

63
INSTYTUT BUDOWNICTWA
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
KOMUNIKAT Nr 12/K-9/75

STAN GRANICZNY STRUKTURY
PRZESTRZENNEJ Z WARUNKU ZNISZCZENIA
PŁYTOWEJ WARSTWY ZEWNĘTRZNEJ

ANTONI BIEGUS

PRACA DOKTORSKA

PROMOTOR: Prof.dr hab.inż.ZBIGNIEW KOWAL

Słowa kluczowe: struktura przestrzenna, płytowa warstwa
zewnątrzna, płyta podparta punktowo, jedno-
czesne zginanie i ściskanie płyty, statecz-
ność płyt, stan graniczny, mechanizm znisz-
czenia ustroju

WROCŁAW 1975

Nr 303A

Mgr inż. Antoni BIEGUS

Instytut Budownictwa

Politechniki Wrocławskiej

pl. Grunwaldzki 13

Budynek D-1, tel. 202-367

50-377 - Wrocław

Komunikat wpłynął do Redakcji Wydawnictw Naukowych

i Dydaktycznych Instytutu Budownictwa dnia.....

SPIS TREŚCI

	str.
1. Wstęp	6
1.1. Przedmiot pracy	6
1.2. Omówienie piśmiennictwa dotyczącego dźwigarów przestrzennych z płytową warstwą zewnętrzną	9
1.3. Cel pracy, tezy pracy	16
1.4. Schemat statyczny płytowej warstwy zewnętrznej rozpatrywanej struktury przestrzennej	23
1.5. Zakres pracy, założenia	27
2. Stan naprężenia w tarczy obciążonej siłami skupionymi	30
2.1. Wprowadzenie	30
2.2. Stan naprężenia w tarczy nieograniczonej obciążonej siłami skupionymi działającymi wewnątrz jej obszaru	34
2.3. Algorytm obliczeń numerycznych	44
2.4. Przykład liczbowy	45
3. Jednoczesne zginanie i ściskanie płyty prostokątnej podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze	50
3.1. Wprowadzenie	50
3.2. Metoda rozwiązania zagadnienia	55
3.3. Jednoczesne zginanie i ściskanie prostokątnej płyty ortotropowej podpartej przegubowo na obwodzie	63

3.4. Algorytm obliczeń numerycznych	71
3.5. Przykłady liczbowe	75
4. Jednoczesne zginanie i ściskanie płyty prostokątnej, o małej krzywiznie początkowej, podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze	86
4.1. Wprowadzenie	86
4.2. Metoda rozwiązania zagadnienia	88
4.3. Jednoczesne zginanie i ściskanie płyty prostokątnej, o małej krzywiznie początkowej, podpartej przegubowo na obwodzie	89
4.4. Algorytm obliczeń numerycznych	94
5. Jednoczesne zginanie i ściskanie pasma płytowego podpartego i obciążonego punktowo w swym obszarze	95
6. Jednoczesne zginanie i ściskanie uźebrowanej płyty prostokątnej, podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze	104
6.1. Wprowadzenie	104
6.2. Metoda rozwiązania zagadnienia	107
6.3. Jednoczesne zginanie i ściskanie prostokątnej płyty ortotropowej, podpartej przegubowo na obwodzie	113
6.4. Mimośrodowe zginanie żeber	120
6.5. Wyznaczenie wzajemnych oddziaływań między płytą a żebrami	125
6.6. Algorytm obliczeń numerycznych	128

6.7. Przykłady liczbowe	128
7. Badania modelowe	133
7.1. Cel badań	133
7.2. Opis modeli	133
7.3. Stanowisko badawcze	141
7.4. Urządzenia pomiarowe	145
7.5. Badania materiałowe	146
7.6. Wyniki badań modelowych	151
7.6.1. Wyniki badań modeli serii M0	152
7.6.2. Wyniki badań modeli serii M1	155
7.6.3. Wyniki badań modeli serii M2	165
7.6.4. Wyniki badań modeli serii M3	175
7.7. Analiza wyników badań modelowych	183
8. Wnioski	201
Literatura	208

1. WSTĘP

1.1. PRZEDMIOT PRACY

Dźwigary przestrzenne o budowie regularnej określa się w literaturze [2], [8], [11], [24] jako: przekrycia siatkowe, przekrycia warstwowe, przekrycia strukturalne, przekrycia materacowe, struktury przestrzenne, kratownice przestrzenne. Według klasyfikacji podanej w pracy [3] wyróżnić w nich można rys.1.1 warstwy zewnętrzne i warstwę środkową. Zarówno warstwy zewnętrzne jak i warstwa środkowa mogą być prętowe lub płytowe.

Rys.1.1

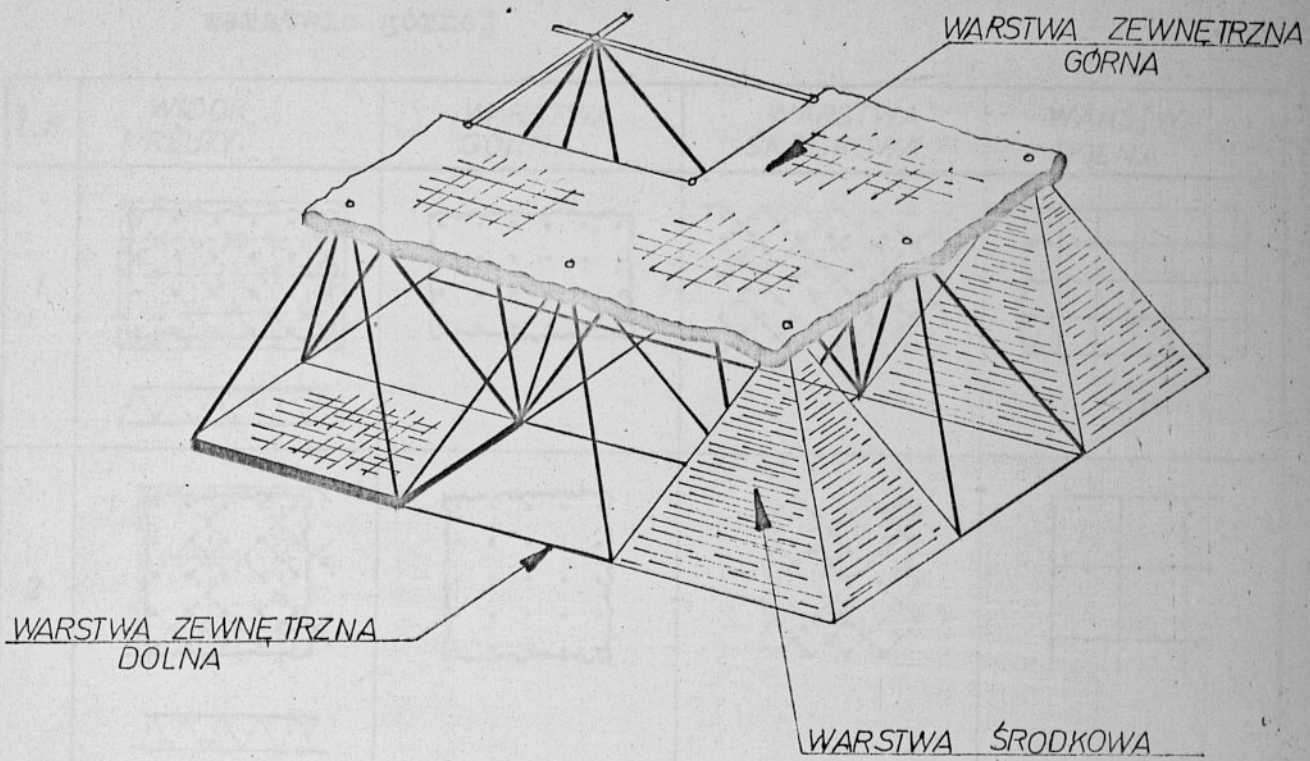
Przedmiotem pracy są struktury przestrzenne, w których jedna z warstw zewnętrznych jest płytą, połączoną z warstwą środkową punktowo rys.1.2. Warstwa środkowa takich dźwigarów może być prętowa lub płytowa.

Rys.1.1

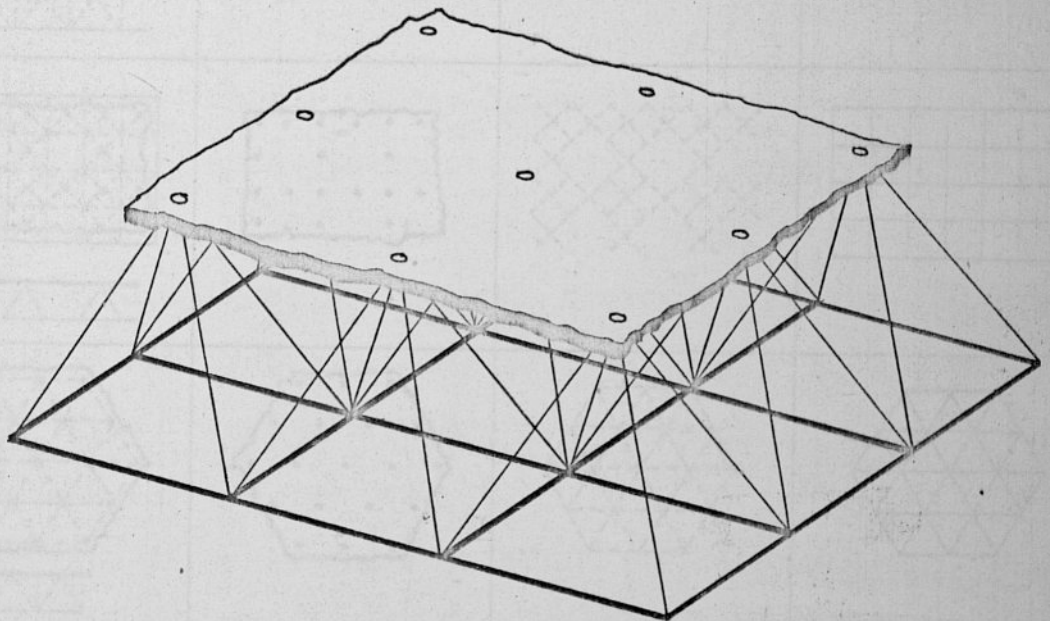
W takich rozwiązaniach konstrukcyjnych płytowa warstwa zewnętrzna spełnia funkcję zarówno osłonową jak i konstrukcyjną. Warstwa zewnętrzna rozważanych struktur, przyjmując obciążenie miejscowe /od ciężaru własnego, śniegu, wiatru/, włącza się do pracy całego ustroju.

Schematy geometryczne struktur przestrzennych, w których jedna z warstw zewnętrznych jest płytą, zestawiono w tablicy 1.1. Przykłady rozwiązań podane w tablicy 1.1 nie wyczerpują wszystkich możliwych układów geometrycznych, a płytowa warstwa zewnętrzna może być również warstwą dolną.

Tabl.1.1

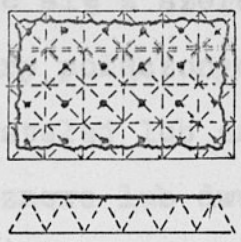
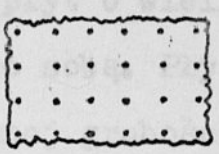
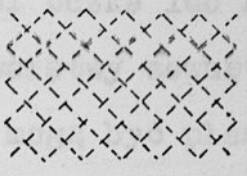
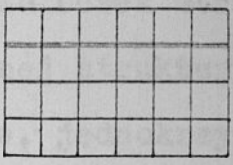
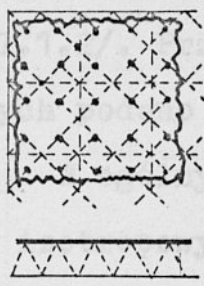
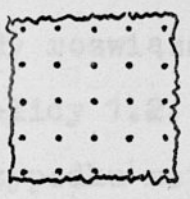
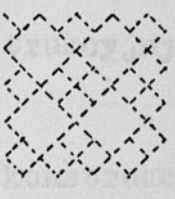
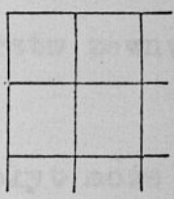
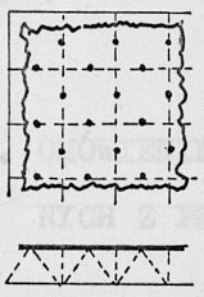
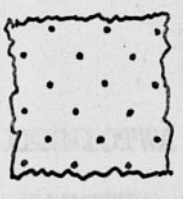
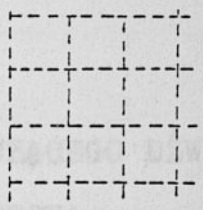
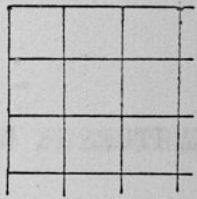
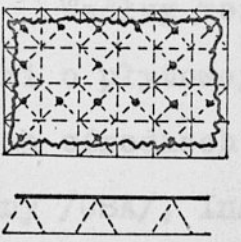
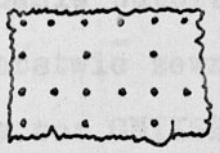
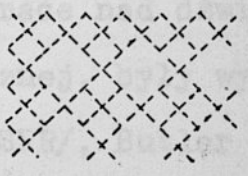
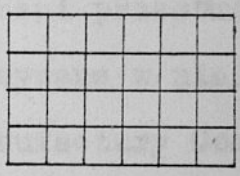
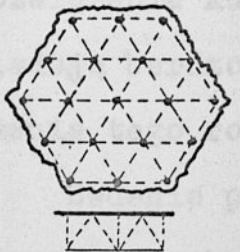
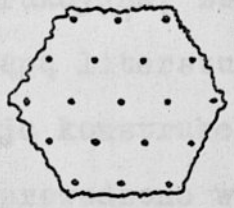
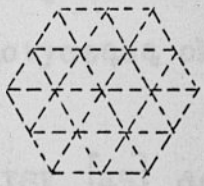
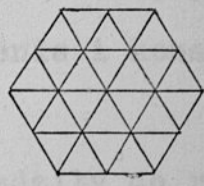
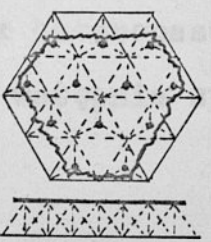
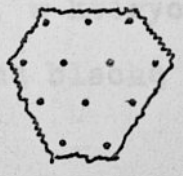
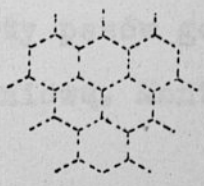
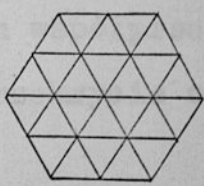


Rys.1.1 Schemat klasyfikacyjny struktur przestrzennych [3]



Rys.1.2 Schemat struktury przestrzennej o płytowej warstwie zewnętrznej

Tabl.1.1.Schematy geometryczne struktur przestrzennych o płytowej warstwie górnej

L.P.	WIDOK I RZUTY	WARSTWA GORNA	WARSTWA SRODKOWA	WARSTWA DOLNA
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Tabl. 1.2 Przykłady rozwiązań konstrukcyjnych jednego belka płytowej warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej

Płytowa warstwa zewnętrzna może być wykonana jako: płyta ciągła / o wymiarach równych wielkości przekrycia/ bądź składać się z szeregu płyt o wielkości oczka lub kilku oczek struktury połączonych ze sobą. Płyty warstwy zewnętrznej struktury, o stałej lub zmiennej grubości, mogą być płaskie, jednokrzywiznowe lub dwukrzywiznowe. Dla zwiększenia ich sztywności można wykonać dodatkowe żebrowanie płyt /patrz poz. 3, 4, 5 tabl. 1.2/. Przykłady rozwiązań konstrukcyjnych warstw zewnętrznych podano w tablicy 1.2.

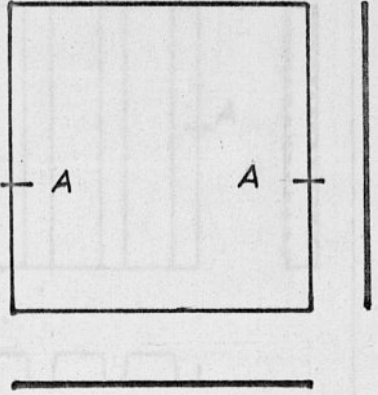
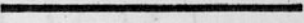
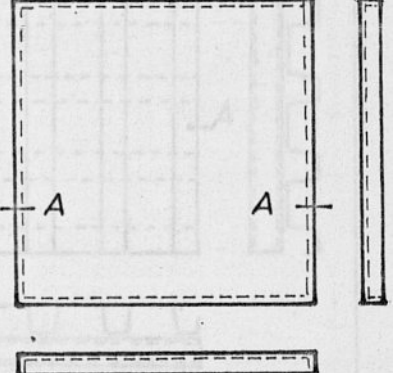
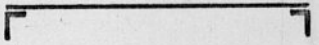
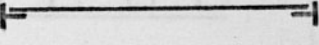
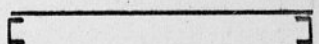
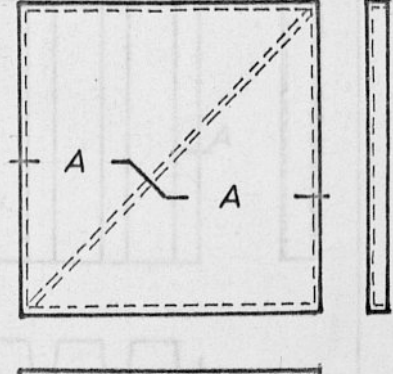
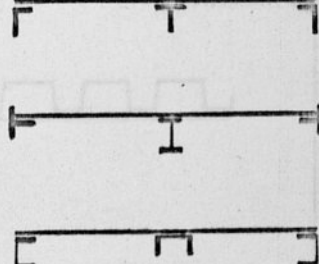
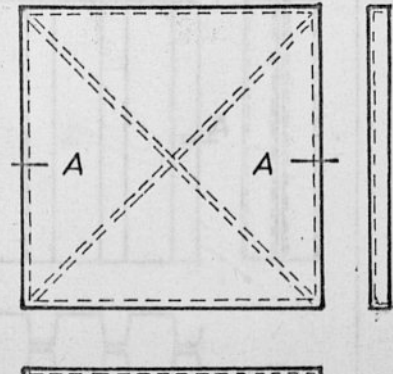
1.1.2 W ogólnym przypadku materiał konstrukcyjny płyt może być izotropowy lub ortotropowy, a płyta może posiadać ortotropię techniczną.

1.2. OMÓWIENIE PIŚMIENNICTWA DOTYCZĄCEGO DŹWIGARÓW PRZESTRZENNYCH Z PŁYTOWĄ WARSTWĄ ZEWNĘTRZNĄ

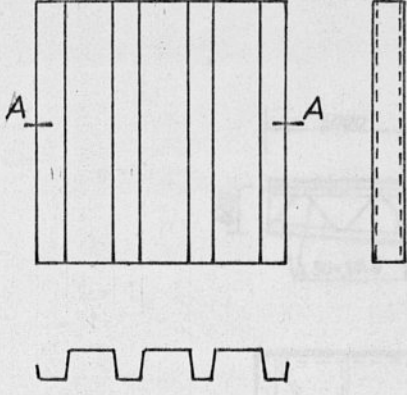
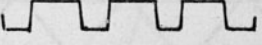
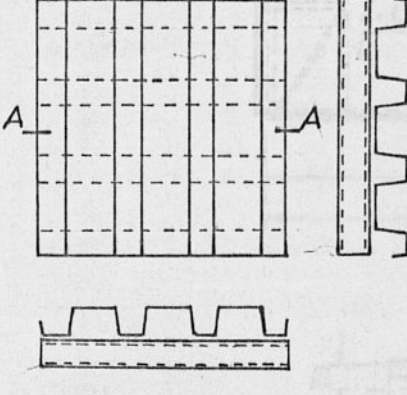
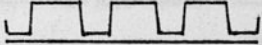
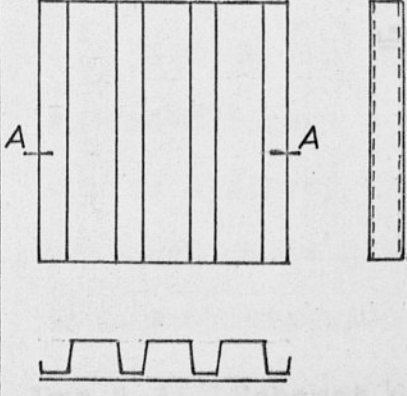
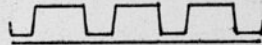
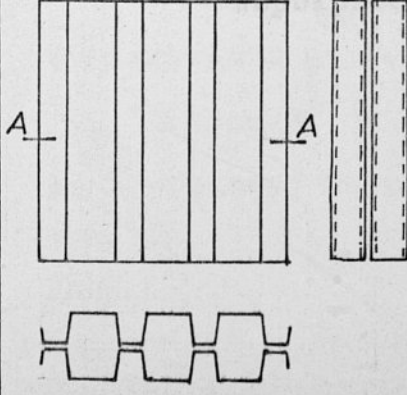
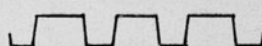
Według rozeznania autora, prace nad dźwigarami przestrzennymi o płytowej warstwie zewnętrznej, były wykonywane w nielicznych ośrodkach, a to: CNIISK /ZSRR/, Butler Manufactory Company /USA/, Instituto Politecnico Nacional /MEKSYK/. Uzyskane rozwiązania konstrukcyjne, zazwyczaj chronione patentami, posiadają bardzo skąpą literaturę dotyczącą obliczenia i konstruowania tego rodzaju konstrukcji.

1.1.3 Badania przeprowadzone w CNIISK [45] doprowadziły do realizacji przekryć rys. 1.3, o rozpiętości 24 m, złożonych z belek czteropasowych, w których pręty pasów górnych współpracują ze wstępnie sprężoną blachą aluminiową. Montaż przekrycia od-

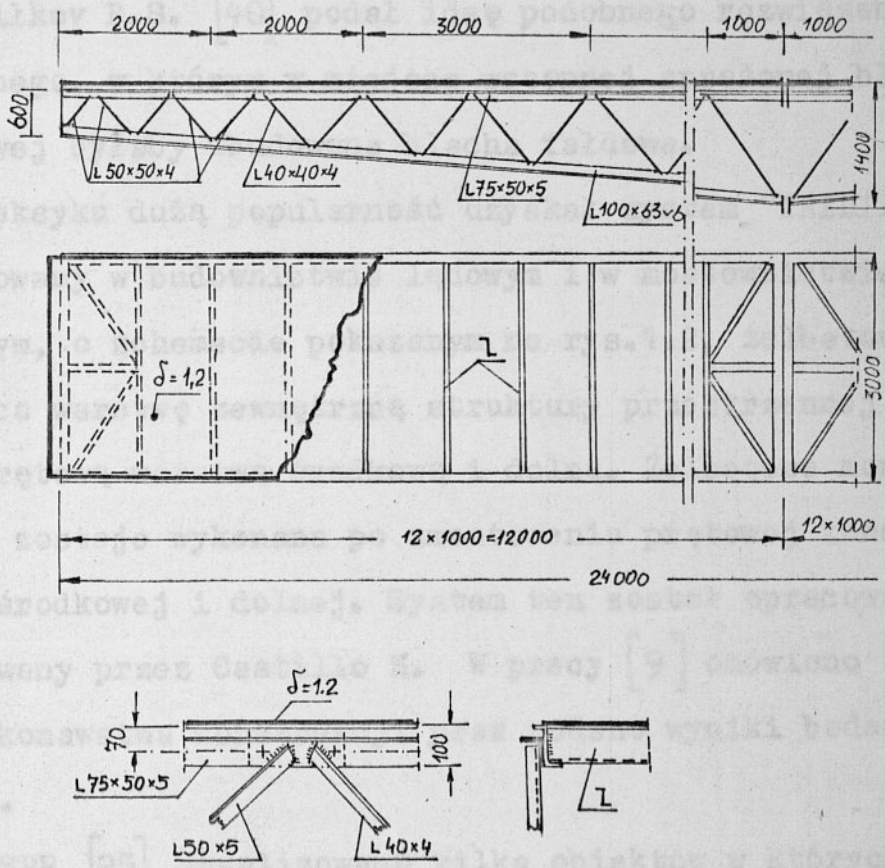
Tabl.1.2 Przykłady rozwiązań konstrukcyjnych jednego oczka płytowej warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej

L.P.	WIDOK I RZUTY BOCZNE	PRZEKROJE A-A	MATER. KONSTR.
1			<p>STAL ALUMINIUM TW. SZTUCZNE BETON</p>
2		<p>WARIANT I</p>  <p>WARIANT II</p>  <p>WARIANT III</p> 	<p>STAL ALUMINIUM</p>
3			<p>STAL ALUMINIUM</p>
4		<p>JAK. W POZ. 3</p>	<p>STAL ALUMINIUM</p>

Tabl.1.2. C.d.

L.P.	WIDOK I RZUTY BOCZNE	PRZEKROJ A - A	MAT. KONSTR.
5			<p>STAL ALUMINIUM TW. SZTUCZNE</p>
6			<p>J.W.</p>
7			<p>J.W.</p>
8			<p>J.W.</p>

bywał się drugi sposób połączenia między sobą, uproszczony wykonany w warsztacie, belek czteropaniowych. Omawiamy proces doboru technologii wykonawstwa i montażu konstrukcji.



Rys.1.3. Schemat dźwigaró kratowego o pasie górnym współpracującym z pokryciem [45]

KBagen H. [25] podał koncepcje przekroju strukturalnego go o prętowej warstwie dolnej i środkowej rys.1.5.

bywał się drogą scalania między sobą, uprzednio wykonanych w warsztacie, belek czteropasowych. Omawiana praca dotyczy technologii wykonawstwa i montażu konstrukcji.

Vasiłkov B.S. [40] podał ideę podobnego rozwiązania konstrukcyjnego, w którym w miejsce wstępnej sprężonej blachy aluminiowej byłaby wbudowana blacha fałdowa.

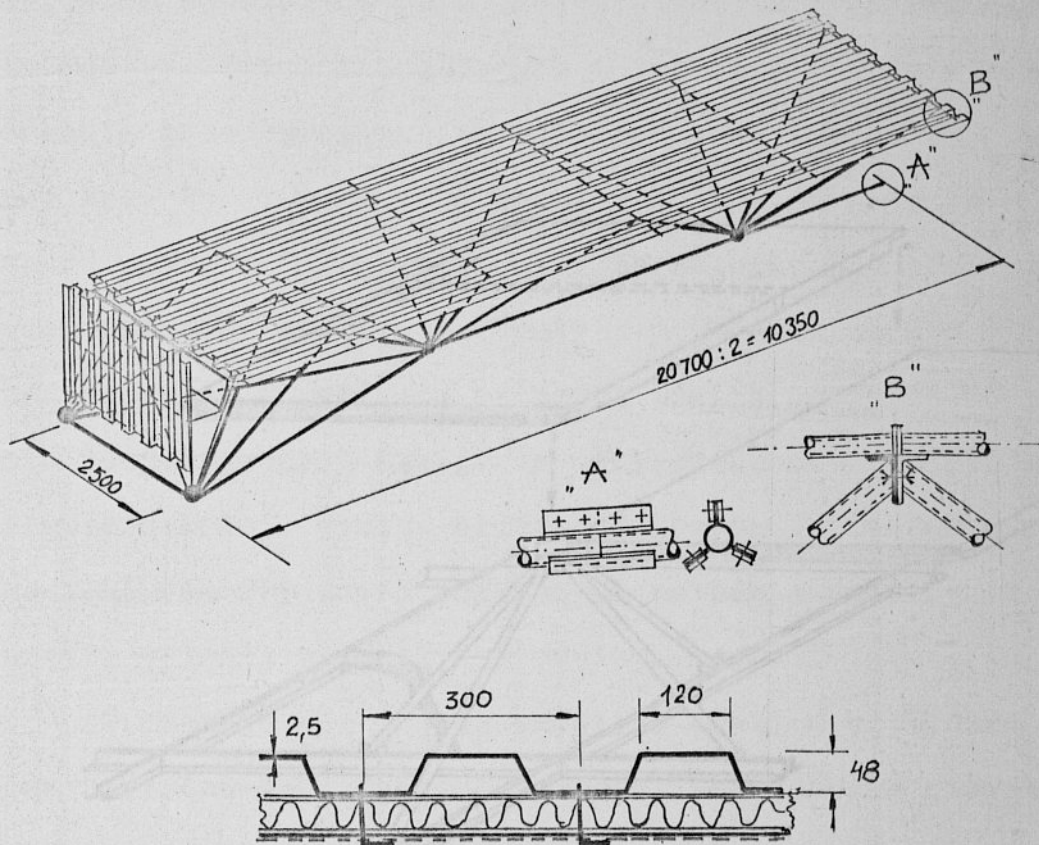
W Meksyku dużą popularność uzyskał system "TRIDILOSA", [9] stosowany w budownictwie lądowym i w mostownictwie. W systemie tym, o schemacie pokazanym na rys.1.2, żelbetowa płyta stanowiąca warstwę zewnętrzną struktury przestrzennej współpracuje z prętową warstwą środkową i dolną. Żelbetowa monolityczna płyta zostaje wykonana po zmontowaniu prętowej konstrukcji warstwy środkowej i dolnej. System ten został opracowany i opatentowany przez Castillo H. W pracy [9] omówiono technologię wykonawstwa konstrukcji oraz podano wyniki badań poligonowych.

W CSRR [25] zrealizowano kilka obiektów w których zastosowano dźwigary o przekroju trójkątnym i pasie górnym wykonanym ze stalowej blachy fałdowej rys.1.4. Dźwigary takie, o płytowym pasie górnym /blacha fałdowa/, są scalone z dwu elementów wysyłkowych wykonanych uprzednio w wytwórni. W pracy [25] omówiono konstrukcję oraz technologię wykonawstwa warsztatowego i montażu dźwigarów. Ponadto zamieszczono przykład wymiarowania płytowej warstwy górnej dźwigara.

Küsgen H. [23] podał koncepcję przekrycia strukturalnego o prętowej warstwie dolnej i środkowej rys.1.5.

Rys.1.4

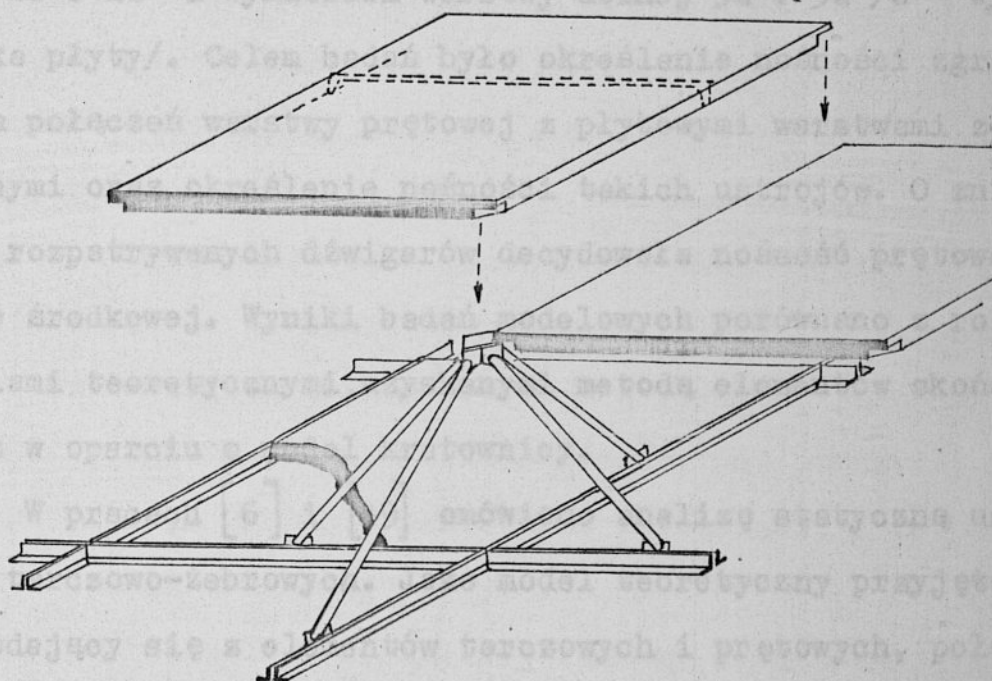
Rys.1.5



Rys.1.4. Schemat dźwigara kratowego o pasie górnym wykonanym z blachy faldowej [25]

Górną warstwę przekrycia stanowiłyby płyty żelbetonowe, wzmacniane żelazkami.

W pracy [1] podano technologię wykonawstwa oraz wyniki badań modelowych płyt trójwarstwowych typu sandwich o płytowych warstwach zewnętrznych i prętowej warstwie środkowej. Badania przeprowadzono na modelach o wielkości warstwy górnej 2a, 2a i wymiarach warstwy dolnej 3a - 3a / 3a - wymiar osi płaszczyzny.



Celem było określenie stanu granicznego rozwarstwienia połączeń warstwy zewnętrznej z płytami warstwy środkowej. Wyniki badań modelowych porównano z wynikami teoretycznymi. Wyniki badań modelowych porównano z wynikami teoretycznymi. Wyniki badań modelowych porównano z wynikami teoretycznymi.

W pracy [6] omówiono stan graniczny rozwarstwienia połączeń warstwy zewnętrznej z płytami warstwy środkowej. Wyniki badań modelowych porównano z wynikami teoretycznymi. Wyniki badań modelowych porównano z wynikami teoretycznymi.

1.3. CEL PRACY, TREŚĆ PRACY

Rys.1.5. Schemat prefabrykowanego przekrycia strukturalnego [23]

Celem pracy jest określenie stanu granicznego rozwarstwienia połączeń warstwy zewnętrznej z płytami warstwy środkowej.

Stan graniczny określono tu [28] stan oddzielający stan bezpieczny od stanów niebezpiecznych, zaś umieszczenie

Górną, warstwę przekrycia stanowiłyby płyty żelbetowe, wzmocnione żebrami.

W pracy [10] podano technologię wykonawstwa oraz wyniki badań modelowych płyt trójwarstwowych typu sandwich o płytowych warstwach zewnętrznych i prętowej warstwie środkowej. Badania przeprowadzono na modelach o wielkości warstwy górnej $2a \cdot 2a$ i wymiarach warstwy dolnej $3a \cdot 3a/a$ - wymiar oczka płyty/. Celem badań było określenie nośności zgrzewanych połączeń warstwy prętowej z płytowymi warstwami zewnętrznymi oraz określenie nośności takich ustrojów. O zniszczeniu rozpatrywanych dźwigarów decydowała nośność prętowej warstwy środkowej. Wyniki badań modelowych porównano z rozwiązaniami teoretycznymi, uzyskanymi metodą elementów skończonych oraz w oparciu o model kratownicy.

W pracach [6] i [49] omówiono analizę statyczną ustrojów tarczowo-żebrowych. Jako model teoretyczny przyjęto układ składający się z elementów tarczowych i prętowych, połączonych w sposób dyskretny. Zagadnienie rozwiązano metodą elementów skończonych. Ponadto omówiono zasadę budowy zrealizowanego programu na EMC.

1.3. CEL PRACY, TEZY PRACY

Celem pracy jest określenie stanu granicznego rozważanej struktury przestrzennej z warunku zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej.

Nazwą stan graniczny określono tu [28] stan oddzielający stany bezpieczne od stanów niebezpiecznych, zaś zniszczenie ro-

zumie się jako utratę wytrzymałości lub stateczności, powodującą zmianę ustroju w łańcuch kinematyczny.

W pracy zajęto się wybranymi stanami granicznymi, które uwarunkowane są zniszczeniem płytowej warstwy zewnętrznej.

Dla rozwiązania tak sformułowanego zadania należy dokonać analizy pracy warstwy płytowej struktur przestrzennych dla różnych schematów podparć i obciążeń takich ustrojów.

Pod wpływem obciążeń zewnętrznych warstwa środkowa struktury przekazuje na płytową warstwę zewnętrzną obciążenie styczne do powierzchni środkowej płyty lub płaszczyzny do niej równoległej. Obciążenie to, w postaci sił skupionych, przekazywane jest warstwie zewnętrznej w punktach kontaktu /styczności/ z warstwą środkową. Oprócz obciążeń stycznych, równoległych do powierzchni środkowej warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej, mogą wystąpić obciążenia zewnętrzne, prostopadłe do powierzchni środkowej płyty.

Dla dokonania analizy statycznej warstwy zewnętrznej niezbędną okazuje się więc znajomość sił obciążających płytę /sił kontaktowych i sił poprzecznych/ oraz ugięć płytowej warstwy zewnętrznej.

Aby rozwiązać zadanie będące celem pracy należy określić:

1. Kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej ;
2. Stan naprężenia w tarczy, stanowiącej warstwę zewnętrzną, obciążonej siłami kontaktowymi ;
3. Jednoczesne zginanie i ściskanie /rozciąganie/ płytowej warstwy zewnętrznej struktury ;

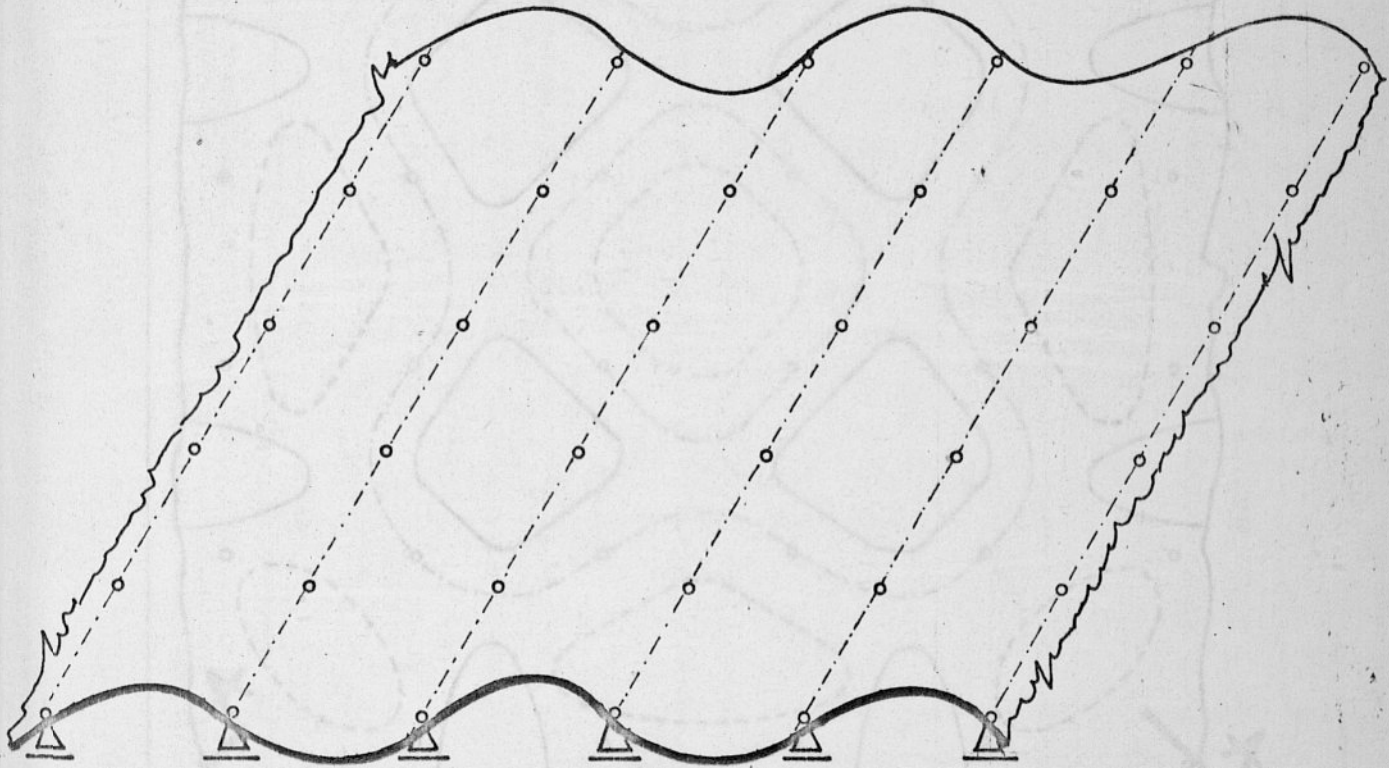
4. Wpływ wstępnych ugięć na pracę płytowej warstwy zewnętrznej struktury ;
5. Szczególne przypadki pracy płytowej warstwy zewnętrznej rozpatrywanych dźwigarów przestrzennych /np. Jednoczesne zginanie i ściskanie uźebrowanej warstwy zewnętrznej/.

Na podstawie analizy pracy rozpatrywanych struktur przestrzennych ustalono następujące hipotetyczne, kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej.

s.1.6 Na rys.1.6 przedstawiono "walcowy" mechanizm zniszczenia. Polega on na wystąpieniu sinusoidalnych fal walcowych o przeciwnych ugięciach pasm sąsiednich. W takim mechanizmie zniszczenia linie przegięcia biegną wzdłuż prostych prostopadłych do kierunku fal walcowych i przebiegają wzdłuż punktów kontaktu płytowej warstwy zewnętrznej z warstwą środkową struktury.

s.1.7 Na rys.1.7 pokazano mechanizm zniszczenia , w którym kształt warstwy zewnętrznej w stanie granicznym może w przybliżeniu utworzyć na podstawie superpozycji dwu "walcowych", wzajemnie prostopadłych powierzchni zniszczenia. W takim mechanizmie zniszczenia fale o przeciwnych co do znaku ugięciach występują wzdłuż przekątnych oczek warstwy zewnętrznej.

s.1.8 Na rys.1.8 pokazano powierzchnię wyboczenia lokalnego warstwy płytowej. Polega ono na wytworzeniu się czasz w poszczególnych oczkach warstwy zewnętrznej struktury. Oczka o zgodnych kierunkach ugięć czasz występują na przemian, jak w szachownicy.

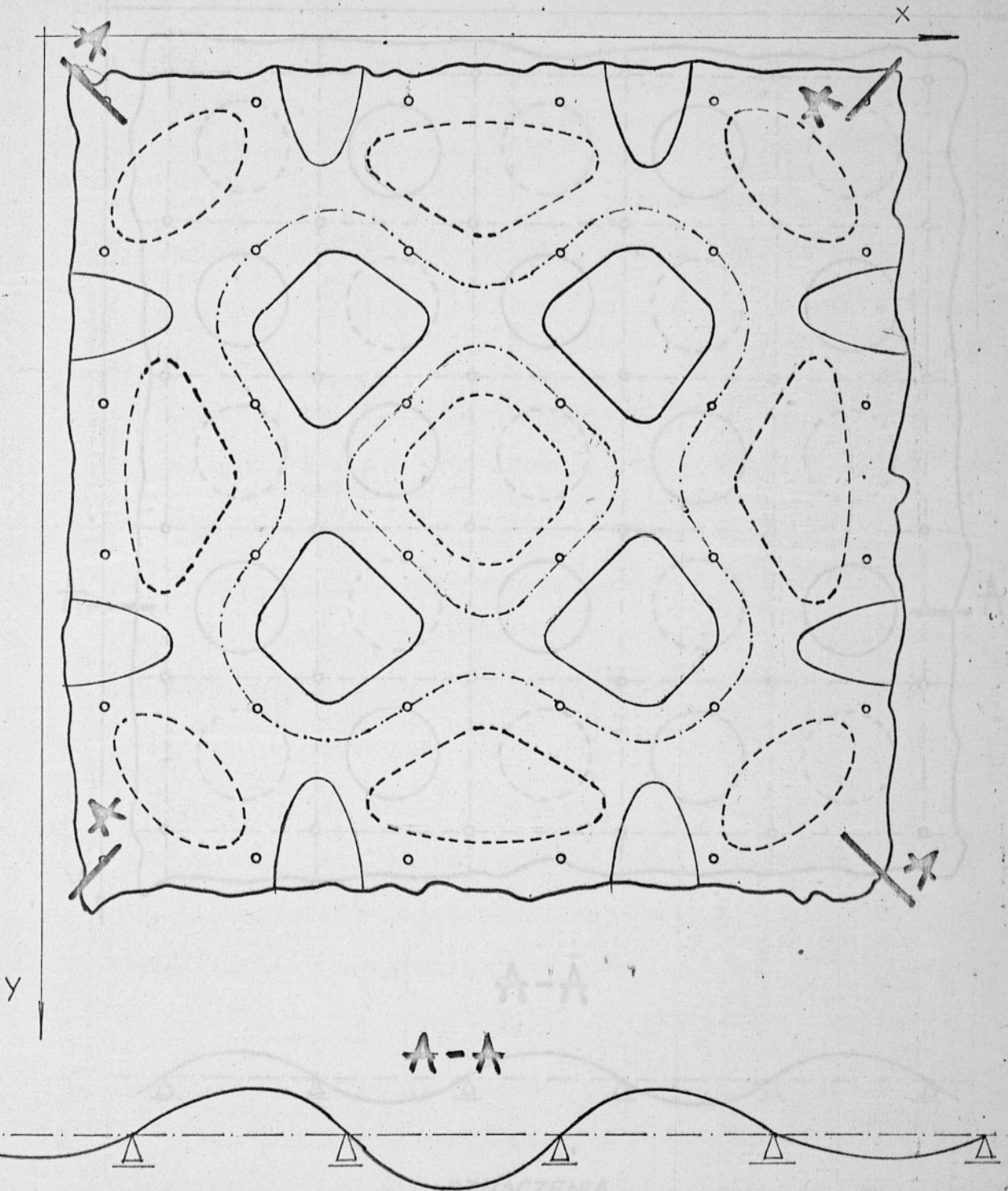


OZNACZENIA:

○ PUNKTY KONTAKTOWE
WARSTWY ŚRODKOWEJ
Z WARSTWĄ ZEWNĘTRZNĄ

----- LINIE PRZEGIĘCIA

Rys. 1.6 "Walcowy" mechanizm zniszczenia płytowej warstwy
zewnątrzniej struktury przestrzennej

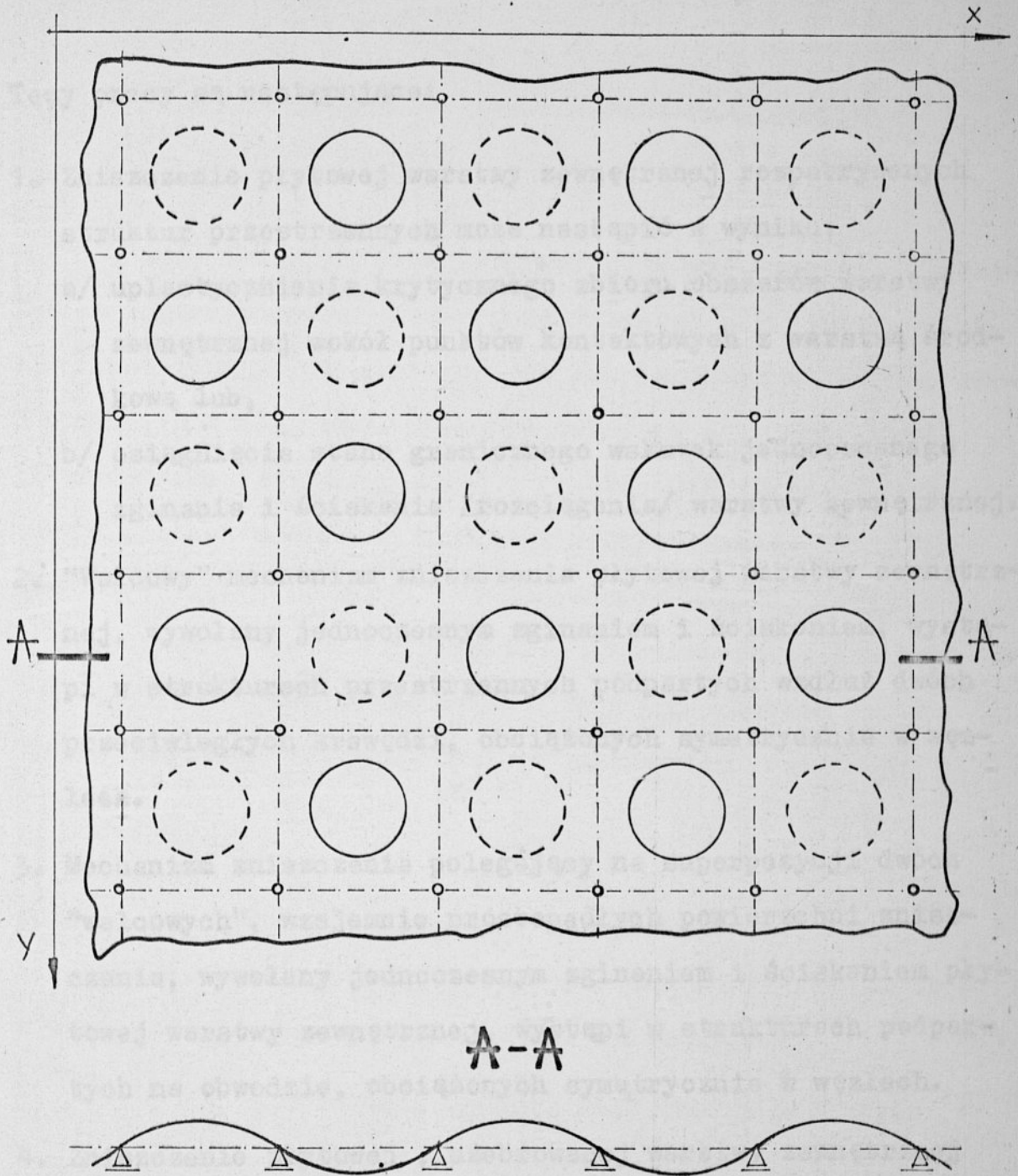


OZNACZENIA

○ PUNKTY KONTAKTOWE W-WY
ŚRODKOWEJ Z W-WĄ ZEWNĘTRZNĄ

—— WARSTWICE
- - - - LINIE PRZEGIĘCIA

Rys.1.7 Superpozycja dwóch wzajemnie prostokątnych "walcowych" mechanizmów zniszczenia warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej



OZNACZENIA

○ PUNKTY KONTAKTOWE
W-WY ŚRODKOWEJ
Z W-WĄ ZEWNĘTRZNA

—— WARSTWICE
- - - - LINIE PRZEGIĘCIA

Rys.1.8. Powierzchnia wyboczenia lokalnego płytowej warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej

Tezy pracy są następujące:

1. Zniszczenie płytowej warstwy zewnętrznej rozpatrywanych struktur przestrzennych może nastąpić w wyniku:
 - a/ uplastycznienia krytycznego zbioru obszarów warstwy zewnętrznej wokół punktów kontaktowych z warstwą środkową lub,
 - b/ osiągnięcia stanu granicznego wskutek jednoczesnego zginania i ściskania /rozciągania/ warstwy zewnętrznej.
2. "Walcowy" mechanizm zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej, wywołany jednoczesnym zginaniem i ściskaniem, wystąpi w strukturach przestrzennych podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, obciążonych symetrycznie w węzłach.
3. Mechanizm zniszczenia polegający na superpozycji dwóch "walcowych", wzajemnie prostopadłych powierzchni zniszczenia, wywołany jednoczesnym zginaniem i ściskaniem płytowej warstwy zewnętrznej, wystąpi w strukturach podpartych na obwodzie, obciążonych symetrycznie w węzłach.
4. Zniszczenie płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej struktur przestrzennych, wywołane jednoczesnym zginaniem i ściskaniem, wystąpi w przypadku uszkodzenia "krytycznego zbioru żeber".
5. Mechanizm zniszczenia polegający na uszkodzeniu "krytycznego zbioru żeber" poprzedzać będzie lokalne wyboczenie płytowej warstwy zewnętrznej pokazane na rys.1.8.
Wyboczenie to nie stanowi o ogólnym mechanizmie zniszczenia ustroju.

1.4. SCHEMAT STATYCZNY PŁYTOWEJ WARSTWY ZEWNĘTRZNEJ ROZPATRYWANEJ STRUKTURY PRZESTRZENNEJ

W celu przeanalizowania pracy płytowej warstwy zewnętrznej rozpatrywanej struktury przestrzennej przecięto warstwę środkową w punktach kontaktowych /styczności/ z warstwą zewnętrzną, a w miejscach przecięć założono siły kontaktowe. W ten sposób otrzymano schemat warstwy zewnętrznej w postaci płyty ciągłej podpartej punktowo w swym obrębie. Podparcie płyty przyjęto w postaci przestrzennych podpór sprężystych, o schemacie pokazanym na rys.1.9, usytuowanych w punktach styczności warstwy zewnętrznej z warstwą środkową $/a_i, b_j/$. Charakterystyki sprężyste podpór są funkcją położenia:

$$C_{ij} = C /x_i, y_j/ \quad /1.1/$$

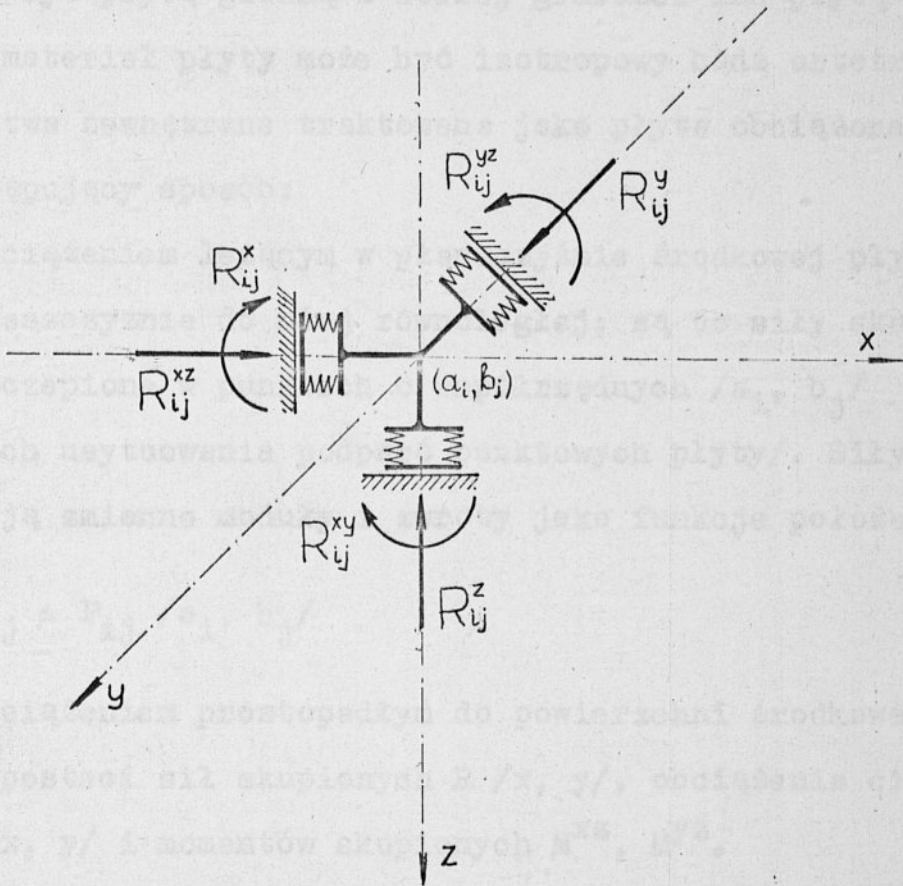
gdzie: $i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots, i_k$; $j = 1, 2, 3, \dots, l, \dots, l_k$

Przestrzenne podpory sprężyste, pokazane na rys.1.9, da się opisać sześcioma charakterystykami sprężystymi:

$C_{ij}^x, C_{ij}^y, C_{ij}^z$ - Podatność podpory usytuowanej w punkcie $/a_i, b_j/$ na przesuw w kierunku osi x, y, z ,

$C_{ij}^{xz}, C_{ij}^{yz}, C_{ij}^{xy}$ - podatność podpory usytuowanej w punkcie $/a_i, b_j/$ na obrót w płaszczyznach xz, yz, xy .

Charakterystyki sprężyste podpór są zależne od sposobu połączenia warstwy zewnętrznej z warstwą środkową. W rozpatrywanym przypadku, połączenie warstwy środkowej z płytową warstwą zewnętrzną jest punktowe, o małej sztywności skrętnej.



Rys.1.9. Schemat przestrzennej podpory sprężystej

Z tych też względów charakterystyka sprężysta podpór C_{ij}^{xy} może być pominięta.

Płytowa warstwa zewnętrzna rozpatrywanych dźwigarów może być płytą gładką o stałej grubości lub płytą uźebrowaną, zaś materiał płyty może być izotropowy bądź ortotropowy. Warstwa zewnętrzna traktowana jako płyta obciążona jest w następujący sposób:

- obciążeniem leżącym w płaszczyźnie środkowej płyty lub płaszczyźnie do niej równoległej; są to siły skupione P_{ij} zaczepione w punktach o współrzędnych $/a_i, b_j/$ /w miejscach usytuowania podparć punktowych płyty/. Siły te posiadają zmienne moduły i zwroty jako funkcje położenia.

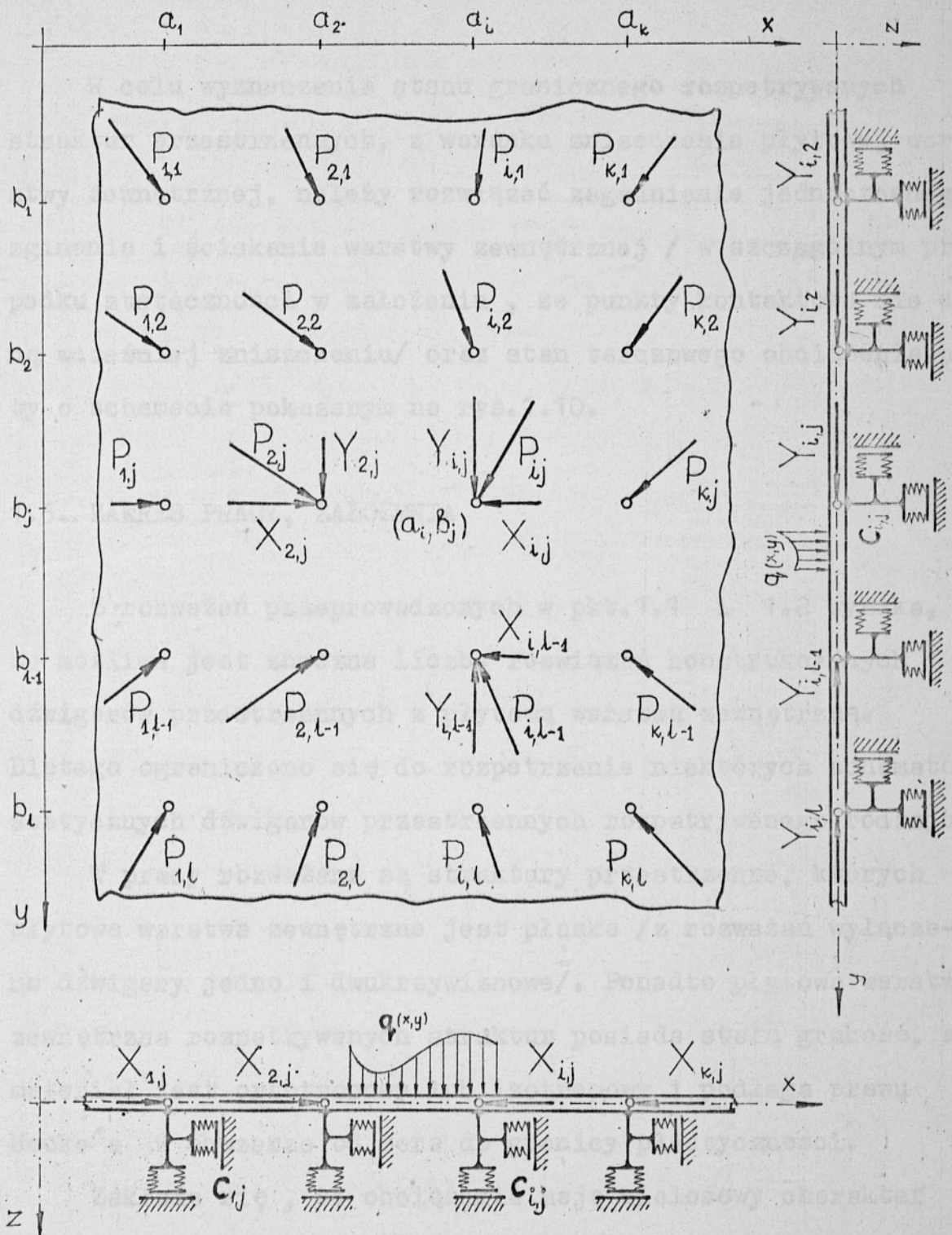
$$P_{ij} = P_{ij} /a_i, b_j/ \quad /1.2/$$

- obciążeniem prostopadłym do powierzchni środkowej płyty w postaci sił skupionych $R /x, y/$, obciążenia ciągłego $q/x, y/$ i momentów skupionych M^{xz}, M^{yz} .

Dźwigary przestrzenne rozpatrywanego rodzaju, pod wpływem obciążeń zewnętrznych, doznają przemieszczeń pionowych. Z tych też powodów należy uwzględnić krzywiznę warstwy płytowej, która jest funkcją położenia i obciążenia struktury:

$$w_0 = w_0 /x, y, q/ \quad /1.3/$$

Schemat statyczny płytowej warstwy zewnętrznej w postaci płyty o wyżej opisanym sposobie podparcia i obciążenia, pokazano na rys.1.10.



Rys.1.10. Schemat statyczny płytowej warstwy zewnętrznej
rozpatrywanej struktury przestrzennej

W celu wyznaczenia stanu granicznego rozpatrywanych struktur przestrzennych, z warunku zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej, należy rozwiązać zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania warstwy zewnętrznej / w szczególnym przypadku stateczności w założeniu, że punkty kontaktowe nie ulegną wcześniej zniszczeniu/ oraz stan tarczowego obciążenia płyty o schemacie pokazanym na rys.1.10.

1.5. ZAKRES PRACY, ZAŁOŻENIA

Z rozważań przeprowadzonych w pkt.1.1 i 1.2 wynika, że możliwa jest znaczna liczba rozwiązań konstrukcyjnych dźwigarów przestrzennych z płytową warstwą zewnętrzną. Dlatego ograniczono się do rozpatrzenia niektórych schematów statycznych dźwigarów przestrzennych rozpatrywanego rodzaju.

W pracy rozważane są struktury przestrzenne, których płytowa warstwa zewnętrzna jest płaska /z rozważań wyłączone dźwigary jedno i dwukrzywiznowe/. Ponadto płytowa warstwa zewnętrzna rozpatrywanych struktur posiada stałą grubość, a materiał jest ortotropowy lub izotropowy i podlega prawu Hooke'a w obszarze od zera do granicy plastyczności.

Zakłada się, że obciążenia mają nielosowy charakter statyczny i są niezależne od czasu.

Dla dokonania analizy statycznej płytowej warstwy zewnętrznej niezbędna okazuje się znajomość sił obciążających płytę /sił kontaktowych i sił poprzecznych/ oraz ugięć płyty.

Wyznaczenie ww. wartości może odbyć się jedną z metod wyznaczania sił wewnętrznych i przemieszczeń w strukturach przestrzennych [6], [10], [11], [49], [51]. W pracy siły wewnętrzne w dźwigarach wyznaczono doświadczalnie. Prace nad statyką struktur z płytową warstwą zewnętrzną są prowadzone między innymi przez: Zakład Konstrukcji Metalowych Politechniki Wrocławskiej oraz Wojskową Akademię Techniczną. Wartości sił kontaktowych oraz ugięć warstwy zewnętrznej są funkcją przyłożonego do struktury przestrzennej obciążenia. Należy spodziewać się [20], że w sprężystym obszarze pracy struktury, wartości sił kontaktowych i ugięć będą liniową funkcją obciążenia zewnętrznego. W miarę wchodzenia ustroju w stan graniczny następować będzie redystrybucja sił wewnętrznych i zależności sił kontaktowych i ugięć od obciążeń zewnętrznych przestają być liniowe. Zjawisko nieliniowości wystąpi również we wstępnej fazie obciążenia ustroju na skutek działania wpływów losowych.

W pracy założono, że siły obciążające płytową warstwą zewnętrzną: $P_{ij} / a_i, b_j, q /$, $q / x, y /$ oraz funkcja opisująca jej ugięcia są znane i mogą być zdeterminowane dla każdej fazy pracy struktury przestrzennej.

W przyjętym do rozważań teoretycznych schemacie płyty, rys. 1.10, występują podpory sprężyste. Charakterystyki sprężyste tych podpór są zależne od sposobu połączenia płytowej warstwy zewnętrznej z warstwą środkową oraz od sztywności warstwy środkowej. Wyznaczenie charakterystyk sprężystych może odbyć się na drodze rozważań teoretycznych /jako przemieszczenia uogólnione od sił jednostkowych/ bądź też na drodze badań modelowych.

W pracy przyjęto, że charakterystyki sprężystych podpór są znane.

Inne założenia stosowane w rozważaniach teoretycznych będą omówione w poszczególnych rozdziałach.

W rozdziale 2 omówiono stan naprężenia w tarczy obciążonej siłami skupionymi.

W rozdziale 3 rozpatrzono zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania płyt podpartych i obciążonych punktowo w swym obszarze.

W rozdziale 4 rozpatrzono zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania płyt posiadających małą krzywiznę początkową, o schemacie obciążenia i podparcia jak w rozdziale 3.

W rozdziale 5 rozpatrzono zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania pasma płytowego podpartego i obciążonego w swym obszarze.

W rozdziale 6 rozpatrzono zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania uźebrowanej płyty o schemacie i obciążeniu jak w rozdziale 3.

W rozdziale 7 omówiono przeprowadzone badania modelowe struktur przestrzennych o płytowej warstwie zewnętrznej.

W rozdziale 8 podano wnioski.

2. STAN NAPRĘŻENIA W TARCZY OBCIĄŻONEJ SIŁAMI SKUPIONYMI

2.1. WPROWADZENIE

W niniejszym rozdziale zajęto się określeniem dwuosio-
wego stanu naprężenia w płytowej warstwie zewnętrznej struk-
tury przestrzennej traktowanej jako tarcza. Rozważania prze-
prowadzono przy założeniu, że:

1. Skupione siły kontaktowe P_{ij} leżą w płaszczyźnie środkowej
płytowej warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej i nie
działają mimośrodowo;
2. Połączenia płytowej warstwy zewnętrznej z warstwą środkową
są przegubowe i nie powodują zginania warstwy zewnętrznej.

Przyjęto, że tarcza jest sprężysta, jednorodna, izotropo-
wa o stałej grubości g . Obciążeniem tarczy są siły skupione
 P_{ij} działające w płaszczyźnie środkowej, zaczepione w punktach
 $/a_i, b_j/$ kartezjańskiego układu współrzędnych. Siły te posia-
dają zmienne moduły i zwroty jako funkcję położenia

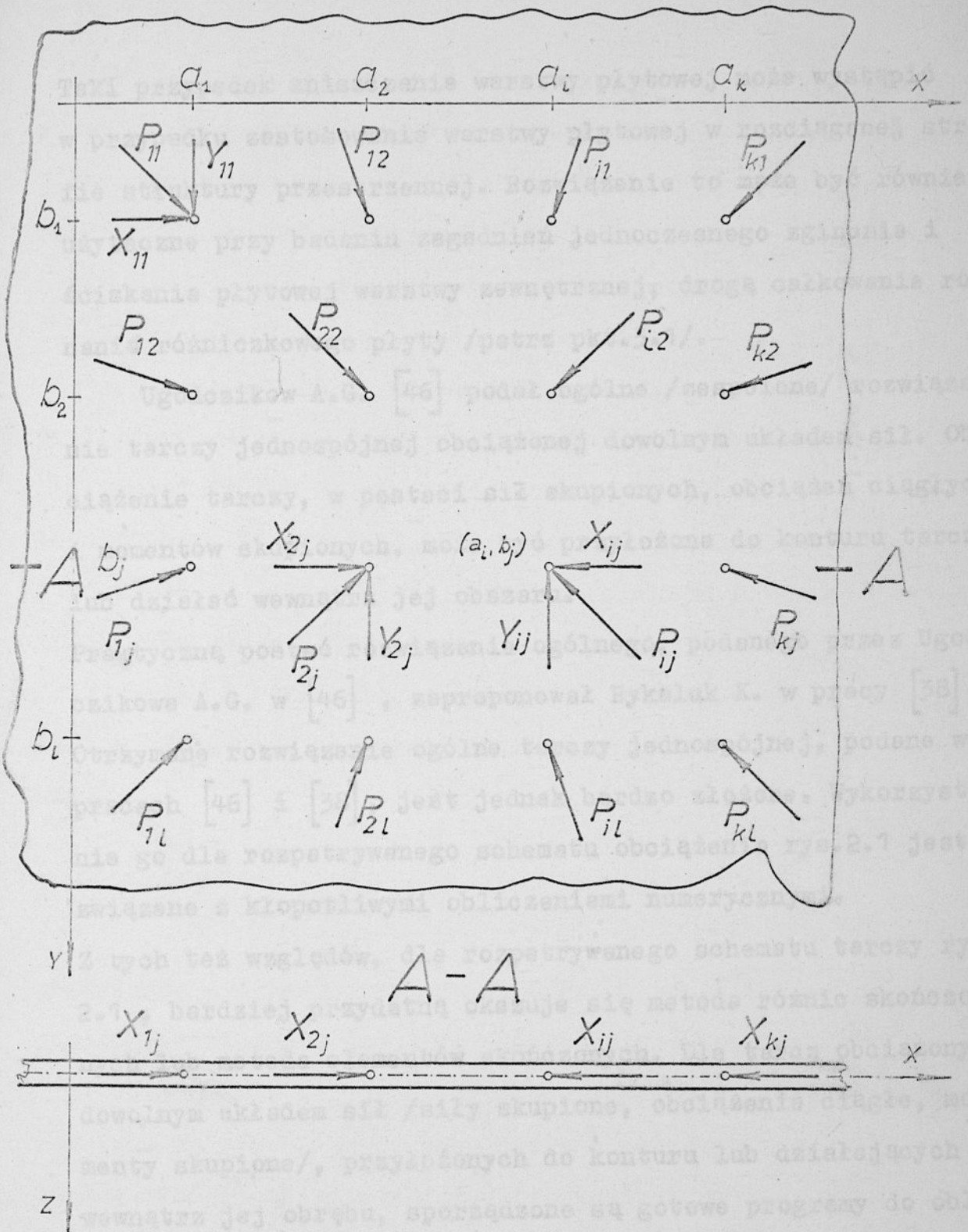
$$P_{ij} = P_{ij} /a_i, b_j/ \quad /2.1/$$

gdzie:

$$i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots, i_k, \quad j = 1, 2, 3, \dots, l, \dots, j_k \quad /2.2/$$

Schemat statyczny tak obciążonej tarczy pokazano na rys.2.1.

Stan naprężenia w tarczy, o schemacie pokazanym na rys.
2.1, jest potrzebny do wyznaczania stanu granicznego płytowej
warstwy zewnętrznej, z warunku uplastycznienia minimalnego kry-
tycznego zbioru obszarów wokół punktów kontaktowych warstwy
zewnętrznej z warstwą środkową.



Rys.2.1. Schemat tarczy obciążonej siłami skupionymi.

Taki przypadek zniszczenia warstwy płytowej może wystąpić w przypadku zastosowania warstwy płytowej w rozciąganej strefie struktury przestrzennej. Rozwiązanie to może być również użyteczne przy badaniu zagadnień jednoczesnego zginania i ściskania płytowej warstwy zewnętrznej, drogą całkowania równania różniczkowego płyty /patrz pkt.3.1/.

Ugodczikow A.G. [46] podał ogólne /zespolone/ rozwiązanie tarczy jednospójnej obciążonej dowolnym układem sił. Obciążenie tarczy, w postaci sił skupionych, obciążeń ciągłych i momentów skupionych, może być przyłożone do konturu tarczy lub działać wewnątrz jej obszaru.

Praktyczną postać rozwiązania ogólnego, podanego przez Ugodczikowa A.G. w [46], zaproponował Rykaluk K. w pracy [38]. Otrzymane rozwiązanie ogólne tarczy jednospójnej, podane w pracach [46] i [38], jest jednak bardzo złożone. Wykorzystanie go dla rozpatrywanego schematu obciążenia rys.2.1 jest związane z kłopotliwymi obliczeniami numerycznymi.

Z tych też względów, dla rozpatrywanego schematu tarczy rys. 2.1, bardziej przydatną okazuje się metoda różnic skończonych lub metoda elementów skończonych. Dla tarcz obciążonych dowolnym układem sił /siły skupione, obciążenia ciągłe, momenty skupione/, przyłożonych do konturu lub działających wewnątrz jej obrębu, sporządzone są gotowe programy do obliczeń przy pomocy ETO [6], [49], [51].

Brańicki Cz., Wysiatycki W., Brzowy A., w pracy [6], podali rozwiązanie tarczy obciążonej w sposób dyskretny oraz omówili zasadę budowy zrealizowanego programu na EMC. Zagadnienie rozwiązano metodą elementów skończonych.

W celu przeanalizowania tarczowej pracy warstwy zewnętrznej rozpatrywanych struktur przestrzennych i ustalenia minimalnego krytycznego zbioru obszarów uplastycznionych wokół punktów kontaktowych, przyjęto do rozważań tarczę nieograniczoną o schemacie pokazanym na rys.2.1. Przyjęcie schematu tarczy nieograniczonej /w rzeczywistości kontury tarczy są zdeterminowane/ należy traktować jako pierwsze przybliżenie przy wstępnym wymiarowaniu płytowej warstwy zewnętrznej.

Zagadnieniem stanu naprężenia w tarczy nieograniczonej obciążonej siłą skupioną, zajmowało się wielu autorów [14] , [15] , [26] , [41] . Stosując metodę funkcji zmiennej zespolonej uzyskano wyniki w postaci zamkniętej.

Korzystając z prawa nierozdzielności działania sił i odkształceń, wynikającego bezpośrednio z równania różniczkowego tarczy

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad /2.3/$$

możemy drogą superpozycji uzyskać rozwiązanie tarczy nieograniczonej obciążonej dowolnym układem sił skupionych.

Rozwiązanie tarczy nieograniczonej, obciążonej w sposób pokazany na rys.2.1, uzyskano drogą superpozycji rozwiązania tarczy obciążonej pojedynczą siłą skupioną.

2.2. STAN NAPRĘŻENIA W TARCZY NIEOGRANICZONEJ OBCIĄŻONEJ SIŁAMI SKUPIONYMI DZIAŁAJĄCYMI WEWNĄTRZ JEJ OBSZARU

Rozpatrzono izotropową tarczę nieograniczoną, o stałej grubości g , obciążoną siłami skupionymi P_{ij} .

Siły P_{ij} działają w płaszczyźnie środkowej tarczy i są zaczepione w punktach $/a_i, b_j/$ kartezjańskiego układu współrzędnych $/i, j$ według /2.2/ /.

Schemat tak obciążonej tarczy pokazano na rys.2.1.

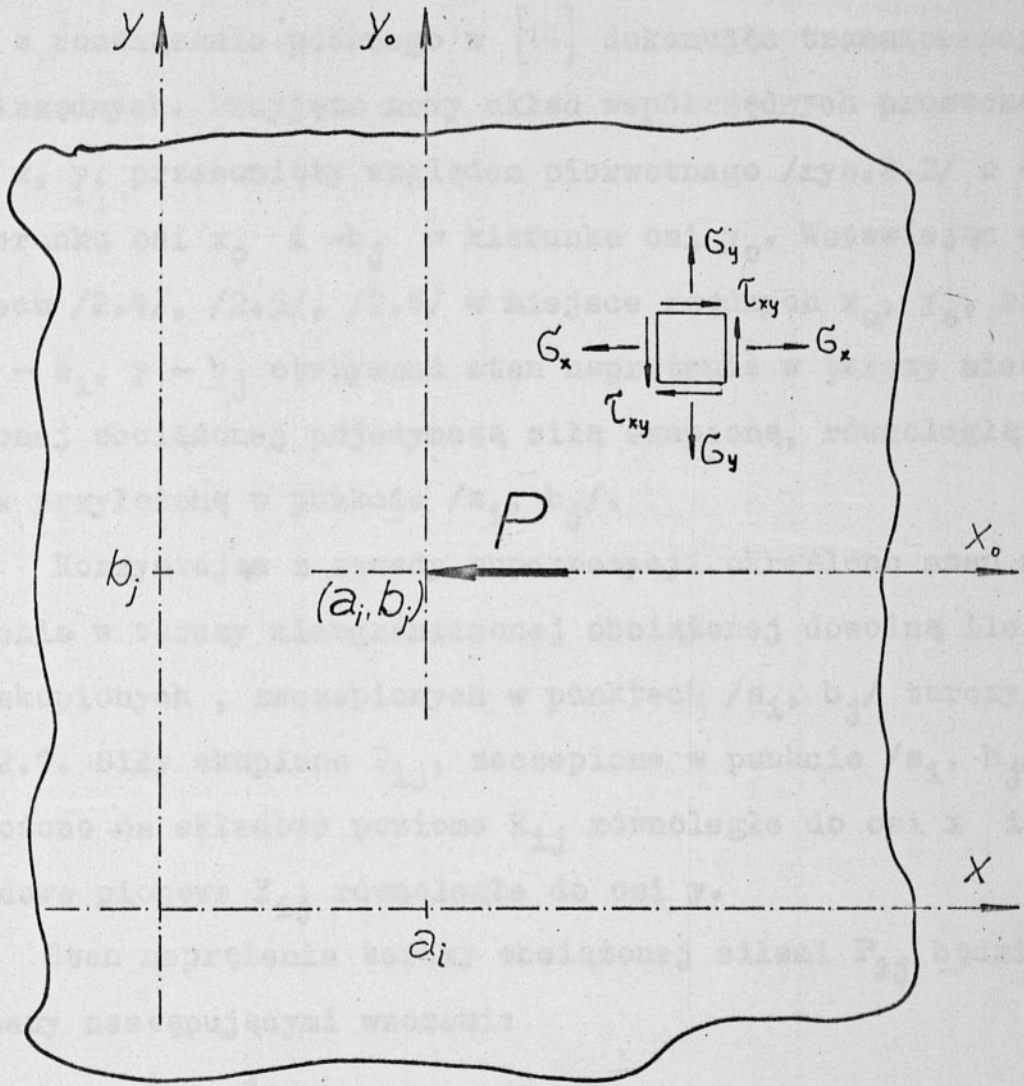
Równanie opisujące stan naprężenia w tarczy izotropowej /2.1/ jest równaniem liniowym. Rozwiązanie szczegółowe /dla danego stanu obciążenia/ można w takim przypadku superponować między sobą /przemnożyć przez stałe oraz dowolnie dodawać/.

Girkman K., w pracy [14], podał rozwiązanie tarczy nieograniczonej, obciążonej pojedynczą siłą skupioną przyłożoną w punkcie $/0,0/$, równoległą do osi x_0 , prostokątnego układu współrzędnych x_0, y_0 . Schemat tak obciążonej tarczy pokazano na rys.2.2. Stan naprężenia w tarczy opisany jest wzorami:

$$\sigma_x = \frac{P}{4\pi g} \left[\frac{3 + \nu}{2} \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{1 + \nu}{2} \frac{2x_0 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \right] \quad /2.4/$$

$$\sigma_y = \frac{-P}{4\pi g} \left[\frac{1 - \nu}{2} \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{1 + \nu}{2} \frac{2x_0 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \right] \quad /2.5/$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{4\pi g} \left[\frac{1 - \nu}{2} \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{1 + \nu}{2} \frac{2x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \right] \quad /2.6/$$



Rys.2.2. Tarcza nieograniczona obciążona siłą skupioną P

W celu uzyskania rozwiązania tarczy obciążonej siłą skupioną zaczepioną w dowolnym punkcie jej obszaru, skorzystano z rozwiązania podanego w [14] dokonując transformacji współrzędnych. Przyjęto nowy układ współrzędnych prostokątnych x, y , przesunięty względem pierwotnego /rys.2.2/ o $-a_i$ w kierunku osi x_0 i $-b_j$ w kierunku osi y_0 . Wstawiając we wzorach /2.4/, /2.5/, /2.6/ w miejsce rzędnych x_0, y_0 , rzędne $x - a_i, y - b_j$ otrzymano stan naprężenia w tarczy nieograniczonej obciążonej pojedynczą siłą skupioną, równoległą do osi x przyłożoną w punkcie $/a_i, b_j/$.

Korzystając z zasady superpozycji określono stan naprężenia w tarczy nieograniczonej obciążonej dowolną ilością sił skupionych, zaczepionych w punktach $/a_i, b_j/$ tarczy, rys.2.1. Siły skupione P_{ij} , zaczepione w punkcie $/a_i, b_j/$, rozłożono na składowe poziome X_{ij} równoległe do osi x i składowe pionowe Y_{ij} równoległe do osi y .

Stan naprężenia tarczy obciążonej siłami P_{ij} będzie opisany następującymi wzorami:

$$\sigma_x = \frac{1}{4\pi g} \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \frac{1}{x_i^2 + y_j^2} \left[X_{ij} \frac{x_i}{3} + \nu / + \right. \\ \left. - Y_{ij} \frac{y_j}{1 - \nu} / - /1 + \nu / \frac{2x_i y_j}{x_i^2 + y_j^2} / X_{ij} y_j - Y_{ij} x_i / \right] /2.7/$$

$$\sigma_y = \frac{1}{4\pi g} \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \frac{1}{x_i^2 + y_j^2} \left[Y_{ij} y_j / 3 + \nu / x_i - X_{ij} x_i / (1-\nu) + \right. \\ \left. - / 1 + \nu / \frac{2x_i y_j}{x_i^2 + y_j^2} / Y_{ij} x_i - X_{ij} y_j / \right] \quad /2.8/$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{4\pi g} \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \frac{1}{x_i^2 + y_j^2} \left[\nu X_{ij} y_j + Y_{ij} x_i / / 1 - \nu / + \right. \\ \left. + / 1 + \nu / \frac{2x_i y_j}{x_i^2 + y_j^2} / X_{ij} x_i + Y_{ij} y_j / \right] \quad /2.9/$$

Naprężenia w tarczy nieograniczonej obciążonej siłami skupionymi P_{ij} , o składowych X_{ij} , Y_{ij} , przyłożonymi w dowolnych punktach jej obszaru, można wyznaczyć korzystając ze wzorów /2.7/ + /2.9/.

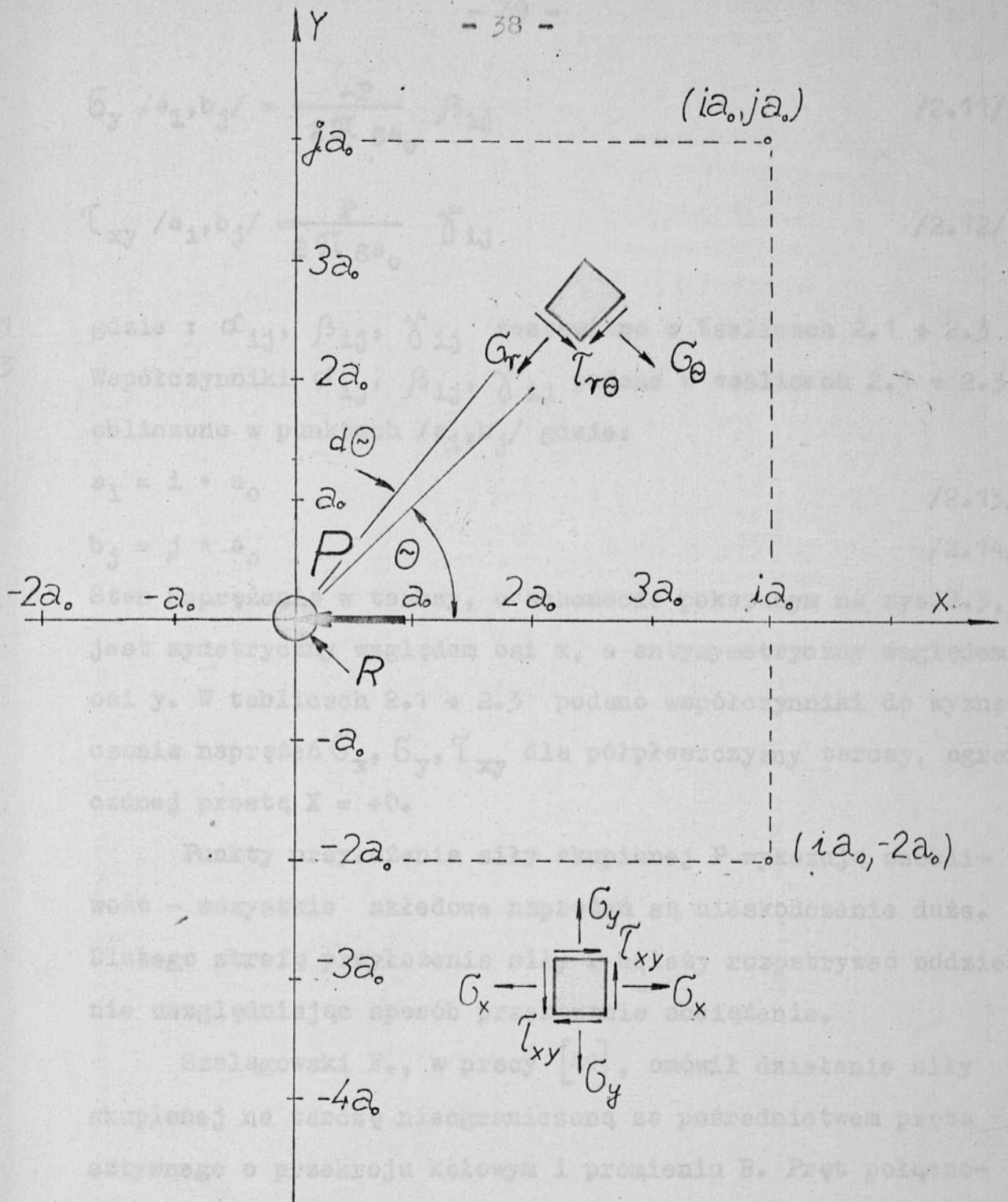
Wyznaczanie stanu naprężenia w tarczy nieograniczonej obciążonej siłami skupionymi, w przypadku rytmicznego usytuowania punktów zaczepienia sił $/a_i = ia_0, b_j = ja_0/$, proponuje się przeprowadzać korzystając ze stabelaryzowanych wartości składowych naprężeń.

W tym celu stabelaryzowano składowe naprężenia w punktach $/a_i = ia_0, b_j = ja_0/$ tarczy obciążonej pojedynczą siłą skupioną, równoległą do osi x , przyłożoną w punkcie $/0,0/$.

2.3

Schemat tarczy pokazano na rys.2.3. Składowe stanu naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ w tarczy pokazanej na rys.2.3 obliczono dla $\nu = 0,30$ i wynoszą one:

$$\sigma_x / a_i, b_j / = \frac{P}{2\pi g a_0} \alpha_{ij} \quad /2.10/$$



Rys.2.3. Schemat tarczy nieograniczonej obciążonej siłą skupioną P, za pośrednictwem trzpienia o promieniu R

$$\sigma_y / a_i, b_j / = \frac{-P}{2\pi g a_0} \beta_{ij} \quad /2.11/$$

$$\tau_{xy} / a_i, b_j / = \frac{P}{2\pi g a_0} \gamma_{ij} \quad /2.12/$$

1.2.1 gdzie : α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} zestawiono w tablicach 2.1 + 2.3
2.3 Współczynniki α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} podane w tablicach 2.1 + 2.3 obliczono w punktach $/a_i, b_j /$ gdzie:

$$a_i = i \cdot a_0 \quad /2.13/$$

$$b_j = j \cdot a_0 \quad /2.14/$$

Stan naprężenia w tarczy, o schemacie pokazanym na rys.2.3, jest symetryczny względem osi x, a antysymetryczny względem osi y. W tablicach 2.1 + 2.3 podano współczynniki do wyznaczenia naprężeń σ_x , σ_y , τ_{xy} dla półpłaszczyzny tarczy, ograniczonej prostą $X = +0$.

Punkty przyłożenia siły skupionej P wykazują osobliwość - wszystkie składowe naprężeń są nieskończenie duże. Dlatego strefę przyłożenia siły P należy rozpatrywać oddzielnie uwzględniając sposób przekazania obciążenia.

Szelągowski F., w pracy [41], omówił działanie siły skupionej na tarczę nieograniczoną za pośrednictwem pręta sztywnego o przekroju kołowym i promieniu R. Pręt połączony jest z tarczą na całym swym obwodzie np. za pomocą spawania.

Składowe naprężenia w tak obciążonej tarczy pokazanej na rys.2.3, we współrzędnych biegunowych R, θ , dla $r = R$ i $\nu = 0,3$, opisane są wzorami:

Tabl.2.1. Współczynniki α_{ij} do wzoru /2.15/

Tabl.2.2. Współczynniki β_{ij} do wzoru /2.15/

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	-0.13700	-0.13581	-0.13093	-0.12341	-0.11400	-0.10350	-0.09266	-0.08206	-0.07211	-0.06304	-0.05494
1	-0.15000	-0.14781	-0.14153	-0.13200	-0.12029	-0.10754	-0.09472	-0.08251	-0.07136	-0.06146	-0.05284
0	-0.16500	-0.16209	-0.15384	-0.14152	-0.12678	-0.11120	-0.09602	-0.08204	-0.06967	-0.05901	-0.05000
9	-0.18333	-0.17935	-0.16822	-0.15200	-0.13319	-0.11406	-0.09615	-0.08030	-0.06679	-0.05555	-0.04633
8	-0.20625	-0.20061	-0.18512	-0.16325	-0.13900	-0.11549	-0.09456	-0.07690	-0.06250	-0.05096	-0.04182
7	-0.23571	-0.22736	-0.20496	-0.17479	-0.14323	-0.11453	-0.09054	-0.07142	-0.05660	-0.04523	-0.03652
6	-0.27500	-0.26187	-0.22800	-0.18533	-0.14423	-0.10989	-0.08333	-0.06357	-0.04908	-0.03846	-0.03062
5	-0.33000	-0.30769	-0.25356	-0.19204	-0.13935	-0.10000	-0.07236	-0.05332	-0.04017	-0.03097	-0.02440
4	-0.41250	-0.37024	-0.27800	-0.18912	-0.12500	-0.08364	-0.05769	-0.04123	-0.03050	-0.02327	-0.01825
3	-0.55000	-0.45600	-0.28846	-0.16666	-0.09816	-0.06124	-0.04066	-0.02853	-0.02097	-0.01600	-0.01258
2	-0.82500	-0.55600	-0.25000	-0.11538	-0.06100	-0.03650	-0.02400	-0.01691	-0.01254	-0.00967	-0.00769
1	-1.65000	-0.50000	-0.12200	-0.04800	-0.02508	-0.01538	-0.01040	-0.00752	-0.00569	-0.00446	-0.00359
0		0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	1.65000	0.50000	0.12200	0.04800	0.02508	0.01538	0.01040	0.00752	0.00569	0.00446	0.00359
2	0.82500	0.55600	0.25000	0.11538	0.06100	0.03650	0.02400	0.01691	0.01254	0.00967	0.00769
3	0.55000	0.45600	0.28846	0.16666	0.09816	0.06124	0.04066	0.02853	0.02097	0.01600	0.01258
4	0.41250	0.37024	0.27800	0.18912	0.12500	0.08364	0.05769	0.04123	0.03050	0.02327	0.01825
5	0.33000	0.30769	0.25356	0.19204	0.13935	0.10000	0.07236	0.05332	0.04017	0.03097	0.02440
6	0.27500	0.26187	0.22800	0.18533	0.14423	0.10989	0.08333	0.06357	0.04908	0.03846	0.03062
7	0.23571	0.22736	0.20496	0.17479	0.14323	0.11453	0.09054	0.07142	0.05660	0.04523	0.03652
8	0.20625	0.20061	0.18512	0.16325	0.13900	0.11549	0.09456	0.07690	0.06250	0.05096	0.04182
9	0.18333	0.17935	0.16822	0.15200	0.13319	0.11406	0.09615	0.08030	0.06679	0.05555	0.04633
0	0.16500	0.16209	0.15384	0.14152	0.12678	0.11120	0.09602	0.08204	0.06967	0.05901	0.05000
1	0.15000	0.14781	0.14153	0.13200	0.12029	0.10754	0.09472	0.08251	0.07136	0.06146	0.05284
2	0.13750	0.13581	0.13093	0.12341	0.11400	0.10350	0.09266	0.08206	0.07211	0.06304	0.05494

Tabl.2.2. Współczynniki β_{ij} do wzoru /2.16/

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-12	-0.02916	-0.02822	-0.02553	-0.02145	-0.01650	-0.01119	-0.00600	-0.00124	0.00288	0.00629	0.00899
-11	-0.03181	-0.03059	-0.02713	-0.02200	-0.01591	-0.00959	-0.00363	0.00159	0.00593	0.00932	0.01185
-10	-0.03500	-0.03337	-0.02884	-0.02226	-0.01471	-0.00720	-0.00043	0.00520	0.00959	0.01280	0.01500
-9	-0.03888	-0.03667	-0.03058	-0.02200	-0.01257	-0.00368	0.00384	0.00969	0.01389	0.01666	0.01831
-8	-0.04375	-0.04061	-0.03218	-0.02079	-0.00900	0.00136	0.00944	0.01513	0.01875	0.02075	0.02159
-7	-0.05000	-0.04536	-0.03326	-0.01789	-0.00323	0.00843	0.01651	0.02142	0.02392	0.02476	0.02454
-6	-0.05833	-0.05105	-0.03300	-0.01200	0.00576	0.01797	0.02500	0.02819	0.02892	0.02820	0.02673
-5	-0.07000	-0.05769	-0.02942	-0.00086	0.01918	0.03000	0.03419	0.03451	0.03285	0.03034	0.02760
-4	-0.08750	-0.06436	-0.01800	0.01888	0.03750	0.04318	0.04230	0.03876	0.03450	0.03033	0.02657
-3	-0.11666	-0.06600	0.01153	0.05000	0.05784	0.05346	0.04600	0.03870	0.03245	0.02733	0.02319
-2	-0.17500	-0.03600	0.07500	0.08461	0.06900	0.05315	0.04100	0.03214	0.02569	0.02091	0.01730
-1	-0.35000	0.15000	0.13800	0.08200	0.05138	0.03461	0.02472	0.01848	0.01430	0.01139	0.00927
0		0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.35000	-0.15000	-0.13800	-0.08200	-0.05138	-0.03451	-0.02472	-0.01848	-0.01430	-0.01139	-0.00927
2	0.17500	0.03600	-0.07500	-0.06461	-0.06900	-0.05315	-0.04100	-0.03214	-0.02569	-0.02091	-0.01730
3	0.11666	0.06600	-0.01153	-0.05000	-0.05784	-0.05346	-0.04600	-0.03870	-0.03245	-0.02733	-0.02319
4	0.08750	0.06436	0.01800	-0.01888	-0.03750	-0.04318	-0.04230	-0.03876	-0.03450	-0.03033	-0.02657
5	0.07000	0.05769	0.02942	0.00086	-0.01918	-0.03000	-0.03419	-0.03451	-0.03285	-0.03034	-0.02760
6	0.05833	0.05105	0.03300	0.01200	-0.00576	-0.01797	-0.02500	-0.02819	-0.02892	-0.02820	-0.02673
7	0.05000	0.04536	0.03326	0.01789	0.00322	-0.00843	-0.01651	-0.02142	-0.02392	-0.02476	-0.02454
8	0.04375	0.04061	0.03218	0.02079	0.00900	-0.00136	-0.00944	-0.01513	-0.01875	-0.02075	-0.02159
9	0.03888	0.03667	0.03058	0.02200	0.01257	0.00368	-0.00384	-0.00969	-0.01389	-0.01666	-0.01831
10	0.03500	0.03337	0.02884	0.02226	0.01471	0.00720	0.00043	-0.00520	-0.00959	-0.01280	-0.01500
11	0.03181	0.03059	0.02713	0.02200	0.01591	0.00959	0.00363	-0.00159	-0.00593	-0.00932	-0.01185
12	0.02916	0.02822	0.02553	0.02145	0.01650	0.01119	0.00600	0.00124	-0.00288	-0.00629	-0.00899

Tabl.2.3. Współczynniki γ_{ij} do wzoru /2.17/

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-12	0.00000	0.01131	0.02182	0.03085	0.03800	0.04312	0.04633	0.04787	0.04807	0.04728	0.04578
-11	0.00000	0.01343	0.02573	0.03600	0.04374	0.04888	0.05166	0.05251	0.05190	0.05028	0.04804
-10	0.00000	0.01620	0.03076	0.04245	0.05071	0.05560	0.05761	0.05743	0.05574	0.05311	0.05000
-9	0.00000	0.01992	0.03738	0.05066	0.05919	0.06336	0.06410	0.06246	0.05937	0.05555	0.05147
-8	0.00000	0.02507	0.04628	0.06122	0.06950	0.07218	0.07092	0.06729	0.06250	0.05733	0.05227
-7	0.00000	0.03248	0.05856	0.07491	0.08184	0.08181	0.07760	0.07142	0.06468	0.05815	0.05218
-6	0.00000	0.04364	0.07600	0.09266	0.09615	0.09157	0.08333	0.07416	0.07544	0.05769	0.05103
-5	0.00000	0.06153	0.10142	0.11522	0.11148	0.10000	0.08683	0.07465	0.06428	0.05574	0.04880
-2	0.00000	0.09256	0.13900	0.14184	0.12500	0.10455	0.08653	0.07215	0.06100	0.05237	0.04563
-3	0.00000	0.15200	0.19230	0.16666	0.13088	0.10207	0.08133	0.06658	0.05592	0.04800	0.04195
-2	0.00000	0.27800	0.25000	0.17307	0.12200	0.09126	0.07200	0.05918	0.05017	0.04353	0.03846
-1	0.00000	0.50000	0.24400	0.14400	0.10034	0.07692	0.06245	0.05264	0.04553	0.04015	0.03592
0		0.35000	0.17500	0.11666	0.08750	0.07000	0.05833	0.05000	0.04375	0.03888	0.03500
1	0.00000	0.50000	0.24400	0.14400	0.10034	0.07692	0.06245	0.05264	0.04553	0.04015	0.03592
2	0.00000	0.27800	0.25000	0.17307	0.12200	0.09126	0.07200	0.05918	0.05017	0.04353	0.03846
3	0.00000	0.15200	0.19230	0.16666	0.13088	0.10207	0.08133	0.06658	0.05592	0.04800	0.04195
4	0.00000	0.09256	0.13900	0.14184	0.12500	0.10455	0.08653	0.07215	0.06100	0.05237	0.04563
5	0.00000	0.06153	0.10142	0.11522	0.11148	0.10000	0.08683	0.07465	0.06428	0.05574	0.04880
6	0.00000	0.04364	0.07600	0.09266	0.09615	0.09157	0.08333	0.07416	0.07544	0.05769	0.05103
7	0.00000	0.03248	0.05856	0.07491	0.08184	0.08181	0.07760	0.07142	0.06468	0.05815	0.05218
8	0.00000	0.02507	0.04628	0.06122	0.06950	0.07218	0.07092	0.06729	0.06250	0.05733	0.05227
9	0.00000	0.01992	0.03738	0.05066	0.05919	0.06336	0.06410	0.06246	0.05937	0.05555	0.05147
10	0.00000	0.01620	0.03076	0.04245	0.05071	0.05560	0.05761	0.05743	0.05574	0.05311	0.05000
11	0.00000	0.01343	0.02573	0.03600	0.04374	0.04888	0.05166	0.05251	0.05190	0.05028	0.04804
12	0.00000	0.01131	0.02182	0.03085	0.03800	0.04312	0.04633	0.04787	0.04807	0.04728	0.04578

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi Rg} \cos \theta \quad /2.15/$$

$$\sigma_\theta = \frac{0,3 P}{2\pi Rg} \cos \theta \quad /2.16/$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-P}{2\pi Rg} \sin \theta \quad /2.17/$$

Stan naprężenia w tarczy obciążonej dowolnym układem sił skupionych P_{ij} , rys.2.1, wyznaczmy superponując rozwiązania tarcz obciążonych pojedynczymi składowymi X_{ij}, Y_{ij} . Maksymalne wyćężenie materiału, dla rozpatrywanego schematu obciążenia tarczy, wystąpi w punktach przyłożenia sił skupionych.

Dlatego superponując rozwiązania tarcz, obciążonych składowymi X_{ij}, Y_{ij} należy wyznaczyć stan naprężenia w punktach przyłożenia sił skupionych. Stan naprężenia w punkcie $/a_k, b_l/$ tarczy będzie sumą naprężeń od sił działających w punktach $/a_i, b_j/$ oraz naprężeń od siły działającej bezpośrednio w punkcie $/a_k, b_l/$. Tak obliczone składowe stanu naprężenia należy zsumować [15] wg wzoru:

$$\sigma_{zred}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \quad /2.18/$$

Korzystając z tablic 2.1 + 2.3 możemy wyznaczyć stan naprężenia w punkcie $/a_k, b_l/$ tarczy, obciążonej dowolnym układem sił /poza strefami wokół punktów osobliwych wydzielonych promieniem $R/$ według wzoru:

$$\sigma_x /a_k, b_l/ = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \sigma_x^{kl} /a_i, b_j/ \quad /2.19/$$

$$\sigma_y / a_k, b_l / = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \sigma_y^{kl} / a_i, b_j / \quad /2.20/$$

$$\tau_{xy} / a_k, b_l / = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \tau_{xy}^{kl} / a_i, b_j / \quad /2.21/$$

gdzie :

$\sigma_x^{kl} / a_i, b_j /$, $\sigma_y^{kl} / a_i, b_j /$, $\tau_{xy}^{kl} / a_i, b_j /$ - składowe stanu naprężenia , w punkcie $/a_k, b_l /$, od siły przyłożonej w punkcie $/a_i, b_j /$.

2.3. ALGORYTM OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Stan naprężenia w tarczy jednorodnej, stanowiącej płytową warstwę zewnętrzną rozpatrywanych struktur przestrzennych, obciążonej siłami kontaktowymi, można wyznaczyć korzystając z rozwiązania zamieszczonego w [6].

Z rozważań przeprowadzonych w punkcie 2.2 wynika, że dodatkowej analizy statycznej wymagają strefy przyłożenia obciążeń skupionych, a składowe naprężeń w tych punktach zależą od sposobu przekazywania obciążeń. Ponadto dla rozważanego schematu obciążenia rys.2.1, maksymalne wyężenia materiału wystąpią wokół punktów działania sił kontaktowych. Można więc wnosić, że w stanie granicznym obciążenia tarczy, wokół punktów kontaktowych warstwy zewnętrznej z warstwą środkową, wystąpią uplastycznienia materiału.

W przypadku wyznaczania stanu naprężenia metodą elementów skończonych [6] należy zagęścić podział tarczy na elementy wokół punktów kontaktowych.

Wstępne wymiarowanie płytowej warstwy zewnętrznej, umieszczonej w rozciąganej strefie struktury przestrzennej, proponuje się przeprowadzić dla schematu tarczy nieograniczonej korzystając z rozwiązań zamieszczonych w punkcie 2.2. W tym celu należy ustalić takie parametry warstwy zewnętrznej jak: a , b , a_i , b_j , g , ν , P_{ij} , i , j oraz sposób przekazywania obciążeń kontaktowych.

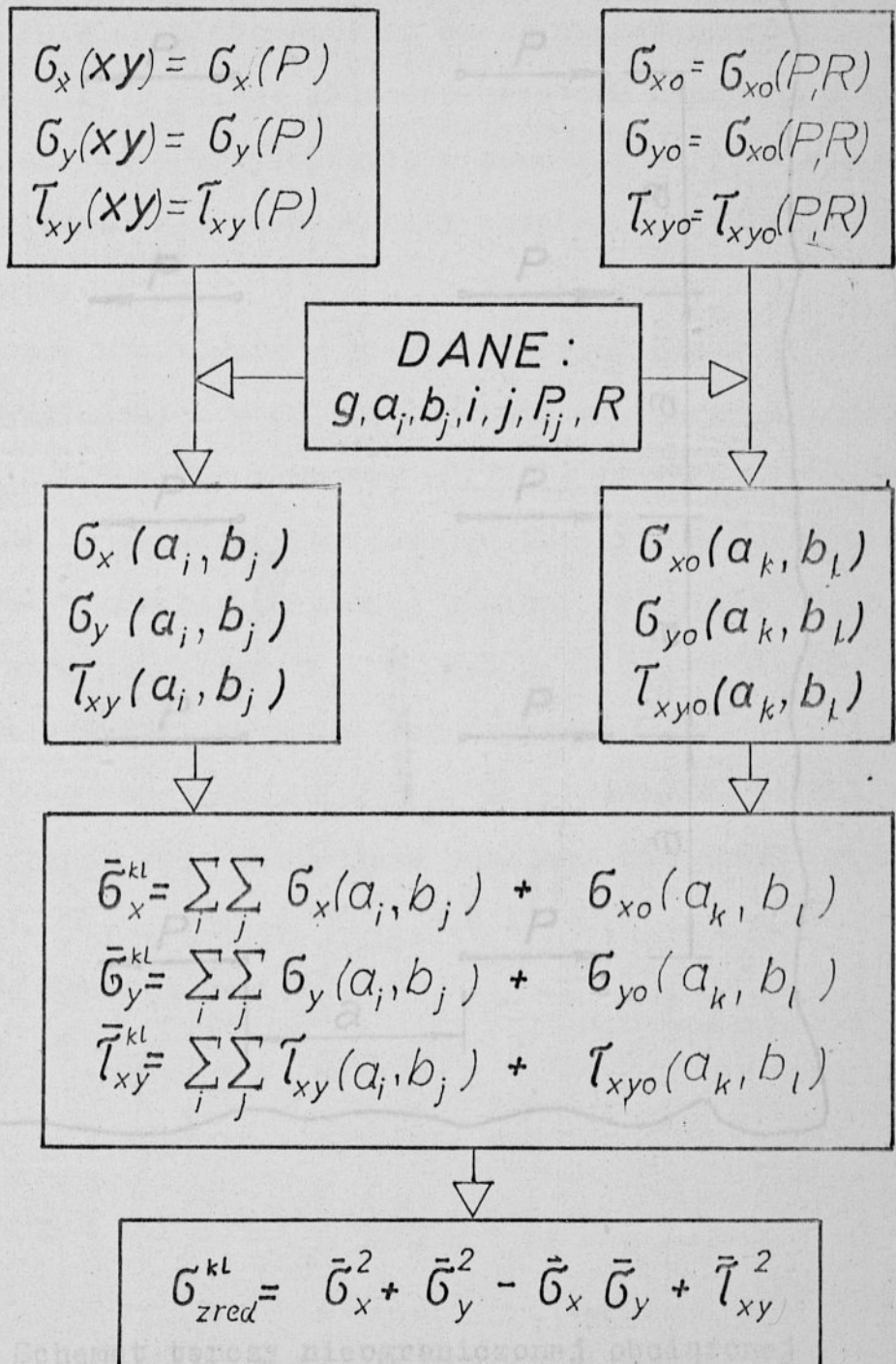
Schemat blokowy obliczeń numerycznych stanu naprężenia w tarczy obciążonej siłami skupionymi pokazano na rys.2.4.

2.4. PRZYKŁAD LICZBOWY

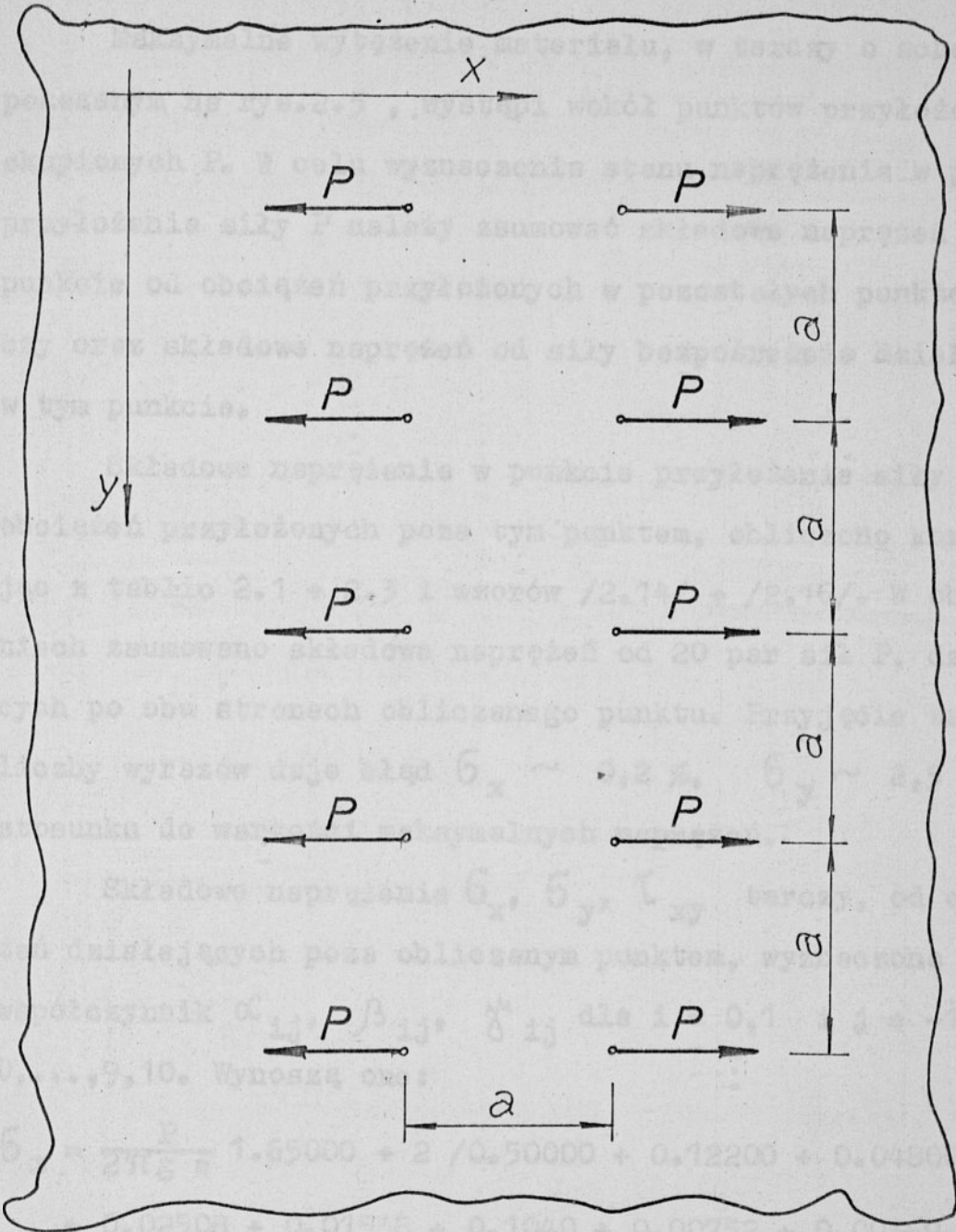
Jako ilustrację opisanego w punkcie 2.3 algorytmu obliczeń numerycznych obliczono następujący przykład liczbowy.

Rozpatrzono nieograniczoną tarczę izotropową, o grubości g , obciążoną nieskończoną liczbą par sił skupionych P . Odległości sił w kierunku działania obciążeń oraz w kierunku prostopadłym wynoszą a . Schemat tak obciążonej tarczy pokazano na rys.2.5.

Obciążenie przekazywane jest za pośrednictwem prętów o promieniu R połączonych z tarczą.



Rys.2.4 Schemat blokowy wyznaczania stanu naprężeń w tarczy obciążonej siłami skupionymi



Rys.2.5. Schemat tarczy nieograniczonej obciążonej parami sił skupionych P

Maksymalne wyteżenie materiału, w tarczy o schemacie pokazanym na rys.2.5 , wystąpi wokół punktów przyłożenia sił skupionych P. W celu wyznaczenia stanu naprężenia w punkcie przyłożenia siły P należy zsumować składowe naprężeń w tym punkcie od obciążeń przyłożonych w pozostałych punktach tarczy oraz składowe naprężeń od siły bezpośrednio działającej w tym punkcie.

Składowe naprężenia w punkcie przyłożenia siły P, od obciążeń przyłożonych poza tym punktem, obliczono korzystając z tablic 2.1 + 2.3 i wzorów /2.14/ + /2.16/. W obliczeniach zsumowano składowe naprężeń od 20 par sił P, działających po obu stronach obliczanego punktu. Przyjęcie takiej liczby wyrazów daje błąd $\sigma_x \sim 0,2\%$, $\sigma_y \sim 2,5\%$ w stosunku do wartości maksymalnych naprężeń.

Składowe naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} tarczy, od obciążeń działających poza obliczanym punktem, wyznaczono sumując współczynniki α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} dla $i = 0,1$ i $j = -10, -9, \dots, 0, \dots, 9, 10$. Wynoszą one:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{P}{2\pi g a} & 1.65000 + 2 / 0.50000 + 0.12200 + 0.04800 + \\ & + 0.02508 + 0.01538 + 0.1040 + 0.00752 + 0.00569 + \\ & + 0.00446 + 0.00359/ = \frac{P}{2\pi g a} \cdot 3,1342 \quad /2.23/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{P}{2\pi g a} & 0,35000 - 2 / 0,15000 + 0.13800 + 0.08200 + \\ & + 0.05138 + 0.03461 + 0.02472 + 0.01848 + 0.01430 + \\ & + 0.01139 + 0,00927/ = \frac{P}{2\pi g a} \cdot 0,7183 \quad /2.24/ \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad /2.25/$$

Składowe naprężenia od siły P, przyłożonej w rozważonym punkcie tarczy, wyznaczono korzystając z zależności /2.17/ + /2.19/. Wynoszą one:

$$\sigma_{x_0} = \frac{P}{2\pi R g} \quad /2.26/$$

$$\sigma_{y_0} = \frac{0,3 P}{2\pi R g} \quad /2.27/$$

$$\tau_{xy_0} = \frac{-P}{2\pi R g} \quad /2.28/$$

Stan naprężenia w tarczy pokazanej na rys.2.5 opisany jest następującymi zależnościami:

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi g} /3,1342 \frac{1}{a} + \frac{1}{R}/ \quad /2.29/$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi g} /0,7183 \frac{1}{a} + \frac{3}{10 R}/ \quad /2.30/$$

$$\tau_{xy} = \frac{-P}{2\pi R g} \quad /2.31/$$

Naprężenia zredukowane obliczone wg hipotezy Hubera /2.18/ wynoszą:

$$\sigma_{zred} = \frac{P}{2\pi g} \left[12,5905 \frac{1}{a^2} + 8,3668 \frac{1}{Ra} + 4,39 \frac{1}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad /2.32/$$

3. JEDNOCZESNE ZGINANIE I ŚCISKANIE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ PODPARTEJ I OBCIĄŻONEJ PUNKTOWO W SWYM OBSZARZE

3.1. WPROWADZENIE

W niniejszym rozdziale zajęto się określeniem zginania z uwzględnieniem sił osiowych płyty nieuźebrowanej, stanowiącej warstwę zewnętrzną rozpatrywanych dźwigarów przestrzennych.

Do rozważań przyjęto schemat statyczny płytowej warstwy zewnętrznej w postaci płyty ortotropowej o stałej grubości g . Płyta, podparta jest punktowo wewnątrz swego obszaru w $i \cdot j$ punktach. Punktowe podpory sprężyste, o współrzędnych $/a_i, b_j/$, posiadają różne podatności na przemieszczenia w kierunku odpowiednich osi: C_{ij}^x , C_{ij}^y , C_{ij}^z oraz różne sztywności giętne C_{ij}^{xz} , C_{ij}^{yz} . Charakterystyki sprężyste podpór są funkcją położenia. Schemat statyczny przestrzennej podpory sprężystej pokazano na rys.1.9.

Obciążeniem poprzecznym płyty są: siły skupione $R/x, y/$, skupione momenty zginające M^{xz} , M^{yz} oraz obciążenie ciągłe $q/x, y/$. Obciążeniem stycznym płyty, leżącym w płaszczyźnie środkowej płyty, są siły skupione P_{ij} o składowych X_{ij} , Y_{ij} . Działają one wewnątrz obszaru płyty i są przyłożone w punktach usytuowania sprężystych podpór płyty $/a_i, b_j/$. Schemat tak podpartej i obciążonej płyty pokazano na rys.1.10.

W celu określenia stanu granicznego płytowej, nieuźebrowanej warstwy zewnętrznej rozpatrywanych dźwigarów przestrzennych należy rozwiązać zagadnienie zginania z uwzględnieniem sił osiowych płyty ortotropowej, podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze.

O ile zginanie z uwzględnieniem sił osiowych płyt prostokątnych podpartych na krawędziach i obciążonych na tych krawędziach jest dostatecznie opracowane [14], [43], [44], dla różnych przypadków podparcia i obciążenia, o tyle zginanie płyt podpartych punktowo w swym obrębie i poddanych ścisaniu siłami skupionymi oraz płyt obciążonych wewnątrz swego obszaru jest w zasadzie nierozwiązane.

Lewe V. [43] rozwiązał zagadnienie zginania płyty prostokątnej podpartej punktowo w swym obrębie. Uzyskane rozwiązanie dotyczy przypadku zginania płyty prostokątnej, obciążonej równomiernie, przy rytmicznym usytuowaniu podpór.

Algorytm postępowania dla przypadków zginania płyt podpartych punktowo w sposób nieregularny i obciążonych dowolnym obciążeniem poprzecznym podał Timoschenko S. [43].

Zagadnieniami stateczności płyt podpartych punktowo zajmował się między innymi Nowacki W. [30], [31], [32]. W pracy [32] podano rozwiązanie płyty prostokątnej, podpartej przegubowo na obwodzie i punktowo w swym obrębie, poddanej jednoosiowemu ścisaniu przyłożonemu do krawędzi /poz.1, 2, tabl.

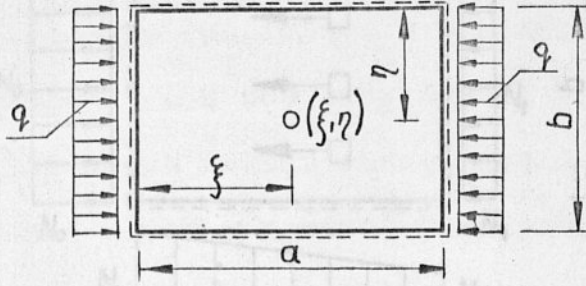
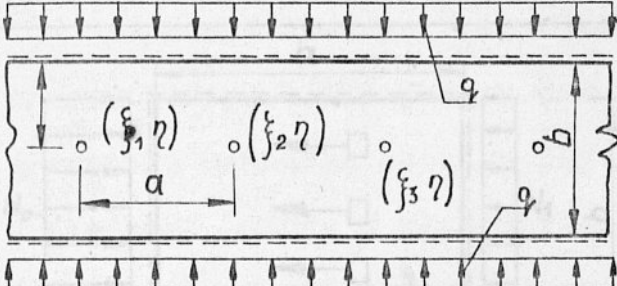
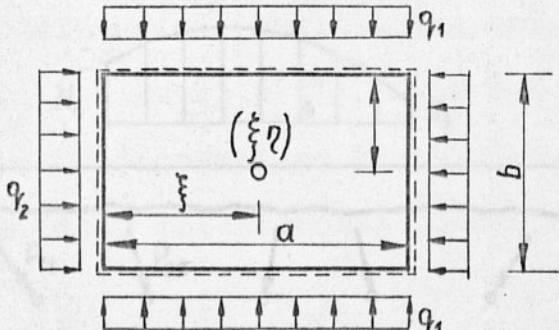
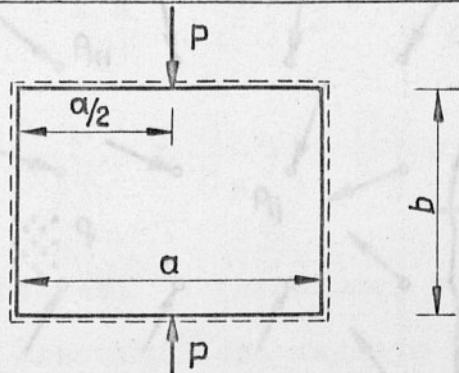
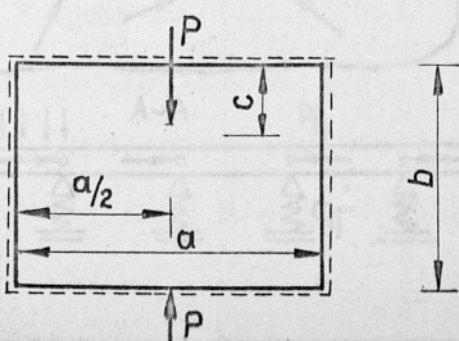
1.3.1. 3.1/.

Wojnowsky-Krieger S. [48] podał analogiczne rozwiązanie dla przypadku ścisania dwukierunkowego; obciążenie przyłożono do przeciwległych krawędzi płyty /poz.3, tabl.3.1/.

Statecznością płyt ścisanych siłami skupionymi zajmowało się niewielu autorów.

Timoschenko S. [44] rozwiązał zagadnienie wyboczenia płyty prostokątnej, podpartej przegubowo na obwodzie, ścisanej siłami skupionymi przyłożonymi do przeciwległych kra-

Tablica 3.1.

Lp	Schemat płyty	Autor rozwiązania
1		Nowacki W. [32]
2		Nowacki W. [31]
3		Wojnowsky - Krieger [48]
4		Timoschenko S. [44]
5		Walczak W. [47]

Tablica 3.1. c.d.

Ip.	Schemat płyty	Autor rozwiązania
6		<p>Favre H. [12] Kowal Z. [17]</p>
7		<p>Kowal Z. [17]</p>
8		

wędzi płyty /poz.4, tabl.3.1/.

Walczak W. [47] badał zagadnienie stateczności płyty prostokątnej, podpartej przegubowo na obwodzie, obciążonej siłą skupioną leżącą w płaszczyźnie środkowej płyty /poz.5, tabl.3.1/. W obu przypadkach krytyczną wartość obciążenia wyznaczono metodą energetyczną przyjmując funkcję odkształcenia płyty w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych.

W rozpatrywanym przypadku jednoczesnego ściskania i zginania /rys.1.10/ punkty przyłożenia obciążenia stycznego występują wewnątrz obszaru płyty. Obciążenia ściskające /rozciągające/ leżące w płaszczyźnie środkowej płyty są zmienne. Rozwiązanie zagadnienia zginania płyty poddanej ściskaniu /rozciąganiu/, obciążeniem zmieniającym się wewnątrz powierzchni środkowej płyty, może być określone drogą całkowania równania różniczkowego płyty z uwzględnieniem sił masowych.

Dla płyty ortotropowej równanie to ma postać:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + X \frac{\partial w}{\partial x} + Y \frac{\partial w}{\partial y} = q /x,y/ \quad /3.1/$$

Zagadnieniami stateczności płyt prostokątnych obciążonych siłami masowymi zajmował się Favre H. [12], Mazurkiewicz Z. [27], Kacner A. [16], Kowal Z. [17], [18].

Mazurkiewicz Z. [27] podał rozwiązanie ogólne zagadnienia zginania, stateczności i drgań płyty, na sprężystym podłożu, obciążonej siłami masowymi. Rozwiązanie zagadnienia uzys-

kał w postaci równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju. Omawiana praca nie zawiera przykładu rozwiązania płyty tym sposobem.

To samo zagadnienie, lecz dla płyt o zmiennej grubości rozwiązał Kacher A. [16] przy pomocy podwójnych szeregów Fouriera. Praca również nie zawiera przykładu rozwiązania płyty.

Favre H. [12], stosując metodę energetyczną, obliczył naprężenia krytyczne dla płyty prostokątnej podpartej przegubowo na obwodzie, obciążonej siłami masowymi o rozkładzie liniowym /poz.6, tabl.3.1/.

Kowal Z. [17], [18] podał krytyczne naprężenia dla płyt prostokątnych, podpartych przegubowo na obwodzie, poddanych ścisłaniu siłami masowymi o zmiennych rozkładach. Obliczono współczynniki naprężeń krytycznych płyt o różnych stosunkach boków, a wyniki liczbowe zamieszczono na wykresach i w tablicach. Zagadnienie rozwiązano za pomocą zasady prac przygotowanych /poz.6, 7, tabl.3.1/.

3.2. METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego płyty ortotropowej /3.1/, w przypadku występowania wszystkich członów równania, jest trudne, a uzyskanie rozwiązania zamkniętego dla rozpatrywanego schematu podparcia i obciążenia, pokazanego na rys.1.10, prawdopodobnie nie jest możliwe.

W celu uzyskania rozwiązania jednoczesnego zginania i ściskania /rozciągania/ płyty podpartej i obciążonej punktowo wewnątrz swego obszaru zastosowano metodę sił przyjmując za wielkości niewiadome oddziaływanie podpór punktowych.

Niech dana będzie płyta o dowolnych warunkach brzegowych, podparta ponadto punktowo wewnątrz swego obszaru, w punktach o współrzędnych $/a_i, b_j/$.

W ogólnym przypadku podpory punktowe mogą posiadać nieliniowe charakterystyki sprężyste: $C_{ij}^x, C_{ij}^y, C_{ij}^z, C_{ij}^{xz}, C_{ij}^{yz}, C_{ij}^{xy}$. Płyta obciążona jest poprzecznie i stycznie do swej płaszczyzny środkowej w sposób pokazany na rys.3.1.

Przyjęto schemat zastępczy płyty pokazanej na rys.3.1, utworzony przez usunięcie punktowych podpór sprężystych i zastąpienie ich odpowiednimi oddziaływaniami: $R_{ij}^x, R_{ij}^y, R_{ij}^z, R_{ij}^{xz}, R_{ij}^{yz}, R_{ij}^{xy}$. Schemat zastępczy płyty pokazano na rys.3.2.

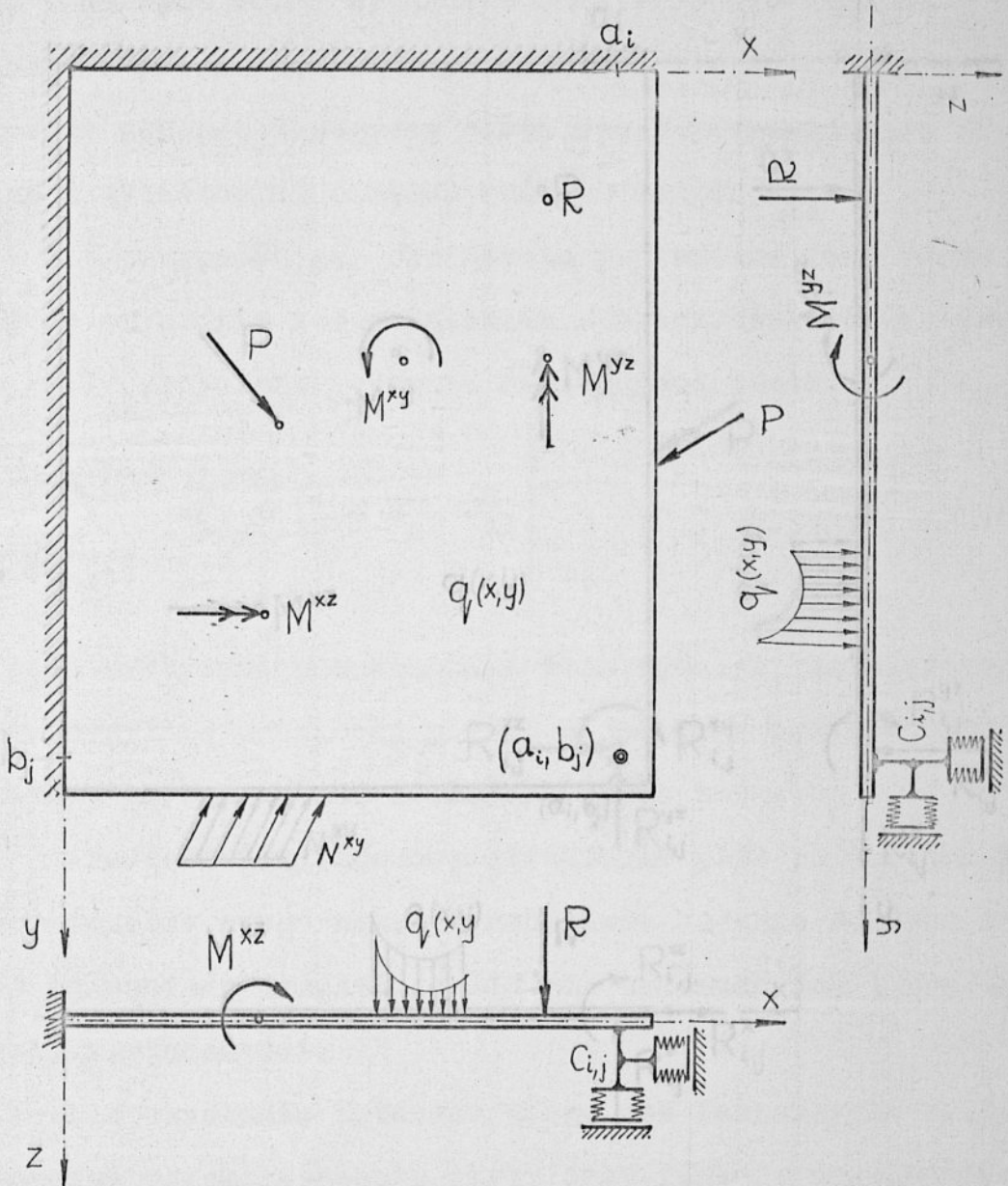
Niewiadome oddziaływania R_{ij}^n należy dobrać tak, aby dla wszystkich punktów podparcia płyty spełnione były równania:

$$\left| \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} R_{ij}^n \delta_{ij}^{kl} + \delta_q^{kl} = R_{kl}^n C_{kl}^n \right|_{k,l} \quad /3.2/$$

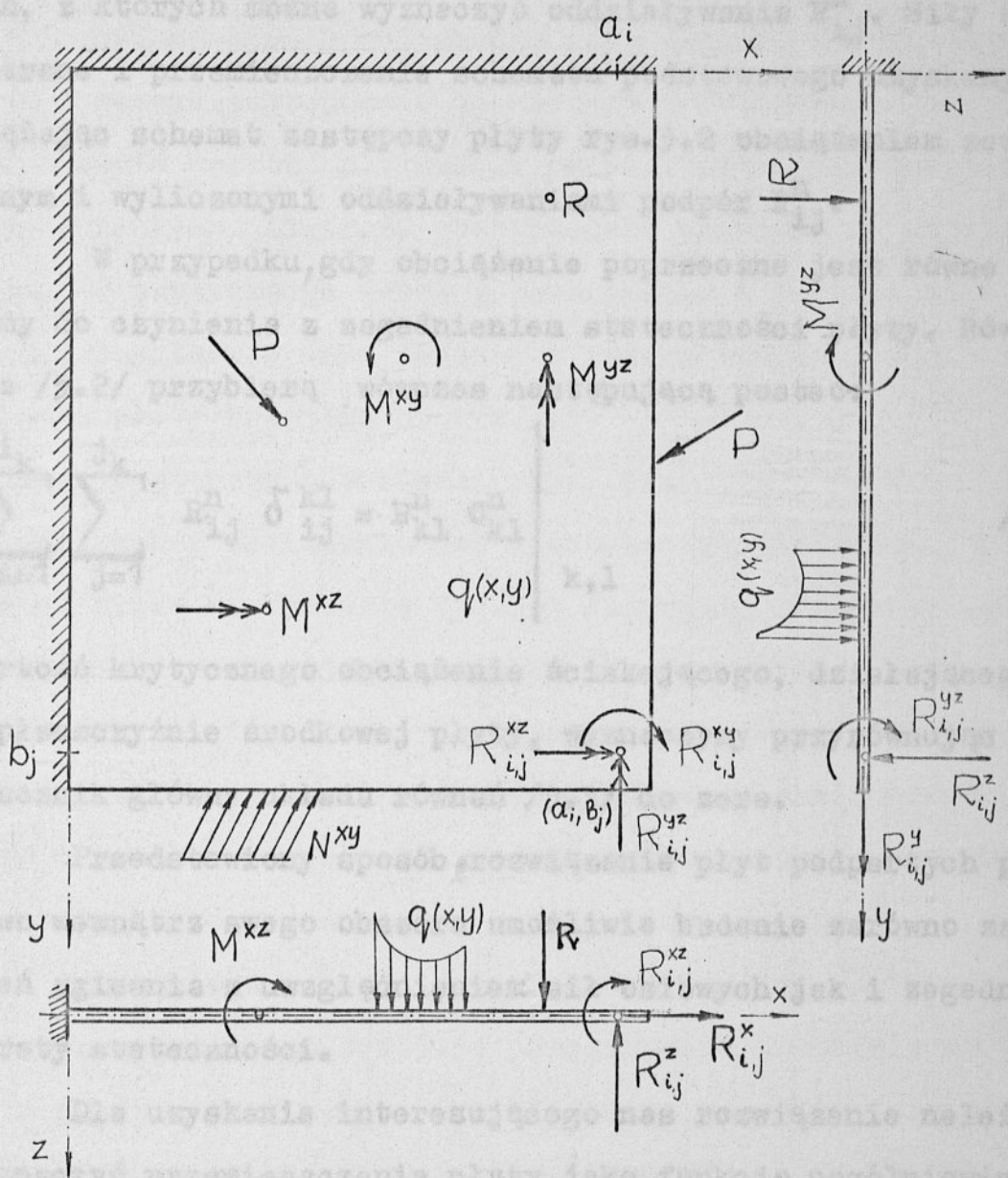
gdzie:

δ_{ij}^{kl} - uogólnione przemieszczenie punktu $/a_k, b_l/$ płyty, w kierunku n , wywołane uogólnioną siłą jednostkową $M = 1, R = 1$ przyłożoną w punkcie $/a_i, b_j/$,

δ_q^{kl} - przemieszczenie punktu $/a_k, b_l/$ płyty, w kierunku n , wywołane obciążeniem zewnętrznym: $P_{ij}, q /x,y/, R/x,y/, M^{xz}, M^{yz}$.



Rys.3.1. Schemat statyczny płyty podpartej punktowo



Rys.3.2. Schemat zastępczy płyty pokazanej na rys.3.1.

Otrzymamy w ten sposób $6 \cdot i \cdot j$ równań zgodności odkształceń, z których można wyznaczyć oddziaływania R_{ij}^n . Siły wewnętrzne i przemieszczenia schematu podstawowego uzyskamy obciążając schemat zastępczy płyty rys.3.2 obciążeniem zewnętrznym i wyliczonymi oddziaływaniami podpór R_{ij}^n .

W przypadku, gdy obciążenie poprzeczne jest równe zeru mamy do czynienia z zagadnieniem stateczności płyty. Równania /3.2/ przybierają wówczas następującą postać:

$$\left| \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} R_{ij}^n \delta_{ij}^{kl} = R_{kl}^n C_{kl}^n \right|_{k,l} \quad /3.3/$$

Wartość krytycznego obciążenia ściskającego, działającego w płaszczyźnie środkowej płyty, wyznaczymy przyrównując wyznacznik główny układu równań /3.3/ do zera.

Przedstawiony sposób rozwiązania płyt podpartych punktowo wewnątrz swego obszaru umożliwia badanie zarówno zagadnień zginania z uwzględnieniem sił osiowych jak i zagadnień utraty stateczności.

Dla uzyskania interesującego nas rozwiązania należy wyznaczyć przemieszczenia płyty jako funkcję uogólnionych sił jednostkowych, przyłożonych w punktach podparć oraz przemieszczenia płyty jako funkcję obciążenia zewnętrznego. Przyrównując do zera wyznacznik główny równania /3.3/ otrzymujemy warunek ogólny zadania, z którego wyznaczamy wartości własne /obciążenie krytyczne/. Należy zauważyć, że obciążenie ściskające n_i nie powinno przekraczać wartości krytycznej $n_i \leq n_{kr}$.

W przypadku ściskania płyty obciążeniem większym niż krytyczne $n_i > n_{kr}$ układ równań /3.2/ może nie mieć rozwiązania.

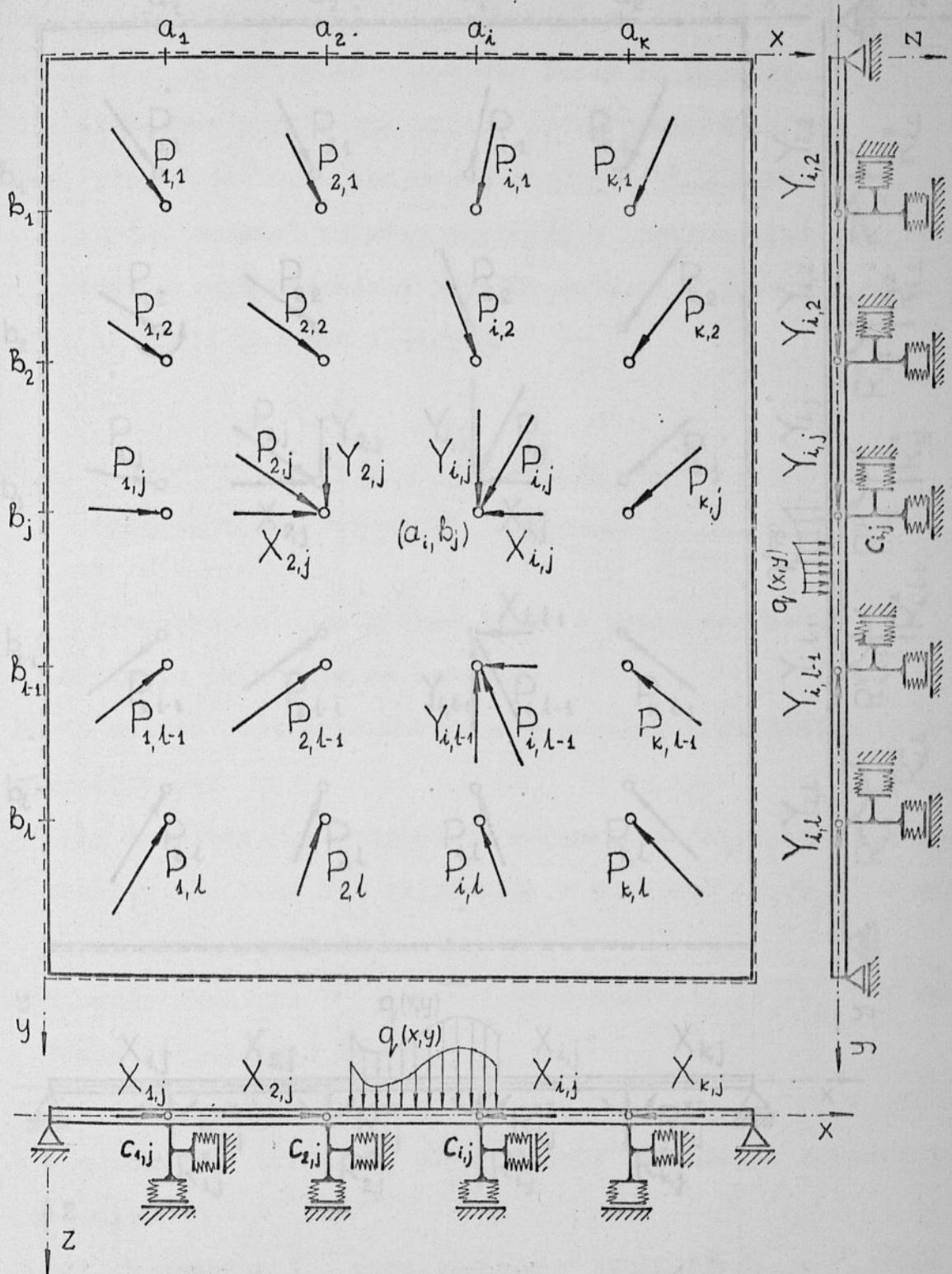
Omówiony sposób obliczania płyt podpartych punktowo w swym obszarze zastosowano do badania jednoczesnego zginania i ściskania warstwy płytowej w rozpatrywanych dźwigarach przestrzennych. Algorytm postępowania omówiono na przykładzie schematu statycznego warstwy zewnętrznej w postaci płyty podpartej punktowo w swym obrębie i przegubowo na obwodzie.

Rys.3.3 Schemat płyty pokazano na rys.3.3.

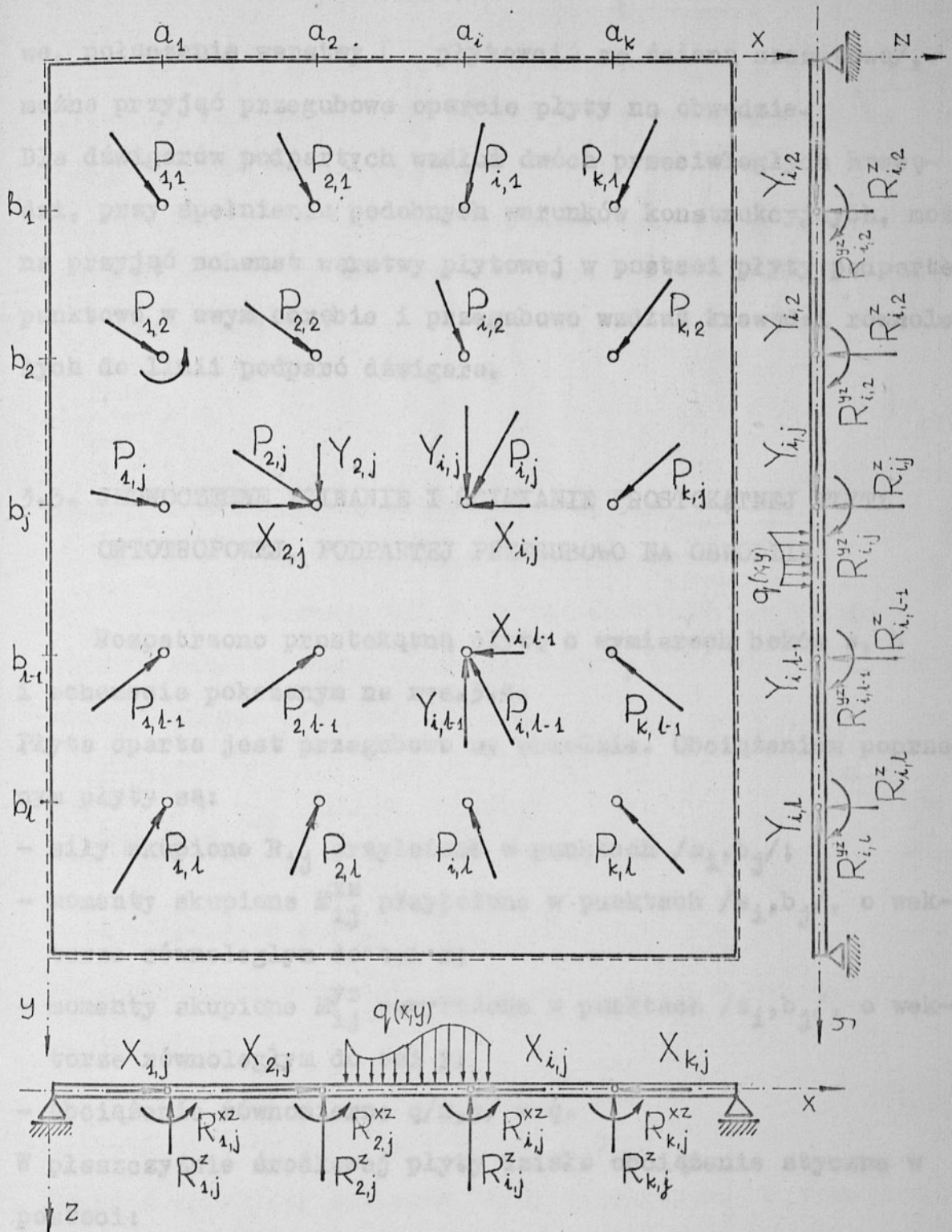
Schemat zastępczy rozważanej płyty przyjęto w postaci płyty, o wymiarach i obciążeniu jak w schemacie podstawowym, podpartej tylko na obwodzie rys.3.4 /usunięto sprężyste podpory punktowe występujące wewnątrz obszaru płyty w schemacie podstawowym/. Rozwiązanie schematu zastępczego podano w punkcie 3.3. Funkcję przemieszczenia schematu zastępczego przyjęto w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego. Współczynniki szeregu wyznaczono metodą energetyczną.

Rys.3.4

Przyjęcie w schemacie statycznym warstwy płytowej dźwigara przestrzennego rys.3.3, przegubowego podparcia na obwodzie płyty, jest pewnym przybliżeniem warunków istniejących w konstrukcji rzeczywistej. W ogólnym przypadku podparcia i obciążenia dźwigara przestrzennego należałoby przyjąć również punktowe podpory na obwodzie płyty. Dla dźwigarów strukturalnych, o płytowej warstwie zewnętrznej, podpartych wzdłuż wszystkich krawędzi zewnętrznych, przy dostatecznie dużej ilości oczek / w praktyce jest ich kilkanaście/ lub w przypadku zastosowania rozwiązania konstrukcyjnego uniemożliwiającego przemieszczenia pionowe krawędzi płyty /belki gzymso-



Rys. 3.3. Schemat statyczny płyty podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze



Rys.3.4. Schemat zastępczy płyty pokazanej na rys.3.3.

we, połączenie warstwy [płytowej] ze ścianą szczytową/, można przyjąć przegubowe oparcie płyty na obwodzie.

Dla dźwigarów podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, przy spełnieniu podobnych warunków konstrukcyjnych, można przyjąć schemat warstwy płytowej w postaci płyty podpartej punktowo w swym obrębie i przegubowo wzdłuż krawędzi równoległych do linii podparć dźwigara.

3.3. JEDNOCZESNE ZGINANIE I ŚCISKANIE PROSTOKĄTNEJ PŁYTY ORTOTROPOWEJ, PODPARTEJ PRZEGUBOWO NA OBWODZIE

Rozpatrzono prostokątną płytę o wymiarach boków a , b i schemacie pokazanym na rys.3.4.

Płyta oparta jest przegubowo na obwodzie. Obciążeniem poprzecznym płyty są:

- siły skupione R_{ij} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$;
- momenty skupione M_{ij}^{xz} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$, o wektorze równoległym do osi x ;
- momenty skupione M_{ij}^{yz} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$, o wektorze równoległym do osi y ;
- obciążenie równomierne $q/x, y/ = q$.

W płaszczyźnie środkowej płyty działa obciążenie styczne w postaci:

- sił skupionych X_{ij} przyłożonych w punktach $/a_i, b_j/$, równoległych do osi x ;
- sił skupionych Y_{ij} przyłożonych w punktach $/a_i, b_j/$, równoległych do osi y .

Punkty $/a_i, b_j/$, gdzie : $i = 1, 2, \dots, k, \dots, i_k$, $j = 1, 2, \dots, 1, \dots, j_k$, są odległe o a_i od osi y i b_j od osi x kartezjańskiego układu współrzędnych.

Rozpatrywany przypadek jednoczesnego zginania i ściskania prostokątnej płyty ortotropowej rozwiązano metodą energetyczną Ritza-Timoschenki:

$$\frac{\partial /U-L/}{f_i} = 0 \quad /3.4/$$

gdzie: U - energia odkształcenia układu,
 L - praca obciążenia zewnętrznego,
 f_i - współczynniki funkcji odkształcenia płyty.

Funkcję odkształcenia płyty założono w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego:

$$w = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /3.5/$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots ; \alpha_m = \frac{m}{a} ; \beta_n = \frac{n}{b} \quad /3.6/$$

Założona funkcja odkształcenia płyty spełnia warunki brzegowe zadania:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = 0 \text{ i } x = a \quad w = 0, \quad M_x = 0, \\ y = 0 \text{ i } y = b \quad w = 0, \quad M_y = 0 \end{aligned}$$

Energia sprężysta zginania płyty ortotropowej U jest opisana wzorem [44] :

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[D_x \left/ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right/ ^2 + D_y \left/ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right/ ^2 + /D_x \nu_y + D_y \nu_x/ \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4c \left/ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right/ ^2 \right] dx dy \quad /3.7/$$

Praca sił skupionych prostopadłych do powierzchni środkowej płyty wynosi:

$$L_R = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} R_{ij} \cdot w_{ij} \quad /3.8/$$

Praca momentów skupionych M_{ij}^{xz} , M_{ij}^{yz} na odpowiednich kątach obrotów będzie opisana wzorem:

$$L_M = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left[M_{ij}^{xz} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} + M_{ij}^{yz} \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \right] \quad /3.9/$$

Obciążenie poprzeczne $q/x,y/$ wykona pracę:

$$L_q = \iint q/x,y/ \cdot w /x,y/ \cdot dx dy \quad /3.10/$$

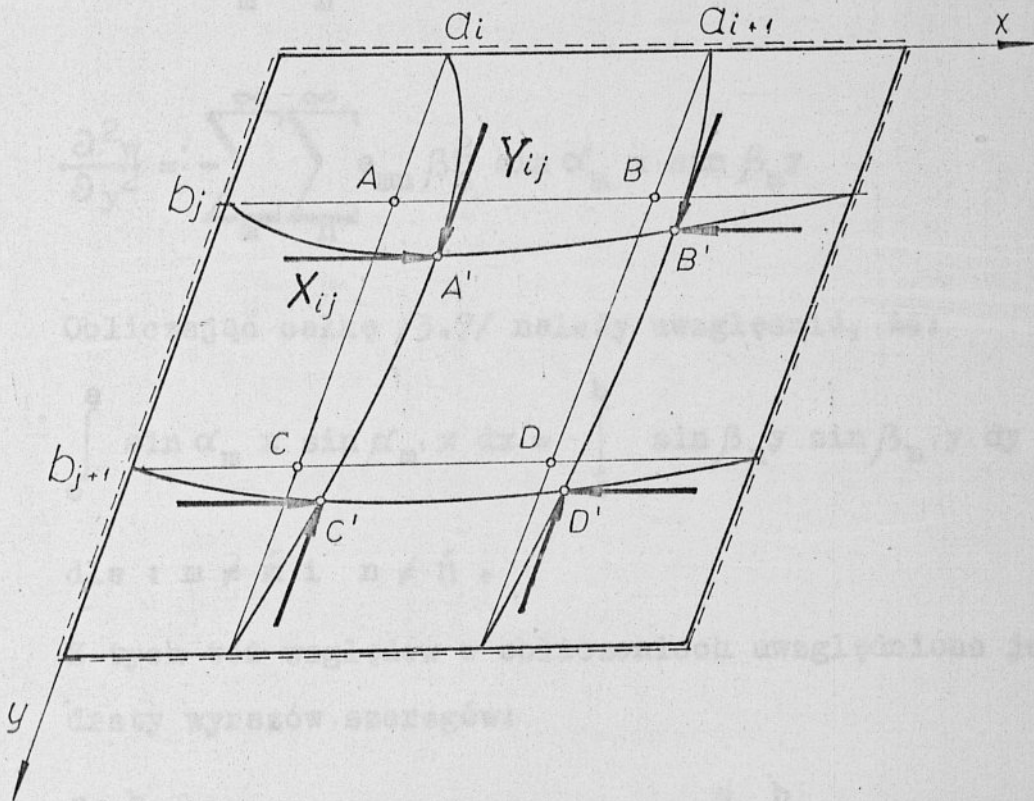
Zaś praca sił skupionych działających w płaszczyźnie środkowej płyty, zgodnie z oznaczeniami na rys.3.5, określana jest wzorem [44] :

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \frac{1}{2} \left[Y_{ij} \int_{b_j}^{b_{j+1}} \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|^2 dy + X_{ij} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^2 dx \right] /3.11/$$

Wartości pochodnych funkcji ugięcia /3.4/, występujące we wzorach /3.5/ + /3.11/, wynoszą:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_m \sum_n a_{mn} \alpha_m \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /3.12/$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_m \sum_n a_{mn} \beta_n \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad /3.13/$$



Rys.3.5. Schemat płyty ściskanej siłami skupionymi
zaczepionymi wewnątrz obszaru płyty

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \alpha_m \beta_n \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad /3.14/$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /3.15/$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \beta_n^2 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /3.16/$$

Obliczając całkę /3.7/ należy uwzględnić, że:

$$\int_0^a \sin \alpha_m x \sin \alpha_{m'} x \, dx = \int_0^b \sin \beta_n y \sin \beta_{n'} y \, dy = 0 \quad /3.17a/$$

dla : $m \neq m'$ i $n \neq n'$.

Z tych też względów w obliczeniach uwzględniono jedynie kwadraty wyrazów szeregów:

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \alpha_m x \sin^2 \beta_n y \, dx dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2 \alpha_m x \cos^2 \beta_n y \cdot dx dy = \frac{ab}{4} \quad /3.17b/$$

Energia sprężysta zginania płyty ortotropowej /3.7/ po scałkowaniu wynosi:

$$U = \frac{ab}{8} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn}^2 \left[D_x \alpha_m^4 + D_y \beta_n^4 + /D_x \nu_y + D_y \nu_x + 4C / \alpha_m^2 \beta_n^2 \right] \quad /3.18/$$

Praca sił R_{ij} /3.8/ na odpowiednich przemieszczeniach opisana jest wzorem:

$$L_R = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} R_{ij} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \sin \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j \quad /3.19/$$

Praca momentów skupionych M_{ij}^{xz} , M_{ij}^{yz} /3.9/ wynosi:

$$L_M = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left[M_{ij}^{xz} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \alpha_m \cos \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j + \right. \\ \left. + M_{ij}^{yz} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \beta_n \sin \alpha_m a_i \cos \beta_n b_j \right] \quad /3.20/$$

Obciążenie poprzeczne $q /x,y/ = \text{const}$ wykona pracę /3.10/

$$L_q = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \frac{4q}{\alpha_m \beta_n} \quad /3.21/$$

dla $m = n = 1, 3, 5, \dots$ /nieparzysta/

Wyrażenie /3.11/ przybierze postać po scałkowaniu:

$$L_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left[X_{ij} \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} \alpha_m \alpha_{m'} a_{mmnn'}^2 \sin \beta_n b_j \sin \beta_{n'} b_j A_{mm'}^0 + \right. \\ \left. + Y_{ij} \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} \beta_n \beta_{n'} a_{mmnn'}^2 \sin \alpha_m a_i \sin \alpha_{m'} a_i B_{nn'}^0 \right] /3.22/$$

gdzie:

$$A_{mm'}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a_{i+1} + a_i} + \frac{1}{\alpha_m} \frac{\cos \alpha_m}{a_{i+1} + a_i} \frac{\sin \alpha_m}{a_{i+1} + a_i} \right] \quad /3.23/$$

dla $m = m'$

$$A_{mm'}^0 = \frac{1}{\alpha_m - \alpha_{m'}} \cos \frac{\alpha_m - \alpha_{m'}}{2} / a_{i+1} + a_i / \sin \frac{\alpha_m - \alpha_{m'}}{2} / a_{i+1} + a_i / +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_m + \alpha_{m'}} \cos \frac{\alpha_m + \alpha_{m'}}{2} / a_{i+1} + a_i / \sin \frac{\alpha_m + \alpha_{m'}}{2} / a_{i+1} + a_i / \quad /3.24/$$

dla $m \neq m'$

$$B_{nn'}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\beta_n} \cos \beta_n / b_{j+1} + b_j / \sin \beta_n / b_{j+1} + b_j / \right] \quad /3.25/$$

dla $n = n'$

$$B_{nn'}^0 = \frac{1}{\beta_n - \beta_{n'}} \cos \frac{\beta_n - \beta_{n'}}{2} / b_{j+1} + b_j / \sin \frac{\beta_n - \beta_{n'}}{2} / b_{j+1} + b_j / +$$

$$+ \frac{1}{\beta_n + \beta_{n'}} \cos \frac{\beta_n + \beta_{n'}}{2} / b_{j+1} + b_j / \sin \frac{\beta_n + \beta_{n'}}{2} / b_{j+1} + b_j / \quad /3.26/$$

dla $n \neq n'$

gdzie:

$$\alpha_{m'} = \frac{m' \pi}{a} \quad /3.27/$$

$$\beta_{n'} = \frac{n' \pi}{b} \quad /3.28/$$

Całkowita energia układu wynosi :

$$\mathcal{H} = U - L_R - L_M - L_q - L_{xy} \quad /3.29/$$

Różniczkując całkowitą energię układu /3.29/ podług stałej a_{mn} otrzymano równanie, z którego wyznaczono stałą szeregu /3.5/

$$a_{m m' n n'} = \frac{1}{\frac{ab}{4} \Delta_{mn} - \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} [X_{ij} A_{m m'} + Y_{ij} B_{n n'}] + \left\{ \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left[M_{ij}^{xz} \alpha_m \cos \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j + M_{ij}^{yz} \beta_n \sin \alpha_m a_i \cos \beta_n b_j + R_{ij} \sin \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j \right] + \frac{4g}{\alpha_m \beta_n} \right\}}$$

/3.30/

gdzie:

$$\Delta_{m n} = D_x \alpha_m^4 + D_y \beta_n^4 + \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + 4C / \alpha_m^2 \beta_n^2$$

/3.31/

$$A_{m m'} = A_{m m'}^0 \alpha_m \alpha_{m'} \sin \beta_n b_j \sin \beta_{n'} b_j$$

/3.32/

$$B_{n n'} = B_{n n'}^0 \beta_n \beta_{n'} \sin \alpha_m a_i \sin \alpha_{m'} a_i$$

/3.33/

Ostatecznie funkcja odkształcenia płyty opisana jest wzorem

$$w = \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} a_{m m' n n'} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

/3.34/

3.4. ALGORYTM OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Rozwiązanie zagadnienia jednoczesnego zginienia i ściskania /rozciągania/, a w szczególnym przypadku zagadnienia stateczności, płyty podpartej punktowo w swym obszarze i poddanej działaniu sił skupionych można wyznaczyć tak, jak to opisano w punkcie 3.2.

Występujące w równaniu /3.2/ przemieszczenia uogólnione δ_{ij}^{kl} wyznaczmy korzystając z rozwiązania podanego w punkcie 3.3. Przemieszczenie uogólnione δ_{ij}^{kl} punktu $/a_k, b_l/$ płyty wyznaczmy jako przemieszczenie tego punktu pod wpływem obciążenia jednostkowego $R = 1, M = 1$ przyłożone w punkcie $/a_i, b_j/$. Obliczono je korzystając z /3.34/ i jest ono opisane wzorem:

$$\delta_{ij}^{kl} = \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} a_{m m' n n'}^1 \sin \alpha_m a_k \sin \beta_n b_l \quad /3.35/$$

Współczynniki $a_{m m' n n'}^1$ wynoszą:

$$a_{m m' n n'}^1 = \frac{\sin \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j}{\frac{ab}{4} \Delta_{mn} - \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} /X_{ij} A_{mm'} + Y_{ij} B_{nn'}/} \quad \text{dla } R_{ij} = 1 /3.36/$$

$$a_{m m' n n'}^1 = \frac{\alpha_m \cos \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j}{\frac{ab}{4} \Delta_{mn} - \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} /X_{ij} A_{mm'} + Y_{ij} B_{nn'}/} \quad \text{dla } M_{ij}^{xz} = 1 /3.37/$$

$$a_{mm'nn'}^1 = \frac{\beta_n \sin \alpha_m a_i \cos \beta_n b_j}{\frac{ab}{4} \Delta_{mn} - \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} /X_{ij} A_{mm'} + Y_{ij} B_{nn}'/} \quad \text{dla } M_{ij}^{yz} = 1 \quad /3.38/$$

Przemieszczenie δ_{kl}^q schematu zastępczego płyty wyznaczono jako przemieszczenie płyty w punkcie $/a_k, b_l/$ pod wpływem obciążenia zewnętrznego: $q/x, y/$, $R/x, y/$, M_{ij}^{xz} , M_{ij}^{yz} ze wzorów /3.30/ i /3.34/ i wynosi ono:

$$\delta_{kl}^q = \sum_m^\infty \sum_{m'}^\infty \sum_n^\infty \sum_{n'}^\infty a_{m m' n n'}^q \sin \alpha_m a_k \sin \beta_n b_l \quad /3.39/$$

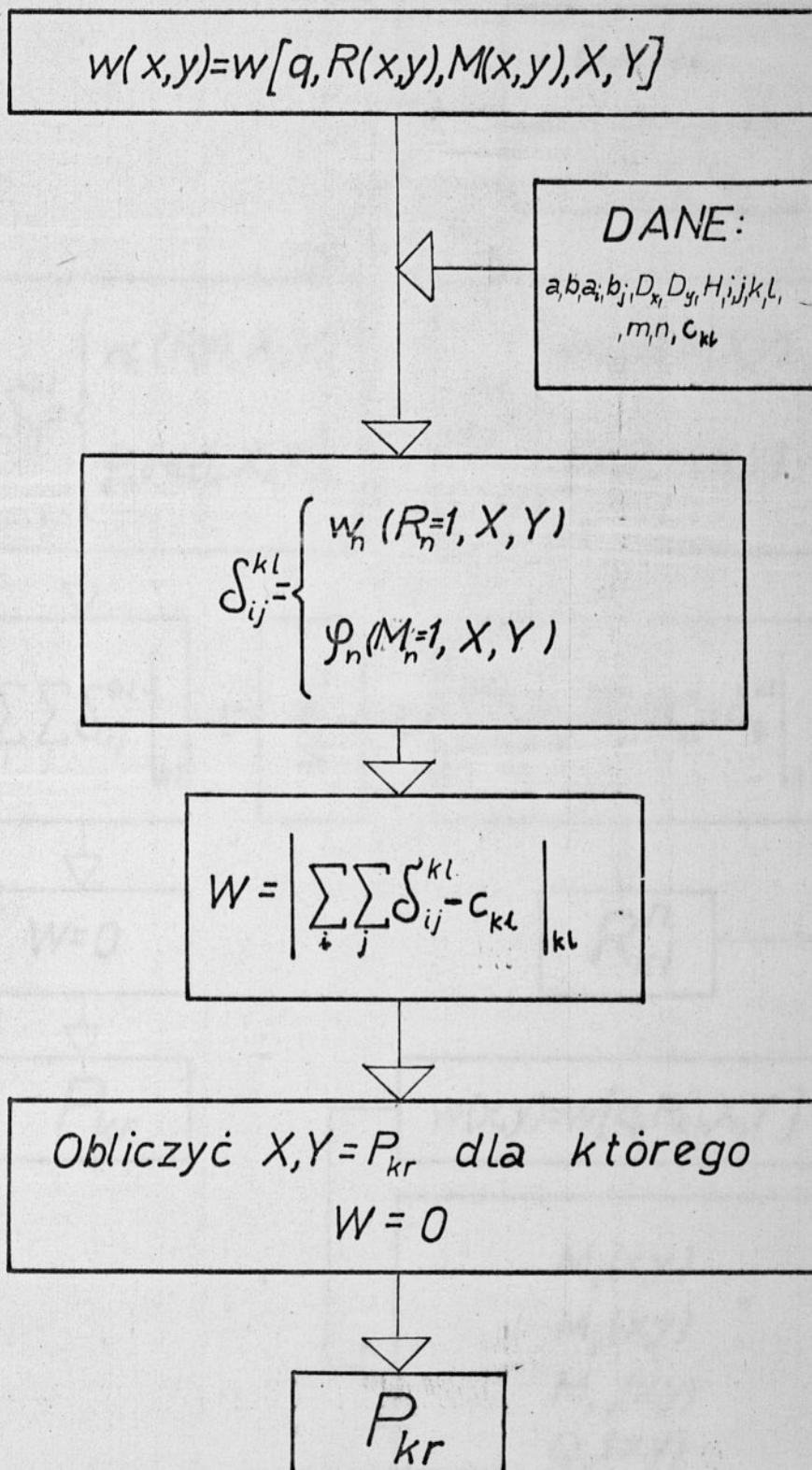
Współczynnik $a_{m m' n n'}^q$ można wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru /3.24/ wstawiając odpowiednie wartości obciążenia poprzecznego .

Wstawiając do równania /3.2/ wyznaczone uprzednio przemieszczenia uogólnione /3.35/ + /3.39/ oraz wartości charakterystyk podpór otrzymamy układ równań, z którego wyznaczymy nieznanne reakcje podpór R_{ij}^n , na których spoczywa płyta. Obciążając schemat zastępczy płyty obciążeniem zadany i wyznaczonymi reakcjami podpór R_{ij}^n określimy siły wewnętrzne i przemieszczenie płyty podpartej punktowo w swym obszarze. Przyrównując do zera wyznacznik główny układu równań /3.2/ otrzymamy wartość obciążenia krytycznego płyty podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze.

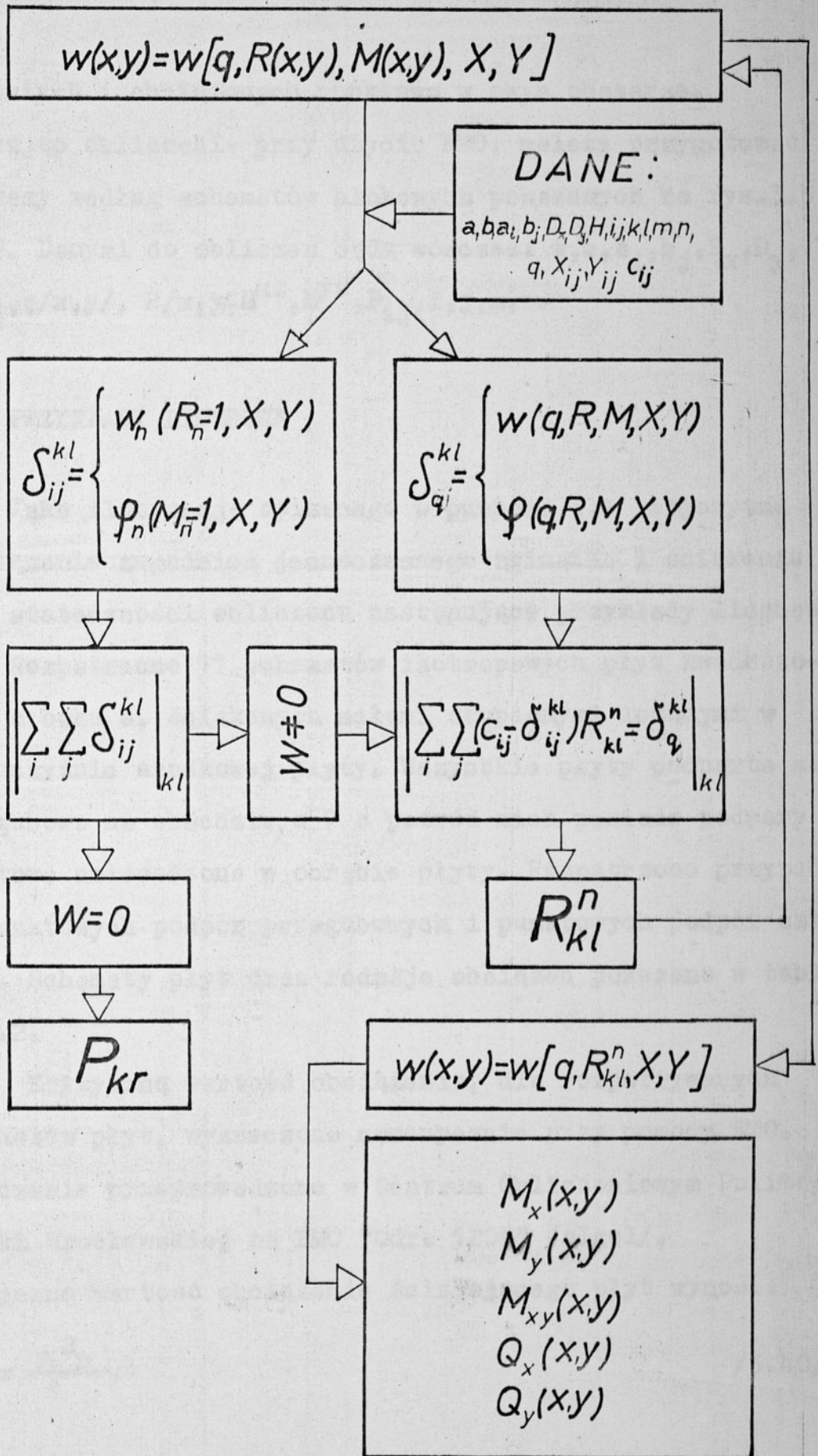
Schemat blokowy wyznaczania obciążeń krytycznych płyt podpartych punktowo w swym obszarze pokazano na rys.3.6, zaś na rys.3.7 pokazano schemat blokowy wyznaczania sił wewnętrznych w płytach jednocześnie zginanych i ściskanych

Rys.3.6

Rys.3.7



Rys.3.6 Schemat blokowy wyznaczania obciążeń krytycznych płyt podpartych i obciążonych punktowo w swym obszarze



Rys.3.7 Schemat blokowy wyznaczania sił wewnętrznych w płytach jednocześnie zginanych i ściskanych, podpartych i obciążonych

podpartych i obciążonych punktowo w swym obszarze.

Wykonując obliczenia przy użyciu EMC, należy przygotować programy według schematów blokowych pokazanych na rys. 3.6 i 3.7. Danymi do obliczeń będą wówczas: $a, b, a_i, b_j, D_x, D_y, H, C_{ij}^n, q/x, y/, R/x, y/, M^{xz}, M^{yz}, P_{ij}, i, j, m, n.$

3.5. PRZYKŁADY LICZBOWE

Jako ilustrację opisanego w punkcie 3.4 algorytmu rozwiązania zagadnień jednoczesnego zginania i ściskania oraz stateczności obliczono następujące przykłady liczbowe.

Rozpatrzono 11 schematów izotropowych płyt kwadratowych o boku a , ściskanych siłami skupionymi leżącymi w płaszczyźnie środkowej płyty. Wszystkie płyty podparte są przegubowo na obwodzie, a 7 z pośród nich posiada podpory punktowe umieszczone w obrębie płyty. Rozpatrzono przypadki punktowych podpór przegubowych i punktowych podpór sztywnych. Schematy płyt oraz rodzaje obciążeń pokazano w tablicy 3.2.

Tabl. 3.2

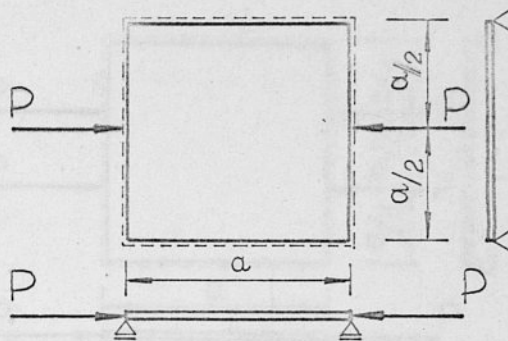
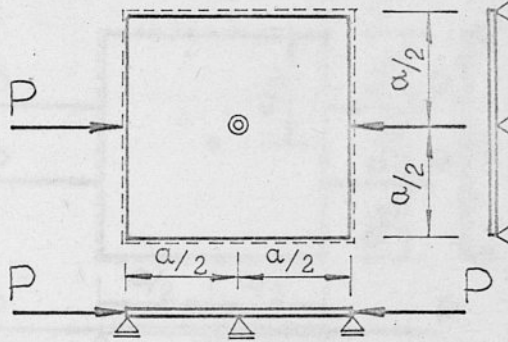
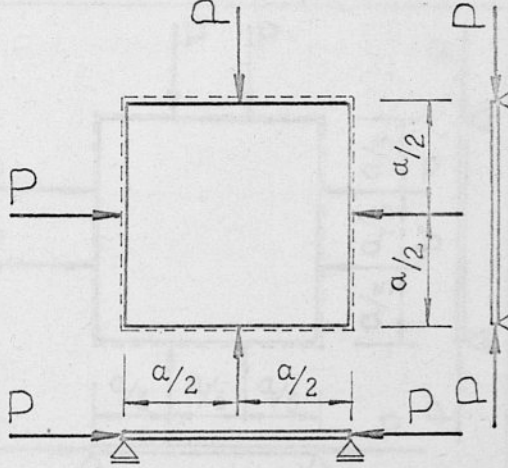
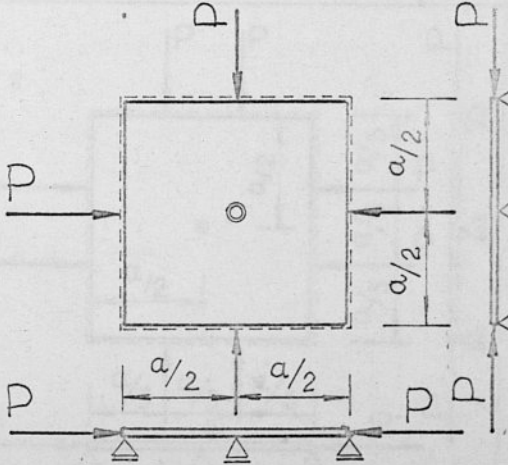
Krytyczną wartość obciążenia, dla rozpatrywanych schematów płyt, wyznaczono numerycznie przy pomocy ETO. Obliczenia przeprowadzono w Centrum Obliczeniowym Politechniki Wrocławskiej na EMC "Odra 1204" /algol/.

Krytyczna wartość obciążenia ściskającego płyt wynosi:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a} \beta$$

/3.40/

Tabl.3.3. Współczynniki β do wzoru /3.40/

L.P.	SCHEMAT PŁYTY I OBCIĄŻENIA	WSP. WYBOCZENIA β	AUTOR ; UWAGI
1		$\beta = 1.91$	WALCZAK W. [47] NOWACKI W. [31] AUTOR
2		$\beta = 2.89$ DLA PODPORY PRZEGUBOWEJ	AUTOR
		$\beta = 5.05$ DLA PODPORY SZTYWNEJ	
3		$\beta = 0.953$	NOWACKI W. [32] AUTOR
4		$\beta = 1.95$ DLA PODPORY PRZEGUBOWEJ	AUTOR
		$\beta = 4.40$ DLA PODPORY SZTYWNEJ	

Tabl.3.2. c.d.

L.P.	SCHEMAT PŁYTY I OBCIĄŻENIA	WSP. WYBOCZENIA β	AUTOR ; UWAGI
5		$\beta = 1.32$	NOWACKI W. [33] AUTOR
6		$\beta = 1.65$ DLA PODPORY PRZEGUBOWEJ	AUTOR
		$\beta = 2.98$ DLA PODPORY SZTYWNEJ	
7		$\beta = 0.665$	NOWACKI W. [33] AUTOR
8		$\beta = 1.19$ DLA PODPORY PRZEGUBOWEJ	AUTOR
		$\beta = 2.40$ DLA PODPORY SZTYWNEJ	

Tabl.3.2. c.d.

L.P.	SCHEMAT PŁYTY I OBCIĄŻENIA	WSP. WYBOCZENIA β	AUTOR ; UWAGI
9		$\beta = 5.25$	AUTOR
10		$\beta = 6.45$	AUTOR
11		$\beta = 4.26$	AUTOR

gdzie:

$$D = \frac{Eg^3}{12(1 - \nu^2)} - \text{sztywność giętna płyty,}$$

β - współczynnik wyboczeniowy wg tabl.3.2.

Wpływ podatności sprężystej podpory C_{ij}^z /na przemieszczenie pionowe/, na wartość obciążenia krytycznego, zbadano dla izotropowej płyty kwadratowej o schemacie i obciążeniu pokazanym na tablicy 3.2 pozycja 2. Płyta podparta jest przegubowo wzdłuż wszystkich krawędzi, a ponadto punktowo w środku rozpiętości. Sprężysta podpora posiada podatność na przemieszczenie pionowe równą C_{11}^z /jest to skrócenie lub wydłużenie wywołane siłą jednostkową/. Pozostałe charakterystyki sprężyste podpory są równe ∞ . Płyta ściskana jest dwoma siłami P przyłożonymi do przeciwległych krawędzi płyty.

W rozpatrywanym przypadku podparcia i obciążenia płyty, równanie stateczności /3.3/ przybiera następującą postać:

$$\left[\delta_{11}^{11} + C_{11}^z \right] R_{11}^{11} = 0 \quad /3.41/$$

Uwzględniając związki /3.39/, równania /3.41/ przybierze następującą postać:

$$\sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} - 2\beta \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right]^{-1} + \frac{\pi^4 D}{4a^2} C_{11}^z = 0 \quad /3.42/$$

gdzie:

$$m, n = 1, 3, 5, 7, \dots \quad /3.43/$$

$$\beta = \frac{P_{kr} \cdot a}{\pi^2 D} \quad /3.44/$$

Krytyczną wartość obciążenia P_{kr} badano jako funkcję parametru $a/\pi^4 D C_{11}^Z$. Przy braku podpory punktowej, $C_{11}^Z = \infty$ mamy do czynienia z płytą o schemacie pokazanym w tabelicy 3.2 poz.1, dla której wartość współczynnika wyboczeniowego wynosi $\beta = 1,91$. Ze wzrostem sztywności podpory $/C_{11}^Z$ maleje wartość obciążenia krytycznego rośnie i dla parametru $a/\pi^4 \cdot D \cdot C_{11}^Z = 0,452$ otrzymano współczynnik wyboczeniowy $\beta = 2,89$, odpowiadający przegubowej podporze niepodatnej. Dla wartości tej możliwe są dwie formy wyboczeniowe: symetryczna i niesymetryczna.

Rys.3.8 Na rys.3.8 pokazano wykres siły krytycznej jako funkcję parametru $a/\pi^4 \cdot D \cdot C_{11}^Z$ oraz możliwe formy wyboczenia płyty.

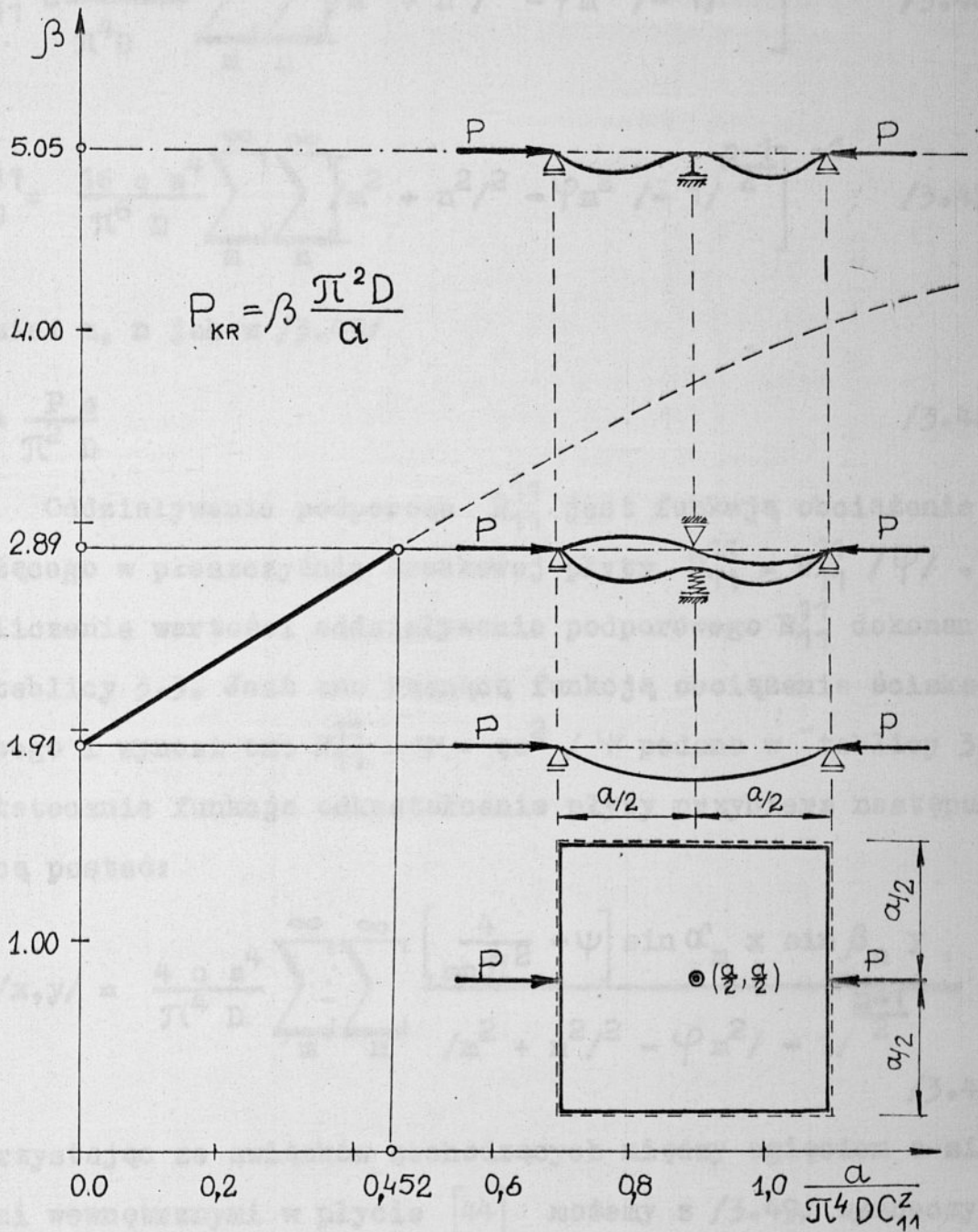
Zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania płyt podpartych punktowo w swym obrębie, ściskanych siłami skupionymi, zilustrowano następującym przykładem.

Rozpatrzono izotropową płytę kwadratową o schemacie i obciążeniu pokazanym w tabl.3.2 poz.2. Płyta podparta jest w środku na przegubowej podporze punktowej, uniemożliwiającej przesuw w kierunku pionowym. Oprócz obciążenia leżącego w płaszczyźnie środkowej płyty, w postaci sił skupionych P , na płytę działa obciążenie poprzeczne q $/x, y/ = q$.

Oddziaływanie podporowe R_{11}^{11} wyznaczono korzystając z równania /3.2/. Równanie /3.2/ przybiera następującą postać:

$$R_{11}^{11} \cdot \delta_{11}^{11} = \delta_{q}^{11} \quad /3.45/$$

Przemieszczenia δ_{11}^{11} , δ_{q}^{11} wyznaczono na podstawie /3.35/ + /3.39/ i wynoszą one:



Rys.3.8. Wykres siły krytycznej jako funkcje sprężystości podpory punktowej

$$\delta_{11}^{11} = \frac{4a^2}{\pi^4 D} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \left[\frac{1}{m^2 + n^2/2 - \varphi m^2} - \frac{1}{n^2} \right]^{-1} \quad /3.46/$$

$$\delta_q^{11} = \frac{16 q a^4}{\pi^6 D} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \left[\frac{1}{m^2 + n^2/2 - \varphi m^2} - \frac{1}{n^2} \right]^{-1} \quad /3.47/$$

gdzie: m, n jak w /3.43/

$$\varphi = \frac{P a}{\pi^2 D} \quad /3.48/$$

Oddziaływanie podporowe R_{11}^{11} jest funkcją obciążenia leżącego w płaszczyźnie środkowej płyty $R_{11}^{11} = R_{11}^{11} / \varphi$. Wyliczenia wartości oddziaływania podporowego R_{11}^{11} dokonano w tabelicy 3.3. Jest ono rosnącą funkcją obciążenia ściskającego i wynosi ono $R_{11}^{11} = \Psi \cdot qa^2 / \Psi$ podano w tabelicy 3.3. Ostatecznie funkcja odkształcenia płyty przybiera następującą postać:

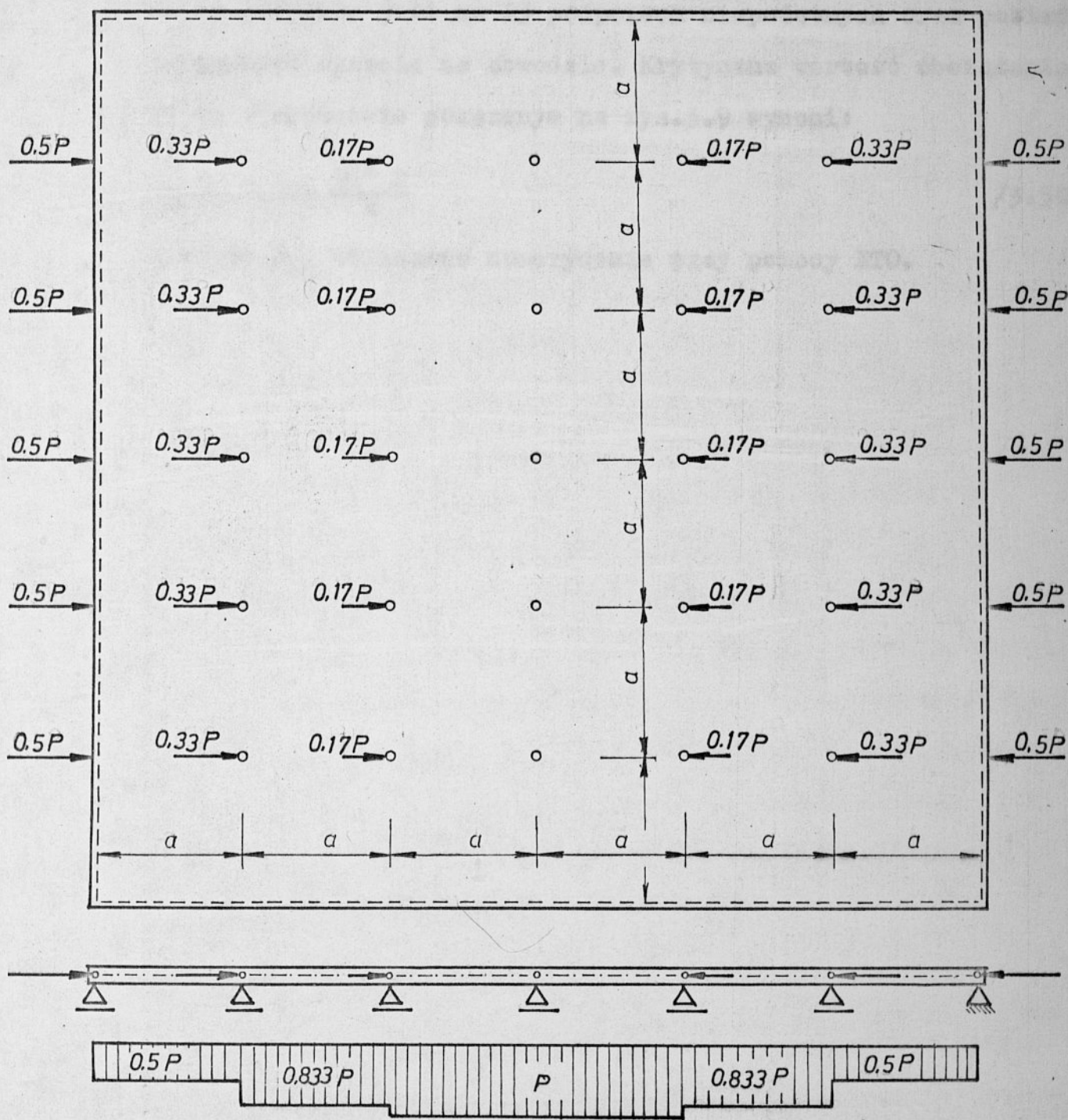
$$w /x, y/ = \frac{4 q a^4}{\pi^4 D} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\left[\frac{4}{mn\pi^2} - \Psi \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y}{\frac{1}{m^2 + n^2/2 - \varphi m^2} - \frac{1}{n^2}} \quad /3.49/$$

Korzystając ze związków zachodzących między ugięciem a siłami wewnętrznymi w płycie [44] możemy z /3.49/ wyznaczyć interesujące nas wartości momentów zginających i sił poprzecznych.

Stateczność płyty spoczywającej na większej ilości podpór punktowych /taki schemat wystąpi w przypadku badania stateczności warstwy płytowej dźwigerów rozpatrywanego rodzaju/ rozpatrzono dla schematu pokazanego na rys.3.9.

Tablica 3.3 Oddziaływanie podpory punktowej $R_{11}^{11} = \psi q a^2$
w płycie o schemacie pokazanym w tabl.3.2 poz. 2

ψ	$\delta_{q,11}^{11} \left[\frac{q a^4}{D} \right]$	$\delta_{11,11}^{11} \left[\frac{a^2}{D} \right]$	ψ
0.0	0.0040623	0.011555	0.35155
0.1	0.0042803	0.012102	0.35398
0.2	0.0045227	0.012709	0.35591
0.3	0.0047937	0.013387	0.35808
0.4	0.0050986	0.014149	0.36034
0.5	0.0054442	0.015012	0.36266
0.6	0.0058394	0.015998	0.36499
0.7	0.0062954	0.017135	0.36740
0.8	0.0068276	0.018460	0.36986
0.9	0.0074568	0.020025	0.37237
1.0	0.0082119	0.021901	0.37495
1.1	0.0091351	0.024193	0.37759
1.2	0.0102894	0.027055	0.38030
1.3	0.0117738	0.030733	0.38309
1.4	0.0137534	0.035634	0.38596
1.5	0.0165255	0.042491	0.38892
1.6	0.0206843	0.52770	0.39197
1.7	0.0276168	0.069894	0.39586
1.8	0.0414836	0.104129	0.39839
1.9	0.0830880	0.206805	0.40178



Rys.3.9. Schemat statyczny płyty podpartej i obciążonej punktowo

Płyta podparta jest na 25 podporach niepodatnych oraz posiada przegubowe oparcie na obwodzie. Krytyczna wartość obciążenia płyty o schemacie pokazanym na rys.3.9 wynosi:

$$P_{kr} = 1,065 \frac{\pi^2 D}{a} \quad /3.50/$$

Wartość P_{kr} obliczono numerycznie przy pomocy ETO.

4. JEDNOCZESNE ZGINANIE I ŚCISKANIE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ, O MAŁEJ KRZYWIZNIE POCZĄTKOWEJ, PODPARTEJ I OBCIĄŻONEJ PUNKTOWO W SWYM OBSZARZE

4.1. WPROWADZENIE

W czasie pracy dźwigara strukturalnego o płytowej warstwie zewnętrznej, pod wpływem obciążeń zewnętrznych, poszczególne punkty ustroju doznają przemieszczeń pionowych. Zewnętrzna płytowa warstwa struktury przestrzennej, którą wyodrębniono z ustroju /patrz pkt.1.4/, również przemieszcza się. Ugięcie dowolnego punktu warstwy płytowej składa się z ugięcia wywołanego obciążeniem poprzecznym przyłożonym bezpośrednio do warstwy pełnościennej oraz z ugięcia wywołanego pracą całego dźwigara przestrzennego. Tak więc, rozpatrując pracę płytowej warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej należy uwzględnić jej krzywiznę początkową. Ta dodatkowa krzywizna płyty w_0 jest funkcją położenia i obciążenia przyłożonego do struktury przestrzennej.

$$w_0 = w_0 /x, y, q/$$

/4.1/

Rozważania będą przeprowadzone przy następujących założeniach:

a/ zewnętrzna, płytowa warstwa struktury przestrzennej tworzy pod obciążeniem dźwigara $q = 0$ płaszczyznę horyzontalną

$$w_0 /x,y/ = 0 ;$$

b/ przemieszczenia warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej przy obciążeniu $q \neq 0$ są małe w porównaniu z grubością płyty i mamy do czynienia z małą krzywizną początkową.

Przyjęcie małej krzywizny początkowej w założeniu b, należy motywować tym, że w rozpatrywanym schemacie statycznym warstwy płytowej, obciążenie styczne posiada charakter śledzący i o wielkości dodatkowych sił wewnętrznych i płycie decydują ugięcia międzywęzłowe. Przemieszczenia międzywęzłowe płyty w_0^m są bardzo małe, gdyż maksymalne, sprężyste ugięcia dźwigarów w_0 posiadających zazwyczaj kilkanaście oczek nie przekraczają 1 % rozpiętości.

Dlatego można przyjąć, że $w_0^m < g$.

W przyjętym schemacie statycznym płytowej warstwy zewnętrznej struktury przestrzennej /patrz pkt. 1.4/, na płycie oprócz obciążenia poprzecznego działają siły w płaszczyźnie środkowej płyty. W przypadku występowania małej krzywizny początkowej siły działające w płaszczyźnie środkowej płyty mają wpływ na wartości sił wewnętrznych w płycie. Równanie różniczkowe powierzchni odkształconej płyty ortotropowej, o małej krzywiznie początkowej ma postać:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 /w+w_0/}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 /w+w_0/}{\partial y^2} +$$
$$+ 2N_{xy} \frac{\partial^2 /w+w_0/}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial /w+w_0/}{\partial x} + Y \frac{\partial /w+w_0/}{\partial y} + Y \frac{\partial /w+w_0/}{\partial y} + q/x,y/$$

/4.2/

Rozwiązanie zagadnienia jednoczesnego zginania i ściskania płyty o małej krzywiznie początkowej drogą całkowania równania /4.2/ jest dość kłopotliwe. Dlatego proponuje się rozwiązanie zagadnienia metodą sił, omówioną w punkcie 3.2 dla przypadku płyty bez krzywizny początkowej.

4.2. METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

Rozważano przypadek jednoczesnego zginania i ściskania płyty o schemacie pokazanym na rys.3.3 i małej krzywiznie początkowej. Zostanie on rozwiązany metodą sił, której algorytm omówiono w rozdziale 3.

Równanie kanoniczne metody sił, dla rozpatrywanego schematu statycznego płyty, przybierze następującą postać:

$$\left| \sum_i \sum_j R_{ij}^n \delta_{ij}^{kl} + w_o^{kl} + \delta_q^{kl} = R_{kl}^n C_{kl}^n \right|_{kl} \quad /4.3/$$

gdzie:

δ_{ij}^{kl} - uogólnione przemieszczenie punktu $/a_k, b_l/$ płyty z krzywizną początkową, w kierunku n , wywołane uogólnioną siłą jednostkową $M = 1$, $R = 1$ przyłożoną w punkcie $/a_i, b_j/$,

δ_q^{kl} - przemieszczenie punktu $/a_k, b_l/$ płyty z krzywizną początkową, w kierunku n , wywołane obciążeniem zewnętrznym: P_{ij} , $q/x, y/$, $R/x, y/$, M^{xz} , M^{yz} .

w_o^{kl} - ugięcie początkowe punktu $/a_k, b_l/$.

Należy zauważyć, że w przypadku, gdy obciążenie poprzeczne jest równe zero równania /4.3/ nie sprowadzają się do równań stateczności. O stanie zgięciowym ściskanej płyty decyduje jej krzywizna początkowa, która spełnia rolę obciążenia poprzecznego w równaniach /4.3/.

W celu rozwiązania zagadnienia jednoczesnego zginania i ściskania płyt, podpartych i obciążonych punktowo w swym obszarze, o małej krzywiznie początkowej, należy określić przemieszczenia uogólnione schematu zastępczego płyty:

δ_{ij}^{kl} , δ_q^{kl} . Schemat zastępczy rozważanej płyty, rys.3.3, przyjęto w postaci płyty, o wymiarach i obciążeniu jak w schemacie podstawowym, podpartej tylko na obwodzie /usunięto sprężyste podpory punktowe/. Tak podparta i obciążona płyta, pokazana na rys.3.4, posiada krzywiznę początkową $w_0/x,y/$. Zgodnie z założeniami poczynionymi w punkcie 1.4 funkcja opisująca krzywiznę początkową płyty /4.1/ jest znana i przemieszczenia w_0^{kl} punktów $/a_k, b_l/$ mogą być każdorazowo zdeterminowane.

W punkcie 4.3 podano rozwiązanie płyty o schemacie pokazanym na rys.3.4 i małej krzywiznie początkowej. Funkcję ugięcia oraz krzywiznę początkową płyty przyjęto w postaci szeregów trygonometrycznych, a przemieszczenia uogólnione δ_{ij}^{kl} oraz δ_q^{kl} wyznaczono metodą energetyczną.

4.3. JEDNOCZESNE ZGINANIE I ŚCISKANIE PŁYTY PROSTOKĄTNEJ, O MAŁEJ KRZYWIŹNIE POCZĄTKOWEJ, PODPARTEJ PRZEGUBOWO NA OBWODZIE

Rozpatrzono prostokątną płytę ortotropową o wymiarach boków a , b i schemacie pokazanym na rys.3.4.

Płyta oparta jest przegubowo na obwodzie. Obciążeniem poprzecznym płyty są:

- siły skupione R_{ij} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$;
- momenty skupione M_{ij}^{xz} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$, o wektorze równoległym do osi x ;
- momenty skupione M_{ij}^{yz} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$, o wektorach równoległych do osi y ;

- obciążenie równomierne $q/x,y/ = q$,

W płaszczyźnie środkowej płyty działa obciążenie styczne w postaci:

- sił skupionych X_{ij} przyłożonych w punktach $/a_i, b_j/$, równoległych do osi x ;

- sił skupionych Y_{ij} przyłożonych w punktach $/a_i, b_j/$, równoległych do osi y .

Punkty $/a_i, b_j/$, gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots, i_k, j = 1, 2, 3, \dots, l, \dots, j_k$ są odległe o a_i , od osi y i b_j do osi x kartezjańskiego układu współrzędnych.

Tak podparta i obciążona płyta, pokazana na rys.3.4, posiada wstępną krzywiznę w_0 , którą przedstawiono w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego.

$$w_0 = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} b_{m n} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /4.4/$$

gdzie:

$$m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad /4.5/$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad /4.6/$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad /4.7/$$

Rozpatrywany przypadek jednoczesnego zginania i ściskania prostokątnej płyty ortotropowej, o małej krzywiznie początkowej, zostanie rozwiązany metodą energetyczną Ritza-Timoschenki

$$\frac{\partial U - L}{\partial f_i} = 0 \quad /4.8/$$

Funkcję odkształcenia płyty założono w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego:

$$w = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{m n} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /4.9/$$

która spełnia warunki brzegowe zadania:

$$\text{dla } x = 0 \text{ i } x = a \quad w = 0, \quad M_x = 0;$$

$$\text{dla } y = 0 \text{ i } y = b \quad w = 0, \quad M_y = 0$$

W rozdziale 3 rozpatrzono przypadek jednoczesnego zginania i ściskania płyty o schemacie statycznym i obciążeniu odpowiadającym schematowi rozpatrywanemu w niniejszym punkcie lecz bez krzywizny początkowej. Zadanie zostało rozwiązane również metodą energetyczną przy przyjęciu identycznej funkcji ugięcia płyty.

W przypadku występowania małej krzywizny początkowej, siły leżące w płaszczyźnie środkowej płyty powodują dodatkowe zginanie. Praca sił skupionych X_{ij} , Y_{ij} , działających w płaszczyźnie środkowej płyty, będzie wynosić:

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left[Y_{ij} \int_{b_j}^{b_{j+1}} \left[\frac{\partial w + w_0}{\partial y} \right]_{x=a_i}^2 dx + X_{ij} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\frac{\partial w + w_0}{\partial x} \right]_{y=b_j}^2 dy \right] /4.10/$$

Wstawiając /4.4/ i /4.9/ do /4.10/ oraz wykonując odpowiednie całkowania, praca L_{xy} będzie opisana następującym wzorem:

$$L_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left\{ X_{ij} \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} \alpha_m \alpha_{m'} / a_{mm'n'n'} + b_{mm'n'n'}^2 \sin \beta_n b_j \sin \beta_{n'} b_j A_{mm'}^0 + \right.$$

$$+ Y_{ij} \left. \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} \beta_n \beta_{n'} / a_{mm'n'n'} + b_{mm'n'n'}^2 \sin^2 \alpha_m a_i \sin^2 \alpha_{m'} a_i B_{nn'}^0 \right\} \quad /4.11/$$

gdzie:

$$A_{mm'}^0 \text{ wg } /3.23/ \text{ i } /3.24/ \quad /4.12/$$

$$B_{nn'}^0 \text{ wg } /3.25/ \text{ i } /3.26/ \quad /4.13/$$

Mała krzywizna początkowa posiada znikomy /pomijalny/ wpływ na pozostałe człony energii układu. Dlatego skorzystać można z obliczeń przeprowadzonych w punkcie 3.3.

Energia sprężysta zginania płyty ortotropowej /3.18/ jest opisana wzorem:

$$U = \frac{a b}{8} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn}^2 \Delta_{mn} \quad /4.14/$$

gdzie:

$$\Delta_{mn} = D_x \alpha_m^4 + D_y \beta_n^4 + /D_x \nu_y + D_y \nu_x + 4 C / d_m^2 \beta_n^2 \quad /4.15/$$

Praca sił skupionych R_{ij} prostopadłych do płaszczyzny środkowej płyty, wg /3.19/ wynosi:

$$L_R = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} R_{ij} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \sin^2 \alpha_m a_i \sin^2 \beta_n b_j \quad /4.16/$$

Praca momentów skupionych M_{ij}^{xz} , M_{ij}^{yz} wg /3.20/ wynosi:

$$L_M = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left\{ M_{ij}^{xz} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \alpha_m^2 \cos^2 \alpha_m a_i \sin^2 \beta_n b_j + \right. \\ \left. + M_{ij}^{yz} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \beta_n^2 \sin^2 \alpha_m a_i \cos^2 \beta_n b_j \right\} \quad /4.17/$$

Obciążenie poprzeczne $q/x,y/ = q$ wg /3.21/ wykonuje pracę :

$$L_q = 4q \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{a_{mn}}{\alpha_m \beta_n} \quad /4.18/$$

Dla rozpatrywanego schematu obciążenia rys.3.4 całkowita energia układu wynosi:

$$\Pi = U - L_R - L_M - L_q - L_{xy} \quad /4.19/$$

Różniczkując całkowitą energię układu podług stałej a_{mn}

otrzymamy równanie z którego wyznaczmy stałą szeregu /4.9/

$$a_{mm'nn'} = \frac{1}{\frac{a}{4} \frac{b}{4} \Delta_{mn} - \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} /X_{ij} A_{mm'} + Y_{ij} B_{nn'} /} \left[\frac{4q}{\alpha_m \beta_n} + \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} b_{mm'nn'} /X_{ij} A_{mm'} + Y_{ij} B_{nn'} / + R_{ij} \sin \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j + M_{ij}^{xz} \alpha_m \cos \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j + M_{ij}^{yz} \beta_n \sin \alpha_m a_i \cos \beta_n b_j \right] \quad /4.20/$$

gdzie :

$A_{mm'}$ wg /3.32/

$B_{nn'}$ wg /3.33/

Ostatecznie funkcja ugięcia całkowitego w_c / sprężystego i początkowego/ płyty wynosi :

$$w_c = \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} /a_{mm'nn'} + b_{mm'nn'} / \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /4.21/$$

4.4. ALGORYTM OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Rozwiązanie zagadnienia jednoczesnego zginania i ściskania /rozciągania/ płyty podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze, o małej krzywiznie początkowej, można uzyskać tak, jak to opisano w punkcie 4.2. Algorytm obliczeń numerycznych, rozpatrywanego zagadnienia, jest identyczny jak dla płyty bez krzywizny początkowej, a różni się jedynie budową równań kanonicznych /4.3/.

Analizując rozpatrywany przypadek jednoczesnego zginania i ściskania płyty należy sprawdzać warunek stateczności, gdyż obciążenie ściskające nie może przekraczać wartości krytycznej $n_i < n_{kr}$. Sprawdzany warunek stateczności odnosić się będzie do płyty bez krzywizny początkowej. Siły wewnętrzne w płycie jednocześnie zginanej i ściskanej, o krzywiznie początkowej, można wyznaczyć wg zasad omówionych w punkcie 3.4. Wykonując obliczenia przy użyciu EMC, należy przygotować program według schematu blokowego pokazanego na rys.3.7.

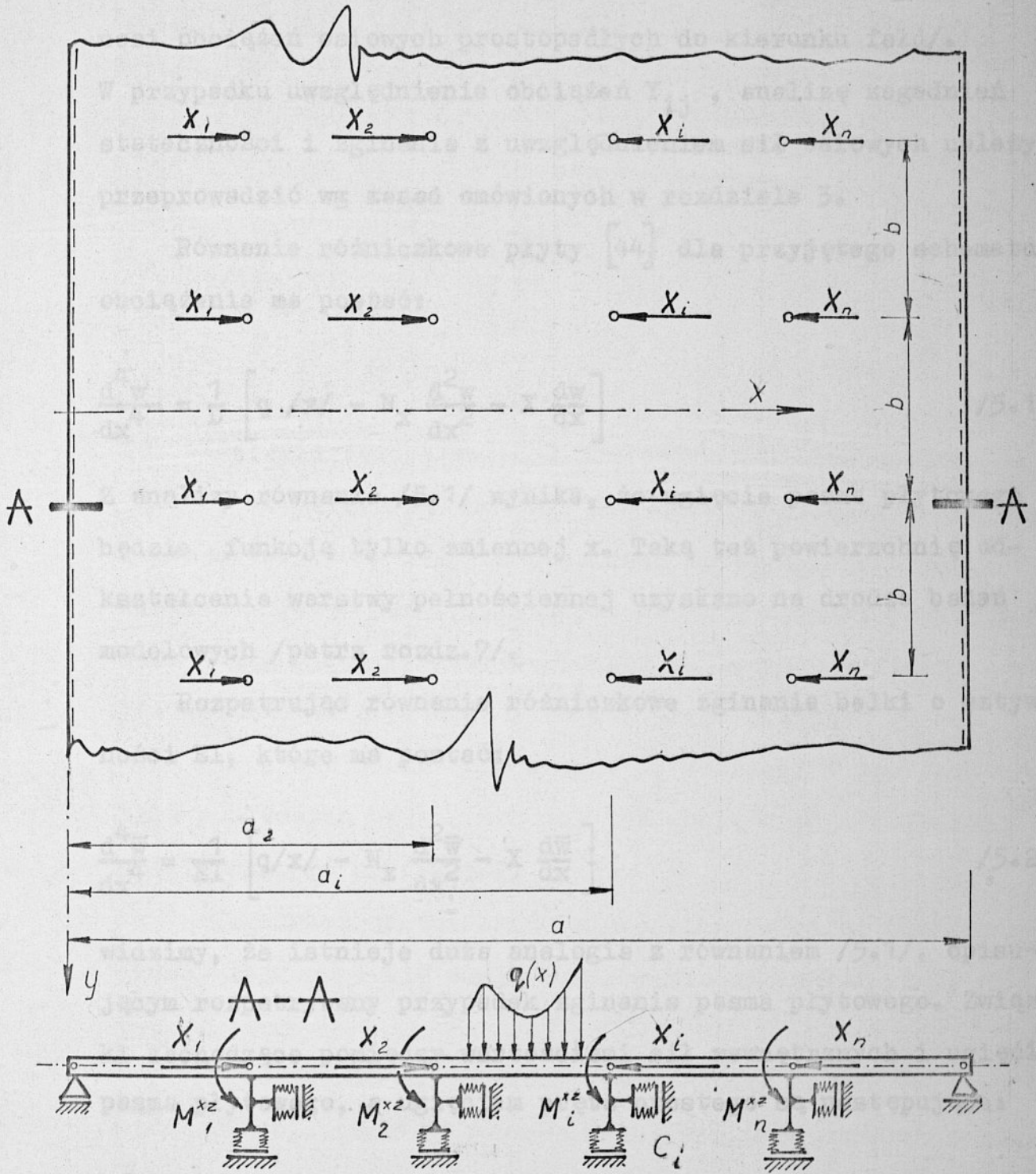
5. JEDNOCZESNE ZGINANIE I ŚCISKANIE PASMA PŁYTOWEGO PODPARTEGO I OBCIĄŻONEGO PUNKTOWO W SWYM OBSZARZE

W niniejszym rozdziale zajęto się przypadkiem szczególnym pracy struktury przestrzennej o płytowej warstwie zewnętrznej. Rozpatrzono przypadek dźwigara podpartego wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi. Taki schemat statyczny podparcia dźwigarów występuje np. w halach przemysłowych czy magazynowych.

Schemat statyczny płytowej warstwy zewnętrznej, dla rozpatrywanego przypadku podparcia struktury, przyjęto w postaci pasma płytowego, podpartego punktowo w swym obszarze na sprężystych podporach punktowych /patrz pkt.1.4/. Ponadto, przyjęto przegubowe podparcie płyty wzdłuż krawędzi równoległych do krawędzi podparcia struktury. Obciążenie pasma płytowego przyjęto jako zmieniające się tylko w kierunku prostopadłym do krawędzi przegubowego podparcia. Składa się ono z obciążenia poprzecznego: q/x , R_i , M_i^{xz} oraz z obciążenia leżącego w płaszczyźnie środkowej płyty w postaci sił skupionych X_i . Siły X_i , równoległe do osi x , są zaczepione w punktach usytuowania podpór sprężystych pasma płytowego / a_i, y /. Schemat tak podpartego i obciążonego pasma płytowego pokazano na rys.5.1.

rys.5.1

Nie uwzględnienie sił kontaktowych Y_{ij} , równoległych do krawędzi podparcia dźwigara, jest możliwe w przypadku gdy siły te są przenoszone przez inne elementy konstrukcyjne, lub gdy płytowa warstwa zewnętrzna nie przenosi takich obciążeń /np. warstwa zewnętrzna z blachy fałdowej nie prze-



Rys.5.1. Schemat pasma płytowego obciążonego i podpartego punktowo w swym obszarze

nosi obciążeń osiowych prostopadłych do kierunku fałd/.

W przypadku uwzględnienia obciążeń Y_{ij} , analizę zagadnień stateczności i zginania z uwzględnieniem sił osiowych należy przeprowadzić wg zasad omówionych w rozdziale 3.

Równanie różniczkowe płyty [44] dla przyjętego schematu obciążenia ma postać:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{1}{D} \left[q/x/ - N_x \frac{d^2 w}{dx^2} - x \frac{dw}{dx} \right] \quad /5.1/$$

Z analizy równania /5.1/ wynika, że ugięcie pasma płytowego będzie funkcją tylko zmiennej x . Taką też powierzchnię odkształcenia warstwy pełnościennej uzyskano na drodze badań modelowych /patrz rozdz.7/.

Rozpatrując równanie różniczkowe zginania belki o sztywności EI , które ma postać:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} = \frac{1}{EI} \left[q/x/ - N_x \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} - x \frac{d\bar{w}}{dx} \right] \quad /5.2/$$

widzimy, że istnieje duża analogia z równaniem /5.1/, opisującym rozpatrywany przypadek zginania pasma płytowego. Związki zachodzące pomiędzy wartościami sił wewnętrznych i ugięciem pasma płytowego, a ugięciem pręta prostego są następujące:

$$D = \frac{EI}{1 - \nu^2/a} \quad /5.3/$$

$$w = \bar{w} / 1 - \nu^2/ \quad /5.4/$$

$$M_x = \frac{EI}{a/1 - \nu^2/} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad /5.5/$$

$$M_y = \frac{EI}{a/1 - \nu^2/} \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = \nu D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad /5.6/$$

$$M_{xy} = 0 \quad /5.7/$$

$$q_x = \frac{EI}{a/1 - \nu^2/} \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} = D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad /5.8/$$

$$q_y = 0 \quad /5.9/$$

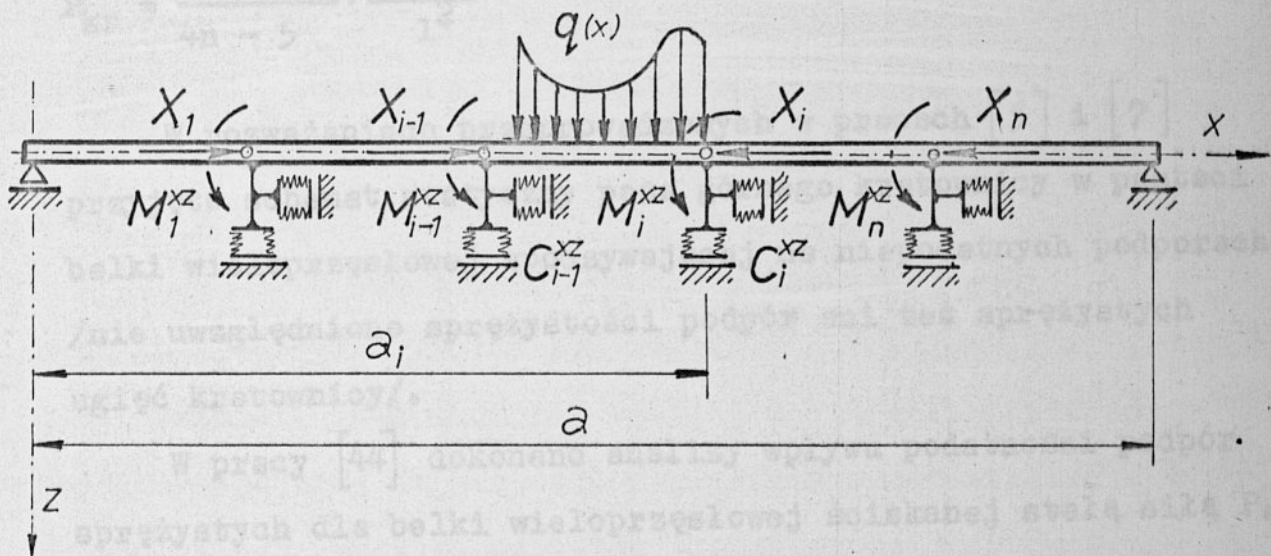
Tak więc, dla rozpatrywanego przypadku obciążenia pasma płytowego, można przyjąć schemat zastępczy w postaci belki wieloprzęsłowej podpartej na podporach sprężystych, o charakterystykach jak w paśmie płytowym. Sztywność belki przyjęto równą $EI = D \cdot b$ /b- rozstaw podpór punktowych w kierunku osi y/. Obciążenie prostopadłe do osi pręta przyjęto równe $q/x/ \cdot b$, zaś obciążenie osiowe X_1 założono w punktach podpór punktowych belki. Schemat tak obciążonej i podpartej belki pokazano na rys.5.2.

Rys.5.2

Zagadnieniem śriskania mimośrodowego belki wieloprzęsłowej zajmowało się wielu autorów, między innymi [5], [7], [44].

Timoschenko S., w pracy [44], podał rozwiązanie zagadnień zginania oraz wyboczenia belek wieloprzęsłowych spoczywających na podporach sprężystych. Rozpatrzono przypadki obciążeń osiowych stałych i zmieniających się wzdłuż osi pręta. Zagadnienie rozwiązano w oparciu o równanie trzech momentów.

Bleich F., w pracy [5], omówił zagadnienie zginania i wyboczenia pasa górnego kratownicy płaskiej. Zagadnienie



Rys.5.2 Schemat belki wieloprzęskowej na podporach sprężystych ściskanej mimośrodowo

gdzie:
 C - moduł podatności sprężystej podpory tj. siła potrzebna do wywołania jednostkowej ugięcia podpory;
 n - liczba przęsków belki;
 l - długość całkowita belki;

zostało również rozwiązane w oparciu o równanie trzech momentów.

Brzoska Z. [7] podał wzór na wartość obciążenia krytycznego dla pasa górnego kratownicy płaskiej o n jednakowych grodziach, obciążonej równomiernie na całej długości. Wartość obciążenia krytycznego pasa górnego kratownicy opisana jest wzorem:

$$P_{kr} = \frac{4n}{4n-5} \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad /5.10/$$

W rozważaniach przeprowadzonych w pracach [5] i [7] przyjęto schemat statyczny pasa górnego kratownicy w postaci belki wieloprzęsłowej spoczywającej na niepodatnych podporach /nie uwzględniono sprężystości podpór ani też sprężystych ugięć kratownicy/.

W pracy [44] dokonano analizy wpływu podatności podpór sprężystych dla belki wieloprzęsłowej ściskanej stałą siłą P . Ustalono, że istnieje graniczna wartość podatności sprężystej podpór α_{gr} , powyżej której belka pracuje jak na podporach niepodatnych. Graniczna wartość modułu podatności podpór wynosi:

$$\alpha_{gr} = \frac{n P_e}{\gamma \cdot l} ; \quad /5.11/$$

gdzie:

α - moduł podatności sprężystej podpory tj. siła potrzebna do wywołania jednostkowego ugięcia podpory;

n - liczba przęseł belki;

l - długości całkowite belki;

$P_e = n^2 \pi^2 EI/l^2$ - eulerowskie obciążenie krytyczne jednego przęsła belki ;

Tabl.5.1 γ - współczynnik wg tablicy 5.1.

Wartość współczynnika γ we wzorze /5.11/ zmniejsza się ze wzrostem liczby przęseł i dąży do wartości 0,250. Analizując wielkości odkształceń sprężystych kratownicy dochodzimy do wniosku, że podatności podpór belki wieloprzęsłowej, jako schematu statycznego pasa górnego kratownicy, są dla większości przypadków większe od wartości granicznych, opisanych wzorem /5.11/ i pominięcie sprężystości podpór jest możliwe. Jest to potwierdzeniem słuszności założeń poczynionych w omawianych pracach [5] i [7].

Z rozważań przeprowadzonych w pracach [5], [7], [44] oraz analizy wzoru /5.10/ wynika, że dla kratownic obciążonych symetrycznie i równomiernie, wartość obciążenia krytycznego pasa górnego dąży do wartości obciążenia eulerowskiego: $P_e = \pi^2 EI/l^2$, wraz ze wzrostem ilości grodzi kratownicy.

Rozwiązanie zagadnienia będącego treścią niniejszego rozdziału /mimośrodowe ścisłanie belki wieloprzęsłowej / można uzyskać metodą omówioną w rozdziale 3, adoptowaną odpowiednio dla przypadku ustroju prętowego. W rozważanym przypadku bardziej skuteczną okazuje się jednak metoda zastosowana w omawianych pracach [5], [7], [44] : metoda równań trzech momentów.

rys.5.3 Dla oznaczeń użytych na rys.5.3 równania trzech momentów mają postać:

$P_e = n^2 \pi^2 EI/l^2$ - eulerowskie obciążenie krytyczne jednego przęsła belki ;

Tabl.5.1 γ^* - współczynnik wg tablicy 5.1.

Wartość współczynnika γ^* we wzorze /5.11/ zmniejsza się ze wzrostem liczby przęseł i dąży do wartości 0,250. Analizując wielkości odkształceń sprężystych kratownicy dochodzimy do wniosku, że podatności podpór belki wieloprzęsłowej , jako schematu statycznego pasa górnego kratownicy, są dla większości przypadków większe od wartości granicznych, opisanych wzorem /5.11/ i pominięcie sprężystości podpór jest możliwe. Jest to potwierdzeniem słuszności założeń poczynionych w omawianych pracach [5] i [7].

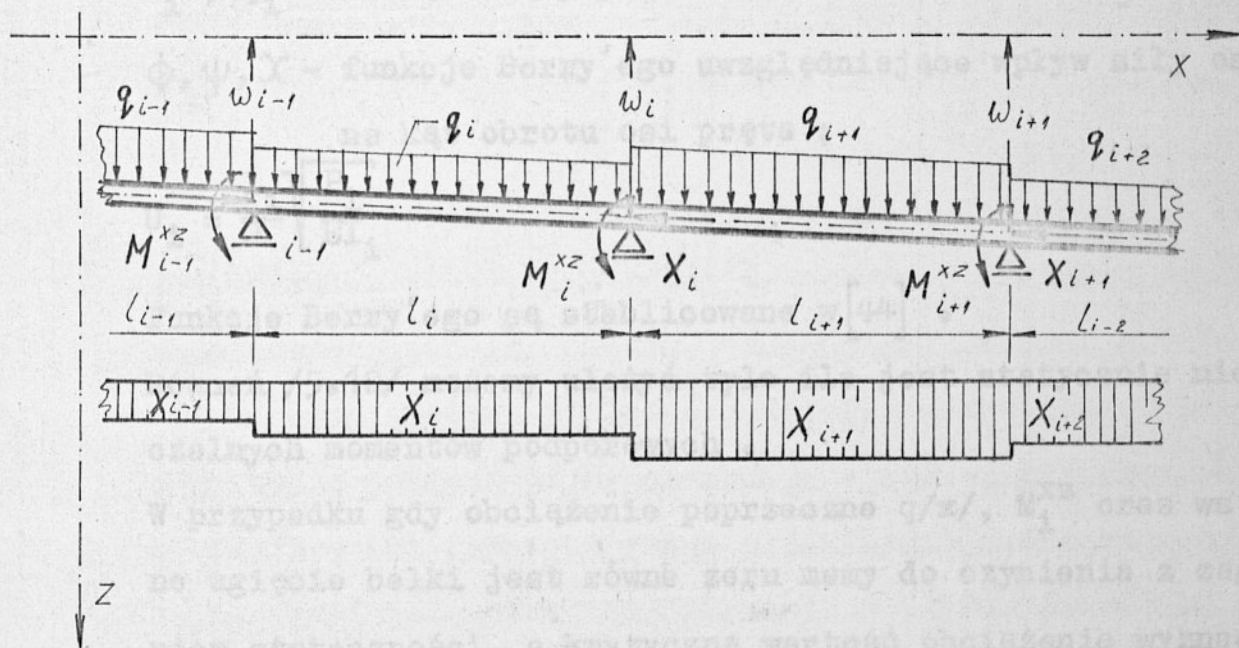
Z rozważań przeprowadzonych w pracach [5] , [7] , [44] oraz analizy wzoru /5.10/ wynika, że dla kratownic obciążonych symetrycznie i równomiernie, wartość obciążenia krytycznego pasa górnego dąży do wartości obciążenia eulerowskiego: $P_e = \pi^2 EI/l^2$, wraz ze wzrostem ilości grodzi kratownicy.

Rozwiązanie zagadnienia będącego treścią niniejszego rozdziału /mimośrodowe ścisłanie belki wieloprzęsłowej / można uzyskać metodą omówioną w rozdziale 3, adoptowaną odpowiednio dla przypadku ustroju prętowego. W rozważanym przypadku bardziej skuteczną okazuje się jednak metoda zastosowana w omawianych pracach [5] , [7] , [44] : metoda równań trzech momentów.

Rys.5.3 Dla oznaczeń użytych na rys.5.3 równania trzech momentów mają postać:

Tabl.5.1 Współczynniki γ^x we wzorze /5.11/ [44]

n	2	3	4	5	6	7	8	9
γ^x	0,500	0,333	0,293	0,276	0,268	0,263	0,258	0,255



Rys.5.3. Schemat belki wieloprzęsłowej ściskanej mimośrodowo.

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_{i-1}}{I_i} l_i \phi / U_i / + \frac{M_{i+1} + M_{i+1}^{XZ}}{I_{i+1}} l_{i+1} \phi / U_{i+1} / + 2 \left[\frac{M_i + M_i^{XZ}}{I_i} l_i \psi / U_i / + \right. \\
 & \left. + \frac{M_i}{I_{i+1}} l_{i+1} \psi / U_{i+1} / \right] + 6E \left[\frac{w_{i-1}}{I_i} - w_i \left(\frac{1}{I_i} + \frac{1}{I_{i+1}} \right) + \frac{w_{i+1}}{I_{i+1}} \right] = \\
 & = - \frac{q_i l_i^3}{4 I_i} \chi / U_i / - \frac{q_{i+1} l_{i+1}^3}{4 I_{i+1}} \chi / U_{i+1} / \quad /5.12/
 \end{aligned}$$

gdzie:

M_i - moment zginający na i -tej podporze ;

w_i - wstępne ugięcie i -tej podpory ;

M_i^{XZ} , q_i - obciążenie poprzeczne belki ;

ϕ, ψ, χ - funkcje Berry'ego uwzględniające wpływ siły osiowej na kąt obrotu osi pręta ;

$$U_i = \frac{l_i}{2} \sqrt{\frac{P_i}{EI_i}}$$

Funkcje Berry'ego są stabilizowane w [44] .

Równań /5.12/ możemy ułożyć tyle ile jest statycznie niewyznaczalnych momentów podporowych .

W przypadku gdy obciążenie poprzeczne q/x , M_i^{XZ} oraz wstępne ugięcie belki jest równe zero mamy do czynienia z zagadnieniem stateczności, a krytyczną wartość obciążenia wyznaczmy przyrównując do zera wyznacznik główny układu równań /5.12/.

6. JEDNOCZESNE ZGINANIE I ŚCISKANIE UŻEBROWANEJ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ PODPARTEJ I OBCIĄŻONEJ PUNKTOWO W SWYM OBSZARZE

6.1. WPROWADZENIE

Jednym z powszechnie stosowanych środków mających na celu zwiększenie sztywności płyty jest wzmocnienie jej żebrami. Zwiększenie sztywności płyty można uzyskać drogą zwiększenia jej grubości, lecz prowadzi to do nadmiernego zużycia materiału. Bardziej efektywne rozwiązanie konstrukcyjne uzyskuje się zachowując możliwie małą grubość płyty, a zwiększenie sztywności giętnej otrzymuje się wprowadzając żebra wzmocniające. Ciężar żeber jest zazwyczaj o wiele mniejszy niż dodatkowy ciężar związany z równoważnym zwiększeniem grubości płyty.

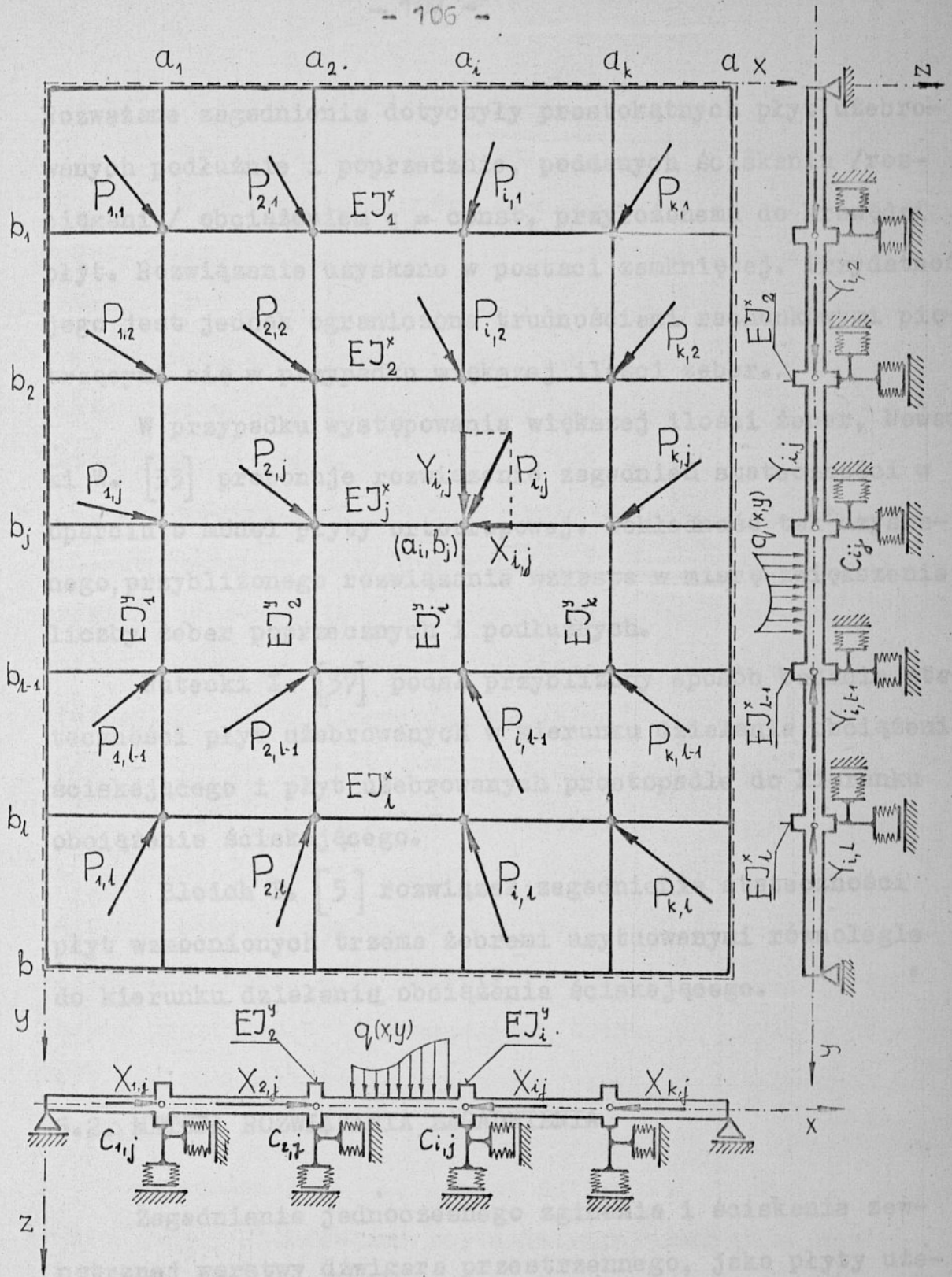
W niniejszym rozdziale zajęto się jednoczesnym zginaniem i ściskaniem płytowej warstwy zewnętrznej dźwigara przestrzennego rozpatrywanego rodzaju, wzmocnionej żebrami ortogonalnymi. Schemat statyczny płytowej warstwy zewnętrznej dźwigara przyjęto w postaci płyty cienkiej, o stałej grubości, wzmocnionej żebrami poprzecznymi i podłużnymi, tworzącymi ortogonalny ruszt połączony monolitycznie z płytą. Żebra podłużne, równoległe do osi x , w ilości j_k , o sztywności giętnej EI_j i sztywności skrętnej GC_j , usytuowane są w odległości b_j od osi x . Żebra poprzeczne, równoległe do osi y , w ilości i_k , o sztywności giętnej EJ_i i sztywności skrętnej GC_i usytuowane

są w odległości a_i od osi y . Sztywność giętna, skrętna oraz przekroje poprzeczne żeber są stałe wzdłuż prostych $x = a_i$, $y = b_j$. Płyta podparta jest punktowo wewnątrz swego obszaru w $i \cdot j$ punktach. Punktowe podpory, o nieliniowej podatności sprężystej na przemieszczenia w kierunku odpowiednich osi C_{ij}^x , C_{ij}^y , C_{ij}^z oraz zmiennej podatności giętnej C_{ij}^{xz} , C_{ij}^{yz} , posiadają współrzędne $/a_i, b_j/$ gdzie : $i = 1, 2, \dots, k \dots i_k$, $j = 1, 2, \dots, l \dots, j_k$. Ponadto płyta podparta jest przegubowo na obwodzie / w ogólnym przypadku należy przyjąć punktowe podpory na obwodzie ; patrz założenia w pkt 3.2/. Obciążeniem poprzecznym płyty są siły skupione $R/x, y/$, skupione momenty zginające M^{xz} , M^{yz} oraz obciążenia ciągłe $q/x, y/$. Obciążeniem stycznym płyty, leżącym w płaszczyźnie środkowej płyty, są siły skupione P_{ij} o składowych X_{ij} , Y_{ij} . Działają one wewnątrz obszaru płyty i są przyłożone w punktach usytuowania sprężystych podpór płyty $/a_i, b_j/$. Schemat tak podpartej i obciążonej płyty pokazano na rys.6.1.

Rys.6.1

Określenie stanu granicznego płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej dźwigara przestrzennego o schemacie statycznym i obciążeniu pokazanym na rys.6.1, wymaga rozwiązania zagadnienia jednoczesnego zginania i ściskania /rozciągania/ uźebrowanej płyty prostokątnej, podpartej i obciążonej punktowo w swym obszarze.

Zagadnieniem jednoczesnego zginania i ściskania płyt uźebrowanych żebrami podłużnymi i poprzecznymi zajmowało się niewielu autorów. Nowacki W., w pracach [33], [34], podał rozwiązanie zginania, jednoczesnego zginania i ściskania, stateczności i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami.



Rys.6.1. Schemat statyczny płyty uźebrowanej ortogonalnie podpartej punktowo w swym obszarze

Rozważane zagadnienia dotyczyły prostokątnych płyt uźebrowanych podłużnie i poprzecznie, poddanych ściskeniu /rozciąganiu/ obciążeniem $q = \text{const}$, przyłożonemu do krawędzi płyt. Rozwiązanie uzyskano w postaci zamkniętej. Przydatność jego jest jednak ograniczona trudnościami rachunkowymi piętrzącymi się w przypadku większej ilości żeber.

W przypadku występowania większej ilości żeber, Nowacki W. [33] proponuje rozwiązanie zagadnień stateczności w oparciu o model płyty ortotropowej. Dokładność tak uzyskanego, przybliżonego rozwiązania wzrasta w miarę zwiększenia liczby żeber poprzecznych i podłużnych.

Rutecki I. [37] podał przybliżony sposób badania stateczności płyt uźebrowanych w kierunku działania obciążenia ściskającego i płyt uźebrowanych prostopadle do kierunku obciążenia ściskającego.

Bleich F. [5] rozwiązał zagadnienie stateczności płyt wzmocnionych trzema żebrami usytuowanymi równolegle do kierunku działania obciążenia ściskającego.

6.2. METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

Zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskenia zewnętrznej warstwy dźwigara przestrzennego, jako płyty uźebrowanej, podparte i obciążonej punktowo w swym obszarze, rozwiązane zostanie metodą sił. Metoda ta polega na wyznaczeniu oddziaływań podpór punktowych występujących w obrębie płyty. Algorytm postępowania tej metody został omówiony w rozdziale 3 dla przypadku nieuźebrowanej warstwy zew-

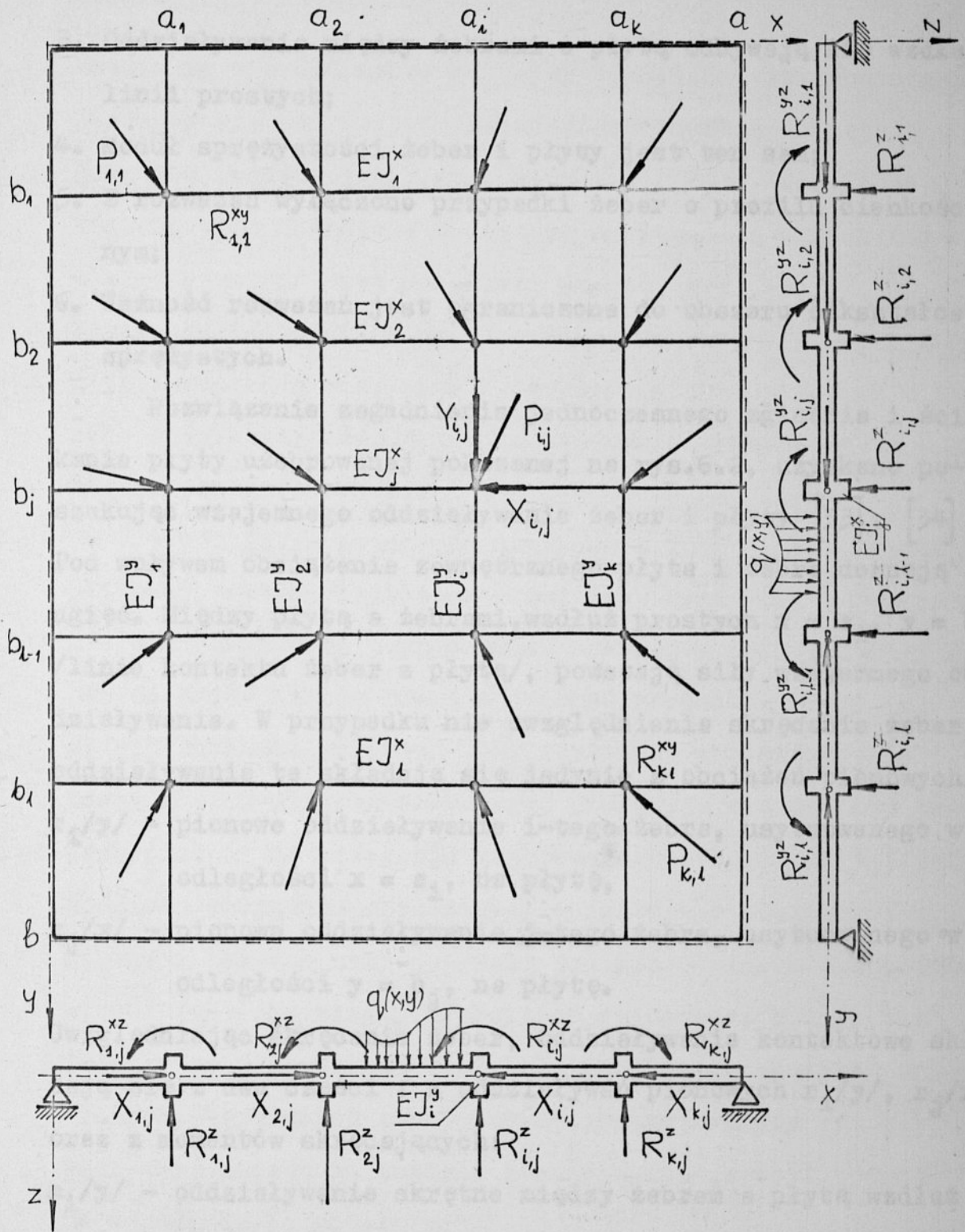
nętrznej dźwigara przestrzennego.

W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia jednoczesnego zginania i ściskania warstwy zewnętrznej, jako płyty uźebrowanej, należy określić funkcję odkształcenia schematu zastępczego płyty. Schemat zastępczy należy przyjąć w postaci płyty o wymiarach, uźebrowaniu i obciążeniu jak w schemacie zasadniczym usuwając punktowe podpory sprężyste występujące wewnątrz obszaru płyty.

Dla rozważanego schematu płyty /pokazanej na rys.6.1/ schemat zastępczy przyjęto w postaci płyty prostokątnej, uźebrowanej poprzecznie i podłużnie, podpartej przegubowo na obwodzie. Żebra poprzeczne, równoległe do osi y , o sztywności giętej EJ_i i sztywności skrętnej GC_i , usytuowane są w odległości a_i do osi y . Żebra podłużne, równoległe do osi x , o sztywności giętej EJ_j i sztywności skrętnej GC_j , położone są w odległości b_j od osi x . Oprócz obciążenia występującego w schemacie zasadniczym płyty, rys.6.1, płytę obciążono siłami skupionymi R_{ij} , momentami skupionymi M_{ij}^{xz} , M_{ij}^{yz} działającymi prostopadle do płaszczyzny środkowej płyty w punktach $/a_i, b_j/$. Schemat zastępczy uźebrowanej płyty pokazano na rys.6.2.

Zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania /rozciągania/ płyty uźebrowanej zostanie rozwiązane przy następujących założeniach:

1. Żebra są symetryczne względem płaszczyzny środkowej płyty - posiadają wspólną oś zginania;
2. Płyta zbudowana jest z materiału ortotropowego i posiada stałą grubość g ;



Rys.6.2. Schemat zastępczy płyty pokazanej na rys.6.1.

3. Oddziaływania między żebrami a płytą odbywają się wzdłuż linii prostych;
4. Moduł sprężystości żeber i płyty jest ten sam;
5. Z rozważań wyłączono przypadki żeber o profilu cienkościennym;
6. Ważność rozważań jest ograniczona do obszaru odkształceń sprężystych.

Rozwiązanie zagadnienia jednoczesnego zginania i ściskania płyty uźebrowanej pokazanej na rys.6.2, uzyskano poszukując wzajemnego oddziaływania żeber i płyty [33], [34]. Pod wpływem obciążenia zewnętrznego płyta i żebra doznają ugięć. Między płytą a żebrami, wzdłuż prostych $x = a_i$, $y = b_j$ /linie kontaktu żeber z płytą/, powstają siły wzajemnego oddziaływania. W przypadku nie uwzględnienia skręcania żeber, oddziaływania te składają się jedynie z obciążeń pionowych: $r_i/y/$ - pionowe oddziaływanie i-tego żebra, usytuowanego w odległości $x = a_i$, na płytę, $r_j/x/$ - pionowe oddziaływanie j-tego żebra, usytuowanego w odległości $y = b_j$, na płytę.

Uwzględniając skręcanie żeber, oddziaływania kontaktowe składają się z dwu części : z oddziaływań pionowych $r_i/y/$, $r_j/x/$ oraz z momentów skręcających:

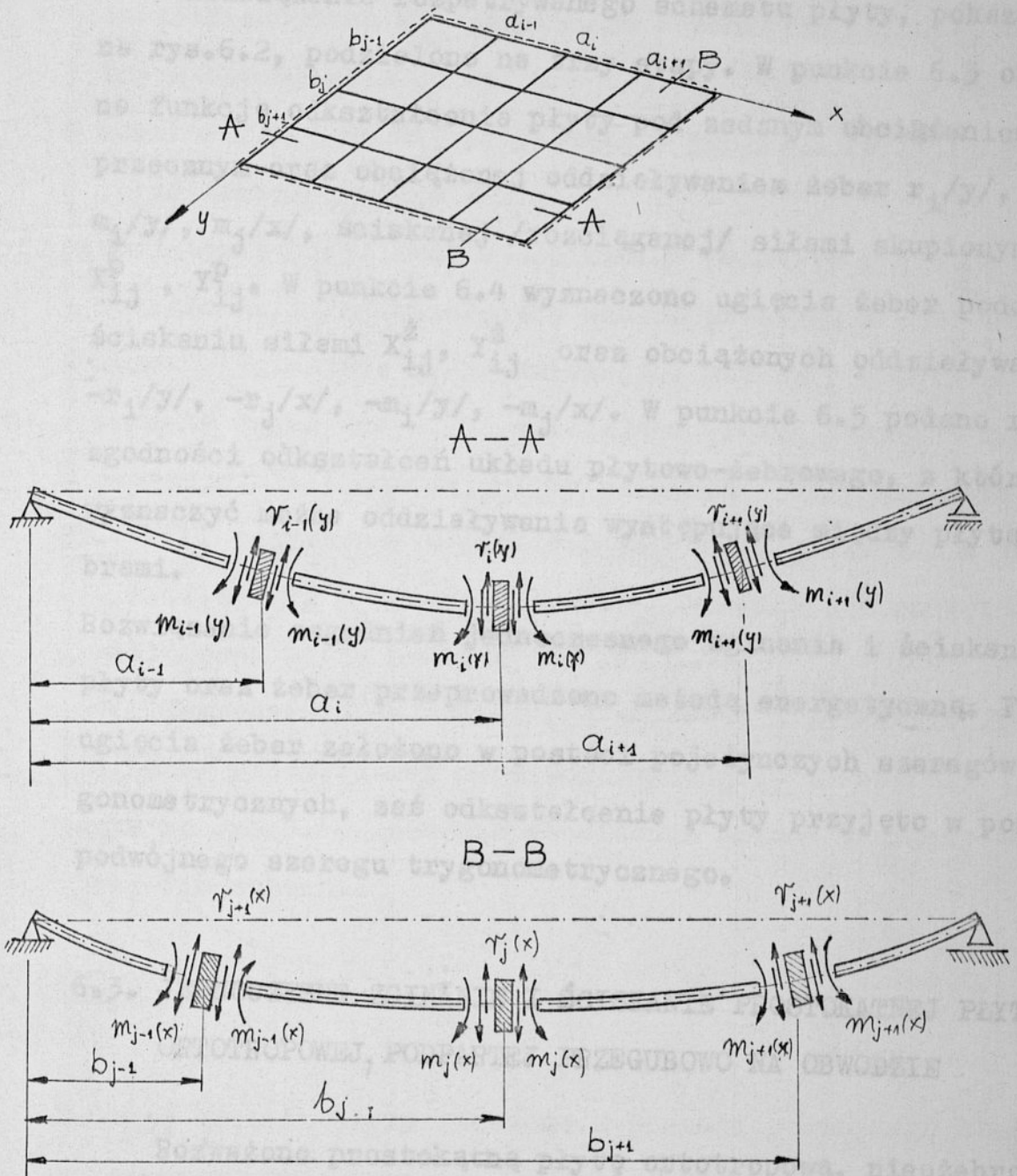
- $m_i/y/$ - oddziaływanie skrętne między żebrami a płytą wzdłuż prostej $x = a_i$;
- $m_j/x/$ - oddziaływanie skrętne między żebrami a płytą wzdłuż prostej $y = b_j$.

Rys.6.3

Oddzielmy w myśli żebro od płyty /rys.6.3/. Wówczas płyta znajduje się pod wpływem zadanego obciążenia zewnętrznego oraz pod obciążeniem $r_i/y/$, $r_j/x/$, $m_i/y/$, $m_j/x/$. Żebra natomiast będą dodatkowo obciążone obciążeniem poprzecznym $-r_i/y/$, $-r_j/x/$ oraz momentami skręcającymi $-m_i/y/$, $-m_j/x/$. Z warunku jednakowych ugięć oraz kątów obrotu płyty i żeber w przekrojach $x = a_i$, $y = b_j$ otrzymamy układy równań z których wyznaczmy oddziaływania pionowe i skrętne występujące między płytą a żebromi.

W przyjętym schemacie statycznym zewnętrznej warstwy płytowej, ustrój płytowo-żebrowy jest obciążony w płaszczyźnie środkowej oraz poprzecznie. Dokonując "oddzielenia" żebra od płyty należy również dokonać rozdziału obciążeń. Podziału obciążeń osiowych [44], leżących w płaszczyźnie środkowej układu płytowo-żebrowego, proponuje się dokonać proporcjonalnie do przekroju poprzecznego żeber i płyty, zaś podziału obciążeń poprzecznych w oparciu o charakterystyki giętne i skrętne ustroju /taki podział obciążeń proponowany w [44] jest dla ciągłych obciążeń osiowych/. Wydaje się jednak, że zagadnienie rozdziału skupionych obciążeń osiowych, występujących w przyjętym schemacie płyty rys.6.1, winno być dodatkowo zbadane i ewentualnie zweryfikowane na drodze badań modelowych.

Dla celów niniejszego rozdziału przyjęto, że sposób rozdziału obciążeń osiowych jest znany i że płyta przenosi siły osiowe X_{ij}^p , Y_{ij}^p , zaś żebra siły X_{ij}^z , Y_{ij}^z
 $/X_{ij}^p + X_{ij}^z = X_{ij}$; $Y_{ij}^p + Y_{ij}^z = Y_{ij}/$.



Rys.6.3. Oddziaływanie poprzeczne i skrętne występujące między płytą a żebrem

Rozwiązanie rozpatrywanego schematu płyty, pokazanej na rys.6.2, podzielono na trzy etapy. W punkcie 6.3 określono funkcję odkształcenia płyty pod zadaniem obciążeniem poprzecznym oraz obciążonej oddziaływaniem żeber $r_i/y/$, $r_j/x/$, $m_i/y/$, $m_j/x/$, ściskanej /rozciąganej/ siłami skupionymi X_{ij}^p , Y_{ij}^p . W punkcie 6.4 wyznaczono ugięcia żeber poddanych ściskaniu siłami X_{ij}^z , Y_{ij}^z oraz obciążonych oddziaływaniami $-r_i/y/$, $-r_j/x/$, $-m_i/y/$, $-m_j/x/$. W punkcie 6.5 podano równania zgodności odkształceń układu płytowo-żebrowego, z którego wyznaczyć można oddziaływania występujące między płytą a żebrami.

Rozwiązanie zagadnień jednoczesnego zginania i ściskania płyty oraz żeber przeprowadzono metodą energetyczną. Funkcję ugięcia żeber założono w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych, zaś odkształcenie płyty przyjęto w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego.

6.3. JEDNOCZESNE ZGINANIE I ŚCISKANIE PROSTOKĄTNEJ PŁYTY ORTOTROPOWEJ, PODPARTEJ PRZEGUBOWO NA OBWODZIE

Rozważono prostokątną płytę ortotropową, nieuźebrowaną, o stałej grubości g . Płyta, o wymiarach boków a , b , jest oparta przegubowo wzdłuż wszystkich krawędzi. Obciążeniem poprzecznym płyty jest:

- obciążenie ciągłe $q/x,y/ = \text{const}$;
- siły skupione R_{ij} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$;

- momenty skupione M_{ij}^{xz} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$, o wektorze równoległym do osi x ;
- momenty skupione M_{ij}^{yz} przyłożone w punktach $/a_i, b_j/$, o wektorze równoległym do osi y ;
- obciążenia $r_i/y/$ działające wzdłuż prostych $y = a_i$;
- obciążenia $r_j/x/$ działające wzdłuż prostych $x = b_j$;
- momenty zginające $m_i/y/$ działające wzdłuż prostych $y = a_i$;
- momenty zginające $m_j/x/$ działające wzdłuż prostych $x = b_j$.

W płaszczyźnie środkowej płyty działają siły skupione X_{ij}^P, Y_{ij}^P , przyłożone w punktach $/a_i, b_i/$, gdzie : $i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots, i_k$ $j = 1, 2, 3, \dots, l, \dots, j_k$. Schemat tak podpartej i obciążonej płyty pokazano na rys.6.4.

Rys.6.4

Zagadnienie jednoczesnego zginania i ściskania /rozciągania/ prostokątnej płyty ortotropowej, o schemacie pokazanym na rys.6.4, zostanie rozwiązane metodą energetyczną Ritza-Timoschenki.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_i} = 0 \quad /6.1/$$

Funkcję ugięcia płyty założono w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego:

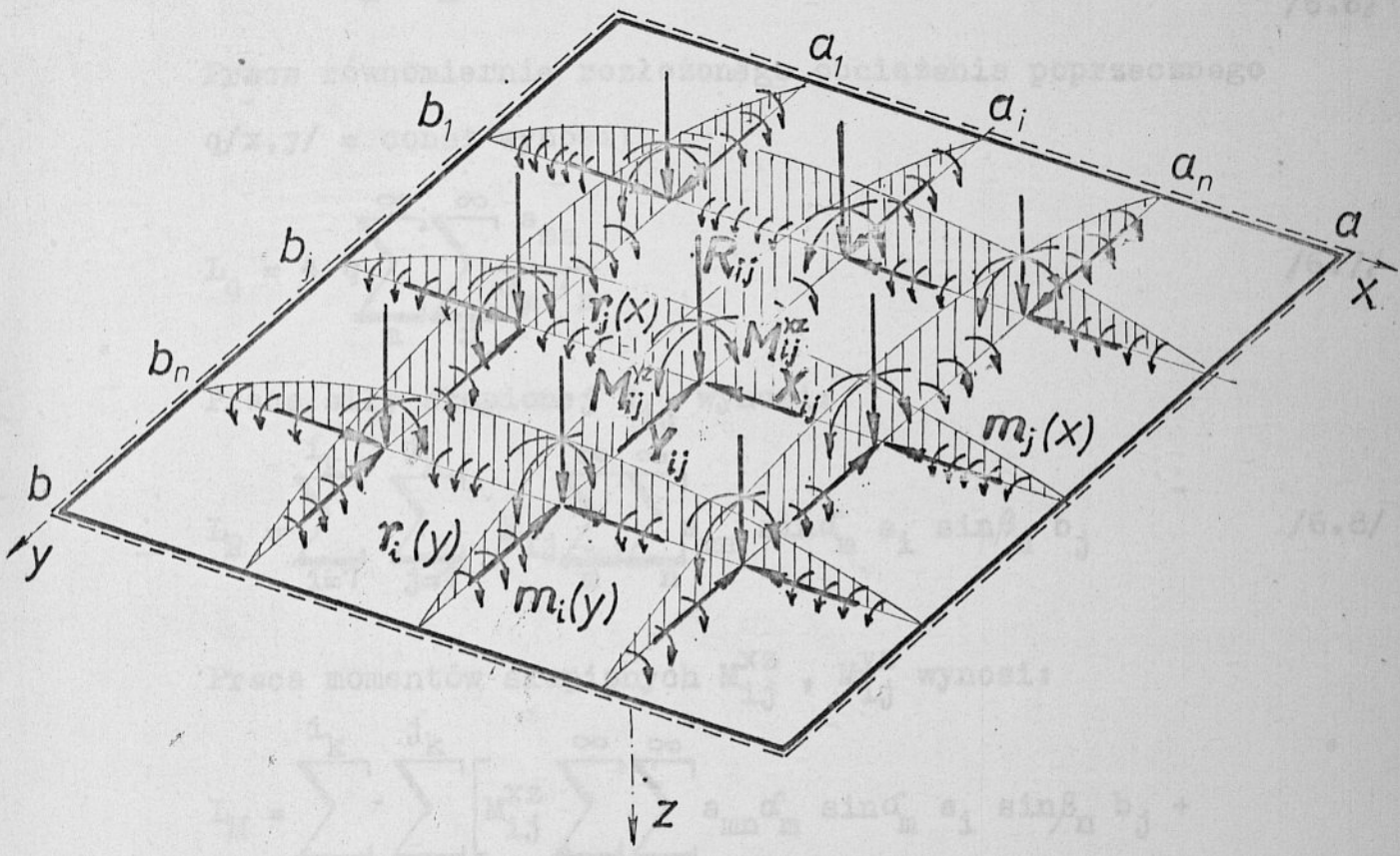
$$w(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad /6.2/$$

$$\text{gdzie: } m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad /6.3/$$

która spełnia warunki brzegowe zadania

$$x = 0, \quad x = a \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad /6.4/$$

$$y = 0, \quad y = b \quad w = 0, \quad M_y = 0 \quad /6.5/$$



Rys.6.4 Schemat statyczny płyty obciążonej oddziaływaniem żeber i podpór punktowych

Przy wyznaczaniu poszczególnych składników energii płyty skorzystano z obliczeń przeprowadzonych w punkcie 3.3.

Energia sprężysta zginania płyty ortotropowej wynosi:

$$U = \frac{ab}{8} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn}^2 \left[D_x \alpha_m^4 + D_y \beta_n^4 + \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + 4C/\alpha_m^2 \beta_n^2 \right] \quad /6.6/$$

Praca równomiernie rozłożonego obciążenia poprzecznego $q/x,y/ = \text{const}$ wynosi:

$$L_q = 4 q \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{a_{mn}}{\alpha_m \beta_n} \quad /6.7/$$

Praca siły skupionej R_{ij} wynosi:

$$L_R = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} R_{ij} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \sin \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j \quad /6.8/$$

Praca momentów skupionych M_{ij}^{xz} , M_{ij}^{yz} wynosi:

$$L_M = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left[M_{ij}^{xz} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \alpha_m \sin \alpha_m a_i \sin \beta_n b_j + \right.$$

$$\left. + M_{ij}^{yz} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} \beta_n \sin \alpha_m a_i \cos \beta_n b_j \right] \quad /6.9/$$

Pracę obciążeń $r_i/y/$ i $r_j/x/$ działających wzdłuż prostych

$x = a_i$ i $y = b_j$ wyznaczono ze wzoru:

$$L_r = \int_0^b r_i/y/ w/x,y/ \Big|_{x=a_i} dy + \int_0^a r_j/x/ w/x,y/ \Big|_{y=b_j} dx \quad /6.10/$$

Obciążenie poprzeczne $r_i/y/$ i $r_j/x/$ przedstawiono za pomocą pojedynczych szeregów trygonometrycznych

$$r_i/y/ = \sum_n^{\infty} r_n^i \sin \beta_n y \quad /6.11/$$

$$r_j/x/ = \sum_m^{\infty} r_m^j \sin \alpha_m x \quad /6.12/$$

Po wstawieniu /6.11/ i /6.12/ do /6.10/ i wykonaniu odpowiednich całkowań, L_r przybiera następującą postać:

$$L_r = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} r_n^i \sin \alpha_m a_i + \sum_{j=1}^{j_k} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} a_{mn} r_m^j \sin \beta_n b_j \quad /6.13/$$

Praca momentów $m_i/y/$ i $m_j/x/$ działających wzdłuż prostych $x = a_i$ i $y = b_j$ wynosi:

$$L_m = \int_0^b m_i/y/ \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=a_i} dy + \int_0^a m_j/x/ \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=b_j} dx \quad /6.14/$$

Momenty $m_i/y/$ i $m_j/x/$ przedstawiono za pomocą pojedynczych szeregów trygonometrycznych

$$m_i/y/ = \sum_n^{\infty} m_n^i \sin \beta_n y \quad /6.15/$$

$$m_j/x/ = \sum_m^{\infty} m_m^j \sin \alpha_m x \quad /6.16/$$

Praca L_m , po wstawieniu /6.15/ i /6.16/ do /6.14/ i wykonaniu całkowań, jest opisana następującym wzorem:

$$L_m = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_n^i \alpha_m \cos \alpha_m a_i + \sum_{j=1}^{j_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_m^j \beta_n \cos \beta_n b_j \quad /6.17/$$

Praca sił skupionych X_{ij}^p , Y_{ij}^p , działających w płaszczyźnie środkowej płyty, opisana jest wzorem:

$$L_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left\{ X_{ij}^p \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} a_{mm'nn'} \alpha_m \alpha_{m'} \sin \beta_n b_j \sin \beta_{n'} b_j A_{mm'}^0 + Y_{ij}^p \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} a_{mm'nn'} \beta_n \beta_{n'} \sin \alpha_m a_i \sin \alpha_{m'} a_i B_{nn'}^0 \right\} \quad /6.18/$$

Gdzie: $A_{mm'}^0$, $B_{nn'}^0$ wg /3.23/ i /3.26/

W rozważanym przypadku obciążenia płyty, całkowita energia układu wynosi:

$$\Pi = U - L_q - L_R - L_M - L_T - L_m - L_{xy} \quad /6.19/$$

Nieznane współczynniki $a_{mm'n'n'}$ funkcji ugięcia płyty wyznaczono korzystając z kryterium minimum energii układu /6.1/

$$a_{mm'n'n'} = \frac{1}{\frac{ab}{4} \Delta_{mn} - \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} /X_{ij}^D A_{mm'} + Y_{ij}^D B_{nn'}/} \left[\frac{4q}{\alpha_m \beta_n} + \right. \\ + \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i B_j + M_{ij}^{yz} \beta_n A_i D_j + R_{ij} A_i B_j + \\ \left. + \frac{1}{2} b \sum_{i=1}^{i_k} /r_n^i A_i + m_n^i C_i/ + \frac{1}{2} a \sum_{j=1}^{j_k} /r_m^j B_j + m_m^j D_j/ \right] \quad /6.20/$$

gdzie:

Δ_{mn} , $A_{mm'}$, $B_{nn'}$, wg /3.31/, /3.32/, /3.33/

$$A_i = \sin \alpha_m a_i$$

$$B_j = \sin \beta_n b_j$$

$$C_i = \cos \alpha_m a_i$$

$$D_j = \cos \beta_n b_j$$

/6.21/

Ostatecznie funkcja odkształcenia płyty opisana jest wzorem

$$w = \sum_m \sum_{m'} \sum_n \sum_{n'} a_{mm'n'n'} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

/6.22/

6.4. MIMOŚRODOWE ZGINANIE ŻEBER

W niniejszym punkcie zajęto się określeniem funkcji odkształcenia j -tego żebra, odległego o $y=b_j$ od początku układu współrzędnych, rys.6.2. Przyjęto, że żebro posiada przekrój poprzeczny F_j , sztywność giętną EJ_j oraz sztywność skrętną GC_j - stałe na długości pręta. Schemat statyczny żebra przyjęto w postaci belki o długości a , opartej przegubowo na końcach.

Na belkę działa obciążenie poprzeczne w postaci:

- obciążenia ciągłego r_j/x ;
 - momentu skręcającego m_j/x ;
 - sił skupionych R_{ij} przyłożonych w punktach $/a_i/$;
 - momentów skupionych M_{ij}^{xz} przyłożonych w punktach $/a_i/$;
- oraz obciążenie osiowe w postaci:
- sił skupionych X_{ij}^z .

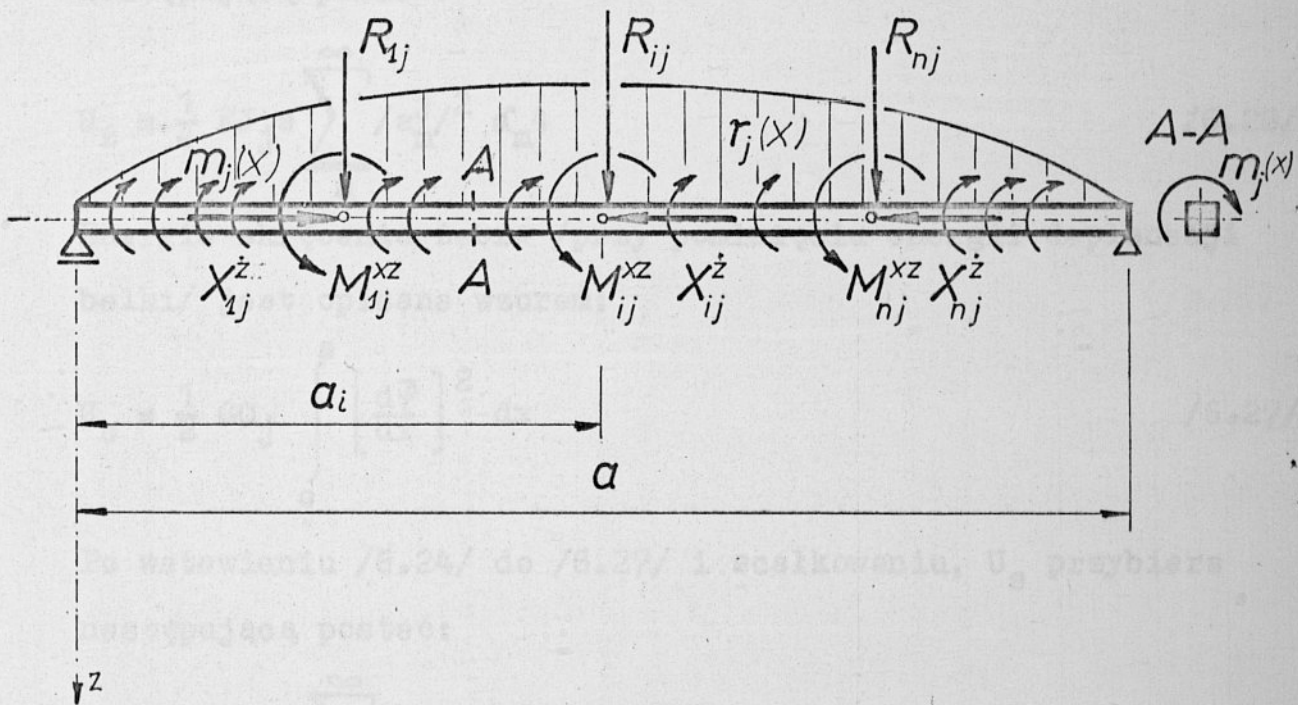
Rys.6.5 Schemat tak podpartej i obciążonej belki pokazano na rys.6.5. Zagadnienie mimośrodowego zginania belki, o schemacie pokazanym na rys.6.5, zostanie rozwiązane metodą energetyczną.

Funkcje odkształcenia belki przyjęto w postaci pojedynczych szeregów trygonometrycznych:

$$\bar{w}_j = \sum_m^{\infty} a_m^j \sin \alpha_m^j x, \quad /6.23/$$

$$\bar{\varphi}_j = \sum_m^{\infty} b_m^j \sin \alpha_m^j x, \quad /6.24/$$

gdzie : m, α_m^j jak /6.3/,



Rys.6.5 Schemat statyczny "j"-tego żebra obciążonego oddziaływaniem płyty

które spełniają warunki przegubowego oparcia belki na końcach.

Energia sprężysta zginania j-tego żebra wynosi:

$$U_z = \frac{1}{2} EJ_j \int_0^a \left[\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right]^2 dx \quad /6.25/$$

Po wstawieniu /6.23/ do /6.25/ i scałkowaniu, U_z przybiera następującą postać:

$$U_z = \frac{1}{4} EJ_j a \sum_m^{\infty} /a_m^j/^2 \alpha_m^4 \quad /6.26/$$

Energia skręcania żebra /przy pominięciu energii deplanacji belki/ jest opisana wzorem:

$$U_s = \frac{1}{2} GC_j \int_0^a \left[\frac{d\bar{\varphi}}{dx} \right]^2 dx \quad /6.27/$$

Po wstawieniu /6.24/ do /6.27/ i scałkowaniu, U_s przybiera następującą postać:

$$U_s = \frac{1}{4} GC_j a \sum_m^{\infty} /b_m^j/^2 \alpha_m^2 \quad /6.28/$$

Obciążenie $r_j/x/$, rozłożono w szereg trygonometryczny,

$$r_j/x/ = \sum_m^{\infty} r_m^j \sin \alpha_m^j x, \quad /6.29/$$

wykonuje pracę:

$$L_T = \int_0^a r_j/x/ \bar{w}/x/ dx = \sum_m^{\infty} a_m^j r_m^j \quad /6.30/$$

Obciążenie skrętne belki $m_j/x/$, rozłożone w szereg trygonometryczny, przybiera następującą postać:

$$m_j/x/ = \sum_m^{\infty} m_m^j \sin \alpha_m x \quad /6.31/$$

Wykona ono pracę:

$$L_m = \int_0^a m_j/x/ \bar{\varphi}/x/ dx = \frac{a}{2} \sum_m^{\infty} b_m^j m_m^j \quad /6.32/$$

Skupione siły R_{ij} , przyłożone w punktach a_i , wykonują pracę:

$$L_R = \sum_{i=1}^{i_k} R_{ij} \bar{w}_i = \sum_{i=1}^{i_k} R_{ij} \sum_m^{\infty} a_m^j \sin \alpha_m a_i \quad /6.33/$$

Momenty skupione M_{ij}^{xz} , przyłożone w punktach a_i , wykonują pracę opisaną wzorem:

$$L_M = \sum_{i=1}^{i_k} M_{ij}^{xz} \frac{d\bar{w}_i}{dx} = \sum_{i=1}^{i_k} M_{ij}^{xz} \sum_m^{\infty} a_m^j \alpha_m \cos \alpha_m a_i \quad /6.34/$$

Praca sił skupionych X_{ij}^z , działających w osi belki, wynosi:

$$L_X = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i_k} X_{ij}^z \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\frac{d\bar{w}}{dx} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i_k} X_{ij}^z \sum_m^{\infty} \sum_{m'}^{\infty} /a_m^j /^2 \alpha_m \alpha_{m'} A_{mm}^0 \quad /6.35/$$

gdzie: A_{mm}^0 wg /3.23/ + /3.24/

Całkowita energia układu, dla rozpatrywanego schematu obciążenia rys.6.5, wynosi:

$$\Pi = U_z + U_s - L_R - L_M - L_T - L_m - L_x \quad /6.36/$$

Różniczkując równanie /6.36/ podług stałej a_m^j otrzymano:

$$a_{mm'}^j = \sum_{i=1}^{i_k} \frac{a_{r_m^j} + R_{ij} A_i + M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i}{a_{Ej} \alpha_m^4 - X_{ij}^z A_{mm'}^0 \alpha_m \alpha_{m'}} \quad /6.37/$$

gdzie: A_i, C_i , wg /6.21/

Współczynnik b_m^j szeregu /6.24/ otrzymano różniczkując całkowitą energię układu /6.36/ podług b_m^j

$$b_m^j = \frac{m_m^j}{GC_j \alpha_m^2} \quad /6.38/$$

Ostatecznie funkcje odkształcenia j-tego żebra, /6.23/ i /6.24/ są następujące:

$$\bar{w}_j = \sum_m \sum_{m'} \sum_{j=1}^{i_k} \frac{a_{r_m^j} + R_{ij} A_i + M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i}{a_{Ej} \alpha_m^4 - X_{ij}^z \alpha_m \alpha_{m'} A_{mm'}^0} \sin \alpha_m x \quad /6.39/$$

$$\bar{\varphi}_j = \sum_m \frac{m_m^j \sin \alpha_m x}{GC_j \alpha_m^2} \quad /6.40/$$

Przez analogię do /6.39/ i /6.40/ wyznaczono wzory opisujące odkształcenie i-tego żebra, równoległego do osi y, obciążonego poprzecznie:

- obciążeniem ciągłym $r_i/y/$;
- obciążeniem skrętnym $m_i/y/$;
- craz osiowo :
- siłami skupionymi Y_{ij}^z .

Ugięcie i -tego żebra , o przekroju poprzecznym F_i , sztywności giętej EJ_i i sztywności skrętnej GC_i , wynosi:

$$\bar{w}_i = \sum_n \sum_n \sum_{i=1}^{i_k} \frac{\frac{b}{2} r_n^i + R_{ij} B_j + M_{ij}^{yz} D_j \beta_n}{2 EI_i \beta_n^4 - Y_{ij}^z \beta_n \beta_n' B_{nn}^0} \sin \beta_n y \quad /6.41/$$

gdzie: B_{nn}^0 wg /3.25/ i /3.36/ ; B_j, D_j wg /3.21/

Skręcenie i -tego żebra opisane jest wzorem:

$$\bar{\varphi}_i = \sum_n \frac{m_n^i \sin \beta_n y}{GC_i \beta_n^2} \quad /6.42/$$

6.5. WYZNACZENIE WZAJEMNYCH ODDZIAŁYWAŃ MIĘDZY PŁYTĄ A ŻEBRAMI

Oddziaływania pionowe $r^i/y/$, $r^j/x/$ oraz oddziaływania skrętne $m^i/y/$, $m^j/x/$, występujące między płytą a żebrami, wyznaczono z warunku jednakowych odkształceń układu płytowo-żebrowego. Dla rozpatrywanego schematu statycznego, rys.6.2, w którym występuje j_k żeber podłużnych i i_k żeber poprzecznych, otrzymano $2/i_k + j_k/$ równań zgodności odkształceń:

$$w_i /a_i, y/ = \bar{w}_i /y/ \quad /6.43/$$

$$\frac{\partial w_i /a_i, y/}{\partial x} = \bar{\varphi}_i /y/ \quad /6.44/$$

$$w_j /x, b_j/ = \bar{w}_j /x/ \quad /6.45/$$

$$\frac{\partial w_j /x, b_j/}{\partial y} = \bar{\varphi}_j /x/ \quad /6.46/$$

Korzystając z rozwiązań uzyskanych z pkt 6.3 i 6.4 równania /6.43/ + /6.46/ przybiorą następującą postać:

$$\sum_m \sum_{m'} \frac{A_i}{F} \left\{ \frac{16q}{\alpha_m \beta_n} + 4 \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} [R_{ij} A_i B_j + M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i B_j + \right.$$

$$\left. + M_{ij}^{yz} \beta_n A_i D_j + \frac{1}{2} b / r_n^i A_i + m_n^i C_i / + \frac{1}{2} a / r_m^j B_j + m_m^j D_j / \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i_k} \frac{1}{G} \left[\frac{b}{2} r_n^i + R_{ij} B_j + M_{ij}^{yz} D_j \beta_n \right] = 0 \quad /6.47/$$

$$\sum_m \sum_{m'} \frac{\alpha_m C_i}{F} \left\{ \frac{16q}{\alpha_m \beta_n} + 4 \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} [R_{ij} A_i B_j + M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i B_j + \right.$$

$$\left. + M_{ij}^{yz} \beta_n A_i D_j + \frac{1}{2} b / r_n^i A_i + m_n^i C_i / + \frac{1}{2} a / r_m^j B_j + m_m^j D_j / \right\} +$$

$$+ \frac{m_n^i}{G C_i \beta_n^2} = 0 \quad /6.48/$$

$$\sum_n \sum_{n'} \frac{B_j}{F} \left\{ \frac{16q}{\alpha_m \beta_n} + 4 \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} [R_{ij} A_i B_j + M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i B_j + \right.$$

$$\left. M_{ij}^{yz} \beta_n A_i D_j + \frac{1}{2} b / r_n^i A_i + m_n^i C_i / + \frac{1}{2} a / r_m^j B_j + m_m^j D_j / \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{j_k} \frac{1}{H} \left[r_m^j \frac{a}{2} + R_{ij} A_i + M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i \right] = 0 \quad /6.49/$$

$$\sum_n^{\infty} \sum_{n'}^{\infty} \frac{\beta_n D_j}{F} \left\{ \frac{16q}{\alpha_m \beta_n} + 4 \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left[R_{ij} A_i B_j + M_{ij}^{xz} \alpha_m C_i B_j + \right. \right. \\ \left. \left. + M_{ij}^{yz} \beta_n A_i D_j + \frac{1}{2} b / r_n^i A_i + m_n^i C_i / + \frac{1}{2} a / r_m^j B_j + m_m^j D_j \right] \right\} + \\ - \frac{m_m^j}{GC_j \alpha_m^2} = 0 \quad /6.50/$$

gdzie:

$$F = a b \Delta_{mn} - 4 \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_k} / X_{ij}^p A_{mm'} + Y_{ij}^p B_{nn'} / \quad /6.51/$$

$$G = EJ_i \beta_n^4 \frac{b}{2} - \sum_{i=1}^{i_k} Y_{ij}^z \beta_n \beta_{n'} B_{nn'}^o \quad /6.52/$$

$$H = EJ_j \alpha_m^4 \frac{a}{2} - \sum_{j=1}^{j_k} X_{ij}^z \alpha_m \alpha_{m'} A_{mm'}^o \quad /6.53/$$

Z równań /6.47/ + /6.50/ wyznaczymy interesujące nas wartości: $r_i/y/$, $r_j/x/$, $m_i/y/$, $m_j/x/$. Mając określone wzajemne oddziaływania płyty i żeber, ze wzoru /6.22/, możemy określić powierzchnię ugięcia płyty, zaś ze wzorów /6.39/ + /6.42/ odkształcenia żeber.

6.6. ALGORYTM OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Algorytm obliczeń numerycznych badania zagadnień stateczności oraz jednoczesnego zginania i ściskania płyt, podpartych punktowo w swym obrębie, omówiono szczegółowo dla przypadku płyt gładkich /nieuźebrowanych/.

Dla przypadku płyt uźebrowanych, podpartych punktowo w swym obrębie, tok obliczeń numerycznych jest podobny. Różni się on jedynie koniecznością wyznaczenia oddziaływań występujących między płytą a żebrami. Zagadnienie określenia oddziaływań między płytą a żebrami omówiono w pkt.6.5.

Schemat blokowy badania zagadnień stateczności oraz jednoczesnego zginania i ściskania uźebrowanych płyt, podpartych punktowo w swym obrębie, pokazano na rys.6.6.

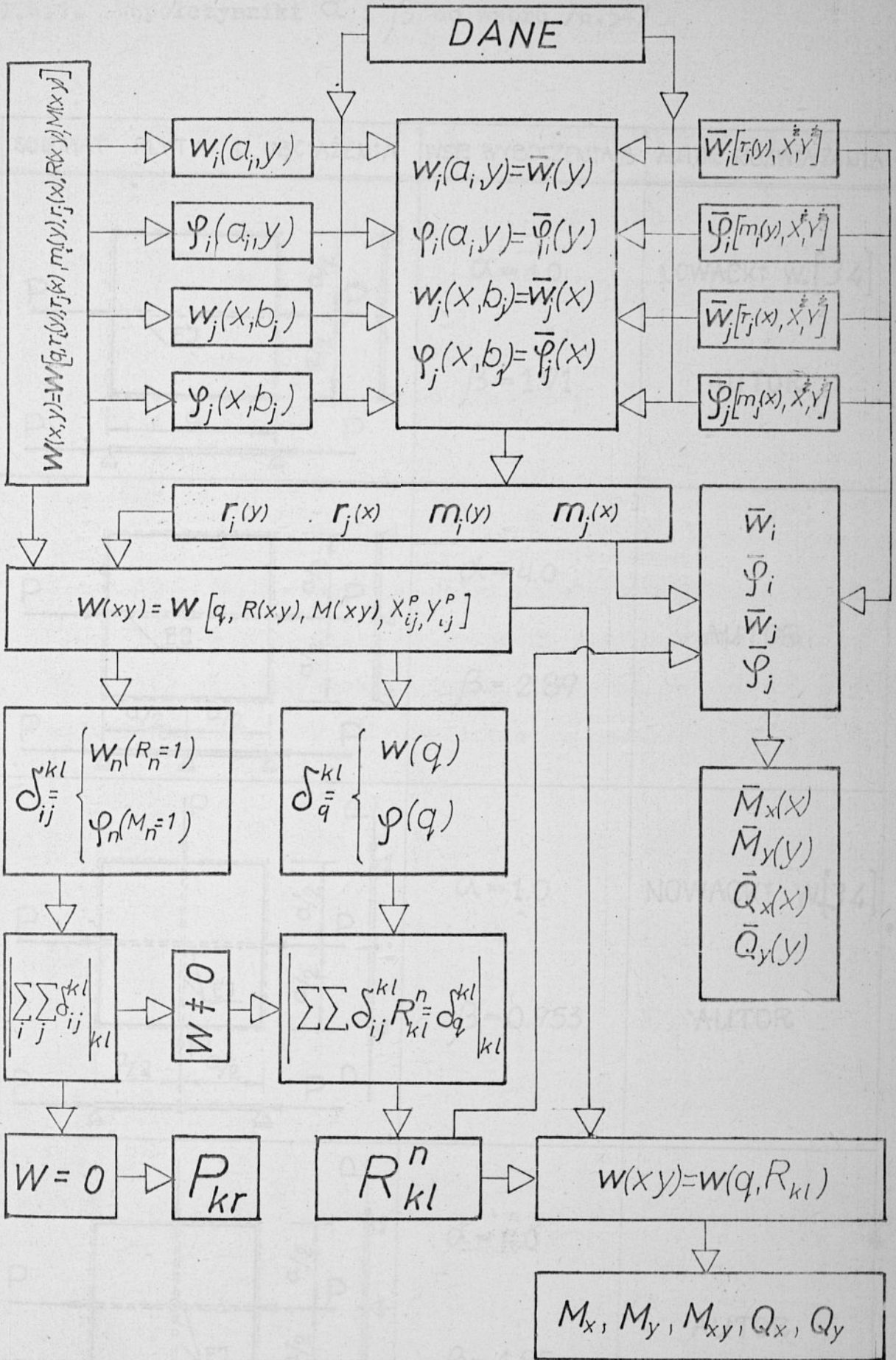
Rys.6.6

6.7. PRZYKŁADY LICZBOWE

Jako ilustrację opisanego w punkcie 6.6 algorytmu rozwiązania zagadnień stateczności płyt uźebrowanych obliczono następujące przykłady liczbowe.

Rozpatrzono 4 schematy izotropowych płyt kwadratowych o boku a , stężonych żebrami o stałej sztywności EI . Żebra są usytuowane w połowie rozpiętości płyt. Płyty ściskane są siłami skupionymi P , przyłożonymi do przeciwległych brzegów i podparte są przegubowo wzdłuż wszystkich krawędzi. Ponadto, dwie z pośród nich, posiadają przegubowe podpory punktowe umieszczone w środku płyt. Schematy podparcia i obciążenia rozpatrywanych płyt pokazano na tablicy 6.1.

Tabl.6.1



Rys.6.6 Schemat blokowy badania zagadnień stateczności oraz jednoczesnego zginania i ściskania płyt uźebrowanych podpartych i obciążonych punktowo w swym obszarze

Tabl.6.1. Współczynniki α i β do wzoru /6.54/

L.P.	SCHEMAT PŁYTY i OBCIĄŻENIA	WSP. WYBOCZENIA β	AUTOR ROZWIĄZANIA
1		$\alpha = 1.0$ $\beta = 1.91$	NOWACKI W. [34] AUTOR.
2		$\alpha = 4.0$ $\beta = 2.89$	AUTOR
3		$\alpha = 1.0$ $\beta = 0.953$	NOWACKI W. [34] AUTOR.
4		$\alpha = 4.0$ $\beta = 1.95$	AUTOR.

Krytyczna wartość obciążenia dla płyt o schematach pokazanych w tabelicy 6.1 wynosi:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 D}{a} [\gamma^* \alpha + \beta] \quad /6.54/$$

gdzie:

$$D = \frac{E s^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad - \text{sztywność płytowa ;}$$

$$\gamma^* = \frac{EJ}{Da} \quad - \text{stosunek sztywności żebra do sztywności płyty ;}$$

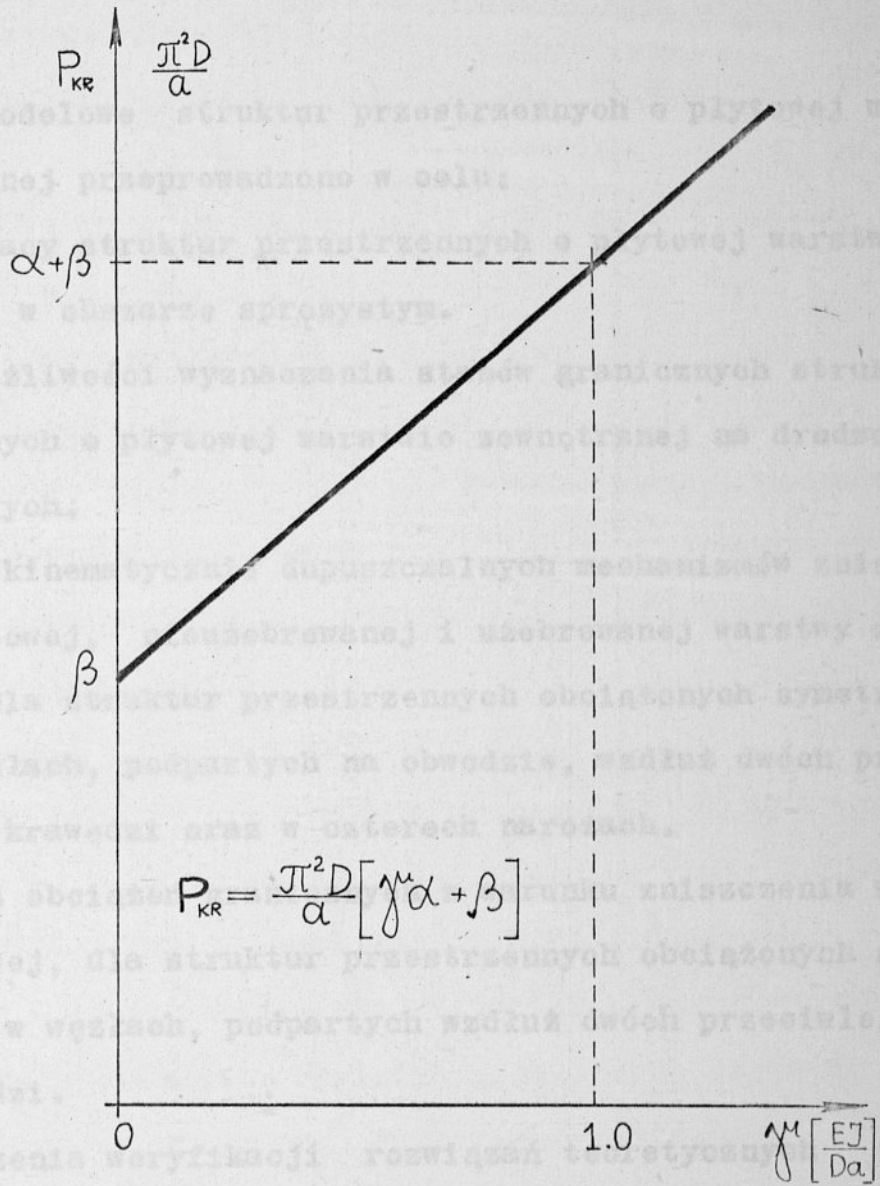
α, β - współczynniki podane w tabelicy 6.1.

Wartość obciążenia krytycznego jest liniową funkcją

γ^* - stosunku sztywności giętej żebra do sztywności płytowej. Wykres $P_{kr} = P / \gamma^*$ pokazano na rys.6.7.

Rys.6.7

Rys.6.7 Wykres wielkości obciążenia krytycznego płyt ujętych w tabelicy 6.1, jako funkcja γ^* - stosunku sztywności żebra do sztywności płyty



Rys.6.7 Wykres wielkości obciążenia krytycznego płyt uźebrowanych, pokazanych w tabelicy 6.1, jako funkcja γ^m - stosunku sztywności żebra do sztywności płyty

7. BADANIA MODELOWE

7.1. CEL BADAŃ

Badania modelowe struktur przestrzennych o płytowej warstwie zewnętrznej przeprowadzono w celu:

1. Poznania pracy struktur przestrzennych o płytowej warstwie zewnętrznej w obszarze sprężystym.
2. Zbadania możliwości wyznaczania stanów granicznych struktur przestrzennych o płytowej warstwie zewnętrznej na drodze badań modelowych.
3. Określenia kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia płytowej, nieuźebrowanej i uźebrowanej warstwy zewnętrznej, dla struktur przestrzennych obciążonych symetrycznie w węzłach, podpartych na obwodzie, wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi oraz w czterech narożach.
4. Wyznaczenia obciążeń granicznych z warunku zniszczenia warstwy płytowej, dla struktur przestrzennych obciążonych symetrycznie w węzłach, podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi.
5. Przeprowadzenia weryfikacji rozwiązań teoretycznych zamieszczonych w rozdziałach 2 i 6.

7.2. OPIS MODELI

Badania modelowe przeprowadzono na strukturach przestrzennych wykonanych w skali zmniejszonej o płytowej warstwie górnej. Materiałem konstrukcyjnym modeli były stopy aluminium PA2N.

Jako kryterium doboru wielkości modelu, przyjęto za [1] przydatność zastosowania analogii płytowej do wyznaczania sił

w prętach dźwigarów przestrzennych. Przyjęcie płytowego modelu struktury uwarunkowane jest minimalną liczbą oczek przekrycia m , występującą wzdłuż krawędzi podparcia. Dla struktur przestrzennych o oczkach prostokątnych wynosi ona:

$$m \geq 5 \quad /7.1/$$

W modelach serii M1 i M2 przyjęto $m = 6$, zaś w modelach serii M0 i M3 przyjęto $m = 7$.

Badania przeprowadzono na 4 typach modeli. Jako parametry zmienne modeli przyjęto: grubość i rodzaj warstwy płytowej oraz sposób podparcia modeli. Schematyczny układ modeli

Tabl.7.1. wraz z nazwami roboczymi podano w tabelicy 7.1. W przyjętych oznaczeniach roboczych modeli, tabl. 7.1., pierwszy składnik oznacza rodzaj modeli, a to:

M0 - modele serii informacyjnej;

M1 - modele do badania mechanizmów zniszczenia płytowej nie-
uźebrowanej warstwy zewnętrznej struktur przestrzennych;

M2 - modele do badania mechanizmów zniszczenia płytowej uźe-
browanej warstwy zewnętrznej struktur przestrzennych;

M3 - modele do wyznaczania obciążeń granicznych struktur
przestrzennych o płytowej warstwie zewnętrznej.


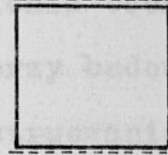

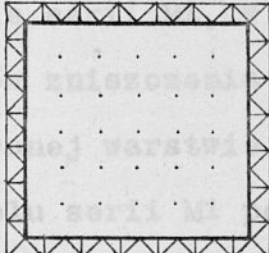
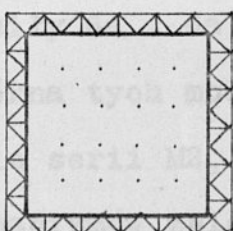
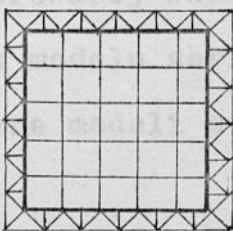
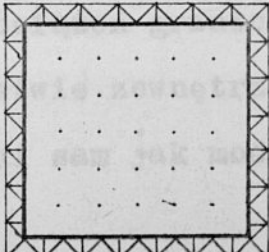
Dwie następne cyfry arabskie, w przyjętych oznaczeniach, okreś-
lają grubość i rodzaj płytowej warstwy górnej modeli. Grubość
płytowej warstwy zewnętrznej w badanych modelach wynosiła

0,5; 0,8; 1,0; 1,5 mm. Modele serii M2 posiadały płytową
warstwę zewnętrzną grubości 0,5 mm wzmocnioną żebrami z

ϕ 2 x 7. Oznaczono je M2. 0,5ż. Następne cyfry rzymskie,
w przyjętych oznaczeniach, określają schemat podparcia modeli
i tak:

I - podparcie modeli na obwodzie w węzłach dolnych;

Tabl.7.1. Schematyczny układ modeli

RODZAJ MODELI	SCHEMAT GEOMETRYCZNY MODELI	SCHEMAT PODPARCIA MODELI		
		<u>I</u>	<u>II</u>	<u>III</u>
				
1	2	3	4	5
M0		M0.1,0.I	M0.1,0.II	
M1		M1.1,0.I	M1.1,0.II	M1.1,0.III
M2		M2.0,5.I	M2.0,5.II	M2.0,5.III
M3			M3,0,5. II M3,0,8. II M3. 1,0.II M3. 1,5. II	

- II - podparcie modeli na dwóch przeciwległych krawędziach, w węzłach dolnych;
- III - podparcie modeli w czterech narożnych węzłach dolnych.

Rys.7.1.

Modele serii MO, w ilości sztuk 2, pokazane na rys. 7.1, potraktowano jako serię informacyjną. Wykonano je dla sprawdzenia możliwości kształtowania modeli badawczych, sprawdzenia połączeń prętów w węzłach przestrzennych, możliwości gubienia odchyłek wymiarowych, przydatności montażowej zaproponowanego rozwiązania węzłów oraz ustalenia technologii wykonawstwa modeli. Informacje uzyskane przy budowie i badaniu modeli serii MO wykorzystano przy konstruowaniu i wykonawstwie modeli serii M1, M2, M3.

Rys.7.2.

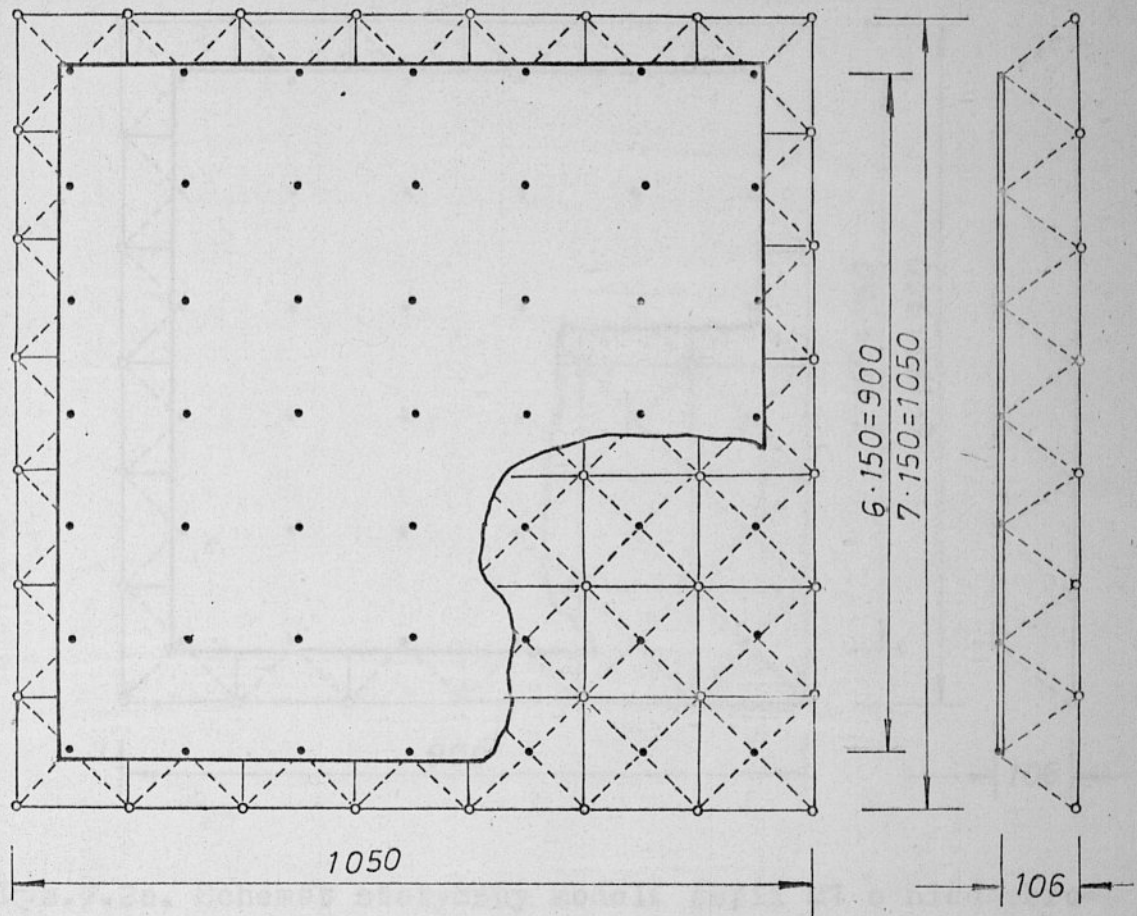
Modele serii M1, w ilości sztuk 3, wykonano do badania mechanizmów zniszczenia struktur przestrzennych o płytowej, nieuzębrowanej warstwie zewnętrznej. Schemat statyczny oraz widok modelu serii M1 pokazano na rys. 7.2. Wymiary modeli serii M1 były o jedno oczko mniejsze od modeli serii MO i M3 i wynosiły $6a \cdot 6a / a$ - wielkość oczka modelu/. Płytowa warstwa górna tych modeli posiadała wymiary $5a \cdot 5a$.

Rys.7.3.

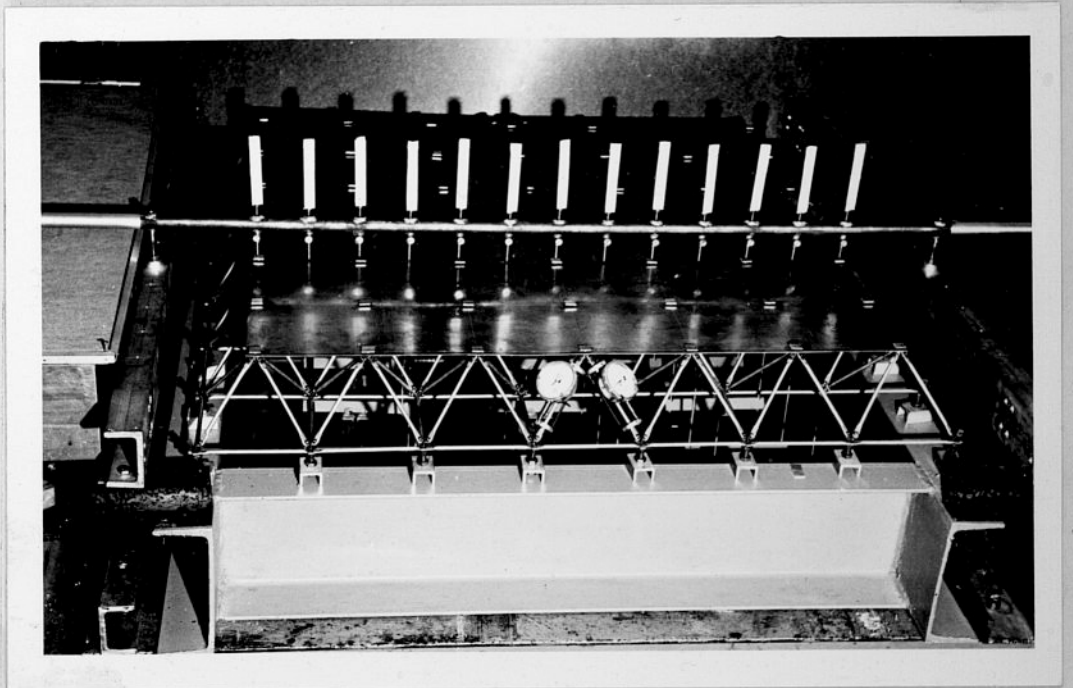
Modele serii M2, w ilości sztuk 3, wykonano w celu badania mechanizmów zniszczenia struktur przestrzennych o płytowej uzębrowanej warstwie zewnętrznej. Schemat statyczny oraz widok modelu serii M2 pokazano na rys. 7.3. Wymiary geometryczne modeli serii M2 były takie same jak modeli serii M1.

Rys.7.4.

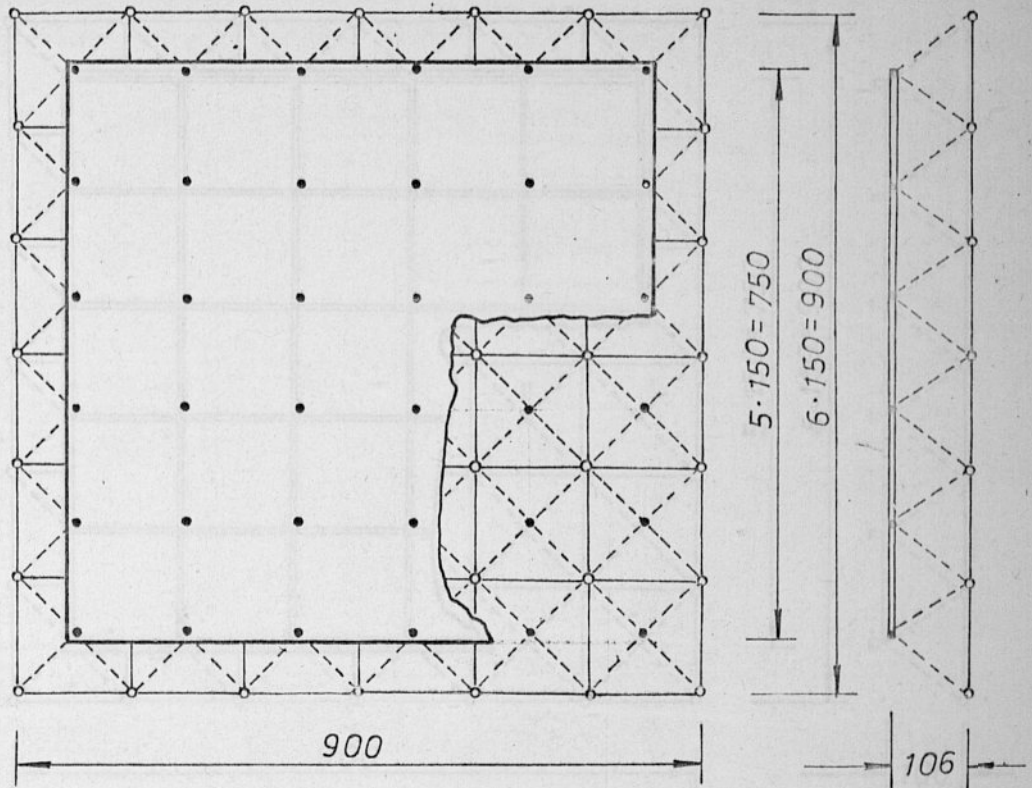
Modele serii M3, w ilości sztuk 20, zbudowano w celu badania obciążeń granicznych struktur przestrzennych o płytowej warstwie zewnętrznej. Schemat statyczny modeli serii M3 był taki sam jak modeli serii MO. Pokazano go na rys.7.4.



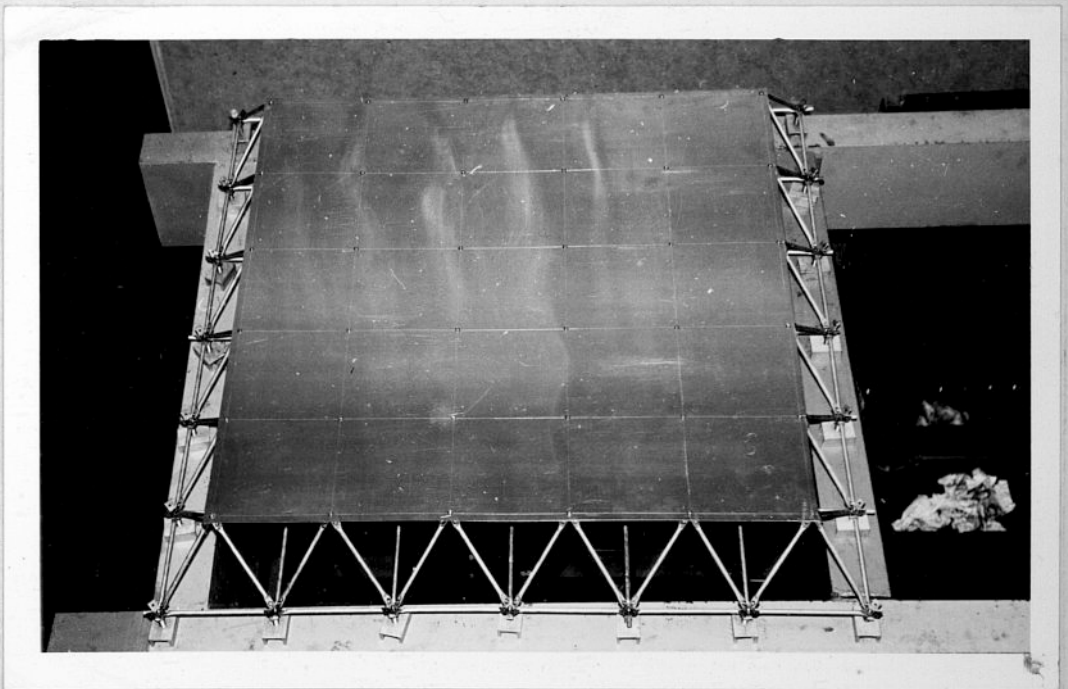
Rys.7.1a. Schemat statyczny modeli serii MO



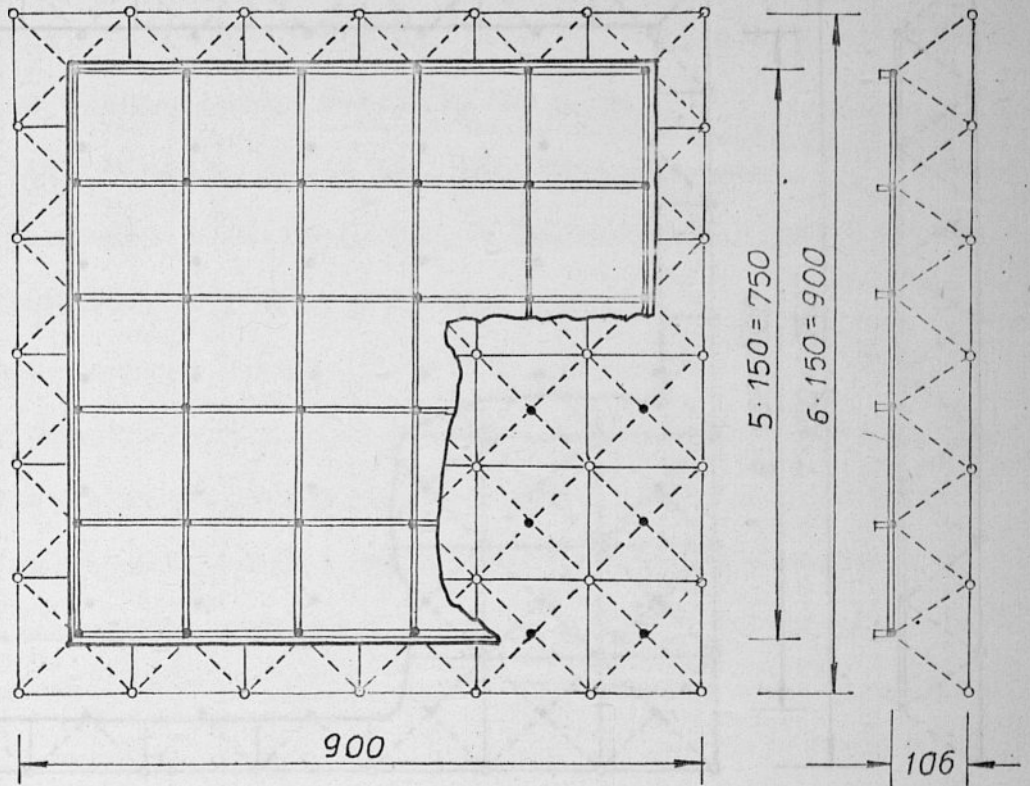
Rys.7.1b. Widok modelu serii MO na stanowisku badawczym



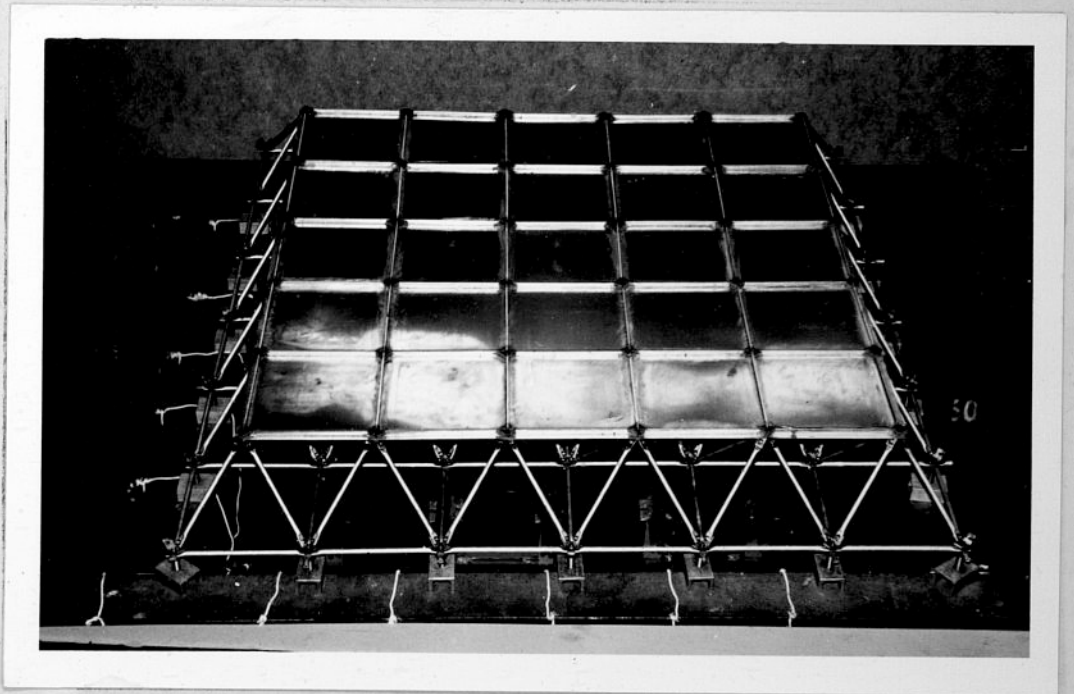
Rys.7.2a. Schemat statyczny modeli serii M1 o nieuzębrowanej warstwie górnej



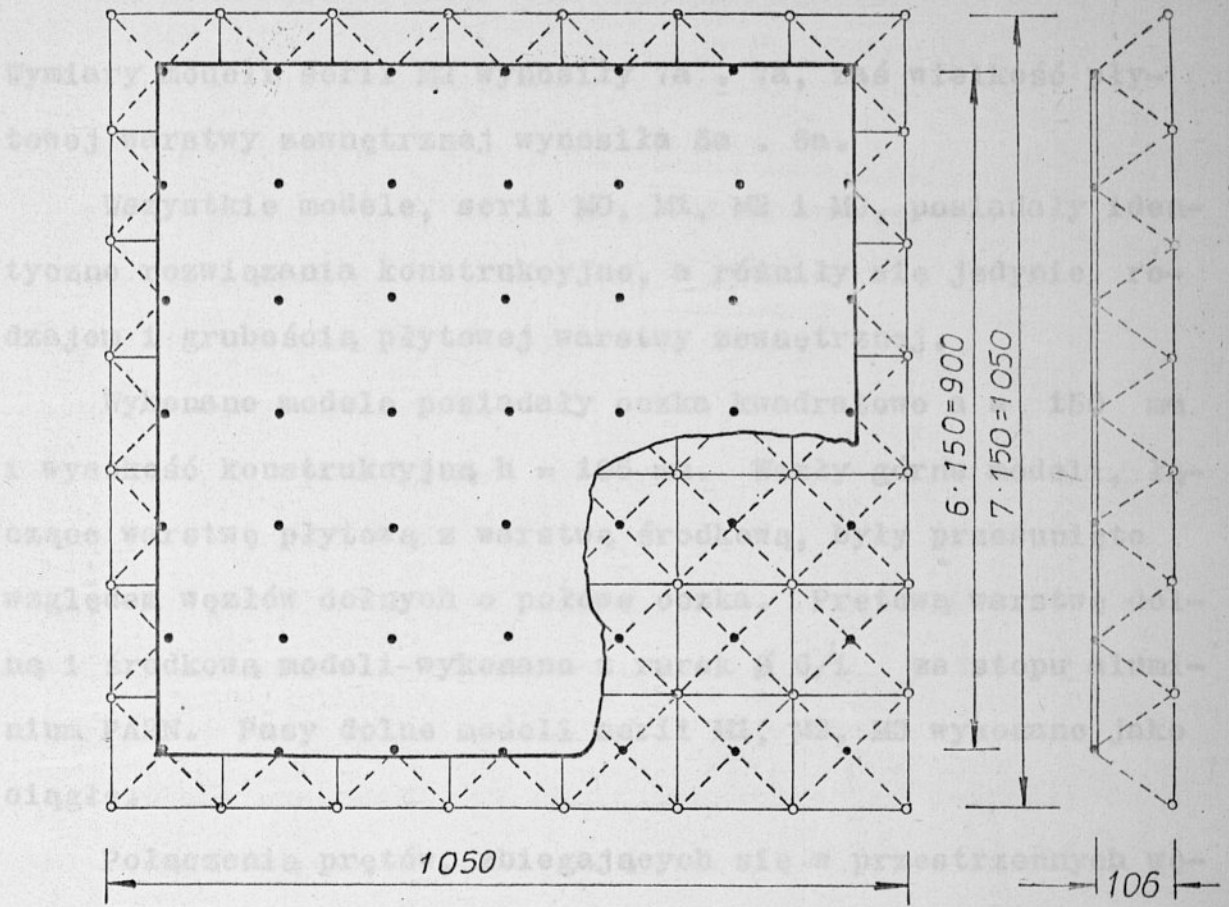
Rys.7.2b. Widok modelu serii M1 na stanowisku badawczym



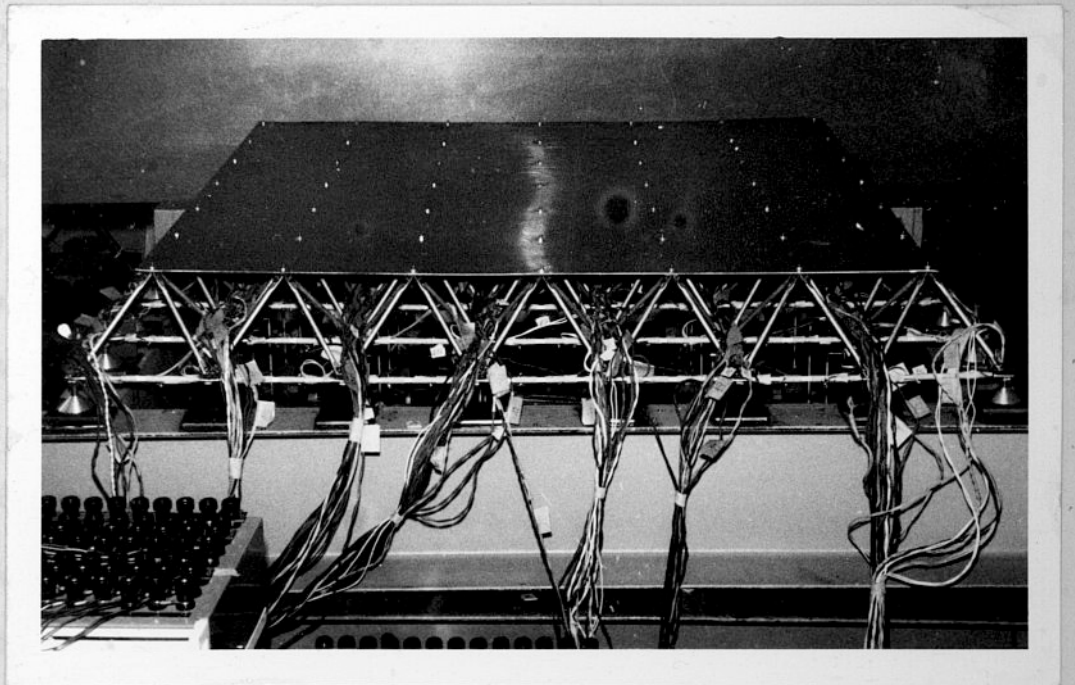
Rys.7.3a. Schemat statyczny modeli serii M2 o uźebrowanej warstwie górnej



Rys.7.3b. Widok modelu serii M2 na stanowisku badawczym



Rys.7.4a. Schemat statyczny modeli serii M3



Rys.7.4b. Widok modelu serii M3 na stanowisku badawczym

Wymiary modeli serii M3 wynosiły $7a$. $7a$, zaś wielkość płytowej warstwy zewnętrznej wynosiła $6a$. $6a$.

Wszystkie modele, serii M0, M1, M2 i M3, posiadały identyczne rozwiązania konstrukcyjne, a różniły się jedynie rodzajem i grubością płytowej warstwy zewnętrznej.

Wykonane modele posiadały oczka kwadratowe $a = 150$ mm i wysokość konstrukcyjną $h = 106$ mm. Wzły górne modeli, łączące warstwę płytową z warstwą środkową, były przesunięte względem węzłów dolnych o połowę oczka. Prętową warstwę dolną i środkową modeli wykonano z rurek $\varnothing 6/1$ ze stopu aluminium PA2N. Pasy dolne modeli serii M1, M2, M3 wykonano jako ciągi.

Połączenia prętów, zbiegających się w przestrzennych węzłach modeli, wykonano na śruby M3 oraz wzmocniono klejeniem za pomocą żywicy epoksydowych.

Płytową warstwę górną wykonano z blach ze stopów aluminium PA2N. Grubość blachy w modelach serii M0 i M1 wynosiła $g = 1,0$ mm. W modelach serii M2 płytową warstwę grubości $g = 0,5$ mm wzmocniono żebrami z $\varnothing 2 \times 7$ tworzącymi układ ortogonalny. W modelach serii M3 stosowano zmienne grubości warstwy płytowej, a to $g = 0,5$; $0,8$; $1,0$ i $1,5$ mm. Płytowe warstwy zewnętrzne modeli łączono z prętową warstwą środkową za pomocą śrub M3.

7.3. STANOWISKO BADAWCZE

Zastosowano dwa rodzaje stanowisk badawczych dostosowanych do badania modeli serii M0 i M3 oraz badania modeli serii M1 i M2. Stanowiska te różniły się między sobą jedynie wielkością i posiadały takie same rozwiązania konstruk-

cyjne. Każde stanowisko składało się z:

1. ramy podporowej;
2. podpór punktowych, które można usytuować w dowolnym miejscu na ramie;
3. urządzenia obciążającego;
4. urządzeń pomiarowych.

Schemat oraz widok ogólny jednego ze stanowisk badawczych

Rys.7.5. pokazano na rys. 7.5.

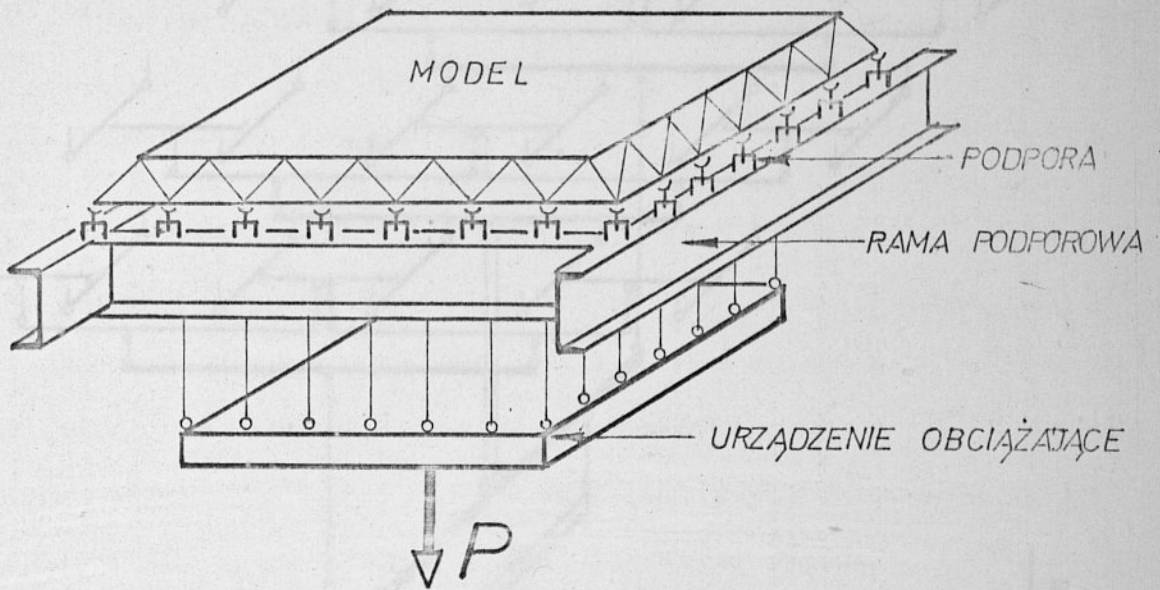
Ramę podporową skonstruowano z [200. Spoczywała ona na niepodatnym stole do badania konstrukcji. Wymiary ramy podporowej dostosowano do wymiarów modeli.

Modele spoczywały na ramie podporowej za pośrednictwem podpór punktowych. Zastosowane podpory punktowe umożliwiały regulację ich wysokości oraz swobodny przesuw poziomy. Usytuowanie podpór na ramie stanowiska badawczego mogło być dowolne. W programie badań przewidziano trzy schematy rozmieszczenia podpór:

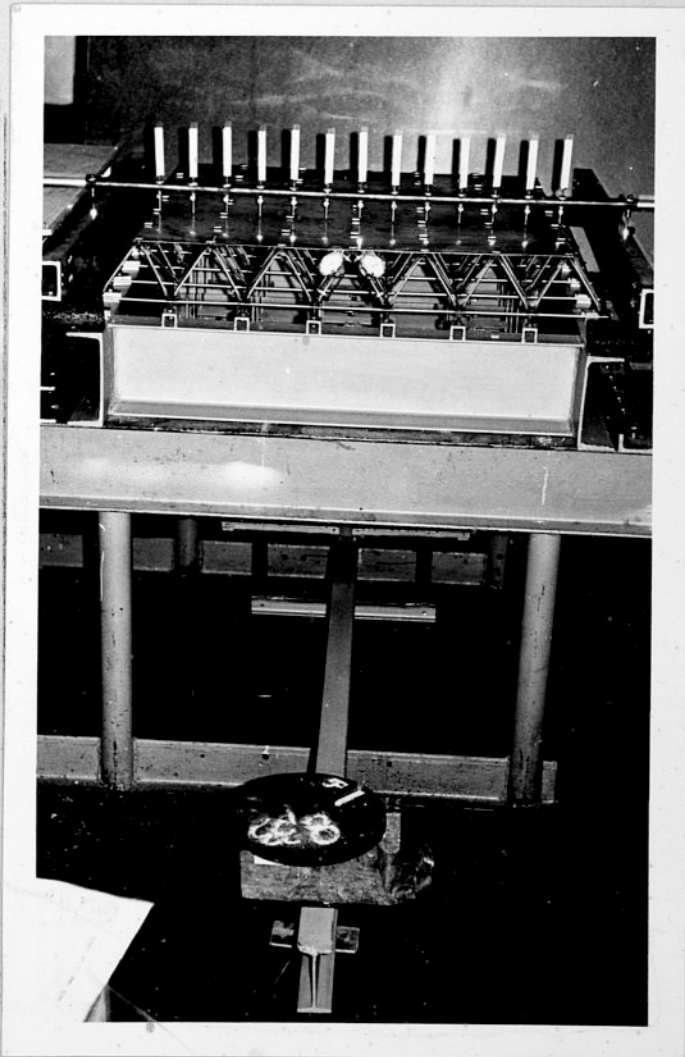
- I podparcie modeli na obwodzie w węzłach dolnych;
- II podparcie modeli na dwóch przeciwległych krawędziach w węzłach dolnych;
- III podparcie modeli w czterech narożnych węzłach dolnych.

Do węzłów dolnych modeli /z wyjątkiem węzłów podporowych/ mocowano cięgna łączące model z urządzeniem obciążającym. Schemat oraz widok urządzenia obciążającego pokazano

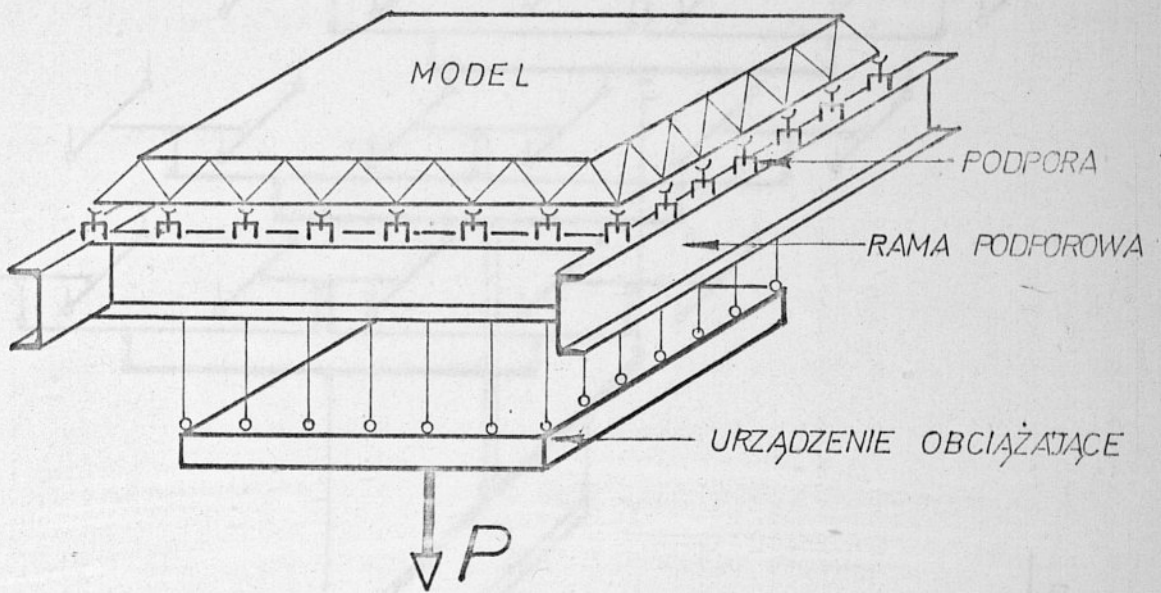
Rys.7.6. na rys. 7.6. Składało się ono z systemu belek statycznie wyznaczalnych oraz cięgien, zaprojektowanych w ten sposób, aby w każdym węźle wywołać taką samą siłę pionową. Wielkość obciążeń regulowano przez układanie na końcu dźwigni obciążników zważonych z dokładnością do 0,01 kg.



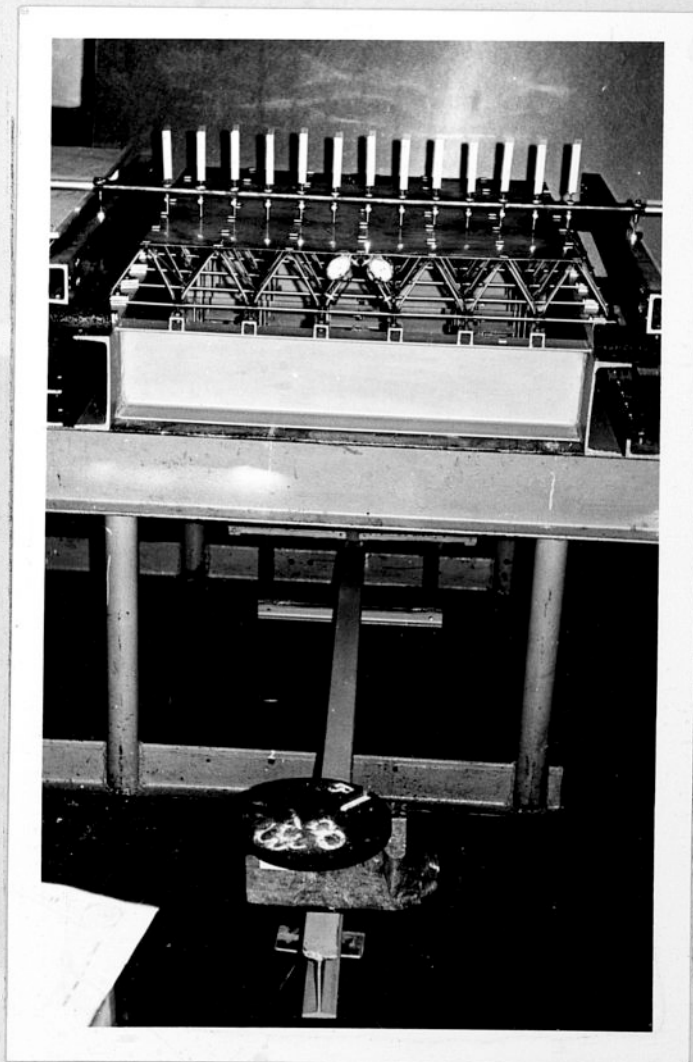
Rys.7.5a. Schemat stanowiska badawczego



Rys.7.5b. Widok stanowiska badawczego



Rys.7.5a. Schemat stanowiska badawczego



Rys.7.5b. Widok stanowiska badawczego

We wszystkich fazach badań model był odsunięty i był umożliwiony dostęp do stanowiska badawczego ze wszystkich stron, co umożliwiało ciągłą obserwację zachowania się modelu.

7.4. URZĄDZENIA POMIAROWE

Do pomiaru ugięć warstwy płytowej w modelach serii MO użyto przyrząd pomiarowy skonstruowany przez Kubicę E. [22]. Składał się on z odpowiedniej liczby dokładnie wytoczonych tulejek, wmontowanych w rurkę w równych odstępach. W tulejkach znajdowały się ruchome sworznie posiadające na jednym końcu ostrza, na drugim główki płaskie. Przesuw sworznia mógł być zablokowany śrubką wkręconą w tulejkę. Zasada pomiaru ugięć była następująca:

- w przyrządzie blokowano /unieruchamiano/ te dwa sworznie, które opierały się na punktach nieruchomych w badanym modelu; pozostałe sworznie posiadały swobodę ruchu;
- przyrząd przykładano do modelu wzdłuż obranej prostej, aby sworznie nieruchome trafiały na wcześniej zaznaczone punkty bazy pomiarowej;
- sprawdzano, czy ostrza wszystkich sworzni dotykają do powierzchni modelu, po czym unieruchamiano je przy pomocy śrubek blokujących;
- przyrząd przykładano do listwy z czujnikami zegarowymi, tak aby końce czujników oparły się na główkach płaskich sworzni i odczytywano wskazania czujników.

Zakres pomiarowy w wyżej opisanym przyrządzie był w zasadzie równy zakresowi czujników zegarowych. Stosowano czujniki zegarowe o dokładności odczytu 0,01 mm i zakresie 10 mm. W trakcie badań przeprowadzonych na modelach serii informacyjnej MO ustalono, że ugięcia płytowej warstwy zewnętrznej modeli prze-

kraczały zakres użytych czujników zegarowych. Z tych też względów, do pomiaru ugięć w modelach serii M1, M2 i M3 użyto inne przyrządy.

Pomiaru ugięć w modelach serii M1, M2 i M3 dokonywano przy pomocy niwelatora precyzyjnego typu NI004 o dokładności odczytu 0,05 mm /produkcji NRD/. Jako łąty pomiarowej użyto zmodyfikowany przyrząd pomiarowy skonstruowany dla modeli serii M0. Skrajne sworznie przyrządu zablokowano oraz zaopatrzone w stojaki. Do pozostałych, ruchomych sworzni przyrządu umocowano wyskalowane łąty pomiarowe. Przyrząd pomiarowy ustawiono za pośrednictwem stojaków na bazie stanowiska badawczego w ustabilizowanych punktach, a odczyt ugięć odbywał się bezpośrednio przy pomocy niwelatora precyzyjnego.

Rys.7.7a. Schemat łąty pomiarowej pokazano na rys. 7.7a, zaś widok

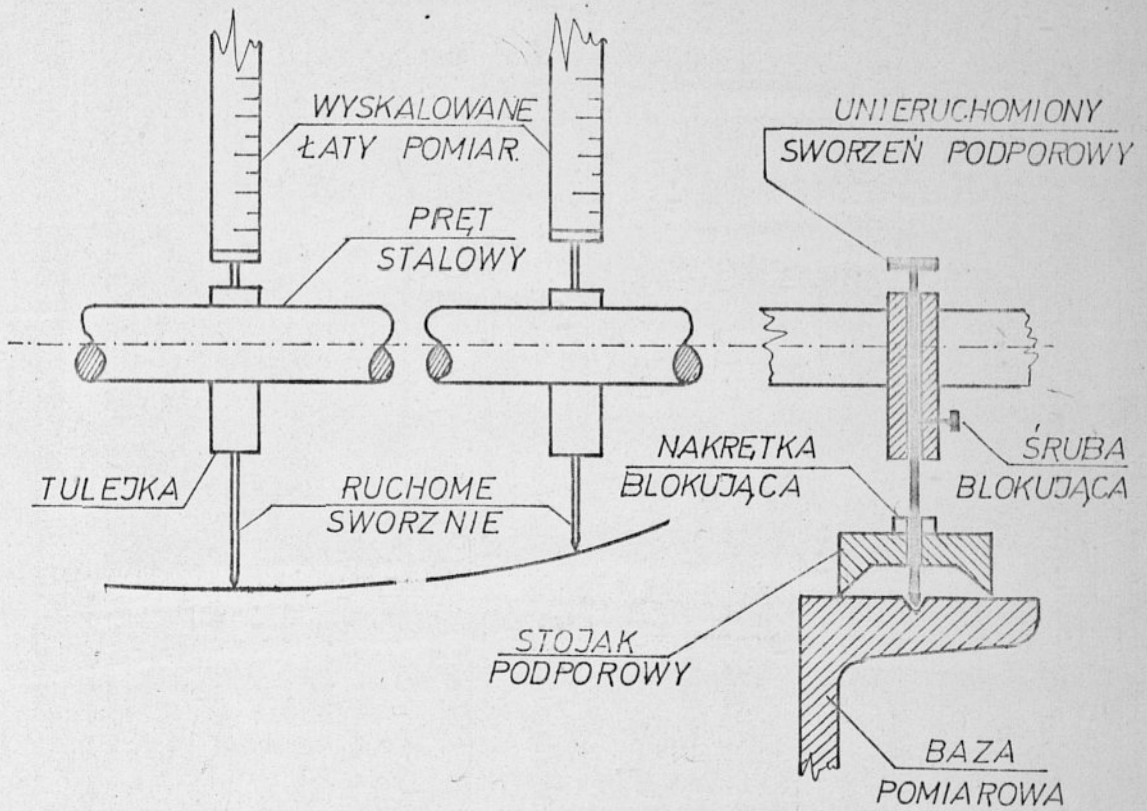
Rys.7.7b. ogólny pomiaru tym sposobem pokazano na rys. 7.7b.

W modelach serii M3 dokonywano pomiarów odkształceń prętów warstwy dolnej modeli /pasów dolnych/. Do pomiaru odkształceń prętów użyto tensometry oporowe typu RL 10/130 oraz skrzynki i mostki typu TT-3B "Wawel" i typu ZBM. Tensometry rozmieszczono parami na każdym pręcie warstwy dolnej modelu. Widok ogólny stanowiska badawczego z zainstalowaną aparaturą oraz rozmieszczenie tensometrów na prętach pasów dolnych modeli serii M3 pokazano na rys. 7.8.

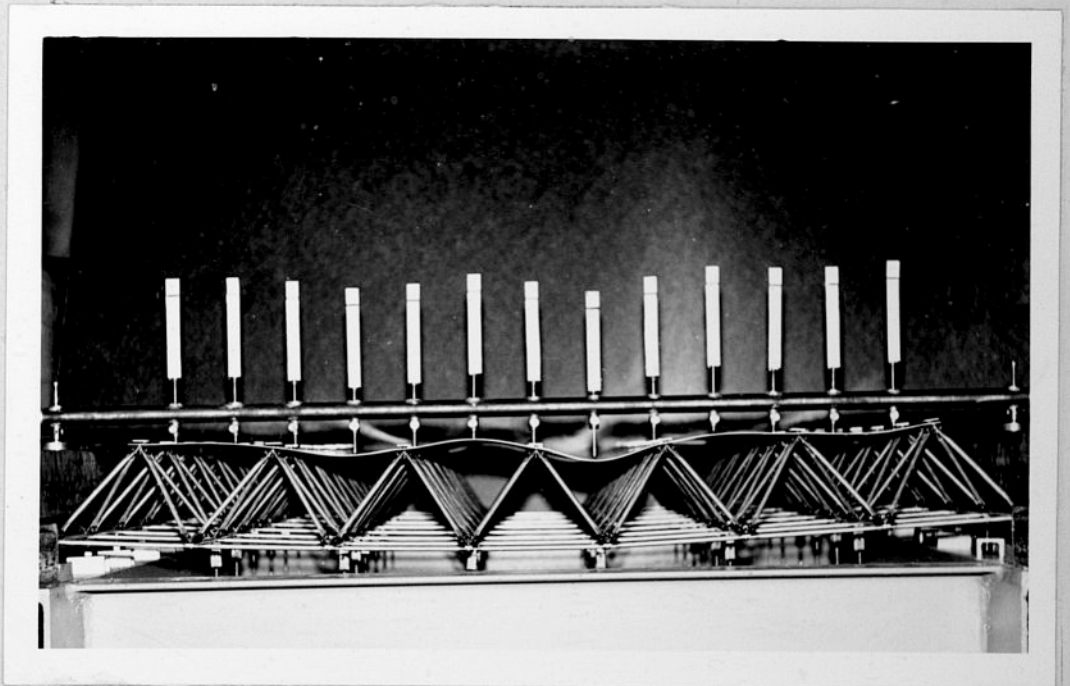
Rys.7.8.

7.5. BADANIA MATERIAŁOWE

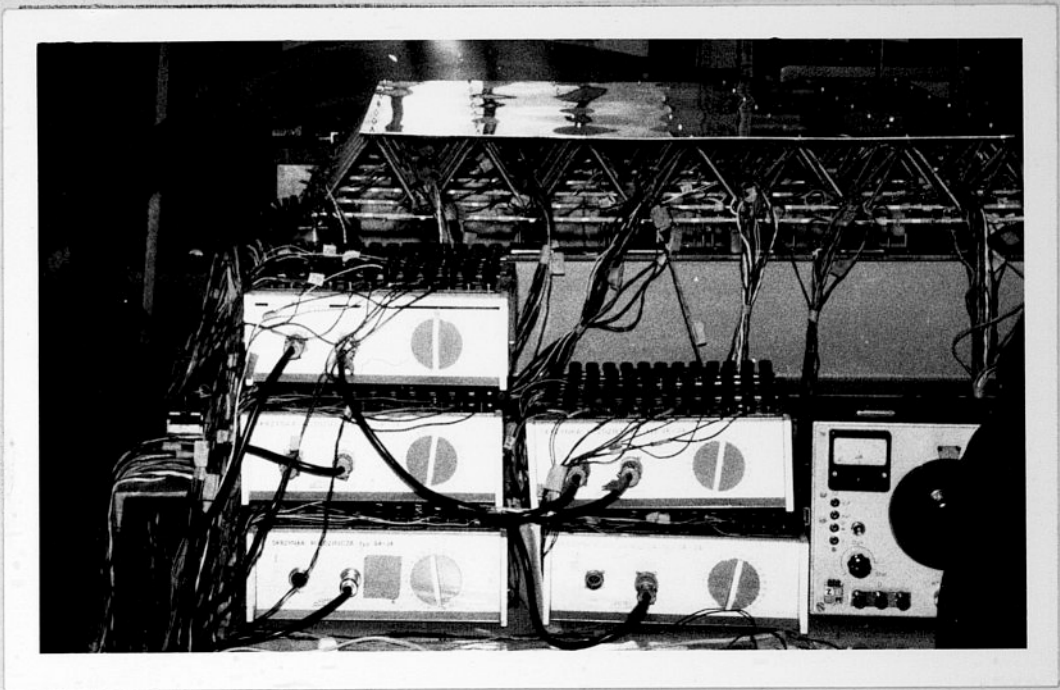
Badania materiałowe przeprowadzono dla modeli serii M3. W tym celu, z blach użytych do budowy płytowej warstwy zewnętrznej modeli wycięto próbki płaskie bez główek, o szerokości 20 mm, po 5 sztuk z każdego arkusza. Długość przyjęto jak dla próbek dziesięciokrotnych zgodnie z PN-62/H-04310.



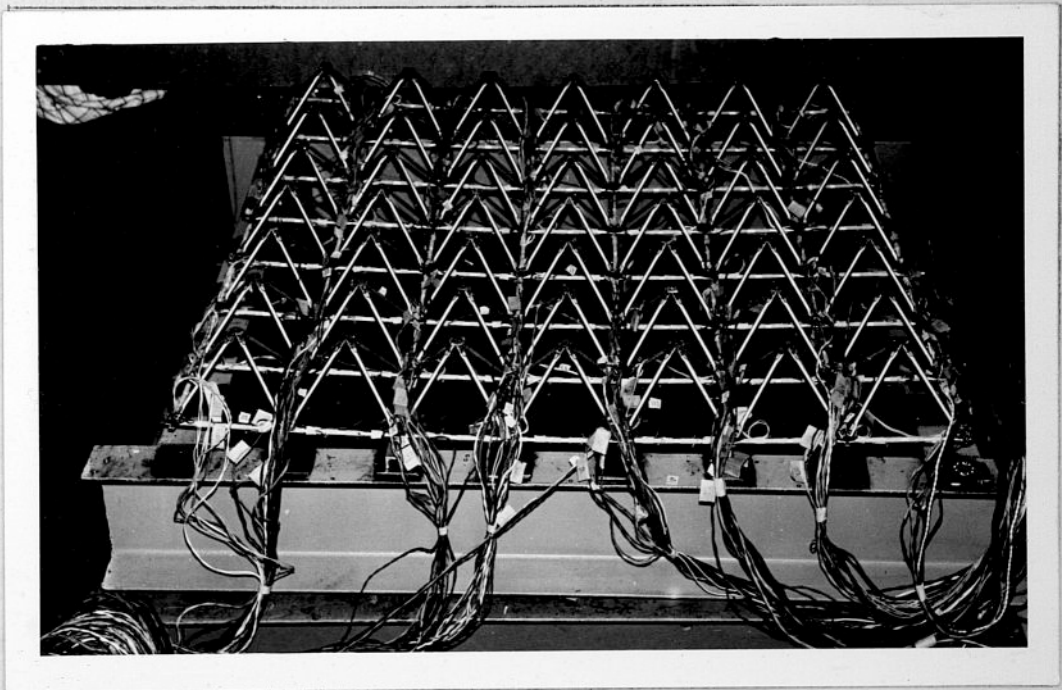
Rys.7.7a. Schemat przyrządu do pomiaru ugięć płytowej warstwy zewnętrznej modeli.



Rys.7.7b. Widok ogólny pomiaru ugięć warstwy płytowej



Rys.7.8a. Widok stanowiska badawczego z zainstalowaną aparaturą



Rys.7.8b. Widok rozmieszczenia tensometrów na prętach pasów dolnych modeli serii M3

Próbki wycięto w sposób nie naruszający struktury materiału, równoległe do kierunku walcowania /prostopadle do krawędzi podparcia modeli serii M3/. Obróbkę płaszczyzn ciętych przeprowadzono na obrabiarce do szlifowania metali z zachowaniem klasy chropowatości nie niższej niż 6. Powierzchnie próbek pozostawiono nie obrobione. Pomiarów grubości i szerokości dokonano śrubą mikrometryczną o dokładności 0,002 mm.

Próby rozciągania przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej "1126 INSTRON" /prod. Anglia/ w zakresie siłowym 0-500 kG. Wydłużenie i przewężenie próbek mierzono ekstensometrami "INSTRON" o bazach 30 mm i 20 mm. Ciągłą rejestrację funkcji wydłużenia i przewężenia próbek otrzymywano na rejestratorach "F-3E RECORDER" /prod. Japonia/, oraz mostkach tensometrycznych AT 97B /prod. "Kasprzak"-Warszawa/. Uzyskane wyniki z badań materiałowych blach, jako wartości średnie z odpowiednimi odchyleniami standardowymi, zestawiono w tabelicy 7.2. Wartości średnie obliczono po odrzuceniu wartości skrajnych ze wzoru:

$$E \quad /A/ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \quad /7.2/$$

gdzie: n - liczba pomiarów,

A_i - wielkość modułu sprężystości podłużnej E, lub współczynnika Poissona ν w i-tym pomiarze.

Odchylenie standardowe wyznaczono ze wzoru Gaussa:

$$G^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [A_i - E /A/]^2 \quad /7.3/$$

Badania materiałowe rurek $\varnothing 6/1$, z których zbudowana była prętowa warstwa dolna modeli serii M3, przeprowadzono w celu ustalenia ich charakterystyki sprężystej opisanej wzorem:

Tablica 7.2. Wyniki badań materiałowych blach użytych do budowy modeli serii M3

Ip.	Grubość blachy [mm]			Moduł Jounga [$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$]		Współ. Poissona		R_{02} [kg/cm ²]	$D_i = \frac{E_i g^3}{12(1-\nu_i^2)}$	Użyto do budowy modelu
	ξ_n	E/g/	G/g/	E/E/	G/E/	E/ ν /	G/ ν /			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.	0,5	0,45	0,005	8028	292	0,307	0,011	2195	67,306	M3.0,5.II.1 M3.0,5.II.2
2.		0,49	0,005	7689	183	0,318	0,006	1870	83,865	M3.0,5.II.3 M3.0,5.II.4
3.		0,52	0,005	8051	388	0,323	0,018	2063	105,325	M3.0,5.II.5
4.	0,8	0,79	0,005	7988	218	0,319	0,014	1882	369,849	M3.0,8.II.1 M3.0,8.II.2
5.		0,80	0,005	8051	432	0,322	0,017	1884	383,240	M3.0,8.II.3 M3.0,8.II.4
6.		0,81	0,005	7934	198	0,322	0,014	1906	392,020	M3.0,8.II.5
7.	1,0	0,95	0,005	7752	138	0,323	0,018	1851	618,379	M3.1,0.II.1 M3.1,0.II.2
8.		0,89	0,005	8212	309	0,323	0,010	2103	538,610	M3.1,0.II.3 M3.1,0.II.4
9.		0,89	0,005	8215	103	0,319	0,003	1955	537,284	M2.1,0.II.5
10.	1,5	1,34	0,005	8118	125	0,333	0,024	1712	1830,70	M3.1,5.II.1 M3.1,5.II.2
11.		1,35	0,005	8240	183	0,329	0,021	1803	1936,90	M3.1,5.II.3 M3.1,5.II.4
12.		1,36	0,005	8201	166	0,330	0,17	1768	1929,19	M3.1,5.II.5

$$C = \frac{E F}{l}$$

/7.4/

gdzie:

E - moduł sprężystości podłużnej rurki,

F - przekrój poprzeczny rurki,

l - długość bazy pomiarowej.

W celu wyeliminowania błędów przy pomiarze wielkości E, F, l, charakterystykę sprężystą C ustalono przez pomiar odkształceń rurek przy zdeterminowanym obciążeniu. Badania materiałowe rurek przeprowadzono na odcinkach rurek o długości 150 mm z końcówkami spłaszczonymi. Próbki poddano rozciąganiu, mocując do nich śrubkami M3 uprzednio zważone obciążniki. Odkształcenia odpowiadające różnym stanom obciążenia mierzono tensometrami oporowymi RL 10/120 rozmieszczonymi parami na każdej próbce. Do badań użyto skrzynki i mostki typu TT-38 "Wawel". /Te same skrzynki i mostki stosowano do pomiarów odkształceń prętów pasów dolnych modeli serii M3/. Badania przeprowadzono na dziesięciu próbkach.

Wartość średnia współczynnika sprężystości podłużnej rurek $\varnothing 6/1$ wynosiła $E/C = 111,66$ kG/mm, odchylenie standardowe $\sigma = 1,278$, zaś współczynnik zmienności 0,01145.

7.6. WYNIKI BADAŃ MODELOWYCH

Badania modelowe przeprowadzono na czterech typach modeli, których szczegółowy opis podano w punkcie 7.2. Wszystkie modele były obciążone symetrycznie, obciążeniem przyłożonym do węzłów dolnych modeli. W celu wyeliminowania przypadkowych błędów odczytu przy badaniu sprężystego zakresu pracy modeli, realizowano program obciążenia $P = 0, P_1, 0, P_1, 0$.

Zgodnie z założonym celem badań, podczas obciążeń modeli obserwowano ich zachowanie się, wykonywano zdjęcia w celu utrwalenia ważnych spostrzeżeń, mierzono przemieszczenia modeli oraz odnotowywano wielkości sił niszczących. W modelach serii M0, M1 i M2 dokonywano pomiaru przemieszczeń warstwy płytowej w sprężystym obszarze pracy modeli, oraz badano mechanizmy zniszczenia modeli.

W modelach serii M3 oprócz pomiaru przemieszczeń warstwy płytowej mierzono odkształcenia prętów warstwy dolnej modeli /pasów rozciąganych/ oraz wielkości obciążeń niszczących. Wyniki pomiarów rejestrowano w tablicach pomiarowych.

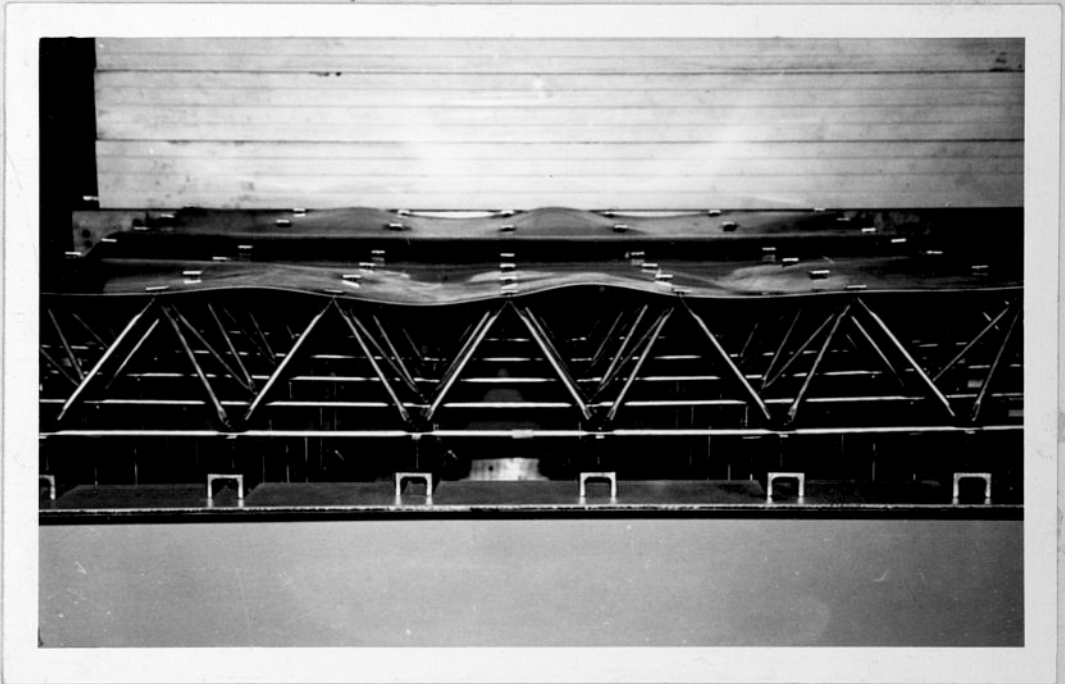
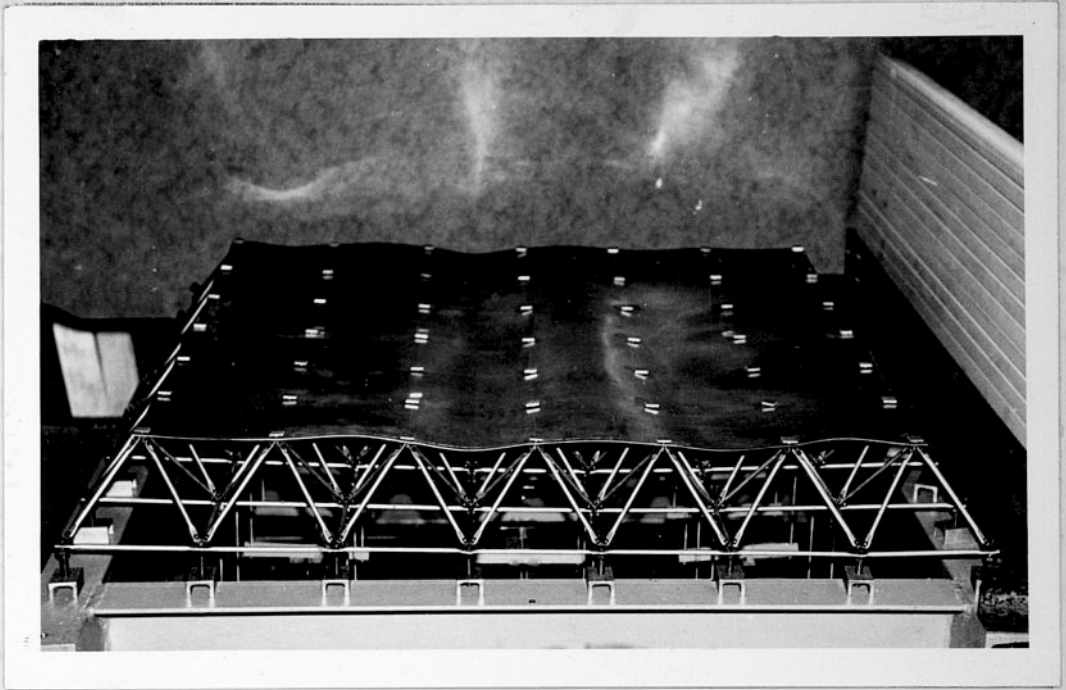
7.6.1. WYNIKI BADAŃ MODELI SERII M0

Modele serii M0 potraktowano jako serię informacyjną w celu sprawdzenia zaproponowanych rozwiązań konstrukcyjnych modeli oraz wyeliminowania ewentualnych mankamentów. Oprócz informacji z zakresu technologii wykonawstwa modeli sprawdzono urządzenie do pomiaru przemieszczeń pionowych warstwy płytowej. Informacje uzyskane przy budowie i badaniu modeli serii M0 wykorzystano przy budowie i badaniu modeli serii M1, M2, M3.

Model M0, 1,0. I, podparty na obwodzie w węzłach dolnych obciążano od zera do 1064,0 kG. W początkowej fazie badania modelu, przy obciążeniu do 400 kG, zaobserwowano powstawanie małych sprężystych ugięć struktury. Ugięcia te znikwały po odciążeniu modelu. Nie zanotowano natomiast ugięć międzywęzłowych płytowej warstwy górnej modelu. Przy obciążeniu około 550 kG zauważono powstawanie ugięć międzywęzłowych płytowej warstwy górnej. W polach leżących wzdłuż jednej osi symetrii dźwigara powstawały fale walcowe o przeciwnych amplitudach w dwóch sąsiednich polach. Linia przegięcia tych fal

była oś symetrii modelu /na osi symetrii modelu znajdowały się punkty kontaktowe warstwy płytowej z prętową warstwą środkową. Z przeprowadzonych pomiarów wynikało, że fale walcowe występujące wzdłuż osi symetrii posiadały stałe amplitudy na długości pasm . W kierunku prostopadłym do fal leżących wzdłuż osi symetrii modelu, powstawały fale walcowe o ekstremalnych amplitudach przy krawędzi warstwy płytowej, zanikające ku środkowi modelu. Fale te nie łączyły się z falami walcowymi występującymi wzdłuż osi symetrii modelu. Powstałe ugięcia warstwy płytowej wzrastały w miarę przyrostu obciążenia. Powstaniu ich nie towarzyszyły efekty dźwiękowe. Przy wzrastającym obciążeniu modelu zaobserwowano dalszy przyrost ugięć warstwy płytowej oraz podnoszenie się narożnych węzłów dolnych modelu. Ugięcia warstwy płytowej, przy obciążeniu około 1000,0 kG, miały charakter trwałe i nie zniknęły po odciążeniu. Pokazano je na rys. 7.9. Przy obciążeniu 1064,0 kG zniszczeniu uległ pas dolny modelu. Z tych też powodów, modele serii M1 i M2 zbudowano o jedno oczko mniejsze od modeli serii M0.

Model M0.1,0.II, podparty na dwóch przeciwległych krawędziach w węzłach dolnych, obciążano od zera do 270,0 kG. W początkowej fazie badania modelu, przy obciążeniu nie przekraczającym 200 kG, obserwowano powstawanie sprężystych ugięć dźwigara. W tej fazie obciążania modelu nie zanotowano ugięć międzywęzłowych warstwy płytowej. Przy obciążeniu około 265,4 kG nastąpiło nagłe sfalowanie warstwy płytowej oraz wystąpiły duże ugięcia modelu. Płytowa warstwa uległa sfalowaniu walcowemu, o przeciwnych ugięciach pasm sąsiednich /powstało sfalowanie sinusoidalne/. Linie przegięcia fal walcowych, równoległe do krawędzi podparcia, przebiegały wzdłuż punktów



Rys.7.9 Ugięcia warstwy płytowej modelu MO.1,0.I ,podpartego na obwodzie w węzłach dolnych,przy obciążeniu sumarycznym 1000,0 kG .

kontaktowych warstwy zewnętrznej z warstwą środkową. Fale walcowe posiadały stałe amplitudy na długości pasm. Pod wzrastającym obciążeniem model wykazywał geometryczną zmienność. Powstające duże amplitudy ugięć warstwy płytowej powodowały powstawanie dużych ugięć całego modelu. Mechanizm zniszczenia modelu MO.1,0.II, podpartego wzdłuż dwóch przeciwnych krawędzi w węzłach dolnych, powstały przy obciążeniu 270,0 kG, pokazano na rys. 7.10.

Rys.7.10.

7.6.2. WYNIKI BADAŃ MODELI SERII M1

Na modelach serii M1 badano sprężysty zakres pracy oraz mechanizmy zniszczenia struktur przestrzennych o płytowej, nieuźebrowanej warstwie zewnętrznej.

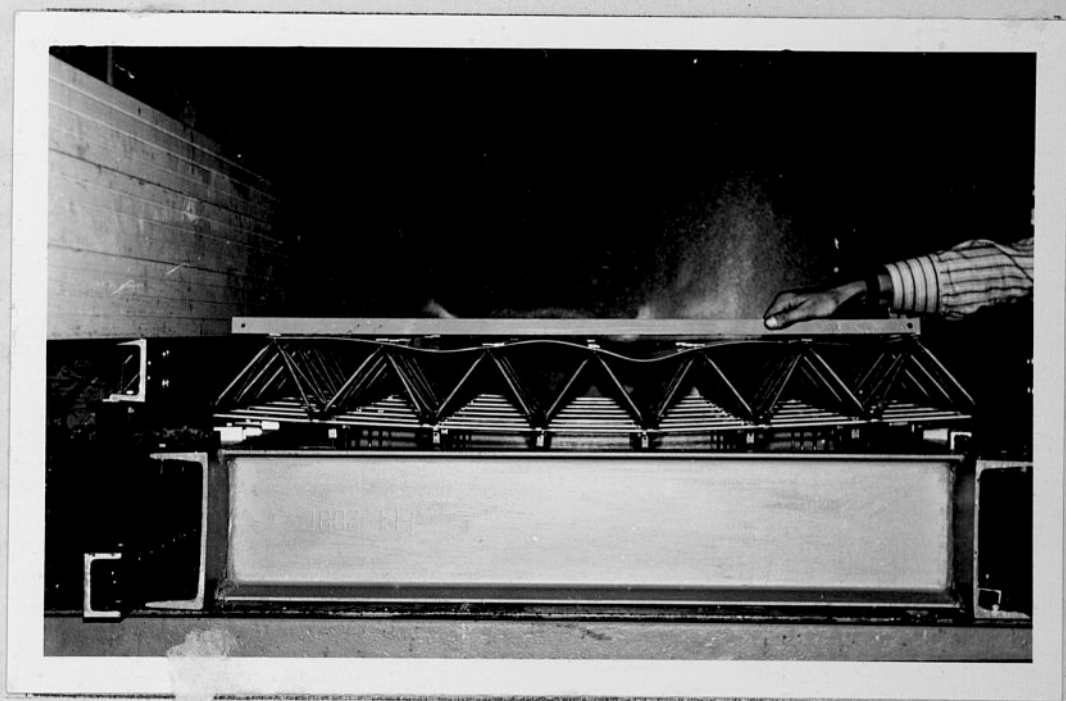
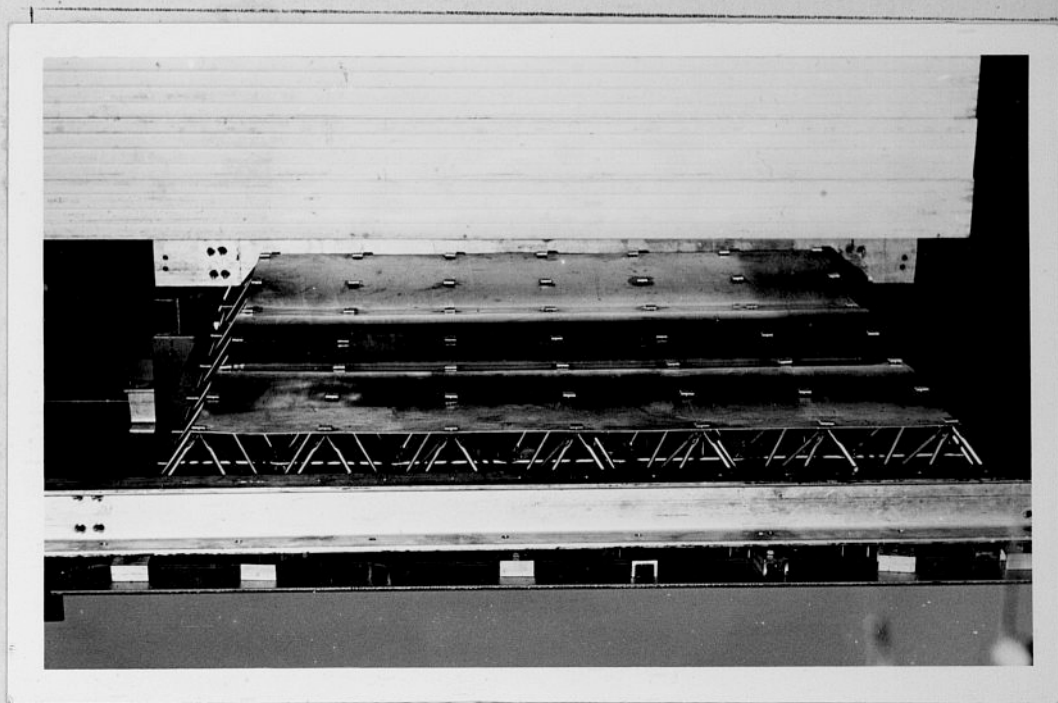
W trakcie badań modeli serii M1 mierzono ugięcia płytowej warstwy zewnętrznej w punktach kontaktowych warstwy płytowej z prętową warstwą środkową oraz w punktach pośrednich. W sumie mierzono ugięcie w 121 punktach warstwy zewnętrznej.

Srednie ugięcia punktów warstwy płytowej obliczono uwzględniając cechy topologiczne oraz symetrię obciążenia modeli. Wyznaczano je ze wzoru:

$$E /w/ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \quad /7.5/$$

Ponadto obliczono odchylenia standardowe $\sigma_{/w/}$. W przypadku pomiaru ugięć w 8 punktach o jednakowych wartościach oczekiwanych $E /w/$, odchylenie standardowe σ obliczono wg:

$$\sigma^2_{/w/} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [w_i - E /w/]^2 \quad /7.6/$$



Rys.7.10. Mechanizm zniszczenia modelu MO.1,0.II, podpar-
tego wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi w wę-
złach dolnych, powstały przy obciążeniu suma-
rycznym 270,0 kg.

zaś w przypadku pomiaru ugięć w 4 punktach za pomocą wzoru:

$$\sigma^2/w/ = \frac{1}{n-1} \sum_{n=1}^n [w_i - E/w/]^2 \quad /7.7/$$

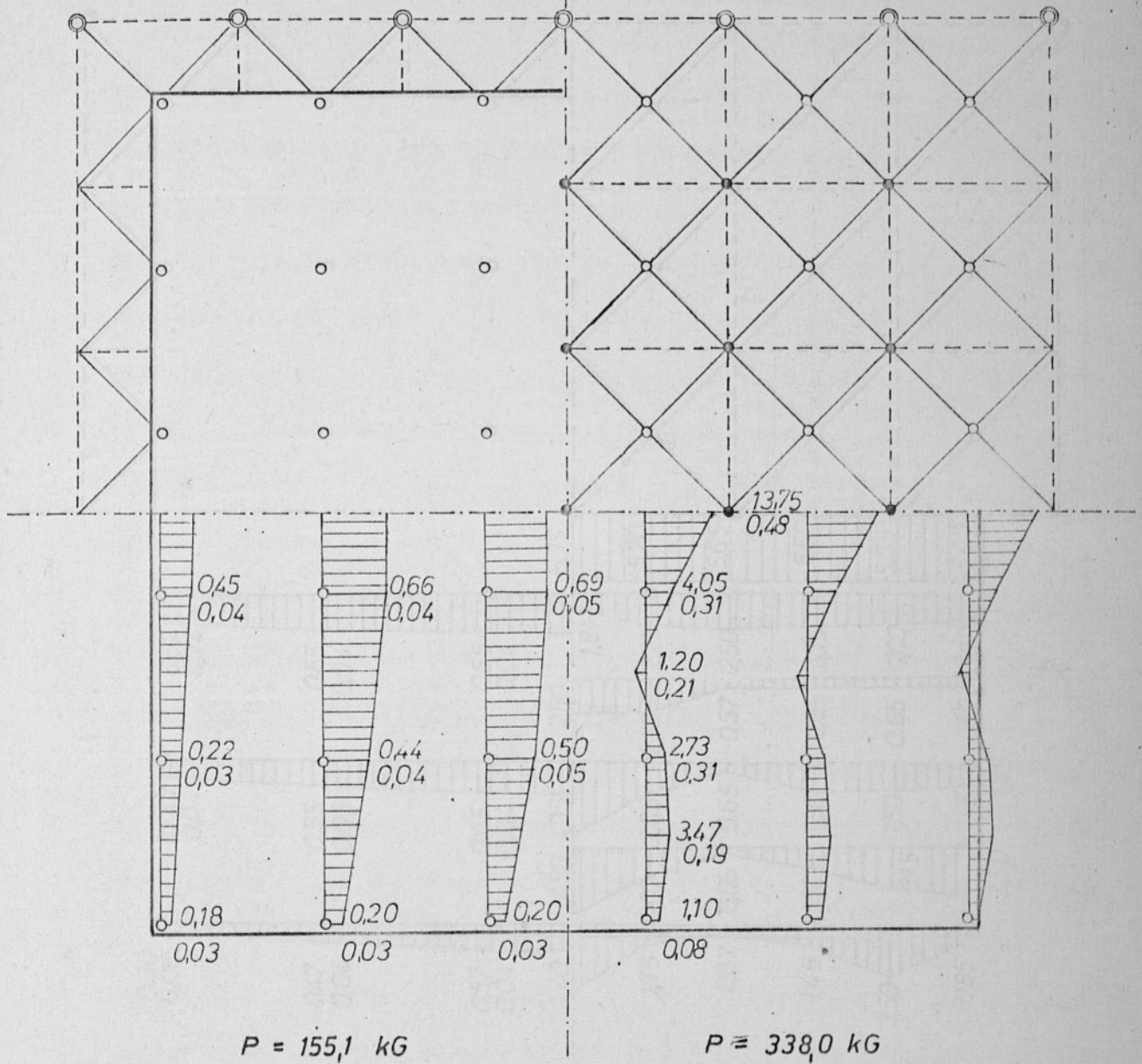
Ugięcia płytowej warstwy górnej modeli serii M1 pokazano na rys. 7.11 i 7.13. W prawych górnych ćwiartkach rysunków pokazano widok ogólny modeli. W lewych górnych ćwiartkach rysunków pokazano widok warstwy środkowej i dolnej modeli. Na dwóch dolnych ćwiartkach rysunków podano nad linią wielkości ugięć warstwy płytowej $E/w/$; pod linią wielkości odchylenia standardowego $\sigma/w/$ w mm. Na rysunkach 7.11 i 7.13 przyjęto następujące oznaczenia graficzne:

- linią grubą oznaczono obrys warstwy płytowej modelu;
- linią cienką oznaczono pręty warstwy środkowej modelu;
- linią przerywaną pręty warstwy dolnej modelu;
- pojedynczymi kółkami oznaczono punkty kontaktowe warstwy środkowej z warstwą płytową;
- podwójnymi kółkami oznaczono węzły podporowe;
- zaczernione punkty oznaczają węzły dolne modelu do których przykładano obciążenie.

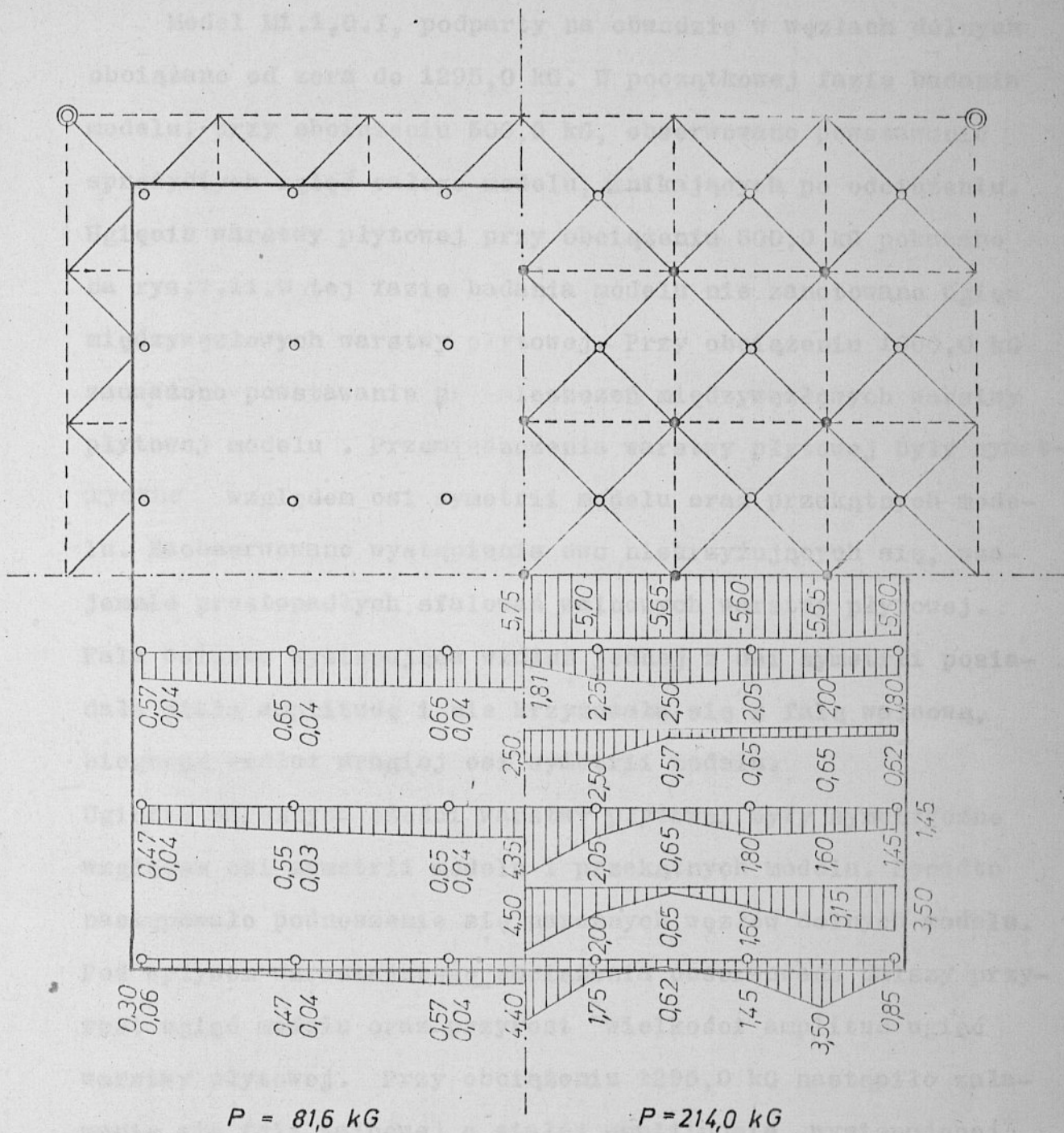
Rys.7.11. Na rys. 7.11 naniesiono ugięcia warstwy płytowej modelu M1.1,0.I, podpartego na obwodzie w węzłach dolnych, pod obciążeniem sumarycznym 500,0 kG i 1295,0 kG.

Rys.7.12. Na rys. 7.12 naniesiono ugięcia warstwy płytowej modelu M1.1,0,II, podpartego na dwóch przeciwległych krawędziach w węzłach dolnych, pod obciążeniem sumarycznym 155,1 kG i 338,0 kG.

Rys.7.13. Na rys. 7.13 naniesiono ugięcia warstwy płytowej modelu M1.1,0.III, podpartego w 4 narożnych węzłach dolnych, pod obciążeniem sumarycznym 84,6 kG i 214,0 kG.



Rys.7.12 Ugięcia płytowej warstwy górnej modelu M1.1,0.II, podpar-
tego wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, w węzłach dol-
nych, przy obciążeniu $P = 151,1 \text{ kg}$ i $P = 338,0 \text{ kg}$ w [mm]

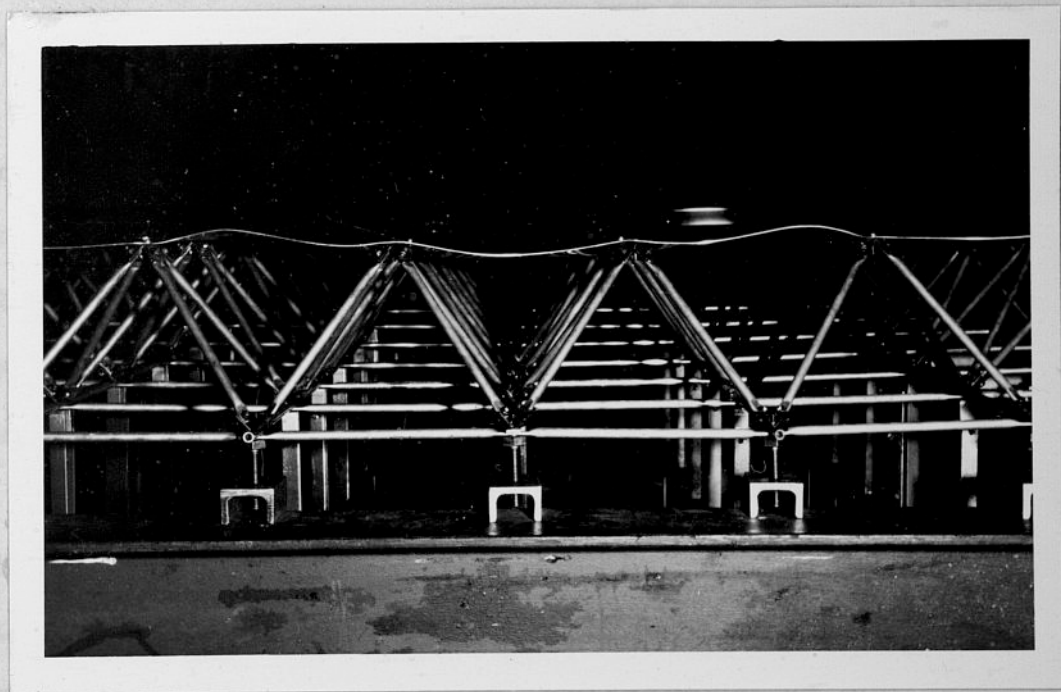
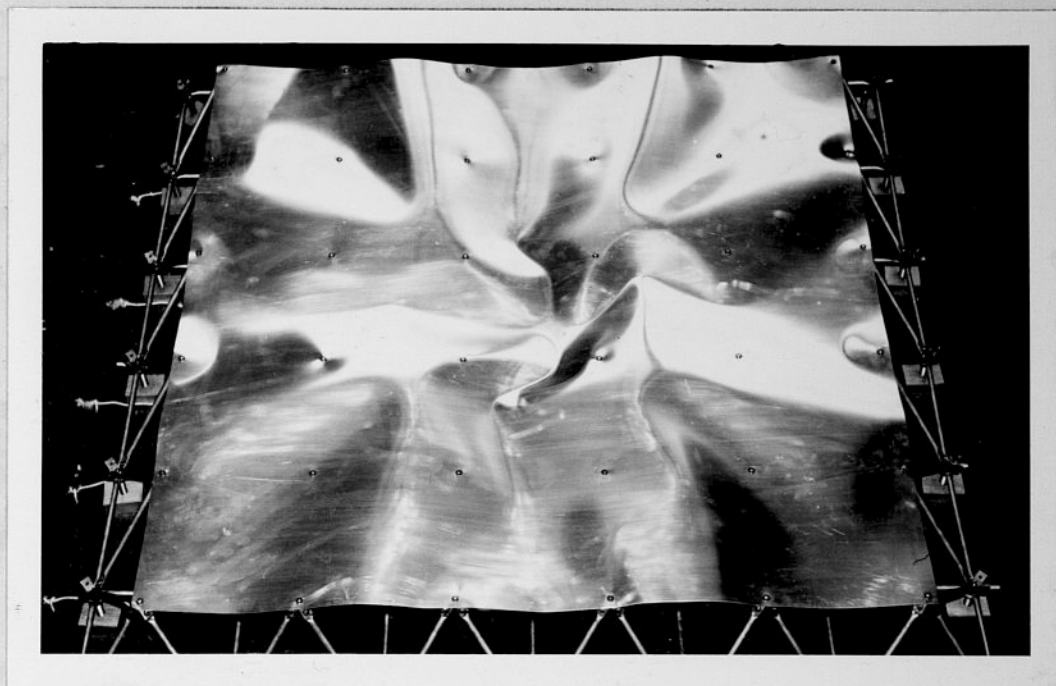


Rys.7.13 Ugięcia płytowej warstwy górnej modelu M1.1,0.III, podpar-
tego w czterech narożnych węzłach dolnych, pod obciążeniem
 $P = 81,6 \text{ kG}$ i $P = 214,0 \text{ kG}$ w [mm]

Model M1.1,0.I, podparty na obwodzie w węzłach dolnych obciążano od zera do 1295,0 kG. W początkowej fazie badania modelu, przy obciążeniu 500,0 kG, obserwowano powstawanie sprężystych ugięć całego modelu, znikających po odciążeniu. Ugięcia warstwy płytowej przy obciążeniu 500,0 kG pokazano na rys.7.11. W tej fazie badania modelu nie zanotowano ugięć międzywęzłowych warstwy płytowej. Przy obciążeniu 1000,0 kG zauważono powstawanie przemieszczeń międzywęzłowych warstwy płytowej modelu. Przemieszczenia warstwy płytowej były symetryczne względem osi symetrii modelu oraz przekątnych modelu. Zaobserwowano wystąpienie dwu niekrzyżujących się, wzajemnie prostopadłych, sfalowań walcowych warstwy płytowej. Fala walcowa występująca wzdłuż jednej z osi symetrii posiadała stałą amplitudę i nie krzyżowała się z falą walcową, biegnącą wzdłuż drugiej osi symetrii modelu.

Ugięcia narożnych części warstwy płytowej były symetryczne względem osi symetrii modelu i przekątnych modelu. Ponadto następowało podnoszenie się narożnych węzłów dolnych modelu. Pod wpływem wzrastającego obciążenia obserwowano dalszy przyrost ugięć modelu oraz przyrost wielkości amplitud ugięć warstwy płytowej. Przy obciążeniu 1295,0 kG nastąpiło załamanie się fali walcowej o stałej amplitudzie, występującej wzdłuż osi symetrii modelu i połączenie się jej z falą walcową prostopadłą do niej. Połączeniu się dwóch prostopadłych fal walcowych towarzyszył efekt dźwiękowy /trzask/ oraz nagłe przemieszczenie całego modelu. Model wykonywał geometryczną zmienność. Mechanizm zniszczenia modelu M1.1,0.I, po-

Rys.7.14. kazany na rys. 7.14, był symetryczny względem osi symetrii modelu oraz przekątnych modelu.

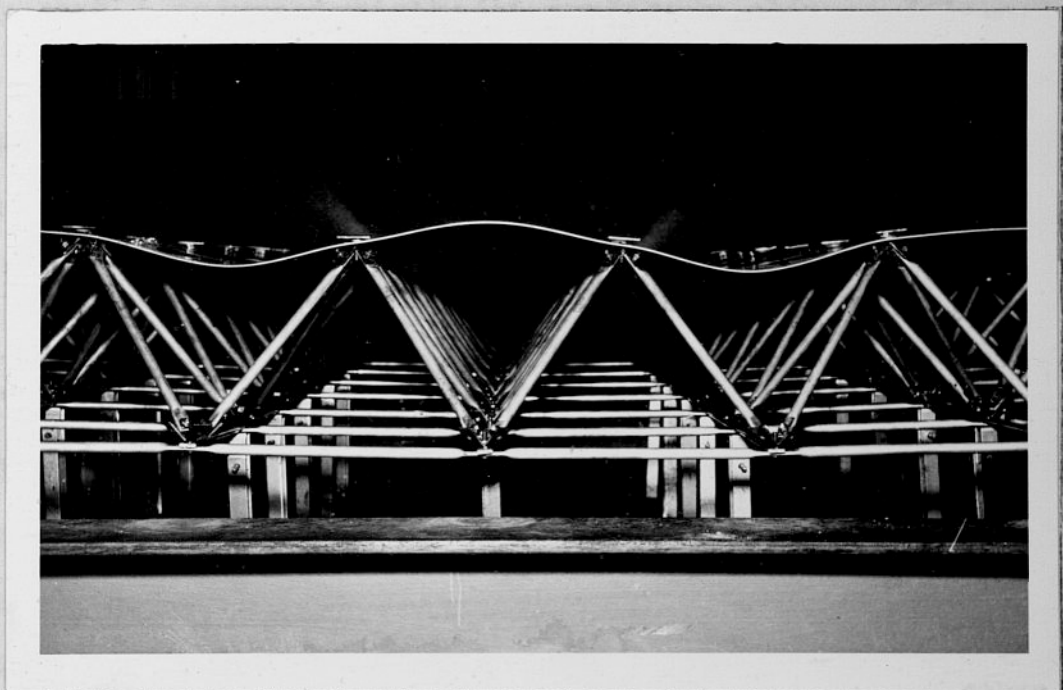
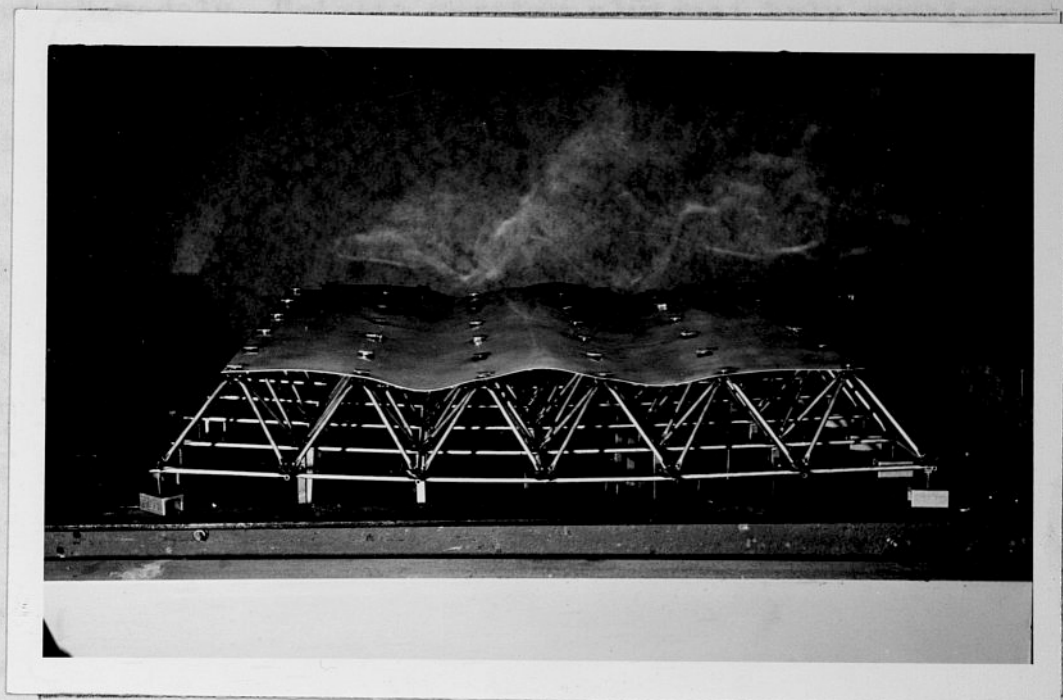


Rys.7.14. Mechanizm zniszczenia modelu M1.1,0.I, podpartego na obwodzie w węzłach dolnych, powstały przy obciążeniu 1295,0 kg.

Model M1.1,0.II, podparty na dwóch przeciwległych krawędziach w węzłach dolnych, obciążano od zera do 338,0 kG. W początkowej fazie badania modelu, przy obciążeniu 155,1 kG obserwowano powstawanie sprężystych ugięć całego modelu, znikających po odciążeniu. Ugięcie warstwy płytowej przy obciążeniu 155,1 kG pokazano na rys. 7.12. W tej fazie obciążania modelu nie zanotowano ugięć międzywęzłowych warstwy płytowej. Przy obciążeniu 338,0 kG nastąpiło nagłe sfalowanie warstwy płytowej oraz wystąpiło duże ugięcie modelu. Powstaniu fal walcowych, o przeciwnych amplitudach pasm sąsiednich, nie towarzyszyły efekty dźwiękowe. Linie przegięcia fal walcowych były równoległe do krawędzi podparcia modelu i przebiegały wzdłuż punktów styczności warstwy zewnętrznej z warstwą środkową. Sfalowanie warstwy płytowej było symetryczne względem osi symetrii modelu, a wielkości amplitud na długości pasm, równoległych do krawędzi podparcia modelu były stałe. Pokazano je na rys. 7.12. Dalszemu przyrostowi obciążenia modelu towarzyszył gwałtowny wzrost amplitud fal walcowych warstwy płytowej oraz powstawanie dużych ugięć modelu. Model wykazywał geometryczną zmienność.

Rys.7.15. Mechanizm zniszczenia modelu M1.1,0.II, powstały przy obciążeniu 338,0 kG, pokazano na rys.7.15.

Model M1.1,0.III, podparty w czterech narożnych węzłach dolnych, obciążano od zera do 214,0 kG. W początkowej fazie badania modelu, przy obciążeniu 81,6 kG, obserwowano powstawanie sprężystych ugięć modelu, znikających po odciążeniu. Ugięcia warstwy płytowej przy obciążeniu 81,6 kG pokazano na rys.7.13. Przy obciążeniu 150,0 kG zauważono powstawanie przemieszczeń międzywęzłowych warstwy płytowej modelu. W polach obwodowych warstwy płytowej wystąpiły ugięcia walcowe o przebiegu sinusoidalnym.



Rys.7.15. Mechanizm zniszczenia modelu M1.1,0.II, podpartego
wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, powstały
przy obciążeniu 338,0 kG

Amplitudy tych ugięć malały w kierunku podpór usytuowanych w narożach modelu. Ugięcia warstwy płytowej były symetryczne względem osi symetrii i przekątnych modelu. Pod wzrastającym obciążeniem obserwowano dalszy przyrost ugięć modelu oraz wzrost ugięć warstwy płytowej. Fale walcowe występujące w narożach modelu powiększyły swoje amplitudy i połączyły się falami prostopadłymi. W polach leżących na osi symetrii modelu fale walcowe nie krzyżowały się, a amplitudy ich malały ku środkowi modelu. Przy obciążeniu około 214,0 kG, wzdłuż jednej z osi symetrii, powstała nagle fala walcowa o amplitudzie stałej na swej długości. Wzdłuż drugiej osi symetrii modelu wytworzyły się dwie fale walcowe o amplitudach malejących ku środkowi modelu. Fale występujące wzdłuż osi symetrii modelu nie krzyżowały się. Pod wzrastającym obciążeniem zanotowano dalszy szybki przyrost wielkości amplitudy głównej fali walcowej modelu oraz wystąpienie dużych ugięć modelu. Model wykazywał geometryczną zmienność.

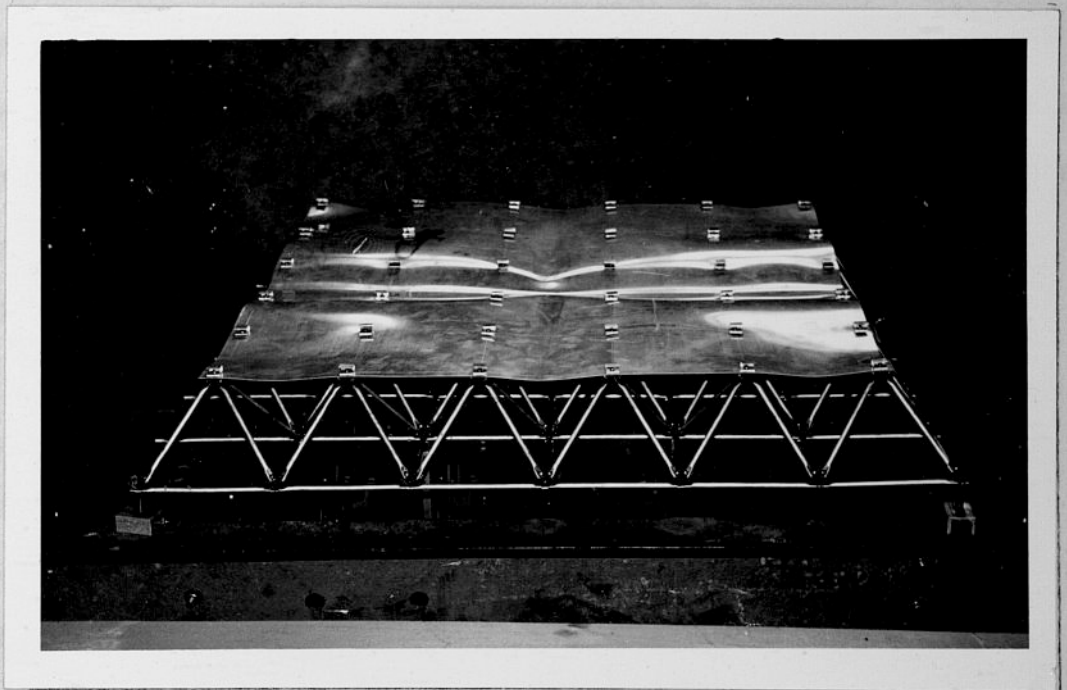
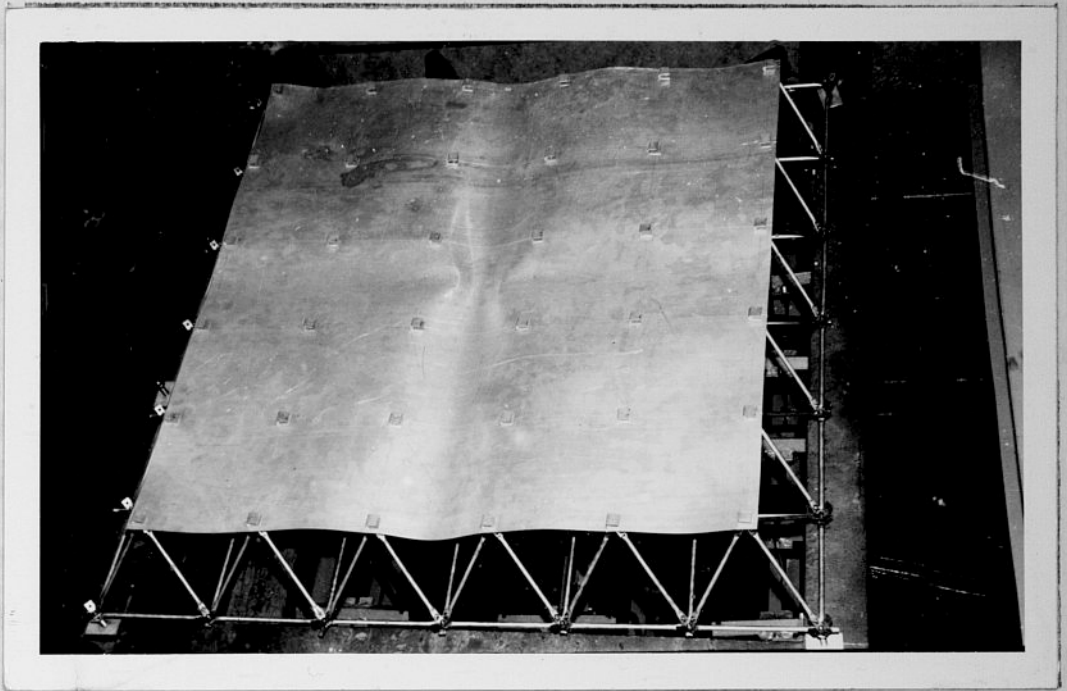
Mechanizm zniszczenia modelu M1.1,0.III, powstały przy obciążeniu 214,0 kG pokazano na rys. 7.16.

Rys.7.16.

7.6.3. WYNIKI BADAŃ MODELI SERII M2

Na modelach serii M2 badano sprężysty zakres pracy oraz mechanizmy zniszczenia struktur przestrzennych o płytowej, uźebrowanej warstwie zewnętrznej.

W trakcie badań modeli serii M2 mierzono ugięcia płytowej warstwy zewnętrznej w punktach krzyżowania się żeber oraz w środku rozpiętości uźebrowanych oczek warstwy płytowej. W sumie mierzono ugięcia w 61 punktach. Ugięcia płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej modeli serii M3 pokazano na rys. 7.17 + 7.19. Wielkości ugięć warstwy płytowej E/w/ w mm



Rys.7.16. Mechanizm zniszczenia modelu M1.1,0.III, podpartego w czterech narożnych węzłach dolnych, przy obciążeniu 214,0 kG

obliczono jako wartości średnie wg /7.5/. Ponadto obliczono odchylenia standardowe $\sigma/w/$ wg /7.6/ i /7.7/. Na rysunkach 7.17 ÷ 7.19 użyto takich samych oznaczeń graficznych jak na rysunkach 7.11 ÷ 7.13.

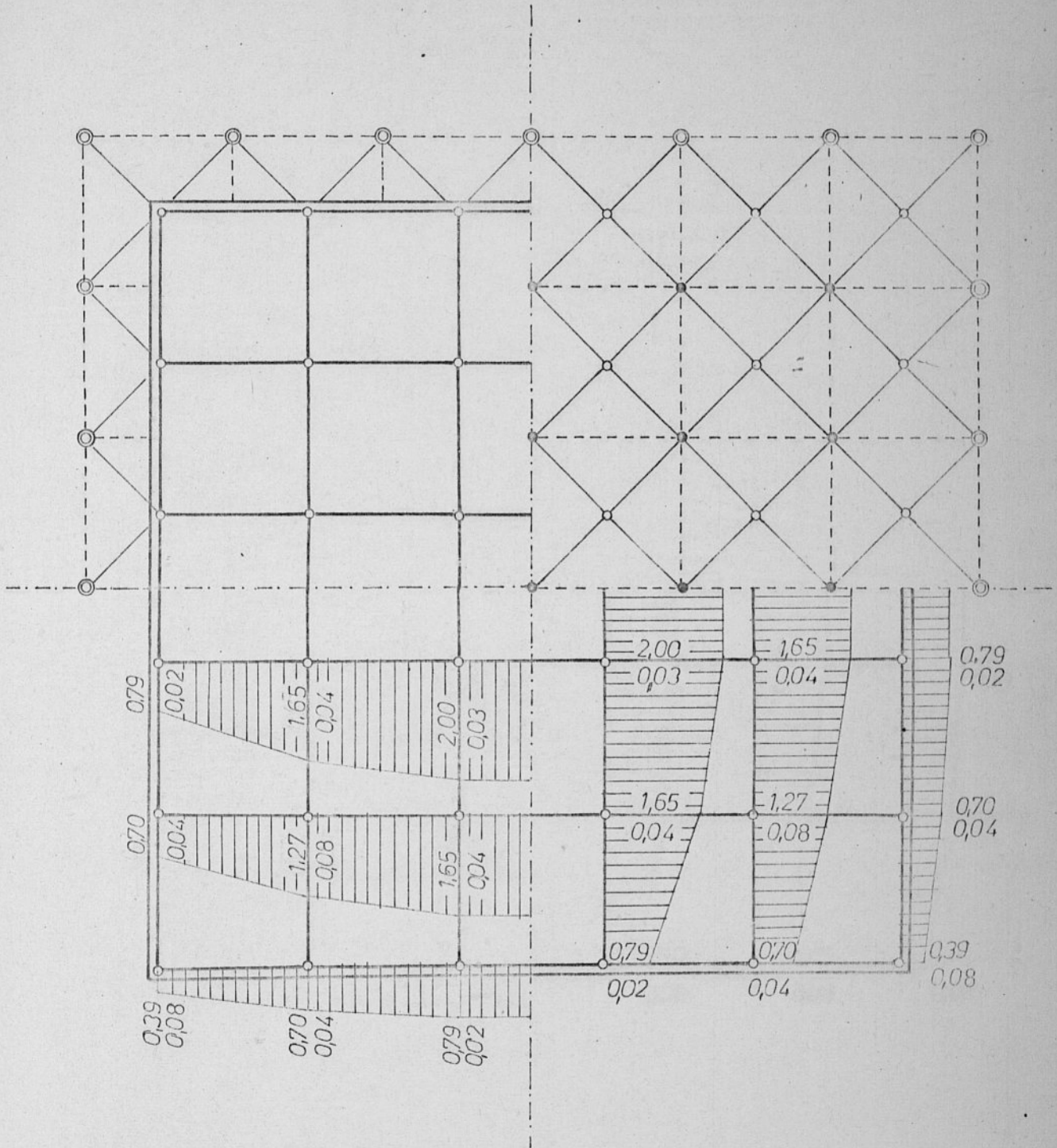
Rys.7.17. Na rys. 7.17 pokazano ugięcia płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej modelu M2.0,5ż.I, podpartego na obwodzie w węzłach dolnych, pod obciążeniem sumarycznym 1000,0 kg.

Rys.7.18. Na rys. 7.18. pokazano ugięcia płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej modelu M2.0,5ż.II, podpartego wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi w węzłach dolnych, pod obciążeniem sumarycznym 310,2 kg.

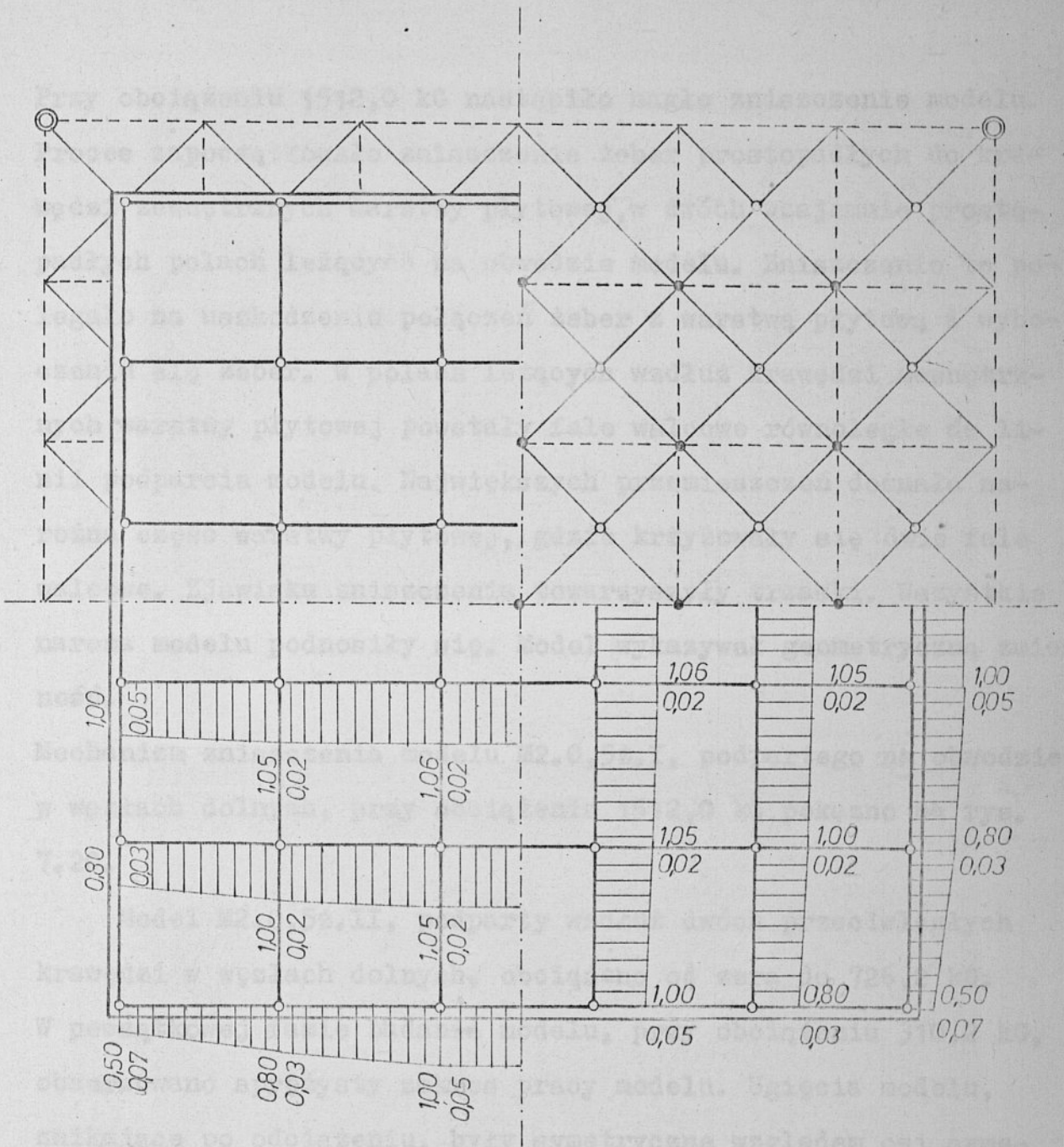
Rys.7.19. Na rys. 7.19. pokazano ugięcia płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej modelu M2.05ż.III, podpartego w czterech narożnych węzłach dolnych, pod obciążeniem sumarycznym 163,0 kg.

Model M2.0,5ż.I, podparty na obwodzie w węzłach dolnych, obciążono od zera do 1512,0 kg.

W początkowej fazie badania modelu, przy obciążeniu 1000,0 kg powstały małe, sprężyste ugięcia całego modelu; pokazano je na rys. 7.17. W tej fazie obciążenia dźwigara nie zanotowano ugięć międzywęzłowych płytowej warstwy zewnętrznej oraz ugięć żeber. Ugięcia modelu były symetryczne i znikwały po odciążeniu dźwigara. Przy obciążeniu 1200,0 kg zanotowano powstawanie dużych ugięć międzywęzłowych warstwy płytowej, zaś żebra pozostawały nadal proste. W poszczególnych uźebrowanych oczkach warstwy płytowej powstawały czasy o ekstremalnych ugięciach w środku rozpiętości stężonych oczek. Amplitudy tych ugięć, w oczkach symetrycznych, były jednakowe co do wartości bezwzględnej, zaś zwroty ugięć czasz nie wykazywały symetrii /posiadały charakter losowy/. Te duże ugięcia warstwy płytowej znikwały po odciążeniu modelu.



Rys.7.17 Ugięcia płytowej, uźebrowanej warstwy górnjej modelu M2.0,5ż.I, podpartego na obwodzie w węźkach dolnych, pod obciążeniem $P = 1000,0 \text{ kg}$ w [mm]



Rys.7.19 Ugięcia płytowej, uźebrowanej warstwy górnej modelu M2.0,5ż.III, podpartego w czterech narożnych węzłach dolnych, pod obciążeniem $P = 163,0 \text{ kG}$ w [mm]

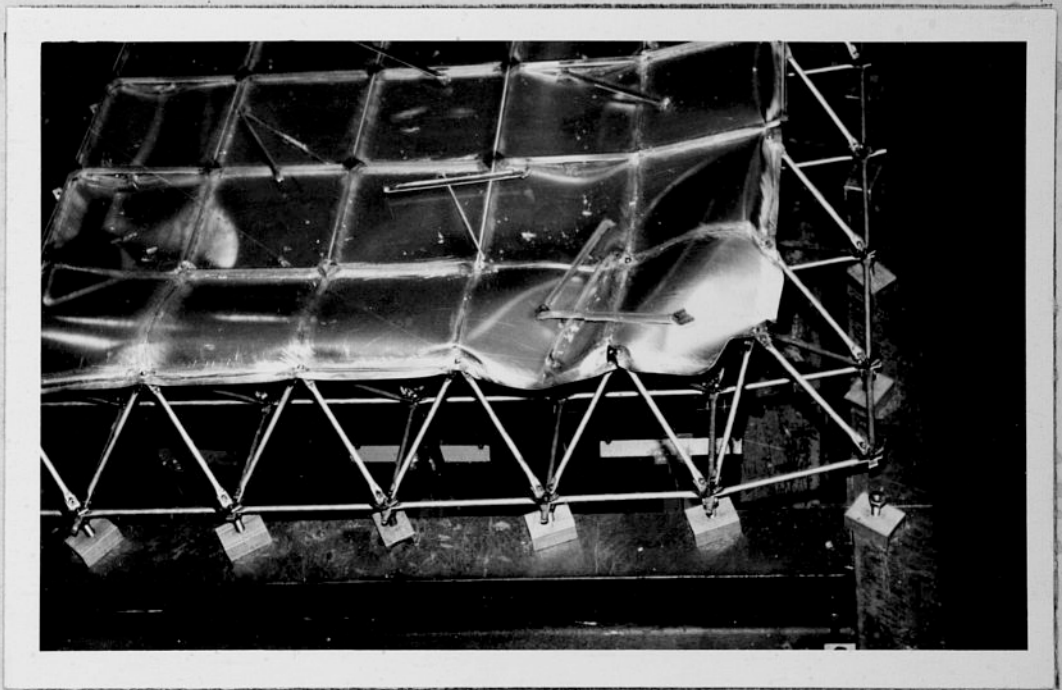
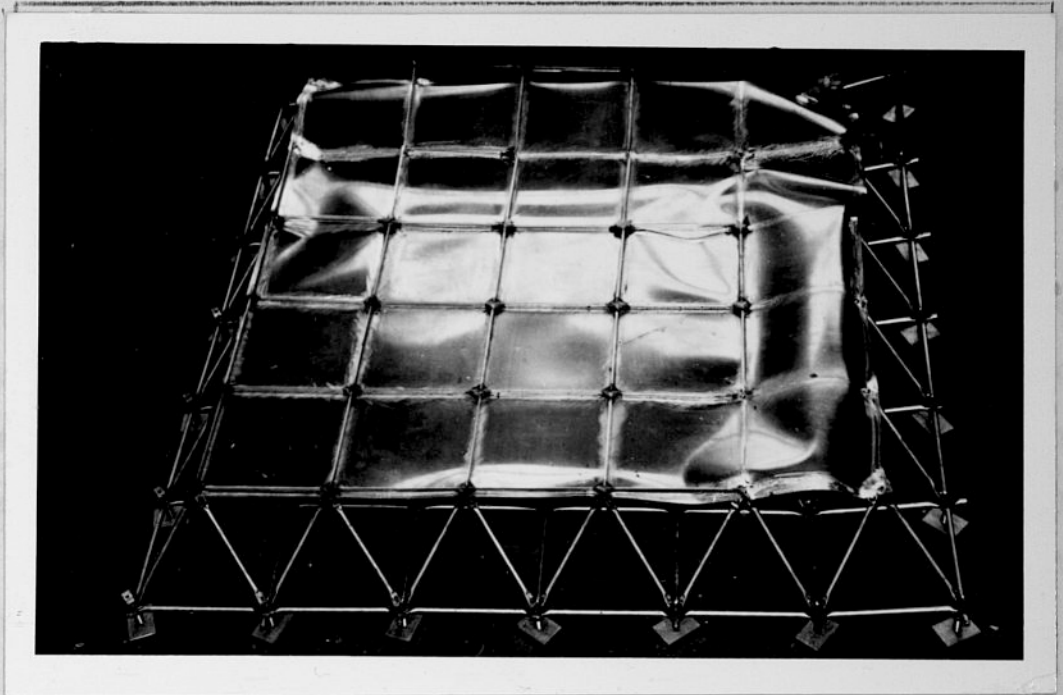
Przy obciążeniu 1512,0 kG nastąpiło nagłe zniszczenie modelu. Proces zapoczątkowało zniszczenie żeber prostopadłych do krawędzi zewnętrznych warstwy płytowej, w dwóch wzajemnie prostopadłych polach leżących na obwodzie modelu. Zniszczenie to polegało na uszkodzeniu połączeń żeber z warstwą płytową i wyboczeniu się żeber. W polach leżących wzdłuż krawędzi zewnętrznych warstwy płytowej powstały fale walcowe równoległe do linii podparcia modelu. Największych przemieszczeń doznała narożna część warstwy płytowej, gdzie krzyżowały się dwie fale walcowe. Zjawisku zniszczenia towarzyszyły trzaski. Wszystkie naroża modelu podnosiły się. Model wykazywał geometryczną zmienność.

Mechanizm zniszczenia modelu M2.0,5ż.I, podpartego na obwodzie w węzłach dolnych, przy obciążeniu 1512,0 kG, pokazano na rys. 7.20.

rys. 7.20

Model M2.0,5ż.II, podparty wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi w węzłach dolnych, obciążano od zera do 726,2 kG. W początkowej fazie badania modelu, przy obciążeniu 310,2 kG, obserwowano sprężysty zakres pracy modelu. Ugięcia modelu, znikające po odciążeniu, były symetryczne względem osi symetrii modelu. Pokazano je na rys. 7.18.

W tej fazie obciążania dźwigara nie zanotowano ugięć żeber oraz ugięć międzywęzłowych warstwy płytowej. Przy obciążeniu 400,0 kG zanotowano powstawanie sfalowań uźebrowanych oczek warstwy płytowej, w strefie leżącej wzdłuż osi symetrii modelu. Żebra nadal pozostawały proste. Duże ugięcia międzywęzłowe uźebrowanych oczek warstwy płytowej miały charakter losowy /nie zaobserwowano prawidłowości ugięć oczek sąsiednich/. Przy



Rys.7.20. Mechanizm zniszczenia modelu M2.0,5ż.I, podpartego na obwodzie w węzłach dolnych, powstały przy obciążeniu 1512,0 kG.

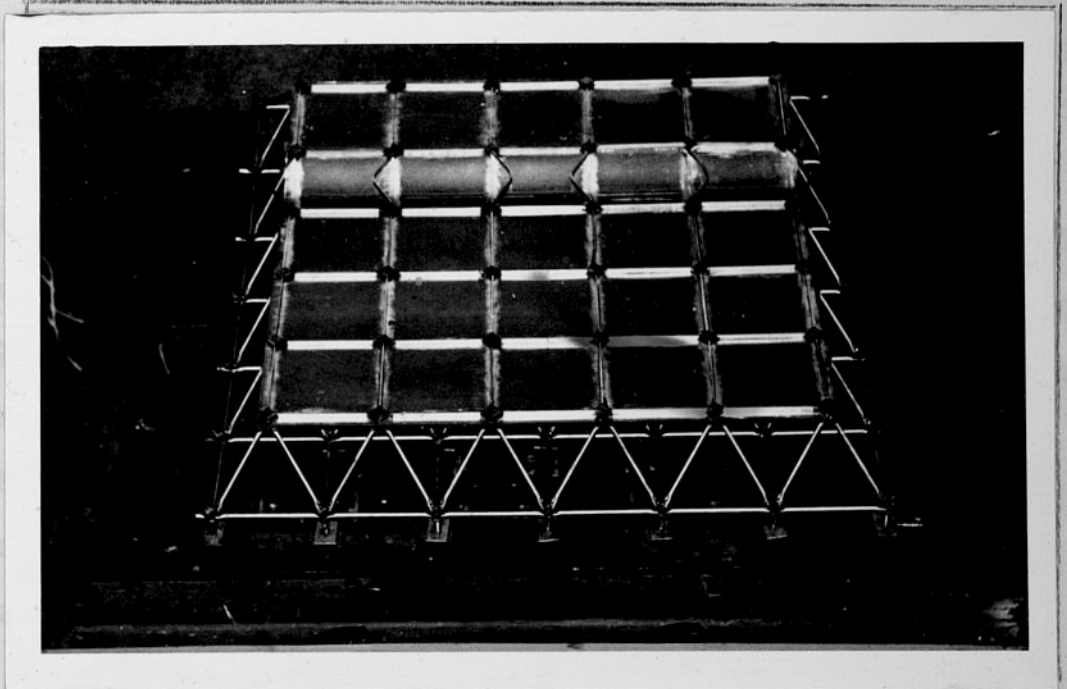
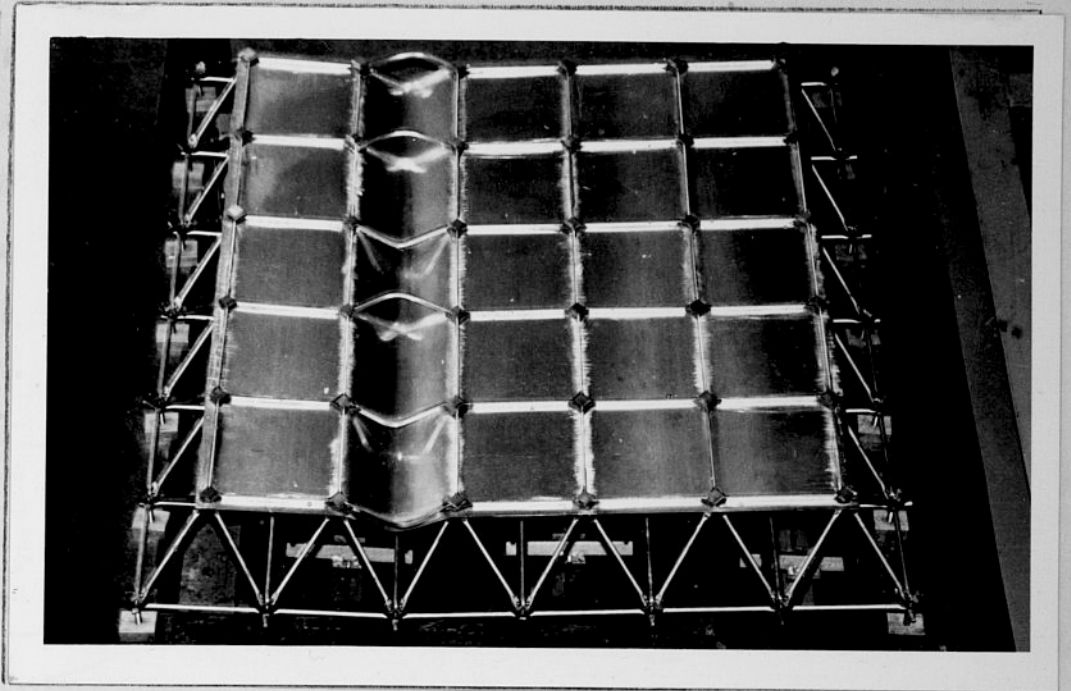
obciążeniu 726,2 kG nastąpiło nagłe zniszczenie modelu. Zniszczenie modelu polegało na uszkodzeniu połączeń żeber z warstwą płytową oraz wyboczeniu się żeber. Zniszczeniu uległy wszystkie żebra prostopadłe do linii podparcia modelu. Zjawisko to wystąpiło w jednym polu równoległym do linii podparcia modelu. Zniszczenie żeber pociągnęło za sobą powstawanie fali walcowej w tym polu i załamania się modelu. Model wykazywał geometryczną zmienność. Mechanizm zniszczenia modelu M2.0,5ż.II, podpartego wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi w węzłach dolnych, powstały przy obciążeniu 726,2 kG, pokazano na rys. 7.21.

Model M2.0,5ż.III, podparty w czterech narożnych węzłach dolnych, obciążano od zera do 308,0 kG.

Przy obciążeniu 163,0 kG obserwowano powstawanie sprężystych ugięć modelu, znikających po odciążeniu. Pokazano je na rys. 7.19. W tej fazie obciążania modelu nie zaobserwowano ugięć międzywęzłowych uźebrowanych oczek płytowej warstwy zewnętrznej ani też ugięć żeber. Przy obciążeniu około 250,0 kG, w polach obwodowych modelu, zanotowano powstawanie dużych ugięć międzywęzłowych uźebrowanych oczek warstwy płytowej.

Amplitudy tych ugięć, w oczkach symetrycznych, były jednakowe co do wartości bezwzględnej, lecz zwroty ich były różne.

Wielkość amplitud ugięć międzywęzłowych warstwy płytowej wzrastała pod wzrastającym obciążeniem. Następnie zaobserwowano powstawanie czasz w uźebrowanych oczkach strefy środkowej warstwy płytowej. Amplitudy tych ugięć były znacznie mniejsze od amplitud czasz występujących w strefie obwodowej modelu. Przy obciążeniu 308,0 kG nastąpiło nagłe zniszczenie modelu. Polegało ono na uszkodzeniu połączeń żeber z warstwą płytową w jed-



Rys.7.21. Mechanizm zniszczenia modelu M2.0,5ż.II, podpartego
wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi w węzłach
dolnych, powstały przy obciążeniu 726,2 kG

nym z naroży modelu.

Uszkodzeniu uległy dwa narożne żebra modelu.

Mechanizm zniszczenia modelu M2.0.5ż.III, podpartego w czterech narożnych węzłach dolnych, powstały przy obciążeniu

rys. 7.22 308,0 kg, pokazano na rys. 7.22.

7.6.4 WYNIKI BADAŃ MODELI M3

Na modelach serii M3 wyznaczono obciążenia graniczne struktur przestrzennych o płytowej, nieuzębrowanej warstwie górnej. Modele serii M3, podparte wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, były obciążane symetrycznie obciążeniem przyłożonym do węzłów dolnych. Jako parametry zmienne modeli przyjęto grubość warstwy płytowej, która wynosiła 0,5; 0,8; 1,0; 1,5 mm. Badania przeprowadzono na 5 modelach każdej grubości. W sumie przebadano 20 modeli serii M3.

W trakcie badań modeli serii M3 dokonywano pomiarów ugięć warstwy płytowej oraz odkształceń prętów warstwy dolnej, prostopadłych do krawędzi podparcia modeli, / realizowano program obciążenia $P = 0, P_i, 0, P_i, 0/$.

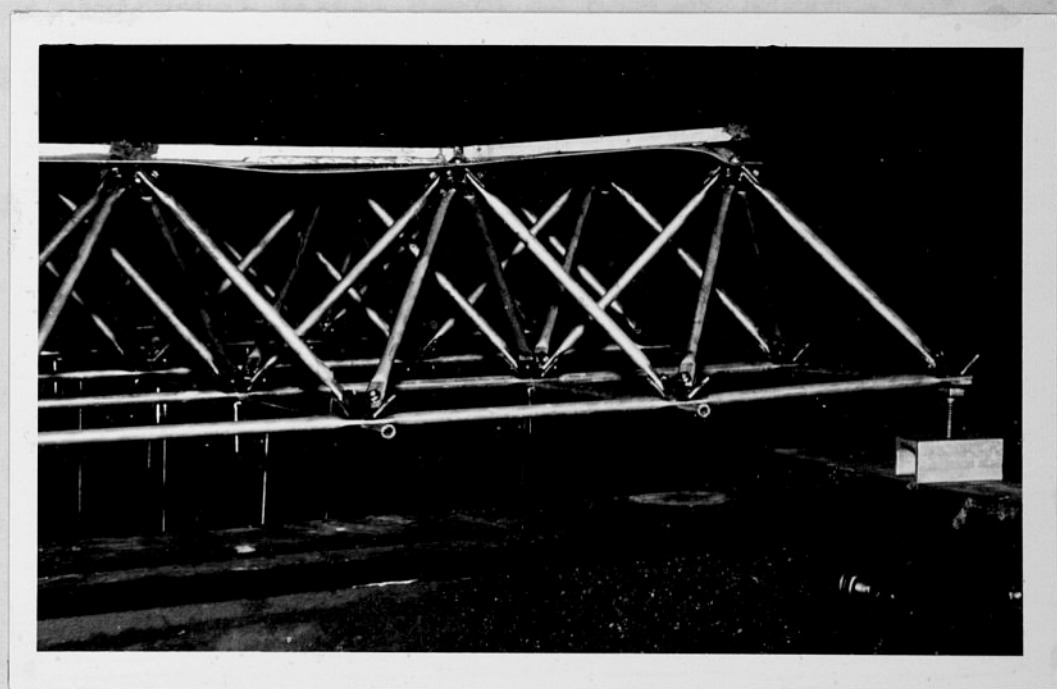
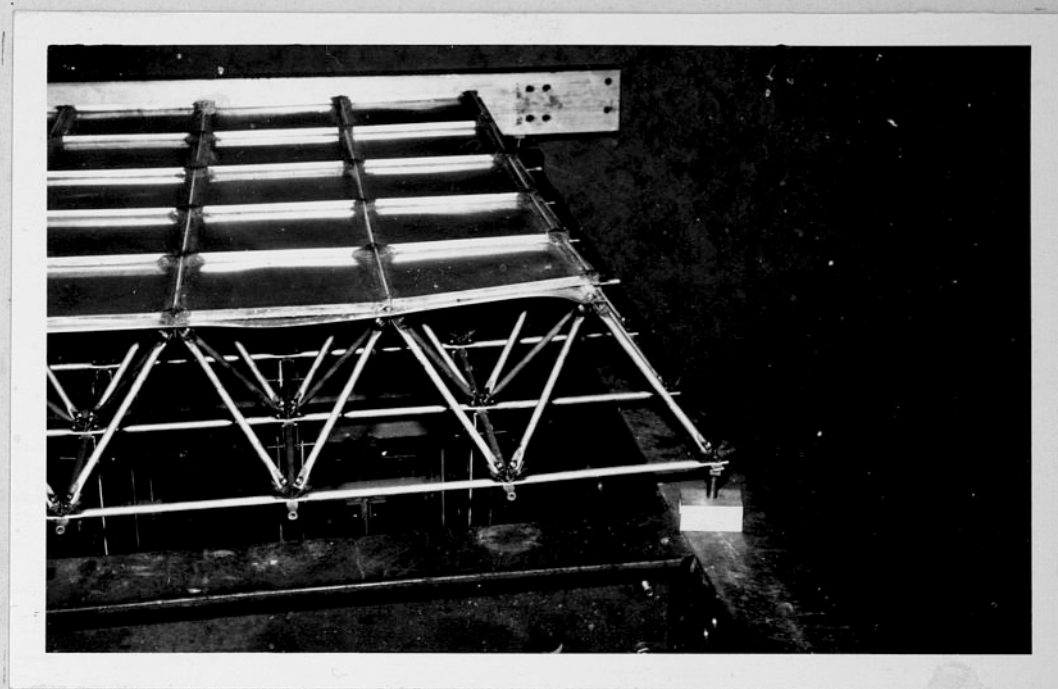
Korzystając z symetrii podparcia, obciążenia oraz cech topologicznych modeli obliczono wielkości sił w prętach pasów dolnych wg wzoru:

$$E /S/ = \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad /7.8/$$

gdzie: ξ_i = odkształcenie i-tego pręta;

C = charakterystyka sprężystości pręta;

n = liczba prętów o takiej samej wartości oczekiwanej E/S/



Rys. 7.22. Mechanizm zniszczenia modelu M2.0,5ż.III, podpartego w czterech narożnych węzłach dolnych, powstały przy obciążeniu 308,0 kg

Ponadto obliczono odchylenia standardowe $G/S/$ wg wzoru:

$$G^2/S/ = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [C \varepsilon_i - E /S/]^2 \quad 7.9$$

Siły wewnętrzne w prętach struktur obliczono przy założeniu, że pomiar odkształceń prętów był wykonywany tensometrami o nielosowych charakterystykach, a losowe własności mechaniczne posiadają jedynie pręty struktury [20].

Nielosową charakterystykę tensometrów przyjęto na podstawie badań materiałowych prętów, z których zbudowane były pasy dolne modeli serii M3. Badania materiałowe przeprowadzono przy użyciu takich samych tensometrów oraz takiej samej aparatury pomiarowej jakiej użyto do pomiaru odkształceń pasów dolnych modeli serii M3. Współczynnik zmienności charakterystyki sprężystości podłużnej C rurek ϕ 6/1, z których zbudowane były pasy dolne modeli serii M3, wynosił 0,01145 /patrz pkt. 7.5/.

Parametry sił wewnętrznych /7.8/ obliczono jako wartości średnie z $4 \cdot 5 = 20$ i $2 \cdot 5 = 10$ pomiarów odkształceń prętów o tej samej wartości oczekiwanej. Modele serii M3 posiadały 2 osie symetrii, a więc można w nich wyróżnić 4 pręty "jednakowe" /z wyjątkiem prętów leżących na osi symetrii, gdzie występowały 2 pręty "jednakowe"/.

W początkowej fazie badań modeli serii M3 dokonywano pomiarów ugięć warstwy płytowej oraz odkształceń prętów pasów dolnych. Uzyskane wyniki, dla poszczególnych grubości warstwy górnej modeli, pokazano na rys. 7.23 + 7.26.

Na rysunkach 7.23 + 7.26 użyto takich samych oznaczeń gra-

ficznych, jak na rysunkach 7.11 + 7.13. W lewych dolnych ćwiartkach rysunków naniesiono nad linią parametry sił pasów dolnych E/S w kG zaś pod linią wielkości odchyień standardowych σ/S . W dolnych prawych ćwiartkach rysunków pokazano wielkości ugięć płytkowej warstwy górnej w mm.

rys. 7.23

Na rys. 7.23 pokazano parametry sił wewnętrznych oraz ugięcia modeli M3.0,5.II, powstałe przy obciążeniu sumarycznym 36,0 kG, /obciążenie węzła wynosiło 1,0 kG/.

rys. 7.24

Na rys. 7.24 pokazano parametry sił wewnętrznych oraz ugięcia modeli M3.0,8.II, powstałe przy obciążeniu sumarycznym 144,0 kG /obciążenie węzła wynosiło 4,0 kG/.

rys. 7.25

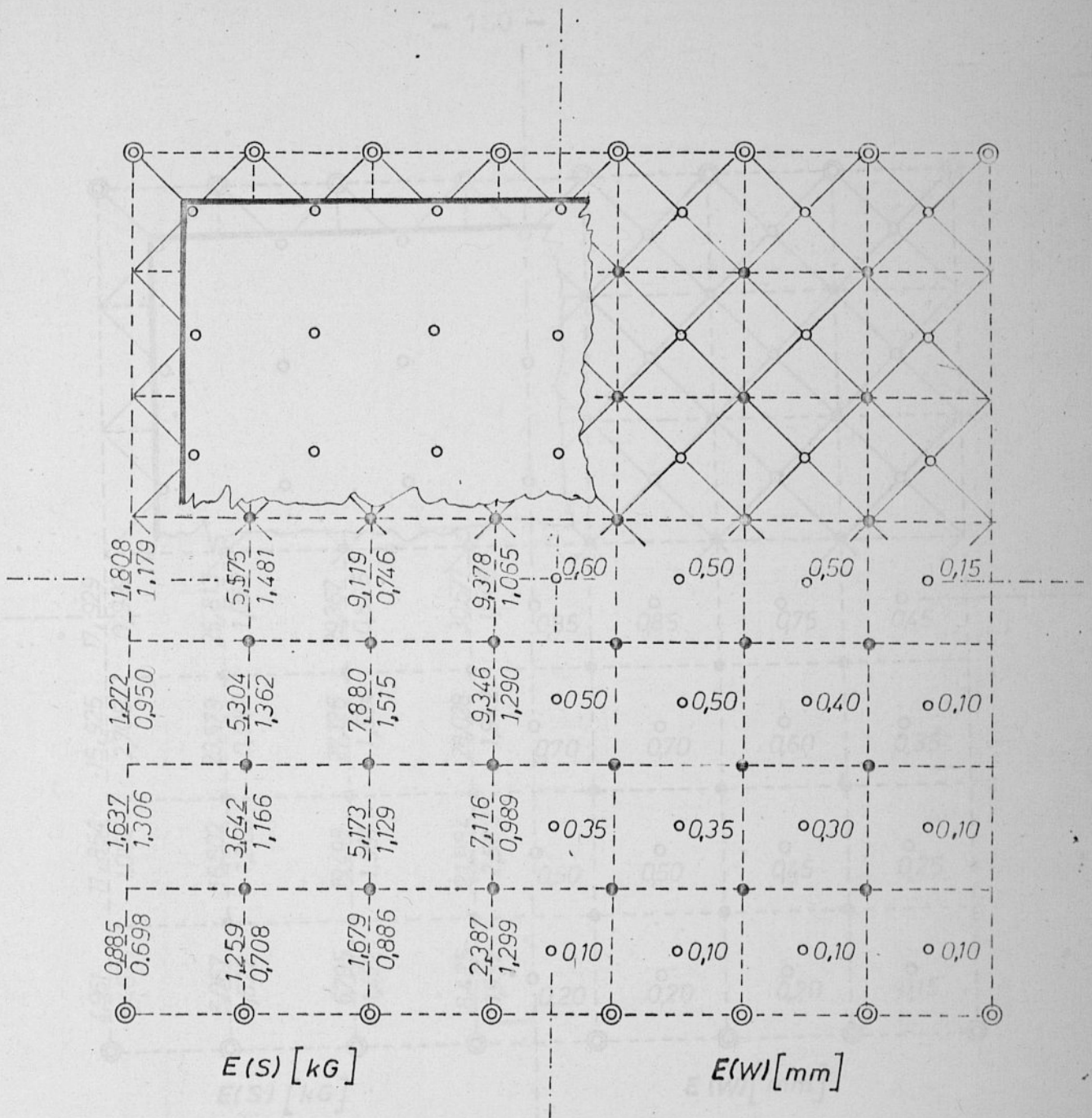
Na rys. 7.25 pokazano parametry sił wewnętrznych oraz ugięcia modeli M3.1,0.II, powstałe przy obciążeniu sumarycznym 180,0 kG /obciążenie węzła wynosiło 5,0 kG/.

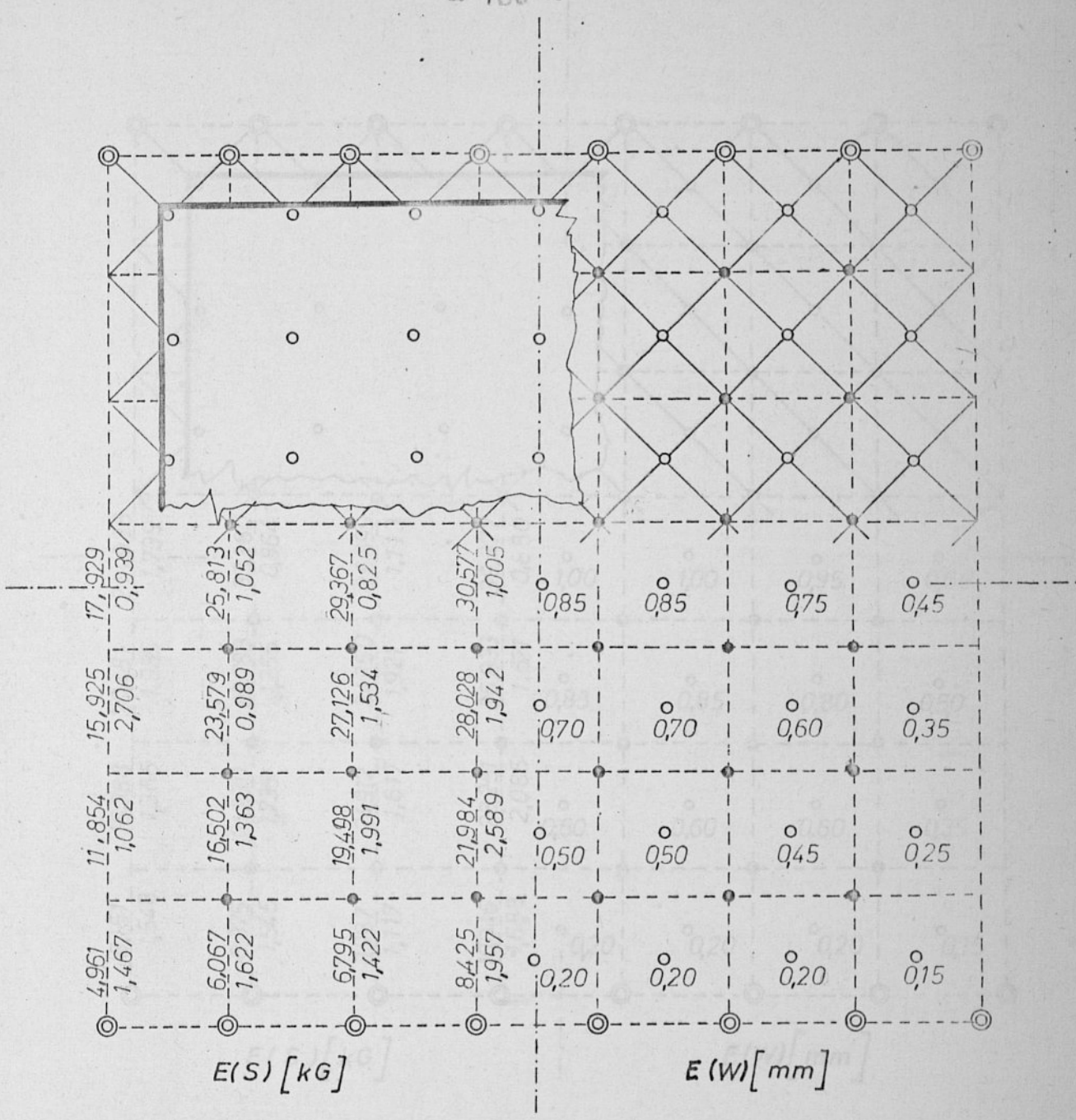
rys. 7.26

Na rys. 7.26 pokazano parametry sił wewnętrznych oraz ugięcia modeli M3.1,5.II, powstałe przy obciążeniu sumarycznym 360,0 kG /obciążenie węzła wynosiło 10,0 kG/.

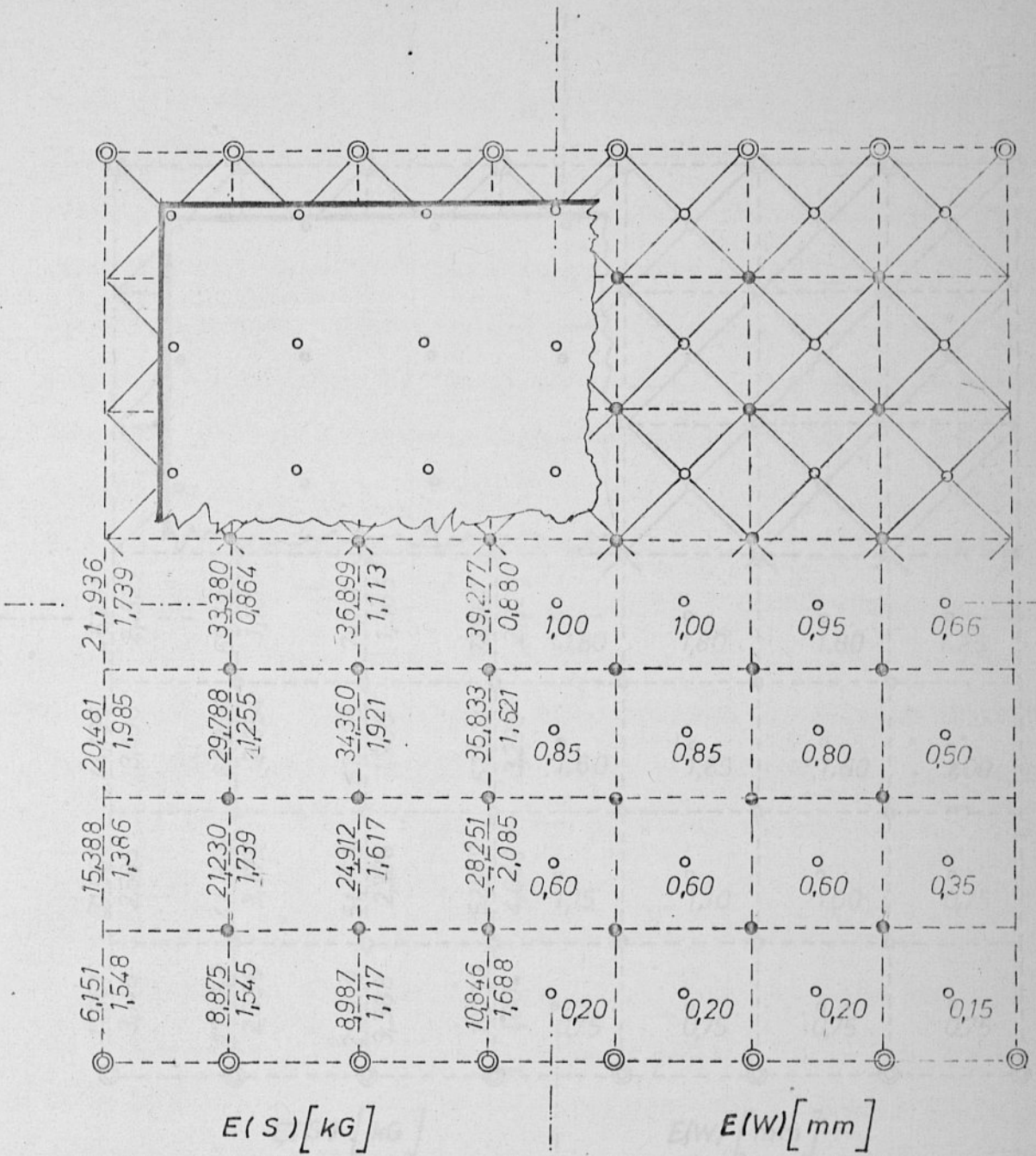
Po przebadaniu sprężystego zakresu pracy modeli serii M3 obciążono je aż do wystąpienia mechanizmu zniszczenia.

Mechanizm zniszczenia modeli serii M3, podpartych w węzłach dolnych na dwóch przeciwległych krawędziach, był taki sam dla wszystkich modeli tej serii /mimo różnych grubości warstw płytkowych/. Polegał on na nagłym wystąpieniu sfalowania warstwy płytkowej. Płytkowa warstwa górna ulegała sfalowaniu sinusoidalnemu o przeciwnych ugięciach pasm sąsiednich. Linie przegięcia fal walcowych, równoległych do linii podparcia, przebiegały wzdłuż punktów styczności warstwy środkowej z warstwą zewnętrzną. Wielkości amplitud fal walco-

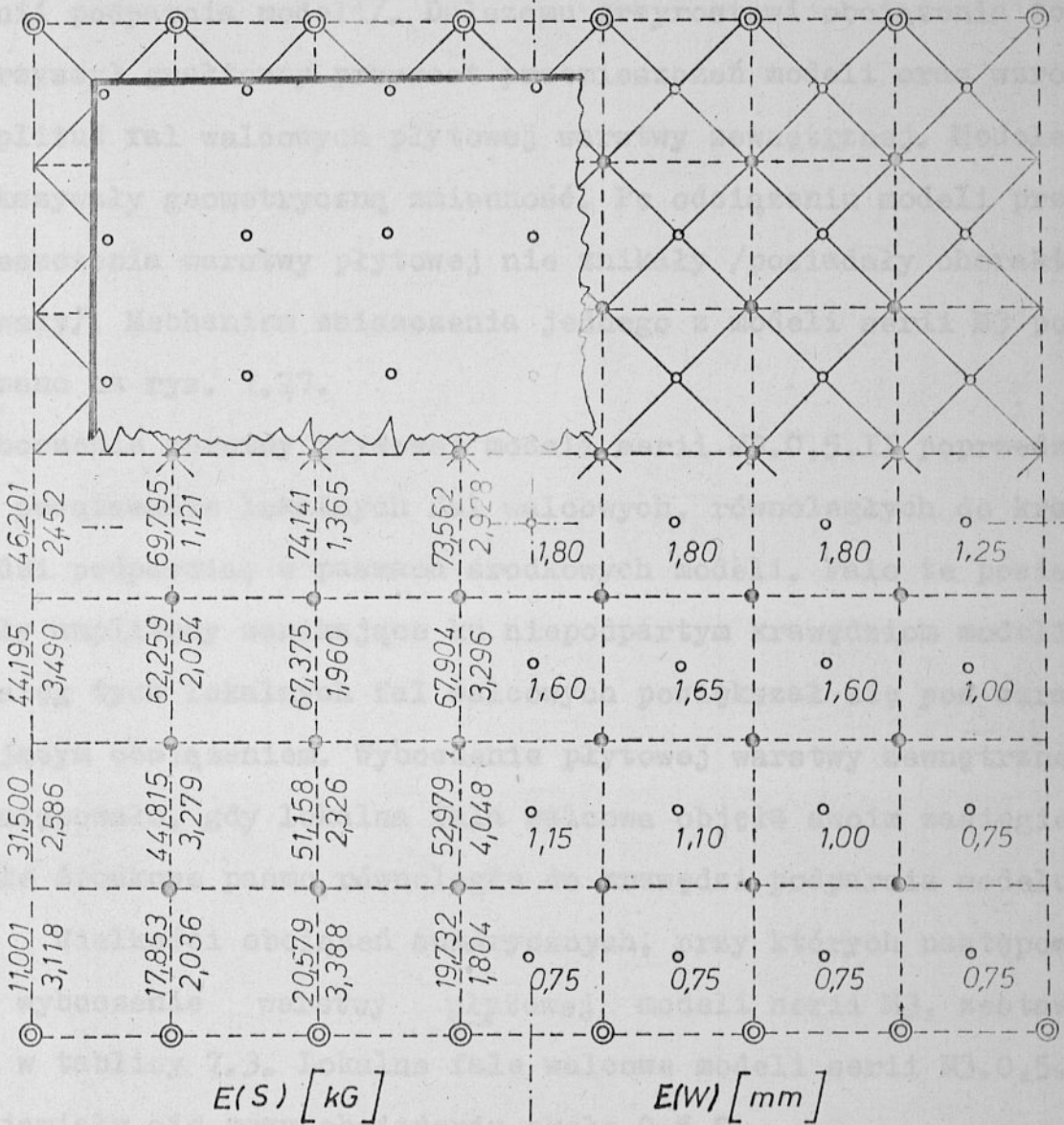




Rys.7.24. Siły wewnętrzne i ugięcia modeli serii H3.03.II przy obciążeniu sumarycznym 144,0 kg /obciążenie węzła 4,0 kg/.



Rys.7.25. Siły wewnętrzne i ugięcia modeli serii M3.1,0.II przy obciążeniu sumarycznym 180,0 kg / obciążenie węzła 5,0 kg/.



Rys.7.26. Siły wewnętrzne i ugięcia modeli serii M3.1.5.II przy obciążeniu sumarycznym 360,0 kg /obciążenie węzła 10,0 kg/.

7.7 ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ MODELÓWYCH

wych były stałe na długości pasm /w kierunku równoległym do linii podparcia modeli/. Dalszemu przyrostowi obciążenia towarzyszył gwałtowny przyrost przemieszczeń modeli oraz wzrost amplitud fal walcowych płytowej warstwy zewnętrznej. Modele wykazywały geometryczną zmienność. Po odciążeniu modeli przemieszczenia warstwy płytowej nie znikają /posiadały charakter trwałe/. Mechanizm zniszczenia jednego z modeli serii M3 po-

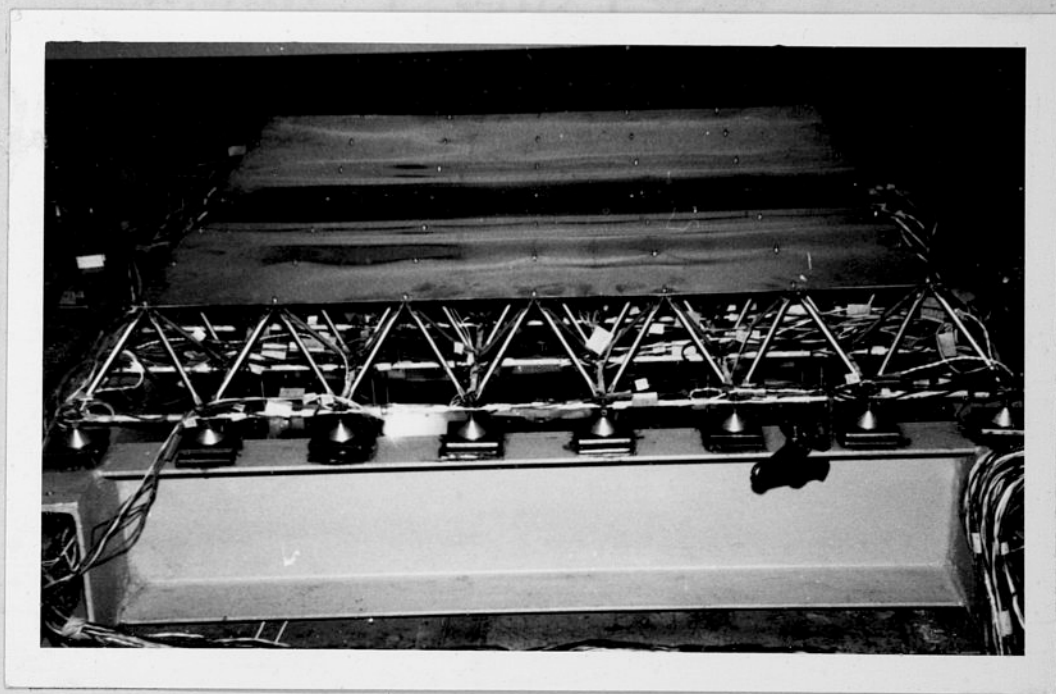
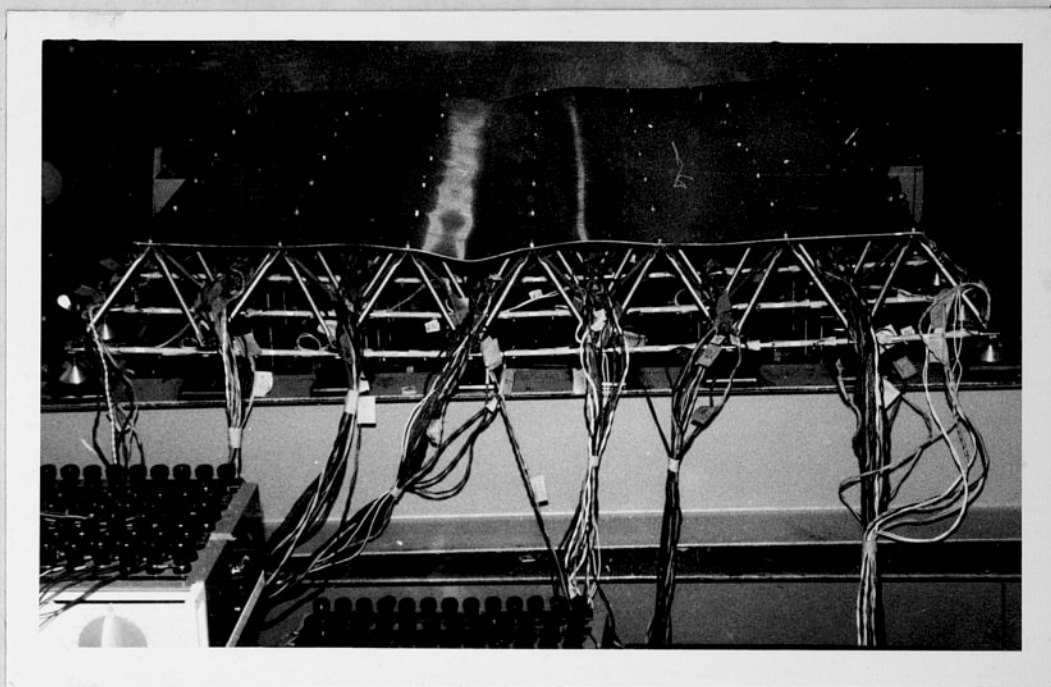
Rys. 7.27 kazano na rys. 7.27.

Wyboczenie warstwy płytowej modeli serii M3.0,5.II poprzedzało powstawanie lokalnych fal walcowych, równoległych do krawędzi podparcia, w pasmach środkowych modeli. Fale te posiadały amplitudy zanikające ku niepodpartym krawędziom modeli. Zasięg tych lokalnych fal walcowych powiększał się pod wzrastającym obciążeniem. Wyboczenie płytowej warstwy zewnętrznej następowało, gdy lokalna fala walcowa objęła swoim zasięgiem całe środkowe pasmo, równoległe do krawędzi podparcia modelu.

Wielkości obciążeń sumarycznych, przy których następowało wyboczenie warstwy płytowej modeli serii M3, zestawiono w tablicy 7.3. Lokalne fale walcowe modeli serii M3.0,5.II pojawiały się przy obciążeniu około $0,5 Q_{gr}$.

7.7 ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ MODELOWYCH

Podstawowym celem badań modelowych było poznanie pracy rozpatrywanych struktur przestrzennych w obszarze sprężystym, zbadanie mechanizmów zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej oraz obciążeń granicznych takich ustrojów, z warunku zniszczenia warstwy płytowej.



Rys.7.27. Mechanizm zniszczenia jednego z modeli serii M3

Tablica 7.3 Obciążenia graniczne modeli serii M3 w [kG]

Lp.	ξ_n	Oznaczenie modelu	Obciążenie graniczne		Uwagi
			sumaryczne	węzłowe	
1	2	3	4	5	6
1.	0,5	M3.0,5.II.1	60,36	1.6766	Pod obciążeniem mniejszym od granicznego występowało lokalne wyboczenie płytowej warstwy zewnętrznej /około 0,5q/g.
2.		M3.0,5.II.2	60,86	1.6906	
3.		M3.0,5.II.3	75,38	2.0939	
4.		M3.0,5.II.4	69,01	1.9169	
5.		M3.0,5.II.5	102,13	2.8369	
6.	0,8	M3.0,8.II.1	216,26	6.0072	
7.		M3.0,8.II.2	215,60	5.9889	
8.		M3.0,8.II.3	244,13	6.7814	
9.		M3.0,8.II.4	227,75	6.3264	
10.		M3.0,8.II.5	248,14	6.8928	
11.	1,0	M3.1,0.II.1	369,04	10,2511	
12.		M3.1,5.II.2	363,34	10,0928	
13.		M3.1,5.II.3	334,11	9.2808	
14.		M3.1,0.II.4	349,04	9.6956	
15.		M3.1,0.II.5	301,49	8.3747	
16.	1,5	M3.1,5.II.1	954,81	26.5225	
17.		M3.1,5.II.2	950,74	26.4094	
18.		M3.1,5.II.3	986,93	27.4147	
19.		M3.1,5.II.4	1004,66	27.9072	
20.		M3.1,5.II.5	989,11	27.4753	

Przeprowadzone badania doświadczalne potwierdziły techniczną możliwość wyznaczania mechanizmów zniszczenia oraz obciążeń granicznych rozpatrywanych struktur na modelach według zaproponowanych rozwiązań konstrukcyjnych.

W strukturach o nieuźebrowanej warstwie płytowej, obciążonych symetrycznie w węzłach, podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, /modele MO.1,0.II, M1.1,0.II, M3.0,5 + 1,5.II/, obserwowano powstawanie w stanie granicznym "walcowego" mechanizmu zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej. "Walcowy" mechanizm zniszczenia polegał na nagłym sinusoidalnym sfalowaniu warstwy płytowej. Fale walcowe, o przeciwnych ugięciach w sąsiednich pasmach, posiadały stałe amplitudy na długości, a linie przegięcia fal przebiegały wzdłuż punktów kontraktowych płytowej warstwy zewnętrznej z warstwą środkową. Powstaniu sfalowania warstwy płytowej nie towarzyszyły efekty dźwiękowe. Po wystąpieniu walcowego sfalowania warstwy zewnętrznej modele wykazały geometryczną zmienność. Zaobserwowany mechanizm zniszczenia jest potwierdzeniem tezy 2.

W strukturach o nieuźebrowanej warstwie zewnętrznej, obciążonych symetrycznie w węzłach, podpartych na obwodzie, /MO.1,0.I i M1.1,0.I/, zaobserwowano powstawanie w stanie granicznym mechanizmu zniszczenia warstwy płytowej polegającego na krzyżowaniu się dwu powierzchni "walcowych". Wskutek odchyłek wymiarowych, wstępnych ugięć warstwy płytowej, losowych odchyłek od symetrii obciążenia i innych wpływów losowych, w fazie obciążania poprzedzającej stan graniczny, fale walcowe leżące na osi symetrii nie krzyżowały się. Na jednej z osi symetrii modelu powstawała fala walcowa o stałej am-

plitudzie, zaś wzdłuż drugiej osi symetrii ustroju powstawały dwie fale o amplitudach zanikających ku środkowi modelu. Mechanizm zniszczenia warstwy płytowej występował wówczas, gdy fala walcowa o stałej amplitudzie ulegała zakłamaniu i łączyła się z falami prostopadłymi do niej. Zjawisku temu towarzyszyły efekty dźwiękowe /trzaski/. Przyrost obciążeń modelu powodował gwałtowny wzrost ugięć dźwigara. Zaobserwowany mechanizm zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej struktury jest częściowym potwierdzeniem tezy 3. Występujący w stanie granicznym mechanizm zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej rozpatrywanych struktur, podpartych na obwodzie, był superpozycją dwóch prostopadłych "walcowych" mechanizmów zniszczenia. Różnił się on jednak od hipotecznego mechanizmu zniszczenia pokazanego na rys. 1.7.

W strukturze o nieuźebrowanej warstwie płytowej, obciążonej symetrycznie w węzłach, podpartej w czterech narożach, /model M1.1,0.III/, obserwowano powstawanie w stanie granicznym mechanizmu zniszczenia warstwy płytowej polegającego na superpozycji dwu wzajemnie prostopadłych mechanizmów "walcowych". W fazie obciążania poprzedzającej stan graniczny obserwowano powstawanie sfalowań warstwy płytowej będących superpozycją dwu wzajemnie prostopadłych powierzchni walcowych. Fale walcowe występujące wzdłuż osi symetrii modelu nie krzyżowały się. Mechanizm zniszczenia warstwy płytowej polegał na nagłym wystąpieniu na jednej z osi symetrii fali walcowej o stałej amplitudzie. Wzdłuż drugiej osi symetrii dźwigara powstawały dwie fale o amplitudach zanikających ku środkowi modelu.

Zjawisku temu nie towarzyszyły efekty dźwiękowe, a ustrój wykazywał geometryczną zmienność.

W strukturze o uźebrowanej warstwie płytowej, obciążonej symetrycznie w węzłach, /model M2.0,5ż.I/, zaobserwowano powstawanie mechanizmu zniszczenia polegającego na wystąpieniu uszkodzenia "krytycznego zbioru żeber". Występujący w stanie granicznym mechanizm zniszczenia polegał na nagłym zniszczeniu żeber prostopadłych do krawędzi podparcia, w polach leżących wzdłuż krawędzi podparcia modelu oraz powstawanie fal walcowych w tych polach. Wyboczeniu uległy wszystkie żebra w dwu prostopadłych polach obwodowych.

Zjawisku temu towarzyszył trzask. Uszkodzenie "krytycznego zbioru żeber", dla takiego przypadku podparcia i obciążenia dźwigara, było równoznaczne ze zniszczeniem wszystkich żeber w dwóch wzajemnie prostopadłych pasmach obwodowych.

W strukturze o uźebrowanej warstwie płytowej, obciążonej symetrycznie, /model M2.0,5ż.II/, zaobserwowano powstawanie w stanie granicznym mechanizmu zniszczenia polegającego na wystąpieniu uszkodzenia "krytycznego zbioru żeber". Mechanizm zniszczenia polegał na nagłym wyboczeniu się wszystkich żeber prostopadłych do krawędzi podparcia, w jednym z pasm równoległych do linii podparcia modelu. Uszkodzenie "krytycznego zbioru żeber" było więc równoznaczne ze zniszczeniem wszystkich żeber w jednym paśmie równoległym do krawędzi podparcia.

W strukturach o uźebrowanej warstwie płytowej, obciążonych symetrycznie w węzłach, /model M2.0,5ż.III/, zaobserwowano powstawanie w stanie granicznym mechanizmu zniszczenia

polegającego na wystąpieniu uszkodzenia "krytycznego zbioru żeber". Mechanizm zniszczenia polegał na nagłym zniszczeniu dwóch narożnych żeber warstwy płytowej. Uszkodzenie "krytycznego zbioru żeber", w tym przypadku podparcia i obciążenia ustroju, sprowadzało się do zniszczenia dwóch żeber w jednym z naroży dźwigara.

We wszystkich badanych modelach serii M2 obserwowano powstawanie w stanie granicznym mechanizmu zniszczenia polegającego na uszkodzeniu "krytycznego zbioru żeber".

Występował on po uszkodzeniu wszystkich elementów "krytycznego zbioru żeber". Ponadto, w fazie obciążania poprzedzającej stan graniczny obserwowano powstawanie lokalnego wyboczenia warstwy płytowej. W poszczególnych uźebrowanych oczkach warstwy płytowej powstawały czasze o dużych ugięciach. Amplitudy ugięć czasz, w oczkach symetrycznych, były jednakowe co do wartości bezwzględnej, lecz zwroty ich były różne /posiadały charakter losowy/.

Zaobserwowany mechanizm zniszczenia, uźebrowanej warstwy płytowej, polegający na uszkodzeniu "krytycznego zbioru żeber", jest potwierdzeniem tezy 4.

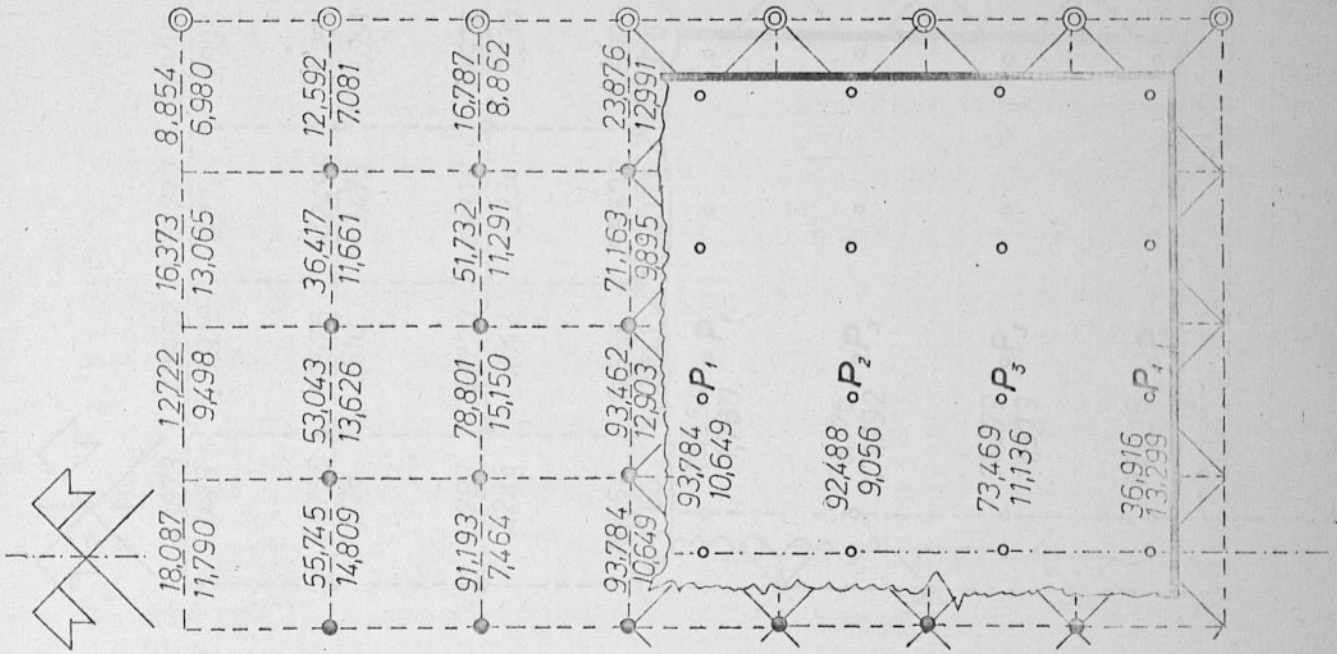
Wyboczenie warstwy płytowej, poprzedzające wystąpienie mechanizmu zniszczenia, różniło się jednak od hipotetycznego wyboczenia lokalnego warstwy płytowej, pokazanego na rys. 1.8 /zwroty amplitud ugięć czasz posiadały charakter losowy/.

Wyboczenie warstwy płytowej nie stanowiło o ogólnym mechanizmie zniszczenia ustroju który występował pod znacznie większym obciążeniem. Jest to więc częściowym potwierdzeniem tezy 5.

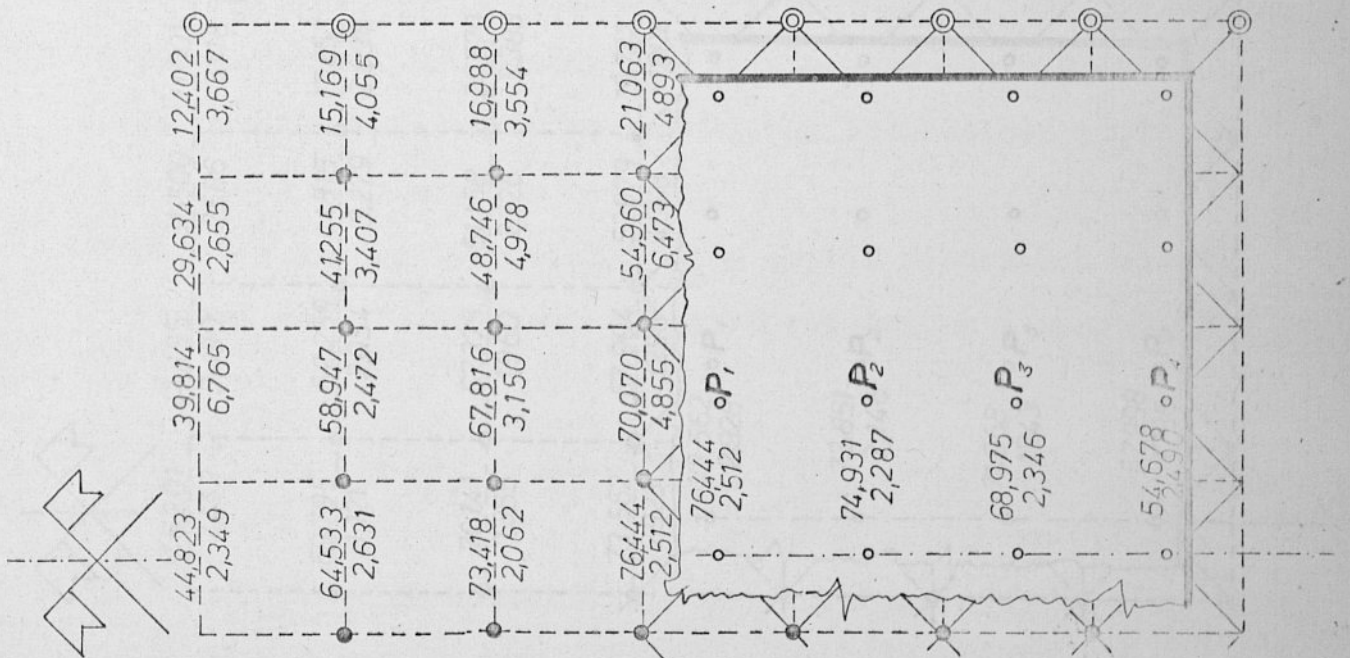
W trakcie badań modeli serii M3 dokonywano pomiarów odkształceń prętów warstwy dolnej, na podstawie których obliczono siły w prętach pasów dolnych /rys. 7.23 + 7.26/. W celu porównania uzyskanych wyników przeliczono parametry sił na obciążenie sumaryczne 360 kG /obciążenie węzła 10kG/. Ponadto wyliczono wielkości sił P_1, P_2, P_3, P_4 w płytowych warstwach zewnętrznych /wyznaczono wielkości sił kontaktowych/ w najbardziej wyiężonych, środkowych pasach warstwy górnej modeli serii M3. Przeliczenia dokonano korzystając z warunków

Rys. 7.28a równowagi sił. Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 7.28a + 7.28d + 7.28d.

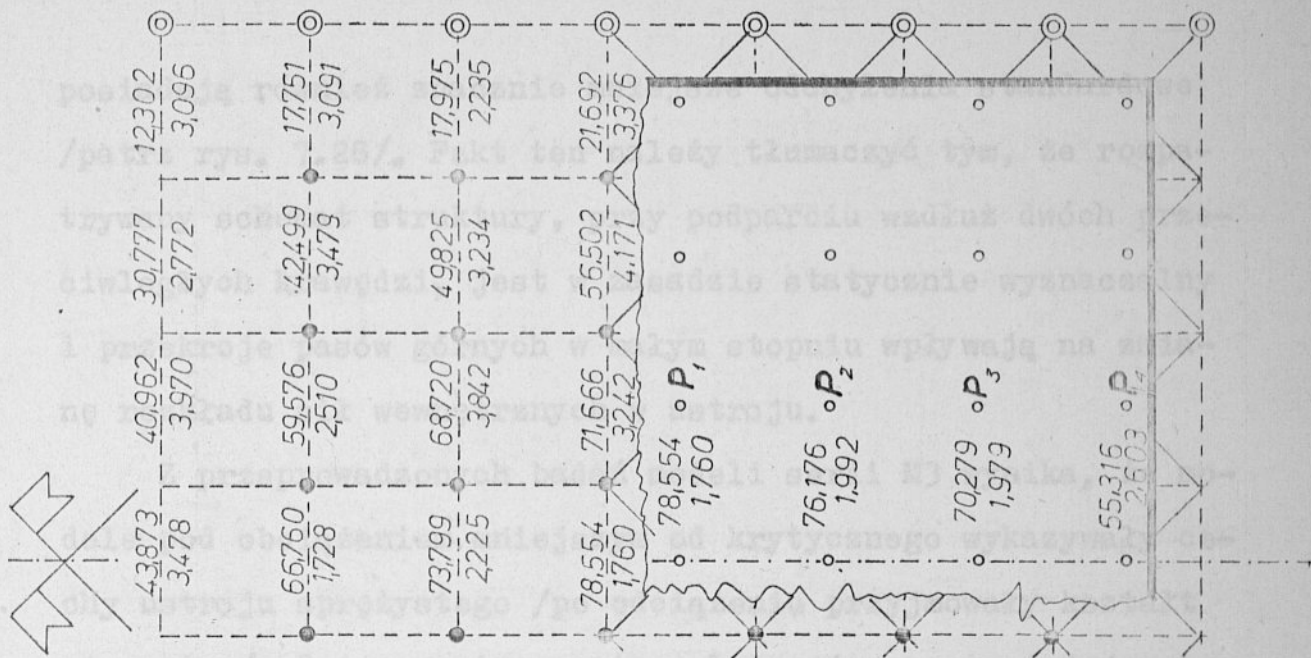
Dokonując analizy uzyskanych wyników /rys. 7.28/ widzimy, że parametry sił modeli M3.0,5.II, obciążonych obciążeniem 36,0 kG, przeliczone są na obciążenie sumaryczne 360,0 kG różnią się znacznie /dla sił maksymalnych około 21 %/ od sił w modelach M3.0,8.II, M3.1,0.II i M3.1,5.II. Parametry sił modeli M3.0,5.II posiadają również znacznie większe odchylenia standardowe np. dla siły 93,784 kG wynosiło ono 10,649 kG, zaś dla siły 8,854 kG wynosiło ono 6,980 kG. Potwierdza to znany fakt [20], że wstępnemu obciążeniu konstrukcji przestrzennych towarzyszą losowe siły wewnętrzne. Sił tych nie da się wyznaczyć teoretycznie, a zależą one od czynników losowych takich jak: odchyłki wymiarowe konstrukcji, niedokładności montażu, losowe obciążenie konstrukcji, itp. Parametry sił modeli M3.0,8.II, M3.1,0.II i M3.1,5.II przeliczone na obciążenie sumaryczne 360,0 kG nie różnią się bardzo między sobą /dla sił maksymalnych do 6 %/ mimo iż modele posiadały różne grubości warstwy płytowej. Parametry tych sił



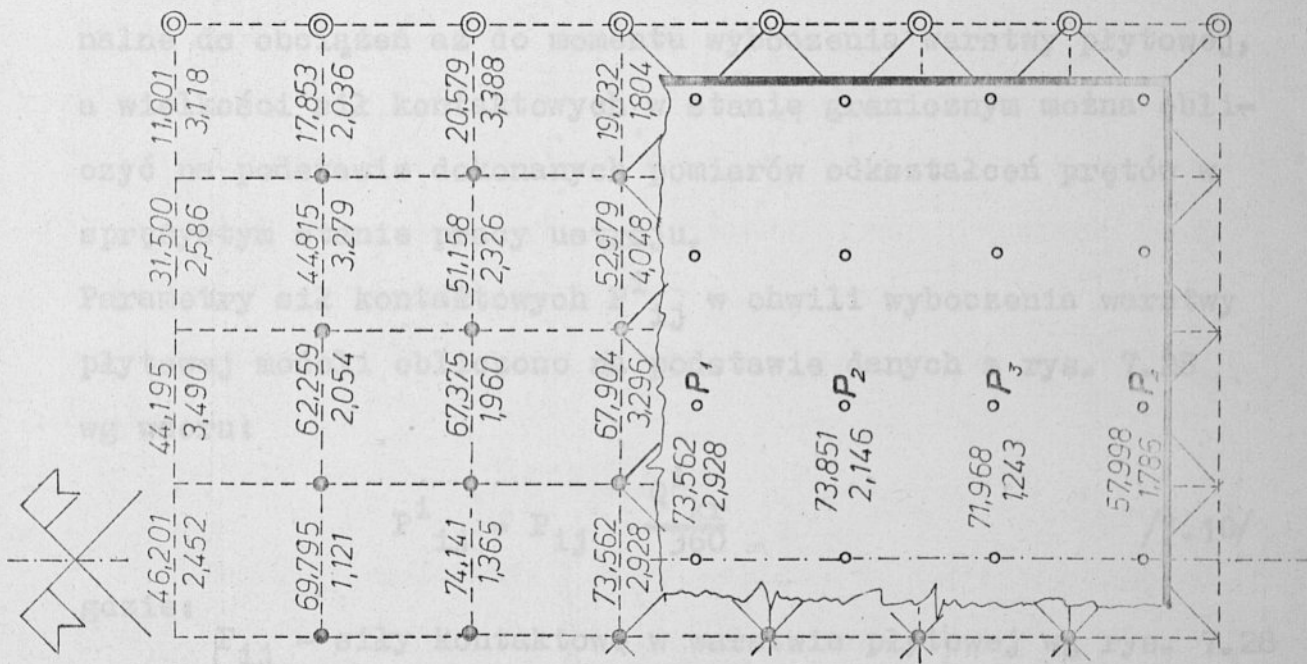
Rys.7.28a. Parametry sił w modelu M3.0,5.II dla obciążenia sumarycznego 360 kg



Rys.7.28b. Parametry sił w modelu M3.0,8.II dla obciążenia sumarycznego 360,0 kg.



Rys.7.28d. Parametry sił w modelu M3.1,0.II dla obciążenia sumarycznego $P = 360,0 \text{ kg}$



Rys.7.28d. Parametry sił w modelu M3.1,5.II dla obciążenia sumarycznego $P = 360,0 \text{ kg}$

posiadają również znacznie mniejsze odchylenia standardowe /patrz rys. 7.28/. Fakt ten należy tłumaczyć tym, że rozpatrywany schemat struktury, przy podparciu wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, jest w zasadzie statycznie wyznaczalny i przekroje pasów górnych w małym stopniu wpływają na zmianę rozkładu sił wewnętrznych w ustroju.

Z przeprowadzonych badań modeli serii M3 wynika, że modele pod obciążeniem mniejszym od krytycznego wykazywały cechy ustroju sprężystego /po odciążeniu przyjmowały kształt pierwotny/. Zniszczenie warstwy płytowej w postaci jej wyboczenia następowało nagle, a ugięcia warstwy płytowej posiadały charakter trwałe. Wyboczenie warstwy płytowej posiadało cechy klasycznego przypadku wyboczenia niesprężystego [44].

Założono, że wielkości sił w strukturze były proporcjonalne do obciążeń aż do momentu wyboczenia warstwy płytowej, a wielkości sił kontaktowych w stanie granicznym można obliczyć na podstawie dokonanych pomiarów odkształceń prętów w sprężystym stanie pracy ustroju.

Parametry sił kontaktowych P_{ij}^i w chwili wyboczenia warstwy płytowej modeli obliczono na podstawie danych z rys. 7.28 wg wzoru:

$$P_{ij}^i = P_{ij} \frac{Q_{kr}^i}{360} \quad /7.10/$$

gdzie:

P_{ij} - siły kontaktowe w warstwie płytowej wg rys. 7.28

Q_{kr}^i - obciążenie graniczne i-tego modelu wg tabl. 7.3.

W ten sposób obliczone wyboczeniowe siły kontaktowe podzielono przez $\pi^2 D_i / a$; D_i - sztywność płytowa blachy użytej do budowy modelu "i", a - wielkość oczka warstwy płytowej. W myśl wzorów opisujących obciążenie krytyczne płyt obciążonych siłami skupionymi:

$$P_{kr} = \gamma^* \frac{\pi^2 D}{a} \quad /7.11/$$

uzyskano w ten sposób wartości współczynników γ^*_i . /Z uwagi na smukłość badanych blach $\lambda = a/g > 110$, sztywność płytową D_i obliczono na podstawie modułu sprężystości podłużnej E [44] tzw. modułu początkowego/. Wyżej opisanych obliczeń

Tabl. 7.4

Rys. 7.29

dokonano w tablicy 7.4, a uzyskane wyniki w postaci wykresu γ^*_i / g przedstawiono na rys. 7.29.

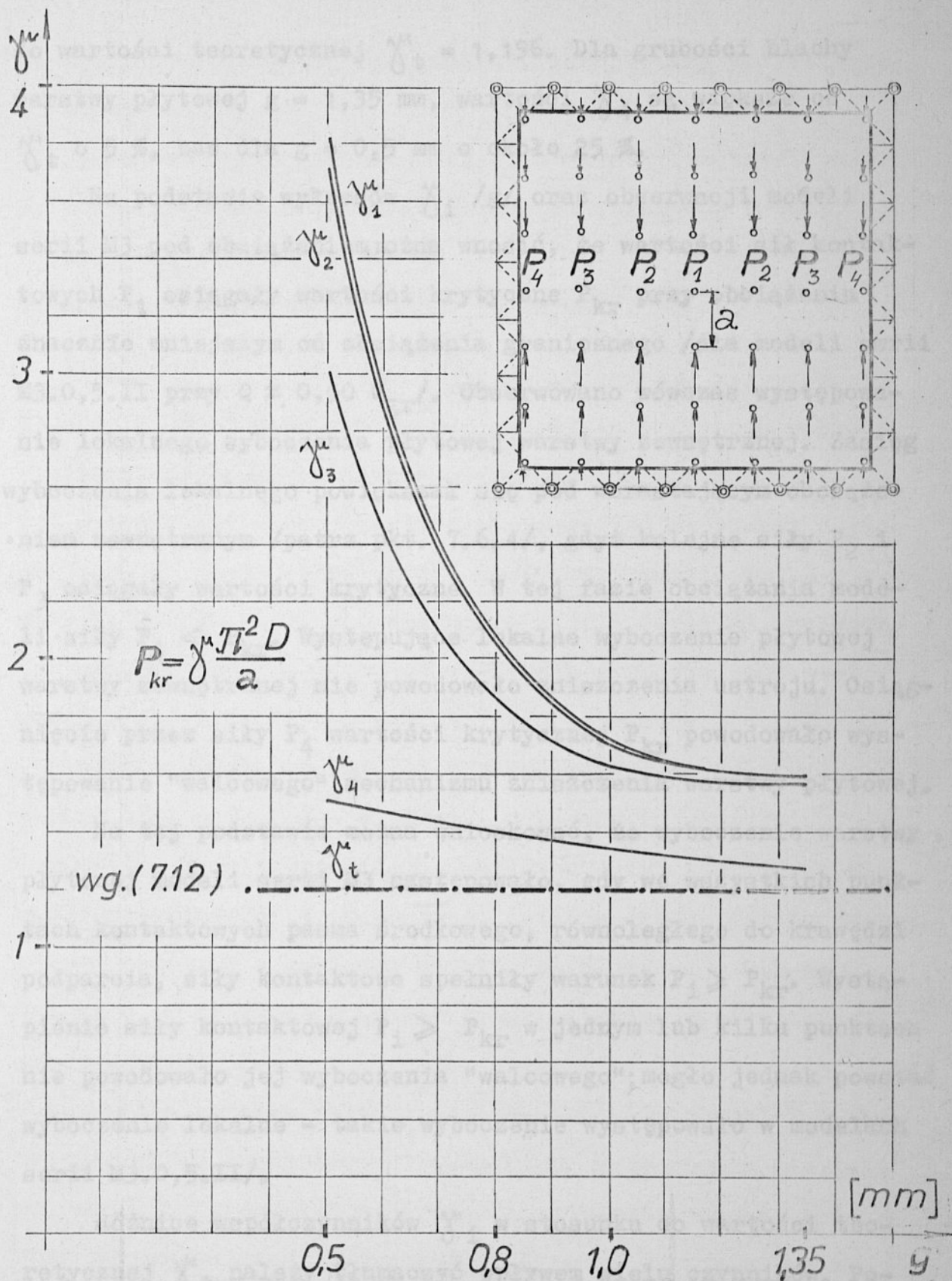
W celu porównania uzyskanych wyników z rozwiązaniami teoretycznymi obliczono obciążenie krytyczne belki zastępczej o sztywności $EJ = D \cdot a$. Belka sześcioprzęsłowa ściszana jest siłą P w przęsłach środkowych, siłą $0,5 P$ w przęsłach skrajnych i siłą $0,833 P$ w pozostałych przęsłach /taki rozkład obciążeń osiowych występował w warstwie płytowej modeli serii M3/. Obciążenie krytyczne dla tak obciążonej belki wynosi:

$$P_{kr} = 1,196 \frac{\pi^2 D}{a} \quad /7.12/$$

Z analizy wykresów γ^*_i / g wynika, że wartości wszystkich sił kontaktowych P_i w stanie granicznym były większe od wartości krytycznej wg /7.12/, przy czym siły kontaktowe P_1, P_2, P_3 były większe od P_4 . W pasmach obciążonych siłami P_4 , współczynniki γ^*_4 w stanie granicznym były bardzo zbliżone

Tablica 7.4. Analiza wyników badań modeli serii M3

modelu	Nr modelu	Q_{kr} [kG]	$D_i = \frac{Eg^2}{12(1-\nu^2)}$	Wyboczeniowe siły kontaktowe P_{kri}				Współczynniki wyboczeniowe γ_i			
				P_{kr1} [kG]	P_{kr2} [kG]	P_{kr3} [kG]	P_{kr4} [kG]	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M3.05.II	1.	60,36	67,306	18,371	18,117	14,391	7,231	4,148	4,090	3,249	1,633
	2.	60,86		18,384	18,130	14,401	7,236	4,151	4,094	3,252	1,634
	3.	75,38	83,865	19,637	19,366	15,383	7,730	3,559	3,510	2,788	1,401
	4.	69,01		17,978	17,729	14,083	7,076	3,258	3,123	2,552	1,282
	5.	102,13		26,606	26,238	20,842	10,473	3,839	3,786	3,007	1,511
M3.08.II	1.	216,26	369,85	45,921	45,035	41,435	32,846	1,887	1,849	1,703	1,349
	2.	215,60		44,781	44,875	41,302	32,746	1,881	1,844	1,697	1,345
	3.	244,13	383,24	51,840	50,814	46,775	37,079	2,055	2,015	1,855	1,470
	4.	227,75		48,361	47,404	43,636	34,550	1,918	1,880	1,730	1,372
	5.	248,14		52,691	51,648	47,542	37,688	2,043	2,002	1,843	1,461
M3.10.II	1.	369,04	618,38	80,526	78,089	72,044	56,705	1,979	1,919	1,771	1,394
	2.	363,34		79,283	76,883	70,931	55,829	1,948	1,889	1,743	1,372
	3.	334,11	538,61	72,904	70,698	65,225	51,337	2,057	1,994	1,840	1,448
	4.	349,04		76,162	73,857	68,139	53,632	2,149	2,084	1,923	1,513
	5.	301,49		65,784	63,795	58,857	46,320	1,861	1,805	1,665	1,310
M3.15.II	1.	954,81	1830,7	195,10	195,87	190,28	153,82	1,619	1,626	1,584	1,277
	2.	950,74		194,27	195,04	190,06	153,17	1,613	1,619	1,578	1,271
	3.	986,95	1936,9	201,67	202,46	197,30	159,00	1,582	1,588	1,548	1,247
	4.	1004,66		205,49	206,09	200,84	161,84	1,612	1,617	1,576	1,269
	5.	989,11		202,11	202,92	197,73	159,35	1,592	1,598	1,558	1,255



Rys.7.29 Wykresy współczynników wyboczeniowych γ_μ/E'

do wartości teoretycznej $\gamma_t^* = 1,196$. Dla grubości blachy warstwy płytowej $g = 1,35$ mm, wartości γ_4^* są większe od γ_t^* o 5 %, zaś dla $g = 0,5$ mm o około 25 %.

Na podstawie wykresów $\gamma_i^* / g /$ oraz obserwacji modeli serii M3 pod obciążeniem można wnosić, że wartości sił kontaktowych P_1 osiągały wartości krytyczne P_{kr} przy obciążeniu znacznie mniejszym od obciążenia granicznego /dla modeli serii M3.0,5.II przy $Q \approx 0,50 Q_{gr} /$. Obserwowano wówczas występowanie lokalnego wyboczenia płytowej warstwy zewnętrznej. Zasięg wyboczenia lokalnego powiększał się pod wzrastającym obciążeniem zewnętrznym /patrz pkt. 7.6.4/, gdyż kolejne siły P_2 i P_3 osiągały wartości krytyczne. W tej fazie obciążania modeli siły $P_4 \ll P_{kr}$. Występujące lokalne wyboczenie płytowej warstwy zewnętrznej nie powodowało zniszczenia ustroju. Osiągnięcie przez siły P_4 wartości krytycznej P_{kr} powodowało występowanie "walcowego" mechanizmu zniszczenia warstwy płytowej.

Na tej podstawie można wnioskować, że wyboczenie warstwy płytowej modeli serii M3 następowało, gdy we wszystkich punktach kontaktowych pasma środkowego, równoległego do krawędzi podparcia, siły kontaktowe spełniły warunek $P_i \geq P_{kr}$. Wystąpienie siły kontaktowej $P_i \geq P_{kr}$ w jednym lub kilku punktach nie powodowało jej wyboczenia "walcowego"; mogło jednak powstać wyboczenie lokalne - takie wyboczenie występowało w modelach serii M3.0,5.II/.

Różnice współczynników γ_i^* w stosunku do wartości teoretycznej γ_t^* należy tłumaczyć wpływem wielu czynników. Podzielono je na cztery grupy:

1. wpływ krzywizny płytowej warstwy zewnętrznej pod obciążeniem;
2. wpływ wstępnego, losowego ugięcia warstwy płytowej;
3. wpływ sztywności połączeń elementów struktury przestrzennej;
4. ingerencja innych czynników losowych.

Różnice γ_4 w stosunku γ_t , sięgające dla modeli serii M3.0,5.II 25,0 %, należy przede wszystkim tłumaczyć wpływem krzywizny płytowej warstwy zewnętrznej pod obciążeniem.

Pod wpływem obciążeń zewnętrznych poszczególne punkty płytowej warstwy zewnętrznej modeli doznawały przemieszczeń pionowych. Jak wykazały pomiary ugięć modeli serii M3, największe ugięcia warstwy płytowej wystąpiły w środku rozpiętości modeli, zaś najmniejsze wzdłuż linii podparcia modeli. Ponadto ugięcia modeli wzdłuż linii równoległych do krawędzi podparcia były największe w środku, a malały ku krawędziom niepodpartym. Największe różnice amplitud ugięć punktów na krawędzi niepodpartej w stosunku do ugięć w środku modelu wystąpiły w modelach o grubości warstwy płytowej $g = 0,5$ mm. Tak więc, w sprężystym stanie pracy ustroju, oprócz ugięcia walcowego malejącego w kierunku krawędzi podparcia modeli, występowało ugięcie walcowe warstwy płytowej o amplitudach malejących ku krawędziom niepodpartym. Wytworzenie się fali walcowej, prostopadłej do krawędzi podparcia modelu, powodowało znaczne wzmocnienie warstwy płytowej, gdyż przekrojem ściskany była powłoka walcowa, a nie płyta tworząca płaszczyznę horyzontalną. Wzrastające pod obciążeniem ugięcia warst-

wy płytowej powodowały zwiększenie krzywizny powłoki walcowej, a więc jeszcze większe wzmocnienie ustroju /wzmocnienie miało charakter "śledzący"/. Opisane wyżej zjawisko należy zaliczyć do czynników systematycznie zwiększających nośność ustroju. Wpływ krzywizny płytowej warstwy zewnętrznej pod obciążeniem charakteryzuje się większą od zera wartością przeciętną. Największe wzmocnienie dźwigarów wystąpiło dla modeli o grubości warstwy płytowej $g = 0,5$ mm w których krzywizna powłoki walcowej była największa.

Drugim ważnym czynnikiem wpływającym na różnice γ_i w stosunku do γ_t są wstępne, losowe ugięcia płytowej warstwy zewnętrznej. Wstępne, losowe ugięcia warstwy płytowej dźwigarów strukturalnych mogą spowodować osłabienie lub wzmocnienie ustroju. Największe wstępne, losowe ugięcia warstwy płytowej wystąpiły w modelach serii M3.0,5.II. Blachy użyte do budowy tych modeli posiadały wstępne ugięcia rzędu grubości warstwy płytowej.

Następnym czynnikiem mającym wpływ na nośność ustroju w stanie granicznym jest sztywność połączeń elementów w węzłach struktury. Wpływ sztywności połączenia warstwy płytowej z warstwą środkową /tzw. efekt zamocowania/ stwierdzono zarówno na drodze rozważań teoretycznych /przykłady w rodz. 3/ jak i na drodze doświadczalnej /patrz rys. 7.15/. Sztywne połączenia warstwy zewnętrznej z warstwą środkową w stanie granicznym wymagają znacznie większych obciążeń od połączeń przegubowych obu warstw. Podobnie sztywne połączenia warstwy dolnej z warstwą środkową dają pewną rezerwę nośności. W stanie granicznym, gdy płytowa warstwa zewnętrzna ulega wyboczeniu,

aby z ustroju wytworzył się mechanizm, musi być pokonana sztywność połączeń krzyżulców i pasów dolnych w węzłach dolnych dźwigarów. W przypadku przegubowych połączeń elementów warstwy dolnej z warstwą środkową taka rezerwa nośności nie istnieje /w stanie granicznym przegubowe połączenia nie przeciwdziałają zniszczeniu ustroju/.

W badaniach doświadczalnych starano się wyeliminować wpływ sztywności połączeń elementów w węzłach, stosując odpowiednie zabiegi konstrukcyjne. Połączenia warstwy płytowej z warstwą środkową wykonano na jedną śrubę M3. Spłaszczone końcówki krzyżulców i pasów dolnych łączono w węzłach również za pośrednictwem jednej śruby M3.

Jako inne czynniki losowe należy wymienić: losowe odchyłki geometryczne $/a = a / \omega /$, $F = F / \omega /$, rozproszenie własności mechanicznych elementów struktury $/E = E / \omega /$, $\nu = \nu / \omega /$, losowe odchyłki od symetryczności obciążenia dźwigara oraz odchyłki usytuowania podpór. Wyżej wymienione czynniki losowe oraz wstępne, losowe ugięcia warstwy płytowej charakteryzują się zerową wartością przeciętną.

8. WNIOSKI

Przeprowadzone rozważania teoretyczne oraz badania modelowe struktur przestrzennych z płytową warstwą zewnętrzną pozwalają sformułować następujące wnioski, które podzielono na IV grupy:

I. Struktury przestrzenne z rozciąganą płytową warstwą zewnętrzną

1. Zastosowanie płytowej warstwy zewnętrznej w strefie rozciąganej struktur przestrzennych jest technicznie uzasadnione. W takim przypadku nie wchodzi w rachubę utrata stateczności warstwy płytowej, a warstwa zewnętrzna przenosi oprócz obciążeń kontaktowych /stycznych lokalne obciążenia poprzeczne/.
2. W przypadku zastosowania warstwy płytowej w strefie rozciąganej struktury, obciążonej w węzłach, stan graniczny warstwy płytowej jest determinowany przez uplastycznienie krytycznego zbioru obszarów warstwy zewnętrznej wokół punktów kontaktowych z warstwą środkową.
3. Uplastycznienie krytycznego zbioru obszarów wokół punktów kontaktowych warstwy płytowej należy ustalić w oparciu o analizę tarczy obciążonej siłami kontaktowymi.
4. Połączenia zewnętrznej, płytowej warstwy rozciąganej z warstwą środkową struktury należy wzmacniać za pomocą blach płaskich lub przez wbudowanie krótkich żeber usytuowanych promiennie wokół punktów kontaktowych.

II. Struktury przestrzenne ze ściskaną płytową warstwą zewnętrzną:

1. W przypadku zastosowania płytowej warstwy zewnętrznej, w strefie ściskanej struktury przestrzennej, warstwa płytowa wchodzi w stan graniczny wskutek jednoczesnego zginania i ściskania. Zjawisko zginania, ściskanej warstwy zewnętrznej, wywołane jest zawsze krzywizną warstwy płytowej spowodowaną ugięciem całego dźwigara pod obciążeniem. Ponadto zginanie warstwy płytowej może wystąpić na wskutek:
 - a/ działania obciążeń poprzecznych, przyłożonych poza węzłami /np. obciążenie wiatrem, śniegiem/;
 - b/ nieosiowego obciążenia warstwy płytowej siłami kontaktowymi /mimośrodowo konstrukcyjne/;
 - c/ wystąpienia wstępnych ugięć losowych bądź technologicznych.
2. Wyznaczenie sił wewnętrznych w warstwie płytowej, o schemacie płyty podpartej punktowo w swym obrębie, obciążonej w swej płaszczyźnie oraz poprzecznie, można przeprowadzić metodę sił /patrz rozdz. 3 + 7/.
3. Omówione w rozdziałach 3 i 6 algorytmy obliczeń numerycznych umożliwiają badanie zagadnień zginania z uwzględnieniem sił osiowych oraz stateczności płyt podpartych i obciążonych punktowo w swym obrębie.
4. Obciążenie graniczne płytowej warstwy zewnętrznej wzrasta wraz ze wzrostem ilości punktów kontaktowych warstwy zewnętrznej z warstwą środkową /patrz przykłady w rozdz. 3/.

5. Sztywność połączenia warstwy zewnętrznej z warstwą środkową posiada istotny wpływ na wartość obciążenia krytycznego warstwy płytowej. Sztywne połączenia warstwy płytowej, z posiadającymi rezerwy nośności krzyżulcami struktury, wpływają na zwiększenie obciążeń krytycznych /w stosunku do obciążeń krytycznych w przypadku połączeń przegubowych/.
Efekt zamocowania warstwy zewnętrznej w warstwie środkowej stwierdzono zarówno na drodze rozważań teoretycznych /patrz przykłady w rozdziale 3/ jak i na drodze badań modelowych /patrz rys. 7.15/.
6. Zmniejszenie sztywności warstwy środkowej /zwiększenie podatności sprężystych podpór punktowych w przyjętym schemacie rys.1.10/ powoduje zmniejszenie obciążenia krytycznego płytowej warstwy zewnętrznej /patrz przykłady w rozdziale 3/.
7. Występujące w stanie granicznym przemieszczeniowe mechanizmy zniszczenia płytowych warstw zewnętrznych są trudne do określenia na drodze rozważań teoretycznych. Należy je poszukiwać na drodze badań modelowych w sposób pokazany w rozdziale 7.
8. Przeprowadzone badania modelowe potwierdziły techniczną możliwość określania mechanizmów zniszczenia warstw płytowych według zaproponowanych rozwiązań konstrukcyjnych struktur przestrzennych.
9. Na drodze badań modelowych stwierdzono, że podstawowym mechanizmem zniszczenia płytowej, nieuźebrowanej warstwy zewnętrznej rozważanych struktur, obciążonych symetrycznie w węzłach, jest "walcowy" mechanizm zniszczenia. Zaobserwowane w trakcie badań inne mechanizmy zniszczenia można uzyskać przez superpozycję "walcowych" mechanizmów zniszczenia.

10. "Walcowy" mechanizm zniszczenia warstwy płytowej polega na wystąpieniu fal walcowych, o liniach przegięcia biegnących wzdłuż punktów kontaktowych warstwy zewnętrznej z warstwą środkową. Występuje on nagle mimo, że nie towarzyszą mu efekty dźwiękowe. "Walcowy" mechanizm zniszczenia warstwy płytowej wystąpił w strukturze przestrzennej obciążonej symetrycznie w węzłach.
11. W strukturze przestrzennej podpartej na obwodzie obciążonej symetrycznie w węzłach, występuje w stanie granicznym mechanizm zniszczenia polegający na superpozycji dwóch wzajemnie prostopadłych, "walcowych" powierzchni zniszczenia. Zjawisko zniszczenia warstwy płytowej poprzedza wystąpienie dwóch wzajemnie prostopadłych, walcowych sfalowań płyty. Mechanizm zniszczenia ustroju występuje, gdy prostopadłe fale walcowe połączą się. Powstający mechanizm zniszczenia dla rozważanego przypadku podparcia i obciążenia dźwigara jest superpozycją dwóch powierzchni "walcowych", jednak różni się on nieco od pokazanego na rys. 1.7.
12. W strukturze przestrzennej podpartej w czterech narożach, obciążonej symetrycznie w węzłach, występuje w stanie granicznym mechanizm zniszczenia polegający na superpozycji dwóch "walcowych" powierzchni zniszczenia. Mechanizm zniszczenia ustroju powstaje nagle i polega na wytworzeniu się wzdłuż osi symetrii struktury fali walcowej o stałej amplitudzie.

13. W ogólnym przypadku podparcia i obciążenia rozważanych struktur przestrzennych, można spodziewać się wystąpienia w stanie granicznym mechanizmów zniszczenia warstwy płytowej będących superpozycją "walcowych" powierzchni zniszczenia.
14. Mechanizm zniszczenia płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej może wystąpić w przypadku uszkodzenia wszystkich elementów "krytycznego zbioru żeber". Zjawisko zniszczenia zachodzi nagle i towarzyszą mu efekty dźwiękowe. Poprzedza je lokalne wyboczenie płytowej warstwy zewnętrznej nie stanowiące o zniszczeniu ustroju.
Zaobserwowany mechanizm zniszczenia uźebrowanej warstwy płytowej jest potwierdzeniem tezy 4 i 5. Jednak wyboczenia lokalne poprzedzające zniszczenie żeber nie tworzyło "szachownicy" pokazanej na rys. 1.8.
15. Dla struktury przestrzennej podpartej na obwodzie, obciążonej symetrycznie w węzłach, wszystkie żebra w dwóch wzajemnie prostopadłych pasmach obwodowych stanowiły "krytyczny zbiór żeber".
16. Dla struktury przestrzennej, podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach, obciążonej symetrycznie w węzłach, wszystkie żebra prostopadłe do linii podparcia w jednym paśmie równoległym do krawędzi podparcia dźwigara stanowiły "krytyczny zbiór żeber".
17. W strukturze przestrzennej podpartej w czterech narożach, obciążonej symetrycznie w węzłach, zniszczenie dwóch żeber narożnych warstwy płytowej wywołało zniszczenie ustroju.

18. W ogólnym przypadku podparcia i obciążenia rozważanych struktur przestrzennych należy spodziewać się wystąpienia mechanizmu zniszczenia płytowej, uźebrowanej warstwy zewnętrznej, polegającego na uszkodzeniu wszystkich żeber "krytycznego zbioru żeber".
19. Obciążenia przy których powstają opisane wyżej mechanizmy zniszczenia należy uważać za obciążenia graniczne dla tych dźwigarów z warunku zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej.

III. Siły wewnętrzne w strukturach przestrzennych

1. Badania modeli serii M3 potwierdziły wnioski z [20], że siły wewnętrzne w prętach struktur przestrzennych posiadają znaczne odchyłki od wartości oczekiwanych.
2. Największe odchylenia standardowe sił wewnętrznych od wartości oczekiwanych występują przy małych obciążeniach struktur przestrzennych.
3. W strukturach przestrzennych podpartyach wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi wpływ grubości warstwy płytowej na siły wewnętrzne w prętach jest mały /dla sił maksymalnych do 6,0 %/.

IV. Nośność graniczna struktur przestrzennych, podpartyach wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, obciążonych symetrycznie w węzłach, z warunku zniszczenia płytowej warstwy zewnętrznej.

1. Nośnością graniczną struktur przestrzennych podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, obciążonych symetrycznie w węzłach, z warunku zniszczenia warstwy płytowej, jest równe obciążeniu przy którym występuje "walcowy" mechanizm zniszczenia.
2. "Walcowy" mechanizm zniszczenia występuje, gdy w najbardziej wytężonym paśmie warstwy płytowej, równoległym do krawędzi podparcia struktury, wszystkie siły kontaktowe P_i spełniają warunek $P_i \geq P_{kr}$.
3. Wystąpienie siły kontaktowej $P_i \geq P_{kr}$ w jednym lub kilku punktach pasma, równoległego do krawędzi podparcia struktury, nie powoduje powstania "walcowego" mechanizmu zniszczenia. Może jednak powstać wyboczenie lokalne nie stanowiące o ogólnym mechanizmie zniszczenia ustroju.
4. Wartości teoretycznych obciążeń krytycznych P_{kr} warstwy płytowej, dla struktur podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, należy traktować jako dolne oszacowanie nośności ze względu na ingerencję sztywności połączeń elementów dźwigara w węzłach oraz krzywiznę warstwy płytowej pod obciążeniem.
5. Dla zwiększenia nośności rozważanych struktur przestrzennych, podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, proponuje się nadawać warstwie płytowej wstępne ugięcia walcowe, prostopadłe do krawędzi podparcia.
6. Dolne, krytyczne obciążenie kontaktowe warstwy płytowej struktur przestrzennych, podpartych wzdłuż dwóch przeciwległych krawędzi, obciążonych symetrycznie w węzłach, dąży do wartości eulerowskiej $P_e = \frac{\pi^2 D}{a}$, wraz ze wzrostem liczby oczek dźwigara.

L I T E R A T U R A

- [1] Biegun G.B., Trofimov V.I., Analiza raboty prostranstviennykh stieržnievykh pokrytij regularnogo strojenija, Mietałičeskije konstrukcii, Moskva 1968.
- [2] Biegun G.B. Trofimov V.I., Strukturnyje konstrukcii, Izdatiel'stvo litieratury po stroitel'stvu, Moskva 1972.
- [3] Biegus A., Kowal Z., Kubica E., Rykaluk K., Hale unikatowe o duzych rozpiętościach. Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Nr. 13, Wrocław 1974.
- [4] Birgier I.A., Panovko J.G. Pročnosť, ustoičivost' i kolebanija, Izdatiel'stvo "Mašinostrojenije", Moskva 1968.
- [5] Bleich F., Buckling Strenght of Metal Structure, New York 1952.
- [6] Branicki Cz., Wysiatycki K., Brzowy A., Bezpośrednia metoda analizy zginanych ustrojów tarczowo-żebrowych za pomocą EMC, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Nr 23, 1972.
- [7] Brzoska Z., Stytyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych, PWN, Warszawa 1965.
- [8] Rütner O., Stenker H., Metalleichtbauten, Bd. i, Veb Verlag, Berlin 1971.
- [9] Castillo H., A Space Frame Construction with Steel and Reiforced Concrete - the "Tridilosa" Spatial Structure, 1-st International Conference on Space Structure, University of Surrey, Guilford 1967.

- [10] Chambers W.F., Levy J.C., Jubb J.E.M., A Braced Double-skin Structure, 2-nd International Conference on Space Structure, University of Surrey, Guilford 1975.
- [11] Davies R.M., Space Structure, 1-st International Conference on Space Structure, University of Surrey, Guilford 1967.
- [12] Favre M., Etude de l'influence du poids propre sur la stabilite d'une plaque rectangulaire, Schweitz, Bauzeitung 1/1949.
- [13] Galerkin B.G., Uprugije tonkije plity, Gostiechizdat, Moskva 1947.
- [14] Girkman K., Dźwigary powierzchniowe, Arkady, Warszawa 1957.
- [15] Huber M.T., Teoria sprężystości, PAN, Kraków 1948.
- [16] Kacner A., Pręty i płyty o zmiennej sztywności, PAN, Warszawa 1969.
- [17] Kowal Z., Stateczność ściskanego pasa w dźwigarze blachowym o przekroju skrzynkowym, Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej, Budownictwo XXVIII, Wrocław 1965.
- [18] Kowal Z., Stateczność blachy górnej metalowego fundamentu pontonowego, Węgiel Brunatny, 4/1966.
- [19] Kowal Z., Dźwigary blachowe z uźebrowaniem pionowym i przekątnym, Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej Budownictwo XXI Nr. 97, Wrocław 1964.

- [20] Kowal Z., Seidel W., An Attempt of Measurement of Random Internal Forces in Bars of a Regular Space Structure, 2-nd International Conference on Space Structure, University of Surrey, Guilford 1975.
- [21] Kmiecik M., Wpływ geometrii ugięć początkowych na wytrzymałość osiowo ściskanych płyt okrętowych, Budownictwo Okrętowe nr 5, 6, Gdańsk 1967.
- [22] Kubica E., Stan graniczny piramidy tarczowej jako elementu strukturalnej konstrukcji warstwowej, praca doktorska, Komunikat Instytutu Budownictwa Nr. I-2/K-19/73.
- [23] Kusgen H., Räumliche Tragwerke für Gebäude mit Installationsgeschossen, 1-st International Conference on Space Structure, University of Surrey, Guilford 1967.
- [24] Makowski S.Z., Raumliche Tragwerke aus Stahl. Düsseldorf 1963.
- [25] Marek P., Studnicka J., Netradiční navrh ocelove strešni konstrukce, Pozemni Stavby 12/1971.
- [26] Martini L., Płaskie zagadnienia teorii sprężystości ciała poddanego działaniu sił skupionych. Biblioteka Mechaniki Stosowanej IPPT PAN, PWN, Warszawa 1957.
- [27] Mazurkiewicz Z., Buckling, Vibration und Bending of Rectangular Simply Supported Plate Arbitrarily Loaded and Subjected to Mass Forces Action, Bulletin de L'Academie Polonoise Des Sciences Technicanes Vol. 3/1961.

- [28] Mendera Z., Zagadnienie stanów granicznych konstrukcji stalowych, Budownictwo Lądowe, Politechnika Krakowska, Zeszyty Naukowe Nr 7, Kraków 1969.
- [29] Lewe Y., Die Lösung des Pilzdecken problems durch Fourierreihen, Bauing 1, 37, 1920.
- [30] Nowacki W., Jednoczesne zginanie i ściskanie pewnego typu płyt ciągłych. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1/1949.
- [31] Nowacki W., O pewnym szczegółowym przypadku wyboczenia płyt, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 2/1, 1950.
- [32] Nowacki W., Drganie własne i wyboczenie płyt prostokątnych podpartych swobodnie na obwodzie i punktowo w obrębie płyty. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 3/V, 1953.
- [33] Nowacki W., Stateczność płyt prostokątnych wzmocnionych żebrami. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 2/VI, 1954.
- [34] Nowacki W., Zagadnienie statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 4/VI, 1954.
- [35] Reipert Z., Application of Simple Functional Series to the Solution of Problemes Concernig Statice, Stability and Vibration of Plates Having Non - Typical Forms, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 15/5, 1963.
- [36] Reipert Z., Szeregi Fouriera o wyrazach spełniających rozmaite warunki brzegowe, Archiwum Inżynierii Lądowej 13/3, 1967.
- [37] Rutecki J., Cienkościenne konstrukcje nośne, PWN, Warszawa 1966.

- [38] Rykaluk K., Praktyczna postać ogólnego rozwiązania tarczy jednospójnej, MT i S, 4/10, 1972.
- [39] Steinhaus H., Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów. PWN, Warszawa - Wrocław 1971.
- [40] Strelecki N.S. i inni., Konstrukcje stalowe, Arkady, Warszawa 1957.
- [41] Szelaḡowski F., Działanie siły skupionej na tarczę nieograniczoną za pośrednictwem pręta sztywnego o przekroju kołowym, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 3/2, 1952.
- [42] Szelaḡowski F., Tarcza kołowa pod wpływem działania siły skupionej i obciążenia ciągłego, Rozprawy inżynierskie, 6/1, 1958.
- [43] Timoshenko S., Wojnowsky - Krieger S., Teoria płyt i powłok. Arkady, Warszawa 1962.
- [44] Timoschenko S., Yere J.M., Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963.
- [45] Trofimov., Bol'sherazmiernyje alumunievyye błoki dla pokrytij promyšlennykh zdaniij. Promyšlennoje stroitel'stvo, 10/1972.
- [46] Ugodčikow G., Długač M.I., Stiepanov A.E., Rešenije krajevych zadač płaskoj teoriii uprugostii na cyfrowych i analogowych mašinach, Moskva 1970.
- [47] Walczak W., O pewnym przypadku utraty stateczności płyty prostokątnej obciążonej siłami skupionymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Mechanika 4/10, Łódź 1956.

- [48] Wojnowsky-Krieger., Uber die Stabilität punktweise
ausgesteifter Rechteckplatten, Ing.-Arch, 1952.
- [49] Wysiadycki K., Zastosowanie elementów skończonych do
analizy statycznej lekkich jezdni mostowych. XVI Konfe-
rencja Komitetu Inżynierii PAN i Komitetu Nauki PZITB,
Krynica 1970.
- [50] Zubrzycki S., Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i
statystyki matematycznej, PWN, 1970.
- [51] Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych. Arkady,
Warszawa 1972.