

INSTYTUT BUDOWNICTWA  
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii .49../85

OPTIMALIZACJA RAM STALOWYCH  
Z UWZGLĘDNIENIEM  
W ANALIZIE STATYCZNEJ  
EFEKTÓW GEOMETRYCZNEJ NIELINIOWOŚCI

Piotr Berkowski

Praca doktorska

Promotor:

Prof. dr hab. inż. Jeremi M. Sieczkowski

Słowa kluczowe:

ramy stalowe, optymalizacja dyskretna, nieliniowość  
geometryczna

Wrocław 1985

Mgr inż. Piotr BERKOWSKI  
Instytut Budownictwa  
Politechniki Wrocławskiej  
Plac Grunwaldzki 11,  
budynek C-7, pokój 601, telefon 20-36-54

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych  
Instytutu Budownictwa dnia .....

## SPIS TREŚCI

1. WSTĘP
2. WPROWADZENIE
  - 2.1. Przedmiot i zakres pracy
  - 2.2. Cel i tezy pracy
  - 2.3. Spis oznaczeń stosowanych w pracy
    - 2.3.1. Oznaczenia występujące w części teoretycznej
    - 2.3.2. Oznaczenia występujące w części dotyczącej opisu programów komputerowych
3. MODEL OPTYMALIZACJI STAŁOWYCH KONSTRUKCJI RAMOWYCH
  - 3.1. Założenia dotyczące rozważanych konstrukcji
  - 3.2. Ogólne sformułowanie zadania optymalizacji ram
  - 3.3. Model matematyczny optymalizacji
    - 3.3.1. Określenie zbioru zmiennych decyzyjnych i parametrów
    - 3.3.2. Określenie obciążeń konstrukcji
    - 3.3.3. Określenie ograniczeń - obszar rozwiązań dopuszczalnych
    - 3.3.4. Określenie funkcji celu i kryterium optymalizacji
    - 3.3.5. Podsumowanie i uwagi
4. ELEMENTY GEOMETRYCZNEJ NIELINIOWOŚCI W ANALIZIE STATYCZNEJ RAM PŁASKICH
  - 4.1. Elementy metody sieciowej w analizie statycznej
  - 4.2. Efekty geometrycznej nieliniowości w konstrukcjach ramowych
    - 4.2.1. Wprowadzenie
    - 4.2.2. Analiza statyczna ram według teorii II rzędu
    - 4.2.3. Efekt  $\Delta - P$
    - 4.2.4. Przybliżona metoda analizy II rzędu / modyfikacja metody  $\Delta - P$  /

4.3. Podsumowanie i uwagi

4.3.1. Ogólna analiza wyników obliczeń

4.3.2. Podsumowanie

5. METODA NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA ZADANIA OPTYMALIZACJI

5.1. Wprowadzenie

5.2. Rozwiązanie zadania optymalizacji z wykorzystaniem metody "backtrack"

5.3. Przykłady testowe metody "backtrack"

5.4. Podsumowanie i uwagi

6. OPTYMALIZACJA RAM STAŁOWYCH

6.1. Algorytm procesu optymalizacji

6.2. Przykłady obliczeniowe

6.3. Podsumowanie i uwagi

7. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI OGÓLNE

LITERATURA

## 1. WSTĘP

Rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej, matematycznych metod programowania oraz podejścia macierzowego w analizie statycznej spowodował radykalną zmianę procesu projektowania różnych konstrukcji, w tym konstrukcji budowlanych. Rozszerzając dotychczasowe metody projektowania oparte na analizie konstrukcji, dąży się obecnie do wprowadzenia projektowania syntetycznego, wykorzystującego automatyzację obliczeń oraz metody optymalizacji. W projektowaniu konstrukcji optymalnych, oprócz analizy statyczno-wytrzymałościowej, prowadzi się analizę ekonomiczności danego rozwiązania z punktu widzenia przyjętego kryterium oceny jakości konstrukcji. Pozwala to na otrzymanie rozwiązania najlepszego z wszystkich istniejących wariantów opisywanych danym modelem matematycznym, będącym przeniesieniem konstrukcji rzeczywistej w odpowiadający jej model obliczeniowy, zapisany w postaci symboli matematycznych i wyrażeń algebraicznych.

Porównując projektowanie konstrukcji optymalnych z projektowaniem tradycyjnym należy podkreślić fakt, że istnieje szereg problemów konstrukcyjno-projektowych, w których optymalizacja jest elementem niezbędnym i w zasadniczym stopniu ułatwiającym pracę projektanta. Należą do nich między innymi:

- projektowanie konstrukcji wielokrotnie powtarzalnych, w których efektywność rozwiązań zależy od możliwości wykorzystania danego projektu w wielu przypadkach eksploatacyjnych,
- projektowanie konstrukcji o dużej liczbie czynników kształtujących oraz wymagań wynikających z norm i przepisów,
- projektowanie konstrukcji, dla których otrzymanie rozwiązania jednoznacznie najlepszego z punktu widzenia jej przydatności eksploatacyjnej jest celem nadrzędnym.)

Reasumując należy stwierdzić, że dążenie do opracowania systemów lub programów projektowania konstrukcji optymalnych, jest

zgodne z najnowszymi tendencjami istniejącymi w pracach nad metodami automatyzacji procesu projektowania konstrukcji budowlanych.

Według klasycznej analizy statycznej opartej na liniowej teorii prętów sprężystych z uwzględnieniem zasady zeszytywnienia, równania równowagi konstrukcji formułowane są dla nieprzemieszczającej się konfiguracji węzłów. Podejście powyższe nie oddaje w pełni rzeczywistego zachowania się konstrukcji pod obciążeniem, nawet w przypadku układów nie wykazujących skłonności do dużych przemieszczeń, dużych odkształceń lub pracujących w przedkrytycznym stanie równowagi. Rozwój komputerowych metod obliczeniowych umożliwia, w znacznie szerszym niż dotychczas zakresie, zwłaszcza w odniesieniu do konstrukcji o dużej liczbie stopni swobody, uwzględnienie w analizie statycznej efektów związanych z teorią, w której równania równowagi budowane są dla odkształconej postaci konstrukcji. Jest to pewien istotny krok naprzód ku zwiększeniu dokładności projektowania konstrukcji prętowych.

Niewątpliwie jest więc koniecznym, w oparciu o istniejący i proponowany przez autora rozprawy aparat teoretyczno-obliczeniowy, wprowadzenie elementów optymalizacji analizy statycznej opartej na teorii II rzędu do procesu projektowania prętowych konstrukcji budowlanych.

Niniejsza praca składa się z siedmiu rozdziałów. W rozdziale drugim przedstawiono zasadniczą różnicę między liniową analizą konstrukcji oraz analizą opartą na teorii II rzędu oraz omówiono rodzaje efektów geometrycznych / tylko takimi efektami nielinowości zajęto się w pracy /, których uwzględnienie w analizie statycznej prowadzi do analizy drugiego rzędu. Podano również ogólne sposoby rozwiązywania konstrukcji ram z uwzględnieniem wymienionych efektów. W rozdziale tym sformułowano również cel i tezy pracy oraz przedstawiono wykaz podstawowych oznaczeń stosowanych w pracy.

W rozdziale trzecim przedstawiono założenia dotyczące rozważa-

nych konstrukcji, a związane z proponowanym modelem optymalizacji dyskretnej. Podano również postacie elementów modelu matematycznego optymalizacji takich, jak zmienne decyzyjne i parametry, obciążenia konstrukcji, zbiór ograniczeń oraz funkcja celu i kryterium optymalności.

Rozdział czwarty zawiera ogólny opis stosowanej metody analizy statycznej opartej na teorii sieci oraz szczegółowe omówienie wybranych efektów geometrycznej nieliniowości. Podano w nim postaci zmodyfikowanych elementów macierzy sztywności oraz proponowane metody uwzględnienia wybranych efektów w procesie analizy statycznej. Dokonano również porównania wyników / przemieszczenia, siły wewnętrzne, naprężenia / analizy statycznej liniowej i uwzględniającej wpływy omówionych efektów.

W rozdziale piątym przedstawiono opis oraz algorytmy stosowanej matematycznej metody poszukiwania optymalnych wartości wektora zmiennych decyzyjnych. Zastosowano technikę "backtrack", która umożliwia przeszukiwanie obszaru zmiennych decyzyjnych o wartościach dyskretnych.

W rozdziale szóstym opisano algorytm programu optymalizacji zbudowanego według podstaw teoretycznych przedstawionych w rozdziałach 3, 4 i 5. W rozdziale tym przedstawiono również wyniki optymalizacji wybranych przykładów ram, zarówno dla liniowej analizy statycznej, jak i analizy drugiego rzędu oraz ich porównanie.

Wnioski wypływające z podsumowań wyników otrzymanych w kolejnych etapach pracy oraz wnioski końcowe zamieszczono w siódmym rozdziale pracy.

Drugą część pracy stanowi Załącznik, w którym przedstawiono opisy oraz wydruki opracowanych programów oraz wydruki przykładów obliczeniowych.

## 2. WPROWADZENIE

### 2.1. Przedmiot i zakres pracy

Przedmiotem niniejszej pracy jest optymalizacja wybranego typu ram stalowych zbudowanych z prętów blachownicowych. Przedstawiono w niej matematyczny model dyskretnej optymalizacji ram z położeniem nacisku na jego zastosowanie w praktyce projektowej. W procesie analizy statycznej dążono do uwzględnienia efektów wynikających z wpływu przemieszczeń konstrukcji na rozkład sił wewnętrznych w zakresie teorii II rzędu.

Teoria I rzędu, z zastosowaniem której rozwiązuje się zadanie równowagi dla pręta nieodkształconego, opiera się na elementarnych teoriach zginania, skręcania swobodnego i nieswobodnego, dotyczących pręta cienkościennego. W zagadnieniach teorii I rzędu zestawia się więc równania równowagi dla elementu nieodkształconego. Takie podejście można jednak stosować tylko w przypadku konstrukcji, w których odkształcenia elementów mają niewielki wpływ na siły wewnętrzne i przemieszczenia. Jednakże, gdy mamy do czynienia z badaniem nośności konstrukcji na wyboczenie lub jej stateczności oraz gdy chcemy, w obszarach przedkrytycznych pracy konstrukcji, dokładniej określić rozkład sił wewnętrznych lub zachowanie się konstrukcji pod obciążeniem, należy rozwiązać zagadnienie równowagi konstrukcji odkształconej z zastosowaniem teorii II rzędu. Oznacza to, że równania równowagi w zagadnieniach teorii II rzędu budowane są dla elementu odkształconego.

W analizie konstrukcji można uwzględniać nieliniowości fizyczne / materiałowe /, nieliniowości geometryczne oraz nieliniowości typu "dużych odkształceń" [23]. W niniejszej pracy skoncentrowano się wyłącznie na nieliniowościach typu geometrycznego.

Do efektów geometrycznych, wpływających zarówno na wytrzymałość, jak i stateczność konstrukcji, można zaliczyć wg [9]:

1<sup>o</sup> wpływ sił osiowych na sztywność giętą elementów,



- 2° efekt poziomych przemieszczeń węzłów / tzw. "efekt  $\Delta-P$ " /,
- 3° zmiany w długości cięciwy elementu wynikające ze ściskania i zginania,
- 4° imperfekcje geometryczne,
- 5° różnice między wymiarami przekrojów poprzecznych przyjmowanych z katalogów i wykorzystywanych w obliczeniach a wymiarami rzeczywistymi,
- 6° różnice w wymiarach wynikające z tolerancji montażowych,
- 7° deformacje poprzeczne elementów,
- 8° wyboczenie lokalne elementów,
- 9° wyboczenie ramy z płaszczyzny.

Sposoby uwzględniania wymienionych efektów w analizie statycznej ram, polegające na modyfikacjach elementów macierzy sztywności pręta  $[k_m]$  lub konstrukcji  $[K]$ , przedstawiono w ślad za opracowaniem Birnstiela i. [9].

Uwzględnienie wpływu sił osiowych sprowadza się do zamiany współczynników w macierzy  $[k_m]$  odnoszących się do sztywności giętej oraz skrętnej odpowiednimi wartościami funkcji stateczności / S i C / w przypadku pierwszym oraz funkcji stateczności skrętnej / T / w przypadku drugim..

Efekt poziomych przemieszczeń węzłów uwzględnia się poprzez zapisywanie równań równowagi ramy dla jej przemieszczonej postaci. Rozwiązanie takie wymaga prowadzenia iteracji, w której na każdym kroku postać macierzy transformacji jest zależna od współrzędnych węzłów otrzymanych w poprzednim kroku obliczeń.

Podobnie, jak wyżej wymieniony efekt, uwzględnia się również wpływ zmian długości cięciwy pręta.

Kolejny efekt, związany z imperfekcjami geometrycznymi może być uwzględniony przez założenie węzłów na odbiegającej od teoretycznej osi pręta i wprowadzenie modyfikacji do globalnej macierzy sztywności w postaci dodatkowych macierzy  $[k_m]$ , albo, bez zwiększania rozmiarów globalnej macierzy sztywności  $[K]$ , przez

budowanie  $[k_m]$  dla rzeczywistego pręta.

Podobnie można uwzględnić wpływ czynników związanych z tolerancjami montażowymi i przemieszczeniem konstrukcji ramy z jej płaszczyzny. Natomiast wpływ różnic pomiędzy rzeczywistymi wymiarami przekroju poprzecznego pręta a wymiarami katalogowymi przez przyjmowanie minimalnych wartości podawanych w katalogach.

Aby dodatkowo uwzględnić wpływ deformacji poprzecznych dokonuje się modyfikacji elementów macierzy sztywności pręta przez wprowadzenie współczynników zależnych od sztywności pręta na zginanie i sztywności przy odkształceniu postaciowym.

Najtrudniej opisać zjawiska związane z efektami takimi, jak uplastycznienie lub lokalne wyboczenie elementów pręta. Teoretycznie można je uwzględnić przez podział pręta na mniejsze elementy, każdy z własną macierzą sztywności i macierzą transformacji. W praktyce, gdy można z góry przewidzieć miejsca tych zjawisk, należy rozważać pręt jako niepryzmatyczny i wykorzystać metody związane z analizą prętów niesprężystych.

Oprócz ścisłych metod rozwiązywania zagadnienia nieliniowej analizy konstrukcji opartych na macierzy sztywności, zawierającej oprócz macierzy sztywności sprężystej  $[K^{(s)}]$ , macierz sztywności geometrycznej  $[K^{(g)}]$  zależną od aktualnego II tensora naprężeń Pioli-Kirchoffa oraz macierz dużych przemieszczeń  $[K^{(r)}]$  zależną od uogólnionych współrzędnych przemieszczeń [39], istnieją metody uproszczone, które tworzone są specjalnie w celu zastosowania ich w praktyce projektowej. Należą do nich metody obliczeń analitycznych, jak również przeznaczone do obliczeń z wykorzystaniem mikro- i minikomputerów. Przykłady takich metod, opartych bezpośrednio na równaniach różniczkowych odkształconej osi pręta i stosowanych do obliczania skupów konstrukcji hal przemysłowych, podano w pracach [7, 51]. Praktyczną metodę analityczną podał również LeMessurier w pracach [48, 49].

Szeroki opis różnych uproszczonych metod uwzględniających wpływ niektórych efektów geometrycznej nieliniowości, zawarto w

pracach Lai [45, 46] , a Rutenberg w [70, 71, 72] oraz Wood w [82, 83] , podali założenie i techniki analizy uwzględniającej wpływ "efektu  $\Delta -P$ ".

"Efekt  $\Delta -P$ " i wpływ sił osiowych na sztywność prętów są efektami geometrycznej nieliniowości, którymi zajęto się w niniejszej pracy.

Zdaniem autora pracy uwzględnienie w analizie statycznej konstrukcji ramowych (wpływu wymienionych efektów), pozwoli na otrzymanie rozkładu sił wewnętrznych w elementach ram bardziej zbliżonego do rzeczywistej odpowiedzi konstrukcji : na działanie obciążenia niż w przypadku stosowania analizy wg teorii I rzędu.

W tworzeniu modelu optymalizacji brano pod uwagę konieczność dostosowania wyników projektowania optymalnych konstrukcji zarówno do możliwości projektowych, jak i istniejącego asortymentu produkowanych elementów. Dlatego przyjęto model oparty na dyskretnych wartościach zmiennych decyzyjnych, czyli w tym przypadku wymiarach poprzecznego przekroju prętów. Jako ograniczenia, czyli zależności określające dopuszczalne wartości zmiennych decyzyjnych, wynikające z wymagań konstrukcyjnych, wytrzymałościowych i statecznościowych, przyjęto wzory obowiązujące według aktualnych norm i zaleceń [31, 52, 67] . W procesie dyskretnej syntezy konstrukcji ram wykorzystano zmodyfikowaną metodę systematycznego przeszukiwania możliwą do zastosowania w przypadku nieliniowej funkcji celu o nieliniowych ograniczeniach, a opartą na tak zwanej technice "backtrack".

## 2.2. Cel i tezy pracy

Głównym celem niniejszej pracy jest opracowanie algorytmu projektowania optymalnych konstrukcji ramowych z wprowadzeniem do analizy statycznej efektów geometrycznej nieliniowości. Cel ten można rozbić na następujące zadania, których rozwiązanie przedstawiono w pracy. Należą do nich:

- 1<sup>o</sup> wprowadzenie do procesu analizy statycznej konstrukcji ramowych wpływów nieliniowości geometrycznych oraz opracowanie odpowiednich programów na EBC,
- 2<sup>o</sup> zbudowanie matematycznego modelu dyskretnej optymalizacji wybranego typu ram poddanych działaniu jednego układu obciążeń z uwzględnieniem zastosowania tego modelu do celów praktycznych.

W podsumowaniu rozwiązywanych zadań, opierając się na własnym programie optymalizacji, dokona się analizy porównawczej wyników optymalizacji pomijającej w analizie statycznej efekty geometrycznej nieliniowości oraz uwzględniającej je.

Komentując cel pracy należy stwierdzić, że autorowi chodzi o podanie takiego algorytmu, który miałby zastosowanie w praktyce projektowej i mógłby być wykorzystany do optymalnego kształtowania rzeczywistych konstrukcji budowlanych oraz mógłby podlegać dowolnym modyfikacjom związanym z dobozem ograniczeń, w zależności od zadań projektanta i wymagań przepisów i norm.

Rozwiązując sformułowane w celu pracy zagadnienia dążyć będzie się do weryfikacji następującej tezy:

Uwzględnienie efektów geometrycznej nieliniowości w procesie analizy statycznej w znaczący sposób wpływa na przebieg i wynik optymalizacji ram stalowych.

Tradycyjne projektowanie konstrukcji, oparte na ich analizie, jest ciągle podstawą, na której opiera się praca inżyniera - projektanta. Należy jednak stwierdzić, że dopiero wprowadzanie do projektowania metod optymalizacji, pozwala na otrzymanie rozwiązań obiektywnych, nie zależących wyłącznie od intuicji i doświadczenia projektanta. Optymalizacja zastępuje tę część projektowania konstrukcji, która polega na dobieraniu kształtów i wymiarów, a następnie na sprawdzaniu warunków wytrzymałościowych i innych. Zagadnienia optymalizacji wprowadzają do zadań projektowych nadrzędny element, którym jest funkcja celu. W efekcie końcowym zagadnienia optymalizacji oparte są w znacznym stopniu na oszczędności mate -

riałów, przy czym oszczędność ta wynika nie tylko bezpośrednio z warunku minimum tworzywa, ale także z uporządkowania układów sił wewnętrznych i odkształceń, występujących w ustrojach optymalnych. Nie można bowiem twierdzić, że jedynym i podstawowym celem optymalizacji konstrukcji jest osiągnięcie oszczędności materiałowych i innych korzyści gospodarczych. Optymalizacja konstrukcji prowadzi bowiem do uniknięcia dowolności w obieraniu kształtów konstrukcji przez określenie zależności między parametrami kształtu, siłami wewnętrznymi i rozmieszczeniem materiału. W wyniku jest to jednak związane z niewątpliwymi i wielostronnymi korzyściami." / cytowane za A.M.Brandtem [12] /.

Należy też zwrócić uwagę na to, że w zasadzie w niedokładny sposób projektuje się rami statycznie niewyznaczalne. Wynika to z tego, że siły wewnętrzne oblicza się dla konstrukcji pracujących w zakresie sprężystym i o geometrycznej liniowości, a następnie sprawdza się wytrzymałość i stateczność każdego pręta z ewentualnym uwzględnieniem przegubów plastycznych. Istnieją jednak rami, w których występują duże siły osiowe, powodujące powstanie w nich efektów geometrycznie nieliniowych, w sposób istotny wpływających na sztywność i nośność niektórych prętów. Należą do nich m.in. słupy dolnych kondygnacji szkieletowych budynków wysokich. Stosowanie do ich obliczania założeń teorii I rzędu może prowadzić do istotnych błędów, tym niebezpieczniejszych, że z reguły zaniżających rzeczywiste wartości sił przekrojowych.

Tak więc włączenie do projektowania zarówno metod optymalizacji, jak i analizy statycznej opartej na teorii II rzędu, pozwoli na zwiększenie dokładności i efektywności projektowania konstrukcji prętowych.

## 2.3. Spis oznaczeń stosowanych w pracy

### 2.3.1. Oznaczenia występujące w części teoretycznej

AL - analiza liniowa,

- ADP, ZADP - analiza metodą  $\Delta - P$ ,
- ANMS - analiza uwzględniająca wpływ sił osiowych na sztywność giętną prętów,
- $\{\bar{F}^L\}$  - wektor sił wewnętrznych na końcach pręta w lokalnym układzie współrzędnych,
- $\{\bar{U}\}$  - wektor przemieszczeń końców pręta w lokalnym układzie współrzędnych,
- $\{\bar{V}\}$  - wektor przemieszczeń węzłów w globalnym układzie współrzędnych,
- $\{\bar{F}^W\}$  - wektor obciążeń zewnętrznych działających na węzły konstrukcji,
- $\{\bar{F}^{LP}\}$  - wektor sił węzłowych od obciążenia równomiernie rozłożonego,
- $[R_i]$  - macierz transformacji,
- $[H]$  - globalna macierz incydencji,
- $[B]$  - macierz permutacji,
- $[I]$  - wektor indeksów,
- $[K^L]$  - macierz sztywności w lokalnym układzie współrzędnych,
- $[K]$  ,  $[K_0]$  - globalna macierz sił sztywności sprężystej,
- $[K_G^0]$  - macierz sztywności geometrycznej,
- $[K_1]$  ,  $[K_2]$  , ... - globalne nieliniowe macierze sztywności sprężystej
- N, P - siła osiowa,
- T, Q - siła poprzeczna,
- M - moment zginający,
- E - moduł sprężystości podłużnej,
- A - pole przekroju poprzecznego pręta,
- S - moment statyczny odciętej części przekroju,
- $I_z, I_y$  - moment bezwładności przekroju względem osi z-z i y-y,
- R,  $R_t$  - wytrzymałości obliczeniowe stali na rozciąganie /ściskanie/i ścinanie ,

- $L_{wy}, L_{wz}$  - długości wyboczeniowe pręta,  
 $C, S$  - funkcje przeniesienia i sztywności / "carry-over factors" i "stiffness coefficients"; "stability functions" /,  
 $m_{sn}, m_{st}$  - współczynniki redukcji naprężeń,  
 $\Psi$  - stosunek naprężeń krawędziowych w płytowych elementach przekroju,  
 $\nu$  - współczynnik Poissona,  
 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta_1$  - współczynniki nieliniowej macierzy sztywności,  
 $\{x\}, \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$  - wektor zmiennych decyzyjnych,  
 $\{p\}$  - wektor parametrów,  
ORD - obszar rozwiązań dopuszczalnych,  
 $Q_p, Q_t, Q_{ws}$  - zbiory ograniczeń,  
 $F(\bar{x}, \bar{p})$  - funkcja celu.

### 2.3.2. Oznaczenia występujące w części dotyczącej opisu programów komputerowych

- LP - liczba prętów ramy,  
IW - liczba węzłów ramy,  
LWW - liczba stopni swobody węzła,  
LWP - liczba węzłów podporowych,  
LWWP - liczba więzi węzłów podporowych,  
 $LSP = 2 \cdot LWW$  - liczba stopni swobody węzłów pręta,  
NN - liczba stopni swobody konstrukcji,  
NNS - liczba niewiadomych przemieszczeń węzłów,  
PD - parametr stosowania metody  $\Delta$ -P,  
DP - ilość kroków iteracji metody  $\Delta$ -P,  
ALFA - współczynnik korekcyjny w metodzie  $\Delta$ -P,  
EPS - współczynnik dokładności metody  $\Delta$ -P,  
LRS - liczba rzędów słupów,  
LPR - liczba piętrowości ramy,

- KPODP - parametr uwzględniania przesuwu podpór,
- WSP1, WSP2 - współczynniki w metodzie  $\Delta$ -P zależne od LRS,
- WSO - parametr stosowania nieliniowej macierzy sztywności / ANMS /,
- UW - ilość kroków iteracji metody ANMS,
- EPS1 - współczynnik dokładności metody ANMS,
- UWSO - parametr określający uwzględnienie wpływu sił osiowych na sztywność prętów,
- OPT - parametr sterowania procesu optymalizacji,
- DKS - parametr doboru sił wewnętrznych w procesie optymalizacji,
- PUWSO - parametr sterowania wprowadzania warunku  $(Nl^2 / EJ)^{1/2} \leq 1$ ,
- OBCR - parametr określający uwzględnianie obciążenia równomiernie rozłożonego,
- MDP - parametr określający stosowaną metodę  $\Delta$ -P,



### 3. MODEL OPTIMALIZACJI STALOWYCH KONSTRUKCJI RAMOWYCH

#### 3.1. Założenia dotyczące rozważanych konstrukcji

W niniejszej pracy przyjęto następujące założenia dotyczące rozważanych konstrukcji a związane z przedstawianym modelem optymalizacji:

- 1<sup>o</sup> rozpatruje się konstrukcje ram płaskich zbudowane z prętów przyzmatycznych,
- 2<sup>o</sup> węzły konstrukcji znajdują się zasadniczo w punktach przecięcia osi prętów, można je również umieszczać w dowolnym punkcie na pręcie,
- 3<sup>o</sup> sztywność prętów na ich długości nie ulega zmianie, lecz istnieje możliwość wprowadzenia sztywniejszych elementów przywęzłowych przez dokonanie dodatkowego podziału pręta,
- 4<sup>o</sup> przyjęto założenie proporcjonalności zależności odkształceń od naprężeń otrzymując zadanie optymalizacji ustrojów sprężystych,
- 5<sup>o</sup> przyjęto, że rozważane obciążenia mają charakter statyczny; na konstrukcję, w danym przedziale czasu, działa jeden układ obciążeń,
- 6<sup>o</sup> w procesie analizy statycznej rozważono przypadki budowania równań równowagi dla założeń teorii I rzędu, jak i teorii II rzędu.

Zakresem rozważań objęte są stalowe ramy wielonawowe i wielopiętrowe, zbudowane z komór prostokątnych, o elementach połączonych ze sobą w węzłach w sposób sztywny. Pręty ram stanowią spawane blachownice dwuteowe o przekrojach bisymetrycznych. Pozostałe, bardziej szczegółowe założenia, zostaną podane w podrozdziałach odnoszących się do poszczególnych elementów modelu optymalizacji.

#### 3.2. Ogólne sformułowanie zadania optymalizacji ram

Optymalizacją konstrukcji budowlanych lub, używając określenia dokładniejszego, projektowaniem optymalnych konstrukcji budowlanych, nazywa się proces syntetycznego projektowania, w wyniku któ-

rego otrzymuje się konstrukcję, która nie tylko spełnia wszystkie wymagania konstrukcyjne, technologiczne i wytrzymałościowo-statecznościowe, ale również jest najlepszą z punktu widzenia przyjętego kryterium oceny jej jakości. Podstawowymi elementami zadania optymalizacji konstrukcji są zmienne decyzyjne, obszar rozwiązań dopuszczalnych, określany przez ograniczenia, oraz funkcje celu i związane z nią kryterium.

Konstrukcję można opisać jako zespół wielkości, z których niektóre mogą być w procesie optymalizacji traktowane jako zmienne.

Wielkości opisujące konstrukcję lub jej elementy, które w trakcie automatycznego projektowania są z góry ustalone i nie podlegają zmianom, noszą nazwę parametrów projektowania [37]. Natomiast te, które nie są narzucone jako stałe, noszą nazwę zmiennych projektowych lub zmiennych decyzyjnych. Parametry projektowe wraz ze zmiennymi decyzyjnymi całkowicie określają projektowaną konstrukcję. Podział wielkości opisujących konstrukcję na przedstawione wyżej grupy jest zależny od typu rozważanej konstrukcji, doświadczeń z rozwiązywania prostszych zadań optymalizacji oraz potrzeb wynikających z zadania projektowego. Bardzo często przyjęcie niektórych wielkości jako stałych, wydatnie upraszcza zadanie optymalizacji. Z fizycznego punktu widzenia określanymi jako zmienne decyzyjne mogą być:

- 1<sup>o</sup> mechaniczne lub fizyczne własności materiału konstrukcji,
- 2<sup>o</sup> topologia konstrukcji [55],
- 3<sup>o</sup> geometryczny układ konstrukcji [74],
- 4<sup>o</sup> wymiary przekroju poprzecznego elementów konstrukcji [5, 73].

Z matematycznego punktu widzenia istotnym jest rozgraniczenie zmiennych decyzyjnych na ciągłe i dyskretne. W przypadku zmiennych dyskretnych, o dużej liczbie wartości równomiernie rozłożonych w określonym odstępie, bardzo często przydatna jest ich reprezentacja jako zmiennych ciągłych. Wówczas jako zmienne przyjmuje się wartości dyskretne najbliższe wartościom z rozkładu

ciągłego. Ze względu na to, że w tworzeniu rzeczywistych konstrukcji budowlanych najczęściej mamy do czynienia z elementami o skończonych wymiarach / wynika to z warunków produkcji /, stosowanie zmiennych decyzyjnych o wartościach dyskretnych umożliwia projektowanie konstrukcji zgodnie z istniejącym asortymentem przekrojów. Każdy zbiór zmiennych projektowych opisuje konstrukcję. Jednakże jedynie niektóre zbiory tych wielkości są przydatne ze względu na zadanie optymalizacji, inne mogą być nieprzydatne z powodu niespełnienia warunków konstrukcyjnych, funkcjonalnych lub estetycznych. Jeśli zmienne decyzyjne spełniają nałożone na nie więzy / ograniczenia / oznacza to, że należą one do obszaru dopuszczalnego. Wielkości, które muszą być spełnione noszą właśnie nazwę więzów lub ograniczeń. Z fizycznego punktu widzenia można określić dwa rodzaje więzów:

- 1<sup>o</sup> ograniczenia nałożone na zmienne decyzyjne, które określają ich wartości z powodów innych, niż wynikających z zachowania się konstrukcji lub jej elementów. Noszą one nazwę ograniczeń projektowych, a podane są w formie jawnej i wynikają z warunków funkcjonalności, wykonawstwa lub estetyki konstrukcji. Z tego powodu ograniczenia te sprowadzają się do nałożenia określonych nieprzekraczalnych wartości / dolnych, górnych lub ich kombinacji / na wartości zmiennych decyzyjnych,
- 2<sup>o</sup> ograniczenia wynikające z wymagań dotyczących zachowania się konstrukcji, a dotyczące więzów nałożonych na przykład na naprężenia, przemieszczenia lub wytrzymałość wyboczeniową konstrukcji. W praktyce projektowej ograniczenia te mogą być wprowadzane zarówno w sposób jawny, jak i ukryty. W jawnej postaci ograniczenia te występują najczęściej jako wzory podawane w normach. Częściej jednak pojawiają się one w postaci ukrytej, w każdym jednak razie muszą one być zapisane w postaci funkcji możliwych do matematycznego lub wspomaganego komputerem obliczenia.

Z matematycznego punktu widzenia zarówno zmienne projektowe, jak i dotyczące zachowania się konstrukcji, można zapisać w postaci układu nierówności:

$$g_i ( \{x\} ) \leq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.1)$$

gdzie  $m$  określa liczbę ograniczeń nierównościowych, a  $\{x\}$  jest wektorem zmiennych decyzyjnych, lub w postaci uogólnionej:

$$g_i ( \{x\} , \{p\} ) \leq 0 \quad , \quad i=1, \dots, m, \quad (3.2)$$

gdzie  $\{p\}$  jest wektorem parametrów.

Często też w problemach projektowania mamy do czynienia z ograniczeniami równościowymi postaci:

$$h_j ( \{x\} , \{p\} ) = 0, \quad j=1, \dots, k, \quad (3.3)$$

gdzie  $k$  określa liczbę ograniczeń równościowych.

W wielu przypadkach można wykorzystać ograniczenia równościowe w celu eliminowania niektórych zmiennych decyzyjnych, co może istotnie uprościć procesy obliczeniowe. Ogólnie mówiąc, ograniczenia bywają głównie nieliniowymi funkcjami zmiennych decyzyjnych i parametrów. Ma to miejsce nawet w przypadku konstrukcji sprężystych, rozwiązywanych metodami analizy liniowej.

Każdą ze zmiennych decyzyjnych / projektowych / można określić jako jeden wymiar przestrzeni projektowej, a zespół zmiennych decyzyjnych jako punkt tej przestrzeni. W przypadku dwu zmiennych obszar projektowy redukuje się do płaszczyzny. W ogólnym przypadku mamy do czynienia z  $n$  zmiennymi, które określają  $n$ -wymiarową hiperprzestrzeń. Projekt, który spełnia wszystkie ograniczenia  $g_i ( \{x\} , \{p\} ) \leq 0$  nałożone na zmienne jest rozwiązaniem dopuszczalnym. Natomiast warunek  $h_j ( \{x\} , \{p\} ) = 0$ , określa pewną powierzchnię w obszarze rozwiązań. Zespół wszystkich możliwych rozwiązań wyznacza w obszarze rozwiązań obszar rozwiązań dopuszczalnych, w którym poszukujemy, przy pomocy funkcji celu,

rozwiązania, czyli zespołu zmiennych decyzyjnych, który z punktu widzenia przyjętego kryterium jest najlepszy.

Najczęściej mamy do czynienia ze skończoną liczbą rozwiązań zawartych w obszarze rozwiązań dopuszczalnych. W celu określenia rozwiązania najlepszego należy zbudować funkcję celu, aby móc porównać na jej podstawie otrzymane rozwiązania dopuszczalne. Funkcja celu jest funkcją, której ekstremalna / minimalna lub maksymalna / wartość jest poszukiwana w procesie optymalizacji. Jednym z przypadków w projektowaniu optymalnych konstrukcji budowlanych jest poszukiwanie minimum funkcji celu, czyli wprowadzenie kryterium optymalizacji, które określa cel obliczeń jako poszukiwanie zespołu zmiennych decyzyjnych, dającego najmniejszą wartość funkcji celu. Takie ustawienie zadania nie traci ogólności, gdyż wobec

$$\max \left( F \left( \{x\}, \{p\} \right) \right) = - \min \left( - F \left( \{x\}, \{p\} \right) \right), \quad (3.4)$$

można zadanie rozpatrywać jako maksymalizację wartości funkcji celu. Dobór funkcji celu i kryterium optymalizacji jest jednym z najważniejszych zadań w budowaniu modelu optymalizacji.

Odpowiednie matematyczne sformułowanie jej postaci pozwala na uwzględnienie wielu czynników wpływających na końcowy efekt procesu projektowania. Najpowszechniej wprowadzanimi do procesu projektowania są takie kryteria, jak:

- 1<sup>o</sup> minimum kosztu konstrukcji [3, 57, 69],
- 2<sup>o</sup> minimum objętości materiału [35, 56],
- 3<sup>o</sup> minimum ciężaru konstrukcji [25, 30, 36].

Wymienione wyżej kryteria mają największe zastosowanie w zagadnieniach praktycznego projektowania optymalnych konstrukcji prętych. Inne sposoby określania kryterium optymalizacji są szeroko analizowane między innymi w pracach pod redakcją A.M.Brandta [11, 12].

Optymalizacja konstrukcji jest ściśle związana z mechaniką budowli oraz matematycznymi teoriami optymalizacji, a ostatnio rów-

niez z wykorzystaniem techniki komputerowej. Opis proponowanych przez autora niniejszej pracy metod analizy statycznej konstrukcji oraz metod programowania matematycznego podano w dalszej części pracy.

Opierając się na wprowadzonych pojęciach i określeniach, ogólne sformułowanie zadania optymalizacji konstrukcji ramowych można przedstawić w postaci:

poszukiwany jest wektor zmiennych decyzyjnych  $\{x\}$  taki, że:

$$F(\{x\}, \{p\}) = \min_{\{x\} \in \text{ORD}} F(\{x\}, \{p\}), \quad (3.5)$$

przy spełnieniu przez  $\{x\}$  ograniczeń

$$g_i(\{x\}, \{p\}) \leq 0$$

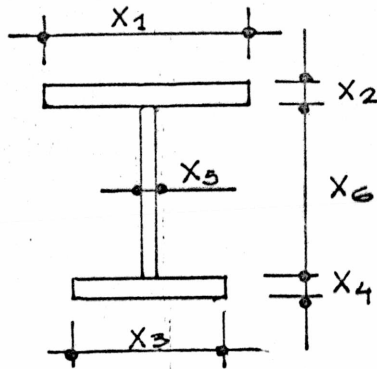
### 3.3. Model matematyczny optymalizacji

#### 3.3.1. Określenia zbioru zmiennych decyzyjnych i parametrów

W rozważanym zadaniu optymalizacji ram stalowych zbudowanych ze spawanych prętów blachownicowych, jako zmienne decyzyjne przyjęto wielkości opisujące wymiary poprzecznych przekrojów prętów.

W optymalizacji konstrukcji prętowych jako zmienne decyzyjne można również przyjmować na przykład topologię i geometrię konstrukcji lub sztywności prętów. Jednak wobec tego, że w pracy zajęto się projektowaniem ram o stałej geometrii i wręcz standardowym kształcie, narzucanych przez warunki technologiczno-konstrukcyjne, a w procesie wymiarowania, zwłaszcza w przypadku prętów blachownicowych, decydujące znaczenie mają wymiary przekroju poprzecznego, to przyjęcie ich jako zmiennych projektowych jest najbardziej naturalne i odpowiadające metodom projektowania.

W ogólnym przypadku dla pręta symetrycznego, dwuteowego otrzymano sześć zmiennych decyzyjnych przedstawionych na rysunku 3.1.



Rys. 3.1. Zmienne decyzyjne dla przekroju dwuteowego.

Dla przekroju bisymetrycznego zachodzi związek:

$$X_3 = X_1, \quad X_4 = X_2 \quad (3.6)$$

i wówczas mamy do czynienia z czterema zmiennymi decyzyjnymi: szerokością i grubością pólek oraz wysokością i grubością środka. Wektor zmiennych decyzyjnych przyjmuje postać:

$$\{ \mathbf{x} \} = \{ X_1, X_2, X_5, X_6 \}^T \quad (3.7)$$

W proponowanym przez autora pracy modelu optymalizacji przyjęto, że zmienne decyzyjne zmieniają się skokowo, przyjmując wartości dyskretne. Przedział zmian oraz wielkość przyrostów określono opierając się na produkowanych aktualnie grubościach blach stalowych.

Wartości zmiennych decyzyjnych podlegają uaktualnieniu według wzoru:

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i, \quad (3.8.)$$

gdzie  $\Delta X_i$  określa przyrost wartości zmiennej.

W szeregu opracowań przyjmowano skokową zmianę wartości zmiennych decyzyjnych. Levey i Fu Kuan-Chen w [50] podają metodę optymalizacji ram przyjmując jako zmienne dyskretne wymiary przekrojów prę-

tów, Annamali w [3] oraz Parkas i Sabo w [18] przedstawiają przykłady projektowania optymalnych blachownic z dyskretną zmianą wartości wymiarów opisujących przekroje poprzeczne. Podejście dyskretne umożliwia znaczne zbliżenie projektowanych konstrukcji do konstrukcji możliwych do wykonania.

W obliczeniach optymalizacji wykorzystano metodę programowania / rozdział 5 / zwaną pod nazwą "backtrack" i opisywaną w szeregu prac, np. [3, 18, 24]. Opierając się na metodzie proponowanej w [18] na wartości zmiennych decyzyjnych nałożono dodatkowe ograniczenie w postaci:

$$X_{imax} - X_{imin} = \Delta X_i \cdot 2^q, \quad (3.9)$$

gdzie  $q$  należy do zbioru liczb całkowitych.

Jako parametry przyjęto w modelu matematycznym następujące wielkości:

- 1<sup>o</sup> stałe materiałowe / moduł sprężystości podłużnej, współczynnik Poissona, wytrzymałość materiału /. Z tym, że dany przykład konstrukcji można optymalizować dla różnych gatunków stali,
- 2<sup>o</sup> długości prętów, współrzędne węzłów i ich rozmieszczenie,
- 3<sup>o</sup> wymiary przekroju poprzecznego, o ile wprowadza się inną niż cztery / sześć / liczbę zmiennych decyzyjnych.

Pole przekroju pręta w funkcji zmiennych decyzyjnych przedstawia się według wzoru:

$$A(\{x\}) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_2 + X_5 \cdot X_6 \quad (3.10)$$

i jest nieliniową funkcją tych zmiennych.

### 3.3.2. Określenie obciążeń konstrukcji }

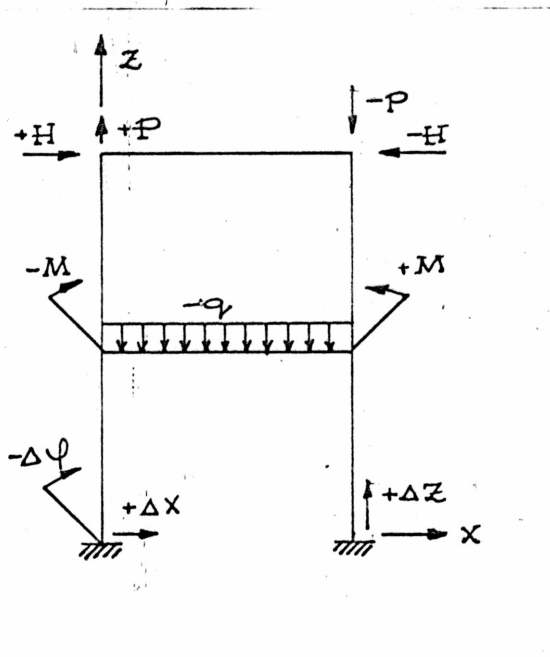
W modelu matematycznym przyjęto działanie na konstrukcję obciążeń statycznych, o charakterze deterministycznym, to znaczy



opartych na wartościach podawanych przez odpowiednie normy obciążeń. Rozważa się następujące rodzaje obciążeń:

- 1<sup>o</sup> momenty i siły skupione działające w węzłach konstrukcji oraz na pręcie,
- 2<sup>o</sup> obciążenie równomiernie rozłożone na pręcie,
- 3<sup>o</sup> obciążenia wynikające z wymuszenia przemieszczeń węzłów podporowych.

Założono również, że obciążenia zewnętrzne działają w płaszczyźnie symetrii pręta i w płaszczyźnie ramy. Znaki obciążeń zewnętrznych w globalnym układzie współrzędnych przedstawiono na rysunku 3.2.



Rys. 3.2. Znaki obciążeń zewnętrznych w globalnym układzie współrzędnych

### 3.3.3. Określenie ograniczeń - obszar rozwiązań dopuszczalnych

Obszar rozwiązań dopuszczalnych określają ogólne warunki opisane wzorami (3.2.) i (3.3.). Więzy projektowe, nałożone bezpośrednio na zmienne decyzyjne, reprezentowane przez górne i dolne ograniczenia ich wartości oraz wartość zmiany ich przyrostu,

mają postać:

$$X_{imin} \leq X_i \leq X_{imax} \quad \text{dla } \Delta X_i, \quad (3.11)$$

$$X_{imax} - X_{imin} = \Delta X_i \cdot 2^q$$

Drugim rodzajem więzów są ograniczenia dotyczące zachowania się konstrukcji i podane są one w postaci zależności funkcyjnych. Należą do nich ograniczenia nałożone na przemieszczenia, na stateczność globalną konstrukcji, ograniczenia wytrzymałościowe oraz odnoszące się do stateczności lokalnej.

Wśród ograniczeń przemieszczeniowych można wyróżnić więzy określające maksymalne wartości poziomych przemieszczeń węzłów swobodnych postaci:

$$V_{Xi}^* \leq V_{xdop}^*, \quad i = 1, \dots, LW - LWP, \quad (3.12)$$

Drugie ograniczenia dotyczą pionowych ugięć prętów, co można zapisać w postaci:

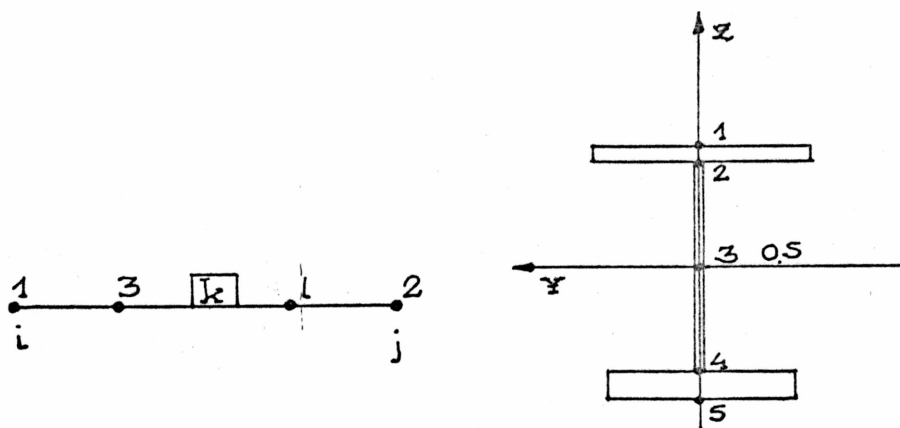
$$V_{zi}^* \leq V_{zdopi}^*, \quad i = 1, \dots, LP, \quad (3.13)$$

gdzie  $V_{zi}^*$  oznacza ugięcie  $i$ -tego pręta, a  $V_{dopi}^*$  - maksymalną wartość ugięcia obliczaną według [67].

W procesie analizy statycznej wprowadzono metodę obliczeniową, dzięki której można określić, czy rozwiązywana konstrukcja / dla danego wektora zmiennych decyzyjnych / zachowuje stateczność globalną. Szczegółowo ideę tej metody przedstawiono w rozdziale 4.2.3.

Najważniejsze wśród ograniczeń są ograniczenia dotyczące wytrzymałości i stateczności lokalnej elementów konstrukcji. Wszystkie obliczane naprężenia i inne elementy tych ograniczeń określa się według normy [67] oraz prac [31, 52], a także rozważań wytrzymałościowych i odnoszących się do stateczności lokalnej elementów blachownic.

Naprężenia wyznaczane są w różnych punktach przekroju poprzecznego pręta oraz w węzłach konstrukcji. Dla pręta rami płaskiej punkty obliczania naprężeń na długości pręta oraz w jego przekroju przedstawia rysunek 3.3.



Rys. 3.3. Punkty obliczania naprężeń

Liczba punktów obliczania naprężeń na długości pręta zależy od podziału konstrukcji na węzły. Przyjmując, dla konstrukcji płaskiej, węzły w punktach połączenia prętów, otrzymano dla każdego pręta dwa punkty obliczeniowe, z tym, że naprężenia są wyznaczane dla maksymalnych wartości sił wewnętrznych. W przekroju pręta wyróżniono 5 punktów obliczania naprężeń. W punktach 2 i 4 / zmiana przekroju pręta / obliczane są naprężenia normalne, naprężenia styczne oraz zredukowane. W punktach 1 i 5 obliczane są naprężenia normalne oraz naprężenia z uwzględnieniem wybożenia. W punkcie 3 / dla przekrojów dwuteowych, bisymetrycznych, środek ciężkości pokrywa się ze środkiem ścinania / - maksymalne naprężenia styczne.

Przechodząc do szczegółowych postaci wzorów na ograniczenie przyjęto we wzorze (3.12) wartość maksymalną poziomych przemieszczeń węzłów jako  $V_{dop} = h/500$ , gdzie "h" oznacza wysokość konstrukcji od stopy dolnego skupa do poziomu rozpatrywanego węzła.

Natomiast dla przypadków obciążenia prętów konstrukcji siłami zewnętrznymi rozpatrzono sposoby obliczania naprężeń wraz ze sprawdzaniem innych warunków ograniczających wynikających ze stateczności lokalnej, zwiczenia, w przypadku rygli, oraz smukłości prętów.\*

W przypadku rozciągania osiowego / siła osiowa  $N_i < 0$ , momenty zginające na końcach pręta  $M_i = 0$  / naprężenia obliczane są według wzoru:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq R. \quad (3.14)$$

W przypadku rozciągania mimośrodowego:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_y} \leq R. \quad (3.15)$$

W przypadku ściskania / siła osiowa  $N_i > 0$  / w pierwszej kolejności sprawdzana jest smukłość prętów :

$$\bar{\lambda} \leq 250 \text{ / dla rygli /}, \quad (3.16)$$

$$\bar{\lambda} \leq 150 \text{ / dla szupów /},$$

gdzie  $\bar{\lambda}$  jest większą ze smukłości wyboczenia giętnego w obu kierunkach  $\lambda_z$ ,  $\lambda_y$ . Długości wyboczeniowe  $l_{wz}$ ,  $l_{wy}$  występujące we wzorach:

$$\lambda_y = \frac{l_{wy}}{i_y}, \quad \lambda_z = \frac{l_{wz}}{i_z}, \quad (3.17)$$

zadawane są przez projektanta według odpowiednich norm. Wykorzystując w obliczeniach analizy statycznej wg teorii II rzędu metodę  $\Delta$ -P można [82] przyjmować, że współczynniki długości wyboczeniowej, wykorzystywane do obliczania długości wyboczeniowych, są równe 1.

Dla ściskania osiowego naprężenia sprawdza się według wzorów:

\*-----  
Podane wzory 3.14-3.27 zawarte są w normie [67] i przedstawiono je poniżej dla porządku w celu wskazania stosowanych ograniczeń wytrzymałościowych i statecznościowych.

$$\sigma = \frac{N \cdot m_w}{A} \leq R \quad \text{dla } \bar{\lambda} > 0,2 \cdot \lambda_p, \quad (3.18)$$

gdzie  $\lambda_p = \frac{1675}{\sqrt{R}}$ ,  $m_w$  - współczynnik wyboczeniowy zależny od smukłości względnej  $\lambda_{wz} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_p}$ . Wartość  $m_w$  obliczana jest za pomocą wzorów podanych w [31, 52].

Na ściskanie ze zginaniem według wzoru:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} \leq R, \quad (3.19)$$

oraz na wyboczenie gięte ze zginaniem według wzoru:

$$\sigma = \frac{N \cdot m_w}{A} + \frac{M_y}{W_y} \leq 1,05 \cdot R \quad (3.20)$$

Według [63] dla analizy drugiego rzędu naprężenia należy sprawdzić tylko według wzorów (3.14) i (3.19).

Dla czystego zginania  $N_1 = 0$  naprężenia sprawdzane są wzorem:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} \leq R \quad (3.21)$$

W miejscu zmiany szerokości przekroju / średnik - pas / oblicza się naprężenia zredukowane według hipotezy największej energii odkształcenia postaciowego :

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq 1,1 \cdot R, \quad (3.22)$$

gdzie  $\tau$  jest naprężeniem stycznym obliczonym według wzoru:

$$\tau = \frac{Q}{I_y} \cdot \frac{S}{\xi} \leq R_t \quad (3.23)$$

Kolejnym ograniczeniem wprowadzanym do ORD jest ograniczanie umożliwiające określenie stanu utraty płaskiej postaci zginania,

czyli zwichrzenia belki. Opierając się na tablicy 11 normy [67] określono zależności wiążące zmienne decyzyjne oraz długości przęta i rozstaw stężeń tak, aby dobrane automatycznie wymiary przekrojów i rozstaw stężeń powodowały, że nie trzeba sprawdzać wartości naprężeń wynikających ze zwichrzenia. W proponowanym programie optymalizacji wprowadzono automatyczny sposób doboru rozstawu stężeń, w zależności od wymagań tablicy [67] i wartości naprężeń wynikających z warunków stateczności lokalnej. Metodę tę, wraz ze wzorami, podano w Załączniku do niniejszej pracy. W przypadku badania stateczności lokalnej środnika i półek skorzystano z warunków przedstawionych w punkcie 7.1 normy [67]. W przypadku nie spełnienia ich przez dany wektor zmiennych decyzyjnych następuje sprawdzenie naprężeń według wzorów:

- dla ścinania:

$$\tau \leq \frac{R_t}{m}, \quad (3.24)$$

- dla zginania lub ściskania:

$$\sigma_1 \leq \frac{R}{m}, \quad (3.25)$$

- dla złożonych stanów naprężeń:

$$\sigma_z = \frac{(1+\psi) \cdot (1-\nu)}{4} \cdot m_{sn} \cdot \sigma_1 + \sqrt{\left[1 - \frac{(1+\psi) \cdot (1-\nu)}{4}\right]^2 (m_{sn} \cdot \sigma_1)^2 + 3 \cdot (m_{st} \cdot \tau)^2} \leq R. \quad (3.26)$$

a dla  $\psi = -1$  lub  $\nu = 1$ :

$$\sigma_z = \sqrt{(m_{sn} \cdot \sigma_1)^2 + 3 \cdot (m_{st} \cdot \tau)^2} \leq R. \quad (3.27)$$

Ponieważ we wzorach (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) oraz według rozdziału 7.1. [67], występuje niejawnie, rozstaw zeber usztywniających przyjęto warunek na ich maksymalny i minimalny rozstaw:

$$x_6 \leq e_z \leq L/3 \quad (3.28)$$

Sprawdzając wartości wszystkich wymienionych naprężeń, postaci ograniczeń wytrzymałościowych unormowano tak, aby po prawej stronie we wzorach na naprężenia występowała wartość R.

Wszystkie ograniczenia opisane powyżej można zapisać w postaci następujących zbiorów:

- ograniczenia projektowe:

$$Q_p = \{X : X_{\min} \leq X \leq X_{\max}, \Delta x\}, \quad (3.29)$$

- ograniczenia przemieszczeniowe:

$$Q_t = \{X : V_x^* \leq V_{\text{dop}}, V_z^* \leq V_{\text{zdop}}\}, \quad (3.20)$$

- ograniczenia wytrzymałościowe i statecznościowe:

$$Q_{ws} = \{X : \sigma(x) \leq R\} \quad (3.31)$$

Umożliwia to przedstawienie zbioru rozwiązań dopuszczalnych w postaci:

$$\text{ORD} = Q_p \cap Q_t \cap Q_{ws} \quad (3.32)$$

### 3.3.4. Określenie funkcji celu i kryterium optymalizacji.

W niniejszej pracy jako funkcję celu przyjęto objętość materiału zużytego na wykonanie elementów konstrukcji. Funkcja ta składa się z dwóch elementów:

- 1° objętość materiału zużytego na wykonanie prętów,
- 2° objętość materiału zużytego na żeberka usztywniające,

W formie matematycznej funkcję celu można zapisać w postaci:

$$F(\{x\}, \{p\}) = \sum_i A_i(\{x\}, \{p\}) \cdot L_i + \sum_i \left( \sum_j V_z(\{x\}, \{p\}) \right), \quad (3.33)$$

gdzie:

- $A_i$  - pole przekroju poprzecznego pręta,
- $L_i$  - długość pręta,
- $V_z$  - objętość materiału zużytego na żeberka,
- $j$  - liczba żeberek w i-tym pręcie.

Dla przekroju bisymetrycznego, dwuteowego otrzymano następujące wzory dla pojedynczego pręta:

- objętość, zużytego materiału:

$$L \cdot (X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_2 + X_5 \cdot X_6) \cdot [m^3],$$

- objętość materiału zużytego na żeberka:

$$2 \cdot (X_1 - X_5) \cdot X_6 \cdot X_5 + (N - 2) \cdot (X_1 - X_5) \cdot X_6 \cdot X_5 \cdot 0,8 [m^3] \quad (3.35)$$

gdzie:

grubość żeberka podporowego  $g_{ipod} = X_5$ ,

grubość żeberka pośredniego  $g_{ipos} = 0,8 \cdot X_5$  wg [18],

N - ilość żeberek określana z warunków wytrzymałościowych i statecznościowych.

Postać globalnej funkcji celu dla ramy o LP prętach przedstawia wzór:

$$GFC(\{x\}, \{p\}) = \sum_{i=1}^{LP} \left\{ L_i \left[ 2 \cdot X_{1i} \cdot X_{2i} + X_{5i} \cdot X_{6i} \right] + \left[ (N - 2) \cdot 0,8 + 2 \right] \cdot (X_{1i} - X_{5i}) \cdot X_{5i} \cdot X_{6i} \right\} \quad (3.36)$$

Ze względu na otwarty charakter proponowanego modelu można rozszerzyć przedstawioną funkcję celu i sprowadzić ją do postaci określającej koszt konstrukcji, na który składają się:

- 1° koszt materiału / sprowadzony do iloczynu objętości zużytego materiału przez koszt jednostkowy /,
- 2° koszt spawania / sprowadzony do iloczynu długości wykonanych spoin przez koszt wykonania jednostki ich długości /,
- 3° koszt zabezpieczeń antykorozyjnych - malowania itp. / sprowadzony do iloczynu powierzchni malowania przez koszt jednostkowy /.

$$F(\{x\}, \{p\}) = \sum_i S_i \cdot A_i(\{x\}, \{p\}) \cdot L_i \cdot c_m + \sum_i L_{si}(\{x\}, \{p\}) \cdot c_s + \sum_i P_i(\{x\}, \{p\}) \cdot c_a, \quad (3.37)$$



gdzie:

- $\xi_i$  - ciężar objętościowy materiału,
- $c_m$  - koszt materiału,
- $L_{si}$  - długość spoin,
- $c_s$  - koszt wykonania spoiny
- $P_i$  - pole powierzchni elementu,
- $c_a$  - koszt zabezpieczeń,
- $i$  - liczba prętów.

Uwzględniając wpływ elementów pionowego zabezpieczenia przekrojów prętów w postaci żeberek, funkcja celu ma postać rozszerzoną o zależność:

$$FZ(\{x\}, \{p\}) = \sum_i \left( \sum_j \xi_i \cdot v_{zj}(\{x\}, \{p\}) \cdot c_m + \sum_j L_{sj}(\{x\}, \{p\}) \cdot c_s + \sum_j PZ_j(\{x\}, \{p\}) \cdot c_a \right), \quad (3.38)$$

gdzie:

- $LZ$  - długość spoin łączących żeberka z elementami blachownicy,
- $PZ$  - powierzchnia żeberek.

Dla przekroju bisymetrycznego otrzymano następujące postaci wzorów tworzących wzory (3.37) i (3.38):

- powierzchnia spoin dla pręta:

$$4 \cdot L \cdot X5 \cdot 0,5 \quad [m^2], \quad (3.39)$$

- powierzchnia spoin żeberek / pominięto zmniejszenie długości spoin o długość skosów/ :

$$2 \left[ (X1 - X5) \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot X5 + 4 \cdot X6 \cdot 0,5 \cdot X5 \right] + \left[ (X1 - X5) \cdot 4 \cdot 0,4 \cdot X5 + 4 \cdot X6 \cdot 0,4 \cdot X5 \right] \cdot (N - 2) \quad [m^2], \quad (3.40)$$

gdzie:

grubość spoiny środek - półka  $a_{sp} = 0,5 \cdot X5$ ,

grubość spoin żebro-środek i żebro-półka:

dla żeber podporowych  $a_{zpod} = 0,5 \cdot X5$ ,

dla żeber pośrednich  $a_{zpos} = 0,5 \cdot 0,8 \cdot X5 = 0,4 \cdot X5$ ,

- powierzchnia malowania pręta:

$$2 \cdot L \cdot (2 \cdot X_2 + X_1 + X_1 - X_5) + 2 \cdot L \cdot X_6 \quad [m^2], \quad (3.41)$$

powierzchnia malowania żeberek:

$$2 \cdot [2 \cdot X_6 \cdot (X_1 - X_5) + 2 \cdot X_5 \cdot X_6] + [2 \cdot X_6 \cdot (X_1 - X_5) + X_6 \cdot 0,8] \cdot (N - 2) \quad [m^2] \quad (3.42)$$

Postać globalnej funkcji celu dla konstrukcji ramowej o LP prętach przedstawia wzór:

$$\begin{aligned} GFC(\{x\}, \{p\}) = & \sum_{i=1}^{LP} \xi_i \cdot L_i \{ (X_{1_i} \cdot X_{2_i} \cdot 2 + X_{5_i} \cdot X_{6_i}) + [(N_i - 2) \cdot 0,8 + 2] \cdot (X_{1_i} - X_{5_i}) \cdot X_{5_i} \cdot X_{6_i} \} \cdot c_m + \sum_{i=1}^{LP} \{ 2 \cdot L_i \cdot (2 \cdot X_{2_i} \cdot \\ & + X_{1_i} + X_{1_i} - X_{5_i}) + 2 \cdot L_i \cdot X_{6_i} + [4 \cdot X_{1_i} + (N_i - 2) \cdot (2 \cdot X_{1_i} \\ & - 0,4 \cdot X_{5_i})] \cdot X_{6_i} \} \cdot c_p + \sum_{i=1}^{LP} \{ 2 \cdot L_i \cdot X_{5_i} + 4 \cdot X_{5_i} \cdot (X_{1_i} - \\ & - X_{5_i}) \cdot [1 + 0,4 \cdot (N_i - 2)] + 4 \cdot X_{5_i} \cdot [1 + 0,4 \cdot (N_i - 2)] \cdot \\ & \cdot X_{6_i} \} \cdot c_s \end{aligned} \quad (3.43)$$

W proponowanym modelu optymalizacji konstrukcji ramowych autor pracy przyjął jako kryterium optymalizacji zarówno dla kosztu konstrukcji, jak i dla jej ciężaru, minimalizację ich wartości. Ze względów praktycznych i obliczeniowych w obliczeniach numerycznych jako funkcję celu przyjęto objętość zużytego materiału. Opierając się na wprowadzonych elementach optymalizacji, matematyczny model projektowania optymalnych konstrukcji ramowych można zapisać w następującej postaci:

znaleźć wektor zmiennych decyzyjnych  $\{x\}$  / pkt. 3.3.1. / w obszarze rozwiązań dopuszczalnych / pkt. 3.3.3. /, dla wektora parametrów  $\{p\}$  / pkt. 3.3.1. /, który minimalizuje wartość globalnej funkcji celu / pkt. 3.3.4. /, czyli:

$$F(\{x\}, \{p\}) = \min_{x \in \text{ORD}} F(\{x\}, \{p\}) \quad (3.44)$$

### 3.3.5. Podsumowanie i uwagi

Przedstawiony matematyczny model optymalizacji płaskich ram charakteryzuje się nałożeniem na zmienne decyzyjne wartości dyskretne, co stanowi bardzo istotną jego zaletę z punktu widzenia działalności projektowej. Umożliwienie projektantowi automatycznego doboru wymiarów elementów przekroju pręta, zgodnie z istniejącym asortymentem produkowanych blach, daje duże możliwości zarówno kształtowania konstrukcji, jak i oceny, w ramach przyjętego kryterium optymalizacji, otrzymanego rozwiązania. W procesie obliczeniowym optymalizacji poddawane są wszystkie pręty konstrukcji, jednakże budowa modelu umożliwia wprowadzenie optymalizacji grupowej, to znaczy wyboru przekrojów optymalnych dla części prętów i identyfikacji z nimi prętów nieoptymalizowanych.

Wprowadzone ograniczenia przemieszczeniowe, wytrzymałościowe i stateczności lokalnej wynikają z wymagań normowych i wobec tego zapewniona jest zgodność otrzymanego rozwiązania z warunkami stawianymi przez przepisy. Jawny, w sensie postaci funkcji, zapis bloku ograniczeń umożliwia nałożenie, o ile projektant tego zażąda, innych więzów na zmienne decyzyjne. Mogą nimi być na przykład ograniczenia wynikające z naprężeń spawalniczych, zmęczenia lub też wpływy korozji.

#### 4. ELEMENTY GEOMETRYCZNEJ NIELINIOWOŚCI W ANALIZIE STATYCZNEJ RAM PŁASKICH

##### 4.1. Elementy metody sieciowej w analizie statycznej

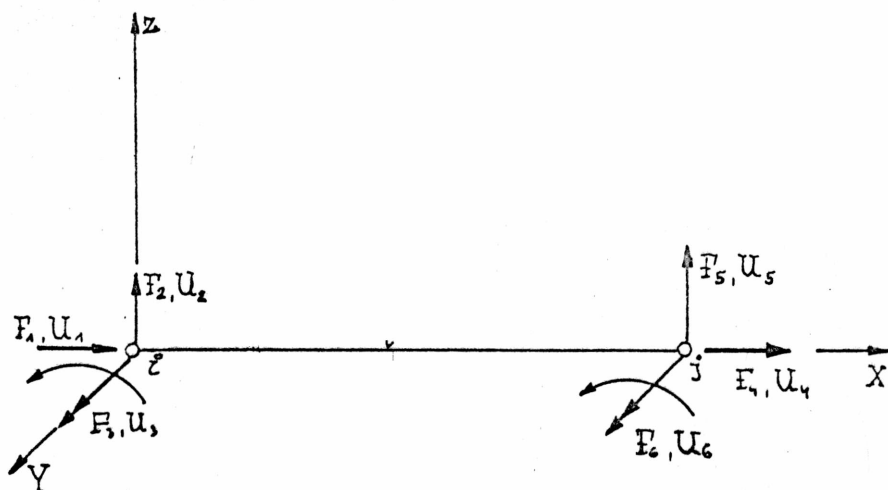
W analizie statycznej konstrukcji wykorzystano metodę przemieszczeń w ujęciu sieciowym. Szeroki opis technik sieciowych opartych na teorii grafów i odnoszących się do procedur analizy statycznej konstrukcji prętowych przedstawił Pietrzak w pracach [65,66] oraz Jackiewicz w [28]. Zastosowana w pracy metoda analizy konstrukcji ramowych oparta jest na rozwiązaniach przedstawionych przez Janczurę w pracach [29,30].

Sieciową analizę statyczną ram płaskich przeprowadza się przyjmując następujące założenia:

- 1<sup>o</sup> konstrukcja ramy składa się z prostoliniowych prętów pryzmatycznych,
- 2<sup>o</sup> rozważa się przekroje dwuteowe, symetryczne i bisymetryczne,
- 3<sup>o</sup> pręty ram połączone są w węzłach w sposób sztywny; ramy mogą być zamocowane w podporach sztywno lub przegubowo,
- 4<sup>o</sup> linie środków ciężkości przekrojów prętów połączonych w jednym węźle przecinają się w jednym punkcie,
- 5<sup>o</sup> pomija się wpływ odkształceń początkowych konstrukcji / imperfekcji /,
- 6<sup>o</sup> przyjęto pracę materiału w zakresie sprężystym,
- 7<sup>o</sup> przyjęto pracę konstrukcji w obszarze przedkrytycznym,
- 8<sup>o</sup> dla analizy liniowej stosuje się zasadę zeszywnienia, zasada ta pomijana jest w analizie II rzędu,
- 9<sup>o</sup> w analizie II rzędu przyjęto, że pręty są nieściśliwe i wobec tego pomija się wpływ ich skróceń i wydłużeń na odkształcenia układu; założono również, że odkształcenia układu - przesunięcia i obroty węzłów, są wielkościami małymi,
- 10<sup>o</sup> obciążenia zewnętrzne mają charakter statyczny i działają w płaszczyźnie konstrukcji,
- 11<sup>o</sup> konstrukcja i związane z nią elementy fizyczne opisywana jest w dwóch układach współrzędnych: w układzie globalnym określa się topologię konstrukcji, współrzędne węzłów i obciążenia; w układzie lokalnym zapisywane są transformacyjne równania metody przemieszczeń. Ze względu na możliwość rozszerze-

nia zadania na konstrukcje przestrzenne, układ i oznaczenie osi zarówno dla płaskiego, jak i przestrzennego przypadku przedstawiono na rysunku 4.1.

W przypadku ram płaskich każdy przekrój poprzeczny ma trzy stopnie swobody: dwa przemieszczenia i obrót. Dla dowolnego pręta dodatnie składowe sił wewnętrznych / węzłowych / i przemieszczeń przedstawiono na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Dodatnie składowe wektorów sił wewnętrznych i przemieszczeń dla pręta ramy.

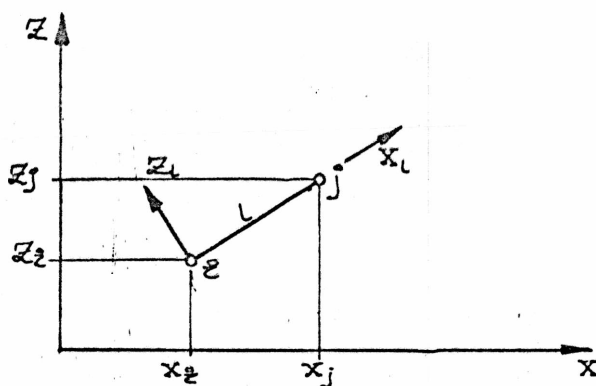
Początek lokalnego układu współrzędnych znajduje się zawsze w węźle o niższym numerze, układ osi jest prawoskrętny.

Macierz transformacji  $R_1$  l-tego pręta z lokalnego do globalnego układu współrzędnych ma postać:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

gdzie:  $\cos \alpha_i = \frac{x_j - x_i}{L_1}$ ,  $\sin \alpha_i = \frac{z_j - z_i}{L_1}$ ,  $L_1 = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$ .

Opis współrzędnych końców "i" i "j" pręta przedstawiono na rysunku 4.2.



Rys. 4.2. Lokalny układ współrzędnych 1-tego pręta.

Lokalną macierz sztywności dla sił wewnętrznych i przemieszczeń buduje się opierając się na wzorach transformacyjnych przedstawionych między innymi w [20, 22, 61].

Elementy macierzy sztywności prętów dla różnych typów przemieszczeń końców pręta sztywno zamocowanego przedstawiono graficznie na rysunku 4.3, natomiast postać macierzy sztywności wg (4.2) :

$$K_{11} = \frac{EA}{l} = -K_{14} = -K_{41} = K_{44}$$

$$K_{22} = \frac{12EI}{l^3} = -K_{25} = -K_{52} = K_{55}$$

$$K_{23} = \frac{6EI}{l^2} = K_{26} = K_{32} = -K_{35} = -K_{53} = -K_{56} = K_{62} = -K_{65} \quad (4.2.)$$

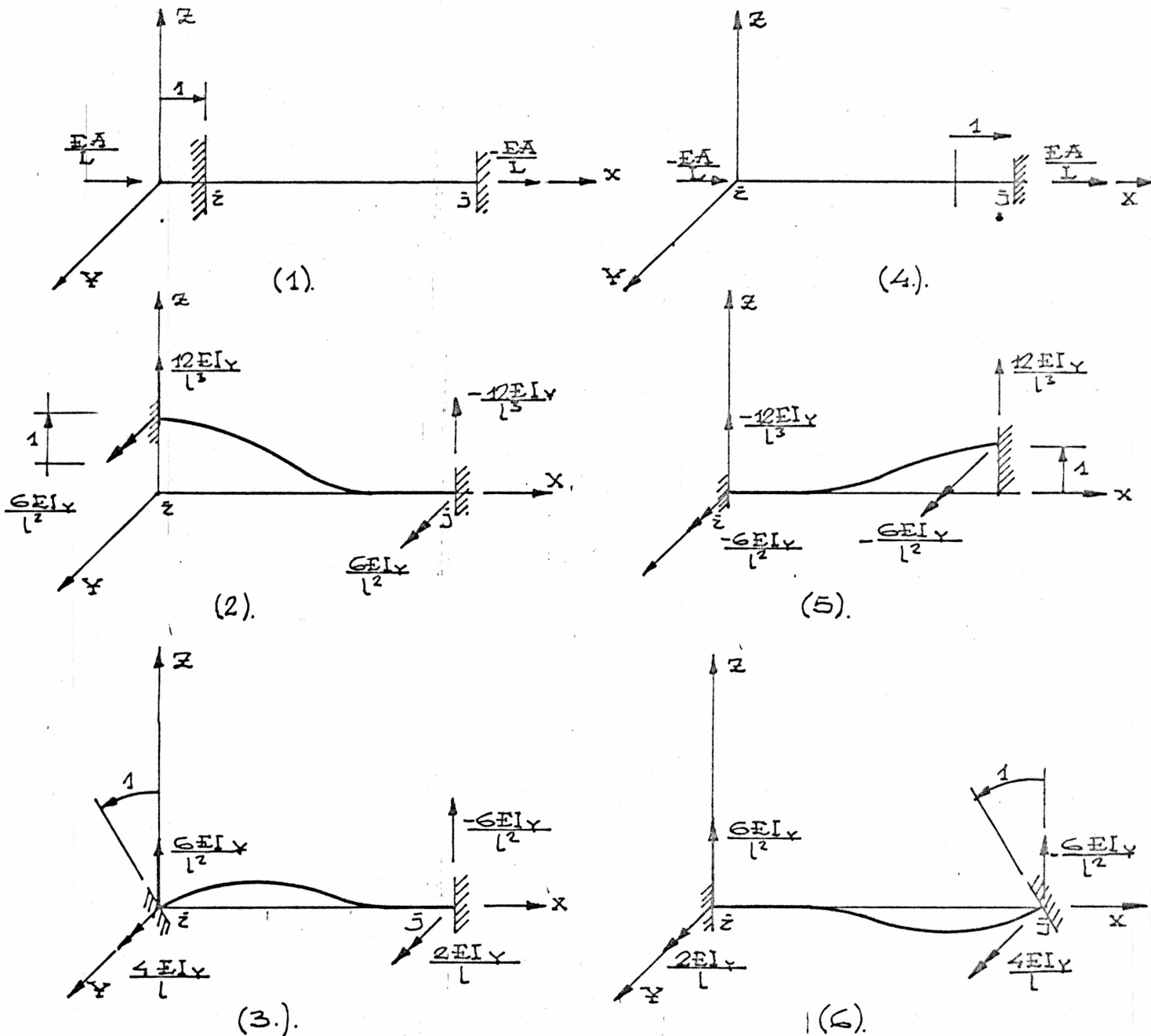
$$K_{38} = \frac{4EI}{l} = K_{66}$$

$$K_{36} = \frac{2EI}{l} = K_{63}$$

Lokalną macierz sztywności w przypadku uwzględnienia wpływu sił osiowych na odkształcenia podano w rozdziale 4.2.2.

Podstawową relację między przemieszczeniami węzłów a obciążeniami zewnętrznymi opisuje w metodzie sieciowej równanie:

$$\bar{H} \cdot R \cdot K^L \cdot R^T \cdot \bar{H}^T \cdot \bar{V} - F^W - \bar{H} \cdot R \cdot \bar{F}^{LP} = 0 \quad (4.3.)$$



Rys. 4.3. Sztywność pręta: /1/ jednostkowa translacja "x" węzła i, /2/ jednostkowa translacja "z" węzła i, /3/ jednostkowy obrót "x" węzła i, /4/ jednostkowa translacja "x" węzła j, /5/ jednostkowa translacja "z" węzła j, /6/ jednostkowy obrót "x" węzła /j/.

Globalna macierz incydencji  $[\bar{H}]$ , w podejściu prezentowanym w [65], budowana jest z zastosowaniem tzw. macierzy podstawowych przekrojów grafu, zawierającej informację o sposobie połączeń węzłów i prętów oraz zwrocie osi prętów ramy. Natomiast w [29] Janczura zaproponował, zamiast budowania pełnej macierzy  $[\bar{H}]$ , wykorzystanie wektora wskaźników, w którym pamiętane są numery elementów macierzy  $[\bar{H}]$ , w zależności od ich wartości.

Wprowadzając oznaczenie:

$$K = \bar{H} \cdot R \cdot K^L \cdot R^T \cdot \bar{H}^T, \quad (4.4)$$

otrzymuje się uproszczoną postać równania (4.3) :

$$\begin{aligned} K \cdot \bar{V} &= \bar{F}^W + \bar{H} \cdot R \cdot \bar{F}^{LP} \\ \bar{F}^W &= \bar{F}^W + \bar{H} \cdot R \cdot \bar{F}^{LP} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Rozwiązanie w postaci przemieszczeń węzłów swobodnych przedstawia wzór

$$\bar{V} = K^{-1} \cdot \bar{F}^W \quad (4.6)$$

Rozwiązanie to jest jednoznaczne w przypadku nieosobliwości macierzy sztywności  $[K]$ .

Wprowadzenie macierzy permutacji  $[B]$  lub wektora wskaźników  $[I]$ , w którym pamiętane są wiersze i kolumny odpowiadające kierunkom zamocowania węzłów podporowych, porządkuje macierze  $[K]$ ,  $[\bar{V}]$ ,  $[\bar{F}^W]$ , przesuując wiersze i kolumny odpowiadające nieznanym przemieszczeniom na początek każdej z macierzy, pozwala na otrzymanie następujących związków:

$$\bar{F}' = B \cdot \bar{F}^W = \begin{bmatrix} \bar{F}^Z \\ \bar{F}^R \end{bmatrix}, \quad \bar{V}' = B \cdot \bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{V}^Z \\ \bar{V}^R \end{bmatrix}, \quad B \cdot K \cdot B^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

gdzie:

$\{\bar{F}^Z\}$  - zadany wektor obciążeń zewnętrznych,



$\{\bar{F}^R\}$  - nieznanymy wektor reakcji,

$\{\bar{V}^Z\}$  - nieznanymy wektor przemieszczeń węzłów niepodporowych,

$\{\bar{V}^R\}$  - zadany wektor przemieszczeń podpór.

Dla konstrukcji geometrycznie niezmiennej otrzymuje się:

$$\bar{F}^Z = K_{11} \cdot \bar{V}^Z + K_{12} \cdot \bar{V}^R, \quad (4.8)$$

$$\bar{F}^R = K_{21} \cdot \bar{V}^Z + K_{22} \cdot \bar{V}^R,$$

a stąd:

$$\bar{V}^Z = K_{11}^{-1} \cdot (\bar{F}^Z - K_{12} \cdot \bar{V}^R), \quad (4.9)$$

a dla braku przemieszczeń nałożonych na podpory:

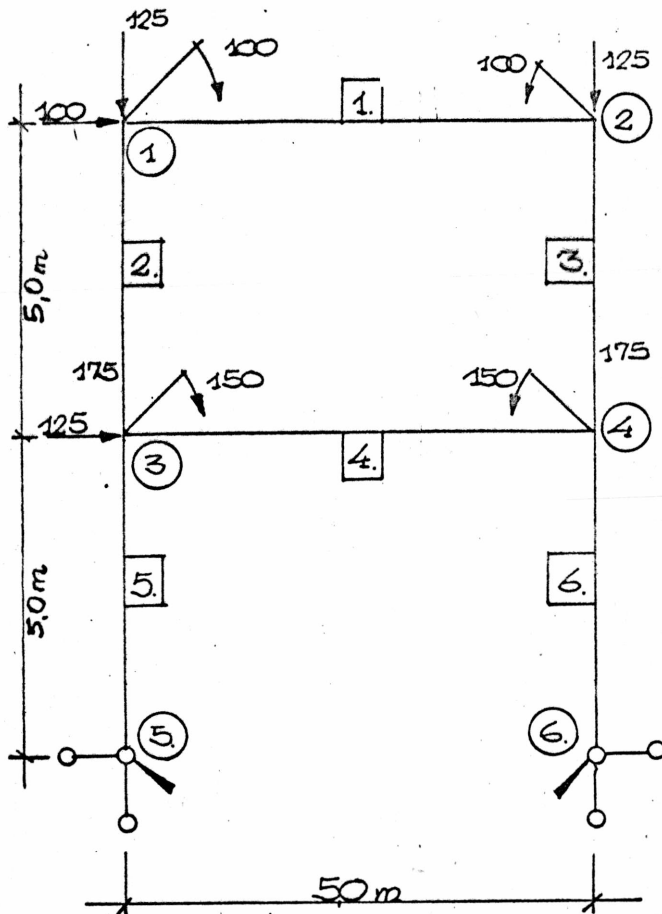
$$\bar{V}^Z = K_{11}^{-1} \cdot \bar{F}^Z \quad (4.10)$$

Rozwiązanie zadania sieciowej analizy statycznej ram opisuje wzór na obliczanie sił wewnętrznych w węzłach prętów:

$$\bar{F}^L = K^L \cdot R^T \cdot H^T \cdot B^T \cdot \bar{V} - \bar{F}^{LP} \quad (4.11)$$

Opierając się na podanych wzorach opracowano program o nazwie "AL,ADP,ANMS". Program ten umożliwia prowadzenie obliczeń dla analizy liniowej, analizy metodą  $\Delta$ -P oraz analizy wg dokładnej metody II rzędu. Program jest przystosowany zarówno do wykorzystania na mikrokomputery, jak i na duże maszyny cyfrowe. W tabelach 4.1 i 4.2 podano porównanie wyników obliczeń przykładowej rami z rysunku 4.4, obliczonej z wykorzystaniem mikrokomputera Sinclair ZX-81 i EMC Odra 1305. Celem obliczeń było sprawdzenie dokładności obliczeń wykonanych na mikrokomputerze.

Charakterystyki prętów



	PRZEK A [m <sup>2</sup> ]	IY [m <sup>4</sup> ]
1	.108E-01	.3915E-3
2	.120E-01	.5183E-3
3	.120E-01	.5183E-3
4	.144E-01	.8903E-3
5	.144E-01	.8903E-3
6	.144E-01	.8903E-3

Rys. 4.4. Rama jednokolumnowa, dwupiętrowa. Przykład do porównania wyników analizy statycznej według programu opartego na metodzie sieciowej i STRAINS 80.

UWAGA: Różnice w znakach wynikają z odmiennego przyjęcia zwrotów osi.

TABELA 4.1. Przemieszczenia węzłów

Numer węzła	Przemieszczenie	"AL,ADP,ANMS"	"STRAINS-80"
1	X [m]	.235989E-1	.2360E-1
	Y [m]	-.745727E-3	-.7500E-3
	$\phi$ [rad]	-.222384E-2	.2220E-2
2	X [m]	.234225E-1	.2342E-2
	Y [m]	-.159167E-2	-.1590E-2
	$\phi$ [rad]	-.789020E-3	.7900E-3
3	X [m]	.106753E-1	.1068E-1
	Y [m]	-.443922E-3	-.4400E-3
	$\phi$ [rad]	-.208744E-2	.2090E-2
4	X [m]	.105884E-1	.1059E-1
	Y [m]	-.108047E-2	-.1080E-2
	$\phi$ [rad]	-.128118E-2	.1280E-2
5,6	Wszystkie przemieszczenia równe zero		

TABELA 4.2. Siły wewnętrzne

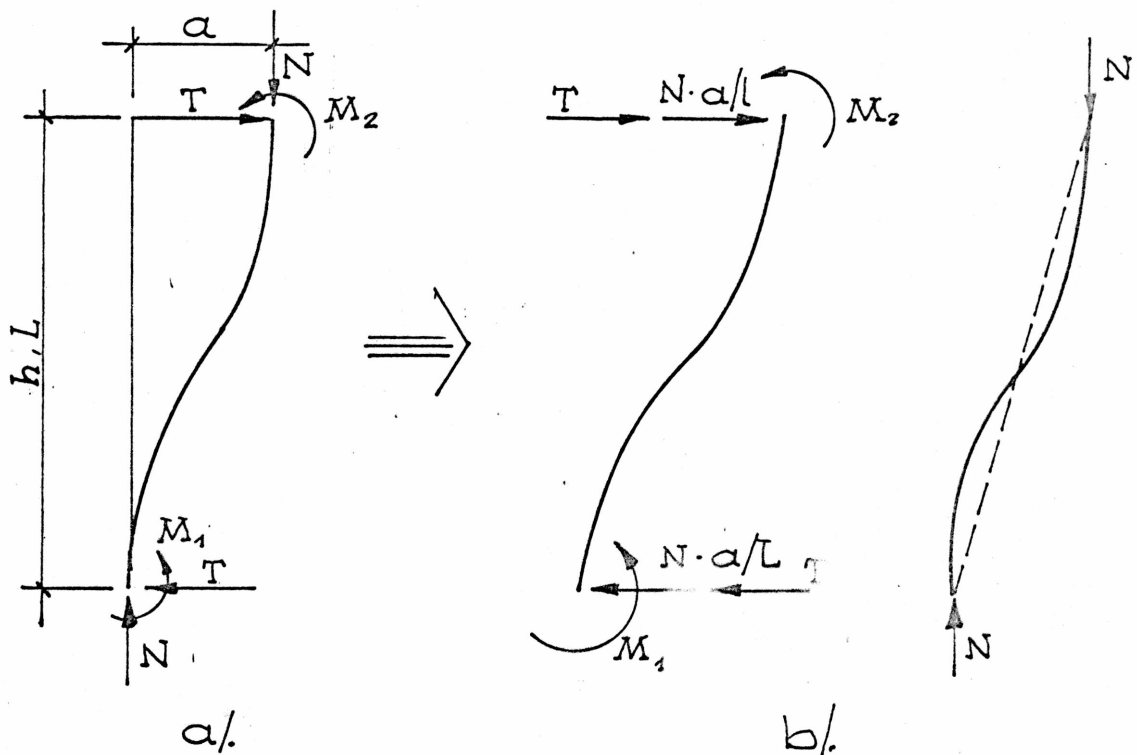
Pręt	Węzeł	"AL,ADP,ANMS"			"STRAINS-80"		
		N [kN]	T [kN]	M [kNm]	N [kN]	T [kN]	M [kNm]
1	1	78.1169	-51.512	-151.8	78.1168	-51.512	151.809
	2	-78.1169	51.512	-105.8	78.1168	-51.512	-105.75
2	1	148.488	21.883	51.81	148.488	21.8831	-51.809
	3	-148.488	-21.883	57.606	148.488	21.8831	57.6062
3	2	251.512	78.117	205.75	251.512	78.1169	-205.75
	4	-251.512	-78.117	184.83	251.512	78.1169	184.834
4	3	51.28	-136.4	-370.4	51.2799	-136.4	370.42
	4	-51.28	136.4	-311.5	51.2799	-136.4	-311.56
5	3	262.09	95.603	162.8	262.091	-95.60	-162.81
	5	-262.09	-95.603	315.2	262.091	-95.60	315.201
6	4	637.91	129.4	276.7	637.908	129.397	-276.73
	6	-637.91	-129.4	370.26	637.908	129.397	370.256

## 4.2. Efekty geometrycznej nieliniowości w konstrukcjach ramowych.

### 4.2.1. Wprowadzenie.

Dwa pierwsze z wymienionych w rozdziale 2 efektów, których uwzględnieniem w analizie statycznej konstrukcji ramowych zajęto się w dalszej części pracy, należą do efektów nieliniowości geometrycznych wynikających z działania siły osiowej na przemieszczeniach pręta.

Na rysunku 4.5 a przedstawiono słupek ramowy poddany działaniu sił osiowych i poprzecznych oraz momentów zginających przyłożonych do końców pręta. Linia prosta łącząca końce słupa tworzy z osią pionową kąt  $a/L$ .



Rys. 4.5. Siły działające na słupek ramy.

Całkowita siła poprzeczna na końcach pręta jest sumą siły rzeczywistej  $T$  oraz siły  $N \cdot a/L$ , wynikającej z momentu powstającego w wyniku działania siły  $N$  na przemieszczeniu  $a$ .

Efekty geometryczne spowodowane działaniem siły osiowej można rozbić na dwa typy. Pierwsze to efekty wynikające z działania siły poprzecznej zwane "efektami  $\Delta - P$ ". Siła  $N$ . a/L powoduje powstanie momentu obracającego, który w konsekwencji powoduje zwiększenie przemieszczeń poziomych i momentu zginającego. Drugi typ efektów geometrycznych jest wynikiem powstania tzw. momentów drugorzędnych, będących liczbowo, iloczynem siły  $N$  oraz przemieszczeń cięciwy pręta. Noszą one nazwę "efektów C i S", gdyż siła osiowa działająca w ten sposób, zmienia wartości funkcji stateczności "C" i "S" [20, 61] w równaniach transformacyjnych metody przemieszczeń.

W analizie pierwszego rzędu oba te efekty są pomijane, natomiast analiza uwzględniająca ich wpływ nosi nazwę pełnej analizy drugiego rzędu [45].

W efekcie końcowym uwzględnienie wpływu przemieszczeń na równania równowagi konstrukcji, prowadzi do nieliniowego układu równań względem przemieszczeń i obrotów węzłów. Proponowane sposoby rozwiązania tego zagadnienia podano w dalszej części pracy.

#### 4.2.2. Analiza statyczna ram według teorii II rzędu.

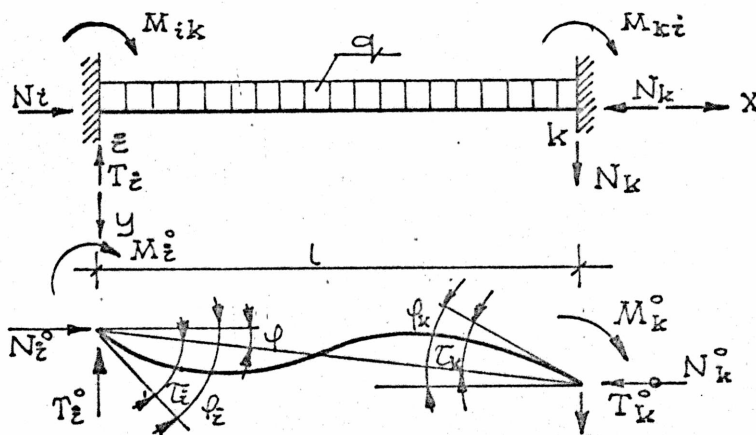
Wpływ siły osiowej na sztywność elementu wyraża się redukcją jej wartości w przypadku, gdy siła jest ściskająca i wzrostem, gdy siła jest rozciągająca. Przypadek pierwszy jest istotniejszy ze względu na możliwość wyboczenia pręta. W przypadku sztywności giętej, siła ściskająca redukuje wartość momentu potrzebną do obrócenia końca pręta o dany kąt. Efekt ten można uwzględnić w budowaniu elementów lokalnej macierzy sztywności przez zastąpienie współczynników przy składnikach związanych ze sztywnością giętą odpowiednio zmodyfikowanymi wielkościami, obliczonymi za pomocą tzw. współczynników sztywności i współczynników przeniesienia /"stiffness coefficients" i "carry-over factors"/. Wykorzystuje się do tego tzw. funkcje stateczności /"stability functions"/, których po-

stać podano między innymi w [9, 17, 20, 53, 61, 63, 64, 80] .

Pełna analiza statyczna ram, prowadzona według założeń teorii II rzędu, opiera się na wzorach metody przemieszczeń, powstających z liniowego równania różniczkowego pręta zginanego obciążonego siłą osiową. Wykorzystując całkowanie tego równania otrzymuje się wzory na elementy lokalnych macierzy sztywności pręta [61] .

Rozważania przeprowadzone w niniejszej pracy dotyczą układów ramowych o prętach prostych, poddanych zginaniu w wyniku działania poprzecznego obciążenia równomiernie rozłożonego i ściskającej siły osiowej.

Na rysunku 4.6 przedstawiono odkształconą postać pręta ramy poddanego działaniu wymienionych wyżej obciążeń.



Rys. 4.6. Odkształcona postać pręta.

Równanie różniczkowe odkształconej osi, wychodząc z zależności opisujących równowagę elementarnego wycinka pręta

$$\frac{dT}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = N \cdot \frac{dy}{dx} = T, \quad M = -EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (4.12)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = N \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -q$$

ma postać:

$$EJ \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + Nl^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = q \quad (4.13)$$

Dzieląc przez EJ i podstawiając  $\lambda = \left(\frac{Nl^2}{EJ}\right)^{1/2}$  oraz  $\xi =$

$$= \frac{x}{l}, \quad \xi' = 1 - \xi$$

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} + \lambda^2 \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{ql^2}{EJ} \quad (4.14)$$

Całka ogólna tego równania ma postać:

$$y(\xi) = y_0(\xi) + \bar{y}(\xi), \quad (4.15)$$

gdzie  $y_0(\xi)$  jest całką ogólną równania jednorodnego o postaci:

$$y_0^{IV}(\xi) - \lambda^2 \cdot y_0''(\xi) = 0, \quad (4.16)$$

a  $\bar{y}(\xi)$  całką szczególną równania niejednorodnego. Dla  $q = 0$  całkę równania (4.16) wyrażamy za pomocą wzoru:

$$y_0(\xi) = C_1 + C_2 \cdot \lambda \cdot \xi + C_3 \cdot \cos \lambda \cdot \xi + C_4 \cdot \sin \lambda \cdot \xi \quad (4.17)$$

Stałe całkowania wyznaczane są z następujących warunków brzegowych / Rys. 4.6 /:

$$y(0) = y_i, \quad y(1) = y_k, \quad y'(0) = 1 \cdot \varphi_i, \quad y'(1) = 1 \cdot \varphi_k \quad (4.18)$$

$$C_1 = y_i - C_3 = y_i + \frac{1}{\lambda} \frac{(\varphi_i - \varphi_k)(\lambda - \sin \lambda) - (y_i - y_k)\lambda(1 - \cos \lambda)}{2(1 - \cos \lambda) - \lambda \sin \lambda} \quad (4.19)$$

$$c_2 = \frac{1}{\lambda} \varphi_i - c_4 = \frac{1}{\lambda} \frac{(\varphi_i + \varphi_k)(1 - \cos\lambda) - \varphi \cdot \lambda \cdot \sin\lambda}{2(1 - \cos\lambda) - \lambda \sin\lambda} \quad (4.19)$$

Rzeczywiste momenty zginające i siły poprzeczne w końcowych przekrojach pręta wyrażone są za pomocą następujących wzorów:

$$M_{ik}^0 = -\frac{EJ}{l^2} \left. \frac{d^2 y(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0}, \quad M_{ki}^0 = \frac{EJ}{l^2} \left. \frac{d^2 y(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=1},$$

$$T_{ik}^0 = T_{ki}^0 = - \left[ \frac{EJ}{l^3} \left( \frac{d^3 y(\varphi)}{d\varphi^3} + N \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} \right) \right] \left. \right|_{\varphi=0}^{\varphi=1} \quad (4.20)$$

Kąty obrotu węzłów "i" oraz "k" są następujące:

$$\varphi_i = \varphi_{ik} + \left. \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \varphi_{ik} + \tau_i, \quad (4.21)$$

$$\varphi_k = \varphi_{ik} + \left. \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=1} = \varphi_{ik} + \tau_k$$

Uwzględniając stałe całkowania (4.19) na podstawie (4.20) otrzymano:

$$M_{ik}^0 = \frac{EJ}{l} \left[ \alpha(\lambda) \cdot \varphi_i + \beta(\lambda) \cdot \varphi_k - \gamma(\lambda) \cdot \varphi \right], \quad (4.22)$$

$$M_{ki}^0 = \frac{EJ}{l} \left[ \beta(\lambda) \cdot \varphi_i + \alpha(\lambda) \cdot \varphi_k - \gamma(\lambda) \cdot \varphi \right],$$

$$T_{ik}^0 = T_{ki}^0 = -\frac{EJ}{l^2} \left[ \delta(\lambda) \cdot \varphi_i + \gamma(\lambda) \cdot \varphi_k - \vartheta(\lambda) \cdot \varphi \right],$$

gdzie:

$$\alpha(\lambda) = \frac{\lambda(\sin\lambda - \lambda \cos\lambda)}{2(1 - \cos\lambda) - \lambda \sin\lambda},$$

$$\beta(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda - \sin\lambda)}{2(1 - \cos\lambda) - \lambda \sin\lambda}, \quad (4.23)$$

$$\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) = \lambda^2 \frac{1 - \cos\lambda}{2(1 - \cos\lambda) - \lambda \sin\lambda},$$

$$\vartheta(\lambda) = \lambda^3 \frac{\sin\lambda}{2(1 - \cos\lambda) - \lambda \sin\lambda} = 2 \cdot \gamma(\lambda) - \lambda^2$$



W przypadku rozciągania odpowiednie współczynniki mają postać:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(\bar{\lambda}) &= \bar{\lambda} \frac{\sinh \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \cosh \bar{\lambda}}{2(\cosh \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda}}, \\ \bar{\beta}(\bar{\lambda}) &= \bar{\lambda} \frac{\bar{\lambda} - \sinh \bar{\lambda}}{2(\cosh \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda}}, \\ \bar{\gamma}(\bar{\lambda}) &= \bar{\alpha}(\bar{\lambda}) + \bar{\beta}(\bar{\lambda}), \\ \bar{\vartheta}(\bar{\lambda}) &= -\bar{\lambda}^3 \frac{\sinh \bar{\lambda}}{2(\cosh \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \sinh \bar{\lambda}}, \quad \bar{\lambda} = \left( \frac{-Nl^2}{EJ} \right)^{1/2}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

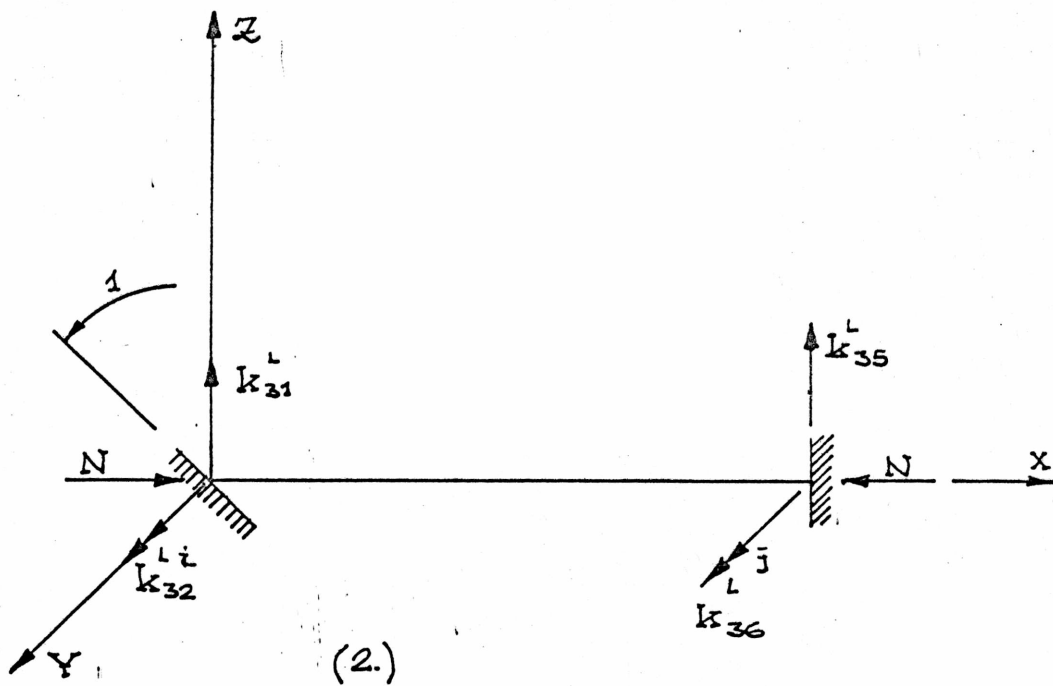
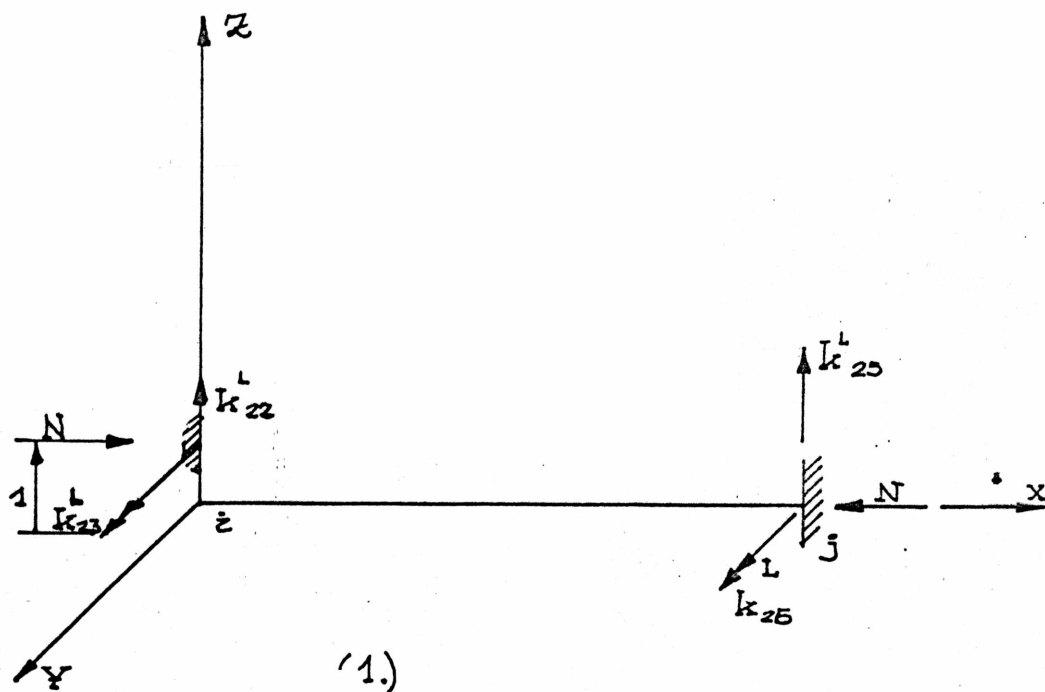
Na rysunku 4.7 przedstawiono przypadek sztywno zamocowanej na obu końcach belki ściskanej i poddanej działaniu jednostkowego przemieszczenia i obrotu w  $i$ -tym węzle. Umożliwia to pokazanie, które elementy lokalnej macierzy sztywności ulegają zmianie. Postać nieliniowej sprężystej macierzy sztywności elementu płaskiego przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}K_{11} &= \frac{EA}{l} = -K_{14} = -K_{41} = K_{44} \\ K_{22} &= \alpha^1 \cdot \frac{EI}{l^3} = -K_{25} = -K_{52} = K_{55} \\ K_{23} &= \beta^1 \cdot \frac{EI}{l^2} = K_{26} = K_{32} = -K_{35} = -K_{53} = -K_{56} = K_{52} = -K_{65} \\ K_{33} &= \gamma^1 \cdot \frac{EI}{l} = K_{66} \\ K_{36} &= \vartheta^1 \cdot \frac{EI}{l} = K_{63}\end{aligned}\tag{4.25}$$

Sposoby określania wartości współczynników  $\alpha^1$ ,  $\beta^1$ ,  $\gamma^1$ ,  $\vartheta^1$  zależą od rodzaju przyjętych założeń dotyczących powiązań między siłami wewnętrznymi i deformacjami zachodzącymi w pręcie. Connor i. w [17] podają postać nieliniowej macierzy sztywności dla pręta przestrzennego z założeniem małych obrotów węzłów i pominięciem sprzężenia deformacji giętej i skrętnej. Podobne podejście zapro-

ponował Pietraszkiewicz ii.w[64], gdzie pominięto sprzężenie deformacji giętej w obu płaszczyznach głównych oraz deformacji giętej i skrętnej, a także wpływy związane ze zmianą parametrów geometrycznych układu i sprzężenie sił wewnętrznych. W pracy tej, podobnie, jak Gere w [22], podano postać współczynników dla pręta ściskanego i rozciąganego. Identyczne podejście reprezentują prace Tranberga [80] i Pałkowskiego [62], natomiast Birnstiel ii.w pracy [91], opisującej czynniki wpływające na stateczność konstrukcji ramowych, dodatkowo uwzględniają wpływ sił osiowych na sztywność skrętną.

Opierając się na informacjach zawartych w omówionych pracach oraz wzorach podanych przez Nowackiego [61], Krynickiego [43] i Galambosa [20], określono postacie współczynników w macierzy sztywności. Przedstawiono je w tabeli 4.3.



Rys. 4.7. Sztywność pręta zginanego i ściskanego: /1/ jednostkowa translacja "z" węzła i, /2/ jednostkowy obrót "x" węzła i; / dla węzła j przypadki są identyczne /.

Tabela 4.3. Współczynniki nieliniowej macierzy sztywności

Współczynnik	Rodzaj siły osiowej		
	ściskanie	zerowa	rozciąganie
$\alpha_1$	$2(\alpha + \beta) - \lambda^2$	12	$2(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \bar{\lambda}^2$
$\beta_1$	$\alpha + \beta$	6	$\bar{\alpha} + \bar{\beta}$
$\gamma_1$	$\alpha$	4	$\bar{\alpha}$
$\psi_1$	$\beta$	2	$\bar{\beta}$

gdzie:

$\alpha, \beta$  wg wzoru (4.23),  
 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  wg wzoru (4.24).

Pietraszkiewicz w [64] podaje, że dla wartości  $N$  takich, że  $(Nl^2/EJ) < 0,1$  wartości  $\alpha$  i  $\beta$  można przyjmować z rozwinięć asymptotycznych i mają one wówczas postać:

$$\alpha = 4 - \frac{2}{15} \frac{Nl^2}{EI} - \frac{11}{6300} \left( \frac{Nl^2}{EI} \right)^2 + \dots$$

$$\beta = 2 + \frac{1}{30} \frac{Nl^2}{EI} + \frac{13}{12600} \left( \frac{Nl^2}{EI} \right)^2 + \dots \quad (4.26)$$

Dla  $N \rightarrow 0$  macierz zbudowana jak wyżej przechodzi w macierz odpowiadającą liniowej deformacji pręta płaskiego o współczynnikach według wzoru (4.2).

Podstawiając do wzorów (4.22) wartości według (4.26) i pomijając, poza dwoma pierwszymi, wyrazy rozwinięcia asymptotycznego, otrzymamo:

$$M_{ik}^0 = \frac{EJ}{I} \left[ \left( 4 - \frac{4}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) \cdot \varphi_i + \left( 2 + \frac{1}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) \cdot \varphi_k - \left( 6 - \frac{3}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) \cdot \psi \right],$$

$$M_{ki}^0 = \frac{EJ}{I} \left[ \left( 2 + \frac{1}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) \cdot \varphi_i + \left( 4 - \frac{4}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) \cdot \varphi_k - \left( 6 - \frac{3}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) \cdot \psi \right],$$

$$T_{ik}^0 = T_{ki}^0 = -\frac{EJ}{l^2} \left\{ \left( 6 - \frac{3}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) (\varphi_i + \varphi_k) - \left[ 2 \left( 6 - \frac{3}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \right) - \lambda^2 \right] \cdot \psi \right\}, \quad (4.27)$$

a stąd:

$$\begin{aligned}
 M_{ik}^0 &= -\frac{EJ}{I} (4 \cdot \varphi_i + 2 \cdot \varphi_k - 6 \cdot \psi) + \frac{EJ}{I} \left( -\frac{4}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \cdot \varphi_i + \frac{1}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \cdot \varphi_k + \frac{3}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \cdot \psi \right), \\
 M_{ki}^0 &= -\frac{EJ}{I} (2 \cdot \varphi_i + 4 \cdot \varphi_k - 6 \cdot \psi) + \frac{EJ}{I} \left( \frac{1}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \cdot \varphi_i - \frac{4}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \cdot \varphi_k + \frac{3}{30} \frac{Nl^2}{EJ} \cdot \psi \right), \\
 T_{ik}^0 &= T_{ki}^0 = -\frac{EJ}{l^2} [6(\varphi_i + \varphi_k) - 12 \cdot \psi] + \frac{EJ}{l^2} \left[ \frac{3}{30} \frac{Nl^2}{EJ} (\varphi_i + \varphi_k) - \left( \frac{6}{30} \frac{Nl^2}{EJ} + \lambda^2 \right) \cdot \psi \right] \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

Pierwsze człony tych równań stanowią wzory dla liniowej macierzy sztywności, natomiast na podstawie drugich buduje się tzw. macierz sztywności geometrycznej.

Przekształcając drugi człon wzoru (4.28) na  $T_{ik}$

$$T_{ik}^0 = \frac{3}{30} Nl (\varphi_i + \varphi_k) - \frac{6}{30} Nl \cdot \psi - \frac{EJ}{l^2} \frac{Nl^2}{EJ} \cdot \psi \quad (4.29)$$

otrzymano:

$$T_{ik}^0 = \frac{3}{30} Nl (\varphi_i + \varphi_k) - \frac{6}{30} Nl \cdot \psi - N \cdot \psi \quad (4.30)$$

Ostatni człon w wyrażeniu (4.30) można zapisać:

$$N \cdot \psi = N \cdot \frac{\Delta}{l}, \quad (4.31)$$

gdzie:  $\Delta$  - przemieszczenie końców pręta  
 $l$  - długość pręta.

Wzór (4.31) określa wartość dodatkowych sił poprzecznych powstających na końcach pręta w wyniku działania siły osiowej na poziomym przemieszczeniu pręta - skłupa ramy. Efekt ten nosi nazwę "efektu  $\Delta$ -P" i jest przedstawiony w rozdziale 4.2.3 niniejszej pracy.

W przypadku, gdy pomija się wpływ sił osiowych na sztywność giętną, tzn. gdy wyrażenie  $\left(\frac{Nl^2}{EJ}\right)^{1/2} \leq 1$ , można przeprowadzać uproszczoną analizę II rzędu według wzorów podanych w rozdziale 4.2.3. W przypadku, gdy wyrażenie to jest większe od 1 lub, gdy chcemy określić dokładniej rozkład sił wewnętrznych pomijając wspomnia-

ny warunek, analizę metodą  $\Delta - P$  należy prowadzić według wzorów podanych w rozdziale 4.2.4.

Ponieważ w konstrukcjach ram wielopiętrowych najczęściej występującym przypadkiem obciążenia rygli jest obciążenie równomiernie rozłożone, uwzględniono również wpływ sił osiowych ściskających i rozciągających na wartości momentów zginających pochodzących od obciążenia tego typu. Opierając się na wzorach wyprowadzonych z równań linii ugięcia pręta [43], obliczono wyrażenia na siły wyjściowe pochodzące od wymienionego typu obciążenia. Obliczenia przeprowadzono wykorzystując zasadę prac wirtualnych według wzorów podanych w [43]. Praca sił rzeczywistych  $M_{ik}$ ,  $M_{ki}$ ,  $T_{ik}$ ,  $T_{ki}$ ,  $N$  na przemieszczeniach wirtualnych przedstawia się w postaci równania:

$$\int_{\varphi} y(\varphi) \cdot q(\varphi) \cdot l \cdot d\varphi = -M_{ik} \cdot \varphi_i - M_{ki} \cdot \varphi_k + T_{ik} \cdot y_i - T_{ki} \cdot y_k + L - V, \quad (4.32)$$

gdzie  $y(\varphi)$  jest rzędną ugięcia całki ogólnej równania różniczkowego (4.19),  $L$  jest pracą siły  $N$  na skróceniu pręta, a  $V$  pracą sił wewnętrznych zginania pręta. Ponieważ za przemieszczenia wirtualne osi pręta przyjęto linię ugięcia przy wyboczeniu, a więc w stanie równowagi obojętnej, dlatego zachodzi:

$$L - V = 0 \quad (4.33)$$

Uwzględniając (4.19) w (4.17) linię ugięcia otrzymano w postaci:

$$y(\varphi) = l \cdot \varphi_i \cdot \omega_i(\varphi, \lambda) - l \cdot \varphi_k \cdot \omega_k(\varphi, \lambda) + y_i \cdot \vartheta_i(\varphi, \lambda) + y_k \cdot \vartheta_k(\varphi, \lambda), \quad (4.34)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \omega_i(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{\lambda^2} \left\{ -\varphi \cdot \alpha(\lambda) + \varphi \cdot \beta(\lambda) + \left[ \frac{\vartheta(\lambda)}{\lambda} \sin(\varphi' \cdot \lambda) - \beta(\lambda) \cdot \cos(\varphi' \cdot \lambda) \right] \right\}, \\ \omega_k(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{\lambda^2} \left\{ -\varphi \cdot \alpha(\lambda) + \varphi' \cdot \beta(\lambda) + \left[ \frac{\vartheta(\lambda)}{\lambda} \sin(\varphi \cdot \lambda) - \beta(\lambda) \cdot \cos(\varphi \cdot \lambda) \right] \right\}, \\ \vartheta_i(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{\lambda^2} \left\{ \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) - \varphi' \cdot \vartheta(\lambda) + \frac{\vartheta(\lambda)}{\lambda} \sin(\varphi' \cdot \lambda) - [\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)] \cos(\varphi' \cdot \lambda) \right\}, \\ \vartheta_k(\varphi, \lambda) &= -\frac{1}{\lambda^2} \left\{ \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) - \varphi \cdot \vartheta(\lambda) + \frac{\vartheta(\lambda)}{\lambda} \sin(\varphi \cdot \lambda) - [\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)] \cos(\varphi \cdot \lambda) \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Mnożąc obie strony równania (4.32) przez  $\int q(\varphi) \cdot l \cdot d\varphi$  i przyrównując współczynniki przy tych samych wyrażach w równaniach (4.32) i (4.34) otrzymano:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= -l^2 \int_{\varphi} q(\varphi) \cdot \omega_i(\varphi, \lambda) \cdot d\varphi, \\ M_{ki} &= l^2 \int_{\varphi} q(\varphi) \cdot \omega_k(\varphi, \lambda) \cdot d\varphi, \\ T_{ik} &= l \int_{\varphi} q(\varphi) \cdot \varrho_i(\varphi, \lambda) \cdot d\varphi, \\ T_{ki} &= -l \int_{\varphi} q(\varphi) \cdot \varrho_k(\varphi, \lambda) \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Dla obciążenia równomiernie rozłożonego na całym pręcie:

$$M_{ik} = -ql^2 \cdot \omega(\lambda) = -M_{ki}, \quad (4.37)$$

$$T_{ik} = ql \cdot \varrho(\lambda) = -T_{ki}$$

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2 \cdot \lambda^2} [\beta(\lambda) - \alpha(\lambda) + 2], \quad (4.38)$$

$$\varrho(\lambda) = -\frac{1}{2}$$

Natomiast dla siły rozciągającej:

$$\bar{\omega}(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2 \cdot \bar{\lambda}^2} [-\beta(\bar{\lambda}) + \alpha(\bar{\lambda}) - 2] \quad (4.39)$$

$$\bar{\varrho}(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2}$$

Tak zmodyfikowane wartości sił węzłowych wprowadza się do wektora obciążeń zewnętrznych  $\{\bar{F}^{LP}\}$ .

Opierając się na przedstawionym sposobie budowania macierzy sztywności sprężystej wykorzystano dwie metody analizy statycznej płaskich konstrukcji ramowych uwzględniające wpływ sił osiowych na deformację giętną prętów.

Pierwsza metoda wykorzystuje technikę iteracyjną z zastosowaniem rozwiązania Newtona-Raphsona, przedstawioną między innymi w [20].

W pierwszym kroku procedury obliczane są przemieszczenia węzłów konstrukcji z wykorzystaniem liniowej macierzy sztywności dla obciążeń zewnętrznych o zadanych wartościach. Następnie, w oparciu o obliczone przemieszczenia i siły wewnętrzne, budowana jest nowa macierz sztywności, w której wprowadzono zmodyfikowane współczynniki w elementach odnoszących się do deformacji giętych i poprzecznych. Z kolei, wykorzystując tę nową macierz sztywności i przemieszczenia z poprzedniego kroku, oblicza się tzw. "obciążenie pozostające" /"resisting forces"/. Różnica między tymi siłami a rzeczywistym obciążeniem zewnętrznym, stanowi wektor niezrównoważonych obciążeń /"unbalanced forces" / dla danego kroku iteracji. Następnie, dla konstrukcji obciążonej tymi niezrównoważonymi siłami, oblicza się przyrost przemieszczeń. Budując nową macierz sztywności w oparciu o całkowite przemieszczenia, proces powtarza się do momentu, gdy zostaje osiągnięty stan, w którym iloraz normy obciążenia niezrównoważonego i normy obciążenia całkowitego / rzeczywistego / jest mniejszy od zadanej wartości.

Proces obliczeń można przedstawić za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
 & \text{- pierwszy krok obliczeń:} & V_0 &= K_0^{-1} \cdot H_0 & (4.40) \\
 & \text{- i-ty krok obliczeń:} & V_i &= V_0 + \sum_{i=1}^{UW} K_i^{-1} (V_{i-1}) \cdot H_i = V_0 + \\
 & & & + \sum_{i=1}^{UW} V_{oi},
 \end{aligned}$$

$$\text{gdzie: } H_i = K_i (V_{i-1}) \cdot V_{i-1} = H_0 - I_i,$$

UW - liczba iteracji wynikająca z zadanej dokładności obliczeń określonej wzorem:

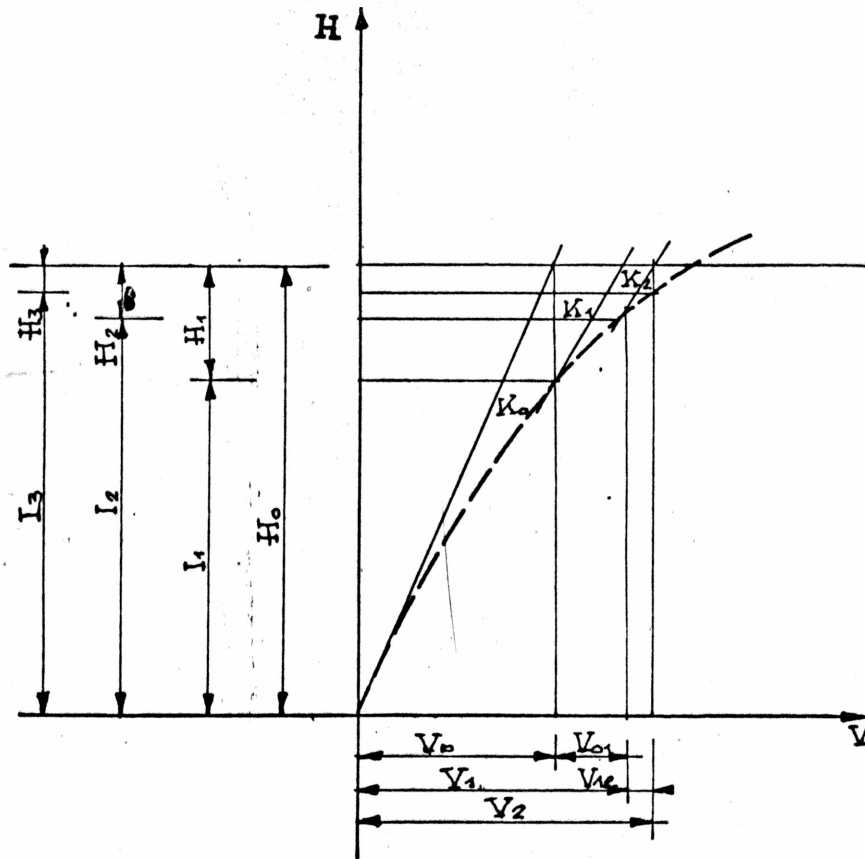
$$\frac{H_i \cdot H_i^T}{H_0 \cdot H_0^T} \leq EPS1, \quad (4.41)$$

$\{H_0\}$  - wektor obciążeń rzeczywistych,

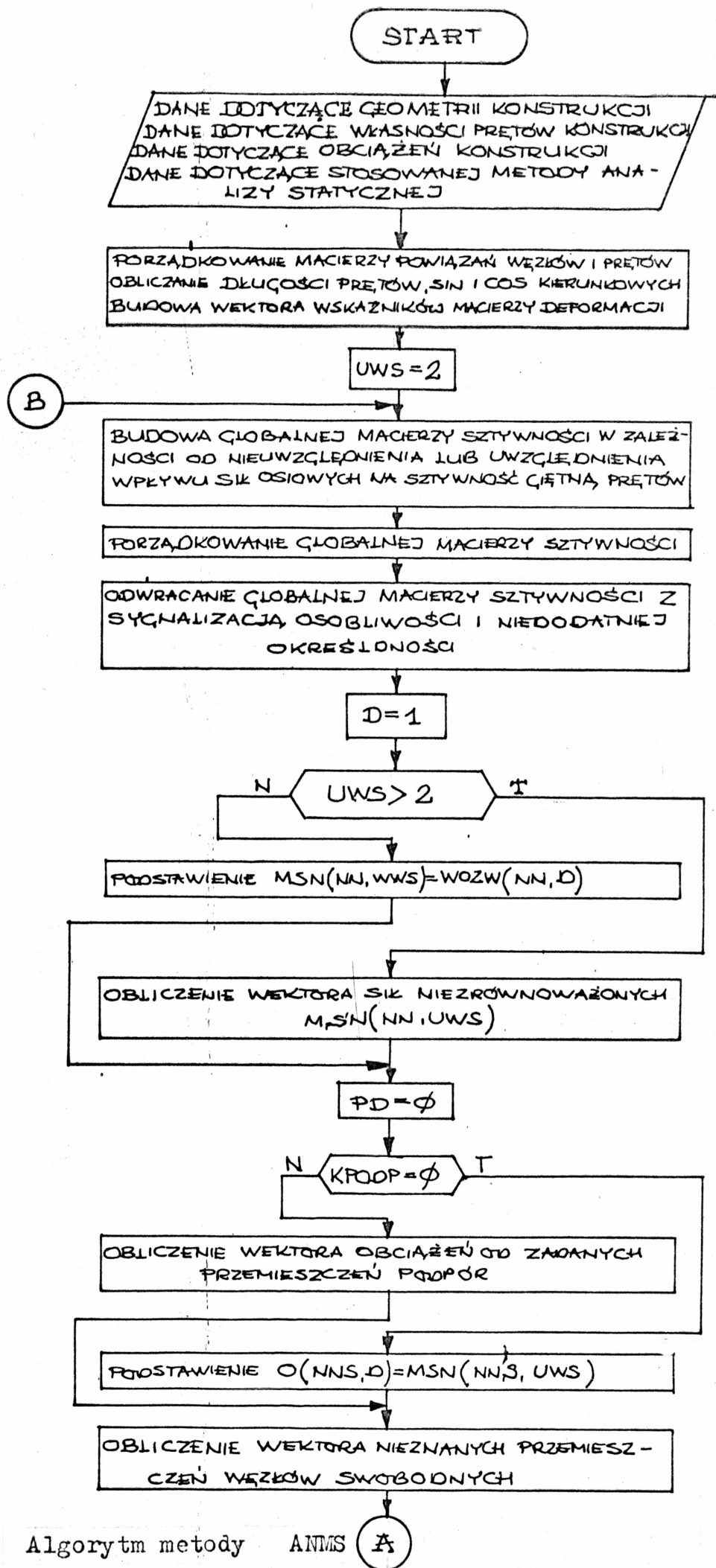


- $\{H_i\}$  - wektor obciążeń niezrównoważonych w  $i$ -tym kroku obliczeń,
- $\{I_i\}$  - wektor "obciążeń pozostających" w  $i$ -tym kroku obliczeń,
- $\{V_0\}$  - wektor przemieszczeń dla liniowej macierzy sztywności,
- $\{V_i\}$  - wektor przemieszczeń całkowitych w  $i$ -tym kroku obliczeń.

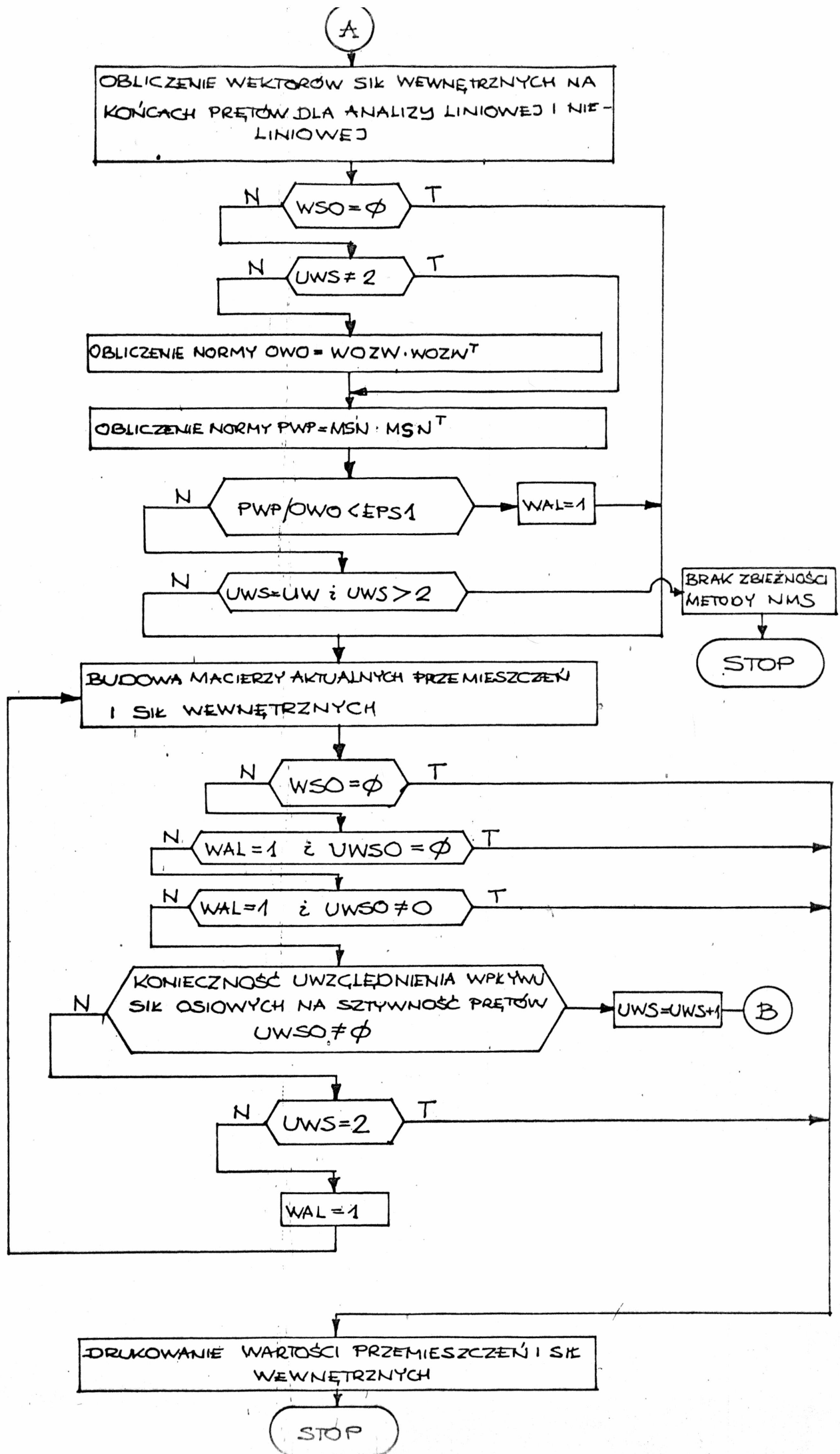
Przebieg zależności przemieszczenia od obciążenia pokazano na rysunku 4.8, natomiast algorytm programu na rysunku 4.9.



Rys. 4.8. Przebieg zależności przemieszczenia od obciążenia dla nieliniowej macierzy sztywności / metoda Newtona-Raphsona /.



Rys. 4.8. Algorytm metody ANMS



Zadanie powyższe można również rozwiązać stosując iteracyjną metodę kolejnych przybliżeń [37, 25]. W metodzie tej tworzy się ciąg rozwiązań zbieżny do ścisłego rozwiązania układu równań równowagi.

Charakteryzuje się ona przykładaniem do węzłów konstrukcji, w każdym kroku obliczeniowym, całkowitego obciążenia zewnętrznego. Początkową wartość przemieszczeń oblicza się dla macierzy sztywności liniowej, w której pomija się wpływ sił osiowych na deformację giętą prętów. Następnie, w oparciu o te przemieszczenia, oblicza się nową, nieliniową macierz sztywności i dalej, rozwiązując kolejny układ równań, nowe wartości całkowitych przemieszczeń węzłów. Na każdym kroku iteracji globalna macierz sztywności jest budowana od nowa z uwzględnieniem obliczonych w poprzednim kroku sił normalnych w prętach i wynikających z tego modyfikacji elementów lokalnej macierzy sztywności.

Proces obliczeniowy prowadzi się do osiągnięcia żądanej dokładności obliczeń, określanej za pomocą ilorazu norm obciążeń, podobnie, jak w metodzie poprzedniej.

Cykl obliczeń można przedstawić za pomocą następujących wzorów:

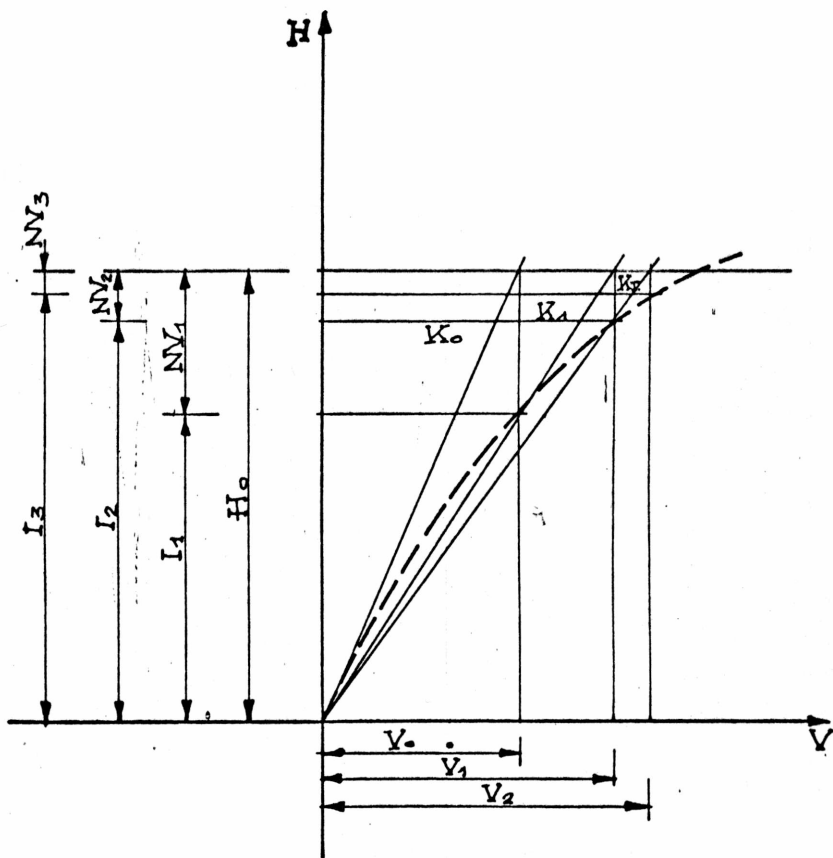
$$\begin{aligned} - \text{pierwszy krok obliczeń:} & \quad V_0 = K_0^{-1} \cdot H_0 & (4.42) \\ - i\text{-tykrok obliczeń:} & \quad V_i = K_i^{-1} (V_{i-1}) \cdot H_0 \end{aligned}$$

Zbieżność procesu określa wzór:

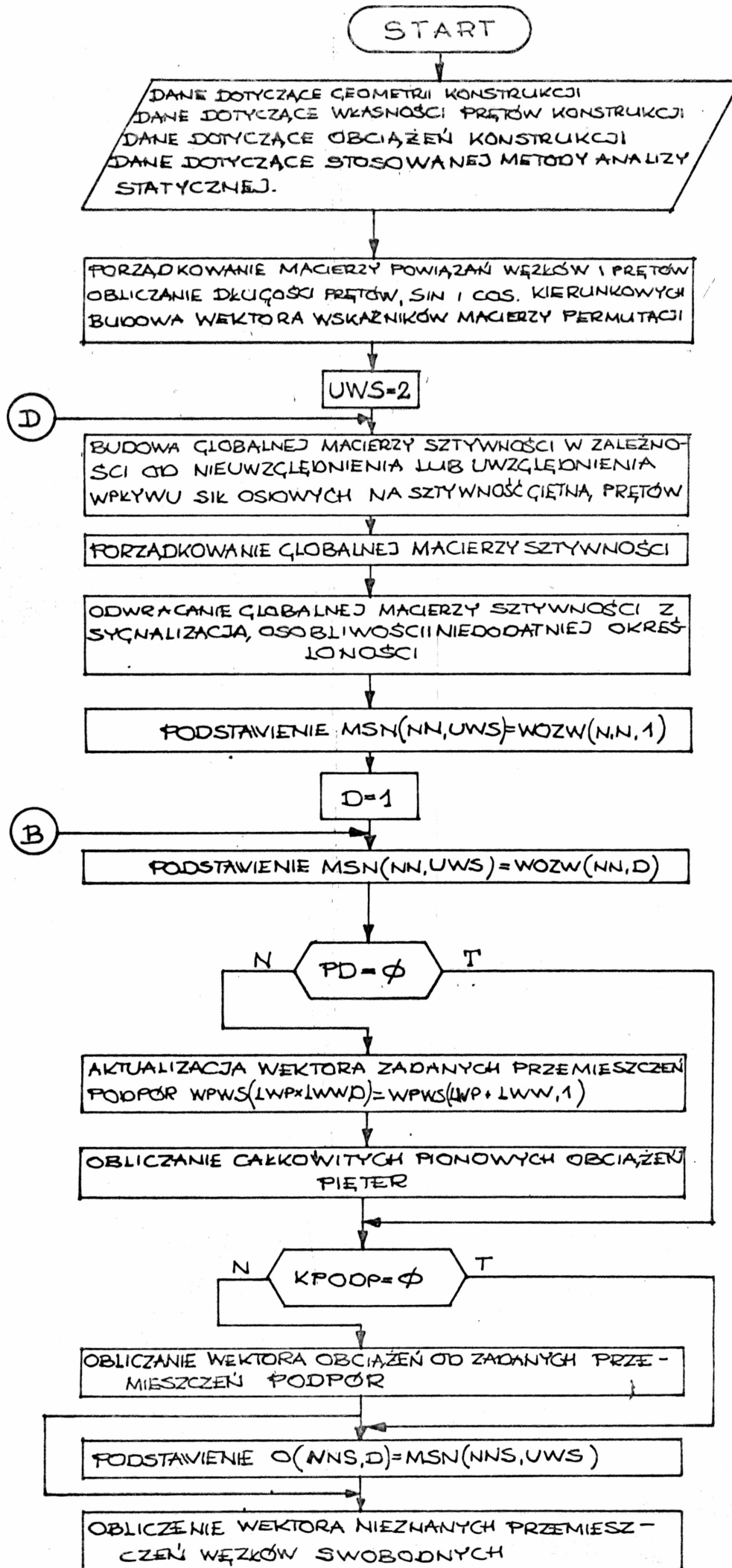
$$\frac{NV_i \cdot NV_i^T}{H_0 \cdot H_0} \leq EPS1, \quad (4.43)$$

gdzie:  $NV_i = H_0 \cdot K_i (V_{i-1}) \cdot V_{i-1} = H_0 - I_i$  / obciążenie niezrównoważone /.

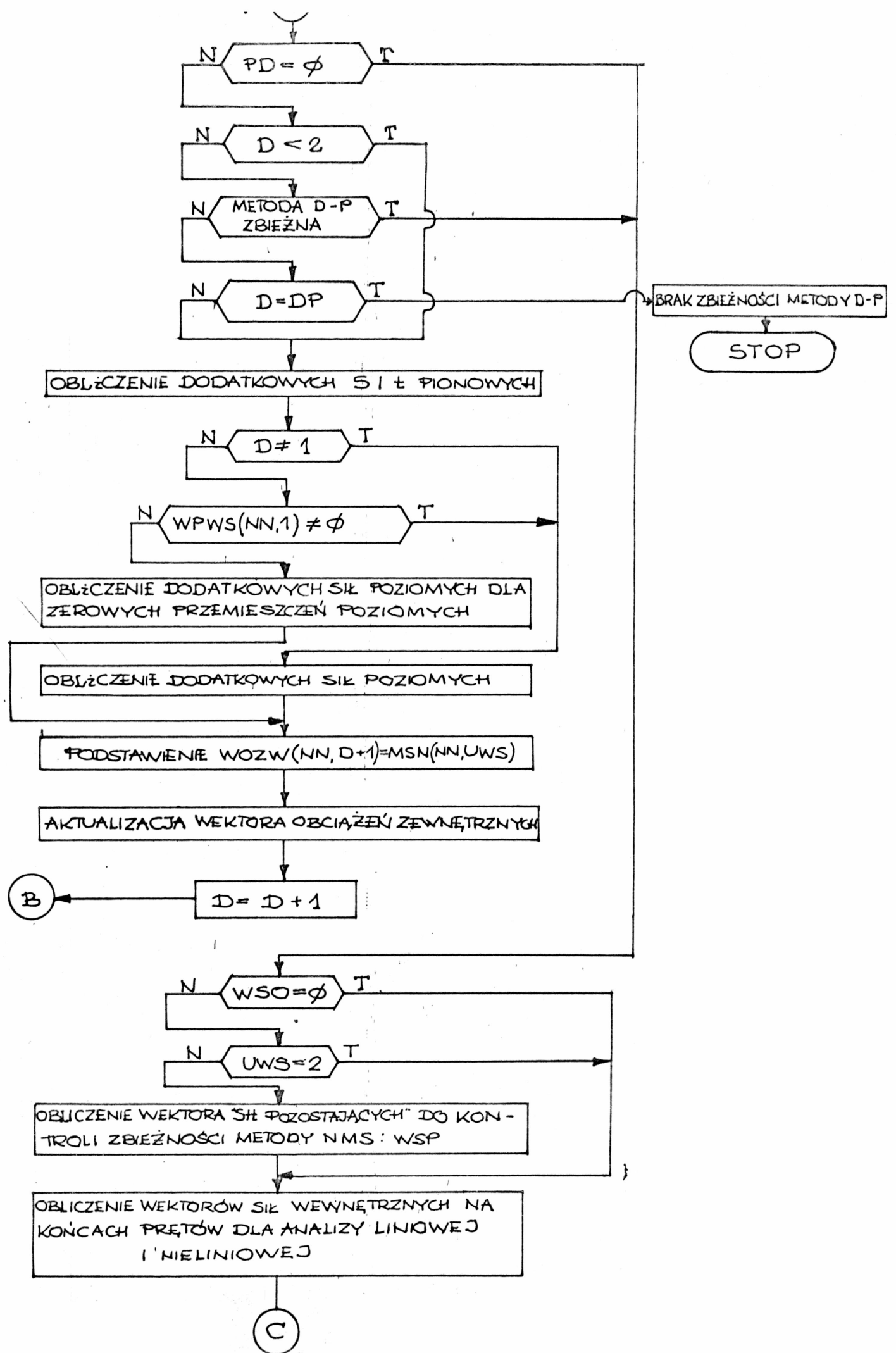
Przebieg zależności przemieszczenia od obciążenia przedstawia rysunek 4.10, natomiast algorytm obliczeń rysunek 4.11.



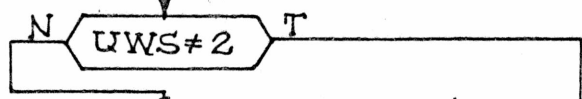
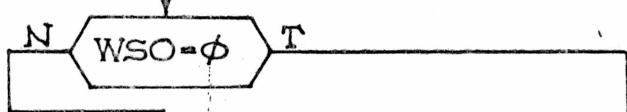
Rys. 4.10. Przebieg zależności przemieszczenia od obciążenia dla nieliniowej macierzy sztywności / metoda kolejnych przybliżeń dla pełnego obciążenia /.



(A) Rys. 4.11. Algorytm metody

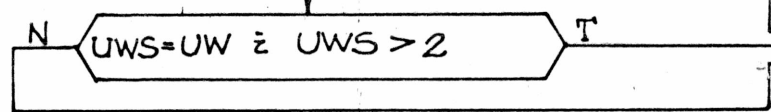
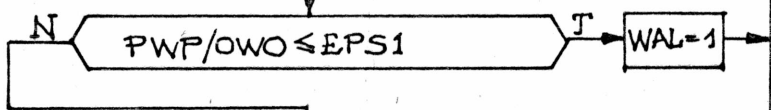


(C)



OBLICZENIE NORMY  $O_{WO} = W_{OZW} = W_{OZW}^T$

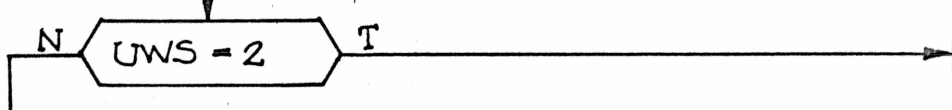
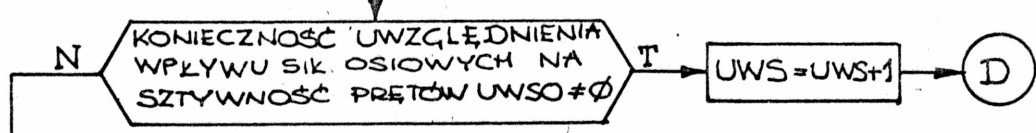
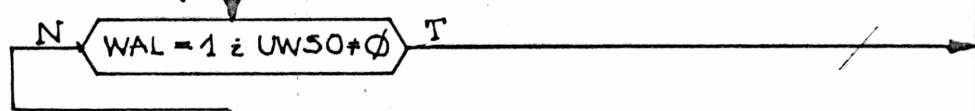
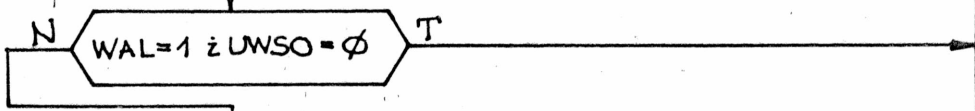
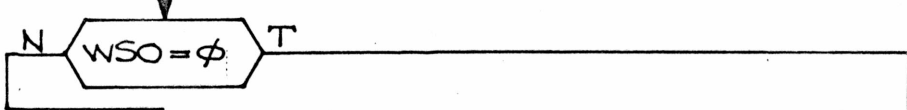
OBLICZENIE NORMY  $P_{WP} = W_{SP} \cdot W_{SP}^T$



BRAK ZBĘŻNOŚĆ METODY NMS

STOP

BUDOWA MACIERZY AKTUALNYCH PRZEMIESZCZEŃ I SIŁ WEWNĘTRZNYCH



$W_{AL} = 1$

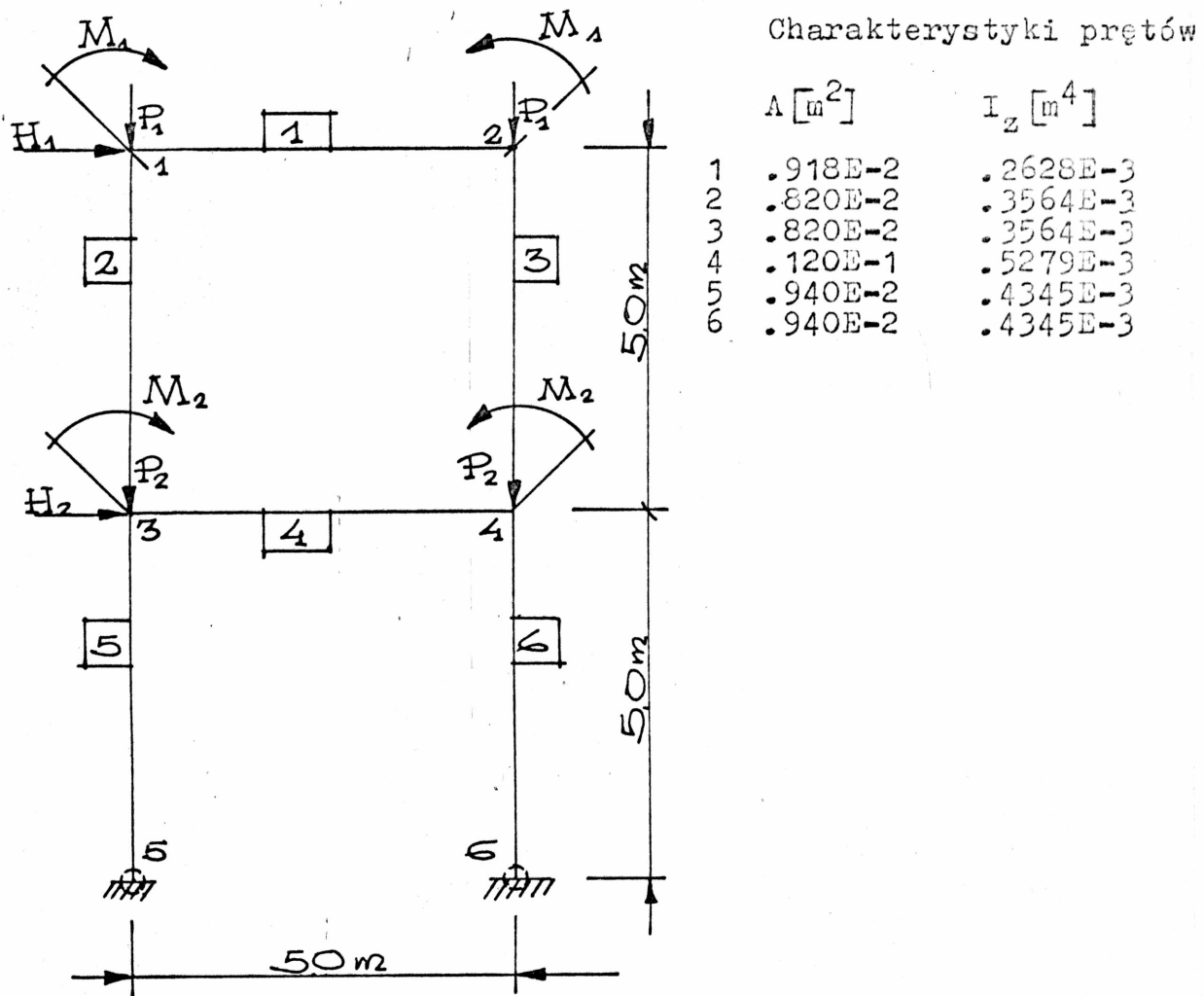
DRUKOWANIE WARTOŚCI PRZEMIESZCZEŃ I SIŁ WEWNĘTRZNYCH

STOP



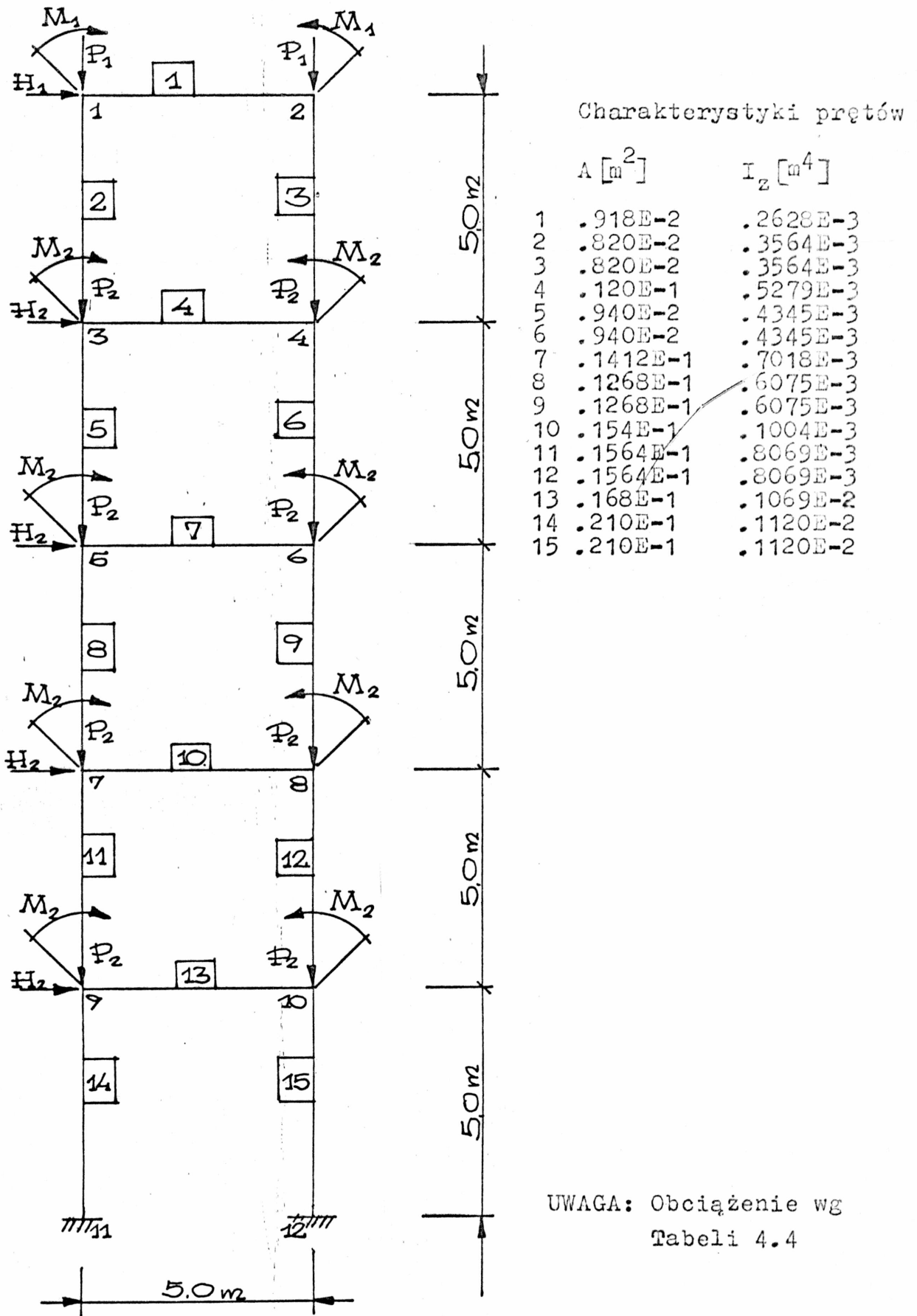
Wpływ omawianego efektu na rozkład i wartości sił wewnętrznych w prętach konstrukcji ramowych, badano przeprowadzając przykładowe obliczenia dla konstrukcji przedstawionych na rysunkach 4.12 i 4.13 oraz schematów obciążeń wg tabeli 4.4.

Wyniki obliczeń dla analizy liniowej i według teorii II rzędu, dokonanej z wykorzystaniem obu opisanych technik, a także porównanie z wynikami analizy liniowej i analizy metodą  $\Delta$ -P, przedstawiono w tabelach Z.4.1 - 27 w Załączniku oraz w tabelach 4.5 - 4.8 w niniejszym rozdziale.



UWAGA: Obciążenie wg tabeli 4.4

Rys. 4.12. Przykład obliczeniowy nr I / rama o sztywnym zamocowaniu /, nr Ia / rama o przegubowym zamocowaniu podpór /.



Rys. 4.13. Przykład obliczeniowy nr II/ rama o sztywnym zamocowaniu /

TABELA 4.4.

Schematy obciążeń ram z przykładów I, Ia, II

Nr SCHEMATU	OBCIĄŻENIE					
	$H_1$ [kN]	$P_1$ [kN]	$M_1$ [kNm]	$H_2$ [kN]	$P_2$ [kN]	$H_2$ [kNm]
I	25	125	100	50	175	150
II	100	125	100	125	175	150
III	25	200	100	50	250	150
IV	100	200	100	127	250	150

UWAGA:

Schematy I, II - wzrost obciążeń poziomych

Schematy I, III - wzrost obciążeń pionowych

Schematy I, IV - wzrost obciążeń pionowych i poziomych.

4.2.3. Efekt  $\Delta$ -P

Nazwą "efektu  $\Delta$ -P" określa się w literaturze [9, 27, 34, 48, 70, 71, 82, 83] dodatkowe momenty i siły wewnętrzne powstające w konstrukcji w wyniku działania pionowych obciążeń na poziomych przemieszczeniach węzłów. Siły te w znaczący sposób [9, 82] mogą wpływać na wytrzymałość oraz stateczność konstrukcji ramowych. Wynhoven i Adams w [85] stwierdzają, że wspomniany efekt wpływa na redukcję nośności prętów ram obliczanych w ramach teorii plastyczności. Podobne wnioski zaprezentowano w pracy Springfieldda i i. [77] oraz w Wytycznych ... [86] .

Uwzględnienie dodatkowych sił opisywanych "efektem  $\Delta$ -P" w analizie konstrukcji sprężystych, jest również istotne, gdyż według [82, 83], powoduje jakościową i ilościową zmianę w rozkładzie sił wewnętrznych w elementach ram. Według autora niniejszej pracy wpływ ten będzie również widoczny w procesie projektowania ram optymalnych.

Wartości "efektu  $\Delta$ -P" można określać za pomocą analizy II

rzędu [9] lub z zastosowaniem zmodyfikowanych metod analizy pierwszego rzędu, wykorzystujących stałą macierz sztywności sprężystej [27, 70, 71, 82, 83].

Na rysunku (4.14) przedstawiono ideę obliczania dodatkowych poziomych obciążeń węzłów, odpowiadających poziomym przemieszczeniom pięter rami. Pojedynczy skup reprezentuje odpowiednie piętro konstrukcji. Rysunek ten przedstawia początkowy krok analizy metodą  $\Delta$ -P: obliczenie tzw. sił  $\Delta$ -P. Do konstrukcji przykładane jest obciążenie pionowe i poziome i, wykorzystując metody analizy liniowej, obliczane są przemieszczenia węzłów. Dodatkowe siły poprzeczne odpowiadające obciążeniom pionowym oblicza się według wzoru:

$$T_i' = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i), \quad (4.44)$$

gdzie:

$T_i$  - dodatkowe siły poprzeczne,

$\sum P_i$  - suma sił pionowych na i-tym piętrze,

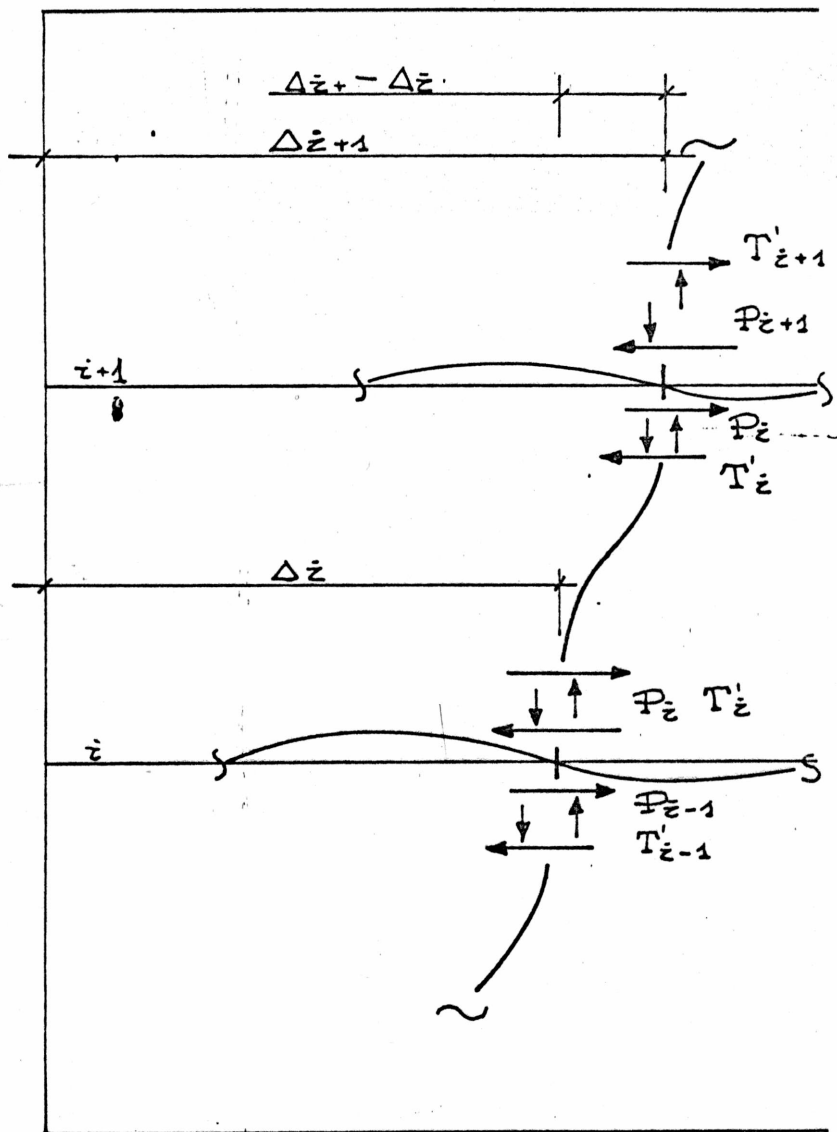
$h_i$  - wysokość piętra,

$\Delta_{i+1}, \Delta_i$  - przemieszczenia poziome węzłów odpowiednio na poziomie "i+1" oraz "i".

Siły poziome / dodatkowe obciążenia węzłów /,  $H_i$ , obliczane są jako różnica między dodatkowymi siłami poprzecznymi na kolejnych piętach:

$$H_i' = T_{i-1}' - T_i' \quad (4.45)$$

Następnie siły te są dodawane do obciążeń poziomych, odpowiednio na każdym piętrze, i konstrukcja ponownie poddawana jest procesowi analizy statycznej. Gdy wartości  $\Delta_i$  na końcu cyklu są zbliżone do otrzymanych w poprzednim kroku, obliczenia zostają zakończone, a rozkład i wartości sił wewnętrznych w prętach rami otrzymujemy z uwzględnieniem wpływu "efektu  $\Delta$ -P".



Rys. 4.14. Siły poziome odpowiadające obciążeniom pionowym w słupach konstrukcji ramowej.

Metoda opisana powyżej jest możliwa do zastosowania zarówno w przypadku istnienia obciążeń pionowych i poziomych, jak również tylko pionowych. W obu przypadkach proces obliczeń opiera się na tych samych równaniach. Gdy istnieją tylko obciążenia pionowe, a konstrukcja jest symetryczna, przemieszczenia poziome mogą być zerowe i wówczas można wprowadzić przemieszczenia wynikające z niedokładności wykonania konstrukcji [27, 82]. Wg [27] siły poziome oblicza się wówczas według wzoru:

$$H_i = s \cdot p \cdot \sum_i P_i \quad (4.46)$$

gdzie:  $\sum_i P_i$  - suma sił pionowych na i-tym piętrze,  
s - współczynnik o wartości:

$$s = \frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{h_i} = 0,002 + 0,01 \quad [31, 40],$$

wynikający z możliwych niedokładności montażowych,

p - współczynnik uwzględniający prawdopodobieństwo równoczesnego wystąpienia mimośrodków o jednakowych znakach: gdy konstrukcja ma więcej niż dwa rzędy skupów  $p = 0,75$ , w przypadku innym  $p = 1,0$ , wg [82].

Podane powyżej wzory można przedstawić w formie sformalizowanego zapisu macierzowego w postaci geometrycznej macierzy sztywności. Podejście takie prezentują prace Rutemberga [70, 71] oraz Ilkowa i [26, 27].

Rutenberg w [70, 72] przedstawia sposoby analizy statycznej uwzględniającej wpływ "efektu  $\Delta$ -P" dla płaskich konstrukcji ramowych z wykorzystaniem tzw. "skupów-fikcyjnych", o ujemnych wartościach sztywności. Wprowadzając najprostsze przybliżenie geometrycznej macierzy sztywności, to znaczy macierzy reprezentującej efekty zmian w geometrii konstrukcji, z założeniem, że pręt-skup między piętrami nie ulega odkształceniom / jest prostoliniowy /, czyli, że nie ma dodatkowych momentów wywołanych działaniem siły osio-

wej, otrzymuje się warunek, że współczynniki elementów lokalnej macierzy sztywności są stałe.

Jest to założenie słuszne dla niewielkich wartości sił osiowych, tzn., gdy  $(Nl^2/EI)^{1/2} < 1,0$ . Dla takich założeń siły poprzeczne są obliczane według następującej relacji (4.47)

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_i \\ \vdots \\ H_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_0}{h_0} + \frac{P_1}{h_1} & -\frac{P_1}{h_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{P_1}{h_1} & \frac{P_1}{h_1} + \frac{P_2}{h_2} & -\frac{P_2}{h_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{P_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{P_i}{h_i} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{P_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{P_n}{h_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}$$

lub:  $\{H^\Delta\} = [K_G^0] \cdot \{\Delta\}$ , (4.48)

gdzie:  $P_i$  - suma sił pionowych na  $i$ -tym piętrze,  
 $h_i$  - wysokość piętra,  
 $\Delta_i$  - przemieszczenie poziome  $i$ -tego piętra,  
 $[K_G^0]$  - geometryczna macierz sztywności.

Równanie równowagi układu ma postać:

$$[K - K_G^0] \cdot \{\Delta\} = [K_S^0] \cdot \{\Delta\} = \{H\}, \quad (4.49)$$

gdzie:  $[K]$  - macierz sztywności sprężystej,  
 $[K_S^0]$  - macierz sztywności drugiego rzędu,  
 $\{H\}$  - wektor sił poziomych.

Wykorzystując powyższe wzory Rutenberg w [70] przedstawił sposób uproszczonej analizy drugiego rzędu dla niesymetrycznych konstrukcji przestrzennych.

Podobny sposób rozwiązania proponuje Iłków w [26, 27]. Opierając się na metodzie obciążenia początkowego [39], przemieszczenia

oblicza się iteracyjnie według wzorów:

$$\Delta^{(k+1)} = K^{-1} [ P^{(0)} - K_G(P^{(k)}) \cdot \Delta^{(k)} ] , \quad (4.50)$$

$$P^{(k+1)} = P^{(0)} - K_G(P^{(k)}) \cdot \Delta^{(k)} ,$$

$$\Delta^{(0)} = 0, \quad P^{(0)} - \text{dane obciążenie zewnętrzne,}$$

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie:  $\{\Delta_k\}$  - wektor przemieszczeń węzłów w k-tym kroku iteracji,

$[K]$  - macierz sztywności sprężystej,

$[K_G]$  - macierz sztywności geometrycznej o postaci [4, 27]

$$K_{G,r}^{(k)} = \frac{N_r^{(k)}}{h_r} \left\{ \begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{cc} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{array} & - \left[ \begin{array}{cc} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{array} \right] \end{array} \right\} - C \cdot C^T \quad (4.51)$$

gdzie:  $[I_3]$  - macierz jednostkowa 3x3,

$[0_3]$  - macierz zerowa 3x3,

$h_r$  - długość r-tego pręta,

$N_r^{(k)}$  - siła osiowa w pręcie r-tym w k-tej iteracji od obciążenia  $P^{(k)}$ ,

$C$  - wektor cosinusów kierunkowych.

Według autora niniejszej pracy proponowane metody są do siebie zbliżone i różnią się w zasadzie formalną stroną zapisu wzorów matematycznych.

Opierając się na wzorach (4.44) i (4.45) opracowany został program analizy statycznej ram płaskich z wprowadzeniem do procesu obliczeniowego uwzględnienia "efektu  $\Delta$ -P". Proces obliczeń można przedstawić za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{array}{l} \text{- pierwszy krok obliczeń:} \\ \text{- i-ty krok obliczeń:} \end{array} \quad \begin{array}{l} V_0 = K_0^{-1} \cdot H_0 , \\ V_i = K_0^{-1} \cdot H_{0i} , \end{array} \quad (4.52)$$



gdzie:

$$H_{0i} = H_0 + H_i,$$

$H_0$  - wektor obciążeń,

$H_i$  - wektor przyrostu obciążeń w  $i$ -tym kroku,

$H_{0i}$  - wektor całkowitych obciążeń w  $i$ -tym kroku.

Zbieżność procesu określa wzór:

$$V_i - V_{i-1} \leq \text{EPS} \quad (4.53)$$

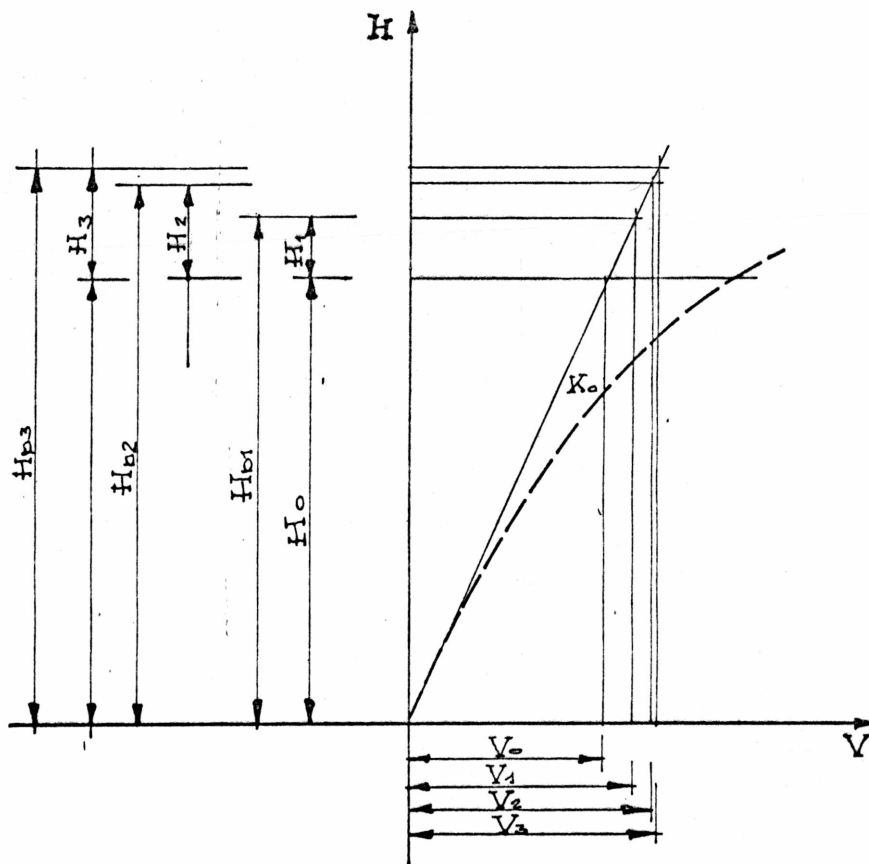
Przebieg zależności przemieszczenia od obciążenia przedstawiono na rysunku 4.15, a algorytm obliczeń na rysunku 4.11.

Dążąc do określenia wpływu "efektu  $\Delta$ -P" na rozkład i wartości sił wewnętrznych w konstrukcjach ramowych, przeprowadzono szereg obliczeń numerycznych, które ilustrują następujące przykłady obliczeniowe z rysunków 4.12 i 4.13. Badano zachowanie się wielopiętrowej ramy jednonawowej o podparciu sztywnym lub przegubowym, a w zależności od wartości obciążeń pionowych i poziomych oraz ilości pięter. Dla wszystkich prętów spełniony jest warunek  $\left(\frac{Nl^2}{EI}\right)^{1/2} \leq 1,0$ . Wyniki obliczeń zestawiono w tabelach Z.4.1. - 27 w Załączniku oraz w tabelach 4.5 - 4.8 tego rozdziału.

#### 4.2.4. Przybliżona metoda analizy II rzędu / modyfikacja metody $\Delta$ -P/

Dokładna analiza II rzędu, opisana w rozdziale 4.2.2., uwzględnia, oprócz wpływu opisanego w rozdziale 4.2.3 /"efekt  $\Delta$ -P"/, także wpływ sił osiowych na sztywność giętną prętów. Efekt ten można również uwzględnić w sposób przybliżony modyfikując wzory metody  $\Delta$ -P (4.44) i (4.45), przez wprowadzenie do nich współczynnika korekcyjnego, aproksymującego wspomniane efekty. Wówczas wzór (4.44) przyjmie postać:

$$T_i = \frac{\alpha \cdot P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (4.54)$$



Rys. 4.15. Przebieg zależności przemieszczenia od obciążenia dla metody  $\Delta$ -P.

gdzie:  $\alpha$  - współczynnik korekcyjny.

Dla konstrukcji obliczanych metodą naprężeń dopuszczalnych współczynnik ten jest stosunkiem granicy plastyczności do naprężeń dopuszczalnych. Taką propozycję przedstawiają Wood ii. w [82, 83], przyjmując, że  $\alpha = 1,7$ . W pracach [26, 27] Ilków ii., porównując wyniki obliczeń metodą  $\Delta$ -P i analizą II rzędu wg [64], wprowadzają dla metody wymiarowania wg stanów granicznych współczynnik  $\alpha = 1,21$ . Porównania te przeprowadzono dla pojedynczych skupów wspornikowych obciążonych na swobodnym końcu siłą pionową i poziomą [26].

Istnieje też szereg prac [45, 70], w których współczynnik korekcyjny obliczany jest indywidualnie dla słupów lub dla danego piętra ramy. Zauważono bowiem, że jest on najmniejszy (od 1,0 do 1,1) dla pięter najwyższych, największy zaś dla pierwszej kondygnacji (do 1,2). Takie podejście, uwzględniające wpływ zmian sztywności słupów na poszczególnych piętrach, wydaje się być bardziej uzasadnione. Oczywiście w przypadkach, gdy wpływy wynikające z uwzględnienia "efektu  $\Delta-P$ " są istotniejsze niż wpływ sił osiowych na sztywność giętną, to znaczy, gdy  $\left(\frac{N \cdot l^2}{EJ}\right)^{1/2} < 1$ , wystarcza tylko wprowadzenie do analizy statycznej "efektu  $\Delta-P$ " [82, 83].

Jak wspomniano, dokładne określenie wpływu sił osiowych na sztywność giętną prętów można otrzymać za pomocą tzw. funkcji stateczności. W metodzie przybliżonej sposób ten jest mało efektywny, gdyż nie ma możliwości bezpośredniego wyseparowania współczynników nieliniowej macierzy sztywności [23, 70, 80]. Wprowadzenie macierzy sztywności geometrycznej, jakkolwiek mniej dokładnie niż nieliniowa macierz sztywności, pozwala na proste określenie dodatkowych odkształceń w słupach, wynikających ze zmniejszenia sztywności giętej prętów w wyniku działania ściskających sił osiowych. Opierając się na rys. 4.16 a, macierz sztywności geometrycznej przyjmuje postać:

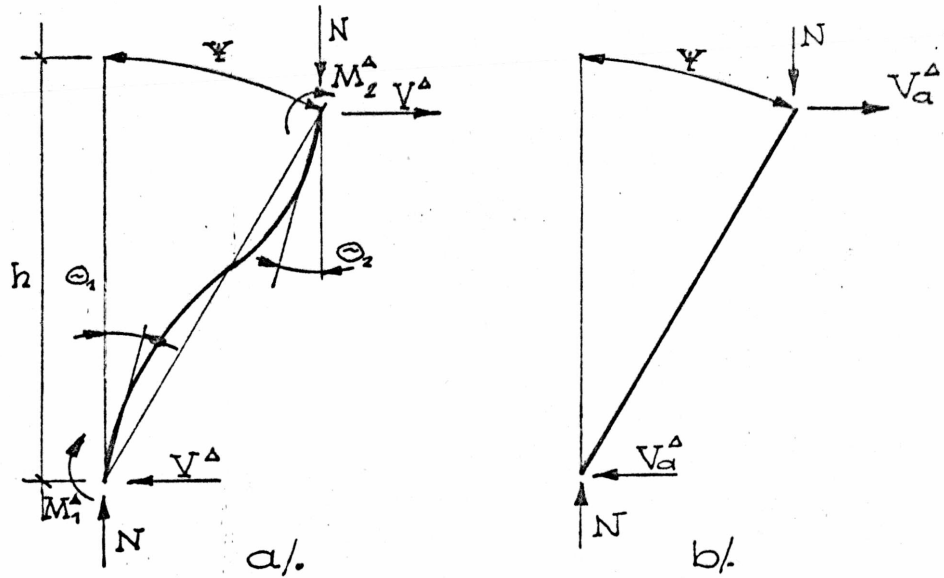
$$\begin{bmatrix} V^{\Delta} \cdot h \\ M_2^{\Delta} \\ M_1^{\Delta} \end{bmatrix} = \frac{N \cdot h}{30} \begin{bmatrix} 36 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ \theta_2 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

gdzie:  $\theta_1, \theta_2$  - całkowite obroty końców pręta obliczone dla analizy I rzędu,

$V^{\Delta}, M_1^{\Delta}, M_2^{\Delta}$  - siła poprzeczna i momenty wynikające z poziomego przemieszczenia końców słupa,

$N$  - siła osiowa w pręcie

$h$  - wysokość piętra



Rys. 4.16 /a/ Odkształcona postać słupa, /b/ aproksymacja linią prostą.

Porównując pracę wspomnianych dodatkowych sił na uogólnionych przemieszczeniach końców pręta otrzymano wzór na współczynnik w zależności od piętra ramy:

Praca sił dla rysunku 4.16a wynosi:

$$W_1 = M_1^{\Delta} \cdot \theta_1 + M_2^{\Delta} \cdot \theta_2 + V^{\Delta} \cdot \psi \cdot h, \quad (4.56)$$

a dla sił z rysunku 4.16b:

$$W_2 = V_a^{\Delta} \cdot \psi \cdot h \quad (4.57)$$

Wykorzystując zależność opisaną wzorem (4.56) :

$$V^{\Delta} \cdot h = \frac{Nh}{30} (36 \cdot \psi - 3\theta_2 - 3\theta_1),$$

$$M_2^\Delta = \frac{Nh}{30} \cdot (-3 \cdot \Psi + 4 \cdot \theta_2 - 3 \cdot \theta_1), \quad (4.58)$$

$$M_1^\Delta = \frac{Nh}{30} \cdot (-3 \cdot \Psi - \theta_2 + 4 \cdot \theta_1),$$

otrzymano:

$$\begin{aligned} N_1 &= Ph \cdot (-0,1 \cdot \Psi - \frac{1}{30} \theta_2 + \frac{4}{30} \theta_1) \cdot \theta_1 + Ph \cdot (-0,1 \cdot \Psi + \\ &+ \frac{4}{30} \theta_2 - \frac{1}{30} \theta_1) \cdot \theta_2 + Ph \cdot (1,2 \cdot \Psi - 0,1 \cdot \theta_2 - 0,1 \cdot \theta_1) \cdot \Psi = \\ &= Ph \cdot (-0,1 \cdot \Psi \cdot \theta_1 - \frac{1}{30} \theta_1 \theta_2 + \frac{4}{30} \theta_1^2 - 0,1 \cdot \Psi \cdot \theta_2 + \frac{4}{30} \cdot \\ &\theta_2^2 - \frac{1}{30} \theta_1 \cdot \theta_2 + 1,2 \cdot \Psi^2 - 0,1 \cdot \theta_2 \cdot \Psi - 0,1 \cdot \theta_1 \cdot \Psi) = \\ &= Ph \cdot [-0,2 \cdot (\theta_1 + \theta_2) \cdot \Psi + \frac{4}{30} (\theta_1^2 + \theta_2^2 - 0,5 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2) + 1,2 \cdot \\ &\cdot \Psi^2] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Podstawiając  $\bar{\theta}_1 = \theta_1/\Psi$  i  $\bar{\theta}_2 = \theta_2/\Psi$  otrzymano:

$$\begin{aligned} N_1 &= Ph \Psi^2 [1 + 0,2 - 0,2 \cdot (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) - \frac{4}{30} (\bar{\theta}_2^2 + \bar{\theta}_1^2 - 0,5 \bar{\theta}_1 \cdot \\ &\cdot \bar{\theta}_2)] = Ph \Psi^2 \left\{ 1 + 0,2 \cdot [1 - (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) - \frac{2}{3} (\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1 - 0,5 \cdot \bar{\theta}_1 \cdot \right. \\ &\cdot \bar{\theta}_2)] \left. \right\} = v_o^\Delta \cdot h \cdot \Psi \left\{ 1 + 0,2 [1 - (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) - \frac{2}{3} (\theta_2 + \theta_1) - 0,5 \cdot \right. \\ &\cdot \theta_1 \cdot \theta_2] \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Porównując wartości prac w obu przypadkach otrzymano:

$$v_a^\Delta \cdot \Psi \cdot h = v_o^\Delta \cdot \Psi \cdot h \cdot \alpha, \quad (4.61)$$

a stąd:

$$\frac{v_a}{v_o} = \alpha = 1 + 0,2 [1 - (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) - \frac{2}{3} (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) - 0,5 \cdot \bar{\theta}_1 \cdot \bar{\theta}_2] \quad (4.62)$$

Współczynnik  $\alpha_i$  obliczany jest w niniejszej pracy dla każdego piętra ramy, jako wartość średnia współczynników  $\alpha_j$  dla  $j$  słupów

i-tego piętra. Sposób ten wynika z metody obliczania dodatkowych fikcyjnych obciążeń poziomych metody  $\Delta -P$ , przedstawionej w rozdziale 4.2.3. W celu porównania wyników analizy statycznej wg teorii II rzędu przeprowadzono, dla metod przedstawionych w punktach 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, szereg przykładowych obliczeń, których wyniki zestawiono w tabelach Z.4.1 - 27 Załącznika, oraz w tabelach 4.5 - 4.8 niniejszego rozdziału.

### 4.3. Podsumowanie i uwagi

#### 4.3.1. Ogólna analiza wyników obliczeń

##### A. Efekt $\Delta -P$ według 4.2.3, 4.2.4.

- 1<sup>o</sup> wzrost wartości sił osiowych ściskających w stosunku do AL w słupach po stronie zawietrznej oraz zmniejszenie wartości sił osiowych w słupach po stronie nawietrznej, gdy są one ściskające i ich wzrost, gdy są rozciągające, na przykład tab. 4.7, kol. 4, 10 / dla ZADP /:  
słup S11  $\Delta N = - 23,79 \%$ , siła ściskająca  
słup S14  $\Delta N = + 25,77 \%$ , siła rozciągająca  
słup S12  $\Delta N = + 0,86 \%$ , siła ściskająca  
słup S15  $\Delta N = + 0,83 \%$ , siła ściskająca:
- 2<sup>o</sup> wzrost wartości momentów zginających w stosunku do AL we wszystkich prętach, największy dla prętów niższych kondygnacji, na przykład tab. 4.7, kol. 4 /dla ZADP/:  
rygiel R10  $\Delta M = + 1,69 \%$   
rygiel R13  $\Delta M = + 1,25 \%$   
słup S11  $\Delta M = + 1,99 \%$   
słup S12  $\Delta M = + 1,63 \%$ ,
- 3<sup>o</sup> wpływ "efektu  $\Delta -P$ " jest tym większy, im większym obciążeniom poziomym i pionowym poddawana jest konstrukcja. Na przykład dla ramy z przykładu II otrzymano /tab. 4.7, kol. 3, 4, 9, 10 /:

Tabela 4.5.

Przykład I

Przykład Ia

Metoda obliczeń		Względna różnica w wartościach sił wewnętrznych [6]													
		ADP AL		ZADP AL		ANMS ZADP		ANMS AL		ADP AL		ZADP AL		ANMS ZADP	
Siły wewnętrzne		Schemat obciążeń													
		Pręt				Schemat obciążeń				Schemat obciążeń					
		I	III	I	IV	IV	IV	I	IV	I	IV	IV	IV		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
ΔN	R4	+1,42	+0,97	+1,42	+0,97	-1,54	-0,58	+13,33	+8,76	+11,67	+7,83	-15,46	+6,68		
	ΔT	+0,72	+1,10	+0,48	+0,66	0	+1,03	+2,40	+3,72	+2,16	+3,26	-1,84	+3,03		
	ΔM	+0,60	+1,03	+0,60	+0,92	0	+0,92	+2,07	+3,53	+1,86	+3,11	-1,12	+2,99		
S5		-0,16	-0,80	-0,16	-0,72	0	-0,72	-1,15	-8,96	-1,05	-7,92	+0,52	-7,44		
		+0,98	+1,26	+0,98	+1,15	-0,72	+0,42	+3,62	+4,68	+3,26	+4,09	-1,03	+3,02		
		+0,95	+1,14	+0,83	+1,04	-0,13	+0,92	+3,55	+4,62	+3,19	+4,09	-0,09	+3,99		
S6		+0,11	+0,33	+0,11	+0,30	0	+0,30	+0,58	+1,44	+0,50	+1,23	-0,08	+1,20		
		+0,55	+0,93	+0,55	+0,85	-1,15	-0,31	+2,11	+3,84	+1,80	+3,35	-5,69	-2,53		
		+0,38	+0,95	+0,38	+0,89	+0,05	+0,68	+2,11	+3,86	+1,90	+3,42	-0,40	+3,01		

Tabela 4.6.

Przykład I

Przykład Ia

Metoda obliczeń	Względna różnica w wartościach sił wewnętrznych [%]															
	ADP AL		ZADP AL		ANMS ZADP		ANMS AL		ADP AL		ZADP AL		ANMS ZADP		ANMS AL	
	Schemat obciążeń															
Napreżenia	Pręt	Schemat obciążeń				Schemat obciążeń										
		I 1	IV 2	I 3	IV 4	IV 5	IV 6	I 7	IV 8	I 9	IV 10	IV 11	IV 12			
$\Delta\delta_1$	R4	+0,42	+0,97	+0,42	+0,90	-0,07	+0,82	+2,12	+3,58	+1,88	+3,18	-0,28	+2,89			
$\Delta\delta_2$		+0,44	+1,01	+0,44	+0,93	-0,08	+0,86	+2,20	+3,60	+1,96	+3,18	-0,29	+2,89			
$\Delta\delta_w$		+0,42	+1,05	+0,42	+1,05	-	-	+2,21	+3,68	+1,96	+3,27	-	-			
$\Delta\tau_2$		+1,41	+1,28	+1,41	+1,28	0	+1,28	+2,10	+2,10	+3,53	+2,10	+0,21	+3,09			
$\Delta\tau_3$		+0,94	+1,15	+0,94	+1,15	0	+1,11	+2,35	+3,70	+2,35	+3,26	-0,29	+2,96			
	S5	+0,65	+0,85	+0,43	+0,78	-0,08	0,70	+2,57	+4,03	+2,25	+3,55	-0,05	+3,50			
		+0,44	+0,88	+0,44	+0,80	-0,08	-0,71	+2,65	+3,96	+2,32	+3,52	-0,05	+3,47			
		+0,28	+0,52	+0,28	+0,52	-	-	+1,71	+3,10	+1,46	+2,68	-	-			
		0	+1,22	0	+1,22	-0,60	+0,61	+4,26	+5,11	+4,26	+4,55	-1,09	+3,41			
		+1,92	+1,22	+1,92	+1,22	-0,31	+0,41	+2,82	+4,56	+2,82	+4,18	-1,09	+3,04			
	S6	+0,40	+0,80	+0,40	+0,75	-0,17	+0,57	+1,71	+3,39	+1,53	+2,98	-0,33	+2,65			
		+0,42	+0,77	+0,42	+0,71	-0,12	+0,59	+1,67	+3,35	+1,49	+2,96	-0,37	+2,62			
		+0,36	+0,67	+0,36	+0,59	-	-	+1,46	+2,46	+2,91	+1,32	+2,56	-			
		0	+0,90	0	+0,90	-0,89	0	+1,22	+3,81	+1,22	+3,33	-5,53	-2,24			
		+0,71	+0,91	+0,71	+0,91	-1,20	-0,30	+2,48	+3,83	+2,48	+3,51	-5,56	-2,24			



Tabela 4.7

Przykład II

Siły wewnętrzne	Metoda obliczeń	Względna różnica w wartościach sił wewnętrznych [%]												
		ADP		ZADP		ANMS		ADP		ZADP		ANMS		
		AL	AL	AL	AL	ZADP	AL	AL	AL	ZADP	ZADP	AL	AL	
	Pręt	Schemat obciążeń						Pręt	Schemat obciążeń					
		I	IV	I	IV	IV	IV		I	IV	I	IV	IV	IV
		1	2	3	4	5	6		7	8	9	10	11	12
ΔN	R10	+0,87	+1,33	+0,87	+1,16	-3,61	-2,49	R13	-1,78	-2,90	-1,33	-2,38	+4,56	+1,87
ΔT		+1,35	+2,01	+1,14	+1,70	0	+1,70		+0,95	+1,46	+0,81	+1,29	-0,02	+1,26
ΔM		+1,26	+2,00	+1,07	+1,69	0	+1,68		+0,93	+1,43	+0,80	+1,26	-0,03	+1,23
	S11	-1,24	-28,33	-1,04	-23,79	-0,20	-23,94	S14	+1,50	+30,35	+1,28	+25,77	0	+25,76
		+1,90	+2,26	+1,59	+1,93	-0,14	+1,79		+0,77	+0,93	+0,66	+0,90	-0,04	+0,93
		+1,89	+2,37	+1,62	+1,99	-0,02	+1,98		+0,80	+1,15	+0,75	+1,06	-0,02	+1,04
	S12	+0,45	+1,01	+0,38	+0,86	0	+0,86	S15	+0,45	+0,99	+0,38	+0,83	0	+0,84
		+0,98	+1,79	+0,89	+1,49	-2,89	-1,45		+0,45	+0,87	+0,45	+0,84	-1,64	-0,81
		+1,13	+1,94	+0,97	+1,63	-0,16	+1,47		+0,72	+1,12	+0,66	+1,05	-0,34	+0,50

Tabela 4.8.

Przykład II

Naprężenia	Metoda obliczeń	Względna różnica w wartościach naprężeń [%]													
		Pręt						Pręt							
		ADP AL		ZADP AL		ANMS ZADP		ANMS AL		ADP AL		ZADP AL		ANMS ZADP	
Pręt	Schemat obciążeń						Schemat obciążeń								
	I 1	IV 2	I 3	IV 4	IV 5	IV 6	I 7	IV 8	I 9	IV 10	IV 11	IV 12			
$\Delta \delta_1$	R10	+1,23	+1,98	+1,01	+1,69	-0,04	+1,64	R13	+0,77	+1,33	+0,77	+1,18	+0,05	+1,23	
$\Delta \delta_2$		+1,15	+2,00	+1,04	+1,65	-0,04	+1,61		+0,80	+1,33	+0,80	+1,22	+0,05	+1,27	
$\Delta \delta_w$		+1,38	+1,99	+1,15	+1,64	-	-		+0,79	+1,21	+0,79	+1,11	-	-	
$\Delta \tau_2$		+1,24	+2,10	+1,24	+1,80	0	+1,80		+0,83	+1,39	+0,83	+1,24	0	+1,24	
$\Delta \tau_3$		+1,46	+1,08	+1,17	+1,69	0	+1,69		+0,90	+0,33	+0,90	+1,33	0	+1,33	
	S11	+0,75	+1,50	+0,75	+1,25	0	+1,25	S14	+0,20	+0,48	+0,20	+0,48	0	+0,48	
		+0,77	+1,47	+0,77	+1,30	-0,09	+1,21		+0,21	+0,40	+0,21	+0,40	0	+0,40	
		+0,28	+0,34	+0,28	+0,34	-	-		+0,33	0	+0,33	0	0	0	
		+1,60	+2,13	+1,60	+1,90	-0,23	+1,66		+1,20	+0,97	+0,60	+0,97	0	+0,97	
		+1,87	+2,43	+1,26	+2,05	-0,18	+1,87		+1,04	+1,34	+1,04	+1,34	0	+1,01	
	S12	+0,85	+1,59	+0,75	+1,33	-0,08	+1,25	+0,59	+1,05	+0,59	+0,94	-0,10	+0,73		
		+0,86	+1,54	+0,67	+1,32	-0,09	+1,23	+0,61	+1,02	+0,49	+0,92	-0,16	+0,75		
		+0,75	+1,37	+0,62	+1,19	-	-	+0,48	+1,05	+0,32	+0,90	-	-		
		+0,90	+1,93	+0,90	+1,54	-2,85	-1,35	+0,40	+0,84	+0,40	+0,84	-1,68	-0,85		
		+0,11	+1,82	+0,11	+1,57	-2,98	-1,51	+0,70	+0,87	+0,70	+0,73	-1,59	-0,87		

rygiel R10  $\Delta N = + 0,87 \%$ ,  $\Delta M = + 1,07$  dla I schematu obciążeń  
i odpowiednio  $+ 1,16 \%$  i  $+ 1,69 \%$  dla IV schematu,

rygiel R13  $\Delta N = - 1,33 \%$ ,  $\Delta M = + 0,80 \%$  dla I schematu obciążeń  
i odpowiednio  $- 2,38 \%$  i  $+ 1,26 \%$  dla IV schematu,

maksymalne różnice wystąpiły w słupach nawietrznych:

słup S11  $\Delta N = - 1,04 \%$ ,  $\Delta M = + 1,62 \%$ ,  $\Delta T = 1,59 \%$  dla I sche-  
matu i odpowiednio  $- 23,79 \%$ ,  $+ 1,99$ ,  $+ 1,93 \%$  dla  
IV schematu,

słup S14  $\Delta N = + 1,28 \%$ ,  $\Delta M = + 0,75 \%$ ,  $\Delta T = + 0,66 \%$  dla I  
schematu i odpowiednio  $+ 25,77 \%$ ,  $+ 1,06 \%$ ,  $+ 0,90 \%$   
dla IV schematu,

4<sup>o</sup> w ryglach w przypadku analizy liniowej wzrost obciążeń piono-  
wych/schematy I, II tab. 4.4/ nie spowodował różnic w wartościach  
sił wewnętrznych / R10, R13, tab. Z.4.24, Z.4.26/, natomiast  
dla analizy metodą  $\Delta -P$  wystąpiły niewielkie różnice wynoszące  
na przykład dla rygla R13 / tab. Z.4.24 - 27/:  $\Delta N = 0,63 \%$ ,  
 $\Delta M = + 0,38 \%$  dla wzrostu tylko obciążeń pionowych i  $\Delta N =$   
 $- 0,86 \%$ ,  $\Delta M = + 0,40 \%$  dla równoczesnego wzrostu obu rodza-  
jów obciążeń;

również dla słupów wzrost wartości momentów zginających obli-  
czanych metodą  $\Delta -P$  jest większy niż dla AL i wynosi maksymal-  
nie dla słupa S11 /tab. Z.4.24 - 27 /  $\Delta M = + 0,69 \%$  dla wzro-  
stu obciążeń pionowych i  $\Delta M = + 0,63 \%$  dla wzrostu wartości  
obu obciążeń,

5<sup>o</sup> wpływ "efektu  $\Delta -P$ " jest większy dla konstrukcji smuklejszych.  
Dla ramy z przykładu I otrzymano /tab. 4.5/ następujące warto-  
ści:  $\max \Delta N = + 0,97 \%$  /R4, kol. 4/  $\max \Delta M = + 1,04 \%$  /S5,  
kol. 4/, a dla ramy z przykładu II /tab. 4.7/:

$\max \Delta N = - 2,38 \%$  /R13, kol. 10/,  $\max \Delta M = + 1,99 \%$  /S11, kol. 4/  
/oprócz przypadku skrajnego dla słupa S14, kol. 10  $N = + 25,77$   
%/,

6<sup>o</sup> wpływ "efektu  $\Delta -P$ " jest większy dla konstrukcji o podparciu

przegubowym niż sztywnym. Dla ramy z przykładu I /tab. 4.5/  
otrzymano dla skupów:

$$\max \Delta N = - 0,72 \% /S5, \text{ kol.4/}, \max \Delta M = + 1,04 \% /S5, \text{ kol.4/},$$

a dla przykładu Ia /tab. 4.5/:

$$\max \Delta N = - 7,92 \% /S5, \text{ kol.1.0/}, \max \Delta M = + 4,09 \% /S5, \text{ kol.1.0/}$$

7° wpływ efektu  $\Delta$ -P" jest również widoczny we wzroście naprężeń, co ma ważne znaczenie w procesie projektowania elementów konstrukcji. Dla ramy z przykładu II otrzymano maksymalne zwiększenie wartości naprężeń normalnych o 1,69 % / tab. 4,8, kol. 4., R10/; dla A1 naprężenia w R10 /tab. Z.4.27/ wyniosły  $\bar{\sigma} = 237.3 \text{ MPa}$  / większe od  $R = 235 \text{ MPa}$  o 0,97%, a dla ZADP /tab. Z.4.27/  $\bar{\sigma} = 241.3 \text{ MPa}$  / większe od  $R = 235 \text{ MPa}$  o 2,68 %/,

8° największy wzrost wartości naprężeń normalnych w stosunku do AL zaobserwowano w ryglach i wyniósł on w przykładzie II /tab. 4.8, R10, kol.4/  $\max \Delta \bar{\sigma} = + 1,69 \%$ , gdy dla skupów  $\max \Delta \bar{\sigma} = + 1,33 \% /S12, \text{ kol. 4/}$ ,

9° porównując różnice w wartościach sił wewnętrznych i naprężeń dla analizy ADP i ZADP zauważono, że w tej drugiej metodzie, w stosunku do AL, otrzymano mniejsze wartości różnic niż dla ADP; na przykład  $\max \Delta M$  wyniosły, odpowiednio dla ADP i ZADP, + 2,37 % i + 1,99 % /tab. 4,7, kol. 2 i 4/, podobnie dla naprężeń otrzymano  $\max \Delta \bar{\sigma} = + 1,98 \%$  i + 1,69 % /tab. 4.8, kol.2 i 4/;

#### B. Analiza II rzędu wg 4.2.2.

10° w skupach zawietrznych ściskanych zaobserwowano wzrost wartości sił osiowych w stosunku do AL, mniejszy niż w przypadku ADP i zbliżony w przypadku ZADP, o maksymalnej wartości  $\Delta N = + 0,86 \% / \text{tab. 4.7, kol. 4., S12/}$ ; podobny efekt zauważono w przypadku momentów zginających, na przykład dla S11  $\Delta M = + 2,37 \%$  dla ADP, + 1,99 % dla ZADP i + 1,98 % dla ANMS

/tab. 4.7, kol. 2, 4, 6/;

- 11<sup>o</sup> w skupach nawietrznych ściskanych zaobserwowano zmniejszenie wartości sił osiowych, a w skupach rozciąganych zwiększenie wartości podobnie, jak w metodzie ADP /ZADP/; podobny efekt zaobserwowano dla momentów zginających, z tym, że dla skupów ściskanych różnice między ZADP i ANMS są większe niż w przypadku skupów rozciąganych;
- 12<sup>o</sup> największe różnice w wartościach sił wewnętrznych /sił osiowych/ pomiędzy ANMS i ZADP zaobserwowano w ryglach: na przykład dla R12 /tab. 4.7, kol. 11/ różnica ta wyniosła + 4,36 %;
- 13<sup>o</sup> w ryglach efekty spowodowane przez wprowadzenie ANMS były przeciwne niż wywołane przez "efekt  $\Delta -P$ " /ADP, ZADP/; na przykład dla rygla R10 /tab. 4.7, kol. 4,6/ dla ZADP otrzymano  $\Delta N = + 1,16 \%$ , a dla ANMS  $\Delta N = - 2,49 \%$ , dla rygla R13 /kol. 10,12/  $\Delta N = - 2,38 \%$  i  $+ 1,87 \%$ ;

#### 4.3.2. Podsumowanie

Uwzględnienie w analizie statycznej ram "efektu  $\Delta -P$ " i wpływu sił osiowych na sztywność giętą prętów przejawiało się zarówno w postaci jakościowych, jak i ilościowych zmian w rozkładzie i wartościach sił wewnętrznych w prętach badanych konstrukcji. Wszystkie opisane w rozdziale 4.3.1 zjawiska i efekty mogą mieć istotne znaczenie, tak w procesie teoretycznych badań zachowania się konstrukcji pod obciążeniem, jak i w praktyce projektowej. Należy jednak z pewną ostrożnością formułować wnioski z otrzymanych wyników i nie odnosić bezkrytycznie do wszystkich rodzajów konstrukcji ramowych. Z drugiej strony trzeba podkreślić, że wspomniane efekty niewątpliwie będą miały znaczenie dla konstrukcji wysokich, o dużej smukłości, poddanych działaniu dużych obciążeń poziomych i pionowych.

W obliczanych konstrukcjach wartość wyrażenia  $(Nl^2/EJ)^{1/2}$  była dla wszystkich prętów mniejsza od 1, co według stwierdzeń literaturowych [53], nie powoduje konieczności uwzględniania wpływu sił osiowych na sztywność prętów. Jednak w pracy dążono do jak naj-

większego zbliżenia modelu obliczeniowego do rzeczywistej pracy obciążonej konstrukcji i pominięto to ograniczenie, wprowadzając modyfikację elementów lokalnych macierzy sztywności w przypadku ANMS lub współczynnik korekcyjny w przypadku ZADP, niezależnie od wartości wyrażenia  $(N_1^2/EJ)^{1/2}$ . Ponieważ w efekcie końcowym różnice pomiędzy naprężeniami obliczonymi dla sił otrzymanych według proponowanych metod analizy II rzędu, a dopuszczalnymi były większe od określanych w normie [67], postępowanie takie wydaje się uzasadnione.

Zaproponowane metody obliczeń okazały się efektywnymi narzędziami rozwiązywania zagadnień analizy statycznej ram płaskich wg teorii II rzędu. Dotyczy to zwłaszcza zmodyfikowanej metody  $\Delta - P$ , w której wprowadzony współczynnik korekcyjny, zależny od piętra rami, pozwala na uwzględnienie w sposób przybliżony wpływu sił osiowych na sztywność giętną skupów. Metoda przedstawiona w rozdziale 4.2.4. okazała się dokładniejszym przybliżeniem pełnej analizy II rzędu, wprowadzającej modyfikacje elementów lokalnych macierzy sztywności funkcjami stateczności, niż metoda wprowadzająca stały współczynnik korekcyjny dla wszystkich pięter rami. Wskazuje na to porównanie wyników obliczeń, przeprowadzonych wspomnianymi metodami, przedstawione w tabelach 4.5 - 4.8 niniejszego rozdziału oraz w tabelach Z.3.4 - Z.3.13 w Załączniku.

Istotną zaletą wprowadzonych przybliżonych metod analizy II rzędu /ADP, ZADP/, opierających się na stałej, liniowej macierzy sztywności, jest znaczne ograniczenie czasu obliczeń i pamięci operacyjnej komputera, w stosunku do metod wykorzystujących nieliniową macierz sztywności. Opracowanie programów nie tylko na duże maszyny cyfrowe /ODRA 1305/, ale również na mikrokomputery /Sinclair ZX-81/, pozwala na ich szerokie zastosowanie zarówno w ośrodkach dysponujących dobrym zapleczem maszyn obliczeniowych, jak i w indywidualnej pracy projektowej inżyniera wyposażonego w tzw. komputery osobiste.

## 5. METODA NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA ZADANIA OPTIMALIZACJI

### 5.1. Wprowadzenie

Jak wspomniano w rozdziale 2. optymalizacja konstrukcji jest ściśle związana z numerycznymi metodami rozwiązywania matematycznego problemu optymalizacji. Dlatego też wybór metody programowania ma duże znaczenie, jeżeli chodzi o dokładne odwzorowanie modelu matematycznego w rzeczywistą, projektowaną konstrukcję. Opis technik rozwiązywania zadania optymalizacji, zarówno analitycznych, jak i numerycznych, podano między innymi w pracach [11, 21, 37, 42, 54, 75]. Do podstawowych technik należą metody programowania liniowego, nieliniowego, geometrycznego, metody dynamiczne oraz dekompozycyjne. W niniejszej pracy, ze względu na charakter modelu matematycznego, wybrano metody wiążące techniki programowania nieliniowego z ograniczeniami, programowania dyskretnego oraz metodę dekompozycji.

Zadania programowania nieliniowego pojawiają się wówczas, gdy w równaniach opisujących ograniczenia lub funkcję celu, zależności pomiędzy zmiennymi decyzyjnymi występują w postaci iloczynów, ilorazów, potęg lub ich kombinacji. Opis metod analitycznych programowania nieliniowego zawierają między innymi prace [11, 54], natomiast przykłady optymalizacji z wykorzystaniem metod numerycznych podano między innymi w pracach [13, 18, 33, 59].

W przypadku projektowania optymalnych konstrukcji złożonych z dużej liczby prętów, często wprowadza się do obliczeń metody dekompozycyjne. Polegają one na rozbiciu pierwotnego zadania na szereg prostszych, odpowiednio ze sobą powiązanych zadań optymalizacji, w których występuje mniejsza liczba zmiennych decyzyjnych. Podproblemy mogą być niezależne względem siebie w sensie doboru zmiennych decyzyjnych, funkcji celu i kryterium optymalności. Przykłady optymalizacji opartej na dekompozycji zawierają prace [10, 26, 37, 58, 68, 69, 78].

Dążąc do jak największego zbliżenia modelu matematycznego do

rzeczywistej konstrukcji przyjęto w niniejszej pracy zmienne decyzyjne o wartościach dyskretnych. Metody numerycznego rozwiązywania zadań optymalizacji dyskretnej podano między innymi w pracach [21, 42], natomiast przykłady optymalizacji konstrukcji prętowych z dyskretnym widmem zmiennych decyzyjnych zawierają prace [3, 18, 19, 57].

W niniejszej pracy autor wykorzystał technikę optymalizacyjną opartą na podziale konstrukcji na substruktury oraz metodę programowania dyskretnego opartą na tak zwanej technice "backtrack" [24].

## 5.2. Rozwiązanie zadania optymalizacji z wykorzystaniem metody "backtrack"

Podstawy teoretyczne techniki "backtrack" podał Walker [81], a za nim Golomb [24] oraz Lawler [47] i Bitner [8]. Ocenę efektywności programów metody "backtrack" podał w pracy [41] Knuth. Przykłady wykorzystania metody "backtrack" w projektowaniu spawanych blachownic dwuteowych, z założeniem minimalizacji kosztu elementu, przedstawiono w pracach Farkasa i Szabo [13] oraz Annamalai [3].

Metoda "backtrack" jest kombinatoryczną metodą programowania dyskretnego, możliwą do zastosowania w przypadku nieliniowej funkcji celu z ograniczeniami. Metoda ta jest jednak efektywna w przypadku niewielkiej liczby zmiennych decyzyjnych [10]. Wprowadzenie w niniejszej pracy rozkładu konstrukcji na podstruktury (pręty), pozwala na wykorzystanie w pełni walorów tej metody, gdyż maksymalna liczba zmiennych decyzyjnych dla przekroju dwuteowego wynosi 6, a dla bisymetrycznego 4. Metoda "backtrack" wykorzystuje w poszukiwaniu wektora zmiennych decyzyjnych, minimalizującego wartość funkcji celu, zmodyfikowaną technikę systematycznego przeszukiwania. Dla każdej zmiennej prowadzone jest czę-



ściowe przeszukiwanie obszaru jej zmienności i gdy wszystkie możliwości zostają wyczerpane, następuje powrót do poprzedniej zmiennej i kolejne częściowe przeszukiwanie. W projektowaniu optymalnych blachownic spawanych redukcja liczby przeszukań następuje w wyniku wykorzystania faktu, że wartość funkcji celu osiąga maksimum dla maksymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. Dlatego poszukiwanie optymalnego wektora zmiennych decyzyjnych odbywa się na drodze zmniejszania wartości jego składników.

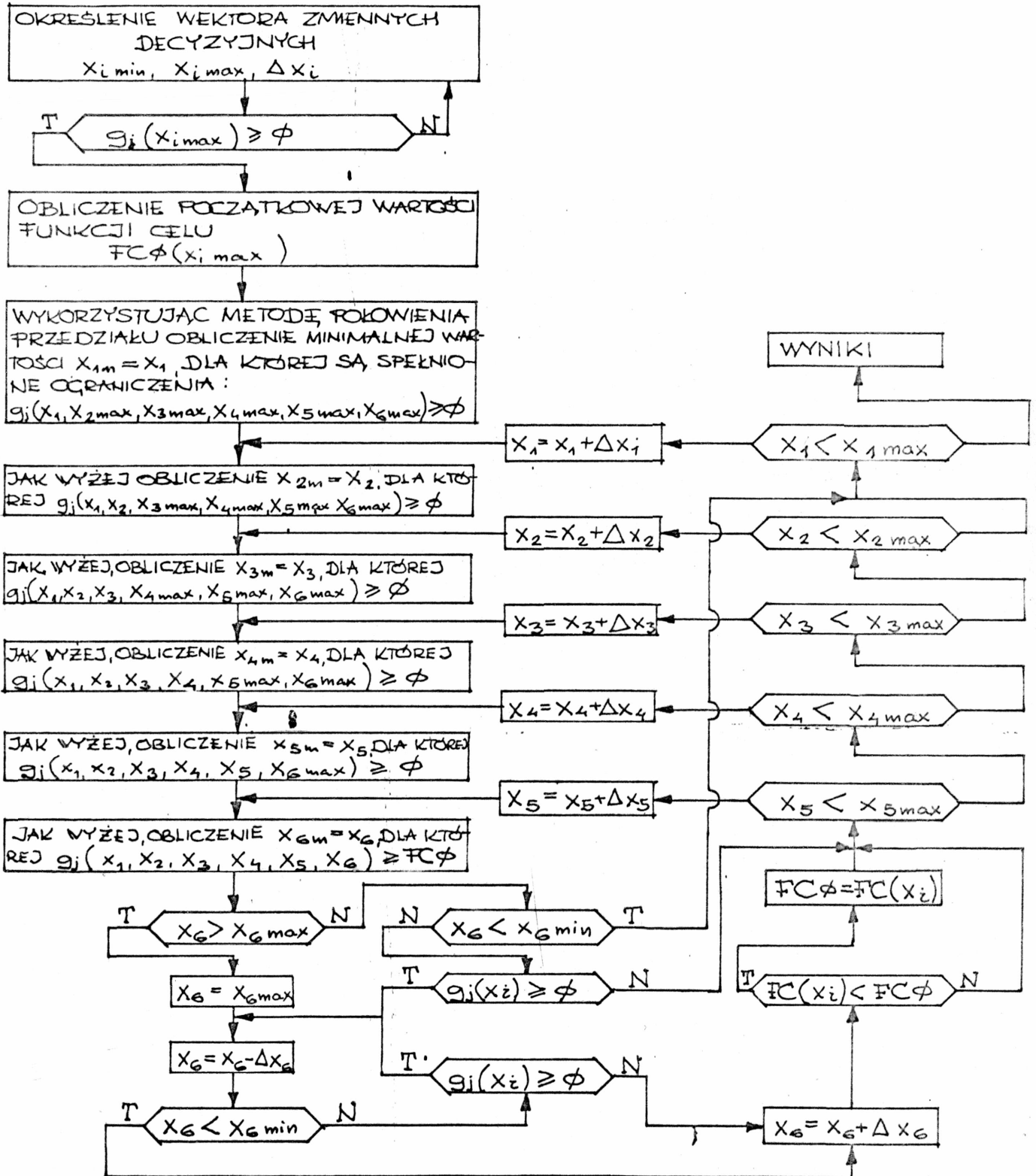
Przyjmując jako funkcję celu koszt konstrukcji lub objętość zużytego materiału, zgodnie z modelem matematycznym / rozdział 3/, poszukiwany jest wektor zmiennych decyzyjnych  $\{x\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ , dla którego wartość funkcji celu osiąga minimum, a ograniczenia projektowe i związane z zachowaniem się konstrukcji są spełnione. Wektor wartości zmiennych decyzyjnych określają maksymalne  $X_{imax}$  i minimalne  $X_{imin}$  ich wartości oraz stałe przyrosty  $X_i$ ; mogą być one oczywiście różne dla każdej zmiennej decyzyjnej. Algorytm metody "backtrack" poszukiwania wektora zmiennych decyzyjnych dla czterech wielkości opisujących przekrój, pokazano na rysunku 5.1.

Natomiast na rys. 5.2. przedstawiono algorytm metody przeszukiwania obszaru zawierającego zmienne decyzyjne.

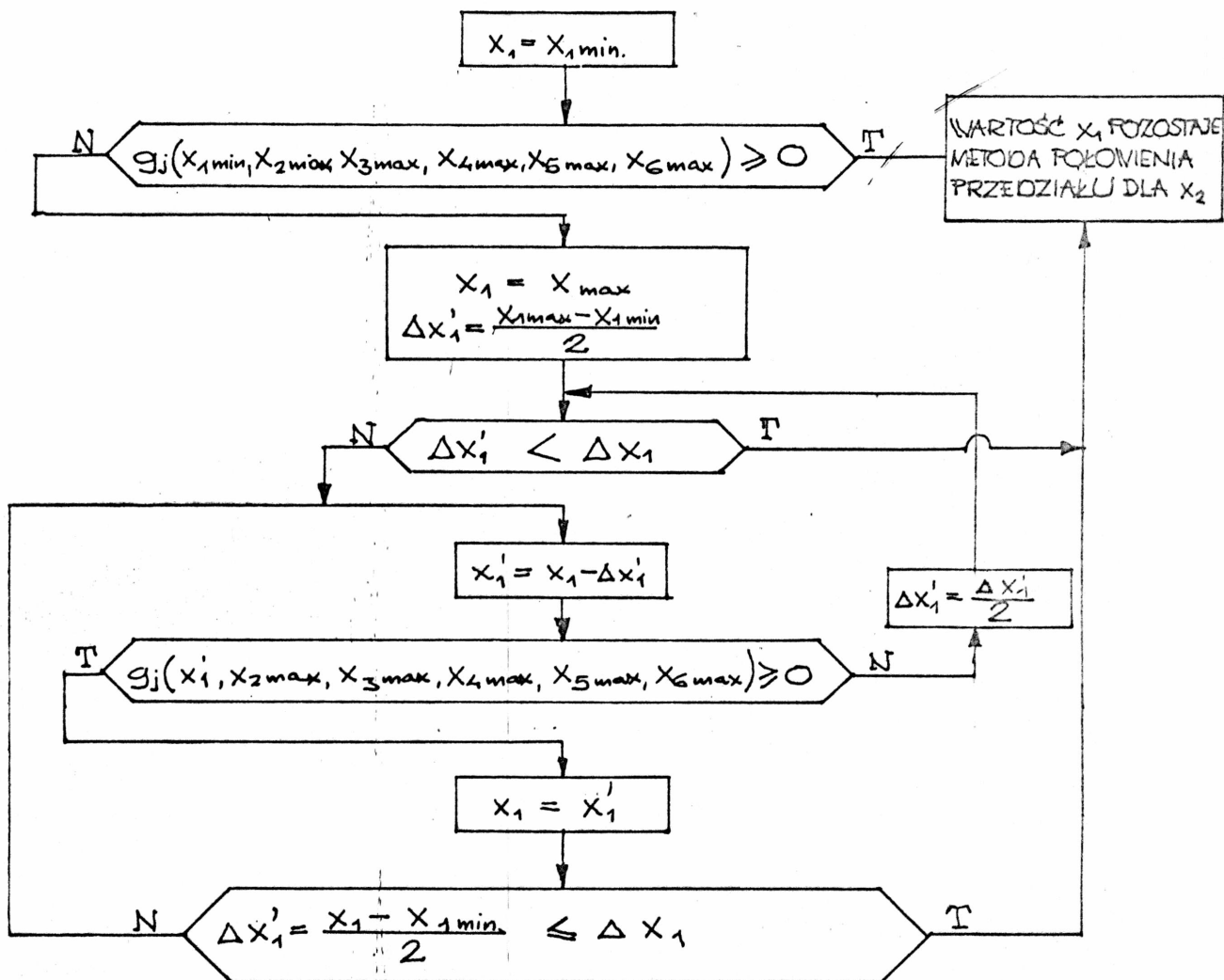
### 5.3. Przykłady testowe metody "backtrack"

W celu wykazania przydatności metody "backtrack" do projektowania optymalnych przekrojów belek blachownicowych przeprowadzono kilka testów obliczeniowych. W obliczeniach wykorzystano własny program przystosowany do pracy w języku BASIC w mikrokomputer Sinclair ZX-81./patrz Załącznik rozdział 2.3/.

W prezentowanych przykładach optymalizowano przekroje dwuteowych, bisymetrycznych belek zginanych, będących elementami ram przedstawionych na rysunkach 4.12 i 4.13. Siły wewnętrzne obliczono w nich z pomocą programu analizy statycznej przeznaczonego na mikrokomputer Sinclair ZX-81./patrz Załącznik rozdział 2.3/.



Rys. 5.1. Algorytm metody "backtrack"



Rys. 5.2. Algorytm metody "połowienia przedziału"

Jako funkcję celu przyjęto minimum objętości materiału. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabelach 5.1, 5.2, 5.3.

TABELA 5.1

Nazwa elementu		RYGIEL 1	RYGIEL 2
Wartość sił wewnętrznych na końcach pręta [kN], [kNm]	Np	79	47
	Tp	-53	-138
	Mp	-154	-377
	Nk	-79	-47
	Tk	53	138
	Mk	-111	-316
Długość pręta [m]	L	5	5
Wartość współczynników długości wybożeniowych	MIY	1	1
	MIZ	1	1
Wytrzymałość stali [MPa]	R	215/305	215/305

TABELA 5.2

Początkowe wartości zmiennych decyzyjnych [mm]			Końcowe wartości zmiennych decyzyjnych [mm]					
			RYGIEL 1			RYGIEL 2		
	RYGIEL 1	RYGIEL 2	R [MPa]	215	305	R [MPa]	215	305
X1MAX	240	300	X1	200	200	X1	280	220
X1MIN	200	220						
X1	5	5						
X2MAX	16	16	X2	8	8	X2	8	8
X2MIN	8	8						
X2	2	2						
X5MAX	16	16	X5	8	8	X5	8	8
X5MIN	8	8						
X5	2	2						
X6MAX	520	600	X6	400	400	X6	600	520
X6MIN	360	440						
X6	5	5						
Wartość funkcji celu [m <sup>3</sup> ]		początkowa		0,095654912	0,095654912		0,11672064	0,11672064
		końcowa		0,03421184	0,03421184		0,05110016	0,041574912
Liczba żeberek [szt.]				4	4		4	4
Powierzchnia przekroju [m <sup>2</sup> ]				0,0064	0,0064		0,00928	0,00928

TABELA 5.3

Napężenie unormowane	Nazwa pręta			
	RYGIEL 1	RYGIEL 2	RYGIEL 1	RYGIEL 2
P (I,1) $\delta_1$	194,5	213,1	194,5	304,1
P (I,2) $\delta_2$	187,5	207,7	187,5	295,2
P (I,3) $\delta$	113,7	106,1	125,0	159,0
P (I,4) $\tau_2^W$	20,5	35,1	20,5	39,4
P (I,5) $\tau_3$	30,5	53,6	30,5	62,3
P (I,6) $\delta_r$	∅	∅	∅	∅
P (I,7) $\tau_{sr}$	∅	∅	∅	∅
P (I,8) $\delta_{sr}$	∅	∅	∅	∅
P (I,9) $\delta_{zsr}$	∅	∅	∅	∅
P (I,10) $\delta_p$	∅	∅	∅	∅

#### 5.4. Podsumowanie i uwagi

Metoda "backtrack", która została wykorzystana w programie optymalizacji przekrojów elementów konstrukcji ramowych, jako metoda systematycznego przeszukiwania, zapewnia uniknięcie problemów związanych z otrzymywaniem rozwiązania lokalnego. Oznacza to, że otrzymane rozwiązanie, dla danego modelu matematycznego, jest rozwiązaniem jednoznacznym. W wyniku przeszukiwania obszaru rozwiązań dopuszczalnych trafiamy w minimum globalne. Na przykładach testowych przedstawiono wyniki zastosowania opisanej metody do projektowania przekrojów spawanych blachownic dwuteowych.

Cechą metody "backtrack" jest to, że po znalezieniu minimalnej wartości pierwszej zmiennej decyzyjnej spełniającej, dla pozostałych zmiennych o wartościach maksymalnych, ograniczenia, następuje przeszukiwanie obszaru rozwiązań dopuszczalnych dla wszystkich wartości tej pierwszej zmiennej pomiędzy wartością obliczoną w pierwszym kroku a wartością maksymalną. Wobec tego zadanie należałoby ustawiać tak, aby ilość dyskretnych wartości pierwszej

z optymalizowanych wielkości była jak najmniejsza. Otrzyma się wówczas znacznie krótszy czas obliczeń, a zatem większą efektywność programu.

Oprócz elementów związanych z metodami numerycznymi, opracowany program pozwala na uwzględnienie czynników projektowych wynikających z wymagań norm i przepisów.

Znaczącą modyfikacją w stosunku do rozwiązania przedstawianego w [18] jest włączenie do programu metody automatycznego doboru liczby żeberek usztywniających, opierając się na ograniczeniach zwichrzenia i stateczności lokalnej. Porównanie efektywności i jakości obliczeń metodą "backtrack" z innymi metodami programowania dyskretnego opisano między innymi w [18, 32].

## 6. OTYMALIZACJA RAM STALOWYCH

### 6.1. Algorytm procesu optymalizacji

Jak wspomniano we Wstępie rozwój ETO pozwolił na zastąpienie tradycyjnych metod analizy i projektowania konstrukcji metodami opartymi na optymalizacji, czyli projektowaniem syntetycznym. Powstał wobec tego, zarówno w kraju, jak i za granicą, szereg systemów obliczeniowych wykorzystujących do projektowania optymalnego maszyny cyfrowe. Obok systemów optymalizacji stosowanych do projektowania dużych konstrukcji, istnieją systemy, bądź też programy, którymi można dokonywać syntezy konstrukcji o niewielu stopniach swobody lub wręcz ich elementów. Krótki opis takich systemów podano w pracy [30].

Wykorzystując przedstawiony w rozdziale 3 matematyczny model dyskretnej syntezy wybranego typu ram oraz wprowadzając do analizy statycznej uwzględnienie efektów geometrycznej nieliniowości / rozdział 4 / i zaproponowaną w rozdziale 5 metodę programowania opartą na technice "backtrack", opracowano algorytm i program optymalizacji. Program ten napisano w języku FORTRAN 1900, a jego składowe części takie, jak analizę statyczną z elementami nieliniowości geometrycznych, program doboru optymalnych przekrojów i program analizy wytrzymałościowej, również w języku BASIC, przystosowanym do pracy na mikrokomputerze SINCLAIR ZX - 81. Na rysunku 6.1. przedstawiono schemat blokowy procesu optymalizacji.

Przebieg obliczeń można opisać w sposób uproszczony następująco:

W pierwszym etapie zostają do programu wprowadzone dane dotyczące geometrii i topologii konstrukcji, obciążeń oraz początkowych wartości przekrojów prętów / zmiennych decyzyjnych /, to znaczy minimalnych i maksymalnych ich wartości oraz wartości przyrostu wymiarów poprzecznych. Wprowadza się również parametry sterujące procesem optymalizacji i wyborem metody analizy statycznej.



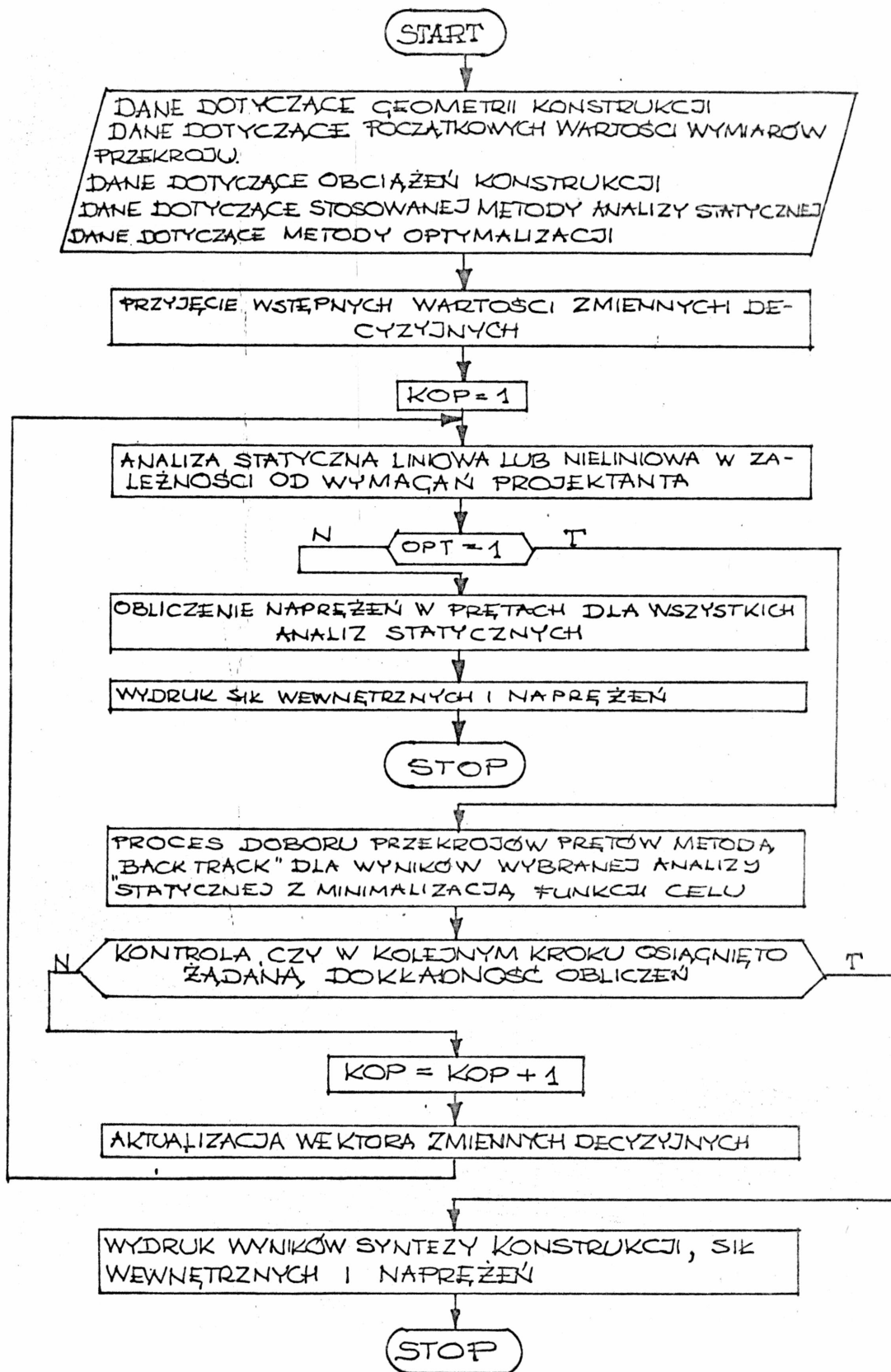
W przypadku prowadzenia wyłącznie analizy statycznej po jej zakończeniu następuje obliczenie naprężeń w prętach dla podanych przekrojów prętów.

W przypadku syntezy konstrukcji w pierwszym kroku analiza statyczna prowadzona jest dla początkowych, maksymalnych wartości zmiennych decyzyjnych. Następnie, po podziale konstrukcji na substruktury / pręty /, dokonuje się wyboru minimalnych wymiarów poprzecznych prętów / wartości zmiennych decyzyjnych / spełniających ograniczenia. W wyniku tych obliczeń otrzymuje się konstrukcję, dla której wartość funkcji celu osiąga minimum. Następnie proces analizy statycznej zostaje powtórzony dla obliczonych uprzednio wartości zmiennych decyzyjnych i konstrukcja ponownie podlega procesowi doboru optymalnych wymiarów prętów. Proces jest prowadzony do momentu, gdy otrzymane w dwu kolejnych krokach wartości globalnej funkcji celu / objętość, ciężar lub koszt konstrukcji / nie różnią się od siebie więcej niż o określoną wartość przyjętą jako dokładność obliczeń. Wówczas następuje obliczenie maksymalnych naprężeń dla otrzymanych przekrojów i sił wewnętrznych dla wszystkich rodzajów analizy statycznej. W procesie obliczeniowym można poddać optymalizacji konstrukcję tylko dla jednego, wybranego układu sił wewnętrznych, otrzymanego z analizy liniowej, analizy DP lub analizy NMS.

Szczegółowy opis sposobu wprowadzania danych i wyprowadzania wyników obliczeń przedstawiono w Załączniku.

## 6.2. Przykłady obliczeniowe.

Ze względu na dużą czasochłonność obliczeń programem optymalizacyjnym OPTY 1, wynikającą głównie z możliwości EMC ODRA 1305, opracowany program dyskretnej syntezy ram testowano na przykładach prostych konstrukcji. Obliczenia przeprowadzono na EMC ODRA 1305 w Centrum Obliczeniowym Politechniki Wrocławskiej, a niektóre elementy programu testowano również na mikrokomputerze Sinclair ZX-81.



Rys. 6.1. Schemat blokowy procesu optymalizacji.

W pracy przedstawiono dwa przykłady optymalizacji stalowych ram płaskich. W przykładzie I optymalizowano ramę jednonawową, dwupiętrową, a w przykładzie II ramę pięciopiętrową. W obu przypadkach optymalizacji poddano ramy, w których siły wewnętrzne obliczono według analizy liniowej i wybranej metody analizy II rzędu. Ramy przedstawiono na rysunkach 4.12 i 4.13, a obciążono je odpowiednio według schematu IV i I / Tab. 4.4. /. W obu przypadkach ze względu na oszczędność czasu pracy maszyny cyfrowej, pominięto ograniczenia ugięć pionowych i poziomych. Wyniki obliczeń podano w tabelach 6.1 - 6.4, a wydruki z maszyny cyfrowej w rozdziale 5 Załącznika.

TABELA 6.1. Wyniki syntezy konstrukcji z przykładu I.

Numer pręta	Metoda analizy statycznej	Charakterystyki przekrojów prętów											
		A1 [mm]	A2 [mm]	A3 [mm]	A4 [mm]	A5 [mm]	A6 [mm]	F [cm <sup>2</sup> ]	I <sub>z</sub> [cm <sup>4</sup> ]	I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	I <sub>Z</sub> [szt]	FC [m <sup>3</sup> ·10 <sup>-4</sup> ]	
1	AL	120	12	120	12	4	404	44.96	345.8	14661.5	5	233.048	
	ZADP	120	12	120	12	4	412	45.28	345.8	15278.5	5	234.811	
	ANMS	120	12	120	12	4	412	45.28	345.8	15278.5	5	234.811	
2	AL	218	6	218	6	4	304	38.32	1036.2	7222.2	4	200.968	
	ZADP	218	6	218	6	4	304	38.32	1036.2	7222.2	4	200.968	
	ANMS	218	6	218	6	4	304	38.32	1036.2	7222.2	4	200.968	
3	AL	186	12	186	12	6	448	71.52	1287.8	28115.7	4	375.018	
	ZADP	186	12	186	12	6	456	72.00	1287.8	29189.4	4	377.729	
	ANMS	186	12	186	12	6	452	71.76	1287.9	28649.7	4	376.374	
4	AL	188	12	188	12	6	596	80.88	1330.0	52289.0	4	427.830	
	ZADP	188	12	188	12	6	596	80.88	1330.0	52289.0	4	427.830	
	ANMS	188	12	188	12	6	588	80.40	1330.0	50778.3	4	425.115	
5	AL	188	12	188	12	6	570	79.32	1330.0	47473.1	4	419.008	
	ZADP	220	8	220	8	6	598	71.08	1420.8	43011.0	4	383.042	
	ANMS	216	8	216	8	6	600	70.56	1344.8	42740.8	4	380.016	
6	AL	296	12	296	12	8	594	118.56	5189.4	79201.9	4	642.069	
	ZADP	292	12	292	12	12	600	142.08	4988.1	87228.5	4	782.976	
	ANMS	292	12	292	12	12	600	142.08	4988.1	87228.5	4	782.976	
Wartość globalnej funkcji celu [m <sup>3</sup> ]	AL	.22979409		ZADP		4.76%		Liczba		2	Czas		20.39
	ZADP	.24073566		ANMS		AL		kroków		5	obliczeń		34.38
	ANMS	.24007607		ZADP		AL		optymalizacji		5	[min]		34.01
					AL								

TABELA 6.2. Wyniki syntezy konstrukcji z przykładu II.

Numer pręta	Metoda analizy statycznej	Charakterystyki przekrojów prętów										
		A1 [mm]	A2 [mm]	A3 [mm]	A4 [mm]	A5 [mm]	A6 [mm]	F [cm <sup>2</sup> ]	I <sub>z</sub> [cm <sup>4</sup> ]	I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	I <sub>Z</sub> [szt]	FC [m <sup>3</sup> · 10 <sup>-4</sup> ]
1	AL	160	6	160	6	4	380	34.4	409.8	8981.4	4	180.536
	ZADP	160	6	160	6	4	380	34.4	409.8	8981.4	4	180.536
	ANMS	160	6	160	6	4	380	34.4	409.8	8981.4	4	180.536
2	AL	230	6	230	6	4	430	44.8	1216.9	15767.7	4	237.994
	ZADP	230	6	230	6	4	430	44.8	1216.9	15767.7	4	237.994
	ANMS	230	6	230	6	4	430	44.8	1216.9	15767.7	4	237.994
3	AL	230	6	230	6	4	430	44.8	1216.9	15767.7	4	237.994
	ZADP	230	6	230	6	4	430	44.8	1216.9	15767.7	4	237.994
	ANMS	230	6	230	6	4	430	44.8	1216.9	15767.7	4	237.994
4	AL	220	6	220	6	4	450	44.4	1065.0	16762.1	4	235.994
	ZADP	220	6	220	6	4	450	44.4	1065.0	16762.1	4	235.994
	ANMS	220	6	220	6	4	450	44.4	1065.0	16762.1	4	235.994
5	AL	240	6	240	6	6	500	58.8	1383.3	24685.4	4	319.272
	ZADP	240	6	240	6	6	500	58.8	1383.3	24685.4	4	319.272
	ANMS	240	6	240	6	6	500	58.8	1383.3	24685.4	4	319.272
6	AL	240	6	240	6	6	500	58.8	1383.3	24685.4	4	319.272
	ZADP	240	6	240	6	6	500	58.8	1383.3	24685.4	4	319.272
	ANMS	240	6	240	6	6	500	58.8	1383.3	24685.4	4	319.272
7	AL	240	6	240	6	8	650	80.8	1385.2	49293.4	4	447.430
	ZADP	240	6	240	6	8	680	83.2	1385.3	54845.9	4	461.435
	ANMS	240	6	240	6	8	680	83.2	1385.3	54845.9	4	461.435
8	AL	320	6	320	6	6	550	71.4	3277.8	37997.0	4	394.303
	ZADP	320	6	320	6	6	550	71.4	3277.8	37997.0	4	394.303
	ANMS	320	6	320	6	6	550	71.4	3277.8	37997.0	4	394.303

c.d. TABELI 6.2.

9	AL	320	8	320	8	8	580	97.6	4371.5	57265.4	4	540.116	
	ZADP	320	8	320	8	8	600	99.2	4371.6	61719.7	4	549.914	
	ANMS	320	8	320	8	8	600	99.2	4371.6	61719.7	4	549.914	
10	AL	296	8	296	8	6	600	83.36	3459.0	54570.7	4	454.384	
	ZADP	295	8	295	8	6	600	83.20	3424.1	54422.9	4	453.454	
	ANMS	295	8	295	8	6	600	83.20	3424.1	54422.9	4	453.454	
11	AL	370	8	370	8	6	550	92.2	6754.7	54403.8	4	504.243	
	ZADP	370	8	370	8	6	550	92.2	6754.7	54403.8	4	504.243	
	ANMS	370	8	370	8	6	550	92.2	6754.7	54403.8	4	504.243	
12	AL	370	9	370	9	8	660	119.4	7600.8	93689.8	4	665.809	
	ZADP	370	10	370	10	9	550	123.5	8445.5	70500.3	4	681.830	
	ANMS	370	10	370	10	9	550	123.5	8445.5	70500.3	4	681.830	
13	AL	310	8	310	8	6	650	88.6	3973.3	67421.4	4	485.682	
	ZADP	310	8	310	8	6	650	88.6	3973.3	67421.4	4	485.682	
	ANMS	310	8	310	8	6	650	88.6	3973.3	67421.4	4	485.682	
14	AL	520	12	520	12	6	650	163.8	28122.8	150478.4	4	891.166	
	ZADP	520	12	520	12	6	650	163.8	28122.8	150478.4	4	891.166	
	ANMS	520	12	520	12	6	650	163.8	28122.8	150478.4	4	891.166	
15	AL	520	12	520	12	8	710	181.6	28124.6	186516.3	4	1012.690	
	ZADP	520	12	520	12	8	780	187.2	28124.93	227358.1	4	1051.021	
	ANMS	520	12	520	12	8	770	186.4	28124.88	221246.0	4	1045.540	
Wartość globalnej funkcji celu [m <sup>3</sup> ]	AL	.69268922		ZADP		1.11%		Liczba		3	Czas		17.38
	ZADP	.70041073		ANMS AL		1.04%		kroków		4	obliczeń		23.34
	ANMS	.69986328		ZADP ANMS		0.08%		optymalizacji		4	[min]		25.59

Tabela 6.3. Zestawienie wartości naprężeń - optymalizacja przykładu I dla AL

Numer pręta	Metoda analizy statycznej			
	Analiza AL		Analiza ADP	
	Maksymalna wartość naprężenia [MPa]	Wykorzystanie naprężeń [%]	Maksymalna wartość naprężenia [MPa]	Przekroczenie naprężeń R = 215 MPa [%]
1	214,7	99,86	218,4	1,58
2	124,4	57,86	128,8	-
3	214,9	99,95	218,1	1,44
4	213,3	99,21	216,8	0,84
5	213,8	99,44	216,7	0,79
6	213,6	99,35	216,2	0,56

Tabela 6.4. Zestawienie wartości naprężeń - optymalizacja przykładu II dla AL

Numer pręta	Metoda analizy statycznej			
	Analiza AL		Analiza ZADP	
	Maksymalna wartość naprężenia [MPa]	Wykorzystanie naprężeń [%]	Maksymalna wartość naprężenia [MPa]	Przekroczenie naprężeń R=235 MPa [%]
1	134,6	57,28	138,1	-
2	102,3	43,53	100,2	-
3	216,8	92,25	219,3	-
4	184,0	78,3	190,3	-
5	114,3	48,64	119,1	-

1	2	3	4	5
6	219,1	93,23	222,9	-
7	234,2	99,66	241,6	2,81
8	248,9	93,15	244,5	-
9	292,2	98,81	236,5	0,64
10	208,6	88,77	214,8	-
11	200,2	85,19	204,8	-
12	234,9	99,96	239,8	2,04
13	198,1	80,04	191,3	-
14	149,6	63,66	150,9	-
15	234,8	99,91	238,3	1,40

### 6.3. Podsumowanie i uwagi.

Przeprowadzone testowe przykłady optymalizacji wielopiętrowych ram stalowych miały na celu wykazanie zarówno przydatności i efektywności zaproponowanych metod analizy II rzędu i techniki optymalizacji, jak i określenie wpływu uwzględnienia w analizie statycznej efektów geometrycznej nieliniowości na przebieg i wynik optymalizacji. Przeprowadzono dwa obliczenia testowe. Z pewną ostrożnością należy więc generalizować otrzymane wyniki, ale na podstawie osiągniętych rezultatów można sformułować uwagi, które niewątpliwie będą miały szersze znaczenie, tak w praktyce badawczej, jak i w projektowaniu konstrukcji optymalnych.

W przykładzie I / rama jednomawowa, dwupiętrowa / wartość globalnej funkcji celu, to jest objętość zużytego materiału, wyniosła dla optymalizacji z liniową analizą statyczną  $V_1 = 0.2298 \text{ m}^3$ , dla optymalizacji z analizą metodą  $\Delta - P$   $V_2 = 0.2407 \text{ m}^3$ , a dla optymalizacji z dokładną analizą II rzędu  $V_3 = 0.24 \text{ m}^3$ . Odpowie-



dnio dla przykładu II / rama jednonawowa, pięciopiętrowa / uzyskano:  $V_1 = 0.6927 \text{ m}^3$ ,  $V_2 = 0.7004 \text{ m}^3$  i  $V_3 = 0.6998 \text{ m}^3$  / tabele 6.1, 6.2 /. Początkowa wartość funkcji celu, oczywiście dla wektora zmiennych decyzyjnych spełniającego wszystkie ograniczenia, wynosiła dla I przykładu  $V_{I_p} = 0.4741 \text{ m}^3$ , a dla drugiego  $V_{II_p} = 1.86068 \text{ m}^3$ . W pierwszym przykładzie końcowa wartość globalnej funkcji celu zmalała odpowiednio do zastosowanych metod analizy statycznej / AL, ZADP, ANMS / o blisko 51.5 %, 49.2 % i 49.4 %, a w przykładzie II odpowiednio o 62.8 %, 62.4 % i 62.4 %.

Otrzymane wyniki są więc znaczącymi oszczędnościami materiałowymi projektowanych konstrukcji prętowych w stosunku do pierwotnie założonych. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że otrzymane oszczędności w zużyciu materiału konstrukcyjnego, w przypadku określania początkowych wartości wektora zmiennych decyzyjnych przez doświadczonego projektanta, mogą być mniejsze niż otrzymane w niniejszej pracy. Nie jest też wykluczone, że wobec trudności we wstępnym doborze sztywności prętów, zwłaszcza dla dużych konstrukcji, wartości te mogą być zbliżone do otrzymanych w prezentowanych przykładach. Wspomniane efekty oszczędnościowe, z powodu ich względnego charakteru, mają na pewno mniejsze znaczenie niż efekty wynikające ze zmian w kształcie przekroju prętów. Na przykład dla skupa nr 15 ramy II początkowe wymiary przekroju / odpowiednia szerokość i grubość półki, wysokość i grubość środnika / wynosiły  $s = 600 \text{ mm}$ ,  $t = 20 \text{ mm}$ ,  $h = 800 \text{ mm}$ ,  $g = 14 \text{ mm}$ . Natomiast końcowe wymiary, w zależności od metody analizy statycznej wyniosły / w mm / dla AL - 520, 12, 710, 8; dla ZADP - 520, 12, 780, 8; dla ANMS - 520, 12, 770, 8. Odpowiednie zmiany pola powierzchni przekroju, w stosunku do wartości początkowej  $F_{15} = 0.032 \text{ m}^2$ , są następujące: dla AL  $F_{15} = 0.01816 \text{ m}^2$  / zmniejszenie o 43.25 % /, dla ZADP -  $0.01872 \text{ m}^2$  / 41.51 % /, a dla ANMS -  $0.01864 \text{ m}^2$  / 41.75 % /. W podobny sposób przedstawiają się zmiany w rozkładzie materiału dla innych prętów przykładowych ram.

Efekty te są o tyle istotne, że zmiany rozłożenia materiału w konstrukcji przyporządkowane są zmianom w wartościach i rozkładzie sił wewnętrznych związanym z zastosowaną metodą analizy statycznej. Podejście takie, w którym rozkład masy wynika ze zmian w wyężeniu elementów konstrukcji, pozwala na zaprojektowanie ich w sposób obiektywny i bezpieczniejszy niż w przypadku projektowania tradycyjnego, opartego na analizie konstrukcji i pomijającego wpływ przyjętej funkcji celu. Różnica objętości zużytego materiału dla analizy ZADP i AL wyniosła odpowiednio dla obu przykładów  $V_{1I} = 4.76 \%$  i  $V_{1II} = 1.11 \%$ , a między ANMS i AL odpowiednio  $V_{2I} = 4.45 \%$  i  $V_{2II} = 1.04 \%$ . Otrzymane różnice nie są istotnie znaczące, ale przypuszcza się, że w konstrukcjach smuklejszych, obciążonych dużymi siłami pionowymi i poziomymi, w których efekty geometrycznej nieliniowości będą większe, również zmiany w objętości zużytego materiału będą wielkościami niepomijalnymi. Należy również zauważyć, że w przypadku uwzględniania w analizie statycznej elementów teorii II rzędu, otrzymano wzrost objętości materiału konstrukcyjnego. Wynika to z tego, że wprowadzenie do optymalizacji metod analizy według teorii II rzędu, jako metod dokładniejszych, powoduje uwzględnienie efektów geometrycznej nieliniowości, pomijanych lub upraszczanych w analizie liniowej niekoniecznie w stronę większego bezpieczeństwa pracy konstrukcji. Z porównania końcowych wyników optymalizacji dla przybliżonej metody analizy statycznej / ZADP / i metody dokładniejszej / ANMS / wynika, że różnica między objętościami zużytego materiału wynosi dla przykładu I  $0.30 \%$ , a dla przykładu II  $0.08 \%$ . Zauważyć więc należy, że stosowanie obu wprowadzonych metod analizy według teorii II rzędu, prowadzi do bardzo zbliżonych końcowych wyników, jeśli chodzi o ilość zużytego materiału.

Kolejnym efektem, zaobserwowanym w wyniku przeprowadzonych obliczeń testowych, są zmiany w rozkładzie materiału w elementach konstrukcji. Przykładowo w optymalizacji ramy I otrzymano następujące wartości wymiarów przekroju poprzecznego pręta, odpo-

wiednio dla AL, ZADP i ANMS / tabele 6.1, 6.2 /:

PRĘT 5 S = 188, 220, 216 mm  
t = 12,8 , 8 mm  
h = 570, 598, 600 mm  
F = 79.32, 71.08, 70.56 cm<sup>2</sup>

PRĘT 6 S = 296, 292, 292 mm  
g = 8, 12, 12 mm  
h = 594, 600, 600 mm  
F = 118.56, 142.08, 142.08 cm<sup>2</sup>

a dla ramy II uzyskano:

PRĘT 7 h = 650, 680, 680 mm  
F = 80.8, 83.2, 83.2 cm<sup>2</sup>

PRĘT 12 t = 8, 10, 10 mm  
h = 660, 550, 550 mm  
F = 119.4, 123.5, 123.5 cm<sup>2</sup>

Maksymalna różnica w powierzchni przekroju pręta dla analizy liniowej i metodą przybliżoną wyniosła + 19.8 %. Jest to więc wielkość, której nie można w żaden sposób pominąć. Zaobserwowane zmiany w rozkładzie materiału w konstrukcji wynikają ze zmian w rozkładzie i wartościach sił wewnętrznych, które powstały w wyniku uwzględnienia w analizie statycznej efektów geometrycznej nieliniowości. Powyższe zmiany są również powodem tego, że konstrukcje zoptymalizowane dla sił wewnętrznych obliczanych według analizy liniowej, nie przenoszą się otrzymanych dla tych samych konstrukcji, ale według analizy II rzędu. W przykładzie I / tabela 6.3. / otrzymano przekroczenie naprężeń dopuszczalnych w 5 na 6 prętów ramy, z tym, że maksymalna wartość przekroczenia wyniosła 1.58 %, a więc mniej niż dopuszcza norma, [67] . Natomiast w przykładzie II / tabela 6.4. / naprężenia zostały przekroczone w 4 na 15 prętów, ale ich największa wartość wyniosła + 2.81 %, a więc

więcej niż to przewiduje norma [67]. W obu przedstawionych przykładach należy zwrócić również uwagę na stopień wykorzystania wytrzymałości materiału. Przykładowo dla analizy liniowej w ramie I maksymalny stopień wykorzystania naprężeń wyniósł 99.95 %, a minimalny 57.86 %. Odpowiednio w przykładzie II otrzymano 99.91 % i 43.53 %. W przypadku optymalizacji z analizą statyczną według teorii II rzędu otrzymano podobne rezultaty. Wynikają one zarówno z uproszczenia polegającego na pominięciu ograniczeń przemieszczeniowych, jak i z zastosowania techniki "backtrack" do poszukiwania wektora zmiennych decyzyjnych.

Istotny wpływ na ekonomiczność proponowanych rozwiązań syntezy konstrukcji prętowych ma czas obliczeń na EMC. W przykładzie I maksymalna liczba kombinacji wartości zmiennych decyzyjnych dla pojedynczego pręta wynosiła ok. 130000, a w przykładzie II ok. 8000. Konsekwencją tego były otrzymane czasy obliczeń. Dla poszczególnych metod analizy statycznej i odpowiednio dla obu przykładów otrzymano: dla AL - 20.39 i 17.38 min., dla ZADP - 34.38 i 23.34 min. i dla ANMS - 34.01 i 25.59 min. / tabele 6.1, 6.2 /. Liczba zmiennych decyzyjnych ma więc istotny wpływ na czas obliczeń, gdyż z jej wzrostem czas ten znacząco wzrasta. Wynika to również z zastosowanej metody poszukiwania optymalnego wektora zmiennych decyzyjnych. Należy w tym miejscu przypomnieć, że w przykładzie I optymalizowano 6 prętów, a w II 15, a więc więcej niż w przykładzie I. Czas obliczeń był jednak dla zadania II znacznie krótszy.

Wpływ na liczbę kroków optymalizacji, a więc i na czas obliczeń, ma wybór metody analizy statycznej. Dla przykładu I i II i odpowiednio dla AL, ZADP, ANMS otrzymano następujące liczby iteracji:  $KOP_I = 2, 5, 5$  i  $KOP_{II} = 3, 4, 4$ . Wzrost liczby iteracji dla analiz statycznych wg teorii II rzędu, należy przypuszczalnie tłumaczyć tym, że metody te są bardziej "wrażliwe" na zmiany wartości prętów niż analiza liniowa. Brak różnic w liczbie kroków optymalizacji dla metod ZADP i ANMS, a co za tym idzie niewielkie różnice

w czasie obliczeń, wynikają z tego, że w obliczanych przykładach siły osiowe miały stosunkowo niewielkie wartości, a warunek  $(NI^2/EJ)^{1/2} < 1$  był spełniony dla wszystkich prętów. W przypadku takim metoda ANMS wymaga do osiągnięcia żądanej dokładności obliczeń tylko 2 iteracji, co w konsekwencji, w prezentowanych przykładach, nie spowodowało istotnego wzrostu czasu obliczeń. Należy jednak przypuszczać, że w przypadku, gdy wspomniany warunek będzie miał wartości zbliżone do 1 lub większe, metoda ANMS będzie wymagała większej liczby iteracji, a co za tym idzie znacznie dłuższego czasu obliczeń. Podobny efekt wystąpi w przypadku konstrukcji dużych, o większej liczbie stopni swobody. Wówczas niewątpliwie, efekty oszczędnościowe wynikające z zastosowania metody przybliżonej, w której macierz sztywności, w przeciwieństwie do metody ANMS, budowana i odwracana jest tylko raz dla danego kroku optymalizacji, będą o wiele istotniejsze.

Wnioski z przeprowadzonych obliczeń, choć nie można ich bezkrytycznie uogólniać, pozwalają jednak na stwierdzenie, że dla klasy konstrukcji stalowych ram poddanych działaniu dużych obciążeń, efekty wynikające z wprowadzenia do optymalizacji analizy statycznej według teorii II rzędu, przejawiają się w postaci istotnych zmian w rozkładzie sił wewnętrznych, naprężeń i materiału w elementach tych konstrukcji. Należy więc zwrócić uwagę na to, że nawet w przypadku poprawnego zaprojektowania optymalnej konstrukcji dla sił obliczonych według analizy liniowej, konstrukcja taka nie zawsze będzie w stanie przenieść dodatkowe siły wewnętrzne, wynikające z uwzględnienia efektów geometrycznej nieliniowości.

## 7. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI OGÓLNE

W pracy podjęto próbę opracowania matematycznego modelu optymalizacji ram stalowych z uwzględnieniem w analizie statycznej wybranych efektów geometrycznej nieliniowości. Opierając się na przedstawionych w rozdziale 3. elementach modelu optymalizacji opracowano numerycznie program dyskretnej syntezy ram płaskich, w którym, do poszukiwania wektora zmiennych decyzyjnych, zastosowano zmodyfikowaną metodę systematycznego przeszukiwania. Wprowadzenie dyskretyzacji wartości zmiennych projektowych pozwala na otrzymanie rozwiązania, tzn. projektu konstrukcji lub jej elementów, możliwego do bezpośredniego wykonania, ze względu na zbieżność otrzymanych grubości blach z ich istniejącym asortymentem. Pozwala to na uniknięcie kłopotów z zaokrągleniem rozwiązań z ciągłego widma zmiennych, a tym samym na nie odchodzenie od rozwiązania optymalnego. Istotne znaczenie ma również wprowadzenie do modelu optymalizacji wszystkich wymagań związanych z obliczaniem naprężeń, a zawartych w obowiązujących normach i przepisach. Rozszerzeniem istniejących programów jest zastosowanie automatycznego doboru rozstawu usztywnień pionowych w blachownicach, co związane jest z założonym sposobem uwzględniania efektu zwiczenia belek oraz stateczności lokalnej jej elementów. Wprowadzenie wszystkich wymienionych wyżej elementów modelu optymalizacji, pozwoliło na znaczne zbliżenie rezultatów otrzymywanych w procesie syntezy do rzeczywistej, projektowanej konstrukcji.

Programy optymalizacji, opracowane na EMC ODRA 1305 i mikrokomputer Sinclair ZX-81, charakteryzują się dużą jasnością wprowadzania danych i możliwością prostego dołączania innych ograniczeń, nakładanych zarówno bezpośrednio na wartości przyjmowane przez zmienne decyzyjne, jak i związanych ze zjawiskami korozji, zmęczenia materiału lub innymi, o ile zostaną sformułowane odpowiednie wzory matematyczne.

W rozdziale 4. pracy przedstawiono istotę powstawania efektów geometrycznej nieliniowości oraz sposoby ich dokładnego i przybliżonego uwzględniania w procesie analizy statycznej, zważonej wówczas analizą drugiego rzędu. Wprowadzono dwa efekty, tzn. wpływ sił osiowych na sztywność giętną prętów oraz działanie siły pionowej na poziomych przemieszczeniach węzłów. Podano metodę dokładnego uwzględniania wpływu obu efektów opierając się na równaniu różniczkowym linii ugięcia pręta, a także metodę  $\Delta$ -P, która pozwala na uwzględnienie tych efektów w sposób przybliżony. Rozwiązując przykładowe ramy metodą pełnej analizy II rzędu, nie uwzględniono standartowego warunku  $(NL^2/EJ)^{1/2} \gg 1$ , od której to wartości wpływ sił osiowych jest większy od 5 % i powinien być wg. [55] uwzględniony. Dążąc do jak największego zbliżenia modelu obliczeniowego do rzeczywistej pracy konstrukcji, wprowadzano nieliniowe elementy do lokalnych macierzy sztywności, bez względu na wartość wspomnianego wyrażenia. Otrzymane wyniki świadczą, że założenie takie może mieć znaczenie, zwłaszcza w procesie projektowania wysokich konstrukcji ramowych.

Wprowadzenie do metody  $\Delta$ -P współczynników korekcyjnych zależnych od sztywności prętów i piętra ramy, pozwoliło na otrzymanie wyników, tzn. wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych, zbliżonych do wyników pełnej analizy II rzędu. Jednak zaletą zmodyfikowanej metody  $\Delta$ -P jest to, że wymaga ona tylko jednokrotnego budowania macierzy sztywności, co, wobec tego, że w metodzie dokładnej analizy II rzędu macierz sztywności jest budowana od nowa w każdym kroku iteracji, pozwala na znaczne skrócenie czasu pracy maszyny cyfrowej. Porównanie zmodyfikowanej metody  $\Delta$ -P z analizą II rzędu uwzględniającą wpływ sił osiowych tylko w skupach, wykazało, że w tym przypadku obie metody dają najbardziej zbliżone wyniki. Natomiast porównanie zmodyfikowanej metody  $\Delta$ -P i metody  $\Delta$ -P, w której wprowadza się stały dla wszystkich pięter współczynnik korekcyjny [26], wykazało, że metoda zmody-

fikowana daje wartości sił wewnętrznych i przemieszczeń, dokładniejsze i bardziej zbliżone do wyników pełnej analizy II rzędu.

Opracowane programy analizy II rzędu, jako że przystosowane do pracy na mikrokomputerach, mogą być w sposób łatwy i tani stosowane zarówno w pracy biur projektów, jak i w indywidualnej działalności inżynierskiej.

Przeprowadzone testy numerycznej realizacji algorytmów analizy statycznej według teorii II rzędu oraz algorytmów optymalizacji, stały się podstawą do sformułowania następujących wniosków:

1. Przedstawiony matematyczny model dyskretnej optymalizacji płaskich ram stalowych uwzględnia w obszarze rozwiązań dopuszczalnych ograniczenia normowe i wynikające z obowiązujących przepisów, a dotyczące naprężeń wytrzymałościowych, wybożenia, stateczności lokalnej i przemieszczeń. Otwarty charakter opracowanego modelu pozwala na wprowadzanie w prosty sposób dodatkowych ograniczeń, formułowanych w postaci wzorów matematycznych. Dyskretyzacja wartości zmiennych decyzyjnych znacznie zbliża modelu obliczeniowy konstrukcji do jej rzeczywistej postaci. Pewnym uproszczeniem powodującym, że otrzymane w procesie optymalizacji wyniki należy traktować z ostrożnością, jest przyjęcie jako funkcji celu objętości zużytego materiału. Nie jest to bowiem funkcja, którą, w przypadku skomplikowanych konstrukcji, można bardzo dokładnie odzwierciedlić rzeczywistą ekonomiczność otrzymanego rozwiązania. Wobec tego koniecznym byłoby rozszerzenie modelu optymalizacji o bardziej uniwersalną funkcję celu, a proponowane w pracy kryterium optymalizacji traktować jako pierwsze przybliżenie poszukiwanego projektu, jednakże w istotny sposób poprawiające obiektywizm procesu projektowania.
2. Opracowana metoda przybliżonej analizy II rzędu, uwzględniająca wpływ sił osiowych na sztywność giętą prętów oraz tzw. "efekt  $\Delta-P$ ", będąca zmodyfikowaną metodą analizy wg teorii I



rzędu, okazała się efektywnym narzędziem pozwalającym w szybki i łatwy sposób na uwzględnienie wymienionych efektów geometrycznej nieliniowości w analizie statycznej. Otrzymane wyniki wykazały dużą zbieżność z wynikami analizy statycznej wg dokładniejszej [64] metody analizy II rzędu. Należy stwierdzić, że zmiany jakościowe i ilościowe w rozkładzie i wartościach sił wewnętrznych i wynikający z nich wzrost wartości naprężeń, spowodowane wprowadzeniem do analizy statycznej elementów teorii II rzędu, wskazują, że efekty te powinny być uwzględniane w procesie rozwiązywania ram, zwłaszcza w przypadku konstrukcji wysokich, o dużej smukłości. Podejście takie pozwala na otrzymanie dokładniejszego niż w przypadku analizy liniowej, obrazu pracy konstrukcji, co w połączeniu z rozwijającą się techniką obliczeniową, spowoduje bardziej racjonalne i bezpieczne projektowanie ram. Uwzględnienie wspomnianych efektów jest kolejnym istotnym przybliżeniem metod obliczeniowych analizy statycznej na drodze do określenia rzeczywistego zachowania się konstrukcji w trakcie jej pracy pod obciążeniem.

3. Dążąc do jak największego zbliżenia modelu obliczeniowego do realnej pracy obciążonej konstrukcji, pominięto w obliczeniach przeprowadzonych w pracy, literaturowe [53] ograniczenie  $(NI^2/EJ)^{1/2} \gg 1$ , od której to dopiero wartości należałoby uwzględniać wpływ sił osiowych na sztywność prętów. Otrzymane wyniki analizy statycznej, zarówno metodą ANMS, jak i ŻADP, wskazują, że w przypadkach konstrukcji, w których występują duże siły osiowe i obciążenia poziome, wspomniane w punkcie 2. efekty mają znaczący wpływ na rozkład i wartości sił wewnętrznych już dla wartości wymienionego wyrażenia mniejszych od 1. Rozwiązanie takie jest konieczne i stanowi dodatkowy krok w kierunku zwiększenia dokładności wyników analizy statycznej. Uwzględnienie zaś wspomnianego efektu, wobec istnienia szeregu komputerowych metod oblicze-

niowych, nie stanowi obecnie żadnego problemu technicznego.

4. Odnosząc się do tezy pracy należy stwierdzić, że wprowadzenie do optymalizacji metod analizy statycznej opartych na teorii II rzędu / ZADP, ANMS / powoduje zwiększenie liczby kroków procesu optymalizacji koniecznych do otrzymania rozwiązania końcowego, w stosunku do przypadku, gdy stosuje się liniową analizę statyczną. Związane to jest z tym, że metody analizy II rzędu są bardziej "wrażliwe" na zmiany sztywności prętów niż metody analizy liniowej. W przedstawionych przykładach obliczeniowych otrzymano wzrost wartości funkcji celu / objętość materiału / dla optymalizacji z analizą II rzędu w odniesieniu do analizy I rzędu. Wynika to z tego, że wprowadzenie do analizy statycznej efektów geometrycznej nieliniowości powoduje, iż uwzględniane są pewne zjawiska i efekty, których wpływ w analizie liniowej jest przybliżany w stronę mniejszego bezpieczeństwa pracy konstrukcji. W optymalizacji przejawiało się to w postaci zmian w rozkładzie materiału w konstrukcji oraz we wzroście ciężaru konstrukcji. Efekty ilościowe w różnicach wartości funkcji celu, sięgające max. 5%, są mniejsze niż się spodziewano. Należy jednak stwierdzić, że dla konstrukcji, w których wpływy nieliniowości geometrycznych będą większe, również otrzymane efekty będą miały znacznie większe wartości.

Na zakończenie należy podkreślić, że wprowadzenie przez autora rozprawy dyskretnej wartości zmiennych projektowych do modelu optymalizacji oraz stworzenie algorytmu automatycznego doboru rozstawu stężeń poprzecznych opartego na zależnościach zwiczerzenia i stateczności lokalnej, stanowi duże rozszerzenie istniejących w kraju programów projektowania konstrukcji prętowych. Związana, że opracowany model teoretyczny jest ściśle powiązany z obowiązującymi przepisami i wymaganiami projektowymi. Wprowadzony model optymalizacji z wystarczającą dokładnością pozwala więc na chociażby wstępną ocenę przydatności i poprawności rozwiązań pro-

jektowych optymalnych ram.

Drugim istotnym elementem pracy jest numeryczne opracowanie efektywnej metody przybliżonej analizy II rzędu, opartej na zmodyfikowanej metodzie  $\Delta$ -P. Wprowadzenie do analizy konstrukcji prętowych, zwłaszcza ram wysokich budynków, metod uwzględniających nieliniową geometrycznie pracę konstrukcji, jest tematem aktualnym. Tego typu obiekty są bowiem coraz częściej wznoszone, a ich liczba będzie na pewno wzrastać [53] i dla zapewnienia ich bezpieczeństwa nieodzowne jest zwrócenie uwagi na wszystkie możliwe aspekty ich pracy.

Wobec tego jest niewątpliwie koniecznym prowadzenie dalszych badań w obranym kierunku, a dotyczących zwłaszcza modyfikacji funkcji celu / koszt konstrukcji /, szerszego uwzględnienia ograniczeń / ograniczenia przemieszczeniowe /, wprowadzenia efektywniejszych metod programowania matematycznego do poszukiwania optymalnego wektora zmiennych decyzyjnych i modyfikacji samego programu, w celu zwiększenia ekonomiczności i uniwersalności opracowanego matematycznego modelu optymalizacji.

*Jiří Jalský*

Wrocław-Twardogóra, 1981-1985

LITERATURA

- [1] Agrawal A.B., Mufti A.A., Jaeger L.G., Band-Schemes vs. Frontal-Routines in Nonlinear Structural Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, 1980, s. 753 - 766
- [2] Alvis W.A.M., Usami T., Elastic Lateral Torsional Buckling of Unbraced and Braced Planar Frames, Comp. Struct., vol. 10, 1979, s. 517 - 529
- [3] Annamalai N., Lewis A.D.M., Goldberg J.E., Cost Optimization of Welded Plate Girders, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 98, no. ST 10, Oct. 1972, s. 2235 - 2246
- [4] Argyris J.M., Konig M., Nagy D.A., Haase M., Malejanakis G., Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. Materiały z Konferencji Szkoleniowej nt: Zastosowanie metod elementów skończonych w nieliniowych zagadnieniach teorii sprężystości i plastyczności, Jabłonna, 23 - 28 września 1974 r.
- [5] Azad A.K., Continuous Steel I-girders: Optimum Proportioning, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 106, no. ST 7, 1980, s. 1543 - 1555
- [6] Berkowski P., Elementy geometrycznej nieliniowości w analizie statycznej ram płaskich, Inż. i Bud., 1/85, s. 36 - 40
- [7] Biegus A., Zastosowanie teorii drugiego rzędu do obliczania skupów utwierdzonych, Inż. i Bud., 8/1979, s. 293 - 296
- [8] Bitner J.R., Reingold E.M., Backtrack Programming Techniques, Communications of the ACM, vol. 18, no. 11, Nov. 1975, s. 651 - 656
- [9] Birnstiel C., Iffland J.S.B., Factors Influencing Frame Stability, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 106, no. ST 2, Feb. 1980, s. 491 - 504

- [10] Bogdanow S.S., Klauson A.W., O możliwości ispolzowanija portalnoj ramy w kaczestwie koniecznowo elementa pri optimalizacji mnogokonturnych ram, Truda Tallinskowo Politiechniczieskowo Instituta, no. 532, 1982, s. 3-8
- [11] Brandt A.M., /red./, Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji, PWN, Warszawa 1977
- [12] Brandt A.M., /red./, Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych, PWN, Warszawa, 1978
- [13] Brown D.M., Ang. A.M., Structural Optimization by Nonlinear Programming, J.Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 92, no. ST 6, June 1966, s. 319 - 340
- [14] Brezina V., Stateczność prętów konstrukcji metalowych, Arkady, Warszawa, 1966
- [15] Chen Wai-Fah, Atsuta T., Theory of Beam columns, Volume 2: Space Behaviour and Design, McGraw-Hill, Inc., 1977
- [16] Cheong-Siat-Moy F., Multistory Frame Design Using Story Stiffness Concept, J.Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 102, no. ST 6, June 1976, s. 1197-1212
- [17] Connor J.J., Logcher R.D., Shing-Ching Chan, Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 94, no. ST 6, June 1968, s. 2525 - 2547
- [18] Parkas J., Sabo L., Optimum Design of Beams and Frames of Welded I-Sections by Meaning of Backtrack Programming, Acta Technica Acadamiae Hungaricae, Tomus 91, / 1,2 /, 1980, s. 121 - 135
- [19] Fu Kuan-Chen, Levey G.E., Discrete Frame Optimization by Complex-Simplex Procedure, Comp. J.Struct., 1978, vol. 9, no. 2, s. 207 - 217
- [20] Galambos T.V., Structural Members and Frames, Prentice-Hall,

- Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968
- [21] Garfinkel R.S., Nemhauser G.L., Programowanie całkowitoliczbowe, Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN, Warszawa, 1978
- [22] Gere J.M., Weaver W., Jr., Analysis of Framed Structures, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1965
- [23] Glabisz W., Wpływ wielkości rzędu drugiego w analizie numerycznej układów prętowych skłonnych do przeskoku, /Praca doktorska /, Wrocław, 1982
- [24] Golomb S.W., Baumert L.D., Backtrack Programming, J.Assoc. Comp. Mech. 12, 1965, s. 526 - 524
- [25] Govil A.K., Arora J.S., Haug E.J., Optimal Design of Frames with Substructuring, Comp. Struct., vol. 12, 1980, s. 1 - 10
- [26] Ilków W., Dokładność metody  $\Delta$ -P, Mechanika i komputer, Tom 5, Warszawa, 1983, PAN IPPT, s. 183 - 202
- [27] Ilków W., Litwiński A., Szajer B., Automatyzacja obliczeń stateczności konstrukcji stalowych metodą  $\Delta$ -P, Inż. i Bud., 4/1980, s. 131 - 133
- [28] Jackiewicz M., Wieloparametrowa optymalizacja wybranej klasy ustrojów prętowych - szczególny przypadek wykorzystania teorii sieci, / Praca doktorska /, Wrocław, 1978
- [29] Janczura A., Macierzowa analiza konstrukcji prętowych w ujęciu sieciowym z wykorzystaniem zmodyfikowanej metody rozwiązywania równań liniowych, / w przygotowaniu /
- [30] Janczura A., Optymalizacja wybranego typu konstrukcji ramowych z wykorzystaniem metody sieciowej, / Praca doktorska /, Wrocław, 1981
- [31] Jankowiak W., Konstrukcje metalowe, PWN, Warszawa-Poznań, 1983

- [32] Jarmai K., Computer-aided Optimal Design of Structures Made of Higher Strength Steel, VII Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna, Konstrukcje metalowe, Gdańsk, maj 1984, tom I, s. 39 - 46.
- [33] Jendo S., Optymalizacja konstrukcji ramownicowych metodami programowania nieliniowego, cz. 3, / Rozprawa habilitacyjna / IPPT PAN, Warszawa, 1979
- [34] Johnston B.G., /red./, Structural Stability Research Council, Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, John Wiley&Sons, New York, 1976
- [35] Khan M.R., Optimality Criterion Techniques Applied to Frames Having Nonlinear Cross-Sectional Properties, AIAA /ASME/ ASCE/ AMS, 22 nd. Struct., Struc. Dyn. and Mater. Conf., Atlanta, 1981, Collect. Techn. Paper, Part 1, New York, s. 233\* - 241
- [36] Khat N.S., Venkayya V.B., Berke L., Optimum Structural Design with Stability Constraints, Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 10, 1976, s. 1094 - 1114
- [37] Kirsh U., Optimum Structural Design. Concepts, Methods and Applications, McGraw-Hill, Inc., New York, 1981
- [38] Kirsh U., Moses F., Decomposition in Optimum Structural Design, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 105, no. ST 1, Jan. 1979, s. 85 - 100
- [39] Kleiber M., Lagrangian and Eulerian Finite Element Formulation for Large Strain Elasto-Plasticity, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, vol. XXIII, no. 3, Warszawa, 1975
- [40] Kleiber M., Wieczorek M., Przybliżona metoda nieliniowej analizy ram sprężystych, Rozprawy Inżynierskie, 30, 2, 1982, s. 269 - 281
- [41] Knuth D.E., Estimating the Efficiency of Backtrack Programs, Meth. of Comp., vol. 29, no. 129, Jan. 1975, s. 121 - 136

- [42] Korbut A.A., Finkelsztejn J.J., Programowanie dyskretne, PWN, Warszawa, 1974
- [43] Krynicki E., Mazurkiewicz Z., Ramy z prętów o zmiennych sztywnościach, PWN, Warszawa, 1966
- [44] Kurth W., Subramanian N., Analysis of Plane Frames Using a Microcomputer, CAD, vol. 14, no. 3, May 1982, s. 253 - 155
- [45] Lai Shu-Ming A., MacGregor J.G., Geometric Nonlinearities in Unbraced Multistory Frames, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 109, no. 11, Nov. 1983, s. 2528 - 2545
- [46] Lai Shu-Ming A., MacGregor J.G., Hellesland J., Geometric Nonlinearities in Nonsway Frames, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 103, no. 12, Dec. 1983, s. 2770 - 2785
- [47] Lawler E.L., Wood D.E., Branch-and-Bound Methods: A Survey, Oper. Res., 14, 1966, s. 699 - 719
- [48] Le Messurier W.M.J., A Practical Method of Second Order Analysis, Part 1 - Pin Jointed Systems, Eng. J., AISC, Fourth Quarter, vol. 13, no. 4, 1976, s. 89 - 96
- [49] Le Messurier W.M.J., A Practical Method of Second Order Analysis, Part 2 - Rigid Frames, Eng. J., AISC, Second Quarter, vol. 14, no. 2, 1977, s. 49 - 67
- [50] Levey G.E., Tu Kuan-Chen, A Method in Discrete Frame Optimization and Its Outlook, Comp. Struct., no. 1-2, 1979, s. 363 - 368
- [51] Zańczak W., Wybieralski P., Obliczenia statyczne stalowych szkieletów hal bez tężników pionowych / wg teorii drugiego rzędu /, Inż. i Bud., 11 - 12/1981, s. 348 - 359
- [52] Żubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W., Wymiarowanie konstrukcji stalowych metodą stanów granicznych, PWN, Warszawa, 1979



- [53] Majid K.I., Non-linear Structures. Matrix Methods of Analysis and Design by Computers, Butterworths, London, 1972
- [54] Majid K.I., Optymalne projektowanie konstrukcji, Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN, Warszawa, 1981
- [55] Majid K.I., Stojanowski P., Sake M.P., Minimum Cost Topologic Design of Steel Sway Frames, Struct. Eng., 1981
- [56] Matwiejew S.A., Szmatko A.S., Optymalne projektowanie belek na podporach sprężystych z uwzględnieniem ograniczenia przemieszczeń, Truda Moskovskowo Awtomobilno-doroznowo Instituta, 1977, no. 134, s. 111 - 116
- [57] Michajliszczew W.J., Optimalizacija niesuszczich sistiem iz standartnyh elementow, Stroitel'naja mekhanika i raschiot sooruzhenij, no. 5, Okt. 1983
- [58] Michajliszczew W.J., Zadacza strukturalnoj i parametricznoj optimizacji szarnirno-stierznievych sistiem, Prikladnaja Mekhanika, 17, no. 4, 1981, s. 96 - 102
- [59] Nachajitpan P., Rocky K.C., Design Method for Optimum Unstiffened Girders, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 104, no. ST 1 Jan. 1978, s. 141 - 155
- [60] Naleszkiewicz J., Zagadnienia stateczności sprężystej, PWN, Warszawa, 1958
- [61] Nowacki W., Mechanika budowli, PWN, Warszawa, 1974
- [62] Pałkowski S., Numeryczna analiza stateczności sprężystej ustrojów prętowych, Inż. i Bud., 10/1978, s. 386 - 392
- [63] Pałkowski S., Obliczanie prętów złożonych w ujęciu teorii II rzędu, VII Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna, Konstrukcje metalowe, Gdańsk, maj 1984, tom II, s. 270-277
- [64] Pietraszkiewicz Wm., Lidke M., Wekezer J., Zmitrowicz A., Obliczanie przestrzennych układów ramowych z uwzględnieniem

- wpływu sił osiowych na deformację giętą prętów, Rozprawy Inżynierskie, 24, 3, 1976
- [65] Pietrzak J., Poplewska J., Obliczanie kratownic przy użyciu teorii sieci, PWN, Warszawa - Poznań, 1977
- [66] Pietrzak J., Rakowski G., Wrześniowski K., Macierzowa analiza konstrukcji, PWN, Warszawa-Poznań, 1979
- [67] PN-80/B-03200
- [68] Riepkó W.N., Gierasimow E.N., Diekompozicjonnyj sposob optimalizacji szarnirno-stierżniowych sistem s pomoszczu matematycznych modeliej analogow, Wiektornaja i skalar-naja optimizacija konstrukcji, Wypusk 1, Izewsk, 1981, s. 59 - 70
- [69] Russel A.D., Choudhary K.T., Cost Optimization of Buildings, J. Struct. Div. Proc. ASCE, vol. 106, no. ST 1, Jan. 1980, s. 283 - 300
- [70] Rutenberg A., A Direct P-Delta Analysis Using Standard Plane Frame Computer Programs, Comp. Struct., vol. 14, no. 1-2, 1981, s. 97 - 102
- [71] Rutenberg A., Plane Frame Analysis of Laterally Loaded Asymmetric Buildings - an Uncoupled Solutions, Comp. Struct., vol. 10, 1979, s. 553 - 555
- [72] Rutenberg A., Simplified P-Delta Analysis for Asymmetric Structures, J. Struct., Div., Proc. ASCE, vol. 108, no. ST 9, Sept. 1982, s. 1995 - 2013
- [73] Saka M.P., Optimum Design of Rigidly Jointed Frames, Comp. Struct., vol. 11, no. 5, 1980, s. 411 - 419
- [74] Saka M.P., Shape Optimization of Trusses, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 106, no. ST 5, 1980, s. 1155 - 1177

- [75] Seidler J., Badach A., Malisz W., Metody rozwiązywania zadań optymalizacji, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1980
- [76] Simitseş G.J., Giri J., Kounadis A.N., Nonlinear Analysis of Portal Frames, Int. J. for Num. Meth. in Eng. vol. 17, 1981, s. 123 - 132
- [77] Springfield J., Adams P.F., Aspect of Column Design in Tall Steel Buildings, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 98, no. ST 5, May 1972, s. 1069 - 1083
- [78] Tiernow W.G., Teoritičieskoje issliedowanije stieržniwych sistem optimalnych po massie, Teoritičieskoje i eksperimentalnoje issliedowanije stroitielnych konstrukcji nowowotipa, Leningrad, 1981, s. 34 - 45
- [79] Timoshenko S.P., Gere J.M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Comp., Inc., 1961
- [80] Tranberg W., Swannell P., Meek J.L., Frame Collapse Using Tangent Stiffness, J. Struct. Div., Proc ASCE, vol. 102, no. ST 3, March 1976, s. 659 - 675
- [81] Walker R.J., An Enumerative Technique for Class of Combinatorial Problems, Proc. of Symp. in Applied Math., AMS, Providence, R.I., 1960, s. 91 - 94
- [82] Wood B.R., Beaulieu D., Adams P.F., Column Design by P-Delta Method, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 102, no. ST 2, Feb. 1976, s. 411 - 427
- [83] Wood B.R., Beaulieu D., Adams P.F., Further Aspects of Design by P-Delta Method, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 102, no. ST 3, March 1976, s. 487 - 500
- [84] Wynhoven J.H., Adams P.F., Analysis of Three-Dimensional Structures, J. Struct. Div., Proc ASCE, vol. 98, no. ST 1, Jan. 1972, s. 233 - 248

- [85] Wynhoven J.H., Adams P.F., Behaviour of Structures Under Loads Causing Torsions, J. Struct. Div., Proc. ASCE, vol. 98 no. ST 7, July 1972, s. 1361 - 1376
- [86] Wytyczne obliczania i projektowania konstrukcji stalowych z uwzględnieniem rezerwy plastycznej, Tom 1, cz. 2, COBPKM "MOSTOSTAL", Warszawa, 1980

## ROZDZIELNIK

1. Recenzenci	3 egz.
2. Promotor	1 egz.
3. Biblioteka i Ośrodek Informacji Naukowo-Technicznej Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
4. Biblioteka i Ośrodek Informacji Naukowej Instytutu Budownictwa	1 egz.
5. Autor	1 egz.