

A 19111

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
K O M I T E T G E O D E Z J I

**G E O D E Z J A
I K A R T O G R A F I A**

K W A R T A L N I K N A U K O W Y

T O M I I I • Z E S Z Y T 4

P A Ń S T W O W E
W Y D A W N I C T W O N A U K O W E
W A R S Z A W A

1 9 5 4

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
K O M I T E T G E O D E Z J I

G E O D E Z J A I K A R T O G R A F I A

K W A R T A L N I K N A U K O W Y

S P I S T R E Ś C I
T O M U I I I • 1 9 5 4



P A Ń S T W O W E
W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

W A R S Z A W A
1 9 5 4

SPIS ALFABETYCZNY ARTYKUŁÓW
ZAMIESZCZONYCH W III TOMIE „GEODEZJI I KARTOGRAFII“
(według autorów)

	Strona
Czerski Z. — Nowa metoda astronomicznego wyznaczenia azymutu i współrzędnych geograficznych	117
Dulian B. — Zmiany w położeniu osi obrotu lunety w teodolitach astronomicznych oraz sposób ich wyznaczania	51
Fialovszky L. — Wpływ błędu układu osiowego teodolitu na pomiar kątów poziomych	211
Grądziński W. — Metody obliczania zwierciadeł reflektorowych	146
Hausbrandt S. — Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłędności punktów nawiązania	17
Kępiński F. — Uwagi do pracy J. Radeckiego „Nowy sposób obliczania azymutu gwiazdy Polarnej“	192
Kowalczyk Z. — Określenie wielkości poprzecznego przesunięcia punktu końcowego łańcucha trójkątów względem punktu początkowego	84
Krzemiński W. — O niektórych problemach opracowania mapy izogon Polski	97
Łobanow A., Konszryn M. — Metody sporządzania map topograficznych na podstawie zdjęć lotniczych i zasad fotogrametrii	3
Michalski T. — Najkorzystniejszy przypadek wcięcia wstecz	33
Odlanicki-Poczobutt M. — 50-lecie pracy naukowej prof. Banachiewicza	111
Opalski W. — O metodach bezpośrednich wyznaczenia azymutu	229
Opalski W. — O niezależności runu mikrometrów optycznych od miejsca limbusu	75
Opalski W. — Pomiar azymutu metodą Z. Czerskiego	139
Panasiuk J. — Dopuszczalna dokładność współrzędnych przybliżonych w przypadku wyrównywania obserwacji metodą spostrzeżeń pośrednich	245
Radecki J. — W sprawie uwag F. Kępińskiego do mojej pracy pt. „Nowy sposób obliczania azymutu gwiazdy Polarnej“	195
Sawicki K. — „Miernicka Nauka“ Stanisława Grzebskiego	40
Sawicki K. — Pierwsza katedra geodezji w Polsce	200
Komunikat Komitetu Geodezji PAN	259
W pierwszą rocznicę śmierci prof. Edwarda Warchałowskiego	47

УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ III ТОМА „ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
В АЛФАВИТНОМ ПОРЯДКЕ АВТОРОВ

	Страница
Гаусбрандт С. — Уравнивание триангуляционных сетей с учетом ошибок опорных пунктов	17
Грондзки В. — Методы расчёта рефлекторных зеркал	146
Дулиян Б. — Изменения в положении оси вращения трубы в астрономических теодолитах	51
Фяльофшкы Л. — Влияние ошибок системы осей теодолита на измерение горизонтальных углов	211
Кемпински Ф. — Относительно работы Радецкого Ю. „Новый способ вычисления азимута полярной звезды“	192
Ковальчик З. — Содержание статьи „Определение величины поперечного сдвига конечной точки цепи треугольников по отношению к начальной точке“	84
Кржемински В. — О некоторых проблемах составления карты изогон Польши	97
Лобанов А., Коншин М. — Методы создания топографических карт на основе аэрофотосъёмки и фотограмметрии	3
Михальски Т. — Найвыгоднейший случай обратной засечки	33
Одляницки — Почобутт М. — 50-летие научной деятельности проф. Банахевица	111
Опальски В. — Измерение азимута методом З. Черского	139
Опальски В. — О независимости „run“ оптических микрометров от места лимба	75
Опалски В. — О методах непосредственного определения азимута	229
Панасюк Я. — Допускаемая точность приближенных координат в случае уравнивания наблюдений по способу посредственных измерений	245
Радецкий Ю. — Относительно примечаний Кемпинского Ф. к моей работе „Новый способ вычисления азимута полярной звезды“	195
Савицки К. — Станислава Гржепского „Miernicka nauka“	40
Савицки К. — Первая кафедра геодезии в Польше	200
Черски З. — Метод астрономического определения азимута и географических координат	117
Бюллетен Геодезического Комитета П. А. Н.	259
В первую годовщину смерти проф. Эдуарда Вархаловского	47

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES ARTICLES DU III VOLUME DE LA „GÉODÉSIE ET CARTOGRAPHIE“
(d'après les noms des auteurs)

	Pages
Czerski Z. — Méthode nouvelle de détermination astronomique d'azimut et des coordonnées géographiques	117
Dulian B. — Les changements dans la position de l'axe de rotation de la lunette dans les théodolites astronomiques	51
Fialovszky L. — L'influence d'erreur du système axial de théodolite sur le mesurage des angles horizontaux	211

Grądzki W. — Méthodes de calculs des miroirs réflecteurs	146
Hausbrandt S. — Une compensation des réseaux trigonométriques où est rejetée l'hypothèse des points de liaison exempts d'erreurs	17
Kępiński F. — Remarques concernant le mémoire de M. J. Radecki: „Nou- velle façon de calculer l'azimut de la Polaire“	192
Kowalczyk Z. — Détermination de la grandeur du déplacement transversal du point final de la chaîne de triangles par rapport au point initial	84
Krzemiński W. — Certains problèmes concernant l'élaboration de la carte isogonique de la Pologne	97
Lobanow A., Konszryn M. — Méthode servant à élaborer les cartes topo- graphiques d'après les prises de vues aériennes et les principes de la photogrammétrie	3
Michalski T. — Le cas le plus avantageux du relèvement	33
Odlanicki-Poczebutt M. — Cinquantenaire de travail du Prof. Bana- chiewicz	111
Opalski W. — Détermination des azimuts par les méthodes directes	229
Opalski W. — Indépendance du run des micromètres optiques de l'endroit du limbe	75
Opalski W. — La détermination d'azimut d'après la méthode de Z. Czerski	139
Panasiuk J. — L'exactitude admissible des coordonnées approximatives en cas d'égalisation des résultats d'observation par la méthode indirecte	245
Radecki J. — Sur les observations du F. Kępiński concernant mon travail intitulé „Nouvelle façon de calculer l'azimut de la Polaire“	195
Sawicki K. — „Miernicka Nauka“ de Stanislas Grzepski	40
Sawicki K. — Première chaire de géodésie en Pologne	200
Communiqué du Comité de Géodésie de PAN	259
A l'anniversaire du décès du Prof. E. Warchałowski	47

Adres Redakcji: Politechnika Warszawska
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1.

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
K O M I T E T G E O D E Z J I

G E O D E Z J A
I K A R T O G R A F I A

K W A R T A L N I K N A U K O W Y

T O M I I I • Z E S Z Y T 4

P A Ń S T W O W E
W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

W A R S Z A W A

1 9 5 4

KOMITET REDAKCYJNY

Jan Różycki (redaktor naczelny), Bronisław Dzikiewicz (zastępca redaktora), Marian Brunon Piasecki (sekretarz)

RADA REDAKCYJNA

Franciszek Biernacki, Tadeusz Kochmański, Zygmunt Kowalczyk, Stanisław Kryński, Henryk Leśniok, Janusz Tymowski

Adres Redakcji: Politechnika Warszawska,
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — DZIAŁ CZASOPISM
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 865+106 egz.	Do składania 17 IX 1954
Ark. wyd. 3,7, druk. 3,25	Podpisano do druku 30 XI 1954
Papier dr. sat. 70 g 70×100/16 V kl.	Druk ukończono w grudniu
Cena zł 10,—	Zam. Nr 690/69 - K-5-54173

POZNAŃSKA Drukarnia Naukowa — POZNAŃ, FREDRY 10

Lajos Fialovszky

Budapeszt

Wpływ błędu układu osiowego teodolitu na pomiar kątów poziomych

Referat niniejszy został po raz pierwszy wygłoszony na posiedzeniu Komitetu Geodezyjno-geofizycznego Węgierskiej Akademii Nauk w dniu 23 października 1952 roku. W wyniku przeprowadzonej dyskusji referat został uzupełniony i rozszerzony. Opracowany następnie w języku niemieckim, został wygłoszony przez autora dwukrotnie w czasie jego pobytu w Polsce, a mianowicie na zebraniu Stowarzyszenia Naukowo-Technicznego Geodetów Polskich w Warszawie w dniu 4 stycznia 1954 r. oraz we Wrocławiu w dniu 7 stycznia 1954 r.

Wykonawstwo geodezyjne domaga się narzędzi coraz dokładniejszych. Przemysł precyzyjny czyni wysiłki, aby sprostać tym wymaganiom. W związku z tym produkuje się obecnie teodolity z układem optycznym soczewkowo-zwierciadlanym, których lunety dają 80-krotne powiększenie, zapewniające zdolność rozdzielczą odpowiadającą współczesnym optycznym mikrometrycznym urządzeniom odczytowym, precyzji podziału limbusa (naniesionego zazwyczaj na płycie szklanej) oraz wysokiej pewności prowadzenia osi alidady. Ostatnio wymieniony warunek osiąga się przez osadzenie alidady na tak zwanym „wieńcu kulkowym“. Przy istnieniu wspomnianej odpowiedniości elementów konstrukcyjnych teodolitu lub — inaczej mówiąc — gdy dokładność wymienionych czterech elementów, określających precyzję instrumentu, może być równomiernie i w całej pełni wykorzystana, wówczas błędy przypadkowe pomiaru, mające swoje źródło w niedoskonałości instrumentu, są minimalne.

W związku ze wzrostem wymagań co do dokładności pomiaru aktualne staje się zagadnienie określenia źródła błędów systematycznych, ich wpływu na pomiar kątów poziomych i sposobu jego eliminacji. Celem niniejszego referatu jest rozważenie kwestii, w jaki sposób przy pomiarze kątów poziomych powstają i wzajemnie się nakładają błędy systematyczne, mające swoje źródło w niedoskonałości układu osiowego teodolitu.

W literaturze i praktyce geodezyjnej znane są już od dawna wzory do obliczenia wartości liczbowej błędu określenia kierunku, spowodowanego istnieniem kolimacji, inklinacji (nachyleniem osi poziomej obrotu lunety) i niecentrycznością linii celowej. Istnieją też wskazania meto-

dyczne, pozwalające wyeliminować wpływ tych błędów układu osiowego, a mianowicie przez dokonywanie pomiaru kąta w dwu położeniach lunety i wyprowadzenie wartości średniej z obu położzeń, którą przyjmuje się jako wartość ostateczną, prawdziwą. Jest rzeczą znaną i łatwą do udowodnienia na drodze pogładowej, że przy istnieniu jednego z wymienionych trzech błędów instrumentalnych średnia z dwu położzeń jest wolna od jego wpływu na wynik pomiaru. Nie można jednak z góry twierdzić, że to samo zachodzi również w przypadku równoczesnego występowania owych trzech źródeł błędów instrumentalnych.

Przeglądając literaturę nie znalazłem odpowiedzi na pytanie, czy średnia z dwu położzeń lunety jest — z całą ścisłością — wolna od sumarycznego wpływu błędów pochodzących z wspomnianych trzech źródeł. Wydaje się raczej, jak przyjmuje się ogólnie, że pomiar w dwu położeniach lunety eliminuje wpływ wszystkich błędów instrumentalnych nie z pełną ścisłością, lecz ze znacznym do tej ścisłości przybliżeniem. Wskazywałoby na to również między innymi zalecenie znajdujące się w niektórych podręcznikach, według którego należy drogą starannej rektyfikacji sprowadzić do minimum wartości kolimacji, inklinacji i niecentryczności, gdyż sumaryczny wpływ błędów z tych trzech źródeł na wynik pomiaru w dwóch położeniach lunety eliminowany jest tylko wówczas, gdy wartości wymienionych błędów instrumentalnych są dostatecznie małe [1]. Nie znajdziemy jednak nigdzie odpowiednich wskazań odnośnie do granic, w jakich należy utrzymać wielkości błędów instrumentalnych, oraz co do tego, jak kształtuje się wpływ sumaryczny tych błędów na średnią z dwóch położzeń lunety, gdy owe błędy przyjmują określone wartości. A tymczasem zagadnienie to jest ważne zarówno dla geodety, jak i dla konstruktora instrumentu, gdyż tylko jednoznaczne, zdecydowane wyjaśnienie tej kwestii pozwala ocenić, czy danym teodolitem można osiągnąć żądaną dokładność. Dopiero dzięki wyjaśnieniu tej kwestii zyskujemy podstawę do ustalenia granicznych wielkości błędów instrumentalnych, poniżej których należy zejść przy rektyfikacji instrumentu, aby żądana dokładność pomiaru stała się realna do osiągnięcia.

Pragnę zauważyć, że zupełne usunięcie kolimacji i niecentryczności linii celowej nie jest możliwe, gdyż celowanie na punkty o różnej odległości wywołuje zmianę położenia linii celowej. Przyczyna leży w tym, że wskutek potrzeby każdorazowego nastawiania na ostrość obrazu nie mamy pewności, że położenie linii celowej jest stałe.

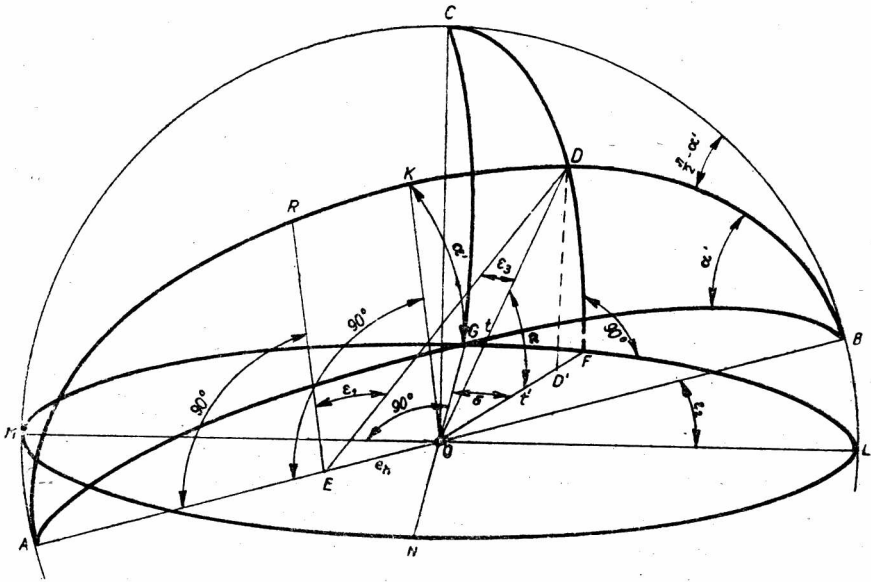
Powszechnie znany podręcznik Jordana-Eggerta pt. „Handbuch der Vermessungskunde“ zajmuje się szczegółowo wpływem błędu układu osiowego. Do przeprowadzonego tam toku rozumowania pragnę jednak dorzucić dwie uwagi. Po pierwsze, w zamieszczonych tam rozważaniach nad wpływem błędów instrumentalnych na wyznaczenie kierunku wiel-

kość tego wpływu wyprowadzono przyjmując pewne uproszczenia, wobec czego wzory ujmujące wartość błędu wyznaczenia kierunku mają charakter wzorów przybliżonych. W praktyce, wobec na ogół nikłych wartości poszczególnych składników błędu układu osiowego, wzory te w zasadzie są wystarczająco dokładne, nie zawsze jednak nadają się przy rozważaniach prowadzonych z całą ścisłością. Po drugie, wpływ błędów instrumentalnych nie jest tam rozpatrywany łącznie jako jedno złożone zagadnienie, lecz jest analizowany w odniesieniu do każdego składnika z osobna wziętego. Jordan sam zresztą stwierdza, że wyprowadzony wzór, wyrażający sumaryczny wpływ kolimacji, inklinacji i niepionowości osi instrumentu na wyznaczenie kierunku, jest ścisły tylko o tyle, o ile ścisłe są wzory na każdy z tych składników z osobna. Jordan nadmienia przy tym, że jeśli wzory dla poszczególnych składników błędu układu osiowego zawierają wyrazy wyższych potęg, to wzór na błąd sumaryczny zawierać będzie jeszcze iloczynny składników błędu układu osiowego w różnych potęgach. Z tego wynika, że zwykła suma składników omawianego błędu nie może być uważana za sumaryczny błąd wszystkich składników. Jordan poprzestaje na tym stwierdzeniu, wskutek czego nie usuwa wątpliwości, czy średnia z pomiaru w dwóch położeniach jest całkowicie wolna od wpływu wymienionych powyżej składników błędu układu osiowego.

Profesor Ehrenfeucht (Ryga) zajmuje się również szczegółowo zagadnieniem błędu układu osiowego. Rozważa on przy tym problem sumarycznego oddziaływania kolimacji, inklinacji i niepionowości osi instrumentu na pomiar kąta poziomego. Ehrenfeucht wyznacza w tym celu nawet szereg wartości liczbowych. W wyprowadzonym wzorze dowodzi, że wpływ kolimacji i inklinacji zostaje usunięty z wyniku, który jest średnią arytmetyczną z pomiaru w dwóch położeniach lunety. Jednakże Ehrenfeucht nie badał wpływu niecentryczności linii celowej, wobec czego rezultat jego badań nie wyjaśnia kwestii eliminującego działania pomiaru w dwóch położeniach lunety na wpływ z tytułu niecentryczności linii celowej, a przecież ten składnik błędu układu osiowego występuje prawie zawsze.

Ścisłą wartość sumarycznego wpływu błędów instrumentalnych na wyznaczenie kierunku można otrzymać w drodze następujących rozważań. Przyjmujemy przy tym, że wpływ ten wynika z istnienia kolimacji, inklinacji oraz niecentryczności linii celowej. Po uzyskaniu wyrażenia na sumaryczny wpływ błędów instrumentalnych będziemy mogli przystąpić do rozważenia sprawy, czy średnia z pomiarów w dwóch położeniach lunety wolna jest od tego wpływu.

Niechaj OC oznacza pionowo ustawioną oś instrumentu (rys. 1); AB — poziomą oś obrotu lunety; O — środek instrumentu (punkt przecięcia się osi instrumentu z osią obrotu lunety); D — cel ziemski widoczny pod



Rys. 1

kątem α nad horyzontem, przy czym oznaczając $OD=t$ oraz rzut punktu D na płaszczyznę horyzontu przez D' otrzymamy $OD'=t'=t \cdot \cos \alpha$. Dalej przyjmujemy, że:

- ε_1 oznacza wartość kolimacji,
- ε_2 oznacza wartość inklinacji osi poziomej obrotu lunety,
- $e_h = OE$ oznacza wartość niecentryczności osi celowej, mierzonej wzdłuż osi obrotu lunety od środka instrumentu O do punktu E , w którym oś celowa przecina się z osią obrotu lunety,
- α oznacza wysokość horyzontalną punktu D , otrzymaną z pomiaru (wartość ta jest różna od wysokości rzeczywistej a),
- $\delta_{1,2,3}$ oznacza wartość sumaryczną wpływu 3 błędów instrumentalnych.

W odniesieniu do rys. 1 wyjaśniamy dodatkowo, że

$MNLG$ oznacza koło horyzontalne zakreślone z punktu O promieniem równym t ,

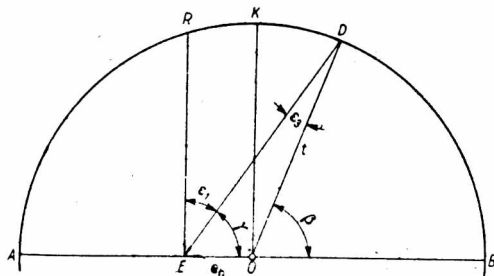
MCL oznacza płaszczyznę przechodzącą przez oś instrumentu (OC) i oś obrotu lunety (AB),

CG oznacza ćwiartkę wertykału prostopadłego do płaszczyzny MCL ,

CDF oznacza ćwiartkę wertykału przechodzącego przez punkt D ,

$ARKDB$ oznacza półokrąg zatoczony dokoła punktu O promieniem równym t , przy czym odcinek OK jest prostopadły do AB , zaś ER jest równoległy do OK , czyli prostopadły do AB .

Na rys. 2 uwidocznił fragment rys. 1 z tym, że płaszczyznę *ARKDB* obrócono dokoła osi *AB* aż do przylegania do płaszczyzny arkusza.



Rys. 2

Z rys. 2 czytamy

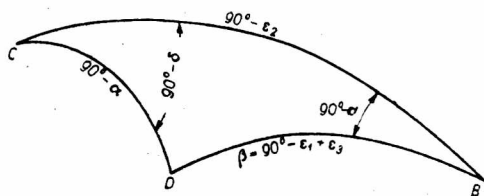
$$\beta = \gamma + \varepsilon_3 = 90^\circ - \varepsilon_1 + \varepsilon_3. \tag{1}$$

Z trójkąta *EOD* wynika

$$\sin \varepsilon_3 = \frac{e_h}{t} \cdot \cos \varepsilon_1,$$

czyli

$$\varepsilon_3 = \arcsin \left(\frac{e_h}{t} \cdot \cos \varepsilon_1 \right). \tag{2}$$



Rys. 3

Z trójkąta sferycznego *BCD* (rys. 1), przedstawionego odrębnie na rys. 3, wynika

$$\cos \beta = \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \sin a' \cdot \sin \varepsilon_2 + \cos a' \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \sin \delta_{1,2,3} \tag{3}$$

oraz

$$\sin a = \sin \varepsilon_2 \cdot \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \cos \varepsilon_2 \cdot \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \sin a', \tag{4}$$

wobec czego

$$\cos a = \sqrt{1 - [\sin \varepsilon_2 \cdot \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \cos \varepsilon_2 \cdot \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cdot \sin a']^2}. \tag{5}$$

W równaniach (4) i (5) należy podstawić wyrażenie (2), po czym otrzymamy z równania (3)

$$\delta_{1,2,3} = \arcsin \left\{ \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \sin a' \cdot \sin \varepsilon_2}{\cos a' \cdot \cos \varepsilon_2} \right\} = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_n), \quad (6)$$

gdzie w miejsce ε_3 podstawiono wyrażenie (2), w miejsce $\sin a$ — wyrażenie (4) oraz w miejsce $\cos a$ — wyrażenie (5).

Wzór (6) ujmuje w sposób ścisły wartość na błąd określenia kierunku. Błąd ten powstał na skutek jednoczesnego występowania kolimacji, inklinacji i niecentryczności osi celowej. Ze wzoru (6), który jest matematycznie ścisłym wyrażeniem na sumaryczny wpływ 3 błędów instrumentalnych, widzimy, że wartość sumarycznego wpływu błędów nie jest zwykłą sumą poszczególnych trzech składników.

Przejdziemy teraz do znalezienia odpowiedzi na pytanie, jakim błędem obarczona jest średnia z pomiarów w dwóch położeniach lunety.

Przyjmujemy, że rys. 1 przedstawiał instrument w położeniu I, wobec czego wyrażenia na ε_1 , ε_2 i e_n należy przyjąć ze znakiem dodatnim. Ponadto będziemy błąd sumaryczny, odniesiony do I położenia lunety, oznaczać w dalszych rozważaniach przez δ_I . Po przechyleniu lunety przez zenit i ponownym nacelowaniu na punkt D wartości bezwzględne 3 błędów instrumentalnych pozostają takie same, zmieniając jedynie znak. Dla położenia II otrzymamy więc wzór sumaryczny wtedy, jeśli w wyrażeniach (2), (4), (5) i (6) w miejsce ε_1 , ε_2 i e_n podstawimy $-\varepsilon_1$, $-\varepsilon_2$ i $-e_n$.

Otrzymujemy więc ze wzoru (2)

$$\varepsilon_{3II} = \arcsin \left[\frac{-e_n}{t} \cdot \cos(-\varepsilon_1) \right] = -\varepsilon_{3I}, \quad (7)$$

potem ze wzoru (4)

$$\begin{aligned} \sin a_{II} &= \sin(-\varepsilon_2) \cdot \sin(-\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \cos(-\varepsilon_1) \cdot \cos(-\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \cdot \sin a' = \\ &= \sin a_I = \sin a \end{aligned} \quad (8)$$

oraz ze wzoru (5)

$$\cos a_{II} = \cos a_I = \cos a. \quad (9)$$

W tym miejscu należy zauważyć, że uzupełnienie wzorów (8) i (9) nastąpiło wobec oczywistości faktu, iż kąt a (wysokość horyzontalna punktu D) jest niezależny od położenia lunety.

Wreszcie po podstawieniu wartości z równań (7), (8) i (9) otrzymujemy ze wzoru (6)

$$\begin{aligned} \delta_{II} &= f(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -e_n) = \arcsin \left\{ \frac{\sin(-\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \sin a \cdot \sin(-\varepsilon_2)}{\cos a \cdot \cos(-\varepsilon_2)} \right\} = \\ &= -\arcsin \left\{ \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - \sin a \cdot \sin \varepsilon_2}{\cos a \cdot \cos \varepsilon_2} \right\} = -f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_n) = -\delta_I. \end{aligned} \quad (10)$$

Stwierdzamy, iż $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_h)$ jest funkcją nieparzystą, skąd wypływa wniosek, że średnia z pomiarów w dwóch położeniach lunety jest wolna od wpływu kolimacji, inklinacji i niecentryczności linii celowej również w tym przypadku, gdy wymienione 3 błędy instrumentalne występują jednocześnie. Słuszność tego wniosku nie jest ograniczona do przypadku, gdy składniki błędu układu osiowego są wielkościami małymi, lecz jest od nich niezależna, a otrzymany wzór (10) jest matematycznie ścisły.

Rozwińmy teraz na szereg wzór (6) z uwzględnieniem wyrazów w trzeciej potędze. Po dość uciążliwych rachunkach otrzymamy następujące wyrażenie

$$\delta = \frac{\varepsilon_1}{\cos \alpha'} - \left(\frac{e_h}{t}\right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha'} - \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \sum a_{k,l,m} \cdot \varepsilon_1^k \cdot \varepsilon_2^l \cdot \left(\frac{e_h}{t}\right)^m + R, \quad (11)$$

gdzie k, l oraz m mogą przyjąć wartości 0, +1, +2, +3, zaś $k+l+m=3$. Zauważamy także, że liczba wyrazów w trzeciej potędze pod znakiem sumy \sum równa jest liczbie wszelkich możliwych 3-członowych kombinacji z 3 elementów, czyli równa 10.

Wyraz R (oznaczający resztę) zawiera wyłącznie wyrazy nieparzystych potęg $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i $\frac{e_h}{t}$ począwszy od piątej potęgi wzwyż. Wartości współczynników $a_{k,l,m}$ zależą jedynie od wielkości pomierzonego kąta α' .

We wzorze (11) nie mamy wyrazów w kwadracie i w wyższych parzystych potęgach. Jeśli odrzucimy wyrazy od potęgi trzeciej wzwyż, to pozostaną we wzorze wyłącznie składniki liniowe i otrzymamy

$$\delta = \frac{\varepsilon_1}{\cos \alpha'} - \left(\frac{e_h}{t}\right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha'} - \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha',$$

co oznacza, że sumaryczny wpływ błędu układu osiowego równy jest sumie wpływów poszczególnych składników tego błędu.

Otrzymany wynik, opublikowany zresztą częściowo w innym wydawnictwie [6], nie zadowala nas jednak całkowicie. Przy wyznaczaniu błędów instrumentalnych mówiliśmy dotąd jedynie o poziomej składowej niecentryczności linii celowej, gdyż przyjęliśmy, że linia celowa przecina oś obrotu lunety w odległości e_h , liczonej od środka instrumentu. W rzeczywistości jednak linia celowa i oś obrotu lunety są na ogół prostymi wchrowatymi. Obok składowej poziomej niecentryczności linii celowej istnieje więc będzie również pionowa składowa niecentryczności tejże linii.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy przeto przypadek najogólniejszy, to znaczy wyznaczać będziemy wartość błędu określenia kierunku przy założeniu jednoczesnego istnienia kolimacji, inklinacji oraz poziomej i pionowej składowej niecentryczności linii celowej.

Na rysunku 4 przy zastosowaniu dotychczas używanych symboli

OC oznacza pionowo ustawioną oś instrumentu,

AB oznacza poziomą oś obrotu lunety,

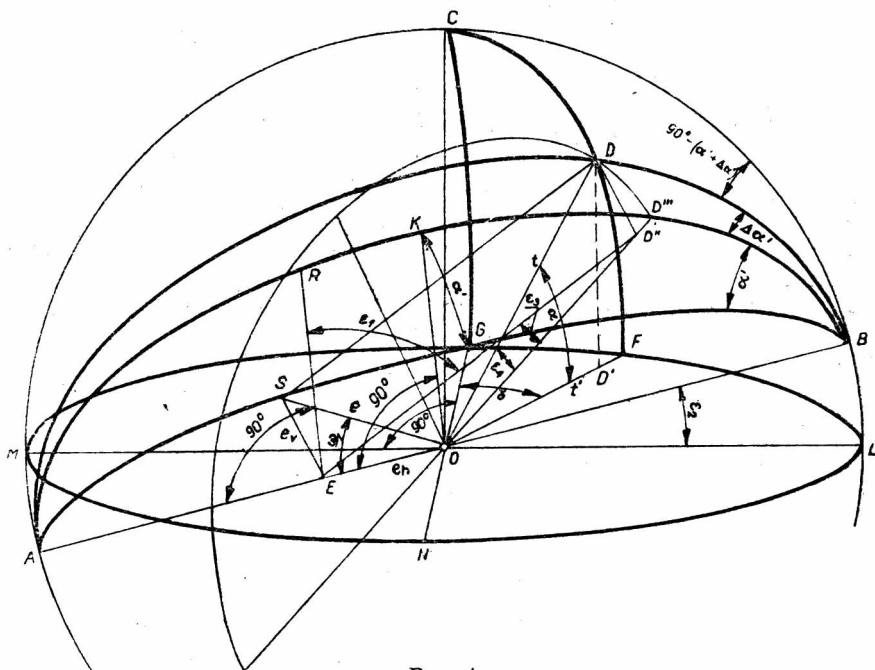
O oznacza środek instrumentu,

D oznacza cel ziemski, widoczny pod kątem α nad horyzontem, przy czym $OD=t$, zaś rzut poziomy odległości celu od instrumentu $OD'=t'=t \cdot \cos \alpha$,

SD oznacza linię celu,

ε_1 oznacza wartość kolimacji,

ε_2 oznacza wartość inklinacji.



Rys. 4

Odcinek $e=OS$ nazwiemy absolutną wartością niecentryczności linii celowej, którą zdefiniujemy następująco:

Absolutna wartość niecentryczności linii celowej e jest to odcinek łączący środek instrumentu O z punktem S , w którym przecina się linia celowa z normalną do niej, przechodzącą przez środek instrumentu O ; kąt zawarty pomiędzy osią obrotu lunety i elementem liniowym niecentryczności linii celowej oznaczamy przez ω .

Składowa pionowa niecentryczności linii celowej, to jest odległość punktu S od osi obrotu lunety, wynosi

$$ES=e_r=e \cdot \sin \omega. \quad (12)$$

Składowa pozioma niecentryczności linii celowej — równa odległości środka instrumentu O od punktu E , w którym prostopadła do linii celowej w punkcie S przecina się z osią obrotu lunety — wynosi

$$OE = e_h = e \cdot \cos \omega. \quad (13)$$

Ponadto wprowadzamy jeszcze następujące symbole:

CG oznacza ćwiartkę wertykału prostopadłego do płaszczyzny ABC ,

CDF oznacza ćwiartkę wertykału przechodzącego przez punkt D ,

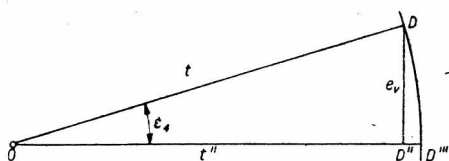
ADB oznacza półokrąg zatoczony dokoła punktu O promieniem równym t .

Płaszczyzna półokręgu $ARKB$, zatoczonego promieniem t , jest równoległa do linii celowej SD ; odcinek OK jest prostopadły do AB , zaś odcinek ER równoległy do OK .

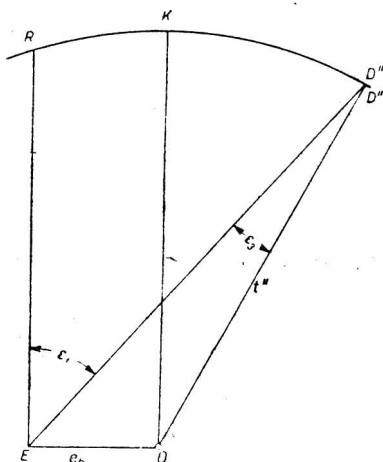
Punkt D'' jest rzutem prostokątnym (spodkiem) punktu D na płaszczyźnie $ARKB$, odcinek DD'' jest więc równy składowej pionowej niecentryczności osi celowej $ES = e_v$, przy czym oba odcinki są do siebie równoległe. Płaszczyzna ODD'' jest prostopadła do płaszczyzny $ARKB$, zaś łuk $ARKB$ przecina płaszczyznę ODD'' w punkcie D''' , wskutek czego $OD''' = t$.

$M\dot{N}LG$ oznacza koło horyzontalne o promieniu t i środku w punkcie O ,

MCL oznacza półokrąg zatoczony z punktu O promieniem t w płaszczyźnie przechodzącej przez oś instrumentu OC i oś obrotu lunety AB .



Rys. 5



Rys. 6

Z trójkąta prostokątnego $OD''D$, przedstawionego oddzielnie na rys. 5, otrzymujemy

$$\sin \varepsilon_4 = \frac{e_v}{t} \quad (14)$$

oraz

$$OD'' + t'' = t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e_v}{t}\right)^2}, \quad (15)$$

przy czym wartość pierwiastka należy brać zawsze ze znakiem dodatnim. Z trójkąta $D''EO$, przedstawionego oddzielnie na rys. 6, czytamy:

$$\sin \varepsilon_3 = e_h \frac{\sin(90^\circ - \varepsilon_1)}{t''}. \quad (16)$$

Z równań (15) i (16) otrzymujemy:

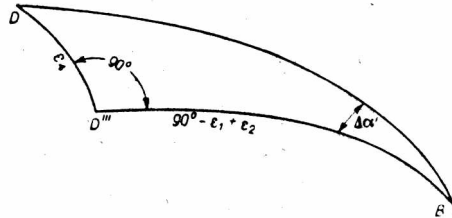
$$\varepsilon_3 = \arcsin \frac{e_h \cdot \cos \varepsilon_1}{t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e_v}{t}\right)^2}}. \quad (17)$$

Ponadto z prostokątnego trójkąta sferycznego BDD''' , przedstawionego oddzielnie na rys. 7, otrzymujemy:

$$\cos BD = \cos(90^\circ - \varepsilon_1 + \varepsilon_3) \cdot \cos \varepsilon_4 \quad (18)$$

oraz

$$\sin \Delta\alpha' = \frac{\sin \varepsilon_4}{\sin BD} = \frac{\sin \varepsilon_4}{\sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cdot \cos^2 \varepsilon_4}}. \quad (19)$$



Rys. 7

Uwzględniając teraz wzór (14) otrzymamy

$$\cos \varepsilon_4 = \sqrt{1 - \left(\frac{e_v}{t}\right)^2}, \quad (20)$$

gdzie znak przed pierwiastkiem jest również zawsze dodatni, gdyż $|\varepsilon_4| < 90^\circ$.

Z równań (17), (18) i (20) otrzymujemy

$$\cos BD = \sin \left(\varepsilon_1 - \arcsin \frac{e_h \cdot \cos \varepsilon_1}{t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e_v}{t}\right)^2}} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e_v}{t}\right)^2}. \quad (21)$$

Wreszcie z trójkąta sferycznego BCD , przedstawionego oddzielnie na rys. 8, wynika

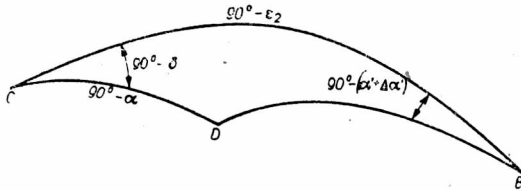
$$\cos BD = \sin a \cdot \sin \varepsilon_2 + \cos a \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \sin \delta \quad (22)$$

oraz

$$\sin a = \sin \varepsilon_2 \cdot \cos BD + \cos \varepsilon_2 \cdot \sin BD \cdot \sin (\alpha' + \Delta \alpha')$$

lub uwzględniając (18)

$$\begin{aligned} \sin a = & \sin \varepsilon_2 \cdot \sin (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cdot \cos \varepsilon_4 + \\ & + \cos \varepsilon_2 \cdot \sin (\alpha' + \Delta \alpha') \cdot \sqrt{1 - \sin^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cdot \cos^2 \varepsilon_4}. \end{aligned} \quad (23)$$



Rys. 8

Konfrontując równania (21) i (22) otrzymujemy

$$\sin \delta_1 = \frac{\sin \left(\varepsilon_1 - \arcsin \frac{e_h \cdot \cos \varepsilon_1}{\sqrt{t^2 - e_v^2}} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e_v}{t} \right)^2} - \sin a \cdot \sin \varepsilon_2}{\cos a \cdot \cos \varepsilon_2}$$

lub

$$\begin{aligned} \delta_1 = \arcsin \left[\frac{\sin \left(\varepsilon_1 - \arcsin \frac{e_h \cdot \cos \varepsilon_1}{\sqrt{t^2 - e_v^2}} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e_v}{t} \right)^2} - \sin a \cdot \sin \varepsilon_2}{\cos a \cdot \cos \varepsilon_2} \right] = \\ = f_v(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_h, e_v), \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie w miejsce $\sin a$ należy podstawić wartość (23), zaś w miejsce $\cos a$ wartość wynikającą z zależności $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$. Zamiast $\Delta \alpha'$ należy we wzorze (23) podstawić wartość ze wzoru (19).

Równanie (24) jest matematycznie ścisłym wyrażeniem na wartość błędu określenia kierunku, który wywołany został wpływem kolimacji, inklinacji oraz poziomej i pionowej składowej niecentryczności linii celowej.

Rozważając przypadek pomiaru w dwóch położeniach lunety przy jednoczesnym występowaniu wszystkich składników błędu układu osiowego teodolitu zauważymy, że po przechyleniu lunety przez zenit i ponownym nacelowaniu na punkt D w położeniu II wielkości $\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_h$ i e_v zmieniają znaki zachowując te same wartości bezwzględne. Należy więc we

wzorce (24) podstawić odpowiednio $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -e_h$ i $-e_r$, aby otrzymać wzór na błąd określenia kierunku w położeniu II, który ma postać

$$\begin{aligned} \delta_{II} &= f_r(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -e_h, -e_r) = \\ &= \text{arc sin} \left\{ \frac{\sin \left(-\varepsilon_1 - \text{arc sin} \frac{-e_h \cdot \cos(-\varepsilon_1)}{\sqrt{t^2 - (-e_r)^2}} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{-e_r}{t} \right)^2} - \sin \alpha \cdot \sin(-\varepsilon_2)}{\cos \alpha \cdot \cos(-\varepsilon_2)} \right\} = \\ &= -\text{arc sin} \left\{ \frac{\sin \left(\varepsilon_1 - \text{arc sin} \frac{e_h \cdot \cos \varepsilon_1}{\sqrt{t^2 - e_r^2}} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{e_r}{t} \right)^2} - \sin \alpha \cdot \sin \varepsilon_2}{\cos \alpha \cdot \cos \varepsilon_2} \right\} = \\ &= -f_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_h, e_r) = -\delta_I. \end{aligned} \quad (25)$$

Widzimy, że $\delta_{1,2,3,4} = f_r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_h, e_r)$ jest funkcją nieparzystą, czyli

$$\delta_I = -\delta_{II}. \quad (26)$$

Tym sposobem udowodniliśmy, że średnia z pomiarów w dwóch położeniach jest wolna od wpływu kolimacji, inklinacji oraz poziomej i pionowej składowej niecentryczności linii celowej, nawet w przypadku jednoczesnego występowania wymienionych błędów. Ponieważ przy wyprowadzeniu wzorów nie czyniliśmy żadnych założeń co do $\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_h$ i e_r , przeto słuszność udowodnionej tezy nie ogranicza się do przypadku, gdy wielkości te są małe, lecz rozciąga się w całej pełni na występowanie wymienionych błędów instrumentalnych jednocześnie i w dowolnej wartości.

Przeprowadzając dowód eliminacji wpływu błędów drogą pomiaru w dwóch położeniach lunety podstawialiśmy do wzoru (25) zamiast $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ wyrażenie (23) lub jego przekształcenie, w myśl znanej zależności $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Do takiego postępowania upoważniał nas fakt, że rzeczywista wysokość horyzontalna punktu D równa jest kątowi α w obu położeniach lunety, niezależnie od tego, że pomierzone wartości α_I i α_{II} są od siebie różne.

W odniesieniu do równań (10) i (26) możemy jeszcze zauważyć, że jeśli wykluczmy z rozważań pionową składową niecentryczności linii celowej, to oba położenia lunety przy nacelowaniu na punkt D są symetryczne względem wertykału przechodzącego przez środek instrumentu O i cel ziemski D . Tę tezę udowodnić można pogładowo, lecz oprócz tego posiada ona uzasadnienie matematyczne, zawarte w stwierdzeniu, że wyrażenie (6) jest funkcją nieparzystą zmiennych $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i e_h .

Sprawa przedstawia się odmiennie, gdy uwzględniamy istnienie pionowej składowej niecentryczności linii celowej. Wykazaliśmy wprawdzie, że wyrażenie (24) jest również funkcją nieparzystą błędów instrumentalnych, to jest zmiennych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_h$ oraz e_r , lecz wobec tego, że e_r występuje

w równaniu (24) wyłącznie w drugiej potędze, wartość δ jest niezależna od znaku e_r . Oba położenia lunety w chwili nacelowania na punkt D byłyby symetryczne względem wertykału OD tylko wówczas, gdyby znaki błędów instrumentalnych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, i e_h$ były dla obu położen przeciwne, zaś znak dla e_r nie ulegał zmianie. Ponieważ jednak przy niezmiennych wartościach i znakach dla $\varepsilon_1, \varepsilon_2, i e_h$ oraz przy zmiennej tylko co do znaku wartości e_r , wartość błędu określenia kierunku nie ulega zmianie, to oba położenia instrumentu, określone niecentrycznością $+e_r$ oraz $-e_r$, są symetryczne względem płaszczyzny wyznaczonej przez oś obrotu lunety AB i punkt D . Oba położenia instrumentu — wyłączając lunetę — są również w tym przypadku symetryczne względem wertykału OD . Widzimy więc, że średnia z dwóch położen lunety jest całkowicie wolna od wpływu błędów instrumentalnych także wtedy, gdy istnieje pionowa składowa niecentryczności linii celowej. Inna rzecz, że dowód drogą pogładową jest tu znacznie trudniejszy niż w przypadku poprzednim.

Zbadajmy dokładniej wyrażenie (24) w założeniu, że błędy instrumentalne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \frac{e_h}{t}$, oraz $\frac{e_r}{t}$ są wielkościami małymi I rzędu. Rozwijając wzór (24) aż do wyrazów drugiej potęgi włącznie, otrzymamy przy uwzględnieniu (17)

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{e_h}{t} \right) \cdot \varrho'' + \text{wyrazy III rzędu} \quad (28)$$

oraz ze wzoru (20)

$$\cos \varepsilon_1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e_r}{t} \right)^2 + \text{wyrazy III rzędu.} \quad (29)$$

Jednocześnie wynika ze wzorów (19), (28) i (29)

$$\Delta a' = \left(\frac{e_r}{t} \right) \varrho'' + \text{wyrazy III rzędu,} \quad (30)$$

ponadto jeszcze ze wzorów (23), (28), (29) i (30):

$$\sin a = \sin a' + \left(\frac{e_r}{t} \right) \cdot \cos a' + \text{wyrazy II rzędu,} \quad (31)$$

skąd otrzymujemy:

$$\cos a = \cos a' \left[1 - \left(\frac{e_r}{t} \right) \cdot \operatorname{tg} a' \right] + \text{wyrazy II rzędu.} \quad (32)$$

Podstawiając równania (28), (29), (31) i (32) do wzoru (24), otrzymamy

$$\delta = \frac{\varepsilon_1 - \left(\frac{e_h}{t} \right) \cdot \varrho'' - \varepsilon_2 \cdot \sin a' - \varepsilon_2 \cdot \left(\frac{e_r}{t} \right) \cdot \cos a'}{\cos a' \cdot \left[1 - \left(\frac{e_r}{t} \right) \cdot \operatorname{tg} a' \right]} + \text{wyrazy III rzędu}$$

i wreszcie

$$\delta = \frac{\varepsilon_1}{\cos a'} - \left(\frac{e_h}{t}\right) \cdot \frac{\varrho''}{\cos a'} - \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} a' + \varepsilon_1 \cdot \left(\frac{e_v}{t}\right) \cdot \frac{\operatorname{tg} a'}{\cos a'} -$$

$$- \left(\frac{e_h}{t}\right) \left(\frac{e_v}{t}\right) \cdot \varrho'' \cdot \frac{\operatorname{tg} a'}{\cos a'} - \varepsilon_2 \cdot \left(\frac{e_v}{t}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 a'} +$$

+ wyrazy III rzędu. (33)

Pierwsze trzy wyrazy równania (33) są to kolejne składniki błędu określenia kierunku δ_1 , δ_2 i δ_3 , powstałe wskutek istnienia kolimacji ε_1 , poziomej składowej niecentryczności linii celowej e_h i inklinacji osi obrotu lunety ε_2 . Suma czwartego, piątego i szóstego wyrazu stanowi wpływ pionowej składowej niecentryczności linii celowej e_v . Ze wzoru (33) wnosimy, że pionowa składowa niecentryczności linii celowej wywiera wpływ na pomiar tylko wówczas, gdy występuje nie sama, lecz jednocześnie co najmniej z jednym jeszcze składnikiem błędu układu osiowego.

Przez porównanie wzorów (11) i (23) możemy poza tym stwierdzić, że w przypadku istnienia pionowej składowej niecentryczności osi celowej wyrazy w drugiej potędze, występujące we wzorze na błąd określenia kierunku, nie znikają. Przypadek ten zachodzi natomiast wtedy, gdy istnieje jedynie składowa pozioma niecentryczności linii celowej. Liniowe wyrazy we wzorach (11) lub (33) charakteryzują wpływ błędu układu osiowego znacznie dokładniej wówczas, gdy pionowa składowa niecentryczności jest wielkością małą lub równą zeru.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na pozorną sprzeczność w dotychczasowych wywodach. Ponieważ w równaniu (33) znajdują się też wyrazy w drugiej potędze, można by dojść do wniosku, że pomiar w dwóch położeniach lunety nie eliminuje sumarycznego wpływu jednocześnie występujących czterech składowych błędów układu osiowego w przypadku, gdy występują jednocześnie. Wniosek ten jest sprzeczny z naszym stwierdzeniem uczynionym przy omówieniu wzoru (26). Wątpliwości nasze rozwiewają się jednak niezwłocznie, jeśli weźmiemy pod uwagę, że przy istnieniu pionowej składowej niecentryczności nie mierzymy rzeczywistej wartości kąta a (wysokości horyzontalnej punktu D), lecz kąty α_I i α_{II} , różne co do swej wartości dla każdego położenia lunety. Jeśli do wzoru (33) podstawimy odpowiednie wartości błędów instrumentalnych dla położenia II (tj. $-\varepsilon_1$, $-\varepsilon_2$, $-e_h$, $-e_v$) oraz wartość pomierzonego kąta α_{II} , to otrzymamy w wyniku tę samą wartość absolutną na błąd δ , lecz z przeciwnym znakiem, niż to wynika ze wzoru (33) przy podstawieniu odpowiednich wartości dla położenia I (tj. ε_1 , ε_2 , e_h , e_v i α_I).

Na podstawie wzoru (33) obliczyłem i zestawilem w poniższej tabelce liczbowe wartości wpływu składników błędu określenia kierunku (δ_1 , δ_2 , δ_3 i δ_4), spowodowanych istnieniem różnych wartości kolimacji ε_1 , inkli-

Tabela 1

	Dla: $\varepsilon_1 = 10'$	$\varepsilon_2 = -10'$	$\frac{e_h}{t} = -10^{-3}$	$\frac{e_v}{t} = 10^{-3}$
α'	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
0	10'	0'	3'26,26''	0,6''
45°	14' 8,53''	10'	4'51,70''	2,34''
80°	57'35,20''	56'42,77''	19'47,83''	46,29''
85°	1° 54'44,23''	1° 54'18,03''	39'26,62''	3'04,78''
89°	9° 32'59,22''	9° 32'53,98''	3° 18'58,71''	44'06,67''

Tabela 2

	Dla: $\varepsilon_1 = 1'$	$\varepsilon_2 = -1'$	$\frac{e_h}{t} = -2 \cdot 10^{-1}$	$\frac{e_v}{t} = 2 \cdot 10^{-1}$
α'	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
0	1'	0	41,25''	0,01''
45°	1'24,85''	1'	58,34''	0,05''
80°	5'45,52''	5'40,26''	3'57,56''	1,05''
85°	11'28,42''	11'25,80''	7'53,22''	4,24''
89°	57'17,92''	57'17,39''	39'33,74''	1'39,30''

Tabela 3

	Dla: $\varepsilon_1 = 20''$	$\varepsilon_2 = -20''$	$\frac{e_h}{t} = -10^{-1}$	$\frac{e_v}{t} = 10^{-1}$
α'	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
0	20,00''	0	20,63''	0,002''
45°	28,28''	20,00''	29,17''	0,01''
80°	1'55,17''	1'53,43''	1'58,78''	0,19''
85°	3'48,16''	3'48,60''	3'56,66''	0,79''
89°	19'05,90''	19'05,80''	19'41,88''	19,91''

nacji osi obrotu lunety ε_2 , poziomej składowej niecentryczności osi celowej e_h oraz pionowej niecentryczności e_v . Z tabel wynika, że wpływ pionowej składowej niecentryczności na określenie kierunku (δ_4) jest daleko mniejszy od wpływu pozostałych składników błędu układu osiowego. Trzeba jednak podkreślić, że przy krótkich celowych i znacznych wysokościach horyzontalnych celu ziemskiego wpływ tego błędu może znacznie przewyższyć błąd ogólny określenia kierunku, charakteryzujący dany instrument. Wpływ ten może osiągnąć duże wartości zwłaszcza wówczas, gdy pionowa składowa niecentryczności osiąga znaczne wartości, co

zachodzi na przykład przy tachimetrach redukcyjnych Hammera (dawniejszego typu), dla których $e_r = 40$ mm [7]. Dla tych instrumentów wpływ pionowej składowej niecentryczności ma tym większe znaczenie, że pomiar może być dokonywany tylko w jednym położeniu lunety.

Należy wspomnieć, że pionowa składowa niecentryczności osiąga duże wartości również w nowoczesnym tachimetrze redukcyjnym typu „Zeiss RDH“, gdzie $e_r = 23$ mm.

Rozważania przeprowadzone w referacie można zreasumować w następujących kilku punktach:

1. Przy pomiarze kątów poziomych występuje obok znanych i wszechstronnie przeanalizowanych błędów instrumentalnych jeszcze jedno źródło błędu systematycznego: pionowa składowa niecentryczności osi celowej. Jej wpływ na określenie kierunku uwydatnia się jednak tylko wówczas, gdy występuje jednocześnie z innym błędem instrumentalnym. Przy użyciu nowoczesnych instrumentów wpływ pionowej składowej niecentryczności jest na ogół znikomy, wyłączając przypadki o krótkich celowych i znacznym kącie pochylenia (dużej wysokości horyzontalnej celu ziemskiego).

2. Za pomocą podanych w referacie wzorów można obliczyć ścisłą wartość sumarycznego wpływu błędów instrumentalnych na określenie kierunku. Ponadto można również obliczyć wpływ poszczególnych błędów, to jest wpływ kolimacji, inklinacji poziomej osi obrotu lunety oraz poziomej i pionowej składowej niecentryczności linii celowej.

3. Znany od dawna wzór, ujmujący wpływ błędów instrumentalnych w formie zależności liniowej, jest słuszny tylko wówczas (do wyrazów w drugiej potędze włącznie), gdy instrument jest wolny od składowej pionowej niecentryczności linii celowej. Natomiast przy istnieniu tego składnika błędu układu osiowego wspomniana liniowa zależność jest nieściśła, gdyż nie uwzględnia różnych od zera wyrazów w drugiej potędze.

4. Stwierdzamy, że przez utworzenie średniej arytmetycznej z pomiarów w dwóch położeniach lunety wpływ błędów instrumentalnych na wyznaczenie kierunku zostaje całkowicie wyeliminowany, a w szczególności wpływ kolimacji, inklinacji osi poziomej obrotu lunety oraz dwóch składowych (poziomej i pionowej) niecentryczności linii celowej. Twierdzenie to jest słuszne dla dowolnie dużych wartości wymienionych błędów instrumentalnych.

LITERATURA

[1] Oltay Károly, Geodézia, 1951, str. 238—239.

[2] Dr inż. Fialovszky, Über die geodätischen Instrumente, 1952, str. 77—78.

[3] Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, tom II/1, wyd. IX, str. 78.

- [4] Jordan - Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, tom II/1, wyd. IX, str. 358.
[5] Ehrenfeucht, Zur Theorie der Theodoliten, „Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen“, rocznik 1908.
[6] Dr inż. Fialovszky, Über die geodätischen Instrumente, 1952, str. 95—97.
[7] Olta y: Geodézia, 1951, str. 343—344.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор разбирает вопрос совместного влияния четырех инструментальных погрешностей теодолита на определение направления. Автор выводит формулу суммарного влияния коллимации, инклинации горизонтальной оси поворота трубы и 2-х составляющих (горизонтальной и вертикальной) нецентричности визирной линии. Кроме того, автор разбирает вопрос исключения этого влияния путем измерения при двух положениях трубы.

В заключение автор констатирует следующее:

1. При измерении горизонтальных углов кроме известных и всесторонне проанализированных инструментальных погрешностей имеет место еще один источник систематических ошибок: вертикальная составляющая нецентричности визирной оси. Ее влияние на определение направления проявляется, однако, только в том случае, когда выступает одновременно с другой инструментальной ошибкой. В современных инструментах влияние вертикальной составляющей не центричности в общем ничтожно, исключая случай коротких линий и значительного угла наклона (большой горизонтальной высоты земного предмета).

2. При помощи выведенных формул можно вычислить точное значение суммарного влияния инструментальных ошибок на определение направления. Кроме того можно так же вычислить влияние отдельных ошибок, т. е. коллимации, инклинации оси поворота трубы и горизонтальной и вертикальной составляющих нецентричности визирной линии.

3. Давно известная формула, выражающая влияние инструментальных погрешностей в виде линейной зависимости, правильна только тогда (до членов во второй степени), когда инструмент свободен от вертикальной составляющей нецентричности визирной линии. В случае, когда эта погрешность имеет место, указанная линейная зависимость неточна, так как она не учитывает членов во второй степени, отличных от нуля.

4. При измерении угла при двух положениях круга, в средней арифметической из двух измерений влияние инструментальных погрешностей на определение направления исключается целиком, и в частности влияние коллимации, инклинации, горизонтальной оси трубы и двух составляющих (горизонтальной и вертикальной) нецентричности визирной линии. Положение это верно для любых значений перечисленных инструментальных ошибок.

RÉSUMÉ

L'auteur envisage dans cet ouvrage le problème de l'influence commune des 4 erreurs instrumentales de théodolite sur la fixation de direction. Établissant la formule de l'influence sommaire de collimation, de l'inclinaison d'axe horizontal de rotation de lunette, ainsi que de 2 composantes (horizontale et verticale) d'excentricité de l'axe de direction, il analyse aussi le problème d'élimination de cette influence par la méthode de mesurage en deux positions de lunette.

En conclusion l'auteur constate ce qui suit:

1. Pendant le mesurage des angles horizontaux à côté des erreurs bien connues et sous tous les aspects analysées intervient encore une autre source d'erreur systématique, à savoir: une composante verticale d'excentricité de l'axe de direction. Cependant son influence sur détermination de direction ressort seulement et uniquement quand elle parait en commun avec une autre erreur instrumentale. Néanmoins, en appliquant les instruments modernes, l'influence de composante horizontale d'excentricité est en général minime, à l'exception des cas des courtes visées et d'un angle d'inclinaison assez important (la grande hauteur horizontale de but terrestre).

2. À l'aide des formules établies on peut calculer la valeur exacte de l'influence sommaire des erreurs instrumentales sur détermination de la direction. Outre cela on peut calculer aussi l'influence des erreurs respectives, c'est à dire de collimation, d'inclinaison de l'axe horizontal de rotation de lunette et de composante horizontale et verticale d'excentricité de ligne de direction.

3. La formule bien connue depuis longtemps, qui saisit l'influence des erreurs instrumentales sous forme de dépendance linéaire est juste uniquement (à partir de termes élevés à la deuxième puissance incluse), quand l'instrument est libre de composante verticale d'excentricité de ligne de direction. Cependant à l'existence de cet élément d'erreur du système axial, l'influence linéaire susmentionnée n'est pas exacte, car elle ne prend pas en considération des différents éléments à partir de zéro élevés à la deuxième puissance.

4. Par la formation de la moyenne arithmétique de mesurage en deux positions de lunette, l'influence des erreurs instrumentales sur détermination de la direction devient tout à fait éliminée, et spécialement l'influence de collimation, d'inclinaison de l'axe horizontal de rotation de lunette, ainsi que de deux composantes (verticale et horizontale) d'excentricité de ligne de visée.

Cette affirmation est juste pour les valeurs quelconques des erreurs instrumentales citées.

Wiesław Opalski

O metodach bezpośrednich wyznaczania azymutu

1. Przez bezpośrednie wyznaczanie azymutu rozumiemy astronomiczne wyznaczenie osi celowej instrumentu połączone z nawiązaniem kierunku celu ziemskiego, do kierunku ciała niebieskiego za pomocą mikrometru okularowego, bez obrotów narzędzia i odczytywań koła poziomego. Do obserwacji azymutalnych bezpośrednich nadaje się więc najlepiej narzędzie przejściowe, chociaż i instrument uniwersalny może być z powodzeniem stosowany.

Koncepcja wyeliminowania z obserwacji odczytywania limbusu jest sama przez się uwagi godnym momentem w zagadnieniu dokładności. Do stosowania metod bezpośrednich zachęca nadto inna okoliczność, która występuje przy ich użyciu. Z reguły pomiar zwielokrotnia się tu przez obserwacje przejść nie jednej, lecz całego szeregu gwiazd przez wspólny wertykał. Wiadomo zaś, że już obserwacja przejść dwóch gwiazd przez ten sam wertykał pozwala obejść się przy redukcji bez znajomości dokładnej wartości jednej ze współrzędnych geograficznych, traktując ją w rachunku jako drugą niewiadomą obok azymutu. Daje to niewątpliwą korzyść z uwagi na zmniejszony nakład pracy dzięki temu, że odpada potrzeba osobnego wyznaczenia jednej ze współrzędnych. Nadto unika się obciążenia azymytu błędem wyznaczenia tej właśnie współrzędnej.

Przy tej sposobności może warto przypomnieć, w jaki sposób błędy wyznaczenia długości geograficznej wpływają na azymuty wyznaczone metodą przejść gwiazdy Polaris; azymuty geodezyjne, obliczone z równania Laplace'a, mają w rezultacie wagi zależne od szerokości geograficznej. Ich błędy średnie wzrastają, *caeteris paribus*, proporcjonalnie do φ .

Oznaczając azymuty oraz długości geodezyjne i astronomiczne odpowiednio przez A i a , L i λ , mamy z równania Laplace'a:

$$A = a - (\lambda - L) \sin \varphi,$$

skąd wzór na błąd średni:

$$m_A^2 = m_a^2 + m_\lambda^2 \cdot \sin^2 \varphi.$$

Wpływ błędów szerokości i długości geograficznych oraz pozycji gwiazdy na azymut astronomiczny wyraża się wzorem różniczkowym:

$$\Delta a = - \frac{\sin a \cdot \cos z}{\sin z} \Delta \varphi + \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} (\Delta T + \Delta u) + \frac{-\cos q \cdot \cos \delta \Delta a + \sin q \Delta \delta}{\sin z}$$

Ponieważ we wzorze tym występuje $\sin z \cong \cos \varphi$ (dla Polaris) w mianownikach wszystkich współczynników przy różniczkach, można napisać ogólnie:

$$m_a = m_0 \cdot \sec \varphi,$$

gdzie przez m_0 będziemy rozumieli teoretyczną wartość „równikową“, odpowiadającą analogicznym warunkom obserwacji na szerokość $\varphi \cong 0$.

Podobnie, oznaczając przez m_η „równikową“ wartość błędu wyznaczenia długości, mamy:

$$m_\lambda = m_\eta \cdot \sec \varphi.$$

Wobec tego

$$m_A^2 = m_0^2 \cdot \sec^2 \varphi + m_\eta^2 \cdot \sec^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi = m_0^2 + m_0^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + m_\eta^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$m_A^2 = m_0^2 + (m_0^2 + m_\eta^2) \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Wynika stąd, że azymuty geodezyjne otrzymane z obserwacji przejść Polaris i z równania Laplace'a, obarczone są błędem wyznaczenia λ , przy czym dokładność wyznaczenia azymutów geodezyjnych maleje ze wzrostem φ . Okoliczność ta stwarza problem tzw. wysokich szerokości, ponieważ przy astronomiczno-geodezyjnym wyrównaniu wielkich sieci geodezyjnych, obejmujących obszary wysokich szerokości, wagi azymutów w poszczególnych częściach sieci znacznie różnią się między sobą. Z tego powodu w ZSRR, gdzie problem wysokich szerokości nabiera dużego znaczenia, astronomowie, jak Marinbach [1], Bielajew [2], szukają dróg zaradzenia tym brakiem, sięgając do prób bezpośredniego wyznaczenia azymutu geodezyjnego z obserwacji astronomicznych, z pominięciem wyznaczania dokładnego azymutu astronomicznego z Polaris i dokładnych współrzędnych astronomicznych. Do tego celu nadaje się właśnie metoda bezpośrednia z przejść dwóch (lub więcej) gwiazd przez wertykał przedmiotu. Ideami astronomów radzieckich zajmiemy się w dalszej części artykułu, przedtem zaś omówimy krótko ważniejsze prace, które dotyczą metod bezpośrednich wyznaczania azymutów astronomicznych.

Warto jeszcze zauważyć, że świeżo opublikowana metoda Z. Czerskiego [3] wyznaczania azymutu astronomicznego z pomiaru kąta paralaktycznego odbywa się w zupełności bez znajomości długości geograficznej i co za tym idzie, dostarcza wartości azymutów nie obarczonych błędem

wyznaczenia długości. Szerokość zaś potrzebna tu jest z małą dokładnością i może być wyznaczona jednocześnie z tej samej obserwacji, jeżeli tylko zostały wykonane dodatkowo odczyty na kole pionowym.

2. Metoda bezpośrednia może być stosowana w dwu wariantach, które Niethammer [4] nazywa: 1) metodą A — łączne wyznaczanie azymutu i czasu przy znanej szerokości i 2) metodą B — łączne wyznaczanie azymutu i szerokości przy znanej poprawce zegara. Odpowiednie wzory różniczkowe mają postać następującą:

Dla metody A:

$$\Delta a = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi - \frac{\cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos q_1 \cos q_2}{\cos \varphi \cos a \sin (z_2 \mp z_1)} (\Delta T_2 - \Delta T_1)$$

$$\Delta u = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos \varphi} \Delta \varphi + \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi \sin z_1 \sin z_2}{\cos a} \cdot (\Delta T_2 - \Delta T_1) - \frac{\sin z_2 \cos z_1 \Delta T_1 \mp \sin z_1 \cos z_2 \Delta T_2}{\sin (z_2 \mp z_1)} \right]$$

Dla metody B:

$$\Delta u = \sin \varphi \Delta u + \frac{\cos \delta_2 \cos q_2 \cos z_1 \Delta T_2 \mp \cos \delta_1 \cos q_1 \cos z_2 \cdot \Delta T_1}{\sin (z_2 \mp z_1)}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} a} \Delta u - \frac{\cos \delta_2 \cos q_2 \sin z_1 \cdot \Delta T_2 - \cos \delta_1 \cos q_1 \sin z_2 \cdot \Delta T_1}{\sin a \cdot \sin (z_2 \mp z_1)}$$

Widać stąd, że metoda A jest korzystna do stosowania w wertykałach niezbyt odległych od południka; dopuszczalna odległość od południka zależy głównie od dokładności, z jaką znana jest szerokość geograficzna miejsca obserwacji. Ma ona i tę zaletę, że wpływy na azymut ewentualnych stałych systematycznych błędów rejestracji czasu (np. błąd osobowy) eliminują się, co wynika z budowy drugiego wyrazu we wzorze na Δa .

Metoda B ma natomiast tę zaletę, że dokładność wyznaczenia azymutu nie zależy tu od wartości samego azymutu i wobec tego dla stosowania tej metody nie ma ograniczeń w azymucie.

Pierwszą z tych metod stosował w praktyce już Stechert [5] przed rokiem 1913, przystosowując wzory rachunkowe do obserwacji gwiazd parami. Prace Stecherta nie przystosowały metody do wyznaczeń o wysokiej dokładności.

Na możliwości te zwrócił uwagę Kępiński [6], przewidując nadanie jej charakteru precyzyjnego przez zastosowanie narzędzia przejściowego i nowoczesnych sposobów rejestracji czasu.

W r. 1938 wykonane zostały pomiary azymutów metodą bezpośrednią w Rumunii przez Stamatina [7], przy czym poprawki chronometru wyznaczano niezależnie z sygnałów radiowych. Obserwator ten może się po-

szczyć wysoką dokładnością wyniku: $\pm 0,35''$ jako błąd średni azymutu z obserwacji 4 gwiazd.

W zimie 1939 r. rozpocząłem obserwacje metodą A na narzędziu przejściowym Askania AP 50, ustawionym na słupie centralnym Obserwatorium Zakładu Astronomii Praktycznej Politechniki Warszawskiej i zaopatrzonym w mikrometr bezosobowy i chronograf. Obserwacje te, jak również i teoria metody przedstawione są szczegółowo w osobnej publikacji [8]. Tu poprzestaniemy na poruszeniu paru momentów, oświetlających omawiane zagadnienie oraz na uwagach nowych, nie zawartych w oryginale publikacji.

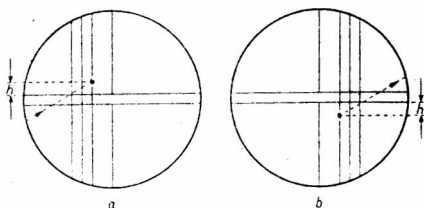
W ciągu 12 wieczorów obserwowałem średnio po 4 pary gwiazd; każda z par zawierała gwiazdę północną i południową, przy czym suma odległości zenitalnych obu gwiazd pary była możliwie bliska 90° , co odpowiada optymalnemu warunkowi pomiaru. Redukcje obserwacji wykonane zostały sposobem par według układu wzorów Stecherta (logarytmicznych) [5] lub wzorów własnych, korzystniejszych przy rachunku maszynowym. Redukcja sposobem par nie jest konieczna; można by było zastosować np. wyrównanie metodą najmniejszych kwadratów. Sposób par ma tę zaletę, że lepiej zapewnia zasadniczy warunek metody bezpośredniej, tj. zachowanie identycznego wertykału obserwowanych gwiazd, gdyż postulat niezmienności azymutu instrumentu jest znacznie realniejszy dla jednej pary gwiazd (w ciągu ok. 30 minut) niż dla kilku lub kilkunastu gwiazd (2—3 godziny).

Średnie błędy wyznaczeń azymutu z 1 pary, obliczone z odchyłek od średniej ze wszystkich par danego wieczoru, oraz wartości azymutu średnie dla danego wieczoru — zestawione są w poniższej tabelce.

Data 1939	Liczba par	Błąd średni azymutu z 1 pary	Średni azymut ze wszystkich par	v
I 31 ^d	1	—	$-10^\circ 17' 42,9''$	$-0,2''$
II 23	5	$\pm 0,99''$	41,3	+1,3
II 25	5	$\pm 1,29$	41,9	+0,7
II 26	3	$\pm 0,10$	43,1	-0,5
III 4	5	$\pm 0,45$	43,7	-1,1
III 5	5	$\pm 0,96$	43,5	-0,9
IV 4	5	$\pm 0,70$	43,2	-0,6
IV 11	5	$\pm 0,91$	43,1	-0,5
IV 21	3	$\pm 1,36$	42,4	+0,2
IV 26	4	$\pm 1,00$	42,8	-0,1
IV 27	3	$\pm 1,30$	42,1	+0,5
VI 7	3	$\pm 0,75$	41,5	+1,1

Niejaką komplikacją bezpośrednich wyznaczeń jest ukośne w stosunku do nitki przesuwanie się obrazów gwiazd. Wskutek krzywizny równoleżnika gwiazdy i jego ukośnej pozycji symetrii nitki instrumentu nie odpowiada symetria momentów przejść gwiazdy. Z tego powodu w przypadkach gwiazd o znacznym nachyleniu równoleżnika ($q \gg 0$) i wysokiej deklinacji należy wprowadzać poprawki do zaobserwowanych momentów przejść. W praktyce poprawki te można pomijać w 50% obserwowanych gwiazd, jak przedstawiłem to przy dyskusji i zastosowaniu wypracowanego przeze mnie wzoru, który ma pewne zalety w porównaniu ze stosowanym powszechnie wzorem o innej postaci, jak np. u Niethammera [4].

Zwróćmy tu uwagę na jeszcze jeden szczegół obserwacyjny, który daje powody do zastrzeżeń krytycznych w stosunku do metody bezpośredniej, a mianowicie na błędy powodowane skruceniem siatki nitki pionowych (lub nitki ruchomej mikrometru bezosobowego). Jak wiadomo, wpływ błędu skrucenia nitki eliminuje się wówczas, kiedy droga gwiazdy w polu widzenia jest symetryczna względem środka nitki. Kępiński [6] zaleca stosowanie siatek z urządzeniem Dołgowa, które pozwala przez nastawienie pary nitki prowadzących na właściwą wartość kąta q , zapewnić z góry przejście gwiazd przez środek krzyża. Gdy jednak stosuje się sposób obserwowania każdej gwiazdy w obu położeniach koła, z przekładaniem lunety w łożyskach w środku obserwacji, wówczas symetrię przejść gwiazd w stosunku do środka kolimacyjnego obserwator może uzyskać bez specjalnego dodatkowego urządzenia w sposób następujący. Powinien zapamiętać, w jakiej odległości h (rys. 1a) od nitki poziomej znajdowała się gwiazda w chwili zaprzestania ruchu nitki ruchomej; następnie zaś po przełożeniu lunety w łożyskach musi ruchem lunety w wysokości osiągnąć to, aby wejście gwiazdy na nitkę ruchomą nastąpiło w zapamiętanej odległości h od nitki poziomej (rys. 1b). Przy zachowaniu tej ostrożności błąd skrucenia nitki przestaje być groźny.



Rys. 1

W ostatnio poruszonym zagadnieniu skrucenia nitki widzimy jeszcze jeden względ przemawiający za przewagą narzędzia przejściowego nad uniwersalnym w odniesieniu do obserwacji bezpośrednich. Przekładanie bowiem lunety w łożyskach stanowi o eliminacji szeregu błędów instrumentalnych, jak kolimacja, paralaksa piór chronografu, błędy symetrii siatki nitki stałych, skrucenie nitki. Dochodzi do tego większa stabilność narzędzia przejściowego. Jednak przenośne narzędzia przejściowe, stoso-

wane do pomiarów azymutalnych, powinny być zaopatrzone w urządzenie do łatwego centrowania, czego nie spotyka się w rozpowszechnionych obecnie ich typach. Centrownik bardzo by też usprawnił przestawianie narzędzia przejściowego z jednego wertykału na inny, co ważne jest ze względu na kolejne wyznaczenia azymutów szeregu kierunków z danego punktu obserwacyjnego.

3. Przechodząc obecnie do zagadnienia azymutów geodezyjnych, omówię pewne nowe idee astronomów radzieckich, znajdujące swój wyraz w szeregu opublikowanych prac, przede wszystkim [1] i [2].

Pobudką do poszukiwania nowych dróg są słabe strony klasycznego sposobu astronomicznego wyznaczania azymutów geodezyjnych z obserwacji azymutu astronomicznego z przejść Polaris i z równania Laplace'a. Przy tej procedurze wyznaczanie kierunków między punktami geodezyjnymi wymaga dokładnych wyznaczeń współrzędnych astronomicznych, które — jeśli chodzi o samo wyrównanie astronomiczne sieci geodezyjnej — nie są tu celem, a tylko wielkościami pośredniczącymi. Nadto postępowanie to ma dwa istotne braki: 1) wszystkie błędy wyznaczeń λ wpływają na wartości azymutu; 2) dokładność wyznaczania azymutów pogarsza się ze wzrostem φ , szczególnie zdecydowanie dla wysokich szerokości.

Zasługą autorów radzieckich, przede wszystkim Marinbacha, jest spostrzeżenie, że do azymutu geodezyjnego można dojść poprzez przyjęte z dość grubym przybliżeniem wartości współrzędnych i azymutu, nie ubiegając się o ich dokładne wyznaczenie astronomiczne. Jedyną obserwacją astronomiczną, wiodącą do wyznaczenia azymutu, jest obserwacja przejść co najmniej dwóch gwiazd przez wertykał przedmiotu oraz odbiór radio-sygnarów czasu na chronometr roboczy.

Jest to przypadek szczególny metody Marinbacha; należy on do metod bezpośrednich. W ogólniejszej swej formie metoda Marinbacha przewiduje astronomiczne wyznaczanie azymutu geodezyjnego z pomiaru różnic azymutu między kierunkiem na przedmiot ziemski a kierunkami co najmniej trzech gwiazd, z których co najmniej jedną zaobserwować należy w wertykale różnym od dwu pozostałych. Ta ogólna postać metody należy do metod pośrednich, ponieważ nawiązanie kierunków gwiazd i przedmiotu wymaga pomiaru kątów za pomocą koła poziomego.

Dla wyjaśnienia swych koncepcji Marinbach wprowadza pojęcie obliczeniowych (szcislitielnych) współrzędnych geograficznych i obliczeniowego azymutu. Obliczeniowymi współrzędnymi jakiegoś punktu na Ziemi nazywamy parę wartości φ_0 i λ_0 obranych dowolnie z jednym tylko warunkiem, aby różnice między prawdziwymi (nieznanymi) a obliczeniowymi współrzędnymi: $\xi_0 = \varphi - \varphi_0$ i $\eta_0 = (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi_0$ były małe. Stosownie do tego będziemy mówili o zenicie obliczeniowym na sferze niebieskiej i o południku lub wertykale obliczeniowym, tj. przechodzącym przez zenit

obliczeniowy. Azymutem obliczeniowym a , będziemy nazywali kąt między południkiem obliczeniowym i wertykałem obliczeniowym.

Wyznaczenie azymutu geodezyjnego metodą Marinbacha polega na wyznaczeniu z obserwacji astronomicznej azymutu obliczeniowego, a następnie na przeliczeniu go z zenitu obliczeniowego na zenit geodezyjny według równania Laplace'a, gdzie oczywiście współrzędne astronomiczne φ i λ zastąpione są przez obliczeniowe φ_0 i λ_0 . Zaznaczając wskaźnikiem M wielkości odnoszące się do punktu ziemskiego M , napiszemy równanie o formie identycznej z równaniem Laplace'a.

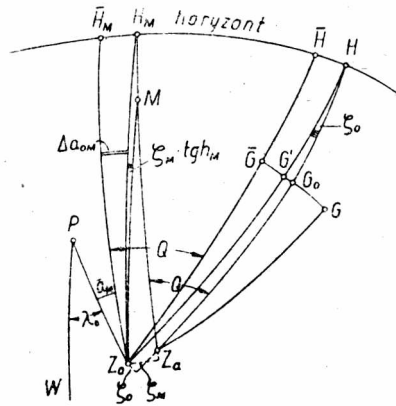
$$A_M = a_{0M} - (\lambda_0 - L) \sin \varphi_0 + \xi_{0M} \cdot \operatorname{tg} h_M \quad (1)$$

gdzie w ostatnim, z reguły bardzo małym wyrazie (gdyż zazwyczaj $h_M \cong 0$), ξ_{0M} ma, jak zwykle w geodezji, znaczenie:

$$\xi_{0M} = \eta_0 \cos a_{0M} - \xi_0 \sin a_{0M}.$$

Przewaga azymutów obliczeniowych nad astronomicznymi polega na tym, że zenit obliczeniowy jest punktem dowolnie obranym, a więc φ_0 i λ_0 są bezbłędne w przeciwieństwie do wyznaczanych z obserwacji φ i λ ; inaczej mówiąc, azymut obliczeniowy jest wolny od błędów współrzędnych φ_0 i λ_0 . Dzięki temu dokładność wyznaczeń azymutu obliczeniowego jest niezależna od szerokości miejsca obserwacji.

Rozpatrzmy teraz krótko interesujący teoretycznie ogólny przypadek metody Marinbacha, gdy przedmiot ziemski (M) i obserwowane gwiazdy znajdują się w różnych wertykałach. Wówczas potrzebne jest nawiązanie przez pomiar kąta, który oznaczamy przez Q . Na rys. 2 P przedstawia biegun; Z_a i Z_0 — zenit astronomiczny i obliczeniowy, M — przedmiot ziemski; G — położenie gwiazdy w momencie obserwacji, na odległości zenitalnej z ; obserwacji tej niechaj odpowiada astronomiczny wertykał instrumentalny $Z_a H$ (centralna nitka, punkt zerowy mikrometru), wspólny dla wszystkich nastawień nitki ruchomej; zalecany przez Marinbacha sposób obserwacji przejść polega na kilku kolejnych ustawieniach nitki ruchomej z odczytaniem mikrometru.



Rys. 2

W celu wyprowadzenia równania roboczego (równania błędów) zauważamy najprzód z rys. 2, że

$$a_{0M} = \bar{a}_M + \Delta a_{0M} + \zeta_{0M} \cdot \operatorname{tg} h_M,$$

gdzie:

- a_{0M} — oznacza poszukiwany azymut obliczeniowy przedmiotu;
 \bar{a}_M — znaną przybliżoną wartość tegoż azymutu;
 Δa_{0M} — poprawkę, której dostarczyć musi obserwacja astronomiczna.

Wyobraźmy sobie wertykał obliczeniowy $Z_0\bar{H}$ przechodzący przez taki punkt fikcyjny \bar{H} horyzontu, że $\bar{H}_M\bar{H} = Q = H_M\bar{H}$. Wobec tego $\bar{H}\bar{H} = \bar{H}_M\bar{H}_M = \Delta a_{0M}$. Spuśćmy jeszcze z G łuk prostopadły do $Z_0\bar{H}$ oznaczając odpowiednie punkty przecięcia przez G_0, G', \bar{G} . Z trójkątów $Z_0\bar{G}G'$ i $H\bar{G}'G_0$ wynikają równości:

$$\begin{aligned} \bar{G}G' &= \Delta a_{0M} \cdot \sin z \\ \frac{G'G_0}{\bar{G}G_0} &= \frac{\zeta_0 \cdot \cos z}{\Delta a_{0M} \cdot \sin z + \zeta_0 \cdot \cos z} \end{aligned}$$

Oznaczając $\bar{G}G = f_0$ i $G_0G = f$, napiszemy ostatecznie równanie robocze:

$$\Delta a_{0M} \cdot \sin z + \zeta_0 \cdot \cos z - (f_0 - f) = 0. \quad (2)$$

W tej formie jest to równanie o dwóch niewiadomych Δa_{0M} i ζ_0 , które można wyznaczyć z obserwacji co najmniej dwóch gwiazd w tym samym wertykale. Wyraz wolny $f_0 - f$ jest wiadomy: f jest to odległość nitki od punktu zerowego mikrometru, a f_0 można obliczyć (drogą nieco skomplikowaną), rozpatrując odpowiednie trójkąty sferyczne. Położenie bowiem punktu G dane jest przez współrzędne gwiazdy α i δ oraz notowany czas gwiazdowy jej przejścia $T + u$, gdzie poprawka u względem południka PW pewnego wyjściowego punktu sieci musi być znana z odbioru sygnałów czasu; położenie zaś wertykału $Z_0\bar{H}$ dane jest przez współrzędne obliczeniowe φ_0, λ_0 oraz azymut $\bar{a}_M + Q$. W przypadku $Q = 0$ (metoda bezpośrednia) wzory do obliczenia f_0 upraszczają się znacznie. Marinbach kładzie nacisk na wprowadzanie poprawek na krzywiznę równoleżnika i aberrację dzienną do odczytów mikrometru, nie zaś do momentów obserwacji lub do azymutu, jak to czynią wszyscy inni cytowani przezeń autorowie przy traktowaniu metod azymutalnych. Postępowanie zalecane przez niego jest szczególnie celowe w przypadkach obserwacji w pobliżu zenitu lub elongacji, kiedy niedopuszczalne jest wprowadzanie poprawek bądź do azymutu, bądź do czasu. Wydaje się jednak, że poza tymi raczej wyjątkowymi przypadkami postępowanie takie nie przynosi korzyści i nie opłaca się ze względu na zbyt skomplikowany rachunek.

Jeżeli do równania (2) podstawić

$$\zeta_0 = \eta_0 \cdot \cos \bar{a} - \xi_0 \cdot \sin \bar{a},$$

gdzie \bar{a} jest przybliżoną wartością azymutu gwiazdy ($a = a_M + Q$), wówczas otrzymamy formę równania błędów o trzech niewiadomych: Δa_{0M} , ξ_0 , η_0 :

$$\Delta a_{0M} \cdot \sin z + \eta_0 \cos a \cdot \cos z - \xi_0 \sin \bar{a} \cdot \cos z - (f - f_0) = 0. \quad (3)$$

Trzy (lub więcej) gwiazdy zaobserwowane w co najmniej dwóch różnych wertykałach pozwalają wyznaczyć te trzy niewiadome.

Równanie (3) rozwiązuje problem łącznego wyznaczenia współrzędnych geograficznych $\varphi = \varphi_0 + \xi_0$; $\lambda = \lambda_0 + \eta_0$ oraz azymutu obliczeniowego $a_{0M} = \bar{a}_M + \Delta a_{0M}$, z którego następnie otrzymuje się azymut geodezyjny:

$$A_M = a_{0M} - (\lambda_0 - L) \sin \varphi_0.$$

Autor metody zwraca uwagę, że łączne wyznaczanie trzech niewiadomych, streszczające się w równaniu (3), zawiera w sobie uogólnienie wszystkich azymutalnych metod wyznaczeń astronomicznych: np. wyznaczenie czasu lub szerokości narzędziem przejściowym w południku lub I wertykałe odpowiada przypadkowi szczególnemu: $Q=0$ i $\bar{a}_M=0, 180^\circ$ lub $Q=0$ i $|a_M|=90^\circ$; azymut z Polaris (przy znanym ξ i η) jest przypadkiem szczególnym, gdy zamiast n gwiazd obserwuje się n razy Biegunową.

Przejdziemy teraz do szczególnie ważnego praktycznie przypadku metody Marinbacha. Dotyczy on wyznaczania azymutu geodezyjnego na podstawie obserwacji momentów przejść gwiazd przez wertykał przedmiotu ($Q=0$; metoda bezpośrednia) wraz z odbiorem radiowych sygnałów czasu. Przypadek ten przedstawię w ujęciu artykułu Bielajewa [2], dochodząc od równania Laplace'a poprzez przekształcenia analityczne do równań (1) i (2), przy czym w ujęciu tym wyraz wolny równania (2) oblicza się w sposób prostszy. Warto wspomnieć na marginesie, że dla przypadku gwiazd okołobiegunowych w pobliżu elongacji Bielajew wprowadza w oryginalny sposób poprawkę na krzywiznę równoleżnika i nachylenie osi poziomej oraz mikrometryczną różnicę azymutów przedmiotu i gwiazdy do deklinacji obserwowanej gwiazdy. W przypadku zaś gwiazd okołozenitalnych trzeba stosować obliczenie wyrazu wolnego według Marinbacha.

Wyjdziemy z równania Laplace'a:

$$A = a - (\lambda - L) \sin \varphi + [(\lambda - L) \cos \varphi \cos a - (\varphi - B) \sin a] \cotg z_M, \quad (4)$$

w którym astronomiczne współrzędne λ , φ i azymut a są nieznanne; wprowadzimy przybliżoną wartość a_0 i przybliżone φ_0 , λ_0 (współrzędne obliczeniowe). Praktycznie wystarczy znajomość φ , λ i a w grubym przybliżeniu do $\pm 5'$. Oznaczając odpowiednio przez u i u_0 poprawkę względem południka astronomicznego i obliczeniowego, mamy, licząc λ dodatnio na wschód: $u - u_0 = \lambda - \lambda_0$. Oznaczając przez t_0 kąt godzinny (względem południka obliczeniowego) jakiejś i -tej gwiazdy w momencie jej przej-

ścia, mamy: $t_{0i} = T_i + u_0 - a_i$. Azymuty obliczeniowe poszczególnych zaobserwowanych gwiazd oblicza się ze wzoru tangensowego:

$$\operatorname{tg} a_i = \frac{\operatorname{ctg} \delta_i \cdot \sec \varphi \cdot \sin t_{0i}}{1 - \operatorname{ctg} \delta_i \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos t_{0i}} \quad (5)$$

Oznaczając teraz symbolami różniczek różnice między bliskimi sobie wartościami odpowiednich wielkości, napiszemy:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + d\varphi & a &= a_0 + da \\ \lambda &= \lambda_0 + d\lambda & a &= a_i + da_i, \end{aligned}$$

przy czym $d\lambda = du = u - u_0$. Jest więc $da = (a_i - a_0) + da_i$.

Równanie (4) można teraz przepisać w formie:

$$\begin{aligned} A &= a_0 + da - (\lambda_0 + d\lambda - L) \sin \varphi + [(\lambda_0 + d\lambda - L) \cos \varphi \cos a - \\ &\quad - (\varphi_0 + d\varphi - B) \sin a] \operatorname{ctg} z_M \end{aligned}$$

albo, łącząc wyrazy zawierające różniczki:

$$\begin{aligned} A &= a_0 + (da - d\lambda \sin \varphi) + (d\lambda \cos \varphi \cos a - d\varphi \sin a) \operatorname{ctg} z_M - (\lambda_0 - L) \sin \varphi + \\ &\quad + [(\lambda_0 - L) \cos \varphi \cos a - (\varphi_0 - B) \sin a] \operatorname{ctg} z_M. \end{aligned}$$

Ostatnie dwa wyrazy są to znane wyrazy z równania Laplace'a, z tą tylko różnicą, że zamiast współrzędnych astronomicznych figurują w nich obliczeniowe. Prawą stronę będzie można obliczyć, jeżeli wiadome będą wartości wyrażeń w nawiasach w wyrazie drugim i trzecim. Oznaczmy je symbolami:

$$\begin{aligned} \Delta x &= da - d\lambda \sin \varphi = (a_i - a_0) + da_i - d\lambda \sin \varphi \\ -\Delta y &= d\lambda \cos \varphi \cos a - d\varphi \sin a. \end{aligned} \quad (6)$$

Są one odpowiednio identyczne z Δa_{0M} i ζ_0 w symbolice Marinbacha.

Po astronomicznym wyznaczeniu Δx i Δy azymut obliczeniowy przedmiotu wyliczy się ze wzoru

$$\bar{A} = a_0 + \Delta x + \Delta y \cdot \operatorname{ctg} z_M, \quad (7)$$

po czym otrzymuje się azymut geodezyjny:

$$A = \bar{A} - (\lambda_0 - L) \sin \varphi + \zeta_{0M} \operatorname{ctg} z_M. \quad (8)$$

Ostatnie wyrazy w obu tych wzorach są zazwyczaj do odrzucenia jako znikomo małe.

Przy wyprowadzaniu równań błędów do wyznaczania Δx , Δy okaże się, że „błędy“ ($-d\varphi$, $-d\lambda$) przyjętych do rachunku współrzędnych znoszą się wzajemnie. Wyrażmy w tym celu da_i przez $d\varphi$ i $d\lambda$ znanym wzorem różniczkowym, przy czym weźmiemy pod uwagę od razu dwie gwiazdy

($i=1; 2$), uwzględniając przy tym, że gwiazda druga obserwowana jest po przeciwnej stronie zenitu niż gwiazda pierwsza i punkt ziemski ($a_2 - 180^\circ = a_1 = a$):

$$\begin{aligned} da_1 \sin z_1 &= -\sin a \cdot \cos z_1 d\varphi + \cos \delta_1 \cos q_1 (dT_1 + d\lambda) - df_1^* \\ da_2 \sin z_2 &= \sin a \cdot \cos z_2 d\varphi + \cos \delta_2 \cos q_2 (dT_2 + d\lambda) - df_2^* \end{aligned} \quad (9)$$

(df_1^* i df_2^* oznaczają wyrazy pozycyjne).

Tworząc teraz wyrażenia $\Delta x \cdot \sin z_1 + \Delta y \cdot \cos z_1$ oraz $\Delta x \sin z_2 - \Delta y \cdot \cos z_2$ według (6) i stosując podstawienie (9), otrzymujemy po prostych przekształceniach trygonometrii sferycznej:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \sin z_1 + \Delta y \cdot \cos z_1 &= (a_1 - a_0) \sin z_1 + \cos \delta_1 \cos q_1 dT_1 - df_1^* \\ \Delta x \cdot \sin z_2 - \Delta y \cdot \cos z_2 &= (a_2 - a_0) \sin z_2 + \cos \delta_2 \cos q_2 dT_2 - df_2^* . \end{aligned}$$

W obu tych równościach ostatnie dwa wyrazy prawych stron symbolizują tylko wpływ błędów rejestracji czasu i błędów pozycji. Opuszczając je i oznaczając $(a_i - a_0) \sin z_i = F_i$, mamy proste wzory robocze:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \sin z_1 + \Delta y \cdot \cos z_1 &= F_1 \\ \Delta x \cdot \sin z_2 - \Delta y \cdot \cos z_2 &= F_2 \end{aligned} \quad (10)$$

albo

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \sin (z_1 + z_2) &= F_1 \cos z_2 + F_2 \cos z_1 \\ \Delta y \cdot \sin (z_1 + z_2) &= F_1 \sin z_2 - F_2 \sin z_1 . \end{aligned} \quad (11)$$

Postępowanie rachunkowe polega więc na: 1) wyliczeniu azymutów obliczeniowych gwiazd według (5); 2) rozwiązaniu równań (11) dla znalezienia Δx , Δy ; 3) rachunku azymutu obliczeniowego przedmiotu podług wzoru (7) i azymutu geodezyjnego podług (8).

Co się tyczy strony obserwacyjnej, to pomiar azymutu z przejść Polaris jest oczywiście prostszy pod względem obserwacji i jej przygotowania, ale komplikacja ta wynagradza się dzięki odpadnięciu wyznaczeń współrzędnych przy stosowaniu omawianej metody.

W końcu swego artykułu Bielajew przytacza przykłady obserwacji i rachunków. Jako wynik z obserwacji 5 par otrzymuje wielkości Δx i Δy z błędami średnimi: $m_x = \pm 0,22''$ i $m_y = \pm 0,32''$. Na podstawie dotychczas zebranego materiału obserwacyjnego autor wypowiada tezę, że przy użyciu mikrometru bezosobowego do rejestracji momentów przejść wystarczy zaobserwować 6—9 par gwiazd w ciągu 3 godzin na przenośnym narzędziu przejściowym, aby otrzymać azymut geodezyjny z dokładnością $\pm 0,30''$ do $\pm 0,40''$. Tymczasem z analizy wielkiej liczby wyznaczeń prostych i odwrotnych azymutów na punktach sieci triangulacyjnej ZSSR ustalono, że błąd azymutu geodezyjnego na średnich szerokościach ma wartość około $\pm 0,7''$.

Błąd średni azymutu geodezyjnego z wyznaczenia metodą bezpośrednią poprzez azymut obliczeniowy wyraża się po opuszczeniu wyrazu $m_y^2 \cotg^2 z_M$ wzorem:

$$m_A^2 = m_x^2 = \frac{m_Q^2}{p} + \frac{m^2 + m^{*2}}{p} \cdot G(z_1, z_2) + m_1^2 \sin \varphi, \quad (12)$$

w którym autor na podstawie praktyki obserwacyjnej ocenia poszczególne błędy w sposób następujący:

$m_Q = \pm 0,5''$ — błąd mikrometrycznego pomiaru kąta dla 1 pary

$m = \pm 0,75$ --- „ obserwacji przejścia gwiazdy

$m^* = \pm 0,15$ --- „ pozycji

$m_1 = \pm 0,15$ --- „ odbioru sygnałów czasu

$p = 9$ --- liczba par gwiazd

$\varphi = 60^\circ$

$$G = \frac{\cos^2 z_1 + \cos^2 z_2}{\sin^2(z_1 + z_2)} \quad (\text{Przy spełnieniu warunku } z_1 + z_2 = 90^\circ \text{ funkcja } G=1).$$

Przy dyskusji optymalnego doboru par gwiazd autor dochodzi do wniosku, że teoretycznie najkorzystniej jest obserwować obie gwiazdy w horyzoncie po przeciwnych stronach zenitu, wtedy bowiem błędy

$$m_x^2 = (m^2 + m^{*2}) \cdot G$$

$$m_y^2 = (m^2 + m^{*2}) \cdot E,$$

gdzie $E = \frac{\sin^2 z_1 + \sin^2 z_2}{\sin^2(z_1 + z_2)}$, wpływają najmniej na błąd azymutu obliczeniowego:

$$m_A^2 = m_x^2 + m_y^2 \cdot \cotg^2 z_M. \quad (13)$$

Wzór (13) jest ogólniejszy od cytowanego poprzednio (12), w którym zachowano tylko pierwszy wyraz.

Wniosek powyższy o najkorzystniejszych warunkach obserwacji opiera się na założeniu, że przy $z_1 = 90^\circ = z_2$ funkcje G i $E \cotg z_M$ przybierają swe wartości minimalne, równe $1/2$. W rzeczywistości jest jednak nieco inaczej. Funkcja G staje się nieoznaczona dla $z_1 = 90^\circ = z_2$ i w otoczeniu tego punktu może przyjmować dowolne wartości między $1/2$ i 1. Natomiast funkcja E jest nieciągła w punkcie $z_1 = 90^\circ = z_2$. Wprawdzie można okazać, że $E \cotg z_M$ dąży do $1/2$ przy specjalnym założeniu $z_1 = z_2 = z_M$ i $z \rightarrow 90^\circ$, ale założenie to jest sztuczne, nie posiada fizycznego uzasadnienia. Okoliczności te mają swój odpowiednik w równaniach roboczych (11), gdzie współczynniki przy Δx i Δy dążą do 0, gdy $z_1 + z_2$ dąży do 180° .

Ta uwaga krytyczna ma zresztą znaczenie raczej teoretyczne, bo ze względu na wpływy refrakcji bocznej i ekstynkcji obserwacje w hory-

zonce nie wchodzi praktycznie w rachubę, a i sam autor, oceniając dokładność metody, bierze pod uwagę przypadek $z_1 + z_2 = 90^\circ$.

Przy końcu artykułu znajdujemy zdanie, dające wyraz ostrożnemu i rzetelnemu stanowisku autora: „Objektywniejszy sąd o zaletach i brakach, a także i o możliwej dokładności wyznaczania azymutów geodezyjnych z obserwacji momentów przejść gwiazd przez wertykał azymutalnego punktu można wyrobić sobie dopiero po bardziej solidnym praktycznym wypróbowaniu metody w rozmaitych warunkach polowych i gdy otrzyma się dane porównawcze wyznaczeń ... metodą bezpośrednią i zwykłą metodą Polaris wraz z wyznaczeniem długości“.

Jakkolwiek słuszna jest ostrożność wyrażona w tej wypowiedzi, należy stwierdzić, że dotychczasowe wyniki są zachęcające i można przewidywać, że metoda rozwijana przez uczonych radzieckich ma przed sobą przyszłość. Znaczenie jej polega na tym, że zmierza ona do dużej oszczędności pracy obserwacyjnej: dokładność wyznaczania współrzędnych astronomicznych i rozmieszczenie tych wyznaczeń na punktach sieci geodezyjnej byłyby przy jej stosowaniu dyktowane nie zadaniem uzyskania azymutów dla wyrównania sieci, a tylko potrzebami badań figury Ziemi, tj. konieczną dokładnością wyznaczeń odchylenia pionu dla potrzeb astronomiczno-grawimetrycznej niwelacji.

Na tle zastosowań geodezyjnych i tych nowych koncepcji zagadnienia metod azymutalnych bezpośrednich i pokrewne im zagadnienia łącznych wyznaczeń nabierają nowego aspektu praktycznego i tym bardziej zasługują na badania.

LITERATURA

- [1] A. B. Marinbach, Ob astronomiczskom opriedielenij geodeziczeskogo azimuta, „Astronomiczeskij Żurnał“ 28, 4, 1951.
- [2] N. B. Bielajew, K woprosu astronomiczeskich opriedielenij geodeziczeskogo azimuta priamym mietodom, „Astronomiczeskij Żurnał“ 30, 2, 1953.
- [3] Z. Czerski, Nowa metoda astronomicznego wyznaczania azymutu i współrzędnych geograficznych, „Geodezja i Kartografia“, 1954, zes. 3.
- [4] Th. Niethammer, Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmungen, Basel 1947.
- [5] C. Stechert, Azimutbestimmung aus Durchgangsbeobachtungen, Hamburg 1913
- [6] F. Kępiński, Kilka metod astronomicznego wyznaczania azymutu, Publ. Zakładu Astron. Praktycznej nr 5, Warszawa 1931.
- [7] I. Stămatin, Azimut astr. direct (avec une application), Bucarest 1941/2.
- [8] W. Opalski, Finding the azimuth of a terrestrial object by the transits of stars over the object's vertical circle, Publ. Zakładu Astron. Praktycznej nr 28, Warszawa 1952.

РЕЗЮМЕ

Методы астрономического определения азимута без измерения углов при помощи горизонтального круга имеют большие достоинства когда речь идет о точных азимутах.

Наблюдая прохождение звезд через вертикал предмета мы не вводим ошибок, связанных с отсчетом круга и, кроме того, освобождаемся от необходимости точного определения одной из географических координат, нпр. долготы.

Это является особенно выгодным в больших широтах, где азимуты, определяемые по способу полярной, обременены ошибками определения долготы и где точность их уменьшается с географической широтой. С другой стороны, применение пассажного инструмента позволяет освободиться от ряда других ошибок инструментального происхождения.

В статье, после анализа дифференциальных формул, относящихся к методу полярной и непосредственным методом, автор переходит к краткому разбору некоторых работ, относящихся к непосредственным определениям астрономического азимута, и к примечаниям дополняющим ранее изданную работу автора. Далее, с некоторыми критическими примечаниями разбираются новые идеи советских астрономов касающиеся астрономического определения точных геодезических азимутов минуя точные определения географических координат, а опубликованные А. Б. Маринбахом и Н. А. Беляевым.

Особенно важным случаем метода Маринбаха является определение азимута непосредственным методом (в вертикале предмета).

Метод Маринбаха позволяет астрономически определять геодезические азимуты, свободные от тех обще известных недостатков, которые имеют место в классическом способе определения азимута по полярной. Кроме того исключается необходимость точного определения астрономических координат. Эти обстоятельства составляют большие достоинства метода ввиду экономии работы, при наблюдениях и одинаковых весов азимутов при астрономо-геодезическом уравнивании триангуляционных сетей. В опубликованных примерах получена большая точность результатов. В СССР ведутся работы и накапливаются материалы, по которым можно будет дать заключение о практической ценности метода.

RÉSUMÉ

Les méthodes astronomiques de détermination d'azimut sans mesurage des angles à l'aide du cercle horizontal ont des grands avantages quand il s'agit des azimuts de précision. Pendant l'observation de passage des étoiles par le vertical de l'objet, on n'introduit pas d'erreurs qui sont liées à la lecture du cercle et en plus de cela on se dispense de la nécessité de détermination exacte d'une des coordonnées géographiques, par exemple de longitude géographique. Cela doit être spécialement apprécié dans les hautes latitudes, où les azimuts déterminés par la méthode de l'étoile Polaire sont chargés des erreurs de détermination de longitude et sa précision diminue avec latitude géographique. De l'autre côté, par application d'instrument de passage on peut obtenir l'élimination de toute une rangée d'erreurs de la nature instrumentale.

Dans cet article, après la discussion des formules différentielles se rapportant à la méthode Polaris et aux méthodes directes, l'auteur arrive à un court débat des quelques travaux d'observation concernant la détermination directe d'azimut astro-

nomique et aux remarques complémentaires relatives à un autre travail à ce sujet qui fut édité auparavant par lui-même.

Ensuite l'auteur discute, avec quelques remarques critiques, les nouvelles conceptions des astronomes soviétiques qui ont été publiées par A. B. Marinbach et N. A. Bielajew, concernant une détermination astronomique des azimuts géodésiques de précision sans entremise des déterminations précises des coordonnées géographiques.

Le cas spécial très important de la méthode de M. B. Marinbach c'est la détermination d'azimut par la méthode directe (dans le vertical de l'objet).

La méthode de M. B. Marinbach permet à une détermination astronomique des azimuts géodésiques exempt des bien connus défauts, qui sont liés à la méthode classique de la détermination d'azimut de Polaris.

Le fait qu'on n'est pas obligé à une détermination exacte des coordonnées astronomiques est un autre avantage. Ces circonstances consistent sans doute des grands avantages en considération d'une économie de travaux d'observations et les mêmes poids des azimuts pendant une correction astronomo-géodésique de la chaîne de triangulation.

Les travaux rassemblant tout matériel d'observations pour éditer une opinion définitive de la valeur pratique de cette méthode sont en train d'élaboration en USRR.

On peut cependant déjà constater, d'après les exemples d'observations publiés, qu'une exactitude de résultat fut bien réussie.

Jan Panasiuk

Dopuszczalna dokładność współrzędnych przybliżonych w przypadku wyrównania obserwacji metodą spostrzeżeń pośrednich

Metoda spostrzeżeń pośrednich polega na ułożeniu dla każdej obserwacji (zmierzonej długości lub kąta) równania błędów typu:

w którym:
$$\varphi_{\text{obs}} + v = \varphi_0 + \Delta\varphi \quad (1)$$

φ_{obs} — wielkość zaobserwowana,

v — poprawka, jaką należy dodać do wielkości zaobserwowanej, by otrzymać najprawdopodobniejszą wielkość wyrównaną,

φ_0 — wielkość przybliżona φ_{obs} obliczona na podstawie przyjętych współrzędnych przybliżonych,

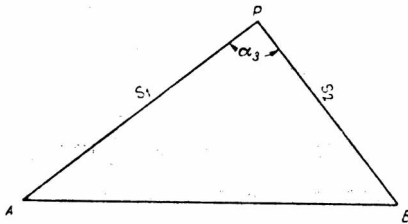
$\Delta\varphi$ — najprawdopodobniejszy przyrost wielkości przybliżonej.

Przyrost funkcji $\Delta\varphi$ figurujący w równaniu (1) może być zastąpiony przez różniczkę zupełną $d\varphi$ stanowiącą część główną przyrostu funkcji, jeżeli przyrosty zmiennych niezależnych są dostatecznie małe. Najczęściej warunek ten zachodzi w praktyce geodezyjnej, gdy współrzędne przybliżone, na podstawie których obliczamy wielkość przybliżoną φ_0 są dostatecznie dokładne. Jeżeli dokładność współrzędnych przybliżonych jest zbyt mała, może okazać się, że przyrost funkcji $\Delta\varphi$ nie da się zastąpić przez różniczkę zupełną $d\varphi$. W tym przypadku zastąpienie $\Delta\varphi$ różniczką zupełną $d\varphi$ nadmiernie zniekształci nam najprawdopodobniejsze poprawki v do obserwacji φ_{obs} i przyrosty współrzędnych przybliżonych.

Naszym celem obecnie jest wyznaczenie i zbadanie warunków, jakim muszą podlegać współrzędne przybliżone, aby $\Delta\varphi$ można było zastąpić różniczką zupełną $d\varphi$, bez wpływu na obniżenie dokładności wyznaczanych wielkości wyrównanych.

Ponieważ poruszony tu problem jest ściśle związany z istotą równania błędów, niezbędne jest przeanalizowanie całego procesu wyrównawczego tak pod względem analitycznym, jak i geometrycznym, posiłkując się przykładem.

Przypuśćmy, że w trójkącie o dwóch punktach stałych (rys. 1) zmierzono dwa boki S_1 , S_2 oraz kąt α_3 między nimi zawarty. Każda z tych trzech obserwacji dostarczy nam jednego miejsca geometrycznego (okręgu koła). Gdyby obserwacje nasze S_1 , S_2 , α_3 były bezbłędne, miejsca geometryczne przecięłyby się w jednym punkcie i wyrównanie obserwacji stałoby się zbyteczne. Ponieważ w praktyce



Rys. 1

obserwacje obarczone są pewnymi błędami, wyżej omawiane miejsca geometryczne nie przetną się w jednym punkcie, lecz utworzą w otoczeniu punktu P pewien krzywoliniowy trójkąt błędów.

Wyrównanie więc naszych obserwacji będzie polegało na znalezieniu takich poprawek v do obserwacji φ_{obs} , które zamienią nam krzywoliniowy trójkąt błędów na punkt, przy jednoczesnym spełnieniu warunku $[v v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ minimum.

Po tego rodzaju interpretacji geometrycznej postaramy się wyżej omawiane zagadnienie ująć w formie analitycznej.

Niechaj współrzędne zmiennego punktu P będą ξ , η ; wielkości obserwowane — $S_1 = \varphi_{1 obs}$, $S_2 = \varphi_{2 obs}$, $\alpha_3 = \varphi_{3 obs}$, oraz najprawdopodobniejsze poprawki obserwacyjne — v_1 , v_2 , v_3 .

Równania miejsc geometrycznych wyznaczających trójkąt błędów wyrażą się ogólnie układem:

$$\varphi_{1 obs} = \varphi_1(\xi, \eta)$$

$$\varphi_{2 obs} = \varphi_2(\xi, \eta) \quad (2)$$

$$\varphi_{3 obs} = \varphi_3(\xi, \eta)$$

Układ ten jest sprzeczny i nie może być spełniony przez żadną parę pierwiastków ξ , η (bowiem wszystkie trzy miejsca geometryczne, będące funkcją naszych obserwacji, na ogół nie przecinają się w jednym punkcie).

Wobec tego, celem wyznaczenia najprawdopodobniejszych niewiadomych $\xi = x'$, $\eta = y'$, będących funkcją położenia, wymiarów i kształtu trójkąta błędów, musimy do lewych stron układu równań (2) dodać w tej chwili bliżej nie określone poprawki v (co geometrycznie będzie oznaczało nadanie wyżej omawianym krzywymi pewnych swobod ruchu) i nałożyć na nie warunek $[v v] = \text{minimum}$.

Warunek ten uczyni, że ze wszystkich możliwych przesunięć miejsc geometrycznych wybrane zostaną te, które wyznaczają najprawdopodobniejsze położenie określonego punktu o współrzędnych x' , y' .

Wielkości przesunięć miejsc geometrycznych zamieniających trójkąt błędów na punkt i podporządkowanych warunkowi $[v v] = \text{minimum}$ noszą nazwę „najprawdopodobniejszych poprawek obserwacyjnych“.

A więc, najprawdopodobniejsze niewiadome x' , y' , i poprawki obserwacyjne v_1 , v_2 , v_3 , będą wyznaczone przez układ równań:

$$\begin{aligned}\varphi_{1 \text{ obs}} + v_1 &= \varphi_1(x', y') \\ \varphi_{2 \text{ obs}} + v_2 &= \varphi_2(x', y') \\ \varphi_{3 \text{ obs}} + v_3 &= \varphi_3(x', y') \\ [v] &= \text{minimum}\end{aligned}\tag{3}$$

Jeżeli funkcje $\varphi_1(x', y')$, $\varphi_2(x', y')$, $\varphi_3(x', y')$ są nieliniowe, układ równań (3) jest trudno rozwiązalny. Ponieważ w praktyce geodezyjnej przeważnie mamy do czynienia z funkcjami nieliniowymi, celem uproszczenia rozwiązania zagadnienia, spostrzegamy konieczność sprowadzenia ich do formy liniowej. Do tego są nam potrzebne współrzędne przybliżone określanego punktu $P_0(x'_0, y'_0)$.

Jeżeli znamy współrzędne przybliżone x'_0, y'_0 , możemy funkcje $\varphi_1(x', y')$, $\varphi_2(x', y')$, $\varphi_3(x', y')$ figurujące w układzie (3) rozwinąć na szereg Taylora¹,

$$\begin{aligned}\varphi_{1 \text{ obs}} + v_1 &= \varphi_1(x'_0, y'_0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x'^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x' \partial y'} xy + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y'^2} y^2 \right) + \dots \\ \varphi_{2 \text{ obs}} + v_2 &= \varphi_2(x'_0, y'_0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x'^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x' \partial y'} xy + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y'^2} y^2 \right) + \dots \\ \varphi_{3 \text{ obs}} + v_3 &= \varphi_3(x'_0, y'_0) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x'^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x' \partial y'} xy + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y'^2} y^2 \right) + \dots \\ [v] &= \text{minimum}\end{aligned}\tag{4}$$

gdzie przez x, y oznaczono przyrosty współrzędnych przybliżonych x'_0, y'_0 . Wszystkie zaś pochodne cząstkowe figurujące z prawej strony układu równań (4), są obliczone dla $x' = x'_0, y' = y'_0$.

Układ równań (4) jest identyczny z układem równań (3) i nosi nazwę uogólnionego układu równań błędów.

Jeżeli bowiem wielkości x, y są małe (współrzędne przybliżone x'_0, y'_0 bardzo dokładne), tak że ich kwadraty i iloczyny można zaniedbać w rozwinięciach szeregów Taylora, wyżej omawiane funkcje $\varphi_1(x', y')$, $\varphi_2(x', y')$, $\varphi_3(x', y')$ możemy aproksymować wielomianem pierwszego stopnia, ograniczając się do pierwszych pochodnych cząstkowych włącznie.

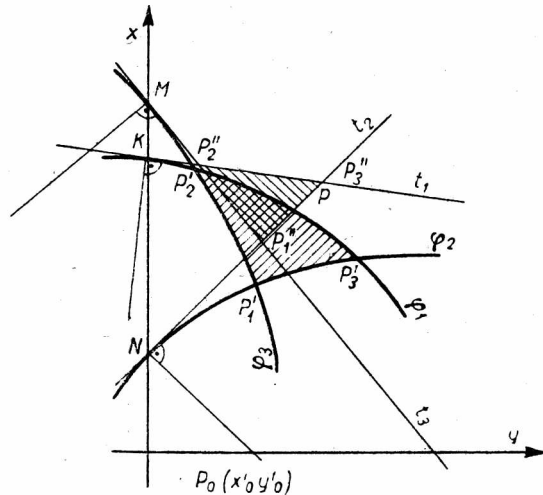
Po odrzuceniu w układzie równań (4) wyrazów drugiego i wyższych stopni względem przyrostów zmiennych niezależnych, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\varphi_{1 \text{ obs}} + v_1 &= \varphi_1(x'_0, y'_0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} y \\ \varphi_{2 \text{ obs}} + v_2 &= \varphi_2(x'_0, y'_0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'} y \\ \varphi_{3 \text{ obs}} + v_3 &= \varphi_3(x'_0, y'_0) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} x + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'} y\end{aligned}\tag{5}$$

$$[v] = \text{minimum}$$

¹ Szeregi w ten sposób uzyskane będą tym bardziej zbieżne, im przyrosty współrzędnych przybliżonych x, y będą bliższe zera. Zagadnienie sprowadzenia dowolnego

W układzie tym równania błędów są już liniowe i posiadają następującą interpretację geometryczną. W pobliżu krzywoliniowego trójkąta błędów obieramy sobie punkt o współrzędnych x'_0, y'_0 i przesuujemy doń początek układu współrzędnych (rys. 2).



Rys. 2

W punktach K, N, M , przecięcia się miejsc geometrycznych $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ z osią rzędną przesuniętego układu wystawiamy do krzywych proste styczne t_1, t_2, t_3 . W ten sposób uzyskane proste styczne będą nam aproksymowały w pobliżu szukanego punktu niewielkie odcinki miejsc geometrycznych będących bokami krzywoliniowego trójkąta błędów.

W rezultacie (jak widzimy z wyżej przeprowadzonego rozumowania) układ równań (5) zamienia nam na punkt nie krzywoliniowy trójkąt błędów P_1', P_2', P_3' , lecz prostoliniowy P_1'', P_2'', P_3'' uzyskany na drodze uproszczeń układu równań (4).

Gdybyśmy rozwiązali dwa układy równań — (3) i (5), tzn. gdybyśmy wyznaczyli dwa różne punkty, odpowiadające tym dwu rozpatrywanym trójkątom błędów, odległość między tymi punktami będzie nam charakteryzowała wielkość zaniechananej reszty szeregów Taylora. Jeżeli odległość ta przekroczy określone granice, wyrównanie nasze okaże się nieracjonalne.

Wyznaczenie więc warunków, jakim powinny podlegać współrzędne przybliżone, będzie polegało na obliczeniu zaniechananych reszt szeregów Taylora w równaniach błędów i zażądaniu, by reszty te nie przekroczyły dokładności wielkości zaobserwowanych.

układu równań nieliniowych do formy liniowej polega na znalezieniu tak wielkiej zbieżności szeregów rozwinięć naszych funkcji, by wyrazy drugiego i wyższych rzędów nie odgrywały praktycznego znaczenia.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{-S + (y_2 - y_1) \frac{(y_2 - y_1)}{S}}{S^2} = \frac{-S^2 + \Delta y^2}{S^3};$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial y_2} = \frac{(x_2 - x_1) 2(y_2 - y_1)}{2 \cdot S \cdot S^2} = \frac{\Delta x \Delta y}{S^3}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} = \frac{S - (x_2 - x_1) \frac{1}{S} (x_2 - x_1)}{S^2} = \frac{S^2 - \Delta x^2}{S^3};$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_2 \partial y_2} = \frac{-2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2 \cdot S^3} = \frac{-\Delta x \Delta y}{S^3}; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y_2^2} = \frac{S - (y_2 - y_1) \frac{1}{S} (y_2 - y_1)}{S^2} = \frac{S^2 - \Delta y^2}{S^3};$$

A więc, dla przyjętej funkcji długości boku dowolnej sieci geodezyjnej, reszta szeregu R_s będzie:

$$R_s = \frac{1}{2S^3} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^2 - \Delta x^2 & -\Delta x \Delta y & -S^2 + \Delta x^2 & \Delta x \Delta y \\ -\Delta x \Delta y & S^2 - \Delta y^2 & \Delta x \Delta y & -S^2 + \Delta y^2 \\ -S^2 + \Delta x^2 & \Delta x \Delta y & S^2 - \Delta x^2 & -\Delta x \Delta y \\ \Delta x \Delta y & -S^2 + \Delta y^2 & -\Delta x \Delta y & S^2 - \Delta y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix}$$

$x = x_0 + \Theta dx$

co daje się wyrazić również w formie trygonometrycznej

$$R_s = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\frac{\sin 2\varphi}{2} & -\sin^2 \varphi & \frac{\sin 2\varphi}{2} \\ -\frac{\sin 2\varphi}{2} & \cos^2 \varphi & \frac{\sin 2\varphi}{2} & -\cos^2 \varphi \\ -\sin^2 \varphi & \frac{\sin 2\varphi}{2} & \sin^2 \varphi & -\frac{\sin 2\varphi}{2} \\ \frac{\sin 2\varphi}{2} & -\cos^2 \varphi & -\frac{\sin 2\varphi}{2} & \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix}$$

$\varphi = \varphi_0 + d\varphi$
 $\Theta = 1$

gdzie przez φ oznaczono azymut kierunku 1—2 i ostatecznie

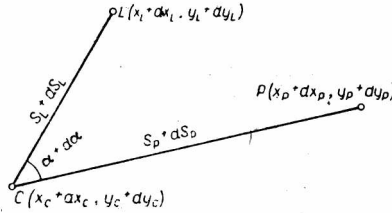
$$R_s = \frac{1}{2S} \left(\begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right)^2$$

$\varphi = \varphi_0 + d\varphi$

Zakładając $dx_1 = dy_1 = dx_2 = dy_2 = dS$ oraz uwzględniając, że $|\sin \varphi| = |\cos \varphi| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ otrzymamy:

$$R_s = \frac{4(dS)^2}{S} \quad (8)$$

Analogicznie jak dla długości, obliczając drugie pochodne cząstkowe dla funkcji kąta $\alpha = \arctg \frac{x_L - x_C}{y_L - y_C} - \arctg \frac{x_P - x_C}{y_P - y_C}$ (rys. 4)



Rys. 4

względem zmiennych $x_L, y_L, x_P, y_P, x_C, y_C$, będziemy mogli obliczyć resztę szeregu R_α , a mianowicie:

$$\begin{aligned} da = & \left[\frac{-(y_L - y_C)^2 \frac{1}{(y_L - y_C)}}{(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2} + \frac{(y_P - y_C)^2 \frac{1}{y_P - y_C}}{(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2} \right] dx_C + \\ & + \left[\frac{(y_L - y_C)^2 \frac{x_L - x_C}{(y_L - y_C)^2}}{(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2} - \frac{(y_P - y_C)^2 \frac{x_P - x_C}{(y_P - y_C)^2}}{(x_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2} \right] dy_C + \\ & + \frac{(y_L - y_C)^2 \frac{1}{(y_L - y_C)}}{(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2} dx_L + \frac{(y_L - y_C)^2 \left(-\frac{(x_L - x_C)}{(y_L - y_C)^2} \right)}{(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2} dy_L + \\ & + \frac{-(y_P - y_C)^2 \frac{1}{(y_P - y_C)}}{(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2} dx_P + \frac{-(y_P - y_C)^2 \left(-\frac{x_P - x_C}{(y_P - y_C)^2} \right)}{(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2} dy_P \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x_C^2} = & \frac{-(y_L - y_C) 2(x_L - x_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} + \frac{-(y_P - y_C) 2(x_P - x_C)}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{-2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} + \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x_C \partial y_C} = & \frac{(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2 - 2(y_L - y_C)(y_L - y_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} + \\ & + \frac{-[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2] + 2(y_P - x_C)^2}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{S_L^2 - 2\Delta y_L^2}{S_L^4} - \frac{S_P^2 - 2\Delta y_P^2}{S_P^4}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_C \partial x_L} = \frac{2(y_L - y_C)(x_L - x_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_C \partial x_P} = \frac{-2(y_P - y_C)(x_P - x_C)}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{-2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_C \partial y_L} = \frac{-[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2] + 2(y_L - y_C)(y_L - y_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{-S_L^2 + 2\Delta y_L^2}{S_L^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_C \partial y_P} = \frac{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 - 2(y_P - y_C)(y_P - y_C)}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{S_P^2 - 2\Delta y_P^2}{S_P^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_C^2} = \frac{2(x_L - x_C)(y_L - y_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_C^2} = \frac{2(x_P - x_C)(y_P - y_C)}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_C \partial y_L} = \frac{-2(x_L - x_C)(y_L - y_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{-2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_L \partial x_L} = \frac{-[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2] + 2(x_L - x_C)^2}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{-S_L^2 + \Delta x_L^2}{S_L^4}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x_L \partial x_P} = 0$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_C \partial y_P} = \frac{2(x_P - x_C)(y_P - y_C)}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x_L \partial y_P} = 0$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_L^2} = \frac{-2(x_L - x_C)(y_L - y_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{-2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial y_L \partial x_P} = 0$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_C \partial x_L} = \frac{(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2 - 2(x_L - x_C)^2}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{S_L^2 - 2\Delta x_L^2}{S_L^4}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial y_L \partial y_P} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_L^2} = \frac{2(x_L - x_C)(y_L - y_C)}{[(y_L - y_C)^2 + (x_L - x_C)^2]^2} = \frac{2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_P^2} = \frac{-2(x_P - x_C)(y_P - y_C)}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{-2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_P^2} = \frac{2(y_P - y_C)(x_P - x_C)}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_P \partial y_P} = \frac{-[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2] + 2(y_P - y_C)^2}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{-S_P^2 + 2\Delta y_P^2}{S_P^4};$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y_C \partial x_P} = \frac{-[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2] + 2(x_P - x_C)^2}{[(y_P - y_C)^2 + (x_P - x_C)^2]^2} = \frac{-S_P^2 + 2\Delta x_P^2}{S_P^4};$$

Dla funkcji kąta, podobnie jak dla długości, zanedbywana w równa-

$$R_a = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} dx_L \\ dy_L \\ dx_P \\ dy_P \\ dx_C \\ dy_C \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{-2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} & \frac{-S_L^2 + 2\Delta x_L^2}{S_L^4} & 0 & 0 \\ \frac{-S_L^2 + 2\Delta x_L^2}{S_L^4} & \frac{2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} & \frac{-S_P^2 + 2\Delta y_P^2}{S_P^4} \\ 0 & 0 & \frac{-S_P^2 + 2\Delta y_P^2}{S_P^4} & \frac{-2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} \\ \frac{2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} & \frac{-S_L^2 + 2\Delta y_L^2}{S_L^4} & \frac{-2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} & \frac{S_P^2 - 2\Delta y_P^2}{S_P^4} \\ \frac{S_L^2 - 2\Delta x_L^2}{S_L^4} & \frac{-2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} & \frac{-S_P^2 + 2\Delta x_P^2}{S_P^4} & \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} \end{array} \right.$$

lub też w formie

$$R_a = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} dx_L \\ dy_L \\ dx_P \\ dy_P \\ dx_C \\ dy_C \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{-\sin 2\varphi_L}{S_L^2} & \frac{\cos 2\varphi_L}{S_L^2} & 0 & 0 \\ \frac{\cos 2\varphi_L}{S_L^2} & \frac{\sin 2\varphi_L}{S_L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin 2\varphi_P}{S_P^2} & \frac{-\cos 2\varphi_P}{S_P^2} \\ 0 & 0 & \frac{-\cos 2\varphi_P}{S_P^2} & \frac{-\sin 2\varphi_P}{S_P^2} \\ \frac{\sin 2\varphi_L}{S_L^2} & \frac{-\cos 2\varphi_L}{S_L^2} & \frac{-\sin 2\varphi_P}{S_P^2} & \frac{\cos 2\varphi_P}{S_P^2} \\ \frac{-\cos 2\varphi_L}{S_L^2} & \frac{-\sin 2\varphi_L}{S_L^2} & \frac{\cos 2\varphi_P}{S_P^2} & \frac{\sin 2\varphi_P}{S_P^2} \end{array} \right.$$

niach błędów reszta szeregu Taylora wyrazi się wzorem:

$$\begin{array}{c}
 \frac{2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} \\
 \frac{-S_L^2 + 2\Delta y_L^2}{S_L^4} \\
 \frac{-2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} \\
 \frac{S_P^2 - 2\Delta y_P^2}{S_P^4} \\
 \frac{-2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} + \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} \\
 \frac{S_L^2 - 2\Delta y_L^2}{S_L^4} \\
 \frac{S_L^2 - 2\Delta x_L^2}{S_L^4} \\
 \frac{-2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} \\
 \frac{-S_P^2 + 2\Delta x_P^2}{S_P^4} \\
 \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4} \\
 \frac{S_L^2 - 2\Delta y_L^2}{S_L^4} \\
 \frac{S_P^2 - 2\Delta y_P^2}{S_P^4} \\
 \frac{2\Delta x_L \Delta y_L}{S_L^4} \\
 \frac{2\Delta x_P \Delta y_P}{S_P^4}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} dx_L \\ dy_L \\ dx_P \\ dy_P \\ dx_C \\ dy_C \end{array} \right.$$

trygonometrycznej

$$x = x_0 + \Theta dx$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\sin 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{-\cos 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{-\sin 2\varphi_P}{S_P^2} \\
 \frac{\cos 2\varphi_P}{S_P^2} \\
 \frac{-\sin 2\varphi_L}{S_L^2} + \frac{\sin 2\varphi_P}{S_P^2} \\
 \frac{\cos 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{\sin 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{-\cos 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{-\sin 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{\cos 2\varphi_P}{S_P^2} \\
 \frac{\sin 2\varphi_P}{S_P^2} \\
 \frac{\cos 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{\cos 2\varphi_P}{S_P^2} \\
 \frac{\sin 2\varphi_L}{S_L^2} \\
 \frac{\sin 2\varphi_P}{S_P^2}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l} dx_L \\ dy_L \\ dx_P \\ dy_P \\ dx_C \\ dy_C \end{array} \right.$$

$$\varphi_L = \varphi_0 + d\varphi_L$$

$$\varphi_P = \varphi_0 + d\varphi_P$$

$$\Theta = 1$$

gdzie przez φ_L znaczone kierunek lewego ramienia kąta, zaś przez φ_P znaczone kierunek prawego ramienia kąta.

Dla $2\varphi_L = 2\varphi_P = 45^\circ$, reszta szeregu R_a osiąga swoje maximum. Analogicznie jak dla R_s , zakładając:

$$dx_1 = dy_1 = dx_p = dy_p = dx_c = dy_c = dS \quad \text{oraz}$$

$$\sin 2\varphi_L = (\cos 2\varphi_L) = (\sin 2\varphi_P) = (\cos 2\varphi_P) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

będziemy mieli:

$$R_a = \frac{1}{2} \frac{16(dS)^2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{S_L^2} + \frac{1}{2} \frac{16(dS)^2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{S_P^2}$$

i ostatecznie:

$$R_a = \frac{4\sqrt{2}(dS)^2}{S_L^2} + \frac{4\sqrt{2}(dS)^2}{S_P^2}$$

Oznaczając przez S_m długość krótszego ramienia kąta, otrzymamy:

$$R_a = \frac{8\sqrt{2}(dS)^2}{S_m^2} \quad (9)$$

Wprowadzone wzory (8) i (9) wyczerpująco odpowiadają na wyżej postawione zagadnienie. Jeżeli zaniedbywane reszty szeregów Taylora (dla długości lub kąta) R_s lub R_a będą większe od dokładności wyznaczenia wolnych wyrazów w równaniach błędów typu (1), wówczas należy się liczyć z nadmiernym zniekształceniem poprawek do obserwacji i wyrównanie nasze będzie mało wartościowe:

Założmy na przykład, że w pewnej siatce triangulacyjnej, o najmniejszym boku trójkąta $S_m = 5$ km, pomierzono kąty z dokładnością $\mu_a = \pm 1''$ i do wyrównania obserwacji metodą pośredniczącą użyto współrzędnych przybliżonych z dokładnością ± 5 m.

Maksymalna wielkość zaniedbywanej reszty — będzie zgodnie ze wzorem (9)

$$R_a = \frac{8 \cdot 1,4 \cdot (5)^2}{(5000)^2} = \frac{280}{25\,000\,000} = 0,000011.$$

Widzimy z tego przykładu, że $R_a \cong 2'' > \mu_a$, a więc dysponowane współrzędne przybliżone są zbyt mało dokładne i na pewno w procesie wyrównania popsują nasze obserwacje.

РЕЗЮМЕ

Уравнивание наблюдений по способу посредственных измерений требует знания приближенных координат, на основе которых вычисляется приближенное значение наблюдаемой величины. Степень приближения (точности) обуславливает величину

искомых вероятнейших приращений приближенных координат, определяемых системой нормальных уравнений Гаусса. Понятно, что когда имеющиеся приближенные значения координат недостаточно точны, тогда может оказаться, что разложение ряда Тэйлора в уравнения ошибок до частных производных первого порядка не соответствует требованиям и оно может привести к излишним искажениям системы наблюдений. Между тем условие разложения функции в ряд Тэйлора с ограничением до частных производных первого порядка лежит в основе уравнивания наблюдений из системы линейных уравнений. Во избежание излишних искажений системы, чтобы не допустить понижения точности наблюдаемых величин в процессе уравнивания, необходимо повысить точность приближенных координат так, чтобы пренебрегаемые остатки разложения рядов Тэйлора в уравнения ошибок были безусловно меньше средних ошибок наблюдаемых величин. В статье дан вывод приближенных формул пренебрегаемых остатков рядов Тэйлора в уравнениях ошибок для функции стороны и угла любой геодезической сети в зависимости от точности приближенных координат. Получены следующие формулы:

$$R_s = \frac{4(dS)^2}{S}; \quad R_\alpha = \frac{8\sqrt{2}(dS)^2}{S_m^2};$$

где:

- R_s — пренебрегаемый остаток ряда для измеренной длины стороны,
- R_α — пренебрегаемый остаток ряда для измеренного угла,
- S — длина измеренной стороны или ее приближенное значение,
- S_m — длина короткой стороны измеренного угла,
- dS — предполагаемое наибольшее приращение приближенных координат.

RÉSUMÉ

Afin d'égaliser les observations par la méthode indirecte on emploie les coordonnées approximatives à l'aide desquelles on calcule une valeur approximative de la grandeur observée. Le degré de leur approximation (exactitude) stipule la grandeur des accroissements cherchés les plus réels des coordonnées approximatives qui sont déterminés par le système d'équations normales de Gauss. Il est évident que, si les coordonnées approximatives disposées sont peu exactes, il est insuffisant de se borner aux premières dérivées partielles du développement de la série de Taylor des fonctions observées dans les équations des erreurs (ce qui est par conséquence une condition de compensation des observations sur base de système des équations linéaires) car cela peut occasionner une déformation excessive des observations. Afin d'éviter cet inconvénient, c'est à dire une diminution d'exactitude des grandeurs observées dans les procédés de compensation, il faut augmenter l'exactitude des coordonnées approximatives pour que les restes négligés des séries de Taylor dans les équations des erreurs soient absolument plus petits des erreurs moyennes des grandeurs observées.

Dans cet article l'auteur établit des formules approximatives pour le reste négligé des séries de Taylor dans les équations des erreurs des fonctions de la longueur du côté et de l'angle d'un réseau géodésique quelconque en dépendance d'exactitude des coordonnées approximatives.

Voilà les formules suivantes:

$$R_s = \frac{4(dS)^2}{S}; \quad R_\alpha = \frac{8\sqrt{2}(dS)^2}{S_m^2};$$

dont:

R_s — reste négligé de la série pour une longueur mesurée du côté

R_α — reste négligé de la série pour l'angle mesuré

S — longueur du côté mesuré ou sa valeur approximative

S_m — longueur du côté plus court de l'angle mesuré

dS — le plus grand accroissement prévu des coordonnées approximatives.

KOMUNIKAT

Komitet Geodezji PAN w porozumieniu z Komitetem Historii Nauki PAN przystępuje do zbierania materiałów związanych z historią geodezji i kartografii w Polsce. Materiały te posłużą do opracowania historii nauki i techniki geodezyjnej i kartograficznej na przestrzeni stuleci, przy czym współpraca obu Komitetów ma na celu zapewnienie właściwego kierunku badań.

Do opracowania przewidziany jest przede wszystkim okres 1794—1864, a więc okres początkowy tworzenia się kapitalizmu w Polsce.

Komitet Geodezji zaprasza najszersze rzesze geodetów do współpracy w tej tak ważnej dla naszej dyscypliny działalności, której inicjatywa wyszła zresztą ze Stowarzyszenia Naukowo-technicznego Geodetów Polskich.

Współpraca ta polegać powinna przede wszystkim na zbieraniu i nadsyłaniu wszelkich wiadomości, bibliografii, opisów instrumentów, instrukcji, map i planów w oryginałach lub odrysach. Wszelkie dane powinny być należycie udokumentowane w celu zapewnienia ich wiarygodności. Materiały powyższe dotyczyć mogą całej historii geodezji i kartografii ze szczególnym uwzględnieniem okresu wyżej wymienionego.

Nadsyłane materiały zależnie od ich charakteru będą wykorzystywane bezpośrednio na łamach czasopism PAN oraz wejdą do opracowania całości „Historii Geodezji i Kartografii“ w Polsce, mogą więc być odpowiednio honorowane po stwierdzeniu ich przydatności do dalszych prac.

Materiały powinny być kierowane na adres: Polska Akademia Nauk, Wydział III, Komitet Geodezji, Warszawa, Nowy Świat 72.

*Komitet Geodezji
Polskiej Akademii Nauk*

Z NOWOŚCI WYDAWNICZYCH

Ch. Hainchelin: POCHODZENIE RELIGII. Monografia popularno-naukowa. Przekład z francuskiego, s. 360, zł 12,85

NAUKA PAWŁOWA A FILOZOFICZNE ZAGADNIENIA PSYCHOLOGII. Praca zbiorowa Instytutu Psychologii Akademii Nauk ZSRR. Przekład z rosyjskiego, s. 420, zł 22,—

St. Staszic: PISMA FILOZOFICZNE I SPOŁECZNE. Biblioteka Klasyków Filozofii. Opracowanie i wstęp B. Suchodolskiego, s. XXVIII + 384 i 392, zł 33,—

PRACE MARIII SKŁODOWSKIEJ-CURIE. Polska Akademia Nauk, s. XII + 688, zł 73,50

WKŁAD MARIII SKŁODOWSKIEJ-CURIE DO NAUKI. Szkice monograficzne, s. 270, zł 12,20

J. Sniadecki: WYBÓR PISM NAUKOWYCH. Wstęp Z. Libery i S. Drobota, s. 460, zł 11,10

W. Kuraszkiwicz: ZARYS DIALEKTOLOGII WSCHODNIO-SŁOWIAŃSKIEJ Z WYBOREM TEKSTÓW GWAROWYCH, s. 146 i mapy, zł 31,25

A. Czikobawa: WSTĘP DO JEZYKOZNAWSTWA. Część pierwsza. Przekład z rosyjskiego, s. 196, zł 23,50

ĆWICZENIA LABORATORYJNE Z FIZYKI. Praca zbiorowa pod redakcją T. Dryńskiego, s. 442, zł 35,65

I. Mieszczerski: ZBIÓR ZADAŃ Z MECHANIKI. Wyd. III. Przekład z rosyjskiego, s. 376, zł 29,50

ROCZNIK POLSKIEGO TOWARZYSTWA GEOLOGICZNEGO, t. XXII, zeszyt 4, s. 400—534, zł 22,50

H. H. Skilling: FALE ELEKTROMAGNETYCZNE. Przekład z angielskiego, s. 248, zł 20,20

W. Latek: BADANIE MASZYN ELEKTRYCZNYCH PRĄDU ZMIENNEGO. Wydanie II, s. 316, zł 21,80

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA



SPIS TREŚCI

L. Fialovszky — Wpływ błędu układu osiowego teodolitu na pomiar kątów poziomych	211
W. Opalski — O metodach bezpośrednich wyznaczania azymutu	229
J. Panasiuk — Dopuszczalna dokładność współrzędnych przybliżonych w przypadku wyrównania obserwacji metodą spostrzeżeń pośrednich	245

СОДЕРЖАНИЕ

Л. Фяльовшкы — Влияние ошибок системы осей теодолита на измерение горизонтальных углов	227
В. Опальский — О методах непосредственного определения азимута	242
Я. Панасюк — Допускаемая точность приближенных координат в случае уравнивания наблюдений по способу посредственных измерений	256

SOMMAIRE

L. Fialovszky — L'influence d'erreur du système axial de théodolite sur le mesurage des angles horizontaux	227
W. Opalski — Détermination des azimuts par les méthodes directes	242
J. Panasiuk — L'exactitude admissible des coordonnées approximatives en cas d'égalisation des résultats d'observation par la méthode indirecte	257

PRENUMERATA CZASOPISM NAUKOWYCH NA ROK 1955

Jak najwcześniejsze zamówienie prenumeraty na rok 1955 zapewni nieprzerwaną, regularną dostawę czasopism naukowych.

GEODEZJA I KARTOGRAFIA

Czasopismo ukazuje się 4 razy w roku. Prenumerata roczna wynosi 40,— zł

Tytuł	Ilość nume- rów	Rocz- nie zł	Tytuł	Ilość nume- rów	Rocz- nie zł
ACTA BIOCHIMICA PO- LONICA	4	60,—	KOSMOS	6	48,—
ACTA GEOLOGICA POLO- NICA	4	80,—	KWARTALNIK HISTORY- CZNY	4	60,—
ACTA GEOPHYSICA PO- LONICA	4	48,—	KWARTALNIK HISTORII KULTURY MATERIAL- NEJ	4	60,—
ACTA MICROBIOLOGICA POLONICA	4	40,—	KWARTALNIK IPR + SO- VIETICA	4	40,—
ACTA PHYSICA POLO- NICA	4	48,—	KWARTALNIK NEOFILO- LOGICZNY	4	60,—
ARCHIWUM BUDOWY MASZYN	4	60,—	MEANDER	10	50,—
ARCHIWUM HYDROTECH- NIKI	4	60,—	MYŚL FILOZOFICZNA	4	60,—
ARCHIWUM GÓRNICTWA I HUTNICTWA	4	60,—	NAUKA POLSKA	4	80,—
ARCHIWUM ELEKTRO- TECHNIKI	4	60,—	POSTĘPY ASTRONOMII	4	20,—
ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ	4	60,—	POSTĘPY FIZYKI	4	40,—
BIUL. PAN WYDZ. II } " " " III } jez. zach. " " " IV } europ.	4 10 4	20,— 50,— 20,—	KWARTALNIK NEOFILO- LOGICZNY	4	60,—
BIUL. PAN WYDZ. II } " " " III } jez. ros. " " " IV } europ.	4 10 4	20,— 50,— 20,—	MEANDER	10	50,—
CHRONMY PRZYRODĘ OJCZYSTĄ	6	24,—	MYŚL FILOZOFICZNA	4	60,—
CZASOPISMO GEOGRA- FICZNE	4	28,—	NAUKA POLSKA	4	80,—
EKOLOGIA POLSKA	4	28,—	POSTĘPY ASTRONOMII	4	20,—
EKONOMISTA	4	60,—	POSTĘPY FIZYKI	4	40,—
FOLIA BIOLOGICA	4	48,—	POSTĘPY HIGIENY I ME- DYCYNY DOŚWIAD- CZALNEJ	4	48,—
GEODEZJA I KARTO- GRAFIA	4	40,—	PRZEGLĄD GEOGRAFI- CZNY	4	40,—
			PRZEGLĄD HISTORYCZ- NY	4	48,—
			PRZEGLĄD STATYSTYCZ- NY	4	48,—
			PRZEGLĄD ORIENTALI- STYCZNY	4	48,—
			ROCZNIKI CHEMII	4	80,—
			SPRAWOZDANIA Z CZYN- NOŚCI I PRAC PAN	4	40,—
			WIADOMOŚCI ARCHEO- LOGICZNE	4	48,—
			WIADOMOŚCI CHEMICZNE	12	48,—
			WSZECHŚWIAT	12	48,—
			ŻYCIE SZKOŁY WYŻSZEJ	12	96,—

ZAMÓWIENIA I WPŁATY

Wpłaty na prenumeratę należy przekazywać na konto PKO nr 1-110-14000, Centralna Ekspedycja PPK „Ruch“ w Warszawie, ul. Srebrna 12, z podaniem tytułu zamawianego czasopisma.

Instytucje i biblioteki zamawiające różne czasopisma naukowe winny równocześnie z przekazaniem należności podać pod powyższym adresem wykaz poszczególnych czasopism, ilość egzemplarzy oraz okres prenumeraty.

W Warszawie i miastach wojewódzkich „Ruch“ przyjmuje zamówienia zbiorowe na czasopisma z dostawą bezpośrednią. Instytucje i biblioteki mogą kierować zamówienia: w Warszawie — do Delegatury „Ruchu“, ul. Rutkowskiego 25, tel. 696-96, w miastach wojewódzkich — do miejscowych oddziałów wojewódzkich „Ruchu“.