

A1904

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
I N S T Y T U T   P O D S T A W O W Y C H   P R O B L E M Ó W   T E C H N I K I

---

t.1

# R O Z P R A W Y I N Ż Y N I E R S K I E

## XII

WITOLD WIERZBICKI

O powstawaniu wyboczenia prętów prostych



---

W A R S Z A W A

1 9 5 4

# ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI  
I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI  
ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

WITOLD NOWACKI – PRZEWODNICZĄCY

JULIAN BONDER, MICHAŁ BROSZKO

WACŁAW OLSZAK, BOHDAN STEFANOWSKI

STANISŁAW TURSKI, WITOLD WIERZBICKI

JERZY NOWIŃSKI – SEKRETARZ NAUKOWY

Adres Redakcji

WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

---

WITOLD WIERZBICKI

O POWSTAWANIU WYBOCZENIA PRĘTÓW PROSTYCH

ROZPRAWY  
INŻYNIERSKIE

XII

W A R S Z A W A   1 9 5 4

---

P A Ń S T W O W E   W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

**R O Z P R A W Y I N Ż Y N I E R S K I E (XII)**

Copyright 1954 by Państwowe Wydawnictwo Naukowe  
Warszawa (Poland). Printed in Poland.

All rights reserved

No part of this book may be translated or reproduced  
in any form, by mimeograph or any other means,  
without permission in writing from the publishers.

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

---

Nakład 1420 + 160 egz. Papier druk. sat. kl. V 70×100/16, 70 g. Arkuszy wydawn. 4<sup>1</sup>/<sub>4</sub>. Arkuszy druk. 4<sup>1</sup>/<sub>4</sub>.  
Oddano do składania dn. 4.II.54 r. Druk ukończono w 7.VII.1954 r. Zam. 33. 5-B-54162. Cena zł 11,—

---

Stoł. Zakł. Graf. Drukarnia Naukowa, Warszawa, Sniadeckich 8

## PRZEDMOWA

Zagadnienie niestateczności konstrukcji budowlanych przy pewnych obciążeniach oraz zagadnienie wielkich, niedopuszczalnych odkształceń budowli daje się najlepiej przestudiować na przypadku wyboczenia prętów prostych. Stąd przypadek ten ma znaczenie ogólniejsze, niżby to wynikało z roli prętów prostych w konstrukcjach.

Powstawanie wyboczenia prętów prostych zostało tu opracowane w znacznym stopniu w oparciu o następujące dawniejsze publikacje autora:

- (1) *O wytrzymałości prętów złożonych w mostach żelaznych*, Wyd. Min. Oświaty, Warszawa 1924,
- (2) *Metody obliczenia prętów złożonych*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1927,
- (3) *O powstawaniu zjawiska wyboczenia*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1932,
- (4) *Kilka uwag w obronie wzoru prof. F. Jasińskiego na ściskanie mimośrodowe*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1933,
- (5) *Stosunek wyboczenia do ściskania mimośrodowego*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1933,
- (6) *Z dziedziny odkształcenia i stateczności układów prętowych*, Prace Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego 1933,
- (7) *Modele zjawiska wyboczenia*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1933,
- (8) *Istota wyboczenia prętów prostych*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1934,
- (9) *O sposobach rozumienia terminu «wyboczenie»*, Prace Akademii Nauk Technicznych, Warszawa 1934,
- (10) *Wyboczenie jako fakt i jako schemat*, Przegląd Techniczny, Warszawa 1937,



- (11) *Kilka słów o wyboczeniu prętów prostych*, Kolejowy Przegląd Techniczny, Warszawa 1937,
- (12) *The Quasi-Unstable Equilibrium in Structural Mechanics*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, Gdańsk 1949.

W okresie powstawania tych prac poglądy autora na wyboczenie ulegały pewnym wahaniom i przemianom przystosowując się stale do postępu szybko kroczącej naprzód nowoczesnej techniki.

Rozprawa niniejsza zawiera poglądy autora na zagadnienie powstawania wyboczenia na obecnym etapie rozwoju nauki i techniki.

AUTOR

## I. ISTOTA ZJAWISKA WYBOCZENIA

### 1. Rodzaje i schematy wyboczenia

Statystyką katastrof mostowych wykazuje, że znaczna ich część była spowodowana zniszczeniem prętów ściskanych, nazywanym ogólnikowo, w potocznym języku technicznym, *wyboczeniem* lub odpowiednimi wyrazami obcymi. Informacje o innych katastrofach budowlanych zdają się potwierdzać wnioski, jakie można wysnuć ze statystyki mostowej. Dzięki temu technicy różnych krajów mieli wiele sposobności, aby wyrobić sobie określony pogląd na sam fakt wyboczenia i na okoliczności towarzyszące jego powstawaniu.

Chodzi tu na razie nie o wyboczenie jako o zadanie z zakresu mechaniki budowli i nie o wyboczenie jako o zjawisko fizyczne ściśle zdefiniowane i zachodzące w warunkach ściśle omówionych. Chodzi tu w tej chwili tylko o pewien fakt zaobserwowany przez wielu ludzi w ich działalności technicznej i w wielu wypadkach opisany na podstawie tych obserwacji.

Gdy się czyta opisy poważniejszych katastrof budowlanych wywołanych przez wyboczenie, np. opis katastrofy mostu w Quebec w 1907 r. lub katastrofy ze zbiornikiem gazu w Hamburgu w 1908 r., to zwracają na siebie przede wszystkim uwagę następujące okoliczności:

(1) pręt, który wywołał katastrofę, pozostawał prosty do pewnej w nim wartości sił podłużnych,

(2) po przekroczeniu tej wartości pręt doznawał wyraźnego wygięcia o wymiarach, które ze względu na przeznaczenie konstrukcji nie mogły być tolerowane,

(3) gdy chodzi o czas trwania katastrofy, to bywał on bardzo różny; można go było liczyć na sekundy, na godziny, a nawet w niektórych wypadkach dzielił się na etapy nieraz kilkudniowe.

Inaczej mówiąc, obserwator katastrofy spowodowanej «wyboczeniem» jednego z prętów konstrukcji budowlanej stwierdzał za każdym razem, że pręt prosty ściskany osiowo pozostawał prosty do pewnej wartości siły podłużnej, a po przekroczeniu tej wartości ulegał wygięciu.

Przechodząc od obserwacji do uogólnienia wprowadzamy pojęcie *wyboczenia w sensie technicznym*, przez które rozumiemy zjawisko polegające na tym, że pręt prosty ściskany siłami działającymi osiowo pozostaje prosty do pewnej wartości siły podłużnej (tzw. krytycznej), po przekroczeniu zaś tej wartości ulega wygięciu, przy czym terminy «prosty» i «osiowy» uważamy tu za określone dokładnością pomiaru (rys. 1).

Taka definicja wyboczenia w sensie technicznym nie przesądza ani przyczyny zjawiska, ani szczegółów jego przebiegu, ani wreszcie środków zabezpieczenia się przed nim. Aby wszystkie te okoliczności wyjaśnić i aby móc obliczyć stopień bezpieczeństwa pręta ściskanego, należy znaleźć taki schemat statyczny, który pozwoliłby na wszechstronne przestudiowanie zjawiska i na wyciągnięcie stąd wskazówek praktycznych do wymiarowania konstrukcji. Różnym warunkom pracy pręta ściskanego mogą odpowiadać zresztą różne schematy statyczne, musimy więc, inaczej mówiąc, w zależności od warunków, w jakich pręt się znajduje, dać jego wyboczeniu odpowiednią interpretację mechaniczną.

Przedtem omówimy terminologiczną stronę zagadnienia.

Polski termin «wyboczenie» powstał w czasach, gdy w skład konstrukcji budowlanych wchodziły poza palami drewnianymi, spośród elementów ściskanych, tylko słupy kamienne, dla których odchylenie się na bok osi pionowej miało znaczenie katastrofy budowlanej. Termin «wyboczenie» miał więc w tych warunkach opisywać wyginanie się słupa jako rzecz nienormalną, podczas gdy za normalny rodzaj jego pracy było uważane ściskanie pionowe, któremu odpowiada prostoliniowa postać równowagi słupa.

Niemieckie wyrazy «Knickung» lub «Ausknicken» zawierają podobny posmak niebezpieczeństwa zagrażającego budowli, co polski wyraz «wyboczenie», w przeciwieństwie do polskiego terminu «zginanie» i niemieckiego «Biegung», które tego posmaku nie mają.

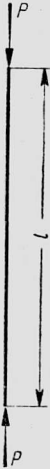
Aluzję do niebezpieczeństwa grożącego słupowi ulegającemu zginaniu wyczuwa się również we francuskim wyrazie «flambage» będącym odpowiednikiem polskiego wyrazu «wyboczenie». Termin «flambage» pochodzi od wyrazu «flambeau» i tłumaczy się podobieństwem zachodzącym między falistym kształtem płomienia chwiejącego się na wietrze z jednej strony (rys. 2), a formą odkształconą pręta ulegającego wyboczeniu w jego postaci wielofalowej z drugiej strony (rys. 3).

W miarę rozpowszechniania się stalowych konstrukcji kratowych wyginanie się prętów ściskanych przestało być uważane za katastrofę i dlatego w niektórych językach używany jest jako termin odpowiadający wyrazowi «wyboczenie» termin «zginanie podłużne», a więc np. po rosyjsku «prodolnyj izgib» lub po angielsku obok «buckling» również «flexure

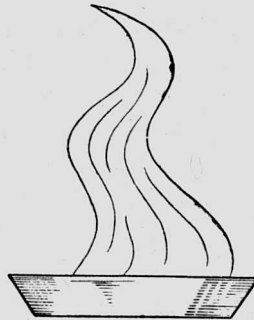


produced by axial compression». W ten sposób termin «zginanie podłużne» otrzymuje tu sens bardziej ograniczony niż w języku polskim.

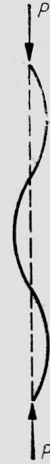
Omówiona terminologia nie powinna wywoływać nieporozumień przy ustalaniu schematów statycznych, w które mamy wtłoczyć wszystkie możliwe, a różne z punktu widzenia mechaniki budowli przypadki zjawiska, nazwanego wyżej wyboczeniem w sensie technicznym.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozróżnić więc będziemy dalej, z jednej strony:

- (I) wyboczenie w sensie matematycznym,
- (II) wyboczenie w sensie fizycznym,

z drugiej zaś strony:

- (a) wyboczenie sprężyste,
- (b) wyboczenie niesprężyste.

Dalej wykażemy, w jakim stopniu przytoczone schematy pozwalają na wyjaśnienie zjawiska wyboczenia w sensie technicznym i w jaki sposób doprowadzają one do wzorów na wyboczenie w różnych okolicznościach.

## 2. Wyboczenie w sensie matematycznym

Eulerowska teoria «siły kolumny» doprowadzająca do tzw. eulerowskich wzorów na wyboczenie ujmuje i określa wyboczenie po prostu jako fakt niestateczności prostoliniowej postaci równowagi pręta prostego przy pewnej wartości siły podłużnej.

Tego rodzaju określenie wyboczenia, jako bardzo ogólne, nie może wprawdzie nastroić żadnych wątpliwości i nie pozostaje w sprzeczności z doświadczeniem, nie charakteryzuje jednak też zupełnie indywi-

dualnych cech wyboczenia na tle innych przypadków równowagi niestatecznej i nie ujmuje wszystkich warunków towarzyszących powstawaniu zjawiska. Wobec tego powstaje potrzeba dokładniejszego sprecyzowania warunków powstawania zjawiska wyboczenia nawet w granicach teorii E u l e r a.

Opieramy się dalej na ogólnej definicji równowagi niestatecznej, licząc się zresztą z dwiema nieco różniącymi się między sobą redakcjami tej definicji.

Według jednej z nich każdy w ogóle układ materialny uważamy za znajdujący się w stanie równowagi statecznej, jeżeli przy dowolnie małym odchyleniu części układu od położenia równowagi zaburzenie równowagi pozostaje trwale dowolnie małym; jeżeli zaś małe odchylenie od położenia równowagi wywołuje zaburzenie wykraczające poza obszar dowolnie wybrany, wówczas mamy do czynienia z równowagą niestateczną.

Jak widzimy, zastosowanie przytoczonego określenia równowagi niestatecznej do zjawiska wyboczenia wymaga dla całkowitej jasności ustalenia natury i sposobu powstawania owego «małego odchylenia» od położenia równowagi, które powoduje dalsze zaburzenie wykraczające już poza dany obszar.

To samo dotyczy i drugiej redakcji określenia równowagi, według którego równowaga ciała będzie stateczna, o ile ciało wyprowadzone z położenia równowagi będzie do tego położenia wracało, niestateczna zaś wówczas, gdy będzie się od niego oddalało.

Weźmy więc pod uwagę pręt doskonale prosty wykonany z materiału o nieograniczonej sprężystości i wytrzymałości, ściskany siłami działającymi ściśle wzdłuż osi (rys. 1) lub względem tej osi symetrycznymi (rys. 4), znajdujący się w przestrzeni matematycznej, tzn. w przestrzeni, w której nie działa siła ciężkości i w której nie zachodzą żadne nieprzewidziane z góry zjawiska fizyczne, jak wstrząsy, wahania temperatury itp., przy czym sposób zaczeplenia sił ściskających  $P$  do końcowych przekrojów pręta jest dowolny. Pręt taki może ulec skróceniu, nie może jednak się wygiąć niezależnie od wartości sił podłużnych, o ile nie wystąpi tu jakaś przyczyna, mogąca spowodować takie wygięcie. Gdyby natomiast taka przyczyna nie mogła zaistnieć, wyboczenie nie nastąpiłoby w ogóle.

Przyczynę «małego odchylenia» od położenia równowagi, które powoduje, w myśl przytoczonych definicji równowagi niestatecznej, dalsze zaburzenie równowagi prostoliniowej pręta znajdującego się w warunkach opisanych, możemy sobie najłatwiej przedstawić jako dwa momenty  $\mu$  zaczeplone do przekrojów końcowych pręta, działające oba w płaszczyźnie przechodzącej przez jego oś i skierowane ku sobie.

Momenty  $\mu$  wywołują wygięcie pręta powodując w każdym jego przekroju  $aa$  ramię  $y_\alpha$  siły ściskającej  $P$ . Wygięcie pręta będzie płaskie ze względu na opisany sposób zaczepienia momentów  $\mu$ .

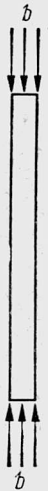
Jeżeli w tych warunkach przyjmiemy, iż momenty  $\mu$  wzrastają do swej ostatecznej wartości w sposób ciągły i nieskończenie powolny, wówczas część  $Aa$  pręta zawarta między przekrojem końcowym  $A$  a przekrojem  $aa$  znajdować się będzie w równowadze pod działaniem momentu  $\mu$ , siły  $P$  zaczepionej w punkcie  $A$  oraz pod działaniem sił wewnętrznych oddziaływania na część  $Aa$  pręta jego części  $aB$ . Równanie równowagi  $\Sigma M = 0$  ustawione dla części  $Aa$  pręta przybiera w danym razie postać (rys. 6)

$$\mu + M_\alpha - \mathfrak{M}_\alpha = 0, \quad (1)$$

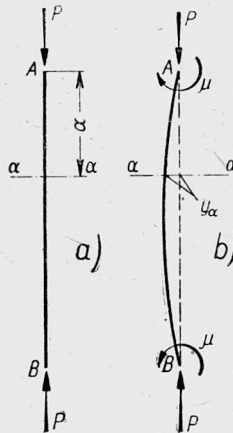
gdzie

$$M_\alpha = Py_\alpha \quad (2)$$

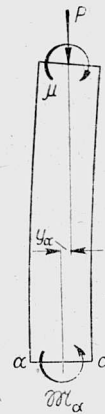
przedstawia moment siły  $P$  względem środka przekroju poprzecznego pręta  $aa$ , a  $\mathfrak{M}_\alpha$  moment sił wewnętrznych w przekroju  $aa$  względem tegoż bieguna.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

W przypadku pręta z materiału o nieograniczonej sprężystości momenty  $\mu$  mogą przybierać dowolną wartość; rola ich sprowadza się do wytworzenia ramienia  $y_\alpha$  siły podłużnej, a więc do wywołania momentów (2).

W razie gdy momenty  $\mu$  zmierzają do zera, powodują one w poszczególnych przekrojach pręta nieskończenie małe ugięcia pręta  $\eta_1$  i odpowiadające mu nieskończenie małe momenty  $\mu_1 = P\eta_1$ . Momenty  $\mu_1$  wywołują nieskończenie małe ugięcia  $\eta_2$  oraz odpowiednie momenty zginające

ce  $\mu_2 = P\eta_2$ ; momenty te wywołują z kolei nieskończenie małe ugięcia  $\eta_3$  oraz odpowiednie momenty zginające  $\mu_3 = P\eta_3$  itd. (rys. 7). Zarówno ugięcia  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ , jak i momenty  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ , są wielkościami nieskończenie małymi tego samego rzędu, a więc dodawanie do siebie we właściwy sposób ugięć  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  może doprowadzić w sumie do ugięć o wartości skończonej.

Po usunięciu momentów  $\mu$  równanie (1) przechodzi w równanie

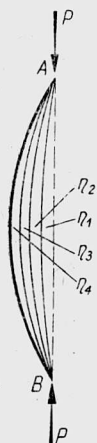
$$M_\alpha - \mathfrak{M}_\alpha = 0, \quad (3)$$

które może odpowiadać bądź typowi równowagi prostoliniowej (rys. 5a), bądź też krzywoliniowej (rys. 5b) w zależności od tego, czy siła  $P$  nie przekroczyła wartości  $P_k$ , czyli siły krytycznej, czy też ją przekroczyła. W tym ostatnim wypadku mamy właśnie do czynienia z wyboczeniem mającym miejsce w warunkach opisanych wyżej, a więc z *wyboczeniem sprężystym w sensie matematycznym*.

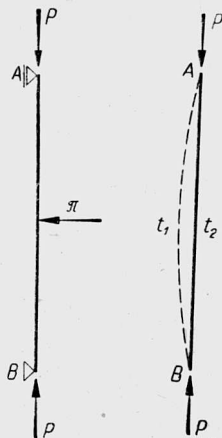
O ile by momenty  $\mu$  zostały zaczepione i usunięte w sposób nagły, a nie w sposób ciągły i nieskończenie powolny, towarzyszyłyby temu drgania pręta, a więc równania (1) i (3) moc by swoją straciły. Ostatecznie jednak dwa typy równowagi różne przy  $P < P_k$  i przy  $P > P_k$  byłyby takie same.

Poza momentami  $\mu$  rolę przyczyny zakrzywiającej, tzn. przyczyny wywołującej mimośród siły podłużnej, może odegrać też pewna siła  $\pi$  prostopadła do osi pręta, o ile tylko pręt jest na końcach podparty (rys. 8). W tych zresztą warunkach również i dwa równe momenty  $\mu$  zaczepione do końców pręta mogą być zastąpione przez dwa momenty nie równe sobie. Rolę przyczyny zakrzywiającej może odegrać wreszcie chwilowa różnica temperatur otoczenia  $t_1^\circ$  i  $t_2^\circ$  na dwóch przeciwległych powierzchniach pręta (rys. 9).

Ponieważ wygięcie pręta spowodowane przez momenty  $\mu$  lub inną przyczynę zakrzywiającą może być dowolnie małe, mamy tu do czynienia z przypadkiem, kiedy małe odchylenie od położenia równowagi wywołuje duże zaburzenie równowagi i gdy po usunięciu przyczyny wywołującej to zaburzenie nie może być już powrotu do pierwotnej postaci równowagi. Inaczej mówiąc, prostoliniowa postać równowagi pręta prostego przy wartościach sił podłużnych dowolnie większych od  $P_k$  staje się równowagą niestateczną.



Rys. 7



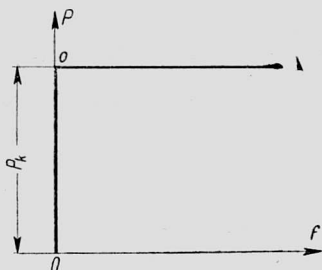
Rys. 8 Rys. 9

Jeżeli wygięcie pręta spowodowane przez dowolną przyczynę zakrzywiająca nie jest małe, wszystkie powyższe rozważania moc swoją w zasadzie zachowują, z technicznego jednak punktu widzenia nie może być mowy o przyczynie zakrzywiającej, wywołującej duże, choćby chwilowe wygięcia, gdyż pręt o dużym wygięciu nie mógłby spełniać swej roli jako prostoliniowy element konstrukcji budowlanej.

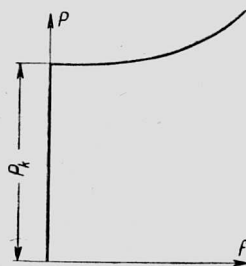
Zależność między wygięciem pręta a siłą ściskającą  $P$  po przekroczeniu przez nią wartości krytycznej, tzn. przy  $P > P_k$  wyraża się równaniem

$$\frac{EJ}{\rho} = Py, \quad (4)$$

gdzie  $\rho$  oznacza promień krzywizny, a  $y$  ugięcie pręta w dowolnym przekroju  $aa$ . Obliczając z równania (4) ugięcie  $f$  w środku pręta wyobczonego stosujemy dla  $1/\rho$  bądź wyrażenie przybliżone  $1/\rho = y''$ , bądź wyrażenie ścisłe  $1/\rho = y''/(1 + y'^2)^{3/2}$ . W pierwszym przypadku dochodzimy dla zależności między siłą  $P$  a ugięciem  $f$  do wykresu na rys. 10, w drugim do wykresu na rys. 11, skąd widać, że przybliżone równanie różniczkowe doprowadza do nieprawdopodobnego wniosku, że przy  $P > P_k$  ugięcie pręta jest nieograniczone, czemu przeczą choćby warunki geometryczne zadania. Z wykresu na rys. 11 wynika jednak również, że po przekroczeniu przez siłę  $P$  wartości krytycznej odkształcenia pręta wzrastają bardzo szybko.



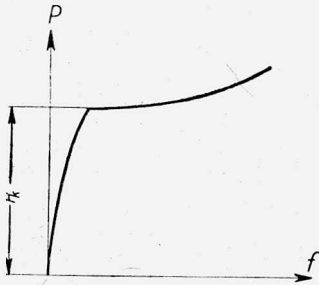
Rys. 10



Rys. 11

Wykres na rys. 11 odpowiada stanowi rzeczy, jaki istnieje po usunięciu przyczyny zakrzywiającej pręt. Przed usunięciem tej przyczyny zależność między siłą  $P$  a ugięciem  $f$  powinna się wyrażać raczej za pomocą wykresu na rys. 12, gdyż przy małych wartościach ugięć spowodowanych przez momenty  $\mu$ , siły  $\pi$  lub inne przyczyny zakrzywiające, między siłami  $P$  a ugięciami  $f$  będzie istniała zależność zbliżona do proporcjonalności. Z drugiej jednak strony, przy małych wartościach momentów  $\mu$ , sił  $\pi$  itd. oraz wywołanych przez nie ugięć uzasadnione jest twierdzenie, że wykres z rys. 12 pokrywa się w skali właściwej (nieskażonej) z wykresem z rys. 11.

W przypadku gdy pręt ściskany siłą  $P$  jest w jednym końcu utwierdzony, a w drugim swobodny, należy tylko rozumieć pod  $f$  przesunięcie swobodnego końca pręta, a wówczas wszystkie powyższe rozważania pozostają bez zmiany.



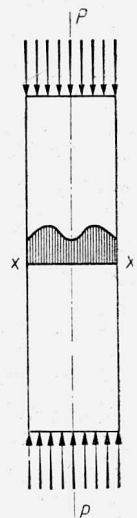
Rys. 12

W rezultacie, w rozumieniu matematycznej teorii sprężystości, a więc w *sensie matematycznym*, wyboczenie polega na tym, że pręt sprężysty, pierwotnie prosty i ściskany siłami podłużnymi ściśle osiowymi, zakrzywiony pod wpływem jakiejś znikającej przyczyny zewnętrznej, nie wraca po usunięciu tej przyczyny do swego kształtu prostoliniowego, o ile siła ściskająca przekroczyła pewną wartość zwaną siłą krytyczną. Taki schemat statyczny, aczkolwiek nie dający się w rzeczywistości zrealizować,

nie stoi w sprzeczności ani z podanym w paragrafie 2 tego rozdziału opisem zjawiska wyboczenia, ani z pojęciem wyboczenia w sensie technicznym, któreśmy ustalili na podstawie sprawozdań z obserwacji zjawiska.

Poszczególne materiały budowlane po przekroczeniu w nich przez naprężenia granicy sprężystości różnią się od siebie pod względem własności mechanicznych w znacznie większym stopniu, niż to ma miejsce w granicach sprężystości. Z tego powodu nie podobna dać takiego schematu *wyboczenia niesprężystego w sensie matematycznym*, który by, podobnie jak przytoczony schemat wyboczenia sprężystego, był niezależny ani od rodzaju materiału pręta, ani od jego kształtu. Omówimy więc tu wyboczenie niesprężyste w sensie matematycznym na paru przypadkach szczególnych.

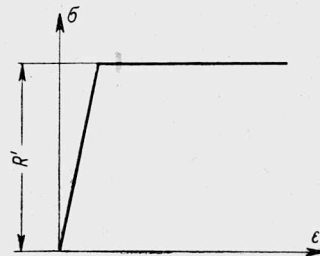
Weźmy pod uwagę pręt pryzmatyczny o przekroju prostokątnym (rys. 13) obciążony równomiernie na każdej z podstaw i znajdujący się w przestrzeni matematycznej zdefiniowanej wyżej. Pręt uważamy za sprężysty z tym jednak, że przy pewnej wartości naprężenia (granica sprężystości) materiał pręta staje się plastyczny, tak iż zależność między naprężeniem a odkształceniem jednostkowym odpowiada wykresowi na rys. 14, na którym  $R'$  oznacza granicę sprężystości. Może to więc być np. pręt ze stali.



Rys. 13

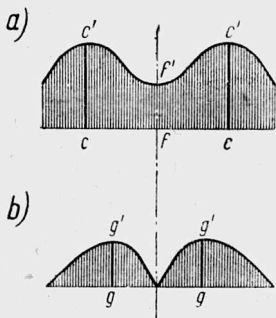
Liczymy się dalej z rzeczywistym rozkładem sił wewnętrznych i przesunięć w pręcie sprężystym obliczonym według zasad teorii sprężystości

bez uciekania się do założenia płaskich przekrojów. W tych warunkach równomierność rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym pręta zachowana zostaje tylko na podstawie graniastostupa sprężystego tworzącego rozpatrywany pręt ściskany. W razie nierównomiernego, chociaż symetrycznego względem osi pręta rozkładu sił ściskających na podstawach pręta, nierównomierność rozkładu naprężeń w poszczególnych przekrojach poprzecznych pręta jest tym bardziej uzasadniona. Według obliczeń S. Timoszenki<sup>1)</sup> oczekiwać należy, że największe odchylenia od równomiernego rozkładu naprężeń będą miały miejsce w środku długości pręta, przy czym naprężenia normalne równoległe do osi pręta będą się w tym przekroju rozkładały według wykresu na rys. 15a, a naprężenia styczne według wykresu na rys. 15b.



Rys. 14

Z rys. 15a wynika, że w przypadku pręta stalowego przy stałym wzrastaniu sił podłużnych naprężenia przekroczą w pewnej chwili w środku długości pręta granicę sprężystości i zgodnie z wykresem na rys. 14 materiał pręta stanie się plastyczny w całym przekroju z wyjątkiem punktu środkowego  $f$ , tzn. punktu położonego na osi pręta w jego środku. W ten sposób pręt znajdzie się w warunkach układu złożonego z dwóch prętów połączonych przegubem (rys. 16), a więc układu będącego w stanie równowagi niestatecznej. Rolę siły krytycznej odegra tu ta wartość siły  $P$ , przy której powstanie opisany stan rzeczy.



Rys. 15

Jako drugi przypadek wybożenia niesprężystego w sensie matematycznym weźmiemy pod uwagę pręt stalowy o przekroju poprzecznym

kolistym i o przekroju osiowym złożonym z dwóch równych sobie wydłużonych trapezów (rys. 17). Pręt ten uważamy za pozostający w przestrzeni matematycznej, materiał jego za jednorodny i początkowo sprężysty (np. stal), oś za doskonale prostą, a obciążenie za ściśle osiowe.

Jeżeli założymy, że w poszczególnych przekrojach pręta naprężenia normalne rozłożone są w sposób równomierny, wówczas największe naprężenia w pręcie będą miały miejsce w przekroju środkowym  $CC$ . Przy stałym wzrastaniu sił podłużnych  $P$  powstanie w pewnej chwili taki stan rzeczy, że najpierw w przekroju  $CC$  pręta o polu najmniejszym, a następ-

<sup>1)</sup> S. P. Timoszenko, *Kurs teorii uprugosti*, t. 1, 1914, str. 143.

nie w części pręta zbliżonej do przekroju  $CC$ , zawartej między dwoma przekrojami zbliżonymi do siebie  $aa$  i  $bb$  materiał pręta stanie się plastyczny, w innych zaś przekrojach posiadających pola przekrojów poprzecznych większe granica sprężystości nie zostanie jeszcze przekroczona.

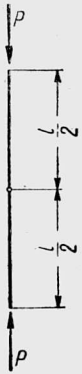
Ponieważ w stanie plastycznym stal pręta doznaje odkształceń prawie bez przyrostu naprężeń, każda dowolnie mała przyrzyna zakrzywiająca (np. momenty  $\mu$  lub siła  $\pi$ ) może spowodować nachylenie się względem siebie części pręta  $AaaA$  i  $BbbB$  i wywołać tym sposobem jego zniszczenie jako pręta prostego.

Układ, jaki się tu wytworzy, złożony z dwóch ciał sprężystych połączonych ciałem plastycznym  $aabb$  jest układem geometrycznie zmiennym, a równowaga jego jest niestateczna. Układ ten, podobnie jak w przypadku poprzednio opisanym, znajduje się w warunkach układu złożonego z dwóch prętów połączonych przegubem (rys. 16). Wartość siły podłużnej  $P$  odpowiadająca takiemu stanowi rzeczy jest w tym wypadku siłą krytyczną.

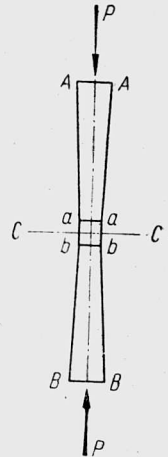
W przypadku prętów ściskanych z materiałów kruchych (np. z betonu) wybočenje niesprężyste w sensie matematycznym możemy sobie przedstawić w sposób następujący.

Na podstawie wykresów na rys. 15a i 15b należy oczekiwać największych naprężeń stycznych  $\tau_{max}$  w środku długości pręta około punktów  $g$  przekroju poprzecznego a najmniejszych w punkcie  $f$ . W tych warunkach przy stale wzrastających siłach  $P$  pęknięcia materiału pręta ściskanego będą miały miejsce we wszystkich punktach środkowego przekroju pręta z wyjątkiem punktu  $f$  leżącego na osi pręta w środku przekroju. Punkt ten będzie więc odgrywał rolę przegubu, a cały pręt, podobnie jak w przypadku poprzednim, możemy uważać za układ złożony z dwóch prętów połączonych przegubem (rys. 16). Siłą krytyczną będzie w tym wypadku ta siła  $P$ , która wywołała pęknięcia we wszystkich punktach przekroju środkowego pręta z wyjątkiem punktu  $f$ .

Rozpatrzmy teraz pręt drewniany i przedstawmy go sobie jako szereg włókien sprężystych, między którymi przestrzeń wypełniona jest jakąś substancją ściśliwą przedstawioną na rys. 18 za pomocą pól zacieniowanych. Przy obciążeniu równomiernie rozłożonym na podstawach pręta ściskaniu podlega zarówno każde włókno bezpośrednio, jak i substancja zawarta między nimi. Ściśnięta masa ulega zgęszczeniu i nagromadza się w największej ilości koło środka pręta powodując tu największe rozchylenie się włókien.



Rys. 16



Rys. 17



Włókna ściskanego pręta drewnianego wygięte we wspomniany sposób będą w dalszym ciągu wyginane siłami podłużnymi, przy czym największemu wygięciu ulegną włókna zewnętrzne, a najmniejszemu — włókna środkowe (osiowe). Kiedy w środku długości pręta wszystkie włókna z wyjątkiem osiowego ulegną złamaniu, wówczas pręt znajdzie się w warunkach układu złożonego z dwóch prętów, połączonych przegubem (rys. 16), czyli znajdzie się w warunkach równowagi niestatecznej. Wartość siły podłużnej, która taki stan rzeczy spowoduje, będzie siłą krytyczną  $P_k$ .

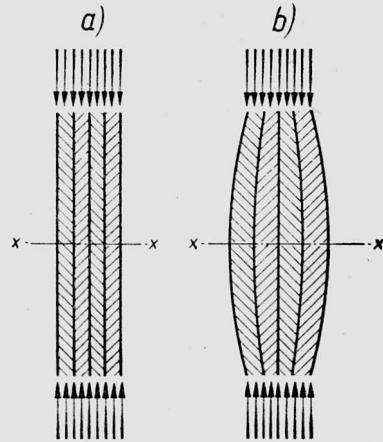
Przykładów tego rodzaju, co cztery przytoczone wyżej, można by podać wiele. Przykłady te mają na celu stwierdzić, że są przypadki, gdy przy ściśle osiowym działaniu ściskających sił podłużnych, lub ogólniej przy siłach ściskających rozmieszczonych symetrycznie względem osi pręta, może po przekroczeniu przez naprężenia granicy sprężystości wytworzyć się taki stan rzeczy, że pręt prosty ściskany ściśle osiowo stanie się układem geometrycznie zmiennym, a równowaga jego niestateczną. Będą to właśnie przypadki wyboczenia niesprężystego w sensie matematycznym.

Podkreślić należy, iż w przypadkach wyboczenia niesprężystego w sensie matematycznym przekroczenie przez siłę podłużną w pręcie siły krytycznej pozostawia odkształcenia trwałe. Przypadki te różnią się więc wprawdzie zasadniczo od przypadków wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym, jednak i tu, podobnie jak przy wyboczeniu sprężystym w sensie matematycznym, nie ma sprzeczności przytoczonych schematów mechanicznych z wprowadzonym wyżej pojęciem wyboczenia w sensie technicznym.

Ujmując w jedną definicję *wyboczenie w sensie matematycznym* zarówno sprężyste, jak i niesprężyste należy określić to pojęcie jako przypadek niestateczności równowagi ściskanego osiowo pręta prostego przy wartości siły podłużnej przekraczającej pewną wartość zwaną siłą krytyczną.

### 3. Wyboczenie w sensie fizycznym

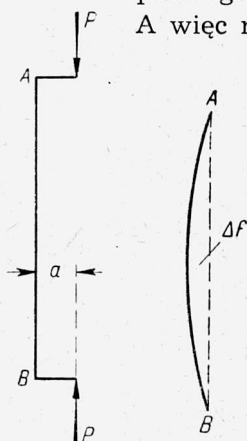
W prawdziwych, fizycznych warunkach pracy ściskanego pręta prostego w konstrukcji budowlanej nie można liczyć ani na urzeczywistnienie się omówionych w paragrafie poprzednim warunków przestrzeni ma-



Rys. 18

tematycznej, ani na prostoliniowość osi pręta, ani na osiowość jego obciążenia.

Wszystkie niemal odchylenia warunków, w których znajduje się rzeczywisty pręt prosty, od powyższych założeń można wyrazić przez wprowadzenie do schematu na rys. 1, dotyczącego wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym, pewnego małego mimośrod (rys. 19) lub też pewnego małego początkowego wykrzywienia pręta (rys. 20).



Rys. 19

Rys. 20

A więc np. różnica temperatury na dwóch przeciwległych powierzchniach pręta wywołuje zakrzywienie się jego i jest źródłem mimośrod siły ściskającej  $P$ ; niejednorodność materiału powoduje tu większy skrót włókien z jednej strony niż z drugiej i znowu jest źródłem początkowego zakrzywienia, wreszcie wstrząsy mogą pociągnąć za sobą bądź wygięcie pręta, bądź też przesunięcie się siły względem jego osi i przez to spowodować mimośród siły podłużnej. W podobny sposób wprowadzając pewne początkowe mimośrod lub zakrzywienia możemy wprowadzić do schematu z rys. 1 takie okoliczności pracy pręta ściskanego, jak odchylenia od jego teoretycznego kształtu i obciążenia.

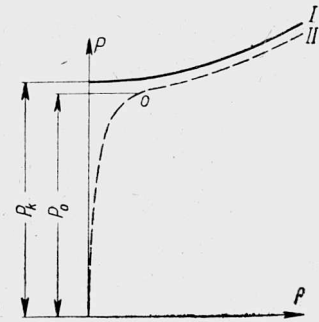
Początkowe zakrzywienie pręta zastąpimy w dalszych rozważaniach przez początkowy mimośród siły ściskającej, co te rozważania uprości nie zmniejszając ich ogólności.

W rezultacie wprowadzamy więc do schematu na rys. 1 pewien mimośród  $e = a$  siły ściskającej  $P$ , jako wyraz niezgodności warunków pracy ściskanego pręta sprężystego z warunkami przyjętymi w definicji wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym, na razie zakładając jednak w dalszym ciągu, że pręt wykonany jest z materiału o nieograniczonej sprężystości. Schemat z rys. 19 zasadniczo różni się od schematu z rys. 1, z którego korzystaliśmy wyżej, chodzi bowiem o to, że mimośród siły ściskającej występuje w danym wypadku nawet przy najmniejszych wartościach siły  $P$ ; stąd od początku mamy tu do czynienia z jednoczesnym ściskaniem i zginaniem, a nie, jak poprzednio, z samym tylko ściskaniem. Ma to również miejsce i przy pewnym początkowym wykrzywieniu pręta.

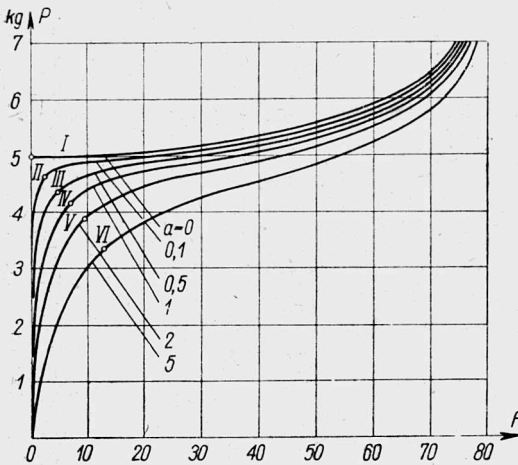
Mimośród siły  $P$  będący wyrazem mechanicznym odchylenia warunków rzeczywistych, w jakich znajduje się ściskany pręt prosty w konstrukcji budowlanej, od omówionych wyżej warunków hipotetycznych, poza założeniem nieograniczonej sprężystości, musi być uważany za mały w porównaniu z wymiarami pręta, tak mały, aby pręt nie wykazywał do czasu *dających się zmierzyć ugięć*. Można to przedstawić sobie w ten

sposób, iż mimośród  $a$  wywołuje momenty zginające  $\mu_1 = Pa$ . Momenty  $\mu_1$  wywołują ugięcia  $\eta_1$ , te zaś powodują nowe momenty siły  $P$  i nowe ugięcia  $\eta_2$ . Otrzymane w ten sposób kolejne ugięcia  $\eta$  dodając się do siebie mogą dać łącznie pewne ugięcie technicznie dostrzegalne, a więc dające się zmierzyć.

Ponieważ w rozpatrywanym tu zadaniu mimośród siły ściskającej występuje nawet przy najmniejszych wartościach siły  $P$ , zależność między ugięciami  $f$  pręta w środku, a wartością siły będzie miała kształt, wyrażony za pomocą krzywej II na rys. 21 podobny jak na skażonym wykresie na rys. 12. Krzywa posiada w okolicach punktu  $o$  wyraźne załamanie; jest ono tym wyraźniejsze, im mniejszy jest mimośród  $a$  siły  $P$ . Aby to wykazać, umieszczamy na jednym rysunku (rys. 22) krzywe zależności ugięć pręta  $f$  od sił ściskających  $P$  dla różnych mimośródów oraz dla ugięć pręta w przypadku wyboczenia w sensie matematycznym po przekroczeniu siły krytycznej (krzywa I). Korzystamy tu z krzywych dla pręta stalowego w jednym końcu utwierdzonego, a na drugim swobodnego, o długości 100 mm i o przekroju poprzecznym 12 mm  $\times$  1 mm. Wyznaczenie ugięć  $f$  polega w tym wypadku na rozwiązaniu równania



Rys. 21



Rys. 22

gdzie dla  $\varrho$  należy przyjmować ścisły wzór na krzywiznę wygiętej osi pręta.

$$\frac{EJ}{\varrho} = P(a + y), \quad (5)$$

gdzie dla  $\varrho$  należy przyjmować ścisły wzór na krzywiznę wygiętej osi pręta.

Punkty  $o$  załamania krzywych na wykresach rys. 22 odpowiadają pewnym wartościom  $P_o$ , siły ściskającej  $P$  posiadającym tę własność, że po jej przekroczeniu ugięcia  $f$  wzrastają szybciej niż odpowiadające im siły ściskające, podczas gdy przed przekroczeniem wartości  $P_o$  ugięcia i siły zmieniają się wolno w stosunku zbliżonym do stosunku proporcjonalności. Punkty  $o$  odpowiadają w ten sposób tym wartościom  $P_o$  sił ściskających, przy których grozi prętowi ściskanemu bardzo wielkie wygięcie.

Podobnie jak przy wyboczeniu sprężystym w sensie matematycznym przy sile  $P = P_k$  następuje niedopuszczalnie wielkie wygięcie pręta, tak samo przy małym mimośrodzie  $a$  siły  $P$  następuje niedopuszczalnie wielkie wygięcie przy  $P = P_o$  z tym jednak, że siła  $P_k$  będzie większa od wszystkich sił  $P_o$ . Mamy w tym wypadku właśnie do czynienia z *wyboczeniem sprężystym w sensie fizycznym*. Z kinematycznego punktu widzenia pręt ściskany siłą  $P$  z małym mimośrodem  $a$  tej siły znajduje się w podobnych warunkach pod względem niebezpieczeństwa wygięcia, co pręt ściskany osiowo. Z energetycznego punktu widzenia zachodzi tu jednak istotna różnica, ponieważ w przypadku pręta ściskanego osiowo przy  $P \geq P_k$  ma miejsce nierówność

$$V < T, \quad (6)$$

gdzie  $V$  oznacza energię zginania, a  $T$  pracę sił wewnętrznych, podczas gdy w przypadku pręta ściskanego z mimośrodem  $a$

$$V > T. \quad (7)$$

Nierówność (6) odpowiada równowadze niestatecznej, a nierówność (7) równowadze statecznej.

Wartość siły podłużnej  $P = P_k$  odgrywać tu będzie rolę podobną do tej, jaką odgrywa zero w stosunku do liczb dodatnich i ujemnych. Przy  $P = P_k$  może, mianowicie, pręt ściskany posiadać i kształt prosty i kształt zakrzywiony przy nieskończenie małej jednak wielkości ugięcia pręta. Można więc w tym sensie mówić jakby o wyboczeniu nieskończenie słabym.

Ściskanie mimośrodowe przy małym mimośrodzie  $a$  i przy dużych, niedopuszczalnych odkształceniach może być nazwane quasi-wyboczeniem. Odpowiednio do tego będziemy zaliczać do *równowagi quasi-niestatecznej* takie przypadki, które z kinematycznego punktu widzenia odpowiadają definicji równowagi niestatecznej, z energetycznego zaś punktu widzenia definicji równowagi statecznej.

Rozumiemy tu pod pojęciem «mały» taki mimośród, który zarówno sam, jak i spowodowane przez niego ugięcie, nie mogą być zmierzone i którego wielkość jest nieznaną. W ten sposób granica między zjawiskiem wyboczenia sprężystego w sensie fizycznym a ściskaniem mimośrodowym lub ściślej jednoczesnym zginaniem i ściskaniem ma charakter niejako konwencjonalny, zależny od doskonałości środków pomiarowych.

A więc wyobraźmy sobie, że środki pomiarowe, jakimi rozporządzamy w danym wypadku, nie pozwalają zmierzyć długości mniejszej od  $w$ . W tych warunkach każdy mimośród siły podłużnej  $a$  mniejszy od  $w$  jest dla nas niedostrzegalny, a zatem technicznie nie istniejący; to samo

dotyczy ugięcia pręta w środku  $f$  mniejszego od  $w$  oraz sumy  $a + f$  (rys. 23).

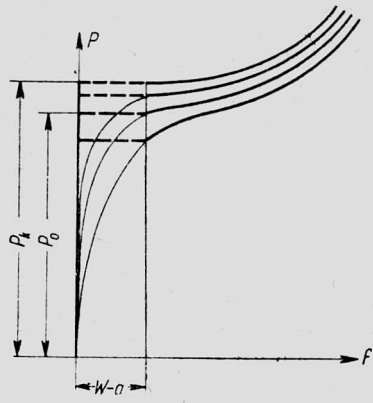
Jeżeli weźmiemy pod uwagę pręt sprężysty ściskany siłami  $P$  z tym, że suma  $a + f < w$ , wówczas rozpatrywany przypadek nie będzie się z punktu widzenia obserwatora, tzn. z technicznego punktu widzenia, niczym różnił od przypadku pręta sprężystego ściskanego osiowo. Aby to pogłębić, przeprowadzamy na rys. 24 przedstawiającym dla różnych mimośrodków  $a$  zależność  $P = F(f)$  prostą równoległą do osi  $P$  w odległości  $w - a$  od tej osi. O ile punkty  $i$  przecięcia się tej prostej z krzywymi wykresu znajdują się na rysunku na prawo od odpowiednich punktów  $o$ , to stwarza się dla obserwatora taki obraz, jak gdyby do pewnej wartości  $P_0$  siły  $P$  pręt ściskany pozostawał prosty, a po przekroczeniu tej wartości doznawał od razu ugięć szybko wzrastających. Na rysunku przebieg zjawiska narzucający się obserwatorowi przedstawiony jest za pomocą grubszych linii pełnych lub przerywanych. Mielibyśmy tu obraz odpowiadający opisowi wybočenja w sensie technicznym, przy czym rolę siły krytycznej  $P_k$  odgrywałyby dla poszczególnych mimośrodków  $a$  odpowiednie siły  $P_0$ . Można wykazać, że siła  $P_k$  jest granicą sił  $P_0$  przy mimośrodku  $a$  dążącym do zera. W tym celu uciekamy się do wykresu na rys. 22.



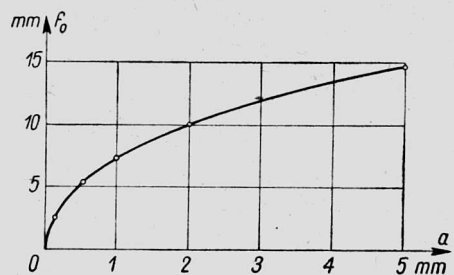
Rys. 23

Bierzemy z rys. 22 wartości  $f_0$  ugięć odpowiadające poszczególnym punktom  $o$  na krzywych sporządzonych dla ugięć prętów ściskanych siłami  $P$  z mimośrodkami  $a$  i znajdujemy zależność

$$f_0 = F_1(a), \tag{8}$$



Rys. 24



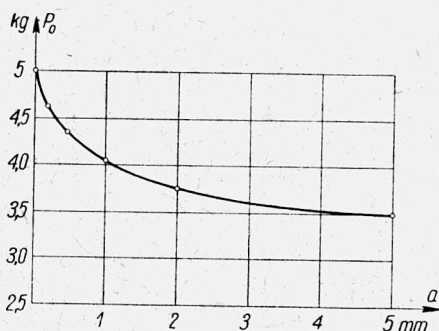
Rys. 25

którą przedstawiamy na wykresie rys. 25. Z wykresu widać, że w miarę zmniejszania się mimośrodu  $a$  ugięcia  $f_0$  szybko maleją.

W podobny sposób, opierając się w dalszym ciągu na rys. 22, możemy sporządzić wykres zależności

$$P_0 = F_2(a), \tag{9}$$

który przedstawiony jest na rys. 26. Z wykresu tego wynika, że wielkość  $P_o$  szybko spada w miarę zwiększania się mimośrodru  $a$ . Należy wziąć pod uwagę, iż krzywa I na rys. 22 wykonana jest w założeniu, że przyczyna zakrzywiająca (np. momenty  $\mu$ ), która wywołała mimośród siły



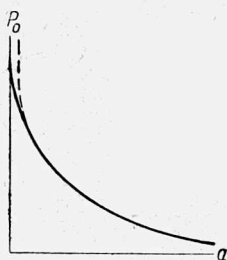
Rys. 26

ściskającej  $P$ , działającej osiowo, została usunięta. Gdyby przyczyna taka nie zaistniała, pręt prosty ściskany osiowo i znajdujący się w przestrzeni matematycznej nie uległby zginaniu w ogóle i dlatego krzywa wykresu na rys. 26 powinna by zbliżać się do osi  $P$  w sposób asymptotyczny (rys. 27). Wychodząc jednak z założeń, na których zbudowana została krzywa I z rys. 22, możemy przyjąć na podstawie wykresu z rys. 26, że siła krytyczna  $P_k$  stanowi

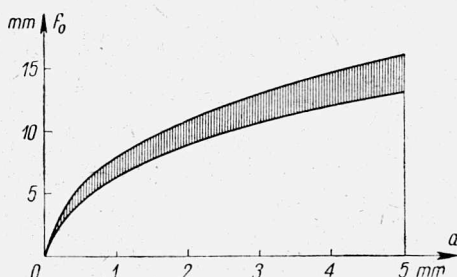
granice, do której zmierza siła  $P_o$  przy mimośrodku  $a$  dążącym do zera, czyli że

$$P_k = \lim_{a \rightarrow 0} P_o = \lim_{a \rightarrow 0} F_2(a).$$

Wobec trudności ściślego wyznaczenia położenia punktu o krzywe (8) i (9) powinny być właściwie zastąpione przez odpowiednie pasy funkcjonalne (rys. 28), co jednak nie wpłynęłoby na wyniki niniejszych rozważań.



Rys. 27



Rys. 28

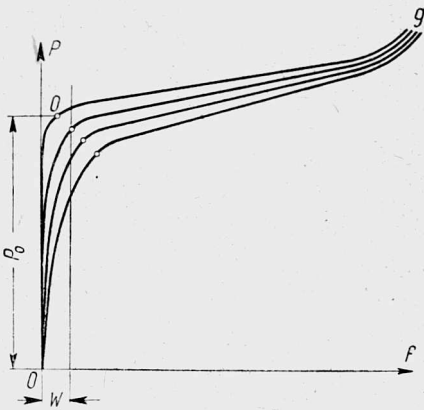
Analogia między znaczeniem siły  $P_o$  w przypadku wyboczenia sprężystego w sensie fizycznym a znaczeniem siły  $P_k$  w przypadku wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym może być podkreślona na podstawie następujących rozważań.

Wyobraźmy sobie, że jedna z krzywych na rys. 22 została zastąpiona w okolicy punktu o bądź przez dwie przecinające się w tym punkcie proste w różny sposób nachylone względem osi  $f$ , bądź też przez dwie płaskie krzywe nie mające w punkcie o wspólnej stycznej (rys. 29). Gdy w tych

warunkach siła  $P$  przybiera wartość  $P_o$ , wówczas najmniejszy jej przyrost powoduje, iż zamiast zależności wyrażonej przez prostą  $Oo$  lub krzywą  $Ono$ , pręt zacznie się wyginać zgodnie z zależnością wyrażoną przez prostą  $or$  lub krzywą  $omr$ . Ponieważ prosta  $Oo$  odpowiada tu małym wygięciom pręta, prosta zaś  $or$  dużym, więc przy  $P = P_o$  grozi prętowi, że jakaś zewnętrzna okoliczność zwiększająca siłę ściskającą  $P$  nawet o wielkość bardzo małą w stosunku do całej siły  $P_o$  może wywołać niedopuszczalne z punktu widzenia technicznego wygięcie pręta, a więc podobnie jak przy  $P = P_k$  w przypadku pręta ściskanego osiowo.

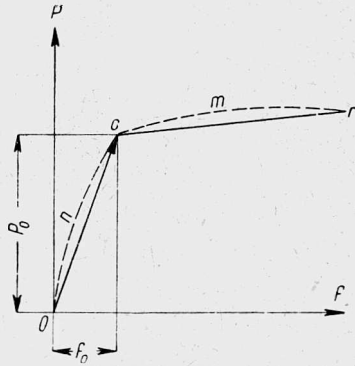
W rzeczywistości przejście od części  $Oo$  krzywych na rys. 30 i na rys. 22 do ich części  $og$  nie odbywa się jednak w sposób tak wyraźnie zaakcentowany, jak to podano na rys. 29, lecz na pewnym odcinku  $o'o''$  każdej z krzywych (rys. 31), czemu odpowiada przyrost siły  $P$  o pewną wielkość skończoną  $\Delta P$  tym mniejszą, im mniejszy jest mimośród  $a$ . A więc np. dla krzywych na rys. 22 przyrosty odczytane ze skali wykresów wynoszą:

przy $a = 0,1$ mm	$\Delta P = 0,4$ kg	$\Delta P : P = 0,08$ ,
przy $a = 0,5$ mm	$\Delta P = 1,0$ kg	$\Delta P : P = 0,20$ ,
przy $a = 1,0$ mm	$\Delta P = 1,5$ kg	$\Delta P : P = 0,30$ .



Rys. 30

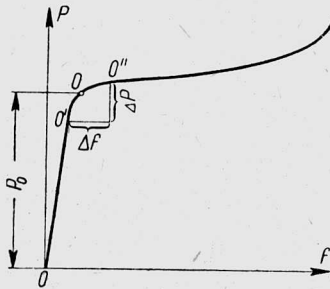
przy wyboczeniu sprężystym w sensie matematycznym i przy wyboczeniu sprężystym w sensie fizycznym.



Rys. 29

Dla najmniejszego z przytoczonych tu mimośrodów,  $a = 0,1$  mm, stosunek przyrostu siły do rzędnej punktu  $o'$  wynosi więc 8%. Ponieważ punkt  $o$  leży mniej więcej pośrodku między punktami  $o'$  i  $o''$  i ponieważ krzywe I i II na rys. 22 prawie się pokrywają ze sobą na odcinku  $og$ , można stąd ocenić różnicę między siłą  $P_k$  a siłą  $P_o$  odpowiadającą mimośrodkowi  $a = 0,1$  mm na mniej niż 4%. Gdybyśmy odcinek  $w = a = 0,1$  mm przyjęli tu za najmniejszy, jaki potrafimy zmierzyć, różnica 4% między  $P_k$  a  $P_o$  odgrywałaby rolę różnicy między siłami krytycznymi

Ponieważ jednak mimośród  $a = 0,1$  mm stanowi zaledwie  $1/1000$  długości rozpatrywanego pręta i  $1/10$  wysokości jego przekroju poprzecznego, należy oczekiwać, że dla prętów mających zastosowanie w technice przy tym samym mimośrodku stosunek  $P_k : P_o = 1,04$  ulegnie znacznemu obniżeniu. Przyjmujemy więc, że  $P_o = P_k$  i będziemy nazwę *siły krytycznej* stosowali również i do siły  $P_o$ .



Rys. 31

W rezultacie pod *wybozieniem sprężystym w sensie fizycznym* będziemy rozumieli zjawisko polegające na tym, że pręt wykonany z materiału doskonale sprężystego, doskonale prosty i ściskany siłami zaczepionymi z technicznie niedostrzegalnym (a więc nie dającym się zmierzyć) mimośrodem doznaje do pewnej wartości siły ściskającej, zwanej *siłą krytyczną*

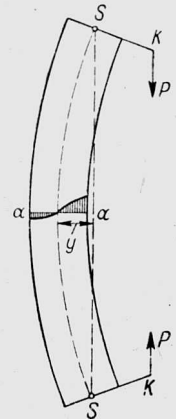
tylko ugięć niedostrzegalnych, po przekroczeniu zaś tej wartości ugięć technicznie wyraźnych i szybko wzrastających.

Wobec zastrzeżeń poczynionych co do wielkości mimośrodu siły ściskającej zarówno w tej definicji, jak i w przytoczonej w paragrafie 1 tego rozdziału definicji *wybozenia w sensie technicznym* można twierdzić, że ta ostatnia obejmuje również i przypadek *wybozenia sprężystego w sensie fizycznym*.

Wyboczenie niesprężyste w sensie fizycznym występuje wówczas, gdy wartość siły ściskającej, przy której ma miejsce dające się zmierzyć i szybko wzrastające ugięcie pręta (siła krytyczna), wywołuje przekroczenie granicy sprężystości przez naprężenia normalne w skrajnych włóknach jednego z przekrojów poprzecznych pręta ściskanego.

W tym wypadku sporządzenie krzywych odpowiadających krzywom podanym na rys. 22 lub na rys. 30 dla prętów, dla których granica sprężystości została w pewnym przekroju poprzecznym przekroczona, natrafia na trudności, gdyż równania teorii sprężystości nie mogą tu być zastosowane. Niekiedy jest ono jednak możliwe i wówczas musimy przyjąć, że założenie płaskich przekrojów moc swą tu zachowuje oraz że naprężenia rozkładają się w każdym normalnym przekroju poprzecznym pręta ściskanego według znanego nam prawa.

Weźmy pod uwagę pręt  $SS$ , zginany siłami podłużnymi  $P$ , zaczepionymi z pewnym stałym mimośrodem  $\overline{KS} = a$  (rys. 32).

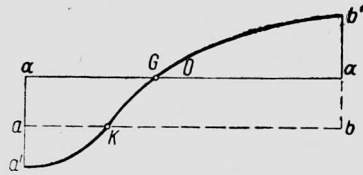


Rys. 32



Niech prosta  $aa'$  na rys. 33 oznacza pewien przekrój poprzeczny pręta, a prosta  $ab \parallel aa'$  — wykres naprężeń ściskających, odpowiadających ściskaniu osiowemu.

Przypuśćmy, iż naprężenia spowodowane zginaniem pręta wyrażają się krzywą  $aa'KGb'a$ . Dodając do siebie oba rodzaje naprężeń, znajdujemy wykres naprężeń w przekroju  $aa'$  w postaci rzędnych krzywej  $aa'KGb'b$ . W przypadkach gdy w grę wchodzi może wyboczenie, punkt  $a'$  wykresu znajduje się poniżej punktu  $a$ , czyli że mamy w danym przekroju do czynienia z naprężeniami różnych znaków. Gdy chodzi o najważniejszy zwykle początek wyginania się pręta, naprężenia rozciągające  $aa'$  mniejsze co do wielkości bezwzględnej od naprężeń ściskających  $bb'$ , nie przekraczają zwykle granicy sprężystości. Upraszcza to ustalenie prawa rozkładu naprężeń w ściskanej części przekroju  $aa'$ .



Rys. 33

Ustawiając dla części pręta  $Sa$  (rys. 32) dwa równania równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych, działających w dowolnym przekroju  $aa'$ , znajdujemy

$$\int_A \sigma dA = P, \quad (10)$$

$$\int_A \sigma z dA = P(y + a). \quad (11)$$

Jeżeli oznaczyć przez  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  jednostkowe wydłużenia na obydwóch krawędziach pręta, a przez  $h$  wysokość przekroju, wówczas otrzymamy dla krzywizny wygiętej osi pręta wyrażenie

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}. \quad (12)$$

Po nadaniu określonego kształtu krzywej  $a'KGb'$ , czyli po ustaleniu zależności

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (13)$$

możemy, rozwiązując za K á r m á n e m łącznie równania (10)-(12), znaleźć w sposób taki sam, jak dla prętów sprężystych o stałym współczynniku  $E$ , równanie odkształconej w postaci

$$NJ \frac{d^2 y}{dx^2} = P(y + a), \quad (14)$$

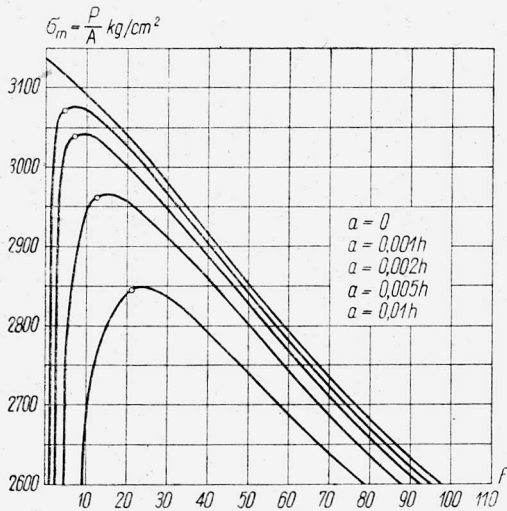
gdzie  $N$  jest to wielkość stała, od  $y$  niezależna, odgrywająca tu rolę podobną do tej, jaką odgrywa przy wyboczeniu sprężystym współczynnik sprężystości  $E$ .

Całkowanie równania (14) wykonane przez K á r m á n a sposobem wykreślnym pozwoliło mu sporządzić dla stali wykres przedstawiony na rys. 34, a wyrażający dla pręta, którego smukłość wynosi  $l/i = 60$ , i dla różnych mimośrodków  $a$  zależność między ugięciami pręta a siłami  $P$  (ściślej naprężeniami  $P/A$ ), przy których mają miejsce te ugięcia.

Zależność  $P = F(f)$ , otrzymana w ten sposób teoretycznie, została przez K á r m á n a dla pewnych wypadków sprawdzona doświadczalnie. Aczkolwiek przyjęta przez K á r m á n a forma zależności (13) była przez póź-

niejsze badania kwestionowana, nie wpływa ona jednak na sam kształt krzywych wykresu z rys. 34, z których możemy więc dalej korzystać bez zastrzeżeń.

Wprawdzie wykres na rys. 34 otrzymany został dla stali posiadającej wyraźny okres plastyczności, jednak i dla innych materiałów budowlanych należy w kształcie krzywych  $P = F(f)$  oczekiwać mniej lub więcej wyraźnego załamania wywołanego przez to, że materiały te przy zginaniu dają zawsze szybko wzrastające ugięcia, skoro siła zginająca przekroczy pewną wartość.



Rys. 34

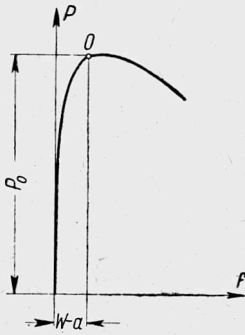
Oznaczamy przez  $o$  punkty wierzchołkowe krzywych wykresu na rys. 34, tzn. punkty, w których następuje załamanie się krzywych ugięć. Siły  $P_o$  odpowiadające punktom  $o$  będą miały podobne znaczenie, jak siły  $P_o$  na wykresie z rys. 22, gdyż poczynając od tych wartości sił pręty będą wykazywały prędko wzrastające ugięcia. Ugięcia odpowiadające siłom  $P_o$  będziemy oznaczali, jak poprzednio, przez  $f_o$ . Różnica między znaczeniem sił  $P_o$  na wykresie 22 i na wykresie na rys. 34 polega na tym, że dla każdego mimośrodu  $a$  w pierwszym przypadku po przekroczeniu wartości  $P_o$  siły podłużne wzrastają, choć bardzo powoli, a w drugim maleją. W tym ostatnim wypadku siła  $P_o$  odpowiada właściwie  $\max P$ .

Aby, mając do rozporządzenia krzywe na rys. 22, wytworzyć sobie obraz *wybočenja niesprężystego w sensie fizycznym*, rozumiemy w sposób podobny, jak w przypadku *wybočenja sprężystego w sensie fizycznym*. A więc wprowadzamy tu, tak jak poprzednio, pewien mimośród  $e = a$  siły ściskającej  $P$  jako wyraz niezgodności warunków pracy pręta ściskanego z warunkami definicji wybočenja sprężystego w sensie matematycz-

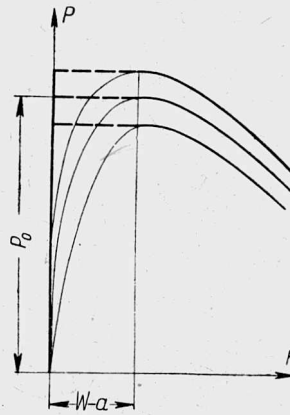
nym; mimośród ten uważamy za tak mały, że pręt nie wykazuje dających się zmierzyć ugięć, dopóki siła  $P$  nie przekroczy wartości  $P_0$ .

Jeżeli przyjmiemy, tak jak poprzednio, że  $w$  oznacza najmniejszy odcinek, jaki w ogóle potrafimy zmierzyć, to ugięcie  $f$  odpowiadające warunkowi, że  $a + f < w$  będzie niedostrzegalne. Aby to uwydatnić, przeprowadzamy na rys. 35 przedstawiającym jedną z krzywych w rodzaju krzywych na rys. 34 prostą równoległą do osi  $P$  w odległości  $w - a$  od niej. Na podstawie tego rysunku można twierdzić, że ugięcia pręta przy  $P < P_0$  są niedostrzegalne, a przy  $P = P_0$  zaczynają wzrastać bardzo szybko. Na rys. 36 grubsze linie pełne i przerywane przedstawiają obraz zjawiska dający się uchwycić pomiarowo.

Siła  $P_0$  i w tym wypadku będzie odgrywała rolę siły krytycznej, tj.  $P_0 = P_k$ .



Rys. 35

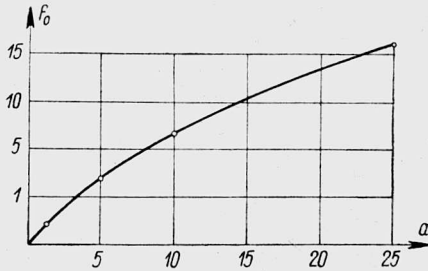


Rys. 36

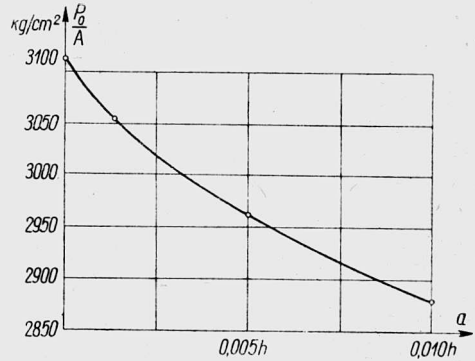
Siła  $P_k$  stanowi tu, podobnie jak w przypadku wyboczenia sprężystego w sensie fizycznym, granicę, do której zmierza siła  $P_0$  przy mimośrodku dążącym do zera. Świadczą o tym również wykresy na rysunkach 37 i 38. Na pierwszym z nich uwidoczniła jest zależność między mimośrodem  $a$  siły ściskającej a największym ugięciem  $f_0$ , na drugim zaś zależność między mimośrodem  $a$  a siłą  $P_0$ ; obie zależności wyprowadzone są na podstawie wykresu z rys. 34. Z wykresów na rys. 37 i na rys. 38 wynika, że skoro mimośród siły ściskającej maleje, prędzej jeszcze maleje ugięcie  $f_0$  pręta, przy którym występuje siła  $P_0$ , oraz że przy zmniejszaniu się mimośrodu  $a$  wzrasta szybko siła  $P_0$ , przy której ugięcia pręta zaczynają szybko rosnać.

Pod wyboczeniem niesprężystym w sensie fizycznym będziemy więc rozumieli zjawisko polegające na tym, że pręt prosty ściskany siłami zaczepionymi z niedostrzegalnym (a więc nie dającym się zmierzyć) mimośrodem doznaje do pewnej wartości siły ściskającej, zwanej siłą krytycz-

$na$ , tylko ugięć niedostrzegalnych, aczkolwiek trwałych, po przekroczeniu zaś tej wartości ugięć *trwałych* technicznie wyraźnych i szybko wzrastających, przy malejących nawet wartościach siły podłużnej.



Rys. 37



Rys. 38

Określenie to, podobnie jak określenie wyboczenia sprężystego w sensie fizycznym, mieści się w ramach ogólnej definicji wyboczenia w sensie technicznym.

#### 4. Wyboczenie prętów o sprężystości ograniczonej

Przy rozpatrywaniu wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym i wyboczenia sprężystego w sensie fizycznym liczyliśmy się dotąd tylko z prętami wykonanymi z materiału o nieograniczonej sprężystości, w zagadnieniach technicznych mamy jednak do czynienia tylko z prętami o sprężystości ograniczonej. W szczególności może się zdarzyć, że przy sile ściskającej  $P$  równej sile krytycznej  $P_k$  największe naprężenie normalne w pręcie jest mniejsze od naprężenia na granicy sprężystości, a przy  $P > P_k$  to naprężenie przekracza. Postaramy się tu ująć w pewien schemat poszczególne przejścia przy wyboczeniu od stanu sprężystego do stanu niesprężystego.

Przed zaczepieniem do pręta momentów  $\mu$  (względnie sił  $\pi$ ) naprężenia normalne w nim wyrażają się wzorem

$$\sigma_1 = \frac{P}{A}, \quad (15)$$

gdzie  $A$  oznacza pole przekroju pręta.

Po zaczepieniu momentów  $\mu$  największe naprężenia normalne wyniosą

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{A} + \frac{\mu + Py}{W}, \quad (16)$$

gdzie  $W$  oznacza wskaźnik wytrzymałości pręta.

Po usunięciu momentów  $\mu$  wyrażenie (16) przy  $P < P_k$  przybiera postać (15), a przy  $P > P_k$  postać

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Py}{W}. \quad (17)$$

Drugi wyraz tego dwumianu odgrywa, według słów Collignona, rolę miecza Damoklesa zwisającego nad ściskany pręt prostym, gdy siła ściskająca osiąga wartość krytyczną.

W przypadku pręta o pewnej określonej granicy sprężystości momenty  $\mu$  mogą przybierać tylko wartości nieskończenie małe w sensie fizycznym, w danym więc razie wartości odpowiadające tak małym naprężeniom  $\mu/W$ , że można te naprężenia pominąć w porównaniu z naprężeniami ściskającymi  $P/A$ . Gdyby ten warunek nie został spełniony, wówczas naprężenia spowodowane przez momenty  $\mu$  dodane do naprężeń spowodowanych przez siły ściskające mogłyby łącznie przekroczyć granicę sprężystości, a nawet granicę wytrzymałości i w ten sposób momenty  $\mu$  stałyby się bezpośrednią przyczyną złamania lub trwałego odkształcenia pręta.

Przyjmujemy zwykle, że przynajmniej przy wartości  $P = P_k$  naprężenia  $P/A$  nie przekraczają granicy sprężystości, czyli że w chwili rozpoczęcia się wybożenia pręt jest jeszcze sprężysty.

Może jednak zajść przypadek w pręcie o sprężystości ograniczonej, iż naprężenie  $\mu/W$  nie będzie mogło być pominięte w porównaniu z naprężeniem  $P/A$ , a jednak naprężenie obliczone ze wzoru (16) nie będzie przekraczało naprężenia na granicy sprężystości i nie będzie dlatego decydowało o złamaniu lub trwałym wygięciu pręta.

Przypadek też może mieć wprawdzie miejsce i w razie, gdy pręt wchodzi w skład pewnej konstrukcji budowlanej, zdarza się to jednak rzadko, i dlatego można powiedzieć, iż w prętach ściskanych, stosowanych w budownictwie, naprężenia wyrażają się wzorem (15), gdy  $P < P_k$ , i wzorem (17), gdy  $P > P_k$ .

Na podstawie powyższych rozważań podajemy w tablicy dla prętów ściskanych schematy przejścia od stanu sprężystego do stanu niesprężystego towarzyszące zjawisku wybożenia, przy czym pod prętem w stanie niesprężystym rozumiemy pręt, w którym granica sprężystości  $R'$  została przekroczona choćby w jednym punkcie.

Linie z wężykiem przedstawiają w tablicy pręty, w których największe naprężenia normalne nie przekroczyły granicy sprężystości  $R'$ , linie zaś bez wężyka — pręty, w których granica sprężystości została przekroczona.

Rubryka I odpowiada przypadkom, gdy naprężenie odpowiadające sile krytycznej, a więc naprężenie krytyczne  $R_k = P_k/A$  jest mniejsze od  $R'$ , czyli przypadkom wyboczenia sprężystego, rubryka zaś II przypadkom, gdy  $R_k$  jest większe od  $R'$ , czyli przypadkom wyboczenia niesprężystego.

**Tablica 1**

I. Wyboczenie sprężyste ( $R_k < R'$ )			II. Wyboczenie niesprężyste ( $R_k > R'$ )		
$P < P_k$	$P = P_k$	$P > P_k$	$P < P_k$	$P = P_k$	$P > P_k$
$\left. \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} P < P + \Delta P$			$\left. \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} P < P + \Delta P$		
$\left. \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\} P > P + \Delta P$			$\left. \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\} P > P + \Delta P$		

Stany równowagi  $a_1, a_2$  i  $a_3$ , a więc w ogóle typ Ia wyboczenia dotyczy prętów wykonanych z materiału, dla którego wielkość  $R'$  może przybierać wartości dowolnie duże, czyli prętów o sprężystości nieograniczonej, natomiast stany  $b_1, b_2$  i  $b_3$ , a więc w ogóle typ Ib wyboczenia dotyczy prętów, dla których wyrażenie (17) nawet przy  $P$  różniącym się bardzo mało od  $P_k$  przekracza wielkość  $R'$ , czyli prętów o sprężystości ograniczonej. Wreszcie wyboczenia sprężystego dotyczą przypadki, gdy pręt po przekroczeniu przez siłę ściskającą wartości krytycznej ( $P > P_k$ ) znajduje się w stanie równowagi  $Ia_3$ , o ile przyrost siły  $P$  ponad wartość krytyczną nie przekroczy pewnej wartości  $\Delta P$  i znajduje się w stanie równowagi  $Ib_3$ , o ile przyrost wartość tę przekroczy (typ  $Iab$  wyboczenia).

Dwa przedstawione w tabelicy rodzaje wyboczenia niesprężystego  $IIa$  i  $IIb$  różnią się tylko tym od siebie, że w pierwszym wypadku pręt staje się niesprężysty dopiero przy  $P = P_k$ , podczas gdy w drugim jeszcze przed przekroczeniem przez siłę ściskającą wartości krytycznej naprężenia  $\sigma$  przekraczają granicę sprężystości  $R'$ .

Stosując powyższą tablicę do wyboczenia w sensie fizycznym należy mieć na uwadze, że siła  $P$  zaczepiona jest w tym wypadku z małym nie dającym się dostrzec mimośrodem.

Z drugiej strony, należy zauważyć, że gdy chodzi o wyboczenie prętów o nieograniczonej sprężystości, moment  $\mu$ , odgrywający rolę przyczynny zakrzywiającej, nie potrzebuje być w ogóle ograniczony co do swej wartości; w razie wyboczenia pręta o sprężystości ograniczonej, moment  $\mu$  musi być uważany za nieskończenie mały, jednak wartość jego nie ma

żadnego wpływu na wygięcie się pręta wybaczanego, gdyż przyczyna zakrzywiająca występuje tu tylko chwilowo, a w czasie gdy pręt doznaje wygięcia skończonego, moment  $\mu$  już na ten pręt nie działa.

### 5. Siła krytyczna

W paragrafach 1, 2 i 3 tego rozdziału wprowadziliśmy pojęcie wyboczenia w sensie technicznym i wykazaliśmy, że ujęty w jego definicji w sposób najogólniejszy przebieg wyboczenia może być zrealizowany przez jeden z czterech następujących schematów statycznych:

- (1) wyboczenie sprężyste w sensie matematycznym,
- (2) wyboczenie niesprężyste w sensie matematycznym,
- (3) wyboczenie sprężyste w sensie fizycznym,
- (4) wyboczenie niesprężyste w sensie fizycznym.

We wszystkich tych schematach przy pewnej wartości siły ściskającej  $P$  bądź równowaga pręta staje się niestateczna, bądź też pręt doznaje ugięć niedopuszczalnie dużych. Tak w jednym, jak i w drugim wypadku pręt zaprojektowany jako prosty przestaje być użyteczny, gdyż ulega jako taki zniszczeniu, a więc wartość siły ściskającej, przy której to następuje, odgrywa rolę siły niszczącej. W tych warunkach nie ma powodu rozróżniać, czy katastrofa spowodowana została przejściem równowagi pręta ściskanego ze statecznej w niestateczną, czy też bezpośrednio bardzo dużym ugięciem pręta, gdyż efekt katastrofy jest ten sam w obu przypadkach. Stąd we wszystkich wymienionych schematach, tak samo jak w przypadku wyboczenia w sensie technicznym, siłę wywołującą tak rozumianą katastrofę pręta nazywamy *siłą krytyczną* ( $P_k$ ), pamiętając zresztą o zależności

$$P_k = \lim_{a \rightarrow 0} P_0.$$

Siła krytyczna ma przy projektowaniu prętów ściskanych takie samo znaczenie, jakie ma przy projektowaniu prętów rozciąganych siła rozrywająca pręt rozciągany. Odpowiednio do tego naprężenia krytyczne, tzn. iloraz  $R_k = P_k/A$ , odgrywa tu rolę podobną do wytrzymałości pręta na rozciąganie przy rozciąganiu pręta i dlatego *naprężenie krytyczne* bywa w niektórych językach (np. w rosyjskim) nazywane *wytrzymałością na wyboczenie*.

Abstrakcyjny schemat wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym doprowadza dla siły krytycznej do tzw. siły eulerowskiej, która wyznaczana jest z równaniem (4)

$$\frac{EJ}{\rho} = Py,$$

czyli że w danym razie  $P_k = P_E$ .

W schemacie statycznym wyboczenia sprężystego w sensie fizycznym siła krytyczna równa się sile  $P_0$ , odpowiadającej nieznanemu i nie dającemu się zmierzyć mimośrodowi  $a < w$ . W tym wypadku przyjmujemy z pewnym nadmiarem, którego ocena podana została w paragrafie 3 tego rozdziału, że siła krytyczna i tu równa jest sile eulerowskiej  $P_E$ .

Przy wyznaczeniu siły krytycznej drogą doświadczalną w granicach sprężystości uzyskanie warunków przestrzeni matematycznej oraz doskonałej osiowości obciążenia nie jest możliwe, dlatego też tą drogą używamy nie siłę  $P_k = P_E$ , lecz jedną z sił  $P_0$ , tzn. siłę krytyczną przy wyboczeniu sprężystym w sensie fizycznym. Dla małych mimośródów  $a$  siła  $P_0$  szybko zdąża do  $P_E$ , tak że przy dobrej aparaturze doświadczenia siła ściskająca, powodująca zniszczenie pręta prostego, mało różni się od teoretycznie wyznaczonej siły  $P_E$ .

Wyznaczenie siły krytycznej w przypadku wyboczenia niesprężystego w sensie matematycznym zależy od szeregu własności materiału, z którego wykonany jest pręt ściskany, a nie tylko od współczynnika sprężystości  $E$  i dlatego nie rozporządzamy dotąd ogólnie przyjętymi wzorami odpowiadającymi wzorom E u l e r a dla wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym. Dla tych samych powodów a również i dlatego, że nie jest nam znany mimośród  $a < w$ , nie podobna jest również wyznaczyć teoretycznie siły krytycznej przy wyboczeniu niesprężystym w sensie fizycznym. A więc w obydwóch wypadkach dla uzyskania siły krytycznej musimy uciec się do doświadczeń, przy czym siłą krytyczną będzie oczywiście jedna z sił  $P_0$ . Im dokładniej będą wykonane badania doświadczalne, tym mniejszy będzie nieznanymi mimośród  $a$  i tym większa będzie siła  $P_0$ , odgrywająca rolę siły krytycznej  $P_k$ . Dla szeregu materiałów zostały ustalone drogą doświadczalną wzory typu

$$P_k = A(c - b\lambda), \quad (18)$$

gdzie  $c$  i  $b$  są to współczynniki otrzymane doświadczalnie, a  $\lambda$  oznacza smukłość pręta.

W ten sposób we wszystkich przypadkach wyboczenia sprężystego uważamy za siłę krytyczną  $P_k$  tzw. siłę E u l e r a wyznaczoną teoretycznie dla schematu wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym, a we wszystkich przypadkach wyboczenia niesprężystego — siłę, przy której pręt ściskany ulega zniszczeniu, odczytaną na dynamometrze maszyny wytrzymałościowej lub uzyskaną ze wzorów doświadczalnych np. typu (18), a więc dla przypadku wyboczenia niesprężystego w sensie fizycznym.

Stosunek, jaki zachodzi między siłą krytyczną  $P_k = P_E$ , w abstrakcyjnym przypadku wyboczenia sprężystego w sensie matematycznym a siłą



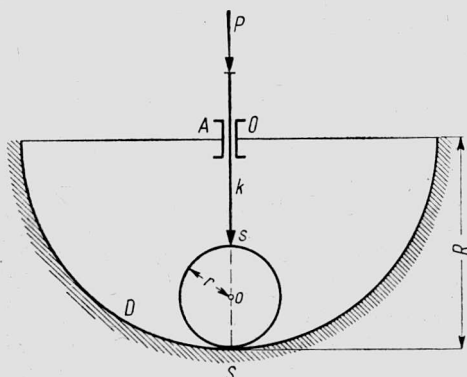
krytyczną  $P_k$  we wszystkich innych schematach wyboczenia, najwygodniej jest przedstawić na modelach równowagi niestatecznej i quasi-niestatecznej zaczerpniętych z dziedziny równowagi układów sztywnych. Modele takie zostaną omówione w rozdziale następnym.

## II. MODELE ZJAWISKA WYBOCZENIA

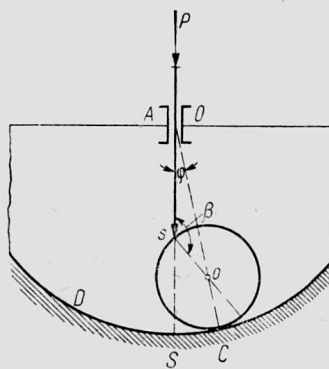
### 1. Model walcowy Southwella

W roku 1913 ogłosił R. V. Southwell opis modelu równowagi niestatecznej w ogóle, który może służyć i za model przebiegu wyboczenia i quasi-wyboczenia. Mamy tu mianowicie do czynienia z urządzeniem następującym<sup>3)</sup>.

Walek ciężki o promieniu  $r$  znajduje się w środku  $S$  cylindrycznego żłobu o promieniu  $R$  (rys. 39). Na waleku opiera się ostrzem  $\varepsilon$  pręt  $k$  przechodzący przez prowadnicę  $A$  i obciążony siłą  $P$ .



Rys. 39



Rys. 40

Do pewnej wartości  $P_k$  siły  $P$  równowaga wałka jest równowagą stateczną, tzn. że wałek doznawszy małego odchylenia od swego położenia pierwotnego (rys. 40) wraca do tego położenia po usunięciu się przyczyny odchylającej, przy czym również i pręt, który się opuścił, podnosi się z powrotem. Po przekroczeniu przez siłę  $P$  wartości  $P_k$  wałek odchylny od położenia pierwotnego nie może już wrócić do tego położenia, gdyż nie jest w stanie podnieść opuszczonego pręta.

Aby wyznaczyć siłę  $P_k$  (siłę krytyczną) wyobrażamy sobie, że wałek odchylił się od położenia pierwotnego o kąt  $sOo = \varphi$  (rys. 40) i że znajduje się w tym położeniu w równowadze.

<sup>3)</sup> Por. R. S. Southwell, *On the General Theory of Elastic Stability*, Philosophical Transactions, Londyn 1913.

Mamy tu trójkąt  $sOo$  (rys. 40) utworzony przez oś  $Os$  pręta  $k$  jako jeden bok, przez promień wałka  $so$  jako drugi i przez różnicę  $Oo$  promieni wałka i żłobu ( $R - r$ ) jako trzeci. Z trójkąta tego otrzymujemy, że

$$\sin \beta = \frac{R - r}{r} \sin \varphi, \quad (19)$$

gdzie  $\beta = \sphericalangle Oso$ .

Ponieważ zarówno powierzchnię wałka, jak i powierzchnię żłobu uważamy za gładką, więc reakcja wałka na koniec  $s$  pręta  $k$  będzie miała kierunek promienia  $so$ , czyli że

$$N = -P \cos(180^\circ - \beta). \quad (20)$$

Drugie wyrażenie dla reakcji  $N$  otrzymamy rozkładając ciężar wałka  $Q$  zaczepiony w jego środku ciężkości na kierunki  $so$  i  $oC$ . Otrzymamy stąd mianowicie, że

$$N = \frac{Q \sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)}. \quad (21)$$

Z zestawienia równań (20) i (21) otrzymujemy następujące wyrażenie dla siły  $P$ :

$$P = \frac{Q \sin \varphi \cos \beta}{\sin(\beta + \varphi)}. \quad (22)$$

Wyrażenie to w związku ze wzorem (19) przybiera postać

$$P = \frac{Q}{C}, \quad (23)$$

gdzie  $C$  oznacza wyrazy od  $\beta$  niezależne, otrzymane w rezultacie rozwinięcia funkcji trygonometrycznych.

Siła  $P_k$  jest granicą, do której dąży siła  $P$  przy kącie odchylenia wałka zmierzającym do zera, czyli przy  $\varphi = 0$ . Mamy więc, że

$$P_k = \frac{Qr}{R - 2r}. \quad (24)$$

Z równania (22) bądź też (23) możemy wyznaczyć te wartości siły  $P > P_k$ , które odpowiadają poszczególnym odchyleniom  $\varphi$  wałka.

Przyjmując  $R = 3r$  znajdujemy

$$P_k = Q. \quad (25)$$

W związku z tym równanie (23) przybiera postać

$$P = P_k \frac{1}{C}. \quad (26)$$

Wstawiając dla kąta  $\varphi$  różne wartości (w stopniach) dochodzimy do krzywej I na rys. 41.

Przesuwamy w dalszym ciągu prowadnicę A wraz z prętem  $k$  o wielkości  $a$  od osi pionowej żłobu; wielkość  $a$  odgrywa tu rolę mimośrodowości  $P$  (rys. 42). Oznaczamy kąt  $\sphericalangle ASo = \sphericalangle OBo$  przez  $\beta$  i rozpatrujemy trójkąt  $OBo$  (rys. 43), z którego obliczamy

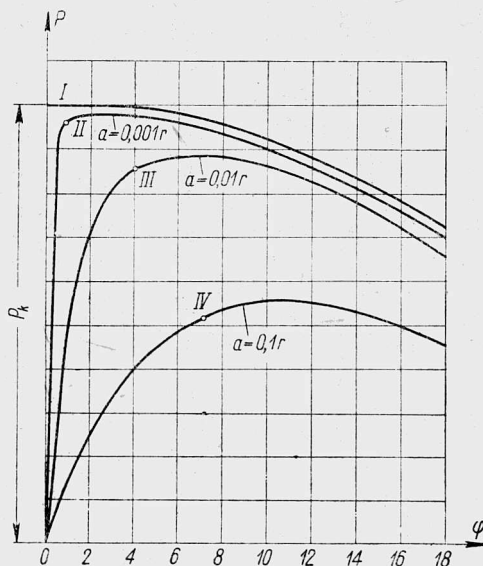
$$\sin \beta_1 = \frac{(R - r) \sin \varphi + a}{r}. \quad (27)$$

Dla zależności między siłą  $P$  a odchyleniem wałka  $\varphi = \sphericalangle BOo$  od położenia środkowego  $S$  znajdujemy wyrażenie analogiczne do równania (22):

$$P = \frac{Q \sin \varphi \cos \beta_1}{\sin (\beta_1 + \varphi)}. \quad (28)$$

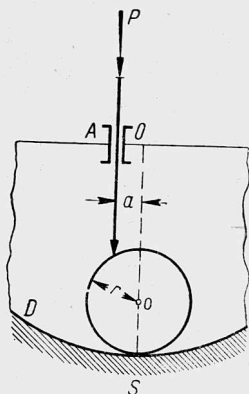
Biorąc pod uwagę wzór (25) możemy nadać równaniu (28) postać

$$P = P_k \frac{\sin \varphi \cos \beta_1}{\sin (\beta_1 + \varphi)}. \quad (29)$$

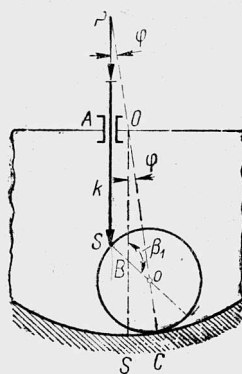


Rys. 41

Przyjmując kolejno, że  $a = 0,001 r$ ,  $a = 0,01 r$  oraz  $a = 0,1 r$ , dochodzimy do krzywych II, III i IV przedstawionych na rys. 41 i wyrażają-



Rys. 42



Rys. 43

cych zależność między odchyleniem  $\varphi$  wałka od położenia  $S$  a siłą  $P$  dla różnych wartości mimośrodowości  $a$ .

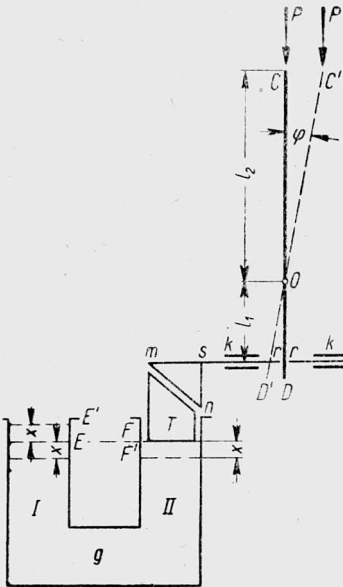
Podkreślić należy, że krzywe na rys. 41 odpowiadają pod względem swego charakteru krzywym wykresu na rys. 34 sporządzonym dla przypadku wybożenia niesprężystego w sensie fizycznym.

Model Southwella, aczkolwiek bardzo przejrzysty i wygodny w użyciu, jest jednak, gdy chodzi o wybożenie prętów prostych, mało sugestywny. Stąd powstała potrzeba stworzenia modeli opisanych w paragrafie następnym.

## 2. Modele prętowe

Trzy modele podane w tym paragrafie, zaproponowane przez autora w roku 1933, mają tę wspólną cechę, że nie posiadają w swej konstrukcji sprężyn i że dotyczą równowagi prętów prostych, nawiązując w ten sposób do kształtu pręta wybaczanego.

**Model A.** Mamy dwa naczynia *I* i *II* połączone ze sobą kanałem *g* i napełnione do poziomu *EF* cieczą o ciężarze jednostkowym  $\gamma$  (rys. 44). W naczyniu *II* wchodzi tłok *T*, który jest ograniczony od góry płaszczyzną *mn* nachyloną względem pionu pod kątem  $45^\circ$ . Na płaszczyznę tę naciska klin *mns* podtrzymywany przez pręt *sr* przesuwający się w prowadnicy *k*. Tłok *T* jest nieważki, a wszystkie części całego urządzenia przesuwają się względem siebie bez tarcia. Skoro dolna płaszczyzna tłoka znajduje się na poziomie *EF*, wówczas koniec *r* pręta *mr* jest na jednym pionie z przegubem *O*, na którym obraca się doskonale sztywny pręt *CD*. Z drugiej strony pręta *CD* (na rysunku na prawo) mamy urządzenie identyczne. W punkcie *C* działa siła pionowa *P*.



Rys. 44

Przesunięcie końca *r* pręta *sr* o wielkość  $x$  powoduje obniżenie tłoka i poziomu cieczy w naczyniu *II* również o  $x$  oraz podniesienie się poziomu cieczy w naczyniu *I* o  $2x$  nad poziomem w naczyniu *II*. Ciśnienie cieczy na tłok wyniesie wówczas

$$K = 2x\gamma\Omega, \quad (30)$$

gdzie  $\Omega$  oznacza pole przekroju poprzecznego każdego z naczyń połączonych.

Odchylenie pręta  $CD$  od położenia pionowego o kąt  $\varphi$  powoduje nacisk tego pręta na pręt  $sr$  w punkcie  $r$  równy  $S$ . Składowa tego nacisku skierowana wzdłuż pręta  $sr$  wynosi

$$N = S \cos \varphi. \quad (31)$$

Siła ta wywołuje pionowy nacisk na tłok równy  $N$ . Wobec tego że dla równowagi tłoka jest konieczne, aby  $K$  było równe  $N$ , znajdujemy, że

$$2x\gamma\Omega = S \cos \varphi, \quad (32)$$

skąd nacisk na pręt  $sr$  i odpowiednia reakcja pręta wynoszą

$$S = \frac{2x\gamma\Omega}{\cos \varphi}. \quad (33)$$

Ponieważ odległość pionowa przegubu  $O$  od pręta  $sr$  jest stała i wynosi  $l_1$ , więc  $x = l_1 \operatorname{tg} \varphi$ , wobec czego

$$S = \frac{2l_1\gamma\Omega \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}. \quad (34)$$

Skoro pręt  $CD$  dozna odchylenia o kąt  $\varphi$ , wówczas w nowym położeniu  $C'D'$  muszą go utrzymywać w równowadze siły  $P$  i  $S$ .

Ustawiamy dla tych sił równanie momentów  $\Sigma M = 0$  przyjmując za biegun punkt  $O$ . Ponieważ ramiona sił  $P$  i  $S$  wynoszą tu odpowiednio  $l_2 \sin \varphi$  i  $l_1/\cos \varphi$ , więc równanie to przybiera postać

$$\frac{2\gamma l_1^2 \Omega \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} - P l_2 \sin \varphi = 0, \quad (35)$$

skąd

$$P = \frac{2\gamma l_1^2 \Omega}{l_2 \cos^3 \varphi}. \quad (36)$$

Zakładając tu  $\varphi = 0$  dochodzimy do wartości krytycznej siły  $P$ :

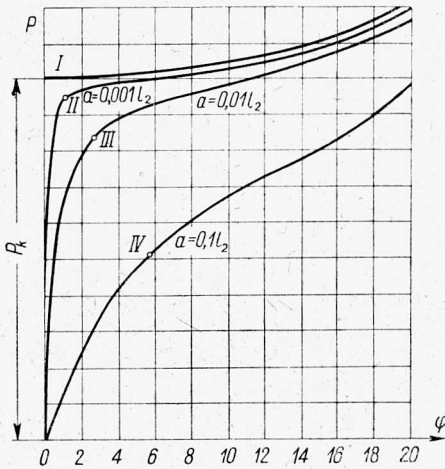
$$P_k = \frac{2\Omega\gamma l_1^2}{l_2}. \quad (37)$$

Przy  $P < P_k$  wszelkie odchylenia pręta  $CD$  od położenia pionowego są po usunięciu przyczyny wywołującej te odchylenia wyrównywane przez ciśnienie cieczy, a przy  $P > P_k$  odchylenia  $\varphi$  szybko wzrastają, podczas gdy siła  $P$  zmienia się według prawa

$$P = \frac{P_k}{\cos^3 \varphi} \quad (38)$$

przedstawionego na rys. 45 za pomocą krzywej  $I$ .

O ile siła  $P$  jest zaczepiona do pręta  $CD$  z mimośrodem  $a$ , wówczas pewnemu odchyleniu  $\varphi$  pręta od położenia pionowego (rys. 46) odpowiadać będzie następujące równanie momentów  $\Sigma M = 0$ :



Rys. 45

$$\frac{2 \Omega \gamma l_1^2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} = P(l_2 \sin \varphi + a \cos \varphi). \quad (39)$$

Zakładając tu kolejno  $a = 0,001 l_2$ ,  $a = 0,01 l_2$  oraz  $a = 0,1 l_2$  dochodzimy do krzywych II, III i IV na rys. 45. Punkty załamania się krzywych zależności (39) oznaczone są na wykresie za pomocą kółek.

Krzywe na rys. 45 odpowiadają co do swego charakteru krzywom wykresu na rys. 22, sporządzonym dla wybočenja sprężystego w sensie matematycznym oraz dla wyznaczenia sił  $P_0$  w przypadku wybočenja sprężystego w sensie fizycznym.

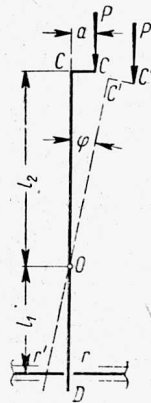
**Model B.** Model tu omawiany posiada w dolnej części takie samo urządzenie jak model poprzedni.

Prosty pręt sztywny  $Cr$  (rys. 47) podparty jest w tym wypadku na końcu  $C$  w prowadnicy i obciążony siłą pionową  $P$ . W punkcie  $r$  pręt jest połączony za pomocą przegubu z prętem poziomym  $sr$  odgrywającym taką samą rolę, jak pręt  $sr$  w przypadku poprzednim. Dalej (na rysunku na lewo) pręt  $sr$  łączy się z takim samym urządzeniem jak na rys. 44.

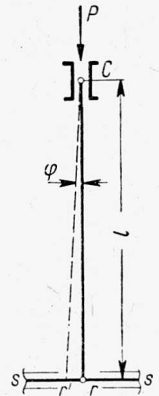
Do pewnej wartości siły  $P$  (siły krytycznej  $P_k$ ) odchylenia  $\varphi$  pręta  $Cr$  od położenia pionowego są usuwane przez nacisk pręta  $sr$  na pręt  $Cr$ , więc przez ciśnienie cieczy. Po przekroczeniu wartości  $P_k$  przez siłę podłużną pręt nie wraca już do swego położenia pionowego, o ile go jakaś przyczyna chwilowa z tego położenia wyprowadziła.

W razie odchylenia pręta  $Cr$  od położenia pionowego o kąt  $\varphi$  wzdłuż pręta tego będzie działała siła

$$S = \frac{P}{\cos \varphi}. \quad (40)$$



Rys. 46



Rys. 47

Z warunków równowagi pręta  $sr$  w szczególności z równania  $\Sigma X = 0$ , otrzymujemy

$$N = P \operatorname{tg} \varphi. \quad (41)$$

Z warunków równowagi tłka  $I$  znajdujemy tu, analogicznie jak dla modelu poprzedniego,

$$2 x \gamma \Omega = P \operatorname{tg} \varphi. \quad (42)$$

Ponieważ w tym wypadku  $x = l \sin \varphi$ , więc wzór (42) doprowadza do równania

$$P = 2 \Omega \gamma l \cos \varphi. \quad (43)$$

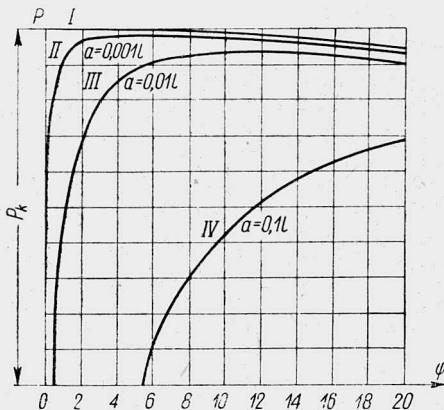
Wielkość  $P_k$  jako wielkość, przy której odchylenie pręta  $Cr$  po usunięciu przyczyny odchylającej zaczyna już być możliwe, znajdujemy zakładając we wzorze (43)  $\varphi = 0$ :

$$P_k = 2 \Omega \gamma l. \quad (44)$$

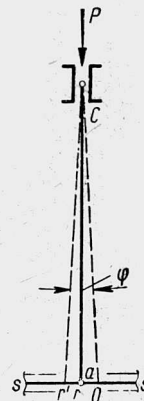
Przy  $P > P_k$  będzie się zależność między  $P$  a  $\varphi$  wyrażała równaniem

$$P = P_k \cos \varphi, \quad (45)$$

co odpowiada krzywej  $I$  na rys. 48.



Rys. 48



Rys. 49

Przyjmujemy dalej, że już przy  $P = 0$  i przy tym samym poziomie cieczy w obydwóch naczyniach połączonych, koniec  $r$  pręta  $sr$  jest odsunięty od pionu  $Co$  na odległość  $\bar{r}_0$  równą  $a$  (rys. 49). Wówczas  $x = l \sin \varphi - a$  i zamiast równania (42) będziemy mieli równanie

$$2 \Omega \gamma (l \sin \varphi - a) = P \operatorname{tg} \varphi, \quad (46)$$

które otrzymane jest z równania równowagi  $\Sigma X = 0$  ustawionego dla sił działających na pręt  $sr$  przy odchyleniu pręta  $Cr$  od pionu o kąt  $\varphi$ .

Z równania (46) otrzymujemy następującą zależność między  $P$  a  $P_k$ :

$$P = P_k \left( \cos \varphi - \frac{a}{l} \operatorname{ctg} \varphi \right). \quad (47)$$

Przyjmując kolejno dla mimośrodów  $a$  wartości  $a = 0,001 l$ ,  $a = 0,01 l$  oraz  $a = 0,1 l$  dochodzimy do krzywych II, III i IV na rys. 48.

**Model C.** Pręt  $CD$  podparty jest przegubowo w punkcie  $O$  (rys. 50). W końcu pręta  $D$  znajduje się ciężar  $Q$ , w drugim zaś zaczepiona jest siła  $P$  skierowana wzdłuż pręta.

Równanie równowagi  $\Sigma M = 0$  ustawione dla sił działających na pręt przy pewnym odchyleniu jego,  $\varphi$ , od położenia pionowego przybiera dla bieguna  $O$  postać

$$Q l_1 \sin \varphi - P l_2 \sin \varphi = 0, \quad (48)$$

skąd

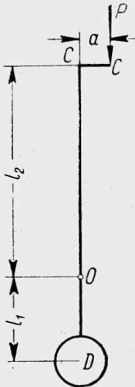
$$P = Q \frac{l_1}{l_2}. \quad (49)$$



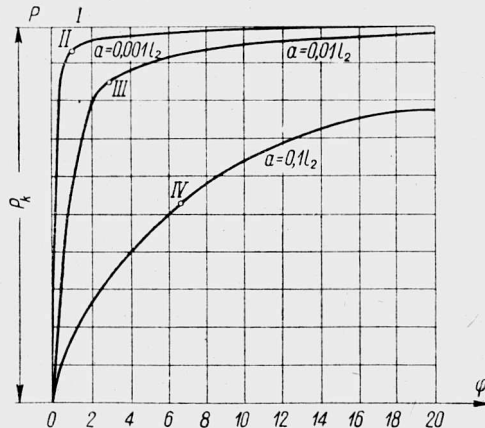
Rys. 50

O ile siła podłużna  $P$  jest mniejsza od wartości wyrażonej wzorem (49), wówczas w razie chwilowego odchylenia pręta od położenia pionowego pręt wraca do tego położenia po usunięciu przyczyny, która to chwilowe odchylenie wywołała.

Przy wartości  $P$  wyrażonej wzorem (49) pręt może się znajdować w równowadze przy dowolnym odchyleniu  $\varphi$  od położenia równowagi,



Rys. 51



Rys. 52

czyli że pozostaje w stanie równowagi obojętnej, jednak już przy dowolnym  $P$  większym od wartości (49) dowolnie małe odchylenie  $\varphi$  od położenia



nia równowagi powoduje nagły obrót pręta o  $180^\circ$ . Stąd wartość (49) siły  $P$  należy uważać za jej wartość krytyczną, czyli że

$$P_k = Q \frac{l_1}{l_2}. \quad (50)$$

W przypadku zaczepienia siły  $P$  do pręta  $CD$  z mimośrodem  $a$  (rys. 51) zależność między siłą  $P$  a kątem  $\varphi$  odchylenia pręta od położenia pionowego wyrazi się równaniem

$$P = \frac{Q l_1 \sin \varphi}{l_2 \sin \varphi + a \cos \varphi}. \quad (51)$$

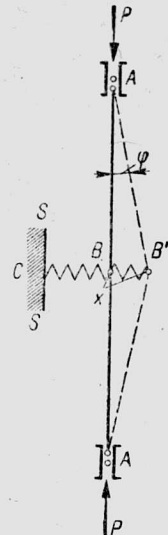
Dla stosunku  $l_1 : l_2 = 0,1$  oraz dla mimośrodków  $a = 0,001 l_2$ ,  $a = 0,01 l_2$  oraz  $a = 0,1 l_2$  dochodzimy do krzywych II, III i IV na rys. 52. Prosta I odgrywa na tym wykresie tę samą rolę co krzywe I na rys. 45 i 48.

### 3. Modele sprężynujące

W modelach A i B opisanych w poprzednim paragrafie naczyńia połączone mogłyby zostać zastąpione przez sprężyny o stałym współczynniku sprężystości, nie zostało to jednak zrobione dla większej przejrzystości modeli. Nie można się jednak wyrzec tych korzyści, jakie daje wprowadzenie do modeli zjawiska wyboczenia sprężyn lub innych elementów sprężystych, które w połączeniu ze sztywnymi elementami modeli pozwalają na uwypuklenie ważniejszych cech przebiegu wyboczenia prętów prostych. Takie połączenie w modelach sprężyn i ciał sztywnych przedstawiają dwa poniższe modele.

**Model a.** Weźmy pod uwagę dwa pręty nieodkształcalne o długości  $AB = l$ , połączone ze sobą przegubowo w punkcie  $B$  (rys. 53). Końce  $A$  obydwóch prętów są przesuwne i obciążone siłami  $P$  skierowanymi wzdłuż osi prętów. Przegub  $B$  jest połączony z nieruchomą i nieodkształcalną powierzchnią  $ss$  za pomocą sprężyny  $CB$ , której współczynnik sprężystości jest  $k$ .

Jeżeli siła  $P$  jest mniejsza od pewnej wartości krytycznej  $P_k$ , wówczas przegub  $B$  przesunięty w nowe położenie  $B'$  wraca pod działaniem sprężyny na swe miejsce pierwotne, jeżeli zaś  $P > P_k$ , wówczas pręty zachowują swe położenie do kierunku  $AA$ .



Rys. 53

nachylone

W położeniu odchylnym od położenia równowagi prostoliniowej o wielkość  $x$  w sprężynie powstaje siła  $kx$ . Z równowagi węzła  $B$  wynika wówczas, że

$$kx = \frac{2P}{\cos \varphi} \sin \varphi, \quad (52)$$

co wobec  $x = l \sin \varphi$  daje

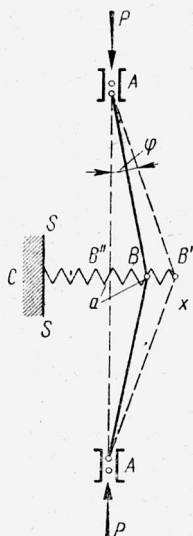
$$P = \frac{kl}{2} \cos \varphi. \quad (53)$$

Krytyczna wartość siły  $P$ , tj. ta wartość, przy której możliwe się już staje położenie prostoliniowe  $ABA$  układu, równa się

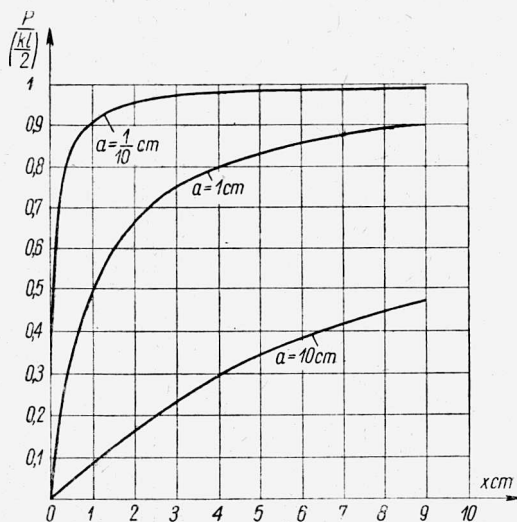
$$P_k = \left[ \frac{kl}{2} \cos \varphi \right]_{\varphi \rightarrow 0} = \frac{kl}{2}. \quad (54)$$

Przypuśćmy dalej, że sprężyna  $CB$  jest dłuższa niż odległość płaszczyzny  $ss$  od osi  $ABA$  i że wobec tego przy  $P = 0$  odległość  $\overline{BB''} = a$  (rys. 54). Otrzymamy wówczas następującą zależność między kątem  $BAB' = \varphi$  a siłą  $P$ :

$$P = \frac{k}{2} \cos \varphi \frac{l \sin \varphi - a}{\sin \varphi}. \quad (55)$$



Rys. 54



Rys. 55

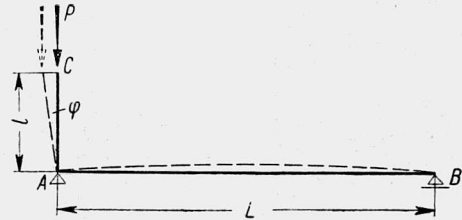
Wykres zależności  $P = F(x)$  dla różnych wielkości  $a$  daje pęk krzywych (rys. 55) podobny do przedstawionego na rys. 22. Z wykresu tego widać, że przy małych wartościach  $a$  wyraźnie występuje załamanie się krzywej zależności  $P = F(x)$  przy pewnych wartościach  $P = P_0$ .

**Model b.** Rozpatrzmy teraz pręt  $AC$  nieodkształcalny i przytwierdzony ramowo do końca sprężystego pręta  $AB$ , swobodnie podpartego w punktach  $A$  i  $B$  (rys. 56). Współczynnik sprężystości obrotu przekroju poprzecznego  $A$  niech będzie  $k$ . Jeżeli odchylimy pręt  $AC$  o kąt  $\varphi$ , wówczas równanie równowagi  $\Sigma M = 0$  przybierze dla pręta tego postać

$$Pl \sin \varphi = \varphi k, \quad (56)$$

skąd

$$P = \frac{k}{l} \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (57)$$



Rys. 56

Siłę krytyczną znajdziemy przyjmując we wzorze (57), że  $\varphi$  dąży do zera:

$$P_k = \frac{k}{l} \left[ \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right]_{\varphi \rightarrow 0} = \frac{k}{l}. \quad (58)$$

Dla małych kątów  $\varphi$  współczynnik  $k$  możemy wyznaczyć z zależności

$$\varphi = \frac{ML}{3EJ}, \quad (59)$$

z której wynika, że

$$k = \frac{3EJ}{M}, \quad (60)$$

gdzie  $M$  jest to dowolny moment zginający zaczepiony do końca  $A$  pręta, a  $E$  i  $J$  odpowiednio współczynnik sprężystości materiału pręta i moment bezwładności jego przekroju poprzecznego.

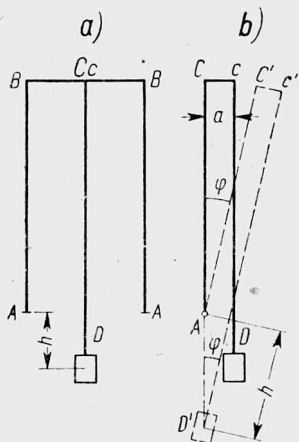
W razie zaczepienia siły  $P$  w punkcie  $C$  z pewnym mimośrodem  $a$  doszlibyśmy znowu do typu krzywych przedstawionych na rys. 22.

#### 4. Wyboczenie a jego modele

Śród opisanych wyżej modeli prostych pod względem rachunkowym, czasem dość złożonych pod względem budowy, nie ma znanego modelu równowagi niestatecznej, jakim jest kolisty stożek prosty postawiony na wierzchołku w ten sposób, że środek ciężkości i wierzchołek leżą na jednej prostej pionowej, lub klin postawiony na krawędzi.

Pochodzi to po pierwsze stąd, że równowaga tych modeli zależy nie od wartości siły, lecz od jej punktu zaczepienia, i po wtóre stąd, że nie podobna na nich rozpatrywać tego rodzaju równowagi, którąśmy nazwa-

li równowagą quasi-niestateczną. O ile pierwsza z tych wad jako tkwiąca w samej istocie modeli nie może być usunięta, o tyle drugą usuwamy przez budowę następującego modelu ramowego nie różniącego się przy obciążeniu osiowym z punktu widzenia statyki od stożka lub klina.



Rys. 57

Mamy pionową nieważką ramę  $ABBA$  (rys. 57a), opartą na przegubach cylindrycznych  $A$  (bez tarcia), pozwalających na jej obrót w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Do poprzeczki  $BB$  ramy w jej środku przymocowany jest wspornik  $Cc$  (rys. 57b), a do końca jego pręt  $cD$  równoległy do prętów ramy  $AB$ . W punkcie  $D$  przytwierdzony jest ciężar.

Przy  $a > 0$  i  $h > 0$  (rys. 57b) mamy do czynienia z bryłą zawieszoną w ten sposób, że środek ciężkości (w danym razie środek ciężaru  $D$ ) znajduje się niżej niż punkt zawieszenia (przeguby  $A$ ), mamy więc do czynienia ze stanem równowagi statecznej. Przy  $a = 0$  i  $h < 0$  mamy do czynienia z równowagą niestateczną.

Przy  $a > 0$  następuje odchylenie prętów  $AB$  od położenia pionowego. Kąt odchylenia możemy wyznaczyć z warunku, że przy równowadze układu środek ciężkości  $D$  musi znajdować się na prostej pionowej przechodzącej przez  $A$  (rys. 57b). Stąd

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{h}. \quad (61)$$

Zależność między wielkościami  $\varphi$ ,  $a$  i  $h$  przedstawiona jest na wykresie na rys. 58. Z wykresu tego wynika, że przy małych mimośrodkach można zauważyć wartości  $h_0$  posiadające tę własność, iż niewielka zmiana ich powoduje duże odchylenie ramy. Mamy więc znowu do czynienia z przypadkiem przypominającym to, cośmy nazwali wyżej równowagą quasi-niestateczną układu, chociaż nie zmienia się tu wielkość siły  $P$  tylko wielkość  $h$ .

Opisany tu model aczkolwiek dobrze przedstawia przejście od równowagi statecznej do niestatecznej i quasi-niestatecznej, co stanowi istotę wybożenia, nie nadaje się jednak do analizy tego zjawiska, gdyż siła  $P$  jest tu wielkością stałą. Stąd konieczność uciekania się do opisanych wyżej modeli, nieco bardziej złożonych, w których jednak wpływ wartości sił  $P$  na rodzaj równowagi jest wyraźny i daje się łatwo uchwycić matematycznie.

Zostało ustalone, że przy wyboczeniu pręt prosty, przy  $P = P_k$ , znajduje się w stanie równowagi niestatecznej, a przy  $P > P_k$  krzywoliniowa jego postać jest stateczna, nie ma więc już koniecznej potrzeby dbać o to, aby i dla modeli przy położeniach odchylonych od położenia odpowiadającego  $P = P_k$  równowaga była koniecznie stateczna. A więc np. w modelu Southwella przy  $P = P_o$  mamy do czynienia z tzw. równowagą quasi-niestateczną, a przy  $P > P_o$  z równowagą stateczną, w modelu B zaś przechodzimy od równowagi quasi-niestatecznej do równowagi niestatecznej.

Wykresy dotyczące wszystkich omawianych modeli odniesione są do odciętych  $\varphi$ . Dla porównywania ich z odpowiednimi wykresami sporządzonymi dla prętów odkształcalnych wygodniej byłoby przyjąć tu za odcięte odpowiednie przesunięcia poziome. Zmiana spowodowana przez to na wykresach nie wpłynęłaby na charakter omawianych krzywych, w częściach zaś wykresu mających w danym razie znaczenie największe, a więc w częściach odpowiadających małym  $\varphi$  byłaby nieznaczna nawet i w sensie liczbowym. Zachowanie zaś tu jako zmiennej niezależnej odchyłeń  $\varphi$  ułatwia porównywanie poszczególnych modeli między sobą.

Wykres przedstawiony na rys. 45 i odpowiadający modelowi A, jak to zaznaczono wyżej, posiada ten sam charakter, co wykres przedstawiony na rys. 22, wyrażający zależność między wielkością siły ściskającej pręt prosty pionowy o nieograniczonej sprężystości a największymi ugięciami tego pręta.

W obydwóch wypadkach krzywe odpowiadające zaczepieniu siły  $P$  z mimośrodem  $a$  zbiegają, w miarę zmniejszania mimośrodów, do pokrycia się w dolnej ich części, położonej poniżej punktu  $o$ , z osią rzędnych, w górnej zaś z krzywą odpowiadającą przesunięciom mającym miejsce po przekroczeniu wartości krytycznej siły podłużnej dla mimośrodów równego zeru.

Zwiększając liczbę krzywych zbliżonych do krzywej II i ustalając dla każdej z nich punkt  $o$  w sposób możliwie ścisły łatwo możemy stwierdzić, że siły  $P_o$  odpowiadające punktom  $o$  dążą tu do wielkości  $P_k$  jako do granicy, podobnie jak to ma miejsce na wykresie 22, co upoważnia do nazwania równowagi pręta ściskanego mimośrodowo przy  $P = P_o$  równowagą quasi-niestateczną.

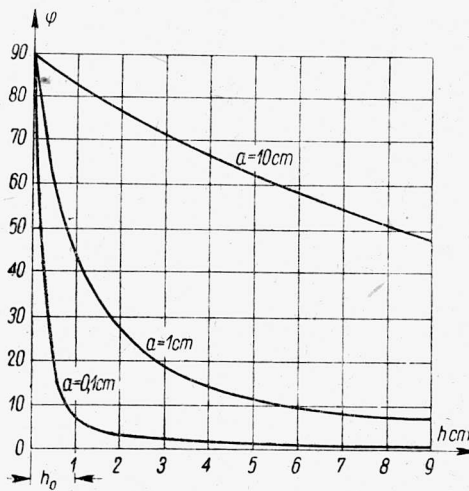
Na szczególne podkreślenie zasługuje fakt, że zarówno krzywe wykresów na rys. 41 i 45, jak i wykresu 22 przechodzą przez początek współrzędnych. Wartość siły podłużnej  $P = 0$ , odpowiadająca ugięciu równemu zeru, dotyczy zarówno siły zaczepionej mimośrodowo, jak i zaczepionej ściśle osiowo, przy czym w tym ostatnim przypadku konieczne jest wystąpienie pewnej przyczyny, która by chwilowo odchyliła pręt lub wałek z położenia symetrycznego względem pionu i tym umożliwiła działanie siły  $P$ .

W rzeczywistych warunkach fizycznych mimośród siły  $P$  zawsze musi mieć miejsce, aczkolwiek jego wielkość w granicach ścisłości odpowiednich obliczeń może być w porównaniu z wymiarami prętów i ich przesunięć pomijana.

W ten sposób zjawisko odchylenia się ciała obciążonego symetrycznie od położenia pierwotnego mogłoby być rozpatrywane jako zjawisko różniące się tylko liczbowo od odchylenia się od położenia pierwotnego ciała, na które siła  $P$  działa z małym mimośrodem. Z matematycznego punktu widzenia jest siła  $P$  pewną funkcją odchylenia  $\varphi$ , przy  $\varphi$  zmierzającym do zera, z fizycznego zaś punktu widzenia jest ona jedną z sił  $P_0$ , odpowiadającą pewnej małej wielkości  $\varphi$ .

W tym świetle byłby przypadek odchylenia pręta lub wałka od położenia symetrycznego przy  $\varphi$  równym ściśle 0 abstrakcją w rodzaju stożka utrzymującego się w równowadze na swym wierzchołku w przestrzeni matematycznej.

Wykres zależności  $P = f(\varphi)$ , odpowiadający modelowi B na rys. 48, a również modelowi walcowemu (rys. 39), posiada, jak widać, ten sam



Rys. 58

charakter, co wykres dla pręta stalowego ściskanego siłą podłużną ponad granicę sprężystości (rys. 34).

Na obydwóch wykresach górne części krzywych (ponad punktem 0) wyrażają spadek siły  $P$  po przekroczeniu wartości krytycznej  $P_k$ . Również oba pęki krzywych wykazują odchylenia od położenia wyjściowego przy  $P = 0$ . Wynika to stąd, że pręt, w którym naprężenia przekroczyły granicę sprężystości, nie może już wrócić do kształtu prostoliniowego przy  $P = 0$ .

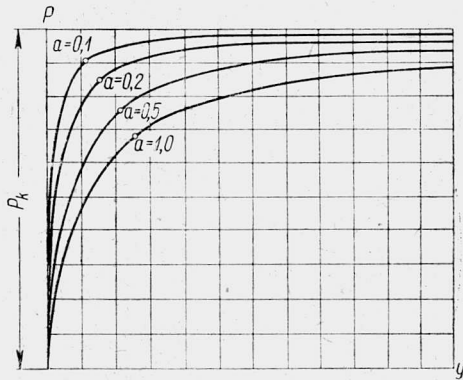
Wykresy te tym bardziej narzucają pogląd na zjawisko wyboczenia w sensie fizycznym, jako to ściskanie mimośrodowe przy małym bardzo mimośrodku (przypadek równowagi quasi-niestatecznej), że w danym razie nie może być mowy o jakiejś przelotnej przyczynie zakrzywiającej, która znika po umożliwieniu sile podłużnej działania zginającego, gdyż w pręcie niesprężystym przyczyna taka musiałaby swój ślad pozostawić.

Na rys. 34 krzywa odpowiadająca zaczepieniu siły podłużnej bez mimośrodu przecina się z osią rzędnych, co dowodzi, że przed przekrocze-

niem przez siłę podłużną wartości  $P_k$  pręt pozostaje prosty. Nie jest to wobec tego, co powiedziano wyżej, możliwe, powstało zaś stąd, że przy sporządzeniu wykresu postępowano tu podobnie, jak przy wyprowadzeniu wzoru E u l e r a, tj. przyjmowano za punkt wyjścia ugięcie pręta przy  $P > P_k$  i uważano, iż przy dążeniu tego ugięcia do zera siła  $P$  będzie zdążała do wartości  $P_k$ . Nie jest to w zgodzie z fizycznym pojmowaniem zjawiska, gdyż pręt, w którym naprężenia przekroczyły granicę sprężystości, zachowuje odkształcenie trwałe.

Wykres na rys. 48 dotyczący modelu C posiada ten sam charakter, co wykres na rys. 59 odpowiadający zależności między siłą, ściskającą pręt sprężysty osiowo lub mimośrodowo a ugięciem obliczonym według przybliżonego równania odkształconej.

Znamienne jest, że w modelu C przy wartości krytycznej siły podłużnej mamy właściwie stan równowagi obojętnej, czego w żadnym razie nie można powiedzieć o pręcie sprężystym ściskanym osiowo przy  $P = P_k$ . Zgodność kształtu obydwóch wykresów wypływa w danym razie z zastosowania niewłaściwego (uproszczonego) równania różniczkowego. Jednak i z nieściślego wykresu zależności  $P = F(y)$  wynika, że stan równowagi niestatecznej pręta przy  $P = P_k$  może być uważany za przypadek krańcowy stanu równowagi quasi-niestatecznej przy małym mimośrodku siły  $P$  i przy  $P$  równym odpowiedniemu  $P_0$ .



Rys. 59

### III. STOSUNEK WYBOCZENIA DO ŚCISKANIA MIMOŚRODOWEGO

#### 1. Rodzaje ściskania mimośrodkowego

Znaczna większość prętów ściskanych wchodzących w skład poszczególnych konstrukcji budowlanych znajduje się pod działaniem sił zaczepionych z pewnym mimośrodem. Stąd ze ściskaniem mimośrodkowym musimy liczyć się nawet wówczas, gdy pozornie mamy do czynienia tylko z osiowym działaniem sił ściskających. Ściskaniu mimośrodkowemu towarzyszy zawsze zginanie, jednak nazwa jednoczesnego zginania i ściskania została w języku polskim zachowana dla przypadków, kiedy mamy do czynienia z dużymi w porównaniu z mimośrodem wygięciami prętów ściskanych. Wobec tego nazwę ściskania mimośrodkowego stosujemy

w dwóch przypadkach, mianowicie w przypadku, kiedy mimośród siły ściskającej jest stały i kiedy znika mając charakter przejściowy, chwilowy.

Pierwszy z tych przypadków przedstawiamy sobie w sposób następujący.

Do pręta prostego zaczepione są z pewnym stałym mimośrodem  $a$  (rys. 60) dwie siły  $P$  równoległe do jego osi nieodkształconej. Działanie sił zaczepionych mimośrodowo dałoby się tu zastąpić przez działanie zaczepionych do końców pręta momentów  $Pa$  oraz przez działanie zaczepionych do środków końcowych przekrojów pręta sił  $P$  powodujących zwykle ściskanie.



Rys. 60



Rys. 61

Drugi przypadek odpowiada następującemu przebiegowi zjawiska.

Do końców pręta prostego zaczepione są dwie siły  $P$  w sposób ściśle osiowy oraz dwa momenty  $\mu$  zwrócone ku sobie (rys. 61). Momenty  $\mu$  działają tu tylko chwilowo, a po wywołaniu zakrzywienia pręta znikają. O ile wartość sił podłużnych  $P$  nie przekracza pewnej wartości  $P_k$  (tzw. siły krytycznej lub siły E u l e r a), wówczas po usunięciu momentów  $\mu$  pręt wraca do swego kształtu prostoliniowego; gdy jednak wartość sił  $P$  przekracza wartość  $P_k$ , wówczas również po usunięciu momentów  $\mu$  pręt zachowuje kształt krzywoliniowy. Wielkość momentów  $\mu$  nie ma żadnego wpływu na przebieg zjawiska, siłę zaś krytyczną  $P_k$  wyznaczamy jako granicę, do której dąży siła  $P > P_k$ , gdy wygięcie pręta zmierza do zera, czyli gdy pręt dąży do kształtu prostoliniowego. Omówione zjawisko nazwalibyśmy wyżej *wybozczeniem w sensie matematycznym*. W tym sensie wybozczenie jest wynikiem ściskania mimośrodowego, gdyż o ile by momenty  $\mu$  nie zostały do pręta zaczepione, to nie mogłoby być mowy o jakimkolwiek jego wygięciu nawet przy  $P > P_k$ .

W przypadku pierwszym moment zginający w poszczególnych przekrojach pręta wyraża się, jak wiadomo, wzorem

$$M = P(a + y), \tag{62}$$

równanie zaś różniczkowe odkształconej wzorem

$$\frac{EJ}{\rho} = M. \tag{63}$$

Aczkolwiek zastąpienie równania (63) przez równanie

$$EJ y'' = M \tag{64}$$



daje w wielu wypadkach wyniki zadowalające, to jednak zrozumiała jest dążność do uproszczenia dla poszczególnych przypadków praktyki budowlanej wyrażenia (62) dla momentu zginającego.

Narzuca się tu samo przez się uproszczenie wyrażenia (62) przez pominięcie w nim bądź wielkości  $a$ , bądź też wielkości  $y$ . W związku z tym rozpatrzmy tu przypadki następujące.

(a) O ile nie ma powodu oczekiwać dużych ugięć  $y$  pręta (słupa), jak to ma miejsce w słupach betonowych lub żelbetowych, wówczas przyjmujemy we wzorze (62)  $y = 0$ , co doprowadza do stałego momentu zginającego dla całego słupa:  $M = Pa$ .

Dochodzimy w ten sposób do uproszczonego schematu statycznego (rys. 62), który jest ściskaniem mimośrodowym przy stałym ramieniu siły podłużnej. Mamy tu właściwie do czynienia ze schematem nierealnym, gdyż w rzeczywistości nie może być mowy o słupie obciążonym mimośrodowo, który by mógł się nie wyginać. Z uproszczenia możemy więc korzystać tylko w określonych granicach. Uproszczony schemat statyczny ściskania mimośrodowego doprowadza w dalszej konsekwencji do pojęcia rdzenia przekroju oraz pojęć pokrewnych.

Ściskanie mimośrodowe przy stałym ramieniu siły podłużnej można by również nazwać ściskaniem mimośrodowym w granicach stosowalności zasady superpozycji używając dla jednoczesnego zginania i ściskania nazwę ściskania mimośrodowego poza granicami stosowalności zasady superpozycji, gdyż wówczas ramię siły  $P$  w każdym przekroju zależy od wartości tej siły.

(b) O ile mimośród  $a$  jest wielkością małą w porównaniu do wymiarów pręta, w szczególności zaś o ile jest on wielkością małą a nieznaną, wówczas przyjąć możemy, iż we wzorze (62)  $a = 0$ , co doprowadza do tego samego wyrażenia  $M = Py$  dla momentu zginającego, jak przy wyboczeniu w sensie matematycznym, a czym tłumaczy się, że dla schematu wyboczenia w sensie fizycznym siłę krytyczną uważamy za równą sile krytycznej dla wyboczenia w sensie matematycznym.

Kwestia, jak wielki mimośród  $a$  można pominąć i jakie ugięcie pręta można uważać za małe, ma charakter względny i zależy zarówno od warunków zadania, jak i od wymaganej dokładności obliczenia. Jest to właściwie kwestia, kiedy należy pręt obliczać na ściskanie mimośrodowe, a kiedy na wyboczenie. Pewne światło rzuca na sprawę znana reguła, według której pręty stalowe kratownic można obliczać jako ściskane osiowo, pomimo że, jak wiadomo, pręty te jednocześnie podlegają w rzeczywistości i zginaniu.



Rys. 62

Podczas gdy przy ściskaniu pręta zabezpieczonego przeciw wyboczeniu naprężenie normalne w przecię bywa sprawdzane na podstawie wzoru

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq k_c, \quad (65)$$

gdzie  $k_c$  oznacza naprężenie dopuszczalne na ściskanie, w przypadku wyboczenia stosujemy wzór

$$\sigma = \frac{P}{\varkappa A} \leq k_c, \quad (66)$$

gdzie współczynnik  $\varkappa$  zależny od siły krytycznej powiększa naprężenia, podkreślając w ten sposób niebezpieczeństwo wyboczenia.

Przy mimośrodowym ściskaniu pręta w granicach stosowalności zasady superpozycji mamy

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} \leq k_c, \quad (67)$$

gdzie moment  $M$  spowodowany jest mimośrodem siły  $P$ .

Przy mimośrodowym natomiast ściskaniu pręta poza granicami stosowalności zasady superpozycji, a więc przy jednoczesnym zginaniu i ściskaniu, korzystamy przy sprawdzaniu naprężeń normalnych ze wzoru

$$\sigma = \frac{P}{\varkappa A} + \frac{M}{W} \leq k_c. \quad (68)$$

Wzór ten noszący nazwę wzoru Jasińskiego będzie omówiony w paragrafie następnym.

## 2. Wzór F. Jasińskiego

Profesor F. Jasiński uzasadniał wzór (68) w drodze poniższego rozumowania.

Skoro naprężenie dopuszczalne na ściskanie wynosi w przecię  $k_c$ , a największe naprężenie spowodowane przez moment zginający równa się  $M/W$ , to naprężenie dopuszczalne na wyboczenie będzie równe naprężeniu  $k_c$  zmniejszonemu o wyzyskane już naprężenie  $M/W$ , czyli równe  $k_c - M/W$ . Wstawiając więc we wzór (66) zamiast  $k_c$  różnicę  $k_c - M/W$  otrzymujemy

$$\frac{P}{\varkappa A} \leq k_c - \frac{M}{W} \quad (69)$$

stąd

$$\frac{P}{\varkappa A} + \frac{M}{W} \leq k_c. \quad (70)$$

Tego rodzaju uzasadnienie wzoru (68) może wydawać się niedostateczne, wobec czego wzorowi bywa zarzucana sztuczność i nieekonomiczność. W świetle dokonanych porównań zarzut nieekonomiczności nie może być uważany za dostatecznie ważki. Wrażenie sztuczności stwarza tu natomiast okoliczność, że podczas gdy pierwszy dodajnik wzoru podkreśla niejako dążność do zabezpieczenia się przed wyboczeniem, a więc przed wygięciem pręta, drugi wyraz stwarza wrażenie pogodzenia się ze zginaniem jako mającym już miejsce. Ten brak konsekwencji tkwiący we wzorze *J a s i ń s k i e g o* jest jednak tylko pozorny i odpada przy głębszej analizie wzoru.

Trudność takiej analizy polega na niemożności stosowania tu zasady superpozycji. Trudność ta może być uwypuklona na poniższym zestawieniu.

Weźmy pod uwagę pręt pryzmatyczny w dwóch punktach swobodnie podparty, zginany siłą skupioną  $P$ , zaczepioną w środku i skierowaną prostopadle do osi. Naprężenie normalne na krawędzi pręta w jego przekroju środkowym wyrazi się wzorem

$$\sigma = \frac{Mz}{J} = \frac{\frac{P}{2} \frac{l}{2} z}{J}, \quad (71)$$

gdzie  $z$  oznacza odległość krawędzi pręta od osi obojętnej przekroju poprzecznego,  $J$  moment bezwładności przekroju i  $l$  rozpiętość pręta.

Aby wymiary pręta zginanego odpowiadały roli, jaka mu została w budowlu przeznaczona, musi być spełniony warunek

$$\sigma \leq k = \frac{1}{n} R, \quad (72)$$

gdzie  $k$  oznacza naprężenie dopuszczalne dla materiału pręta,  $n$  współczynnik bezpieczeństwa i  $R$  wytrzymałość materiału.

Na podstawie równań (71) i (72) otrzymujemy

$$\frac{nPlz}{4J} = nk = R, \quad (73)$$

czyli że w razie wyznaczenia wymiarów pręta według wzoru (72) możemy twierdzić, że pręt ulegnie złamaniu dopiero wówczas, gdy obciążająca go siła  $P$  wzrośnie  $n$ -krotnie.

Wobec tego, że zasada superpozycji znajduje w rozpatrywanym przypadku zastosowanie i że naprężenia są do sił proporcjonalne, mamy tu jednocześnie zapewniony ten sam stopień bezpieczeństwa zarówno prze-

ciwko osiągnięciu granicy wytrzymałości, jak i przeciwko osiągnięciu takiej wartości siły  $P$ , przy której złamanie pręta powinno nastąpić.

Rzecz ma się inaczej, gdy chodzi o pręty ściskane mimośrodowo, a więc zginane przez siły równoległe do osi.

Naprężenie normalne  $\sigma$  obliczamy w tych wypadkach ze wzoru

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P(a+y)z}{J}, \quad (74)$$

gdzie  $A$  oznacza pole przekroju poprzecznego pręta,  $a$  zaś mimośród, z jakim siły podłużne zostały do niego zaczepione.

Drogą całkowania przybliżonego równania osi odkształconej pręta ściskanego mimośrodowo

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = P(a+y) \quad (75)$$

otrzymać możemy dla ugięcia  $y$  wyrażenie

$$y = a \left( \frac{1}{\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{E J}}} - 1 \right), \quad (76)$$

gdzie  $E$  oznacza współczynnik sprężystości przy rozciąganiu i ściskaniu.

W związku ze wzorem (76) wyrażenie (74) przybiera postać

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P a z}{J} \frac{1}{\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{E J}}}. \quad (77)$$

Gdybyśmy w danym przypadku tylko dla naprężeń normalnych chcieli osiągnąć ten sam stopień bezpieczeństwa, co w przypadku zwykłego zginania, moglibyśmy pręt wymiarować na podstawie wzoru

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P a z}{J} \frac{1}{\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{E J}}} \leq k_c. \quad (78)$$

Wzór ten jednak zawodzi, gdy chcemy uzyskać ten sam współczynnik bezpieczeństwa  $n$ , któryśmy mieli zapewniony przy zginaniu zwykłym nie dla naprężeń normalnych, lecz dla sił  $P$ . Pochodzi to stąd, że skoro w danym razie zasada superpozycji nie znajduje zastosowania, naprężenia normalne nie są tu proporcjonalne do sił wywołujących zginanie pręta.

ta. Jeżeli więc we wzór (78) wstawimy zamiast  $P$  siłę  $n$ -krotnie powiększoną, to otrzymamy

$$\frac{nP}{A} + \frac{nPa z}{J} \frac{1}{\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{nP}{EJ}}} > nk_c, \quad (79)$$

gdzie  $nk = R$ .

Wynika stąd, że aby zapewnić prętowi  $n$ -krotne bezpieczeństwo względem siły ściskającej  $P$  zaczepionej mimośrodowo, nie możemy dopuścić w nim naprężeń  $k_c = 1/nR$ , lecz musimy we wzorze (78), według którego pręt wymiarujemy, umieścić mniejsze naprężenie dopuszczalne, a więc

$$k_0 = \frac{1}{n_0} R, \quad (80)$$

gdzie  $n_0 > n$ .

Ponieważ współczynnik  $n_0$  może być dla każdego pręta inny, traci więc cel wyznaczanie wymiarów pręta ze wzoru (78) i zachodzi potrzeba wyznaczenia wzoru (79) przez nadanie mu postaci równania

$$\frac{nP}{A} + \frac{nPa z}{J} \frac{1}{\cos \frac{l}{2} \sqrt{\frac{nP}{EJ}}} = R. \quad (81)$$

Rozwiązując równanie (81) względem  $nP$  znajdujemy

$$nP = P_{zn}, \quad (82)$$

gdzie  $P_{zn}$  jest pierwiastkiem równania i wyraża wartość siły  $P$  powodującą zniszczenie pręta.

Siła  $P$  obliczona ze wzoru

$$P = \frac{P_{zn}}{n} \quad (83)$$

będzie czyniła zadość warunkowi wymaganego stopnia bezpieczeństwa dla siły ściskającej.

Powstać może pytanie, czy nie wystarczy przekonać się przy obliczeniu pręta ściskanego mimośrodowo, że naprężenia posiadają dostateczny stopień bezpieczeństwa w stosunku do wytrzymałości pręta i czy jest potrzebne wobec tego uzyskiwanie pewnego określonego współczynnika bezpieczeństwa również dla sił ściskających.

Główna więc przyczyna podobnego postępowania tkwi w dążeniu do zabezpieczenia pręta ściskanego od nadmiernego odkształcenia. Jeżeli weźmiemy wykres przedstawiony na rys. 22, na którym krzywe II-VI wyra-

zają zależności między siłą ściskającą a największym ugięciem pręta dla różnych mimośrodów, to wiemy, że krzywa odpowiadająca danemu mimośrodowi wzrasta do pewnego miejsca (około punktu  $o$ ) bardzo powoli, prawie proporcjonalnie do siły  $P$ , po przekroczeniu jednak tego miejsca nagle zaczyna wzrastać szybko, osiągając wielkości bardzo znacznych nie tylko w porównaniu z wielkością mimośrodu, ale nawet w porównaniu z długością pręta.

Ponieważ od każdego elementu konstrukcyjnego wymagamy pewnej sztywności, tzn. wymagamy, aby jego odkształcenia nie przekraczały takiej wartości, która by utrudniała mu spełnianie jego przeznaczenia, więc i w przypadku pręta ściskanego mimośrodowo wymagać powinniśmy, aby siły ściskające pręt  $P$  nie przekraczały pewnej wartości  $P = P_0$ , przy której odkształcenia stają się bardzo wielkie. Ta okoliczność powinna być brana pod uwagę przy ustalaniu współczynnika bezpieczeństwa dla sił  $P$ . Przy wymiarowaniu prętów według wzoru (81) nie jest ona brana pod uwagę w sposób wyraźny, co tłumaczy się zwykle twierdzeniem, że w prętach wchodzących w skład konstrukcji budowlanych naprężenia normalne przekraczają granicę sprężystości już nawet przy niezbyt wielkich odkształceniach pręta. Dla większej pewności podobnego twierdzenia powinny być zostac odkształcenia prętów ściskanych mimośrodowo obliczone dla szeregu przypadków najbardziej typowych według ścisłego równania różniczkowego

$$\frac{EJ}{\rho} = P(a + y), \quad (84)$$

gdzie  $\rho$  oznacza zmienny promień osi odkształconej. Obliczenia tego rodzaju, dotąd wykonane, nie dają jeszcze dostatecznego pod tym względem materiału porównawczego.

Powyższe rozumowania zachowałyby moc swoją i wówczas, gdybyśmy współczynnik bezpieczeństwa  $n$  ustalali nie w stosunku do wytrzymałości materiału, lecz w stosunku do naprężenia na granicy plastyczności.

Na tle omówionych wyżej trudności przy obliczaniu statycznym prętów ściskanych mimośrodowo powstał właśnie wzór F. J a s i ń s k i e g o.

Przechodząc do wyprowadzenia tego wzoru weźmy pod uwagę na razie tylko pręt ściskany osiowo.

Aby pręt taki odpowiadał warunkom wytrzymałości, musi mieć miejsce zależność

$$\frac{P}{A} \leq k_c, \quad (85)$$

tzn. że naprężenia ściskające w przecie nie powinny przekraczać naprężeń dopuszczalnych na ściskanie.

Poza tym, jak wspomniano wyżej, z rys. 22 wynika, że przy pewnej wartości siły podłużnej  $P$  (wartość krytyczna  $P_k$ ) pręt ściskany osiowo ulega może wygięciu i że przy  $P > P_k$  ugięcia pręta wzrastają bardzo szybko według krzywej  $I$ . Przy  $P = P_k$  równowaga prostoliniowa pręta jest równowagą niestateczną. Ponieważ nie możemy dopuścić do ugięcia pręta ściskanego osiowo, musimy się więc zabezpieczyć, aby siła podłużna  $P$  była dostatecznie daleka od stanu równowagi niestatecznej, czyli że powinien być spełniony warunek

$$P \leq \frac{1}{n} P_k, \quad (86)$$

gdzie  $P_k$  oznacza siłę krytyczną danego pręta, lub też warunek

$$\frac{P}{A} \leq \frac{1}{n} R_k, \quad (87)$$

gdzie  $R_k$  oznacza naprężenie krytyczne.

Ponieważ  $R_k = \kappa R$ , lub też  $P_k = A R_k = \kappa A R$ , gdzie  $\kappa$  oznacza stosunek naprężenia krytycznego do wytrzymałości materiału na ściskanie, więc

$$\frac{1}{n} R_k < \frac{1}{n} R, \quad (88)$$

z czego wynika, że spełnienie się nierówności

$$\frac{P}{A} < \frac{1}{n} R_k \quad (89)$$

lub też nierówności

$$\frac{P}{\kappa A} \leq k_c \quad (90)$$

zapewnia prętowi ściskanemu osiowo całkowite bezpieczeństwo.

Dla ściskania mimośrodowego warunek wytrzymałości pręta przybiera postać

$$\frac{P}{A} + \frac{P(a+y)z}{J} < k_c. \quad (91)$$

Warunek ten, jak wykazano wyżej, nie wystarcza do zapewnienia prętowi ściskanemu mimośrodowo bezpiecznej pracy, podobnie jak wzór (85) nie wystarcza do wymiarowania prętów ściskanych osiowo. Analogicznie więc do wzoru (86) musimy ustawić wzór, który by dawał pewność, że siła podłużna  $P$  jest tu dostatecznie daleka od tej wartości  $P$ , przy której odkształcenia pręta ściskanego mimośrodowo zaczynają nagle wzrastać w sposób szybki (według jednej z krzywych  $I$ - $VI$  na rys. 22).

Aby zabezpieczyć pręt przed takim stanem rzeczy (stanem równowagi quasi-niestatecznej), musimy uczynić zadość warunkowi

$$P \leq \frac{1}{n} P_o. \quad (92)$$

Przy mniejszych smukłościach pręta  $l/i$ , którym towarzyszy już przekroczenie granicy sprężystości, rolę wykresu na rys. 22 zastępują wykresy z rodzaju przedstawionego na rys. 34.

Dzieląc obie strony nierówności (92) przez  $A$  znajdujemy

$$\frac{P}{A} \leq \frac{1}{n} \frac{P_o}{A}. \quad (93)$$

Ponieważ siła  $P_o$  stanowi tylko część tej siły, która mogłaby wywołać w pręcie naprężenia ściskające, odpowiadające granicy wytrzymałości, więc możemy przyjąć, że

$$P_o = \kappa_0 A R \quad (94)$$

i że wobec tego

$$\frac{P}{A} \leq \kappa_0 k_c, \quad (95)$$

gdzie  $\kappa_0$  jest mniejsze od  $\kappa$ , gdyż siła  $P_o$  jest mniejsza od siły  $P_k$ .

Nierówności (91) nadajemy postać

$$\frac{P}{A} \leq \frac{k_c}{1 + \frac{(a+y)z}{i^2}}. \quad (96)$$

Nie możemy w danym razie z góry powiedzieć, która z dwu nierówności, (95) czy też (96), jest mocniejsza i nie możemy wobec tego, tak jak to zrobiliśmy przy ściskaniu osiowym, zastąpić dwu nierówności wyrażających warunki wytrzymałości i stateczności przez jedną z nich.

Gdybyśmy zamiast nierówności (95) i (96) ustawili nierówność zawierającą w prawej części iloczyn współczynników przy wielkości  $k_c$  występującej w prawych częściach obu tych nierówności, wówczas wzór

$$\frac{P}{A} \leq \frac{\kappa_0 k_c}{1 + \frac{(a+y)z}{i^2}} \quad (97)$$

zawierałby wprowadzić jednocześnie i warunek wytrzymałości i zabezpieczenie pręta przed wielkimi ugięciami, ograniczyłyby jednak wielkość siły  $P$  w sposób wyraźnie nieekonomiczny.



Zastępujemy więc nierówność (97) przez nierówność

$$\frac{P}{A} \leq \frac{\kappa_0 k_c}{1 + \kappa_0 \frac{(a+y)z}{i^2}} \quad (98)$$

Nierówność (98) zawiera w sobie zarówno warunek (95), jak i (96), gdyż, z jednej strony

$$\frac{\kappa_0}{1 + \kappa_0 \frac{(a+y)z}{i^2}} < \kappa_0, \quad (99)$$

z drugiej zaś możemy przyjąć na korzyść bezpieczeństwa, że

$$\frac{\kappa_0}{1 + \kappa_0 \frac{(a+y)z}{i^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{(a+y)z}{i^2}} \quad (100)$$

Wzorowi (98) możemy w tych warunkach nadać postać

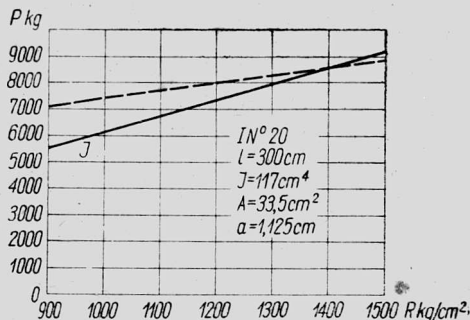
$$\frac{P}{\kappa_0 A} + \frac{P(a+y)z}{J} \leq k_c. \quad (101)$$

Aby przejść od wzoru (101) do wzoru F. Jasińskiego, pozostaje tylko zastąpić tu współczynnik  $\kappa_0$  przez współczynnik  $\kappa$  i opuścić wyraz  $y$ . Podobna zmiana powoduje w przypadkach mających znaczenie praktyczne zwiększenie siły obliczonej ze wzoru (68) dochodzące do kilkunastu procent; zmniejsza to odpowiednio nadmiar bezpieczeństwa zawarty we wzorze (98), a wahający się koło podobnej wielkości.

W dalszym ciągu przeprowadzamy tu porównanie wyników otrzymanych, z jednej strony, drogą obliczenia prętów ściskanych mimosrodowo według wzoru F. Jasińskiego, z drugiej zaś, według wzoru (81).

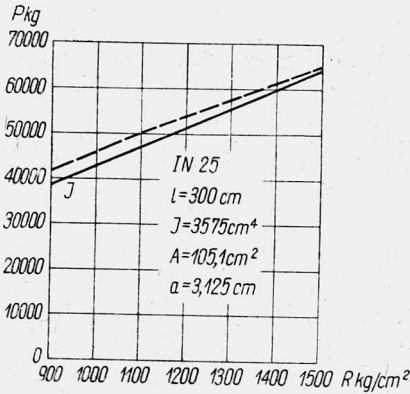
Przyjmujemy w dalszym ciągu, że naprężenia dopuszczalne wchodzące we wzór Jasińskiego stanowią połowę naprężeń na granicy sprężystości, czyli przyjmujemy tu współczynnik bezpieczeństwa w odniesieniu do granicy sprężystości  $R'$  za równy 2.

Wyniki obliczeń bezpiecznej (dopuszczalnej) siły  $P$  przeprowadzone, z jednej strony, według wzorów (81) i (83) — linie przerywane — z dru-



Rys. 63

giej zaś, według wzoru (68) — linie ciągłe, litera *J* — zestawione zostały dla różnych wartości *k* na wykresach według rysunków 63 i 64 odpowiadających dwu prętom stalowym, których charakterystyka podana jest na rysunkach.



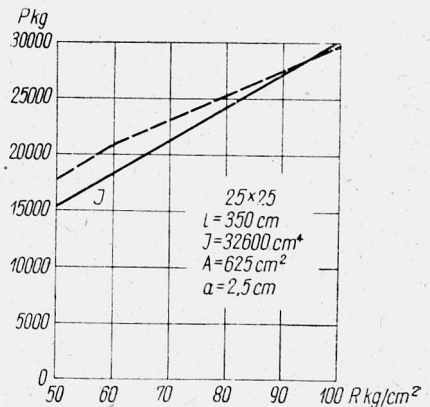
Rys. 64

najczęściej stosowanych w budownictwie stalowym tylko około 3%. Wynik ten jest bardzo ważny, gdyż smukłość  $l/i = 60$ , o którą tu chodzi, jest dla konstrukcji stalowych charakterystyczna.

Dla pręta stalowego o dużej smukłości (rys. 63) największe różnice w wynikach obliczeń według obu sposobów mają miejsce dla małych naprężeń dopuszczalnych i dochodzą do 0 przy  $k_c = 1350 \text{ kg/cm}^2$ .

Również wykres na rys. 65 dotyczący pręta drewnianego wskazuje, że różnice przy obliczaniu prętów ściskanych według wzorów (81) i (68) nie są zbyt wielkie, zwłaszcza jeżeli zważymy, iż oba sposoby obliczenia są sposobami przybliżonymi. Zastrzec się należy, że przy sporządzaniu wykresu na rys. 65 uważano naprężenia bezpieczne przy ściskaniu i zginaniu belek drewnianych za równe sobie, co wpływa jednak zmniejszająco na wielkość siły *P*.

Po wyznaczeniu tej wartości siły podłużnej, którą pręt może unieść bezpiecznie, na ogół nie mamy już potrzeby wyznaczania działających w nim naprężeń. Gdyby jednak potrzeba obliczenia naprężeń zachodziła, obliczenie należałoby wykonać nie według



Rys. 65

wzoru (68), lecz według wzoru (91), choćby zakładając w nim  $y = 0$ . Nieuwzględnienie ugięć w tym wypadku nie pozostaje jednak bez znaczenia, a więc w przypadku pręta o przekroju Nr 25 mamy na przykład bez uwzględnienia ugięcia  $\sigma_{max} = 1094 \text{ kg/cm}^2$ , a przy jego uwzględnieniu  $\sigma_{max} = 1144 \text{ kg/cm}^2$ .

Na podstawie przytoczonych rozważań i obliczeń można stwierdzić, że aczkolwiek wzór Jasińskiego na ściskanie mimośrodowe ustępuje co do konsekwencji w budowie wzorowi (81), jednak posiada następujące zalety:

(1) przez wprowadzenie współczynnika  $\alpha$  zaznaczona jest we wzorze (68) wyraźnie dążność do zabezpieczenia się od nadmiernych odkształceń pręta;

(2) wzór jest wygodny do obliczeń pod względem czysto arytmetycznym;

(3) zawierając bezpośrednio naprężenia dopuszczalne  $k_c$  nie następuje wątpliwości przy każdorazowym wyborze współczynnika bezpieczeństwa  $n$ .

### 3. Pręty złożone

Zagadnienie, czy należy ściskane proste elementy konstrukcji budowlanych obliczać na wyboczenie, czy na ściskanie mimośrodowe, odgrywa szczególną rolę w obliczeniu prętów złożonych.

Zagadnienie występuje w tym wypadku w sposób bardziej ostry, po pierwsze dlatego, że przy obliczeniu prętów złożonych nie możemy pomijać wpływu sił poprzecznych na wyboczenie, co zwykle robimy, gdy chodzi o pręty pełnościennie, a po wtóre dlatego, że schemat statyczny pręta złożonego, zwłaszcza pręta kratowego, jest zwykle bardzo skomplikowany, a działanie sił wewnętrznych w nim niejasne.

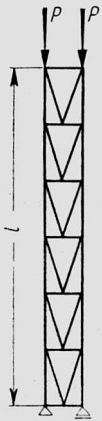
Sprawę uwzględniania mimośrodu sił ściskających podnosił już F. Jasiński (rok 1895), który podkreślał, że przypadkowy mimośród w prętach ściskanych tylko częściowo może być uważany za zależny od długości pręta, zależy bowiem również i od jego wymiarów poprzecznych.

W ostatnich czasach uczoney szwedzki, Wästlund<sup>4)</sup>, na podstawie badań doświadczalnych nad prętami złożonymi doszedł do wniosku, że pręty ściskane powinny być obliczane jako pręty jednocześnie ściskane i zginane przy ustalonym w przepisach budowlanych mimośrodku siły podłużnej.

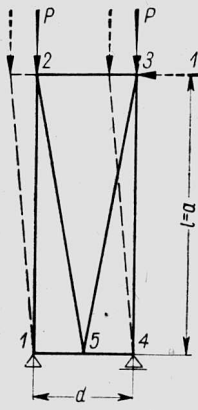
<sup>4)</sup> Prace VI Naukowego Zjazdu PZITB, 1949.

Obchodzenie się bez wprowadzenia mimośrodów sił ściskających przy obliczaniu prętów kratowych natrafia na duże trudności głównie dlatego, że trudno jest zaprojektować taki układ pręta, który by był układem jednocześnie statycznie wyznaczalnym i symetrycznym względem kierunku działania sił podłużnych. Przytoczmy tu jednak próbę takiego obliczenia.

Bierzemy więc pod uwagę pręt kratowy przegubowy we wszystkich węzłach, przedstawiony na rys. 66 i rozpatrujemy go w obszarze sprężystym. Przebieg obliczenia wyjaśnimy na małej liczbie przedziałów pręta, a więc przede wszystkim na układzie podanym na rys. 67.



Rys. 66



Rys. 67

Przypuśćmy, iż pewna siła zaczepiona tu do węzła 3 spowodowała przesunięcie się węzłów 2 i 3 w kierunku poziomym o  $u$ , przy czym przyjmujemy, iż pręty 23 i 14 nie uległy skrótom.

Do wyznaczenia przesunięć węzłów 2 i 3 korzystamy ze wzoru Maxwella i Mohra w postaci

$$u = \sum \frac{SZl}{EA}, \quad (102)$$

gdzie  $S$  oznacza siły powstałe w prętach układu pod działaniem sił  $P$ ,  $Z$  — siły powstałe tu pod działaniem siły 1, zaczepionej w węzle B i działającej w kierunku przesunięcia  $u$ , wreszcie  $l$  początkową długość prętów AB i CB.

Nie uwzględniając wpływu odkształcenia na kierunek działania sił w prętach, otrzymujemy dla  $Z_{12}$  oraz  $Z_{13}$  wyrażenia następujące:

$$Z_{12} = -\frac{a}{d}, \quad Z_{13} = +\frac{a}{d}. \quad (103)$$

Przy obliczaniu sił  $S$  nie możemy wprawdzie pominąć wpływu przesunięć  $u$  na sposób działania sił  $P$ , gdyż przesunięcia te odgrywają rolę mimośrodów sił podłużnych, który zasadniczo zmienia obciążenie poszczególnych prętów kratownicy, jednak zmiany spowodowane w sposobie działania na układ sił  $P$  przez pochylenie prętów 12 oraz 43 pomijamy, a więc znajdujemy

$$S_{12} = -P - \frac{Pu + P(d+u)}{d}, \quad (104)$$

$$S_{13} = -P + \frac{Pu - P(d-u)}{d}. \quad (105)$$

Pomijając wpływ pochylenia prętów układu na wielkości sił w tych prętach, pominać powinniśmy konsekwentnie i siły w prętach 25 i 53. Stąd otrzymujemy

$$u = \sum \frac{SZ}{EA} = \frac{S_{12}Z_{12}}{EA} + \frac{S_{43}Z_{43}}{EA}, \quad (106)$$

czyli

$$u = \frac{a}{EA} \left\{ \frac{a}{d} \left[ P + \frac{Pu + P(d+u)}{d} \right] + \frac{a}{d} \left[ -P + \frac{Pu - P(d-u)}{d} \right] \right\} \quad (107)$$

i dochodzimy w ten sposób do równania

$$u = \frac{4Pa^2}{EA d^2} u, \quad (108)$$

czyli do równania

$$u \left( 1 - \frac{4Pa^2}{EA d^2} \right) = 0. \quad (109)$$

Abyśmy stąd mogli otrzymać wielkości różne od zera, czyli aby  $u$  nie było stale równe 0, co przeczyłoby pierwotnemu założeniu, musi być

$$2P = \frac{EA d^2}{2a^2}. \quad (110)$$

Wielkość  $2P$  otrzymana z równania (110) jest wartością krytyczną tej siły dla następujących powodów.

Gdybyśmy chcieli z większą dokładnością niż dotąd otrzymać siły  $S$  i  $Z$  wchodzące we wzór (107), powinniśmy pomnożyć wchodzące tu wyrażenia przez pewne funkcje kąta  $\varphi = \arctg(u/a)$ . Wobec tego otrzymalibyśmy zamiast równania (110) równanie

$$2P = \frac{EA d^2}{2a^2} F(\varphi), \quad (111)$$

gdzie  $F(\varphi)$  zmierza do 1 przy  $u$  dążącym do zera.

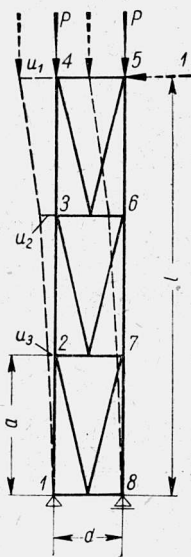
Stąd wynika, że

$$(2P)_k = \frac{EA d^2}{2a^2} = \frac{4EA \frac{d^2}{4} \cdot 2}{2 \cdot 2a^2} = \frac{4EJ}{4a^2}. \quad (112)$$

Brak funkcji  $F(\varphi)$  w równaniu (109) tłumaczy się tym, że pomijając odchylenia prętów kratownicy wywołane przez przesunięcie  $u$ , przyję-

liczmy już niejako z góry zamiast pewnych funkcji kątowych ich granice przy  $u$  dążącym do 0. Wielkość siły krytycznej nie ulega przy tym zmianie.

Dla porównania wzoru (112) ze wzorem Eulera na siłę krytyczną pręta pełnościennego przyjmujemy, że  $2EAd^2/4 = EJ$ , skąd



Rys. 68

$$(2P)_k = \frac{4 EJ}{4 l^2}. \quad (113)$$

Liczba 4 w liczniku wyrażenia (113) jest daleka od liczby  $\pi^2$ , która występuje we wzorze Eulera dla pręta w jednym końcu utwierdzonego. Gdy jednak będziemy powiększali liczbę przedziałów omawianej kratownicy, będziemy odpowiednio otrzymywali

$$(2P)_k = \frac{6,4 EJ}{4 l^2}, \quad (114)$$

$$(2P)_k = \frac{7,2 EJ}{4 l^2} \quad \text{itd.}, \quad (115)$$

gdzie współczynniki liczbowe przy  $EJ$  zbliżają się do  $\pi^2$ , choć niezbyt prędko. Np. dla trzech pręseł układu będziemy mieli kratownicę przedstawioną na rys. 68. Zaczepiając kolejno poziome siły 1 do węzłów 5, 6 oraz 7

i postępując w ten sam sposób jak przy obliczeniu kratownicy jednoprzęsłowej, znajdujemy dla poziomych przesunięć poszczególnych węzłów odpowiednio

$$u_1 = Bu_1 - Bu_2 + 2Bu_1 - 2Bu_3 + 3Bu_1, \quad (116)$$

$$u_2 = Bu_1 - Bu_3 + 2Bu_1, \quad (117)$$

$$u_3 = Bu_1, \quad (118)$$

gdzie

$$B = \frac{4 Pa^2}{E Ad^2}.$$

Aby przesunięcia  $u_1$ ,  $u_2$  i  $u_3$  mogły posiadać wartości różne od zera, wyznacznik równań (116)-(118) musi się równać zero. Warunek ten doprowadza do równania

$$B^3 - 5B^2 + 6B - 1 = 0, \quad (119)$$

skąd obliczamy  $B$  i wartość krytyczną  $(2P)_k$ .

Zauważyć należy, że w wielu przypadkach praktyki inżynierskiej bywają stosowane do obliczenia prętów złożonych, w szczególności do obliczenia ich kraty, wzory wyprowadzone dla prętów pełnościennych z uwzględnieniem sił poprzecznych przy wyboczeniu.

Wprowadzenie do obliczenia prętów złożonych mimośrodu sił ściskających opiera się na szeregu doświadczeń laboratoryjnych i na obserwacjach konstrukcji stalowych. Doświadczenia, o których mowa, były wykonywane poczynając od ostatnich lat poprzedniego stulecia aż, jak to wykazano wyżej, do chwili obecnej, były jednak najbardziej może intensywnie prowadzone w końcu poprzedniego i na początku obecnego stulecia w związku z szeregiem mających w tym czasie miejsce katastrof budowlanych. Doświadczenia tego czasu dały podstawę do uogólnień podjętych przez takich uczonych, jak T i m o s z e n k o, P r a n d t l, M ü l l e r - B r e s l a u i inni.

Mamy tu na widoku przede wszystkim następujące grupy badań<sup>5)</sup>:

(1) T e t m a j e r rozpoczął swe doświadczenia w Zurychu po katastrofie z Mönchensteiner Brücke w roku 1892. Liczba prętów badanych wynosiła około 100, przy czym pręty miały końce częściowo płaskie, częściowo przegubowe.

(2) Po pierwszej katastrofie mostu w Quebec w roku 1907 B u r r wykonał szereg doświadczeń nad modelami prętów złożonych wykonanych w rozmiarze  $1/3$  wielkości naturalnej.

(3) Katastrofa zbiornika gazu w Hamburgu w roku 1908 spowodowała szereg badań w Materialprüfungsamt w Berlinie. Pręty miały tu długość 3,40 m i były podparte na końcach za pomocą kul stalowych.

(4) Doświadczenia K r o h n a z roku 1907 były spowodowane przez jakąś bliżej przez niego nie omówioną katastrofę mostową. Pręty w liczbie 4 miały długość około 6 m i były badane w Conservatoire des Arts et Métiers w Paryżu. Końce ich były oparte na nożach.

(5) E m p e r g e r wykonywał swe badania w Wiedniu w roku 1908. Pręty badane w liczbie kilkunastu miały długość 3,6-5,4 m. Końce ich były płaskie, czym tłumaczy się na ogół mniejsze zaufanie do tych badań niż do badań K r o h n a.

(6) W związku z odbudową mostu w Quebec firma «Phönix» podjęła w roku 1910 badania nad prętami nowego mostu na modelach o rozmiarach od  $1/415$  do  $11/32$  wielkości naturalnej. Jeden koniec każdego modelu był płaski, a drugi przegubowy.

---

<sup>5)</sup> Publikacje zawierające opis badań podane są w pracy wymienionej w przedmowie pod (2).

Rozważania na temat wykonanych badań doprowadziły do następujących wniosków:

(1) wyboczenie pręta złożonego nie jest przywiązane do płaszczyzny najmniejszego momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta,

(2) wytrzymałość pręta złożonego na wyboczenie zależy nie tylko od stosunku jego długości do promienia bezwładności przekroju poprzecznego pręta jako całości, lecz również i od wielkości podobnego stosunku dla poszczególnych przedziałów jego pasów,

(3) wytrzymałość pręta złożonego zależy od wytrzymałości jego poprzeczek i krzyżulców.

Metody obliczenia prętów złożonych oparte na doświadczeniach dadzą się podzielić na grupy następujące <sup>6)</sup>:

(I) Metody dotyczące wyłącznie prętów doskonale sprężystych i obciążonych ściśle osiowo (metody Engessera, Prandtla, Timoszenki i innych). Pierwszą z tych metod była metoda Engessera ogłoszona w roku 1891.

(II) Metody oparte bezpośrednio na badaniach laboratoryjnych i dające wzory uwzględniające w tej lub innej formie mimośrodowość siły podłużnej bez wprowadzania jednak mimośrodu do ostatecznego wzoru na siłę krytyczną (metody Krohna, Gerarda, Saligera i innych).

(III) Metody oparte na schemacie jednoczesnego ściskania i zginania z uwzględnieniem ustalonego z góry mimośrodu (metody Müller-Breslaua i Kaysera).

Do grupy (III) zbliżony jest również ogłoszony przez autora w roku 1924 sposób obliczenia prętów złożonych, ściskanych siłami nachylonymi pod kątem ostrym w stosunku do osi pręta <sup>7)</sup>. Bieg rozumowania jest tu następujący.

Rozpatrujemy pręt złożony, ściskany siłami  $P$  działającymi wzdłuż prostej nachylonej względem osi pasów pod kątem ostrym (rys. 69). Siły  $Q$  będą tu oznaczały składowe sił wzajemnego oddziaływania na siebie kraty i nierozciętych pasów, skierowane prostopadle do osi pasów. Siły  $\Delta P$  zaczepione do poszczególnych węzłów pręta złożonego wyrażają różnice sił podłużnych działających w sąsiednich przedziałach pasa, przy czym przewidujemy tu przegubowe połączenie węzłów kraty z nierozciętymi pasami. W ten sposób poszczególne pasy pręta złożonego znajdują się w warunkach pręta podpartego na końcach i obciążonego jednocześnie siłami  $Q$  i  $\Delta P$  (rys. 70). Ugięcia takiego pręta prostopadle do osi podłuż-

---

<sup>6)</sup> Opisy metod Engessera, Krohna i Müller-Breslaua oraz źródła dotyczące innych wymienionych metod podane są w pracy wymienionej w przedmowie pod (2).

<sup>7)</sup> Praca wymieniona w przedmowie pod (1).



nej pręta  $y_i^c$  w miejscach poszczególnych węzłów otrzymujemy z równania

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M^Q - M^P, \quad (120)$$

gdzie  $M^Q$  i  $M^P$  oznaczają momenty zginające w poszczególnych przekrojach spowodowane odpowiednio przez siły  $Q$  i siły  $\Delta P$ . Zastosowanie tu przybliżonego równania różniczkowego odkształconej tłumaczy się tym, że w danym wypadku pasy znajdują się w warunkach podobnych do prętów leżących w środowisku sprężystym i dlatego nie ulegają większym ugięciom. Ugięcia te są funkcjami sił  $Q$  i  $\Delta P$ .

Z drugiej strony, wyznaczamy przesunięcia  $v_i$  poszczególnych węzłów  $i$  jako węzłów kratownicy przegubowej również w zależności od sił  $Q$  i  $\Delta P$ .

Ponieważ przesunięcia węzłów pręta złożonego jako węzłów kratownicy muszą być równe przesunięciom pasów pręta jako belek zginanych, możemy więc ustawić dla poszczególnych węzłów równanie

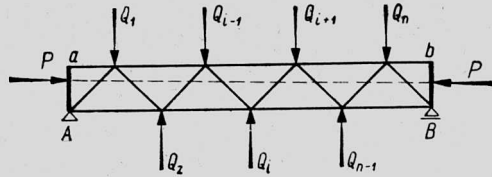
$$y_i = v_i, \quad (121)$$

skąd znajdujemy siły  $Q$  i  $P$  potrzebne do sprawdzenia wymiarów pręta złożonego.

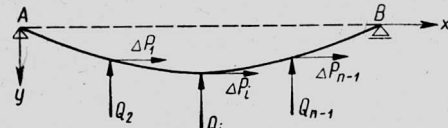
Potrzebny do przeprowadzenia przytoczonego obliczenia mimośród siły podłużnej został przez autora wyprowadzony dla kratownic mostowych z warunku sztywności węzłów. Obliczenia zostały wykonane dla szeregu kratownic, których obliczenie znalazło się w literaturze technicznej. Po odrzuceniu pewnych przypadków o charakterze szczególnym można ustalić największy mimośród w płaszczyźnie kratownicy na 1/120, przy czym na obydwóch końcach pręta złożonego mimośrodki mogą mieć różne znaki. Na podstawie tego mimośrodka łatwo można ustalić siłę poprzeczną, na którą należy obliczać kratę pręta złożonego. Będzie to siła

$$T = \frac{P}{60},$$

gdzie  $P$  oznacza rzeczywiście działającą na pręt siłę ściskającą, a  $T$  odpowiednią siłę poprzeczną.



Rys. 69



Rys. 70

Przytoczony sposób obliczenia prętów złożonych nie wymaga wprowadzenia siły krytycznej; nie może tu zresztą być w ogóle mowy o niestateczności równowagi pręta złożonego, groźne natomiast dla pręta byłoby tylko nadmierne, niedopuszczalne wygięcie pręta ściskanego, a więc niebezpieczeństwo quasi-wyboczenia, czyli równowagi quasi-niestatecznej.

#### IV. WNIOSEK

Badając zagadnienie powstawania zjawiska wyboczenia, z jednej strony, na podstawie obserwacji i ich bezpośredniej analizy, z drugiej strony, przez porównanie zjawiska z jego modelami i ze ściskaniem mimośrodowym, z którym jest ono blisko związane, dochodzimy do następującego, najogólniejszego określenia zjawiska:

*Wyboczenie jest to przypadek niestateczności lub quasi-niestateczności równowagi ściskanego osiowo pręta prostego przy pewnej wartości siły podłużnej zwanej krytyczną.*

#### Резюме

#### О ВОЗНИКНОВЕНИИ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Работа основана в значительной степени на 12 трудах автора, перечисленных в предисловии.

В первой главе приведена дефиниция продольного изгиба с технической точки зрения, как явления, состоящего в том, что прямой стержень, сжимаемый осевыми силами, остается прямым до известного (так называемого критического) значения продольной силы; превышение этого значения вызывает прогиб, причем понятия «прямой» и «осевой» следует понимать здесь, как определенные точно измерения. Дальше доказано, что эта дефиниция охватывает все возможные схемы продольного изгиба, т. е., с одной стороны, изгиб в математическом и физическом смысле, а с другой — продольный изгиб, в пределах и вне пределов упругости. Эти схемы рассмотрены на основе результатов испытаний, произведенных в разное время, и на основе расчета деформации прямых стержней, подвергаемых одновременно изгибу и сжатию. Введено понятие квази-неустойчивого равновесия, как рода равновесия, соответствующего, с кинематической точки зрения, неустойчивому равновесию, а с энергетической — устойчивому. Признаком такого рода равновесия является случай больших и недопускаемых изгибов прямого стержня, вызванных действием продольных сил.

Вторая глава содержит анализ моделей продольного изгиба и квази-неустойчивого равновесия. Одна из этих моделей — это цилиндрическая модель Сауэвелля, а остальные шесть — оригинальные модели автора.

В третьей главе рассмотрено отношение продольного изгиба к внецентренному сжатию. Этот вопрос имеет особенно важное значение в случае составных стержней, которым посвящен отдельный раздел. В третьей главе приведен также анализ формулы Ф. Ясинского для одновременного изгиба и сжатия.

На основании рассуждений, приведенных в I, II и III главах, предложено в IV главе общую дефиницию продольного изгиба, согласно которой продольный изгиб прямого стержня является случаем неустойчивого или квази-устойчивого равновесия.

#### S u m m a r y

#### THE ORIGIN OF BUCKLING OF STRAIGHT BARS

This work is based to a large extent on twelve papers by the same author, which are listed in the introduction.

In the first section a definition of buckling in the technical sense is given as the phenomenon of deflection of a straight bar submitted to axial compression when the longitudinal force exceeds a certain value, called «critical». The terms «straight» and «axial» are to be understood as defined by the accuracy of measurements. The author shows that the above mentioned definition includes all kinds of buckling, in the mathematical as well as in the physical sense, of elastic and non-elastic bodies. All these cases are discussed on the basis of experiments made at various times, and taking into consideration the calculations of the deformation of a straight bar subjected to simultaneous bending and compression. The notion of quasi-unstable equilibrium is introduced for the state resembling, from the point of view of kinematics, the unstable equilibrium and from the energetic point of view, the stable equilibrium. An example of the above defined state of equilibrium is the case of unpermissibly large deflections of a straight bar caused by the action of longitudinal forces (the phenomena of quasi-buckling).

Section II contains an analysis of certain models of buckling and quasi-buckling. One of them is Southwell's cylindrical model, while the other six are the author's own models.

In section III the relation between buckling and eccentric compression is discussed. This problem is of special importance in the case of lattice bars, and is discussed in a separate paragraph. An analysis is given of the formula derived by F. Jasiński for simultaneous bending and compression.

In section IV, after taking into consideration the sections reviewed, the author proposes a general definition of buckling as being a case of unstable or quasi-unstable equilibrium.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 października 1953 r.*



## SPIS TREŚCI

	Str.
<b>Przedmowa</b>	<b>3</b>
<b>I. Istota zjawiska wyboczenia</b>	
1. Rodzaje i schematy wyboczenia	5
2. Wyboczenie w sensie matematycznym	7
3. Wyboczenie w sensie fizycznym	15
4. Wyboczenie prętów o sprężystości ograniczonej	26
5. Siła krytyczna	29
<b>II. Modele zjawiska wyboczenia</b>	
1. Model walcowy Southwella	31
2. Modele prętowe	34
3. Modele sprężynujące	39
4. Wyboczenie a jego modele	41
<b>III. Stosunek wyboczenia do ściskania mimośrodowego</b>	
1. Rodzaje ściskania mimośrodowego	45
2. Wzór F. Jasińskiego	48
3. Pręty złożone	57
<b>IV. Wniosek</b>	<b>64</b>



KOMITET REDAKCYJNY

R O Z P R A W I N Ż Y N I E R S K I C H

prosi autorów o przestrzeganie następujących wskazówek

(1) Prace w języku polskim, przepisane na maszynie (nie światłodruki), należy składać w dwóch egzemplarzach. Wzory powinny być napisane wyraźnie atramentem, rysunki (szkice) dołączone na oddzielnych kartach (nie w tekście).

(2) Obowiązuje numeracja dziesiętna wzorów [np. wzór 5 w p. 2 oznacza się (2.5)]. Numery wzorów należy umieszczać z lewej strony. Należy unikać numeracji rzymskiej i alfabetycznej (wzorów, rysunków, paragrafów, rozdziałów).

(3) Do pracy należy dołączyć streszczenie nie przekraczające jednej strony maszynopisu w języku polskim (również wtedy, gdy autor składa streszczenie w języku obcym) i podać ewentualnie terminologię w dwóch językach (w tym jeden rosyjski), na które streszczenie ma być przełożone.

(4) Literaturę cytowaną w tekście należy zestawić w końcu pracy podając nazwisko i imię autora, tytuł pracy, miejsce i rok wydania (w przypadku cytowania czasopisma również numer zeszytu). Nazwiska i tytuły rosyjskie należy pisać alfabetem rosyjskim. W tekście należy powoływać się na numery prac (w nawiasie kwadratowym, np. [5]) według zestawienia.

(5) Funkcje trygonometryczne należy oznaczać przez  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $tg$ ,  $ctg$ ; funkcje hiperboliczne z dodaniem litery  $h$ . Współczynnik Poissona oznacza się przez  $\nu$ . Kresek pionowych używa się tylko do oznaczenia wartości bezwzględnej. Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).

(6) Autorowi przysługuje prawo do przeprowadzenia ostatecznej korekty (bez zmian tekstu) dokładnie w terminie wyznaczonym przez Redakcję.

(7) Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w ROZPRAWACH.

Niestosowanie się do powyższych wskazówek opóźnia publikację pracy

WYDAWNICTWA  
ZAKŁADU MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH IPPT  
P O L S K I E J A K A D E M I I N A U K

ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ  
KWARTALNIK POŚWIĘCONY PRACOM NAUKOWYM Z ZAKRESU TEORII  
SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMO-  
DYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TEORII KONSTRUKCJI

Ukazały się tomy I—V oraz zeszyt 1 tomu VI. W druku zeszyt 2 tomu VI

R O Z P R A W Y I N Ż Y N I E R S K I E  
U K A Z A Ł Y S I Ę

- I. F. Szelągowski, Rozwiązanie zagadnienia płaskiego teorii sprężystości w układzie współrzędnych prostokątnych  
— O pewnych szczególnych przypadkach wytrzymałości tarczy nieograniczonej z odmiennym ośrodkiem zarysu eliptycznego
- II. J. Naleszkiewicz i A. Szaniawski, Drgania i stateczność masztów oraz iglic
- III. Z. Klębowski, Podstawy uwzględniania wzmocnień obwodowych w wytrzymałościowym obliczaniu rury poddanej działaniu wewnętrznego ciśnienia
- IV. M. Życzkowski, Ugięcie pręta ściskanego mimośrodowo pod działaniem siły krytycznej
- V. E. Szczepaniak, Nowa metoda rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych ustrojów prętowych na modelach bez wykonywania przecięć
- VI. W. Olszak, Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych (Plastyczne wyczerpanie nośności)
- VII. A. Lisowski, Płyty na sprężystym podłożu
- VIII. J. Nowiński, Wyznaczenie przybliżonej wielkości ugięcia płyty na podstawie metody Ritz'a
- IX. W. Fiszdon, O pewnej metodzie obliczania amplitud drgań
- X. Z. Wasiutyński, O kształtach pęknięć powierzchniowych
- XI. W. Wierzbicki, Dźwigary załamane w planie
- XII. W. Wierzbicki, O powstawaniu wyboczenia prętów prostych
- XIV. W. Żenczykowski, Podstawy wytrzymałościowe obliczeń statycznych konstrukcji murowanych z cegły

W D R U K U

- XIII. W. Wierzbicki, Kierunki możliwych usprawnień w obliczeniach łuków
- XV. I. Malecki, Metody zastosowania rachunku tensorowego w technice
- XVI. J. Nowiński, Podstawy teorii plastyczności (I). Siedem wykładów z teorii plastyczności
- XVII. W. Nowacki, Statyka rusztów płaskich