ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

t. 1

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

IX

WŁADYSŁAW FISZDON

O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań wymuszonych

WARSZAWA 1954

R O Z P R A W Y   I N Ż Y N I E R S K I E

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

WŁADYSŁAW FISZDON

O PEWNEJ METODZIE OBLICZANIA AMPLITUD DRGAŃ WYMUSZONYCH

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
IX

WARSZAWA 1954
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (IX)

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1420+150 egz. Papier druk. sat. 70x100/16, 60 g. Arkuszy wydawniczych 0,7. Arkuszy drukarskich 5/8
Oddano do składania dn 3.IX.53 r. Druk ukończono dn. 28.II.54 r. Zam. 183. 5-B-55590 Cena zł 4,—

Stoł. Zakł. Graf. Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8

Uniknięcie rezonansu w całym zakresie użytkowym jest rzeczą niemożliwą w wielu spotykanych obecnie konstrukcjach sprzętu ruchomego. Zachodzi wówczas konieczność obliczenia amplitud drgań wymuszonych w celu stwierdzenia, czy są one dopuszczalne ze względu na wytrzymałość lub wygodę użytkowania sprzętu. Jako przykład może posłużyć samolot z silnikiem tłokowym, który jest źródłem szerokiej gamy harmonicznych sił wzbudzających.

Ponieważ klasyczne metody obliczenia drgań układów złożonych o wielu stopniach swobody ograniczają się na ogół do obliczenia częstości własnych i wymagają dużo pracy rachunkowej, wzorując się na metodach używanych w elektrotechnice Carter, Biot i Duncan, [1], [2] i [3], zastosowali metodę podatności harmonicznej do obliczenia częstości własnych. Metodę powyższą autor tej pracy dostosował do praktycznego obliczenia amplitud drgań wymuszonych, [4] i [5].

Pojęcie podatności harmonicznej najlepiej zilustrować na przykładzie masy m zawieszonej na nieważkiej sprężynie. Działając na tę masę siłą statyczną $Q = Q_s$ uzyskamy przesunięcie masy na odległość $q = q_s$ i wówczas podatność «statyczna» równoznaczna odwrotności sztywności jest równa

(1) $$p_s = \frac{q_s}{Q_s}.$$

Jeżeli zamiast siły statycznej przyłożymy siłę zmieniającą się harmonicznie, $Q = Q_0 \sin \omega t$, to można obliczyć amplitudę drgań z równania różniczkowego ruchu rozpatrywanego układu

$$m \frac{d^2 q}{d t^2} - \frac{1}{p_s} q = Q_0 \sin \omega t.$$

Podatność «harmoniczna», to jest stosunek przesunięcia rozpatrywanego punktu do wielkości siły, która go wywołała, w tym przypadku jest równa

(2) $$p = \frac{q}{Q} = \frac{1}{-m \omega^2 + 1/p_s}.$$

Widzimy, że dla nie tłumionego układu podatność dąży do nieskończoności, gdy częstość siły wzbudzającej dąży do częstości własnej. Zauważymy, że gdy nie ma sprężyny, to

$$p_s = \infty, \qquad p = -\frac{1}{m\,\omega^2}. \tag{3}$$

Jeżeli uwzględnimy tłumienie w rozpatrywanym układzie i przyjmiemy, że siła określona jest za pomocą funkcji $Q = Q_0\, e^{i\omega t}$, to równanie ruchu jest

$$m\frac{d^2 q}{d t^2} + c\frac{d q}{d t} + \frac{1}{p_s} q = Q_0\, e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Podstawiając do powyższego równania $q = q_0\, e^{i\omega t}$ otrzymamy

$$p = \frac{q}{Q} = \frac{1}{-m\,\omega^2 + i\,c\,\omega + 1/p_s}. \tag{5}$$

Podatność harmoniczna jest więc w tym przypadku wielkością zespoloną scharakteryzowaną przez amplitudę i fazę, której szczególnym przypadkiem jest przypadek poprzednio rozpatrywany.

Aby obliczyć amplitudę drgań masy m, wystarczy pomnożyć podatność przez amplitudę siły wzbudzającej.

Powyższy prosty przykład ilustruje istotę rozszerzenia pojęcia podatności statycznej na harmoniczną.

Rozpatrzmy z kolei podatność harmoniczną innego prostego układu, mianowicie belki ciągłej o masie μ na jednostkę długości. Układ ten będzie posiadał nieskończoną ilość stopni swobody. Z warunku równowagi elementu belki (na który to element działa siła tnąca F i którego przesunięcie jest y) mamy znaną zależność

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,d x = \frac{\partial F}{\partial x}\,d x. \tag{6}$$

Przyjmijmy, że opory tarcia wewnętrznego są proporcjonalne do prędkości wydłużenia $\partial\,\varepsilon/\partial\, t$, wówczas zależność między naprężeniem σ i wydłużeniem ε jest określona wzorem

$$\sigma = \left(\varepsilon + \Theta\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\, t}\right) E. \tag{7}$$

Stąd wynika, że moment zginający w danym przekroju jest

$$M = -EI\left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Z równania (7) i zależności między momentem zginającym a siłą tnącą otrzymamy

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\left(1 + \Theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \tag{9}$$

Równanie to różni się od równania belki ogólnie znanego z wytrzymałości jedynie wyrażeniem w nawiasie.

Rozwiązanie powyższego równania ma postać $y = y_0(x)e^{st}$, czyli

$$\frac{d^4 y_0}{dx^4} - k^4 y_0 = 0; \qquad k^4 = -\mu s^2\frac{1}{EI(1 + \Theta_s)}. \tag{10}$$

Dla drgań harmonicznych, dla których $s = i\omega$ parametr k staje się wielkością zespoloną. Ogólne rozwiązanie jest następujące:

$$y_0 = A_1\cos kx + A_2\sin kx + A_3\cosh kx + A_4\sinh kx. \tag{11}$$

Aby obliczyć podatność harmoniczną pod wpływem siły $Q_1 e^{i\omega t}$, musimy obliczyć stałe całkowania równania (11) z warunków brzegowych; na przykład dla belki swobodnej, o długości L gdy siła przyłożona znajduje się w przekroju $x = 0$, mamy

$$\frac{d^2 y(0)}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3 y(0)}{dx^3} = \frac{-Q_1}{EI(1 + i\Theta\omega)},$$

$$\frac{d^2 y(L)}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3 y(L)}{dx^3} = 0.$$

Ponieważ ruch belki określają w zasadzie dwa parametry, przeto rozróżniamy podatności przesunięć i pochyleń, które występują pod wpływem przyłożonych sił lub momentów. Jeżeli przesunięcie w przekroju $x = 0$ jest $y(0) = q_1 e^{i\omega t}$, a pochylenie w tymże przekroju $dy(0)/dx = q_2 e^{i\omega t}$, to odpowiednie podatności w tym przekroju są

$$\begin{cases} p_{11} = \dfrac{q_1}{Q_1} = \dfrac{kL}{\mu L\omega^2}\,\dfrac{\sinh kL\cos kL - \cosh kL\sin kL}{1 - \cosh kL\cos kL}, \\[2ex] p_{21} = \dfrac{q_2}{Q_1} = \dfrac{kL^2}{\mu L\omega^2 L}\,\dfrac{\sinh kL\sin kL}{1 - \cosh kL\cos kL}. \end{cases} \tag{12}$$

Podobnie, przykładając momenty określone wzorem $Q_2 e^{i\omega t}$ w przekroju $x = 0$, znajdujemy podatności

$$p_{12} = \frac{q_3}{Q_2}, \qquad p_{22} = \frac{q_4}{Q_2}. \tag{13}$$

Obliczając przesunięcia $y(x)$ lub pochylenia $dy(x)/dx$ w przekroju x znajdziemy jakby «wpływowe» podatności harmoniczne, które służą do obliczania amplitud w obranym przekroju w zależności od sił wzbudzających:

$$q_x = p_{x1} Q_1 + p_{x2} Q_2. \tag{14}$$

Powyższa metoda ma największe zastosowanie do układów złożonych z kilku zespołów o znanych lub łatwo obliczalnych podatnościach. W celu obliczenia podatności takiego układu należy rozróżnić różne przypadki zależnie od liczby parametrów niezbędnych do zupełnego określenia danego połączenia.

Jeżeli układ można scharakteryzować za pomocą jednego parametru, to biorąc pod uwagę, że w punkcie połączenia obu zespołów «a» i «b» przesunięcia są równe oraz że suma sił działających w punkcie połączenia jest równa zeru, otrzymamy

$$\begin{cases} {}_a q_1 = {}_b q_1 = q_1, \\ {}_a Q_1 + {}_b Q_1 = Q_1. \end{cases} \tag{15}$$

Podatność zespołu w punkcie połączenia jest określona wzorem następującym:

$$p_1 = \frac{q_1}{Q_1} = \frac{1}{\dfrac{{}_a Q_1}{{}_a q_1} + \dfrac{{}_b Q_1}{{}_b q_1}} = \frac{1}{\dfrac{1}{{}_a p_1} + \dfrac{1}{{}_b p_1}}. \tag{16}$$

Jeżeli połączenie scharakteryzowane jest za pomocą dwu parametrów, to oba rodzaje uogólnionych przesunięć muszą być równe i oba rodzaje uogólnionych sił muszą być w równowadze. Stąd mamy

$$\begin{cases} {}_a q_1 = {}_b q_1 = q_1, & {}_a Q_1 + {}_b Q_1 = Q_1, \\ {}_a q_2 = {}_b q_2 = q_2, & {}_a Q_2 + {}_b Q_2 = Q_2. \end{cases} \tag{17}$$

Przesunięcia każdego zespołu są następujące:

$$\begin{cases} {}_a q_1 = {}_a p_{11}\, {}_a Q_1 + {}_a p_{12}\, {}_a Q_2, & {}_b q_1 = {}_b p_{11}\, {}_b Q_1 + {}_b p_{12}\, {}_b Q_2, \\ {}_a q_2 = {}_a p_{21}\, {}_a Q_1 + {}_a p_{22}\, {}_a Q_2, & {}_b q_2 = {}_b p_{21}\, {}_b Q_1 + {}_b p_{22}\, {}_b Q_2. \end{cases} \tag{18}$$

Eliminując z powyższych równań ${}_aq_i$, ${}_bq_i$, ${}_aQ_i$ oraz ${}_bQ_i$ otrzymamy poszukiwane podatności z równań

$$q_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2, \qquad q_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2. \tag{19}$$

Obliczenie amplitudy w obranym przekroju układu złożonego wymaga obliczenia siły działającej na składowy element. Mając wpływowe podatności można obliczyć żądaną amplitudę.

Dokładne obliczenie podatności harmonicznej układu wewnętrznie tłumionego można praktycznie wykonać tylko w przypadku prostych zespołów. Przy bardziej złożonych układach praca rachunkowa niepomiernie wzrasta i dlatego przybliżone lub półdoświadczalne metody obliczeń są całkowicie uzasadnione.

W przypadku belki o zmiennym przekroju, na którą działa siła X na jednostkę długości, równanie równowagi analogiczne do równania (9) ma postać

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(1 + i\Theta\omega)\frac{d^2y}{dx^2}\right] + \mu\omega^2 y + X = 0. \tag{20}$$

Możemy rozwiązać to równanie stosując na przykład przybliżoną metodę G a l e r k i n a, jeżeli przyjmiemy Y_r jako liniowo niezależne funkcje określające drgania znanych podobnych układów. Przesunięcie w przekroju x jest wówczas

$$y(x) = \Sigma\, q_r Y_r(x), \tag{21}$$

gdzie q_r są wielkościami zespolonymi. Podatność harmoniczną oblicza się z zależności

$$p = \frac{y}{X_i}. \tag{22}$$

Metoda energetyczna korzystająca z ogólnego równania L a g r a n g e'a jest szczególnie przydatna, jeżeli znamy drgania własne podobnych układów. Polega ona na rozwiązaniu układu równań

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = Q_r, \tag{23}$$

w których uogólnionymi współrzędnymi są wartości własne drgań, T i U są odpowiednio energiami kinetyczną i potencjalną układu, a F jest funkcją tłumienia przedstawiającą połowę energii zużytej na pokonanie sił tłumienia w jednostce czasu. Na przykład dla drgań giętnych będzie ta ostatnia funkcja równa

24)
$$F = \frac{1}{2} \int_0^L E I(x) \Theta \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right]^2 d\,x.$$

Przyjmując, że

(25)
$$Q_r = Q'_r e^{i\omega t}, \qquad q_r = q'_r e^{i\omega t},$$

otrzymamy następujący układ równań:

(26)
$$\sum_s (a_{rs}\,\omega^2 + i\,b_{rs}\,\omega + c_{rs})\,q'_s = Q'_r.$$

Rozwiązując ten układ znajdziemy, że

(27)
$$q'_r = \frac{1}{\Delta} \sum_s \Delta_{rs}\,Q'_s,$$

gdzie Δ jest wyznacznikiem układu, zaś Δ_{rs} są odpowiednimi minorami.

Uogólniona podatność harmoniczna wynosi

(28)
$${}_qP_{rs} = \frac{\partial\,q'_r}{\partial\,Q'_s} = \frac{\Delta_{rs}}{\Delta},$$

a ugięcia w żądanym przekroju x są równe

(29)
$$y(x) = \sum_r q'_r\,y_r(x).$$

Żądane podatności harmoniczne są określone wzorami

(30)
$$P_{xP_i} = \frac{\partial\,y(x)}{\partial\,P_i} = \sum_r \left\{ y_r(x) \left[\sum_s {}_qP_{rs}\,y_s(x_i) \right] \right\}.$$

Zauważmy, że w przypadku zastosowania dokładnych funkcji drgań własnych metoda ta daje wynik ścisły.

W przypadku, gdy posiadamy już gotową konstrukcję, np. samochód, można znaleźć podatność harmoniczną układu przyłożywszy w danym punkcie siłę harmoniczną $Q\,e^{i\omega t}$ i mierząc przesunięcie $q\,e^{i(\omega t+\varphi)}$. Następnie możemy już znaleźć podatność harmoniczną

(31)
$$P_{xQ} = \frac{q}{Q}\,e^{i\varphi}.$$

Znając siłę wzbudzającą można z łatwością obliczyć amplitudę drgań. Metoda ta pozwala na dokładne określenie podatności przy uwzględnieniu rzeczywistego stanu konstrukcji, a następnie na takie dobranie elementów sprężystego zawieszenia silnika, które zapewniłoby najkorzystniejsze warunki użytkowania sprzętu.

Literatura cytowana w tekście

[1] B. C. Carter, *The Vibration of Airscrew Blades with Particular Reference to Harmonic Torque Impulses in the Drive*, R. a. M. 1738 (1936).

[2] M. A. Biot, *Coupled Oscillations of Aircraft Engine Propeller Systems*, Journ. Aeron. Sc, July 1940.

[3] W. J. Duncan, *The Admittance Method for Obtaining the Natural Frequencies of Systems*, Phil. Mag., Nov. 1941.

[4] W. Fiszdon, D. B. C. Cooper, L. A. Tate, *A Practical Method of Estimating Resonance Frequencies of an Aircraft Engine System*, R. A. E. Report No S. M. E. 3293 (1944).

[5] W. Fiszdon, R. P. N. Jones, D. L. Woodcock, *Effect of Damping in Different Parts of an Aircraft Structure on Forced Vibrations as Studied on Simplified Systems*, R. a. M. 2103 (1945).

Резюмэ

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ АМПЛИТУД ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Автор рассматривает сущность и обоснование применения метода «гармонической податливости» для вычисления амплитуд вынужденных колебаний упругой системы с учетом влияния внутренного затухания. Предлагаемый метод позволяет учесть действительные свойства: упругости, инерции и затухания системы со многими степенями свободы. Это позволяет вычислить амплитуды вынужденных колебаний более точно, чем методами обычно применяемыми в настоящее время.

Кроме того автором рассмотрены приближенные способы применения метода, в частности на основании прежних опытов над подобными системами.

Предлагаемый метод применим в особенности в случае необходимости вычисления оптимальной жёсткости подвешения значительной массы на упругой системе конечной массы, например мотора на самолёте или автомобиле.

Summary

A CERTAIN METHOD OF CALCULATION OF AMPLITUDES OF FORCED VIBRATIONS

The use of the admittance method for the determination of amplitudes of forced vibrations of deformable elastic systems with internal damping is described. This method enables to take into account the real elastic, inertial and damping characteristics of systems with many degrees of freedom thus giving the possibility of a more accurate calculation of forced amplitudes than in the usually employed methods.

An approximate method using previous experience on similar systems is indicated.

This method is particularly suitable for the determination of the best flexibility of the suspension of a large mass on a flexible finite mass.

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1953 r.

KOMITET REDAKCYJNY

ROZPRAW INŻYNIERSKICH

prosi autorów o przestrzeganie następujących wskazówek

(1) Prace w języku polskim, przepisane na maszynie (nie światłodruki), należy składać w dwóch egzemplarzach. Wzory powinny być napisane wyraźnie atramentem, rysunki (szkice) dołączone na oddzielnych kartach (nie w tekście).

(2) Obowiązuje numeracja dziesiętna wzorów [np. wzór 5 w p. 2 oznacza się (2.5)]. Numery wzorów należy umieszczać z lewej strony. Należy unikać numeracji rzymskiej i alfabetycznej (wzorów, rysunków, paragrafów, rozdziałów).

(3) Do pracy należy dołączyć streszczenie nie przekraczające jednej strony maszynopisu w języku polskim (również wtedy, gdy autor składa streszczenie w języku obcym) i podać ewentualnie terminologię w dwóch językach (w tym jeden rosyjski), na które streszczenie ma być przełożone.

(4) Literaturę cytowaną w tekście należy zestawić w końcu pracy podając nazwisko i imię autora, tytuł pracy, miejsce i rok wydania (w przypadku cytowania czasopisma również numer zeszytu). Nazwiska i tytuły rosyjskie należy pisać alfabetem rosyjskim. W tekście należy powoływać się na numery prac (w nawiasie kwadratowym, np. [5]) według zestawienia.

(5) Funkcje trygonometryczne należy oznaczać przez sin, cos, tg, ctg; funkcje hiperboliczne z dodaniem litery h. Współczynnik Poissona oznacza się przez ν. Kresek pionowych używa się tylko do oznaczenia wartości bezwzględnej. Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).

(6) Autorowi przysługuje prawo do przeprowadzenia ostatecznej korekty (bez zmian tekstu) dokładnie w terminie wyznaczonym przez Redakcję.

(7) Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w ROZPRAWACH.

Niestosowanie się do powyższych wskazówek opóźnia publikację pracy.

Cena zł 4.—

WYDAWNICTWA
ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ

KWARTALNIK POŚWIĘCONY PRACOM NAUKOWYM Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TEORII KONSTRUKCJI

Ukazały się tomy I—IV oraz zeszyty 1, 2 i 3 tomu V.

W druku zeszyt 4 tomu V.

Cena zeszytu zł 20.

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

UKAZAŁY SIĘ

I. F. Szelągowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego

II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic

IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej

V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć

VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu

VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyt na podstawie metody Ritza

IX. W. Fiszdon, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań

W DRUKU

III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia

VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii, teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych

X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych

W PRZYGOTOWANIU

XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie

XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych