręta.

W analizie statycznej traktuje się ciężna jako pręty, w których panują naprężenia rozciągające. Należy więc otrzymane dla każdej struktury wartości (s) pomnożyć przez $1 \frac{1}{4}$, ponieważ w ich strefach środkowych na 1 pręt przypada $1 \frac{1}{4}$ ciężna, oraz dodać do wartości (s) pierwotnie otrzymanych, aby w pełni porównać przestrzenne struktury prętowo-ciężnowe ze strukturami prętowymi. Tym sposobem otrzymamy końcowe wartości (s) :

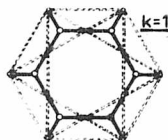
- dla struktury $DWS + 2 * T$:

$$s_k = 2,31 + 2,88 = 5,19,$$

T a b e l a 7

$$p = \frac{3}{2} \sqrt{3} k^2 d^2$$

$$m = (n^2 + 4n + 1) \cdot 6$$

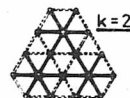


k	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	2,59807	36	13,856407
2	10,39230	78	7,505553
3	23,38268	132	5,645202
4	41,56921	198	4,763139
5	64,95190	276	4,249298
6	93,53074	366	3,9131518
7	127,3057	468	3,676189
8	166,2768	582	3,500186
9	210,44417	708	3,364312
10	259,8076	846	3,256255
50	6495,190	16 206	2,495076
100	25 980,76	62 406	2,402008
1000	2 598 076	6 024 006	2,318641
10 000	259 807 000	600 240 006	2,3103304

T a b e l a 8

$$p = \frac{\sqrt{3}}{2} (k-1)^2 d^2$$

$$m = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right] \cdot 12$$



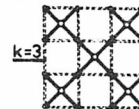
k	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	12	—
2	0,86602	36	41,56922
3	3,464101	72	20,78461
4	7,794228	120	15,39600
5	13,85640	180	12,99038
6	21,65063	252	11,639381
7	31,176915	336	10,777205
8	42,43524	432	10,180217
9	55,42562	540	9,742785
10	70,14805	660	9,408671
50	2079,327	15 300	7,358150
100	8487,914	60 600	7,139562
1000	864 294,2	6 006 000	6,949022
10 000	86585220	600 060 000	6,930282

T a b e l a 9

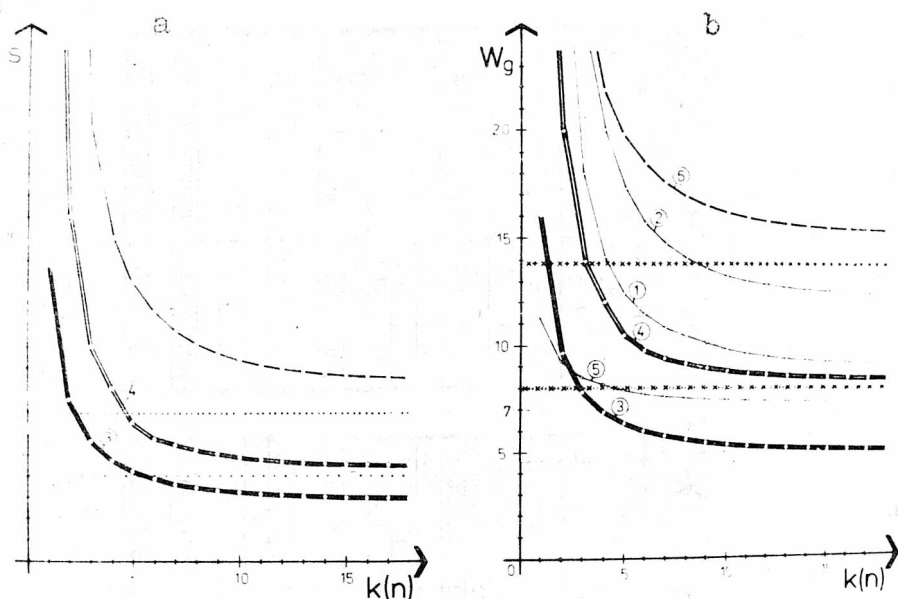
$$p = (k-1)^2 d^2$$

$$m_1 = [(k-1)^2/2 + k] \cdot 8$$

$$m_2 = [k^2/2] \cdot 8$$



k	p	m	$s = \frac{m}{p}$
1	0	8	—
2	1,0	16	16,0
3	4,0	40	10,0
4	9,0	64	7,1111111
5	16,0	104	6,50000
6	25,0	144	5,76000
7	36,0	200	5,55555
8	49,0	256	5,22489
9	64,0	328	5,12500
10	81,0	400	4,93827
50	2401,0	10 000	4,1649313
100	9801,0	40 000	4,0812162
1000	998 001,0	4 000 000	4,008012
10 000	9998 001	400 000 000	4,0007998



Rys. 61. Liczba prętów struktur prętowo-ciężnowych przypadających na jednostkę powierzchni (a), porównywanie masy prętów przypadających na jednostkę powierzchni przekryć prętowych i prętowo-ciężnowych (b)
Fig. 61. Number of rods in rod-tie structures for a surface unit (a), comparison of the mass of rods for a surface unit of rod covers and rod-tie covers (b)

- dla struktury $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$:

$$s_k = 4,00 + 5,00 = 9,00,$$

- dla struktury $JDN + 2 \times OPS$:

$$s_k = 6,93 + 8,66 = 15,59.$$

Z porównania ostatecznej liczby prętów przypadającej na jednostkę powierzchni w kolejnych strukturach prętowo-ciężnowych z odpowiadającymi im wartościami (s) z tabeli 6 i 8 wynika, że tylko strukturę prętowo-ciężnową $DWS + 2 \times T$ cechuje mniejsza niż dla porównywanych ustrojów prętowych liczba prętów przypadająca na jednostkę powierzchni. Pod tym względem struktura $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$ jest tylko mniej ekonomiczna od ustroju $(O + T)$, natomiast struktura $JDN + 2 \times OPS$ jest zdecydowanie najmniej efektywna.

Obliczmy teraz masę prętów przypadającą na jednostkę powierzchni przekrycia (W_g). Ponieważ w obu rodzajach porównywanych struktur występują w zasadzie pręty o jednakowych długościach, więc zakładamy, że jednostkowej długości pręt ma również jednostkową masę. Na rysunku 74 krzy-

we nr 1, 2, 5, według przyjętych założeń, odpowiadają liczbie prętów przestrzennych struktur prętowych potrzebnych do przekrycia jednostkowej powierzchni kolejno dla układów ($\frac{1}{2} O + T$), ($O + T$) oraz ($\frac{1}{2} CO + \frac{1}{2} O$).

W celu obliczenia podobnych wielkości dla struktur prętowo-ciężnych założono bardzo niekorzystną relację mas między jej elementami polegającą na tym, że masa 1 pręta równa jest masie $1 \frac{1}{4}$ przypadającego nań ciężna. W rzeczywistości elementy konstrukcji, o których wiadomo, że z reguły będą występować w nich naprężenia rozciągające, mają dużo mniejszy przekrój oraz odpowiednio mniejszą masę niż podobnej wielkości elementy pracujące na ściskanie. Na rysunku 61b krzywe nr 3, 4 i 6 przedstawiają kolejno masę elementów struktur o układach ($DWS + 2 \times T$), ($CO + 2 \times \frac{1}{2} O$) oraz ($JDN + 2 \times OPS$) przypadającą na jednostkę przekrywanej nimi powierzchni, równą dwukrotnej liczbie prętów przypadających w omawianych strukturach na jednostkową powierzchnię.

Na podstawie przeprowadzonych analiz stwierdzamy, że struktury prętowo-ciężne o układach ($DWS + 2 \times T$) oraz ($CO + 2 \times \frac{1}{2} O$) mogą być równie ekonomiczne, jak porównywane z nimi przestrzenne struktury prętowe.

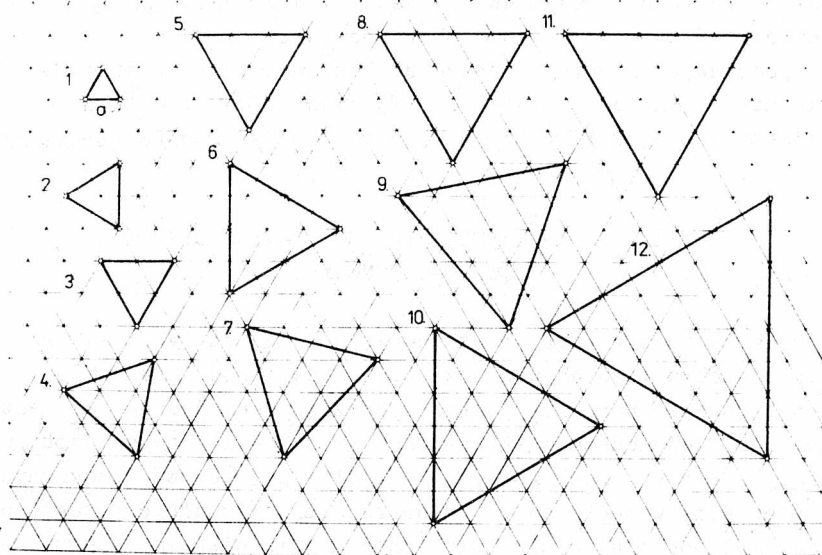
14. ZASADY KSZTAŁTOWANIA POWŁOKOWYCH STRUKTUR PRĘTOWO-CIĘŻNYCH

Przestrzenne struktury prętowo-ciężne powstały dzięki rozwojowi zasad metod kół wpisanych w siatkę trójkątną i podobnie jak ona służyć mają konstruowaniu przekryć powłokowych za pomocą jednego elementu modułowego. Takim elementem w strukturach prętowo-ciężnych jest zestaw składający się z czterech równej długości i przegubowo połączonych ze sobą prętów oraz wewnętrznego ciężna regulującego długość tego zestawu. Łączenie zestawów odbywa się także przy użyciu ciężen o regulowanej długości i zależnie od liczby połączonych w jeden segment zestawów otrzymany przestrzenne struktury prętowo-ciężne opisane układem współzależnych brył. Zastosowanie ciężen o regulowanych długościach umożliwia wykorzystanie ich jako konstrukcji dwukrzywiznowych przekryć powłokowych. Przy jednakowych długościach prętów dostosowywanie wielkości i kształtów segmentów konstrukcji do krzywizn danej powłoki będzie się odbywać poprzez zmianę długości odpowiednich ciężen. Podstawą do obliczeń wszelkich związków miarowych i potrzebnych długości ciężen jest siatka geometryczna przybliżająca powierzchnię danej powłoki.

Wiodącą w naszych rozważaniach formą przekrycia jest kopuła kulista. Rodzaj i charakter siatki trójkątnej opisującej sferę decyduje o zakresie koniecznych zmiany długości elementów potrzebnych do jej konstruowania. Dzięki regularnym siatkom sferycznym można zmniejszyć do mi-

nimum zakres zmian długości prętów, co pozwala na stosowanie elementów o typowych wymiarach. W konstrukcjach prętowo-ciężnowych wykorzystanie regularnej siatki sferycznej zmniejszy zakres zmian długości ciężien oraz zmian kierunków prętów zbiegających się w węzle typu G. W świetle kryteriów regularności siatek sferycznych, przedstawiona w rozdziale pierwszym metoda deformacji siatki wtórnej pozwala na otrzymywanie bardzo regularnych trójkątnych siatek sferycznych.

W metodzie deformacji siatki wtórnej z wielu możliwych podziałów trójkątnych ścian wielościanów stosuje się ze względu na łatwość obliczeń te, w których równoboczna ściana wielościanu jest podzielona liniami równoległymi do każdej z podstaw trójkąta.

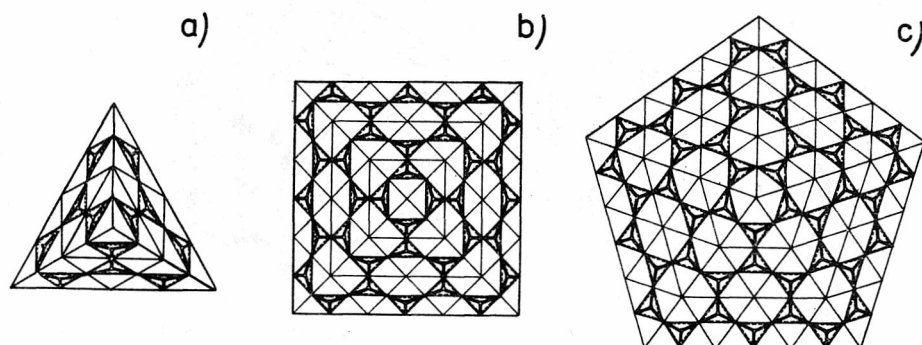


Rys. 62. Kolejne możliwe podziały równobocznych trójkątnych ścian wielościanów foremnych

Fig. 62. Consecutive possible sectionalizations of equilateral triangular faces of regular polyhedrons

Na rysunku 62 tak określone podziały przedstawiono dla trójkątów o numerach, kolejno 1, 3, 5, 8 i 11. Dla właściwych metodzie deformacji siatki wtórnej podziałów równobocznych trójkątów sferycznych należy tak określić w ich obszarach układy bryłowe struktur prętowo-ciężnowych, aby możliwe było skonstruowanie całej powierzchni kulistej.

Dla struktury prętowo-ciężnowej o układzie bryłowym ($DWU + 2 * T$) należy stosować takie siatki sferyczne, które powstają przez podzielenie boku trójkąta sferycznego na parzystą liczbę odcinków o równych długościach (rys. 63). Rozmieszczenie segmentów struktury pokazano sche-

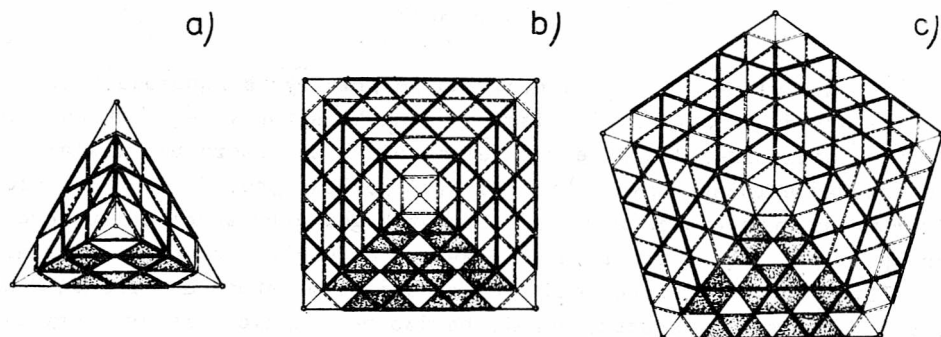


Rys. 63. Rozmieszczenie segmentów struktury o układzie $DWS + 2 \times T$ w obszarach równobocznych ścian: a) 4-ścianu, b) 8-ścianu, c) 20-ścianu foremnego

Fig. 63. Location of segments of the structure of the system $DWS + 2 \times T$ in the area of equilateral faces of: a) tetrahedron, b) octahedron, c) regular icosahedron

matycznie w obszarach trójkątnych ścian 4-ścianu, 8-ścianu i 20-ścianu foremnego.

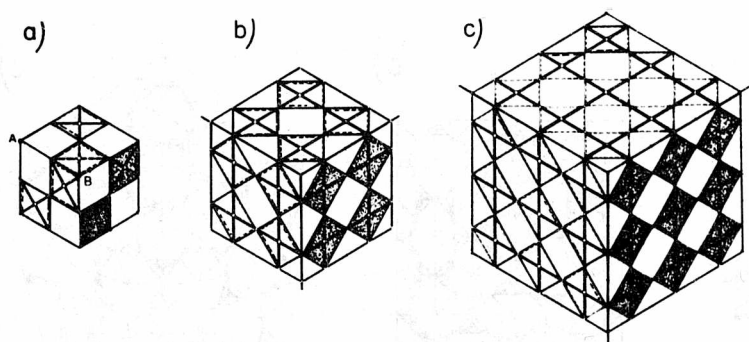
Dla struktury o układzie $(JDN + 2 \times OPS)$ należy również stosować siatki sferyczne powstające przez podział boków trójkątów sferycznych na parzystą liczbę odcinków jednakowej długości. Charakterystyczne dla tej struktury ułożenie segmentów w obszarach trójkątnych ścian 4-ścianu, 8-ścianu i 20-ścianu przedstawiono na rys. 64.



Rys. 64. Układanie segmentów struktury o układzie $JDN + 2 \times OPS$ w obszarach równobocznych ścian: a) 4-ścianu, b) 8-ścianu, c) 20-ścianu foremnego

Fig. 64. Placing segments of the structure of the system $JDN + 2 \times OPS$ in the area of equilateral faces of: a) tetrahedron, b) octahedron, c) regular icosahedron

Najbardziej odpowiednie dla struktury prętowo-ciężnowej o układzie $(CO + 2 \times \frac{1}{2} O)$ będą siatki powstałe na bazie sześciianu (rys. 65a). Ponieważ na krawędzi AB nie można ułożyć zgodnie z wymogami pracy tej



Rys. 65. Sposób układania segmentów struktury o układzie $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$ w obszarze kwadratowych ścian sześcianu
 Fig. 65. Procedure of placing segments of the structure of the system $CO + 2 \times \frac{1}{2} O$ in the region of the square face of a cube

struktury kolejnego jej segmentu, należy więc układać je w sposób pokazany na rys. 65b i c dla dwukrotnie gęstszych podziałów krawędzi ścian sześcianu.

Długości wszystkich potrzebnych cięgien można obliczyć na podstawie symetrycznych partii każdej z siatek sferycznych, po przyjęciu uprzednio wielkości podstawowych dla tych obliczeń; będą je stanowiły długości promienia kuli oraz długość pręta struktury. Ta ostatnia wartość określa zarazem wysokość projektowanej struktury.

PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy na przykładzie przekrycia kopułowego rozważania zdążały do opracowania takiego systemu konstrukcyjnego, składającego się z minimalnej liczby elementów modularnych, który umożliwiałby kształtowanie różnorodnych form przekryć powłokowych. Konieczne stało się również opracowanie regularnych siatek geometrycznych opisujących daną powierzchnię, która stanowi podstawę do wielu późniejszych działań.

Powstała w toku pracy nad tym zagadnieniem metoda deformacji siatki wtórnej pozwala na otrzymywanie bardzo regularnych siatek sferycznych. Charakteryzują się one najmniejszymi, granicznymi wartościami współczynnika η , określającego stosunek długości odcinka najdłuższego do długości odcinka najkrótszego w całej siatce.

Niezmierznie ważną cechą siatek sferycznych uzyskiwanych w ten sposób jest to, iż przy tak nieznacznym zróżnicowaniu długości wszystkich odcinków, odcinki o takich samych długościach rozmieszczone są w sposób uporządkowany w kolejnych partiach siatki sferycznej. Ta ostatnia wła-

ściwość ułatwia fazę montażu kopuły i eliminuje w zasadzie pomyłki wynikające z niewłaściwej kolejności układania elementów na powierzchni przekrycia.

Podstawowa w tej metodzie zasada otrzymywania regularnych siatek sferycznych wykorzystuje właściwości rzutu środkowego ścian wielościanów na odpowiadające im sfery oraz właściwości rzutu prostopadłego na płaszczyznę, a w przyszłości może służyć do określenia regularnych siatek przestrzennych dla przekryć o dowolnych formach i rozpiętych nad równie dowolnym kształtem rzutu.

Metoda otrzymywania regularnych siatek sferycznych powstała równolegle z opracowywanym modularnym systemem konstrukcyjnym. Podstawę wspólną stanowiła metoda kół wpisanych w siatkę trójkątną. Podstawowym elementem modularnym był stożek uzupełniony przez odpowiednio układany element klinowy, który łączył sąsiadujące ze sobą stożki. Na podstawie określonego przez geometrię systemu kształtowania różnorodnych form powłokowych powstał, uwzględniający wymagania statyczne i ograniczenia natury technologicznej, modularny system prętowo-ciężnowy.

W systemie tym element modularny tworzą cztery identyczne pręty połączone ze sobą przegubowo oraz tak samo połączone z nimi ciężna o regularnym rozstawie i sile napięcia. Krótkie pręty takiej struktury przestrzennej pracują na ściskanie, ciężna zaś przenoszą wyłącznie siły rozciągające, co może spowodować przekrywanie za jej pomocą większych powierzchni niż przy użyciu przestrzennych struktur prętowych o takich samych długościach prętów. Możliwość płynnej regulacji długości niezależnych od siebie ciężen pozwala także na dostosowywanie wymiarów potrzebnych elementów składowych konstrukcji do wymagań geometrycznych każdej, także dowolnej formy przekrycia. Regularna siatka przestrzenna spowoduje zmniejszenie do koniecznego minimum zakresu zmian długości ciężen, a w następstwie również ograniczy zakres różnych wzajemnych konfiguracji prętów i ciężen.

LITERATURA

- [1] LISOWSKI B., Architektura konstrukcji powłokowych. Konstrukcje powłokowe. Teoria i zastosowania, t. II, Materiały z sympozjum. Kraków, kwiecień 1974, Warszawa PWN, 1979.
- [2] BAAS L., Lamella domes in the United States. The International Conference on Space Structures, University of Surrey 1966.
- [3] MAKOWSKI Z. S., NOOSHIN H., The structural analysis of a large three-way grid. The International Conference on Space Structures, University of Surrey 1966.

- [4] MAKOWSKI Z. S., Structures Spatiales, Bilan et Tendences; Techniques Architecture nr 320 juin-juillet, 1978.
- [5] MENGERINGHAUSEN M., Noeuds, barres et plaques structurent l'espace; Techniques Architecture nr 320 juin-juillet, 1978.
- [6] RĘBIELAK J., Konstrukcja kopuły kulistej metodą kół wpisanych w siatkę trójkątną, Architektura nr 9-10, 1977.
- [7] FULIŃSKI J., Geometryczne elementy projektowania kratownic powierzchniowych. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Rolniczej nr 64, Wrocław 1966.
- [8] FULIŃSKI J., Geometria kratownic powierzchniowych. Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Wrocław 1973.
- [9] EMMERICH D. G., Reseaux. The International Conference on space Structures, University of Surrey, 1966.
- [10] Poradnik projektanta konstrukcji metalowych, praca zbiorowa pod red. W. Boguckiego, s. 201-207, Warszawa, Arkady, 1982.
- [11] MAKAI E., TARNAI T., On some geometrical problems of single - layered spherical grids with triangular network. The International Conference on Space Structures, University of Surrey, 1975.
- [12] PENKALA T., Zarys krystalografii, Warszawa, PWN, 1977.
- [13] BÜTTNER O., STENKER H., Lekkie budownictwo metalowe, Warszawa, Arkady, 1975.
- [14] BORUSIEWICZ W., Konstrukcje budowlane dla architektów, Warszawa, Arkady, 1978.
- [15] WACHSMANN K., The turning point of building. Structure end design. Reinhold Publ. co. Wiesbaden 1961.
- [16] DU CHATEAU S., Structure tridiversionne, Techniques of Architecture nr 320, juin-juillet 1978.

MODULAR SURFACE FRAMES

The main purpose of the paper was to describe the development of a construction system consisting of component elements which would make it possible to shape various forms of the shell coverings. For this purpose it was also necessary to develop regular geometric networks describing the curvature of a given shell. The whole of the reasoning is presented using the spherical dome as an example.

During the course of the research on this problem, there was formed a method of secondary deformation of the network which makes it possible to obtain highly regular spherical networks. They are characterized by the smallest, limiting coefficient values η which determine the relationship of the length of the longest segment to the length of the shortest segment in the whole network.

An enormously important characteristic of the spherical networks thus obtained, is that given such insignificant differences in the lengths of all segments, segments of identical length are distributed in an orderly fashion in the consecutive lots of a spherical network. This property facilitates the assembly stage of the shell, eliminating, in principle at least, errors resulting from laying the elements on the surface of the dome in the wrong order.

This method of obtaining regular spherical networks was formed at the same time and on the same basis as the construction system was worked out. In this system the modular element consists of four identical rods connected together in a joint fashion and connected in the same way to ties which have regular spacing and tension force. The possibility of fluid regulation of the lengths of the ties which are independent of each other makes possible the adjustment of the dimensions of the necessary component elements of the construction to the geometric demands of each, also to any cover form.

The short rods of such a spatial structure are always under compression, thus the ties transfer stretching force only, which allows the structure to cover a larger space than in cases where spatial rod structures are used whose rods are all the same length.

МОДУЛЯРНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Главная цель работы - разработка такой конструкционной системы, состоящей из минимального количества составных элементов, которая способствовала бы формированию различных форм оболочных перекрытий. Для этого стала необходимой разработка регулярных геометрических сеток, описывающих кривизны данной оболочки. Ход рассуждения представлен на примере сферического купола.

Возникший во время работы над этим вопросом метод деформации вторичной сетки способствует получению очень регулярных сферических сеток. Они характеризуются наименьшими предельными значениями коэффициента η , определяющего соотношение между длиной длиннейшего и длиной корочайшего отрезков во всей сетке. Очень важной чертой сферических сеток, получаемых таким образом, является то, что при такой незначительной дифференциации длины всех отрезков, отрезки одинаковой длины распределены упорядоченным образом в очередных партиях сферической сетки. Это свойство облегчает фазу монтажа перекрытия, в принципе исключая ошибки, вытекающие из неправильной последовательности укладывания элементов на поверхности купола.

Метод получения регулярных сферических сеток возникал параллельно, на общей основе с разрабатываемой конструкционной системой. В этой системе модулярный элемент составляют четыре тождественных соединенных стержня,

а также соединенные с ними тросы упорядоченной расстановки и силы натяжения. Возможность плавной регуляции длины независимых друг от друга тросов позволяет приспособить размеры необходимых составных элементов перекрытия. Работа коротких стержней такой пространственной структуры направлена всегда на сжатие, тросы, в свою очередь, являются исключительно носителями растягивающих сил, что способствует перекрытию при ее помощи больших пространств, чем при употреблении пространственных стержневых структур, характеризующихся такими же длинами стержней.

Praca wpłynęła do Redakcji 15 sierpnia 1983 r.

SPIS TREŚCI

Wprowadzenie.	3
1. Opis problemu.	5
2. Metoda deformacji siatki wtórnej	10
3. Siatka sferyczna 2000-ścianu	15
4. Siatki sferyczne wielościanów uzyskiwane metodą deformacji siatki wtórnej na podstawie 8-ścianu foremnego	22
5. Regularne siatki sferyczne rozpięte nad rzutem sześciokątnym i czworokątnym	27
6. Wyznaczanie siatek sferycznych metodą deformacji siatki wtórnej rzutem prostopadłym na płaszczyznę	40
7. Siatka sferyczna rozpięta nad trójkątem równobocznym	42
8. Siatki sferyczne	51
9. Ogólna charakterystyka metody deformacji siatki wtórnej.	54
10. Ewolucja formy elementu modularnego	56
11. Uwarunkowania geometryczne prętowo-ciężnowego systemu modularnego.	66
12. Zasady pracy statycznej przestrzennych struktur prętowo-ciężnowych.	69
13. Główne kryteria ekonomiczne struktur prętowo-ciężnowych	75
14. Zasady kształtowania powłokowych struktur prętowo-ciężnowych.	83
15. Podsumowanie.	86
Literatura.	87

CONTENTS

Introduction.	3
1. Discription of the problem	5
2. Basic of the method of secondary deformation of the network. . .	10
3. Spherical network of a 2000-hedron	15
4. Spherical networks of polyhedrons obtained by the method of secondary deformation of the network on the basis of a regular octahedron	22
5. Regular spherical networks spread over a polygonal projection. .	27
6. Determination of spherical networks by the method of secondary deformation of the network through a perpendicular projection onto the plane	40
7. Spherical network spread over an equilateral triangle.	42
8. Spherical networks spread over projections of the base in the form of a hexagon and a tetragon	51
9. General characteristic of the method of secondary deformation of the network.	54
10. Evolution of the modular element form	56
11. Geometric conditions of the rod-tie modular system.	66
12. Princples of static operation of the spatial rod-tie structu- res.	69
13. Main economic criteria of the rod-tie structures.	75
14. Principles of forming of the rod-tie shell structures	83
15. Conclusions	86
References.	87