

Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii PRE nr 3/82

PRZESTRZENNE DRGANIA MOSTU WISZĄCEGO
WYWOŁANE
RUCHOMYM OBCIĄŻENIEM INERCYJNYM

Danuta Bryja

Praca doktorska

Promotor: Prof.dr hab.inż.Jan Langer

Słowa kluczowe: most wiszący, obciążenie ruchome, drgania liniowe, drgania nieliniowe

Od stycznia 1981 roku praca realizowana w ramach problemu węzłowego PW 05.12, temat 14.3

Wrocław 1982

Panu Profesorowi Janowi Langerowi
składam serdeczne podziękowanie
za cenne rady i wskazówki udzielone
mi w czasie wykonywania niniejszej
pracy

SPIS RZECZY

	Str.
1. WSTĘP	4
2. ROZWÓJ TEORII DRGAŃ MOSTÓW WISZĄCYCH	7
2.1. Metody analizy drgań własnych	7
2.2. Modele i metody stosowane w analizie drgań wymuszonych	10
3. TEORIA PRZESTRZENNYCH DRGAŃ MOSTU WISZĄCEGO POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM	18
3.1. Model teoretyczny mostu	18
3.2. Różniczkowo-całkowe równania równowagi dyna- micznej	20
3.3. Metoda rozwiązywania problemu przestrzennych drgań nieliniowych	27
3.4. Dyskretyzacja obiektu w przestrzeni geometrycz- nej	29
3.5. Model obciążenia ruchomego	34
3.6. Macierzowe równanie ruchu układu pojazdy+przeszło	40
3.7. Metoda numerycznego całkowania równań	48
3.8. Opis stanu przemieszczenia i stanu naprężenia w wybranych elementach mostu	51
4. INNE ZASTOSOWANIA SFORMUŁOWANEJ TEORII	60
4.1. Zagadnienie własne	60
4.2. Pionowe nieliniowe drgania mostu pod ruchomym obciążeniem inercyjnym	63
4.3. Nieresorowany model obciążenia ruchomego	64
4.4. Obciążenie w postaci zbioru ruchomych sił skupio- nych	67
5. PRZYKŁAD NUMERYCZNEJ REALIZACJI ALGORYTMU	69
5.1. Opis programów na EMC	69
5.2. Charakterystyki liczbowe obiektu i obciążenia	72
5.3. Analiza wyników obliczeń	75
6. PODSUMOWANIE	101
LITERATURA	104

1. WSTĘP

Ocena dynamicznej pracy mostów wiszących ma istotne znaczenie w projektowaniu tych konstrukcji. Spowodowane jest to większą, niż w przypadku innych mostów, wrażliwością na dynamiczne oddziaływania obciążeń. Większość opracowań naukowych z zakresu dynamiki mostów wiszących dotyczy zagadnień aerodynamicznych. Zostały one zbadane teoretycznie i eksperymentalnie w stopniu pozwalającym na zapewnienie bezpieczeństwa projektowanej konstrukcji [20]. Znacznie mniej jest rozpoznany problem drgań wymuszonych ruchomym obciążeniem użytkowym. W przepisach projektowania mostów wiszących wpływy dynamiczne obciążeń ruchomych są uwzględniane za pomocą wprowadzenia współczynnika dynamicznego, zwiększającego wartość normatywnych obciążeń statycznych [54]. Zależy on wyłącznie od rozpiętości przęsła i w takim ujęciu jest raczej dodatkowym współczynnikiem bezpieczeństwa, a nie współczynnikiem wyrażającym rzeczywisty charakter oddziaływań obciążenia użytkowego. Prowadzi to zwykle do przewymiarowania elementów konstrukcji, a w szczególnych przypadkach może również spowodować obniżenie bezpieczeństwa obiektu. Warunkiem optymalnego projektowania mostów wiszących jest opracowanie efektywnych metod analizy drgań wymuszonych ruchomym obciążeniem użytkowym, z uwzględnieniem charakterystycznych cech konstrukcji i zbliżonych do rzeczywistości warunków działania obciążeń. Problem ten do tej pory nie został rozwiązany w sposób wyczerpujący. Sformułowane teorie oparte są na wielu założeniach upraszczających. Analizuje się proste, zwykle bezmasowe modele obciążenia oraz znacznie odbiegające od rzeczywistości liniowe, najczęściej płaskie modele obiektu.

Celem niniejszej rozprawy było opracowanie teorii przestrzennych, nieliniowych drgań wybranej klasy mostów wiszących, poddanych działaniu ruchomego, resorowanego obciążenia inercyjnego oraz zbudowanie efektywnego, przydatnego w praktyce inżynierskiej, algorytmu analizy dynamicznej.

Algorytm obejmuje jednoprzęsłowe, drogowe mosty wiszące z belką usztywniającą, której model można przyjąć w postaci

cienkościennego dźwigara o otwartym monosymetrycznym przekroju. Metoda sformułowania i rozwiązania problemu jest rozwinięciem idei prac J. Langer'a i własnych, dotyczących statyki i dynamiki mostów wiszących [8,9,27,28,29,31] oraz drgań dźwigarów pod obciążeniem ruchomym [24,26,30].

Różniczkowo-całkowe, nieliniowe równania równowagi dynamicznej mostu wyprowadzono na podstawie teorii cięgna wiotkiego oraz teorii zginania i nieswobodnego skręcania prętów cienkościennych. Uwzględniono wpływ statycznych poprawek drugiego rzędu oraz tłumienie i sprzężenie bezwładnościowe drgań konstrukcji. Ciągły model obiektu zdyskretyzowano w przestrzeni geometrycznej stosując metodę Galerkin'a z globalną kinematycznie i kinetycznie dopuszczalną aproksymacją przestrzennego stanu przemieszczenia. Model obciążenia przyjęto w postaci zbioru lepko-sprężystych oscylatorów, z uwzględnieniem trzech składowych sił inercji masy oscylatora w płaszczyźnie przekroju mostu. Zbiór oscylatorów może być dowolnie specyfikowany w zakresie parametrów masowych i charakterystyk zawieszonych, prędkości i kierunku ruchu, lokalizacji na obiekcie. Sformułowano w jawnej postaci macierzowe równanie ruchu dla sparametryzowanego bezwymiarowo układu most+obciążenie ruchome. Rozwiązanie równania uzyskano za pomocą numerycznego całkowania metodą Newmarka, przy czym wykorzystano numeryczną prognozę nieliniowych parametrów naciągu cięgien, przeprowadzaną według formuł ekstrapolacji parabolicznej. Podano definicje współczynników dynamicznych dla pionowych przesunięć i naciągów cięgien oraz dla składowych stanu przemieszczenia i naprężenia, określonych w dowolnym punkcie dźwigara usztywniającego. Funkcjonowanie i efektywność algorytmu sprawdzono na przykładzie liczbowym. Obliczenia wykonano za pomocą maszyn cyfrowych.

Praca składa się z sześciu rozdziałów. Pierwszym z nich jest niniejszy wstęp. Rozdział 2 zawiera podstawowe informacje z zakresu dynamiki mostów wiszących oraz przegląd literatury ze szczególnym uwzględnieniem pozycji dotyczących drgań własnych i drgań wymuszonych ruchomym obciążeniem użytkowym. W rozdziale 3 opisano model teoretyczny mostu, sformułowano teorię nieliniowych, przestrzennych drgań obiektu i opracowano macierzowy

algorytm analizy dynamicznej mostu obciążonego zbiorem ruchomych mas resorowanych, modelujących tabor drogowy. W kolejnym rozdziale wykazano możliwości zastosowania opracowanego algorytmu do analizy innych zagadnień dynamicznych. Rozważono drgania własne mostu, przypadek płaskiego modelu obiektu oraz inne warianty obciążenia w postaci zbioru mas nieresorowanych i sił skupionych. Rozdział 5 jest poświęcony zagadnieniom numerycznym. Określono sposób oprogramowania algorytmu na EMC, opisano system działania i możliwości ułożonych programów. Wyniki realizacji numerycznej, przeprowadzonej dla przykładowego obiektu mostowego, przedstawiono tabelarycznie i w formie wykresów. Analizowano zbieżność i efektywność przyjętej aproksymacji, dokładność zastosowanych metod obliczeniowych oraz wpływy nieliniowe i przeciążenia dynamiczne obiektu, odpowiadające analizowanej grupie obciążeń. Ostatni rozdział jest podsumowaniem pracy.

2. ROZWÓJ TEORII DRGAŃ MOSTÓW WISZĄCYCH

2.1. Metody analizy drgań własnych

Ruch mostu wiszącego ma specyficzny przestrzenny charakter. Obciążenia eksploatacyjne mostu wywołują pionowe i poziome drgania giętne podwieszanej konstrukcji oraz sprzężone z nimi drgania skrętne. Charakterystyczne dla mostu wiszącego sprzężenia giętno-skrętne wynikają ze szczególnych cech obiektu. Zróżnicowanie w przekroju poprzecznym położenia środka zginania i środka masy powoduje sprzężenie bezwładnościowe drgań poziomych i skrętnych [13,20], natomiast sprzężony ruch pionowo-skrętny jest efektem nieliniowej pracy ciągien [8,44]. Drgania poziome mostu charakteryzują się ponadto specyficznym efektem wahadłowym [20].

Zagadnienie własne mostu wiszącego powinno być rozpatrywane globalnie dla modelu przestrzennego. Pierwsze znane opracowania dotyczyły jednak wyłącznie drgań pionowych. Można je rzeczywiście rozpatrywać niezależnie, jeśli pomija się wpływy nieliniowe, co jest naturalne w przypadku analizy drgań własnych [48]. Z rozeznania literaturowego wynika, że jednym z pierwszych autorów analizy tego problemu był Niełasow [10]. Rozwiązanie zaproponowane przez niego jest obarczone znacznym błędem, spowodowanym pominięciem dynamicznego przyrostu naciągów kabli. Jest to słuszne jedynie w przypadku drgań o formach antysymetrycznych [20,27]. Równanie różniczkowe równowagi dynamicznej można wówczas rozwiązać analitycznie metodą rozdzielania zmiennych z rozwinięciem funkcji ugięcia w szeregi Fouriera. W analogiczny sposób analizował pionowe drgania własne mostu Szelałowski [51].

W 1950 roku ukazała się znana monografia Bleicha [7]. Omówione w [7] rozwiązanie zagadnienia własnego cytują Solecki i Szymkiewicz [49]. Rozpatrują oni drgania pionowe i skrętne mostów jednoprzęsłowych i trójprzęsłowych. W analizie drgań symetrycznych zastosowano metodę Ritza z prostą dwuwyzrazową aproksymacją sinusową funkcji ugięcia i kąta skręcenia. Formuła

określająca dynamiczny przyrost naciągu kabli została wypro-
wadzona z postulatu niezmienniej rozpiętości cięgna. Częstości
drgań antysymetrycznych wyznaczono niezależnie korzystając z
zerowania się dynamicznego przyrostu naciągów. Rozpatrzono
również drgania poziome układu, jednakże częstości określono
jak dla belki swobodnie podpartej, pomijając tym samym efekt
wahadłowy drgań. Wadą omówionego rozwiązania jest założenie
o niezależności drgań poziomych i skrętnych. Upraszcza ono
istotnie zadanie i jest często stosowane przez autorów, np.
w pracach [2,20,48] i in. . Założenie to jest słuszne w przy-
padku bisymetrycznego przekroju dźwigara usztywniającego,
jeśli pomija się dodatkowo wpływ balastu i przyjmuje teore-
tyczne punkty zamocowania wieszaków w poziomej płaszczyźnie
symetrii dźwigara. W pozostałych przypadkach założenie takie
wprowadza błędy jakościowe.

Dość obszerną analizę drgań własnych przeprowadził Bragin
[20]. Analizował układ wstępnie napięty dwiema parami cięgien
- górną i dolną. Stosując metodę Galerkina wyprowadził for-
muły określające częstości pionowych, poziomych i skrętnych
drgań własnych, przy czym pominął wpływ sprzężeń giętno-skręt-
nych. W analizie poziomych drgań mostu uwzględnił w oryginal-
ny sposób efekt wahadłowy, formułując stan równowagi statycz-
nej w konfiguracji przemieszczonej. Natomiast drgania skrętne
obiektu rozpatrzył w sposób uproszczony. Obrót przekroju opi-
sał przez pionowe ugięcie brzegu części jezdnej mostu, podczas
gdy naturalnym przemieszczeniem jest kąt skręcenia. Ponadto
równanie drgań zostało sformułowane według teorii czystego
skręcania de Saint-Venanta. W rzeczywistości belka usztywnia-
jąca mostu doznaje skręcania giętnego, jej przekroje paczą
się i wpływy te powinny być uwzględniane [47]. Tak właśnie
analizowali drgania skrętne Hawranek i Steinhardt w monografii
[14]. Autorzy przyjęli specyficzny model mostu, w którym belka
usztywniająca mostu jest monosymetrycznym dźwigarem o otwartym
profilu cienkościennym. Rozpatrywali pionowe i skrętne drgania
własne układu stosując metodę energetyczną Rayleigha w kla-
sycznej postaci. Jednakże jako biegun charakterystyk geomet-
rycznych oraz biegun redukcji obciążeń i przemieszczeń został

przyjęty środek masy przekroju, co spowodowało pojawienie się już w równaniach statycznych dodatkowych nienaturalnych sprzężeń.

W nowszych pracach dotyczących dynamiki mostów wiszących stosowane są bardziej nowoczesne metody, wykorzystujące elektroniczną technikę obliczeniową. Przykładem jest praca Smirnowa [48], w której dokonano między innymi szczegółowej analizy częstości i form drgań własnych mostu z belką usztywniającą w formie dźwigara cienkościennego o otwartym przekroju bisymetrycznym. Przy założeniu zmiennego rozkładu sztywności dźwigara i równomiernie rozłożonej masy mostu Smirnow wyprowadził równania różniczkowe drgań pionowych i skrętnych, nie analizował jednak drgań poziomych. Dyskretyzację geometryczną obiektu przeprowadził metodą Galerkina, a w przypadku drgań pionowych również własną metodą, w której wykorzystał lokalną aproksymację przemieszczeń w postaci funkcji "daszkowych". Zagadnienie własne rozwiązał numerycznie za pomocą maszyn cyfrowych. Podobnie rozpatrywał pionowe drgania własne Nguyen van Tinh w pracach [18,38]. Smirnow przeprowadził analizę wpływu podstawowych parametrów sztywności i geometrii mostu na częstości i formy drgań pionowych i skrętnych. Zauważył, że dla pewnych wartości parametrów w początkowej strefie widma częstości następuje przegrupowanie form / częstościom o numerach nieparzystych odpowiadają formy antysymetryczne zamiast symetrycznych /. W pewnym obszarze widma następuje wówczas zaburzenie sekwencji form. Zjawisko to szerzej opisano w pracy [27].

Problem drgań skrętnych mostu z cienkościnną belką usztywniającą o zamkniętym profilu rozważał Rużański w [44]. Rozwiązanie uzyskał stosując, podobnie jak Smirnow, metodę Galerkina.

W ostatnich latach ukazały się opracowania, w których analizę drgań własnych przeprowadza się metodą elementów skończonych. Przykładem jest praca Abdel-Ghaffara [1] opisująca skrętne drgania mostów wiszących z podwójnym systemem stężeń poprzecznych, o pełnościennych i kratowych dźwigarach głównych. Autor ten podał dla układu ciągłego formuły bilansu

energetycznego i następnie dokonał metodą elementów skończonych dyskretyzacji obiektu w przestrzeni geometrycznej. Równania ruchu wyprowadził stosując bezpośrednio zasadę Hamiltona. Dodatkowo uwzględnił efekt sztywności skrętnej pylonów, przy czym na podstawie obliczeń stwierdził, że jego wpływ na częstotliwości drgań jest stosunkowo mały. Zastosowanie metody elementów skończonych pozwoliło Abdel-Ghaffarowi opracować jednolity algorytm dla mostów o różnym typie belek głównych / pełnościennie i kratowe /. Zaletą omawianej metody jest właśnie możliwość szerokiej specyfikacji obiektu. Jednak podział ustroju na elementy skończone prowadzi na ogół do znacznej liczby równań, co zmniejsza efektywność numeryczną rozwiązania, zwłaszcza w przypadku inercyjnych obciążeń ruchomych.

2.2. Modele i metody stosowane w analizie drgań wymuszonych

Mosty wiszące podlegają działaniu dwóch zasadniczych typów wymuszeń: oddziaływaniom ruchomego obciążenia eksploatacyjnego oraz wpływom wiatru. Obciążenia te wywołują drgania wymuszone konstrukcji, które w ogólnym przypadku są procesem niestacjonarnym, opisanym złożonymi nieliniowymi równaniami. Ze względu na znaczne trudności matematyczne omawiany problem nie jest do tej pory w pełni rozwiązany. Zazwyczaj dokonuje się szeregu istotnych uproszczeń w zakresie sformułowania modelu teoretycznego obciążenia i obiektu, co pozwala analizować drgania wymuszone jako stacjonarne i liniowe.

Podstawowe problemy aerodynamiki mostów wiszących są rozpatrywane między innymi w monografii [20]. Działanie wiatru zależy od charakteru ruchu strumienia powietrza. W praktyce obliczeniowej rozpatruje się zwykle dwa przypadki: periodyczne porywy wiatru i ruch strumienia ze stałą prędkością. W pierwszym z nich obciążenie wiatrem powoduje wymuszone drgania harmoniczne konstrukcji, przy czym zakres możliwych częstotliwości

wymuszenia jest dostatecznie rozpoznany doświadczalnie. Można więc tak zaprojektować most, aby zabezpieczyć się przed możliwością rezonansu częstościowego. Opływowi mostu strumieniem powietrza o stałej prędkości towarzyszy zrywanie się wirów powietrznych, co wywołuje wibracje w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku działania wiatru. Proces tworzenia się wirów przebiega niesymetrycznie względem osi podłużnej mostu, wobec czego wzbudzeniu ulegają drgania o formach pionowych i skrętnych. Podczas ruchu układu pojawiają się siły aerodynamiczne wywołane przemieszczeniami mostu w strumieniu powietrza. W rezultacie most wykonuje drgania giętno-skrętne, które przy pewnej charakterystycznej dla danego obiektu prędkości wiatru mogą szybko narastać / flutter /, co doprowadza do utraty stateczności konstrukcji. Teoretyczne analizowanie flutteru napotyka znaczne trudności. Wynikają one z konieczności badania warunków stateczności rozwiązania układu nieliniowych, sprzężonych równań różniczkowych, opisujących giętno-skrętne drgania flutterowe mostu. Bragin podał uproszczony sposób wyznaczenia prędkości krytycznej wiatru i częstości flutteru dla mostu wiszącego, którego model przyjął w postaci sprężystości podpartej sztywnej płyty o dwóch stopniach swobody. Ciągły model w formie podwieszonego dźwigara cienkościennego analizował van Tinh w [39]. Liniowe równania flutteru sformułował dla układu zdyskretyzowanego przez aproksymację przemieszczeń sześciennymi szeregami potęgowymi. Charakterystyczne parametry flutteru wyznaczył badając zespolony wyznacznik sformułowanej macierzy przeniesienia.

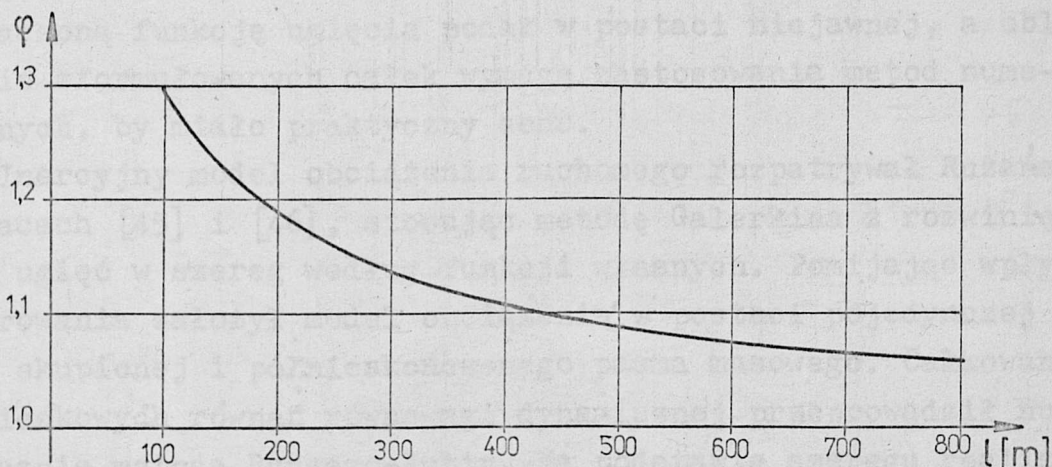
Problemem flutteru zajmowało się również wielu innych autorów, przy czym głównym tematem ich prac są badania modelowe przeprowadzane w tunelach aerodynamicznych. Zestawienie literatury problemu można znaleźć w pracach [35] i [39]. Na podstawie eksperymentów stwierdzono, że znacznie bardziej niebezpieczny dla mostów wiszących jest przypadek tzw. flutteru zrywnego, który powstaje wówczas, gdy kierunek wiatru różni się nieco od kierunku poziomego / flutter klasyczny / [20]. Badania doświadczalne przeprowadzone w tym zakresie są wystarczające dla dokonania oceny bezpieczeństwa konstrukcji. Są

również bardziej miarodajne, niż wyniki obliczeń uzyskiwane na podstawie teorii, która w tym przypadku musi być uproszczona.

Znacznie mniej rozpoznany problemem jest zagadnienie drgań mostów wiszących, wywołanych działaniem ruchomego obciążenia użytkowego. W przypadku mostów drogowych jest to zespół poruszających się pojazdów i pieszych. Zmiany ich położenia są głównym źródłem drgań, przy czym wymuszenie to ma na ogół charakter niestacjonarny. Dodatkowe efekty dynamiczne są wywoływane drganiami resorowanego nadwozia pojazdów, wzbudzonymi przejazdem po nierówności toru ruchu lub masowym niewyważeniem elementów układu napędowego. Może wówczas wystąpić zjawisko nagłego wzmocnienia drgań obiektu, spowodowanego rezonansem częstościowym. Podobny efekt może być wywołany periodycznie zmiennym obciążeniem w postaci kolumny pieszych idących krokiem marszowym. W normie radzieckiej dotyczącej mostów wiszących podano warunek wykluczający pracę mostu w strefie rezonansowej [54]. Jest to ograniczenie, według którego okres pionowych drgań własnych obiektu nie może mieścić się w przedziale $0,3s \div 0,7s$. Przedział ten ustalono na podstawie doświadczalnie wyznaczonych okresów drgań własnych współczesnych pojazdów. W omawianej normie oddziaływanie dynamicznego obciążenia ruchomego uwzględnia się przez wprowadzenie współczynnika dynamicznego, który dla wszystkich elementów nośnych mostu wyznacza się według wzoru

$$\varphi = 1 + \frac{50}{70+1} , \quad /2.1/$$

gdzie l jest rozpiętością przęsła mostu w metrach. Z zależności /2.1/, zilustrowanej na rys.2.1, wynika, że bardziej podatne na wpływy dynamiczne obciążenia ruchomego są mosty o małych i średnich rozpiętościach. Pionowa sztywność giętna i masa konstrukcji mostów większych rozpiętości są na tyle duże, że efekty dynamiczne wywołane ruchomym obciążeniem użytkowym mogą być mało istotne.



Rys. 2.1

Formuła /2.1/ określająca współczynnik dynamiczny jest bardzo uproszczona i w wielu przypadkach nie odpowiada rzeczywistym oddziaływaniom dynamicznym. Narzucona globalnie dla mostu nie pozwala na analizowanie przeciążeń dynamicznych poszczególnych jego elementów. Ze względu na złożony charakter pracy mostu wiszącego wskazane jest wyznaczanie współczynników dynamicznych na podstawie pełnego dynamicznego rozwiązania obliczonego dla odpowiednio dobranego modelu obiektu i obciążenia. Uzyskanie takiego rozwiązania jest związane z trudnościami spowodowanymi niestacjonarnością obciążenia oraz przestrzennym i nieliniowym typem odpowiedzi konstrukcji.

Problemem tym zajmowało się niewielu autorów, a teorie sformułowane przez nich dotyczą na ogół płaskiego i liniowego modelu obiektu oraz bezmasowego modelu obciążenia [15,17,53]. Przy takich założeniach analizował drgania wymuszone Bragin [20]. Problem obciążenia ruchomego rozwiązał stosując metodę Timoshenki [52]. Sporządził bilans energetyczny mostu i następnie dla założonej, kinematycznie dopuszczalnej aproksymacji ugięć, wyznaczył na podstawie równań Lagrange'a równania ruchu układu. Rozwiązanie w zakresie ugięć określił dla obciążenia w postaci siły lub zbioru sił skupionych, nieruchomych lub poruszających się ze stałą prędkością, stałych lub harmoniczn-

nie zmiennych w czasie. Poważną wadą teorii Bragina jest pominięcie dynamicznego przyrostu naciągów cięgien. Ponadto wyznaczoną funkcję ugięcia podał w postaci niejawnej, a obliczenie sformułowanych całek wymaga zastosowania metod numerycznych, by miało praktyczny sens.

Inercyjny model obciążenia ruchomego rozpatrywał Rużański w pracach [45] i [46], stosując metodę Galerkina z rozwinięciem ugięć w szereg według funkcji własnych. Pomijając wpływ resorowania założył model obciążenia w postaci pojedynczej masy skupionej i półnieskończonego pasma masowego. Całkowanie różniczkowych równań równowagi dynamicznej przeprowadził numerycznie metodą Rungego-Kutty. Na podstawie szeregu realizacji numerycznych algorytmu dokonał analizy wpływu prędkości i masy obciążenia na przemieszczenia i siły wewnętrzne układu. Model teoretyczny rozpatrywany przez Rużańskiego jest bogatszy od modelu zastosowanego przez Bragina. Uwzględnił on wpływ tłumienia oraz wpływ dynamicznego przyrostu naciągów cięgien, lecz tylko w zakresie liniowym. Ponadto w pracy [46] analizował pionowe i skrętne drgania wymuszone mostu z belką usztywniającą w postaci cienkościennego dźwigara o zamkniętym profilu, przy czym pominął wpływ poziomych drgań giętych. Metoda rozwiązania problemu drgań wymuszonych obarczona jest błędem wynikającym z przyjęcia funkcji własnych obiektu w postaci kolejnych sinusów, a więc tak jak dla swobodnie podpartego pryzmatycznego pręta. W rzeczywistości jedynie antysymetryczne formy drgań mają postać dokładnie sinusoidalną. Ponadto całkowanie numeryczne metodą Rungego-Kutty wprowadza zawsze pasożytnicze tłumienie [25], szybko rosnące ze wzrostem kroku całkowania. Konieczność doboru dostatecznie małego kroku zmniejsza efektywność algorytmu. Zastosowanie klasycznego zapisu czyni algorytm mało przejrzystym i utrudnia jego oprogramowanie.

Przestrzenne drgania mostu wiszącego, wywołane ruchem pojazdów o dużych prędkościach badali doświadczalnie na rzeczywistym obiekcie Abdel-Ghaffar i Housner [2]. Stosując nowoczesne urządzenia pomiarowe sprzężone z komputerowym systemem przetwarzania danych dokonali analizy harmonicznej drgań.

Rejestrowano je w tak dobranych punktach pomiarowych, by możliwa była identyfikacja typu formy drgań obiektu. Celem badań było wyznaczenie częstości i form drgań własnych i jedynie w tym zakresie przeprowadzono analizę wyników. W przedziale częstości od 0,0Hz do 3,0Hz zidentyfikowano 16 form pionowych, 11 obrotowych i 10 poprzecznych, przy czym niższym częstościom przyporządkowane były głównie formy pionowe. Na tej podstawie stwierdzono, że główny udział w kształtowaniu dynamicznej odpowiedzi mostu na działanie ruchomego obciążenia użytkowego mają drgania pionowe.

Wpływ geometrycznej nieliniowości związanej z pracą ciągłych mostu wiszącego uwzględniano do tej pory jedynie w zagadnieniach statycznych, sformułowanych w zakresie płaskiego modelu obiektu. Pierwsze rozwiązania zadania nieliniowego uzyskiwano przez analityczne całkowanie różniczkowych równań równowagi [7,48] lub za pomocą metody energetycznej [50]. Ze względu na nieliniowy charakter równań otrzymywano przestępne równanie charakterystyczne, które następnie rozwiązywano stosując metody przybliżone. Rozwiązania takie wymagały prowadzenia pracochłonnych obliczeń. Zastosowanie rachunku macierzowego i elektronicznej techniki obliczeniowej umożliwiło opracowanie bardziej efektywnych metod. Przykładem są prace Smirnowa [48] i Fleminga [12]. Smirnow wyznaczył macierzowe równanie równowagi statycznej mostu dokonując lokalnej aproksymacji przemieszczeń opisanych w dyskretnym zbiorze punktów. Naciągi ciągłych określił formułując równanie deformacji ich osi. Ostateczne rozwiązanie uzyskał metodą kolejnych przybliżeń. Fleming zbudował na podstawie macierzowej metody przemieszczeń komputerowy algorytm, w którym zaproponował przeprowadzenie tzw. "wyważenia" równań równowagi za pomocą iteracji prostej. W tym celu w każdym kroku iteracji wyznacza się stan przemieszczenia ustroju wywołany odpowiednim przyrostem obciążenia i następnie koryguje się współczynniki macierzy sztywności. Kolejne przyrosty obciążenia wynikają z niezrównoważenia zewnętrznych sił czynnych i wewnętrznych reakcji sprężystych ustroju. Globalną macierz sztywności układu wyznaczył przez agregację lokalnych macierzy sztywności

elementów, jak w metodzie przemieszczeń.

Numeryczne metody Smirnowa i Fleminga umożliwiają określenie nieliniowego rozwiązania statycznego dla dowolnego obciążenia użytkowego, ale o ustalonej lokalizacji. Z tego względu nie stanowią dobrej podstawy do analizy dynamicznego wpływu ruchomych obciążeń użytkowych.

Problem nieliniowej dynamicznej odpowiedzi układu belkowo-ciężnowego na działanie nieinercyjnego obciążenia zmiennego w czasie rozpatrywał Rakowski w pracy [41]. Nieliniowe równanie ruchu sformułował metodą elementów skończonych przy założeniu granulacji masy układu w węzłach. Całkowanie numeryczne przeprowadził za pomocą metody stałego przyspieszenia z centralnym punktem kolokacji [25], przy czym założył według [4], że macierz sztywności jest stała w obrębie kroku czasowego i równa zmodyfikowanej macierzy sztywności stycznej. Opracowana na podstawie prac Argyrisa i Angelopoulosa [4] metoda rozwiązania problemu nieliniowego komplikuje algorytm ze względu na konieczność dwukrotnego generowania macierzy sztywności stycznej w każdym kroku. Stosowanie tej metody jest uzasadnione w przypadku nieliniowości geometrycznej spowodowanej dużymi przemieszczeniami układu / np. w siatkach ciężnowych /, natomiast dla specyficznych wpływów nieliniowych w moście wiszącym wystarczającą dokładność można uzyskać za pomocą iteracji prostej. Rakowski podał wektor sił wymuszających w postaci niejawnej, nie definiując bliżej typu obciążenia. W przypadku obciążenia ruchomego realizacja przedstawionego algorytmu wymaga szczególnie dużego nakładu obliczeń, co jest spowodowane zastosowaniem metody elementów skończonych, prowadzącej do znacznego rozmiaru zadania oraz wprowadzeniem zmodyfikowanej macierzy stycznej.

Wobec powyższego problem nieliniowej analizy dynamicznej mostów wiszących poddanych działaniu ruchomego obciążenia użytkowego pozostaje nadal otwarty.

Ważnym, lecz jakościowo odrębnym zagadnieniem jest problem stateczności dynamicznej mostów wiszących. Jak wykazał w [13] Goldenblat, działanie pulsującego harmonicznie obciąż-

żenia może wywołać w moście omawianego typu nie tylko zwykły rezonans częstościowy, lecz również zjawisko rezonansu parametrycznego. Spowodowane jest to nieliniowym charakterem ruchu podwieszanej konstrukcji.

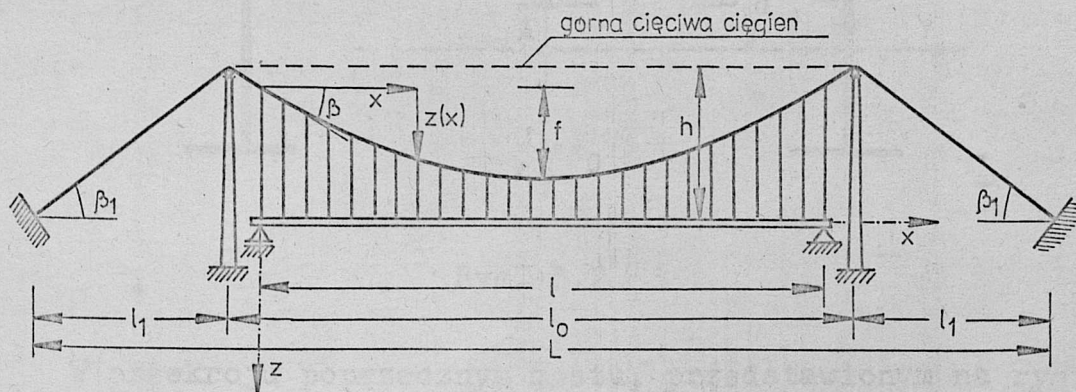
W przypadku inercyjnych obciążeń ruchomych efekt parametryczny może pojawić się niezależnie od nieliniowego opisu obiektu, ponieważ ruch układu jest wówczas zawsze opisany równaniami różniczkowymi o zmiennych współczynnikach. Jakościowe badanie drgań parametrycznych w układach o wielu stopniach swobody jest zadaniem trudnym i do tej pory nie w pełni rozwiązany.



3. TEORIA PRZESTRZENNYCH DRGAŃ MOSTU WISZĄCEGO POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

3.1. Model teoretyczny mostu

Przedmiotem rozważań jest jednoprzęsłowy most wiszący, którego schemat przedstawiono na rys. 3.1. Obiekt jest symetryczny względem pionowej poprzecznej i pionowej podłużnej płaszczyzny. Model części jezdnej mostu przyjęto w postaci swobodnie podpartego, pryzmatycznego dźwigara cienkościennego o otwartym monosymetrycznym przekroju. Sposób podparcia uniemożliwia skręcenie przekrojów przypodporowych, ale jednocześnie zapewnia swobodę ich deplanacji. Przyjęto stały rozkład sztywności dźwigara, przy czym przez EJ_y , EJ_z , GJ_s , EJ_ω oznaczono odpowiednio sztywności na zginanie w kierunkach głównych i czyste skręcanie oraz sztywność wycinkową. Momenty bezwładności J_y , J_z są obliczone względem głównych środkowych osi bezwładności przekroju sprężystego dźwigara. Wycinkowy moment bezwładności J_ω jest wyznaczony względem środka ścinania i głównego punktu zerowego, J_s jest charakterystyką skrętną de Saint-Venanta. Masa belki jest rozłożona równomiernie na długości, a jej intensywność m_p jest sumą masy dźwigara i balastu / nawierzchnia /.

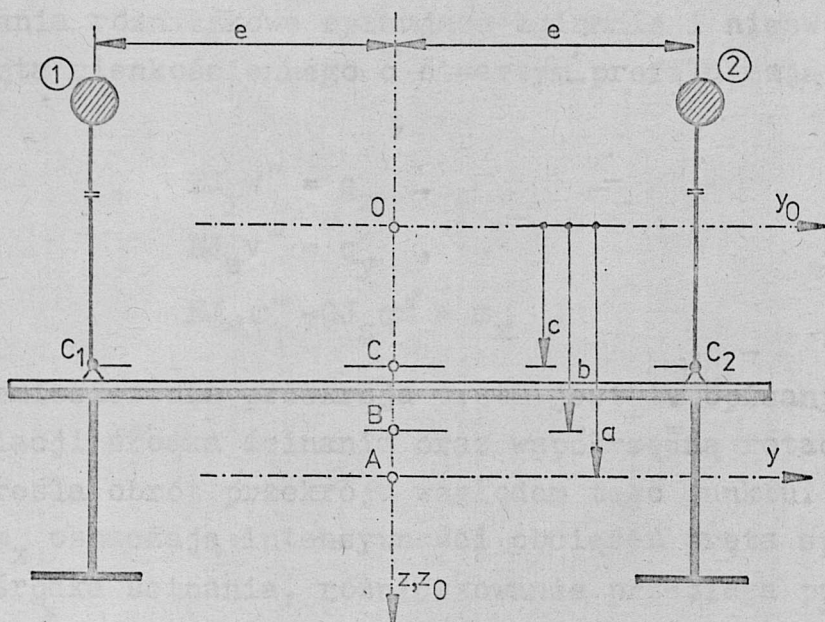


Rys. 3.1

Belka jest podwieszona do dwóch wiotkich ciągnien za pomocą

zbioru pionowych, przegubowo zamocowanych wieszaków. Zasadnicze odkształcenia wieszaków powstają pod wpływem obciążenia stałego kształtującego wstępny naciąg cięgien. W związku z tym przyjęto, że długość wieszaków pod obciążeniem użytkowym nie ulega zmianie. Założono ponadto, że przy poziomych poprzecznych wychyleniach obiektu wieszaki obracają się wokół górnej cięciwy cięgien.

Cięgna o jednakowej sztywności osiowej $E_c A_c$ są oparte przesuwnie na nieodkształcalnych pylonach, a ich końce są utwierdzone w blokach kotwiących. Trasa cięgien jest paraboliczna w obrębie przęsła i prostoliniowa w przedziałach l_1 i l_2 . Intensywność rozłożonej masy jednego cięgna wraz z wieszakami wynosi m_c , przy czym jest to wartość uśredniona, stała na długości przęsła. Uwzględniono pionową bezwładność cięgien, natomiast pominięto poziome składowe siły bezwładności cięgien.



Rys. 3.2

W przekroju poprzecznym mostu, przedstawionym na rys. 3.2, wyróżniono cztery punkty charakterystyczne: środek masy przekroju sprężystego belki A, środek masy przekroju balastowanego B / środek bezwładności /, środek ścinania O oraz centrum

zawieszenia belki C, odpowiadające dolnym punktom zamocowania wieszaków. Środek ścinania przyjęto jako biegun redukcji przemieszczeń i obciążeń. Punkt ten jest początkiem ortokartezjańskiego układu współrzędnych x_0, y_0, z_0 , względem którego opisano konfigurację układu w stanie równowagi statycznej.

Problem sformułowano jako liniowy w zakresie fizycznym i nieliniowy w sensie geometrycznym. Pominięto wpływ efektów Timoshenki oraz wpływ bezwładności deplanacyjnej przy skręcaniu, nie analizowano wpływów niemechanicznych. Nie rozpatrywano również ewentualnych obciążeń działających równoległe do osi podłużnej dźwigara.

3.2. Różniczkowo-całkowe równania równowagi dynamicznej

Równania różniczkowe opisujące zginanie i nieswobodne skręcanie pręta cienkościennego o otwartym profilu mają postać [19, 43]

$$EJ_y w^{IV} = q_z ,$$

$$EJ_z v^{IV} = q_y ,$$

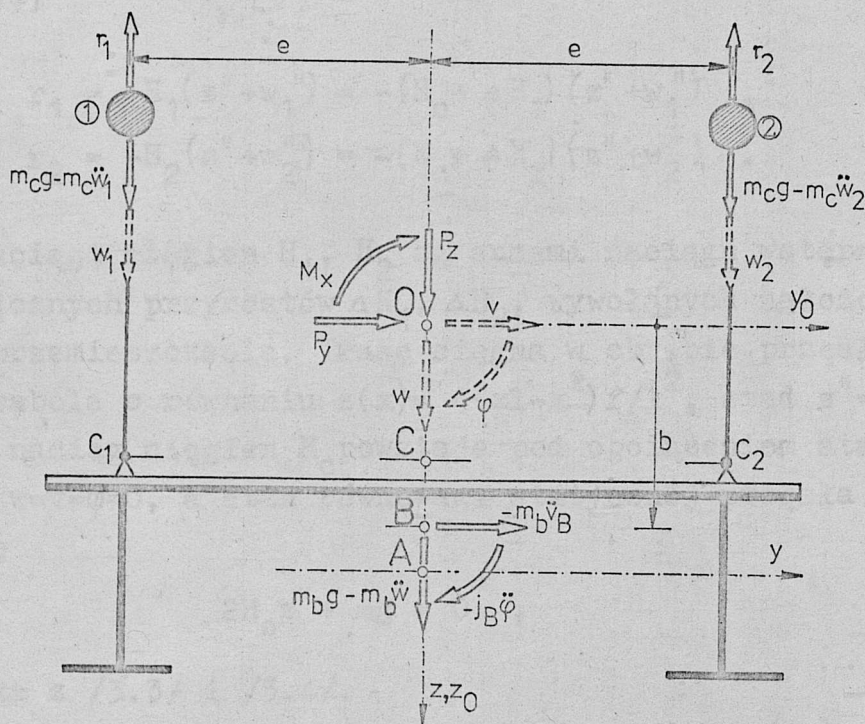
/3.1/

$$EJ_\omega \varphi^{IV} - GJ_S \varphi'' = m_x .$$

Stan przemieszczenia przekroju pręta jest tu opisany składowymi translacji środka ścinania oraz współrzędną rotacyjną φ , która określa obrót przekroju względem tego punktu. Symbole q_z, q_y, m_x oznaczają intensywności obciążeń pręta sprowadzonych do środka ścinania, różniczkowanie przebiega po osi x.

Cienkościenny dźwigar mostu wiszącego jest obciążony ciężarem własnym przęsła $mg = m_p g + 2m_c g$, reakcjami cięgien r_1, r_2 oraz obciążeniem użytkowym, którego składowe zredukowane do środka ścinania wynoszą na jednostkę długości P_z, P_y, M_x . Obciążenie użytkowe wywołuje przemieszczenia belki określone współrzędnymi w, v, φ , które w warunkach dynamicznych są funkcjami zmiennej geometrycznej x i czasu t. Ciężna doznają pionowych przesunięć $w_1 = w - e\varphi$ i $w_2 = w + e\varphi$. Na dźwigar dzia-

Łają wówczas dodatkowo siły inercji własnej $-m_b \ddot{w}$, $-m_b \ddot{v}_B$, $-j_B \ddot{\varphi}$ oraz siły bezwładności ciężarów $-m_c \ddot{w}_1$, $-m_c \ddot{w}_2$, przy czym j_B jest biegunowym momentem bezwładności masy belki wraz z balastem, obliczonym na jednostkę długości mostu, względem środka bezwładności B, którego przemieszczenia wynoszą $w_B = w$, $v_B = v - b\varphi$, $\varphi_B = \varphi$. Symbolem $(\dot{\quad})$ oznaczono różniczkowanie po czasie t . Konfigurację obciążeń w przekroju poprzecznym mostu przedstawiono na rys. 3.3.



Rys. 3.3

W wyniku redukcji obciążeń do środka ścinania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 q_y &= P_y - m_b \ddot{v}_B = P_y - m_b \ddot{v} + m_b b \ddot{\varphi} \quad , \\
 q_z &= P_z + m_b g - m_b \ddot{w} - r_1 - r_2 + 2m_c g - m_c \ddot{w}_1 - m_c \ddot{w}_2 = \\
 &= P_z + mg - (r_1 + r_2) - m \ddot{w} \quad , \quad /3.2/ \\
 m_x &= M_x - j_B \ddot{\varphi} + m_b \ddot{v}_B b + e(r_1 - m_c g + m_c \ddot{w}_1) - e(r_2 - m_c g + m_c \ddot{w}_2) = \\
 &= M_x - e(r_2 - r_1) + m_b b \ddot{v} - j_0 \ddot{\varphi} \quad ,
 \end{aligned}$$

gdzie $j_0 = j_B + m_b b^2 + 2m_c e^2$. Po uwzględnieniu zależności /3.2/ równania /3.1/ przybierają postać

$$\begin{aligned} EJ_y w'''' + (r_1 + r_2) + m\ddot{w} &= P_z + mg, \\ EJ_z v'''' + m_b \ddot{v} - m_b b \ddot{\phi} &= P_y, \\ EJ_\omega \phi'''' - GJ_S \phi'' + e(r_2 - r_1) + j_0 \ddot{\phi} - m_b b \ddot{v} &= M_x. \end{aligned} \quad /3.3/$$

Reakcje wiotkich cięgien wynikające z ich zakrzywienia wynoszą [14]

$$\begin{aligned} r_1 &= -H_1(z'' + w_1'') = -(H_0 + \Delta H_1)(z'' + w_1''), \\ r_2 &= -H_2(z'' + w_2'') = -(H_0 + \Delta H_2)(z'' + w_2''). \end{aligned} \quad /3.4/$$

Pełne naciągi cięgien H_1, H_2 są sumami naciągu wstępnego H_0 i dynamicznych przyrostów $\Delta H_1, \Delta H_2$, wywołanych nałożonym stanem przemieszczenia. Trasę cięgna w obrębie przęsła opisuje parabola o równaniu $z(x) = 4(xl - x^2)f/l^2$, stąd $z'' = -8f/l^2$. Wstępny naciąg cięgien H_0 powstaje pod obciążeniem stałym. Wówczas $w=v=\phi=0$, a stan równowagi statycznej przęsła opisuje równanie

$$2H_0 z'' + mg = 0, \quad /3.5/$$

co wynika z /3.3/ i /3.4/.

Z teorii cięgna wiotkiego wynikają związki [14]

$$\Delta H_1 = k \int_0^l w_1 dx, \quad \Delta H_2 = k \int_0^l w_2 dx, \quad /3.6/$$

gdzie współczynnik sztywności cięgna k jest określony relacją

$$k = 8 \psi E_c A_c f / l^3, \quad /3.7/$$

$$\psi^{-1} = \int \cos^{-3} \beta d\xi, \quad \xi = x/l. \quad /3.8/$$

(L)

Reakcje cięgien opisane formułami /3.4/ i /3.6/ mają charakter nieliniowy. W przypadku analizy drgań wymuszonych mostu składniki nieliniowe $\Delta H_1 w_1''$, $\Delta H_2 w_2''$ nie powinny być pomijane.

Całkowanie w /3.8/ należy w rozważanym przypadku przeprowadzić w trzech przedziałach, uwzględniając $\cos \beta = \cos \beta_1$ na odcinkach l_1 i $\cos \beta = (1+16f^2/l^2)^{-1/2}$ w przedziale l_0-l_1 . W obrębie parabolicznej trasy cięgna jest $\cos \beta = dx/ds = (1+z'^2)^{-1/2}$, przy czym całkowanie może być wykonane z dostateczną dokładnością dla trzech wyrazów rozwinięcia

$$\cos^{-3} \beta = (1+z'^2)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}z'^2 + \frac{3}{8}z'^4 + \dots \quad /3.9/$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$\psi^{-1} = 2l_1/l \cos^3 \beta_1 + (l_0-l_1)(1+16f^2/l^2)^{3/2} + 1 + 8f^2/l^2 + 96f^4/5l^4 \quad /3.10/$$

Występującą w równaniach /3.3/ sumę (r_1+r_2) i różnicę (r_2-r_1) reakcji cięgien można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} r_1+r_2 &= -2H_0 z'' - (\Delta H_1 + \Delta H_2) z'' - (H_1 w_1'' + H_2 w_2'') \quad , \\ r_2-r_1 &= -(\Delta H_2 - \Delta H_1) z'' - (H_2 w_2'' - H_1 w_1'') \quad . \end{aligned} \quad /3.11/$$

Na podstawie relacji /3.6/ otrzymujemy

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 + k \int_0^l w dx - ek \int_0^l \varphi dx = H_0 (1 + \eta_1 - \eta_2) \quad , \\ H_2 &= H_0 + k \int_0^l w dx + ek \int_0^l \varphi dx = H_0 (1 + \eta_1 + \eta_2) \quad , \end{aligned} \quad /3.12/$$

przy czym

$$\eta_1 = \frac{k}{H_0} \int_0^l w dx \quad , \quad \eta_2 = \frac{ek}{H_0} \int_0^l \varphi dx \quad /3.13/$$

są bezwymiarowymi parametrami naciągu reprezentującymi odpowiednio symetryczny i antysymetryczny składnik przyrostów ΔH_1 i ΔH_2 . Wówczas

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 = 2k \int_0^l w dx \quad , \quad \Delta H_2 - \Delta H_1 = 2ek \int_0^l \varphi dx \quad /3.14/$$

oraz

$$\begin{aligned} H_1 w_1'' + H_2 w_2'' &= 2H_0 (1 + \eta_1) w'' + 2eH_0 \eta_2 \varphi'' \quad , \\ H_2 w_2'' - H_1 w_1'' &= 2H_0 \eta_2 w'' + 2eH_0 (1 + \eta_1) \varphi'' \quad . \end{aligned} \quad /3.15/$$

Ostatecznie wyrażenia /3.11/ zapiszemy w formie

$$\begin{aligned} r_1+r_2 &= -2H_0 z'' + \frac{16kf}{l^2} \int_0^l w dx - 2H_0(1+\eta_1)w'' - 2H_0 e \eta_2 \varphi'' , \\ r_2-r_1 &= \frac{16ekf}{l^2} \int_0^l \varphi dx - 2H_0 \eta_2 w'' - 2H_0 e(1+\eta_1)\varphi'' . \end{aligned} \quad /3.16/$$

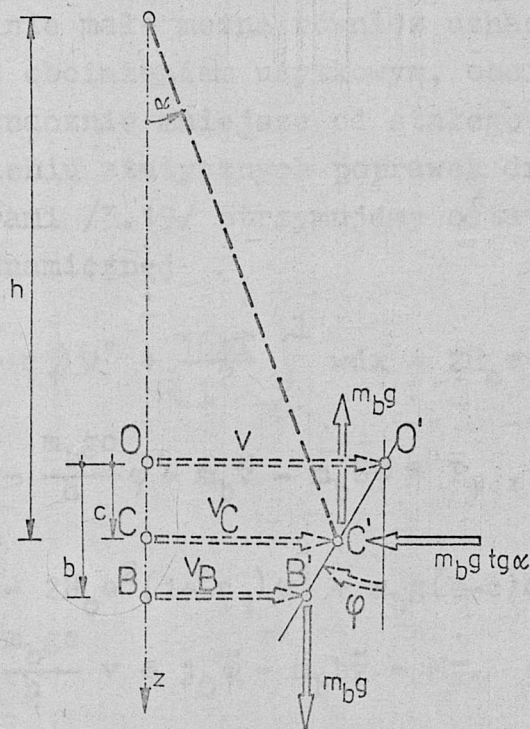
Po podstawieniu zależności /3.5/ i /3.16/ do równań /3.3/ otrzymujemy równania równowagi dynamicznej mostu postaci

$$\begin{aligned} EJ_y w'''' - 2H_0(1+\eta_1)w'' - 2H_0 e \eta_2 \varphi'' + \frac{16kf}{l^2} \int_0^l w dx + m\ddot{w} &= P_z , \\ EJ_z v'''' + m_b \ddot{v} - m_b b \ddot{\varphi} &= P_y , \\ EJ_\omega \varphi'''' - GJ_s \varphi'' + \frac{16e^2 kf}{l^2} \int_0^l \varphi dx - 2H_0 e \eta_2 w'' - 2H_0 e^2(1+\eta_1)\varphi'' + \\ + j_0 \ddot{\varphi} - m_b b \ddot{v} &= M_x . \end{aligned} \quad /3.17/$$

Drugie równanie z grupy /3.17/ opisuje drgania giętne dźwigara w płaszczyźnie poziomej. W rzeczywistości poziome drgania belki usztywniającej mostu wiszącego nie mają dokładnie charakteru giętnego. Przy poprzecznych wychyleniach obiektu pojawia się dodatkowo efekt wahadłowy, związany z ruchem masy podwieszanej belki. Podobne zjawisko obserwuje się przy skrętnych drganiach mostu. Uwzględnienie w opisie drgań efektu wahadłowego wymaga przeprowadzenia analizy zmienionej, przy nałożonym stanie przemieszczenia, konfiguracji obciążeń / odrzucenie zasady zeszywnienia /.

Założymy, że w warunkach statycznych jedynym obciążeniem mostu jest ciężar własny. Przy zerowym stanie przemieszczenia siła ciężkości dźwigara $m_b g$, usytuowana w przekroju poprzecznym na osi z, jest zrównoważona reakcjami cięgien, których wypadkowa leży również na osi z. Gdy przekrój doznaje przemieszczeń typu v, φ , następuje wychylenie wieszaków z płaszczyzny pionowej o kąt α / rys. 3.4 /. Pojawia się

wówczas dodatkowo pozioma reakcja cięgien. Ponadto siła ciężkości i wypadkowa pionowych reakcji cięgien tworzą parę sił, mającą bowiem różne punkty zaczepienia.



Rys. 3.4

Charakterystyczne przemieszczenia wyrażają się wzorami

$$v_C = v - c\varphi, \quad v_B = v - b\varphi, \quad \operatorname{tg} \alpha = v_C/h, \quad /3.18/$$

natomiast obciążenia drugiego rzędu zredukowane do środka ścinania wynoszą

$$\begin{aligned} \Delta P_y &= -m_b g \operatorname{tg} \alpha = -\frac{m_b g}{h} v + \frac{m_b g c}{h} \varphi, \\ \Delta M_x &= -m_b g (v_C - v_B) + m_b g c \operatorname{tg} \alpha = \\ &= -m_b g \left[b - c \left(1 - \frac{c}{h} \right) \right] \varphi + \frac{m_b g c}{h} v. \end{aligned} \quad /3.19/$$

Na ogół $c \ll h$, wobec tego dalej przyjęto, że $1 - c/h \approx 1$.

W rozważanym przypadku zmianie konfiguracji podlegają

również dynamiczne obciążenia belki, tzn. siły inercji oraz dynamiczne zmiany reakcji cięgien. Zależą one jednak od stanu przemieszczenia i wobec tego generują poprawki drugiego rzędu o charakterze nieliniowym. Są to poprawki pomijalnie małe. Za pomijalnie małe można również uznać wpływy drugiego rzędu związane z obciążeniem użytkowym, obciążenie to jest bowiem na ogół znacznie mniejsze od stałego ciężaru mostu.

Po uwzględnieniu statycznych poprawek drugiego rzędu, określonych wzorami /3.19/ otrzymujemy ostateczną postać równań równowagi dynamicznej

$$EJ_y w^{IV} - 2H_0(1 + \eta_1)w'' + \frac{16kf}{l^2} \int_0^1 w dx - 2H_0e \eta_2 \varphi'' + m\ddot{w} = P_z,$$

$$EJ_z v^{IV} + \frac{m_b g}{h} v - \frac{m_b g c}{h} \varphi + m_b \ddot{v} - m_b b \ddot{\varphi} = P_y, \quad /3.20/$$

$$EJ_\omega \varphi^{IV} - GJ_s \varphi'' - 2H_0e^2(1 + \eta_1)\varphi'' + m_b g(b-c)\varphi + \frac{16e^2 kf}{l^2} \int_0^1 \varphi dx -$$

$$- 2H_0e \eta_2 w'' - \frac{m_b g c}{h} v + j_0 \ddot{\varphi} - m_b b \ddot{v} = M_x.$$

Ze struktury równań /3.20/ wynika, że poprawki drugiego rzędu można interpretować jako reprezentację umownego podłoża sprężystego, sprzężonego w dziedzinie przemieszczeń typu v oraz φ . W ten sposób ujawnia się wahadłowy charakter drgań mostu wiszącego.

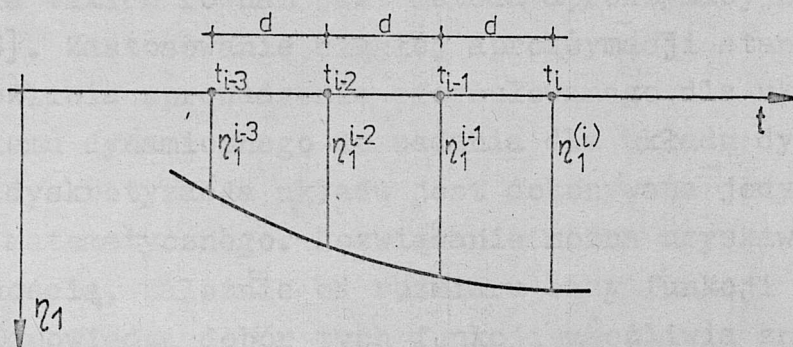
Drgania opisane równaniami /3.20/ są sprzężone. Sprzężenie statyczne drgań poziomych i skrętnych jest spowodowane poprawkami drugiego rzędu, sprzężenie bezwładnościowe jest wynikiem zróżnicowania położenia środka ścinania i środka bezwładności przekroju belki. Wpływy nieliniowych reakcji cięgien powodują natomiast sprzężenie przemieszczeń typu w i φ . W przypadku pominięcia składników nieliniowych / zawierających parametry η_1 i η_2 / równanie drgań pionowych separuje się i może być rozpatrywane niezależnie.

Równania /3.20/ wraz z warunkami brzegowymi $w=0, w''=0, v=0, v''=0, \varphi=0, \varphi''=0$ dla $x=0$ i $x=l$ opisują problem przestrzenny, sprzężonych drgań nieliniowych mostu wiszącego.

3.3. Metoda rozwiązywania problemu przestrzennych drgań nieliniowych

Przestrzenne drgania wymuszone mostu wiszącego są opisane układem sprzężonych, nieliniowych, cząstkowych równań różniczkowo-całkowych /3.20/, określonych w przestrzeni geometryczno-czasowej. Rozwiązania układu takich równań nie można uzyskać w postaci zamkniętej. Opracowano więc komputerowy algorytm, w którym zastosowano ekstrapolacyjny sposób rozwiązania problemu nieliniowości oraz wykorzystano metodę Galerkiną do sformułowania macierzowego równania ruchu układu.

Rozwiązanie nieliniowych równań /3.20/ będzie uzyskiwane w dyskretnym zbiorze punktów na osi czasu, przy czym przyjęto, że w obrębie kroku czasowego równania /3.20/ są liniowe. Dla dostatecznie małej długości kroku błąd rozwiązania wynikający z powyższego założenia może być dowolnie mały. Parametry η_1 i η_2 będą w każdym kroku wstępnie ustalone na podstawie odpowiedniej prognozy i następnie, po rozwiązaniu równań, będą korygowane według wzorów /3.13/. Prognozowane wartości η_1 i η_2 , oznaczone w i -tym kroku symbolami $\eta_1^{(i)}$, $\eta_2^{(i)}$, będą określane według zasad ekstrapolacji parabolicznej. Formułę ekstrapolacyjną dla parametru η_1 można wyprowadzić korzystając z rozwinięcia funkcji $\eta_1(t)$ w szereg Taylora, w punkcie $t=t_{i-2}$ /rys. 3.5 /.



Rys. 3.5

Dla trzech wyrazów rozwinięcia i dla $t=t_{i-2}$ otrzymujemy

$$\eta_1^{(i)} = \eta_1(t_i) = \eta_1(t_{i-2}) + \frac{\dot{\eta}_1(t_{i-2})}{1!} 2d + \frac{\ddot{\eta}_1(t_{i-2})}{2!} 4d^2 \quad /3.21/$$

Stosując wzory różnicowe / por. np. [3] / można wyznaczyć

$$\dot{\eta}_1(t_{i-2}) = \frac{\eta_1^{i-1} - \eta_1^{i-3}}{2d}, \quad \ddot{\eta}_1(t_{i-2}) = \frac{\eta_1^{i-1} - 2\eta_1^{i-2} + \eta_1^{i-3}}{d^2}, \quad /3.22/$$

a wówczas

$$\eta_1^{(i)} = 3\eta_1^{i-1} - 3\eta_1^{i-2} + \eta_1^{i-3} \quad /3.23/$$

Analogicznie wyprowadza się formułę ekstrapolacyjną dla parametru η_2

$$\eta_2^{(i)} = 3\eta_2^{i-1} - 3\eta_2^{i-2} + \eta_2^{i-3} \quad /3.24/$$

Ekstrapolacja według wzorów /3.23/ i /3.24/ przeprowadzana jest na podstawie parametrów η_1, η_2 obliczonych w krokach $i-1, i-2, i-3$ według relacji /3.13/. Wartości prognozowane $\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(i)}$ odpowiadające umownej chwili początkowej / $t=0$ / są znane dla danych warunków początkowych, nałożonych na stan przemieszczenia układu.

Dzięki zastosowaniu opisanej numerycznej techniki rozwiązywania problemu nieliniowego, równania /3.20/ można dalej rozpatrywać w postaci zlinearyzowanej. Efektywnym sposobem rozwiązania takich równań jest metoda aproksymacyjna Lagrange'a -Ritza [23]. Zastosowanie ciągłej aproksymacji stanu przemieszczenia umożliwia sprowadzenie sformułowanego dla układu ciągłego problemu dynamicznego do zadania dla układu dyskretnego, przy czym dyskretyzacja układu jest dokonywana jedynie w sferze opisu matematycznego. Rozwiązanie można uzyskiwać z dowolną dokładnością, zależnie od rozmiaru bazy funkcji aproksymacyjnych. Odpowiedni dobór tych funkcji umożliwia znaczne ograniczenie rozmiaru zadania / liczby współrzędnych uogólnionych / w porównaniu np. z metodą elementów skończonych [23].

Stosowanie metody Lagrange'a-Ritza wymaga jednak sporządzenia bilansu energetycznego badanego układu. W moście wiszącym nie wszystkie reakcje sprężyste belki ujawniające się w

równaniach równowagi mają jasny sens fizyczny, zatem trudno wyznaczyć energię potencjalną odkształcenia wprost ze znanych wzorów. Z tego względu zastosowano w rozważanym przypadku bezpośrednią metodę wariacyjną Galerkina, w której punktem wyjścia są równania różniczkowe opisujące stan równowagi dynamicznej układu. Metoda ta, przy założeniu ścisłych funkcji aproksymacyjnych / spełniających kinematyczne i kinetyczne warunki brzegowe / jest równoważna aproksymacyjnej metodzie Lagrange'a-Ritza [32]. Po przekształceniu Galerkina równania /3.20/ przyjmują postać równań różniczkowych zwyczajnych, które przy określonych warunkach początkowych można rozwiązać przez całkowanie numeryczne.

3.4. Dyskretyzacja obiektu w przestrzeni geometrycznej

Cząstkowe równania równowagi /3.20/ można przekształcić do postaci równań zwyczajnych zmiennej t za pomocą metody Galerkina. W tym celu dokonano dyskretyzacji geometrycznej układu aproksymując funkcje w , v , φ , opisujące stan przemieszczenia belki, szeregami

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_n Q_{wn}(t) s_n(x) = \bar{Q}_w^T \bar{s} = \bar{s}^T \bar{Q}_w, \\ v(x,t) &= \sum_n Q_{vn}(t) s_n(x) = \bar{Q}_v^T \bar{s} = \bar{s}^T \bar{Q}_v, \\ \varphi(x,t) &= \frac{1}{e} \sum_n Q_{\varphi n}(t) s_n(x) = \frac{1}{e} \bar{Q}_\varphi^T \bar{s} = \frac{1}{e} \bar{s}^T \bar{Q}_\varphi. \end{aligned} \quad /3.25/$$

\bar{Q}_w , \bar{Q}_v , \bar{Q}_φ są wektorami współmiernych wymiarowo współrzędnych uogólnionych, a \bar{s} jest wektorem ścisłych funkcji aproksymacyjnych w sensie Galerkina, o elementach bezwymiarowych. Funkcje aproksymacyjne muszą spełniać kinematyczne i kinetyczne warunki brzegowe, które w przyjętym modelu są jednakowe dla trzech typów przemieszczeń. W związku z tym zastosowano ten sam zbiór funkcji aproksymacyjnych dla w , v , φ i przyjęto go w postaci wektora $\bar{s}(\xi) = [\sin \pi \xi, \sin 2\pi \xi, \sin 3\pi \xi, \dots]^T$, gdzie $\xi = x/l$ jest zmienną bezwymiarową z przedziału domkniętego $\langle 0, 1 \rangle$. Elementy wektora \bar{s} tworzą zupełny układ funkcji i są

liniowo niezależne. Spełniają także warunki brzegowe, tzn. ich wartości i wartości drugich pochodnych są równe zeru w punktach $x=0$ i $x=1$. Spełnienie powyższych postulatów jest niezbędnym warunkiem dopuszczalności funkcji aproksymacyjnych [40].

Relacje /3.25/ podstawiono do równań równowagi układu /3.20/, które następnie zostały lewostronnie pomnożone przez wektory wariacji rozwiązań wynoszące odpowiednio

$$\delta \bar{w} = \bar{s}(\xi) \quad , \quad \delta \bar{v} = \bar{s}(\xi) \quad , \quad \delta \bar{\varphi} = \frac{1}{e} \bar{s}(\xi) \quad . \quad /3.26/$$

Po dokonaniu całkowania w danym obszarze /przedział $\langle 0,1 \rangle$ / otrzymano klasyczne równania warunkowe Galerkina

$$\begin{aligned} & [EJ_y \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'''' dx - 2H_0(1+\eta_1) \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'' dx + \frac{16kf}{l^2} \int_0^1 \bar{s} (\int_0^1 \bar{s} dx) dx] \bar{Q}_w - \\ & - 2H_0 \eta_2 \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'' dx \bar{Q}_\varphi + m \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx \ddot{\bar{Q}}_w = \int_0^1 \bar{s} P_z dx \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [EJ_z \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'''' dx + \frac{m_b g}{h} \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx] \bar{Q}_v - \frac{m_b g c}{h e} \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx \bar{Q}_\varphi + \\ & + m_b \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx \ddot{\bar{Q}}_v - \frac{m_b b}{e} \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx \ddot{\bar{Q}}_\varphi = \int_0^1 \bar{s} P_y dx \quad , \quad /3.27/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\frac{EJ_\omega}{e^2} \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'''' dx - \frac{GJ_s}{e^2} \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'' dx - 2H_0(1+\eta_1) \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'' dx + \\ & + \frac{16kf}{l^2} \int_0^1 \bar{s} (\int_0^1 \bar{s} dx) dx + \frac{m_b g (b-c)}{e^2} \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx] \bar{Q}_\varphi - \\ & - 2H_0 \eta_2 \int_0^1 \bar{s}\bar{s}'' dx \bar{Q}_w - \frac{m_b g c}{h e} \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx \bar{Q}_v + \frac{j_0}{e^2} \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx \ddot{\bar{Q}}_\varphi - \\ & - \frac{m_b b}{e} \int_0^1 \bar{s}\bar{s} dx \ddot{\bar{Q}}_v = \frac{1}{e} \int_0^1 \bar{s} M_x dx \quad . \end{aligned}$$

Całkowanie wykonano przyjmując, że parametry η_1, η_2 są ustalone, co w ramach zastosowanej metody numerycznej rozwiązania problemu nieliniowości /por. pkt 3.3./ można założyć w obrębie

dostatecznie małego kroku czasowego. Charakterystyczne całki występujące w równaniach /3.27/ wynoszą

$$\int_0^1 \bar{s} \bar{s}^T dx = 1 \int_0^1 \bar{s} \bar{s}^T d\xi = \frac{1}{2} I \quad ,$$

$$\int_0^1 \bar{s} \bar{s}''^T dx = -1 \int_0^1 \bar{s} \bar{s}^T \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{1^2} \right\} d\xi = -\frac{1}{21} \{d^2\} \quad ,$$

$$\int_0^1 \bar{s} \bar{s}''''^T dx = 1 \int_0^1 \bar{s} \bar{s}^T \left\{ \frac{n^4 \pi^4}{1^4} \right\} d\xi = \frac{1}{21^3} \{d^4\} \quad ,$$

$$\int_0^1 \bar{s} \left(\int_0^1 \bar{s}^T dx \right) dx = \left(1 \int_0^1 \bar{s} d\xi \right) \left(1 \int_0^1 \bar{s}^T d\xi \right) = 41^2 \bar{g} \bar{g}^T \quad ,$$

/3.28/

przy czym wprowadzono oznaczenia

$$I = \text{diag} (1, 1, 1, \dots) \quad ,$$

$$\{d\} = \{n\pi\} = \text{diag} (\pi, 2\pi, 3\pi, \dots) \quad ,$$

$$\bar{g} = [1/\pi, 0, 1/3\pi, 0, 1/5\pi, \dots]^T \quad .$$

/3.29/

Rozmiar macierzy I i {d} oraz wektora \bar{g} wynosi n i jest równy liczbie funkcji zastosowanych do aproksymacji każdego z przemieszczeń w, v, φ .

Ostatecznie otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, który po uwzględnieniu własności tłumiących obiektu ma w zapisie macierzowym formę

$$B_0 \ddot{\bar{Q}}_0 + C_0 \dot{\bar{Q}}_0 + (K_0 + K_0^?) \bar{Q}_0 = \bar{F}_0 \quad .$$

/3.30/

Równanie /3.30/ charakteryzuje się strukturą blokową, przy czym uporządkowanie bloków jest zgodne z budową wektora współrzędnych uogólnionych

$$\bar{Q}_0 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_w \\ \bar{Q}_v \\ \bar{Q}_\varphi \end{bmatrix} \quad .$$

/3.31/

Macierze sztywności i bezwładności obiektu oraz wektor uogólnionych sił czynnych mają postać

$$K_o = \begin{bmatrix} \frac{EJ_y}{2l^3} \{d^4\} + \frac{H_o}{l} \{d^2\} + 64kf\bar{g}\bar{g}^T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EJ_z}{2l^3} \{d^4\} + \frac{m_b g l}{2h} I & -\frac{m_b g c l}{2eh} I \\ 0 & -\frac{m_b g c l}{2eh} I & \frac{EJ_\omega}{2e^2 l^3} \{d^4\} + \frac{GJ_s}{2le^2} \{d^2\} + \frac{H_o}{l} \{d^2\} + 64kf\bar{g}\bar{g}^T + \frac{m_b g (b-c) l}{2e^2} I \end{bmatrix} \quad /3.32/$$

$$K_o^\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \frac{H_o}{l} \{d^2\} & 0 & \eta_2 \frac{H_o}{l} \{d^2\} \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta_2 \frac{H_o}{l} \{d^2\} & 0 & \eta_1 \frac{H_o}{l} \{d^2\} \end{bmatrix}, \quad /3.33/$$

$$B_o = \begin{bmatrix} \frac{m l}{2} I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_b l}{2} I & -\frac{m_b b l}{2e} I \\ 0 & -\frac{m_b b l}{2e} I & \frac{j_o l}{2e^2} I \end{bmatrix} \quad /3.34/$$

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} \bar{F}_w \\ \bar{F}_v \\ \bar{F}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \bar{S} P_z dx \\ \int_0^1 \bar{S} P_y dx \\ \frac{1}{e} \int_0^1 \bar{S} M_x dx \end{bmatrix} \quad /3.35/$$

Macierz sztywności obiektu przedstawiono w postaci sumy macierzy K_0 opisującej liniowy model obiektu i macierzy K_0^η , która wyraża wpływ efektów nieliniowości geometrycznej. Geometryczna macierz sztywności K_0^η jest generowana na podstawie parametrów η_1, η_2 wyznaczanych sukcesywnie według formuł ekstrapolacyjnych /3.23/, /3.24/, por. punkt 3.3. .

Własności tłumiące obiektu określono według hipotezy tłumienia masowego [30], co jest równoznaczne z założeniem zewnętrznego charakteru oporów ruchu konstrukcji. Macierz tłumienia C_0 jest wówczas proporcjonalna do macierzy bezwładności obiektu

$$C_0 = \mu B_0, \quad /3.36/$$

gdzie μ jest wymiarowym współczynnikiem tłumienia dla rozważanego typu konstrukcji, mierzonym w s^{-1} . Zastosowanie przyjętego modelu tłumienia jest w rozważanym przypadku bardziej wygodne, niż przyjęcie modelu Voighta-Kelvina, w którym zakłada się proporcjonalność macierzy tłumienia do macierzy sztywności. Macierz sztywności ma bowiem bardziej złożoną budowę niż macierz bezwładności. Model tłumienia masowego jest ponadto bardziej bezpieczny [30].

Równanie /3.30/ jest wymiarowym równaniem ruchu rozpatrywanego mostu wiszącego obciążonego zewnętrznym obciążeniem czynnym o składowych P_z, P_y, M_x . Pełny opis drgań obiektu wymaga sprecyzowania modelu obciążenia oraz szczegółowego określenia wektora uogólnionych sił czynnych. W dalszym ciągu zostaną wyprowadzone w jawnej postaci równania ruchu mostu poddanego działaniu ruchomego resorowanego obciążenia inercyjnego. Problem sformułowano wykorzystując metodę analizy obciążeń rucho-

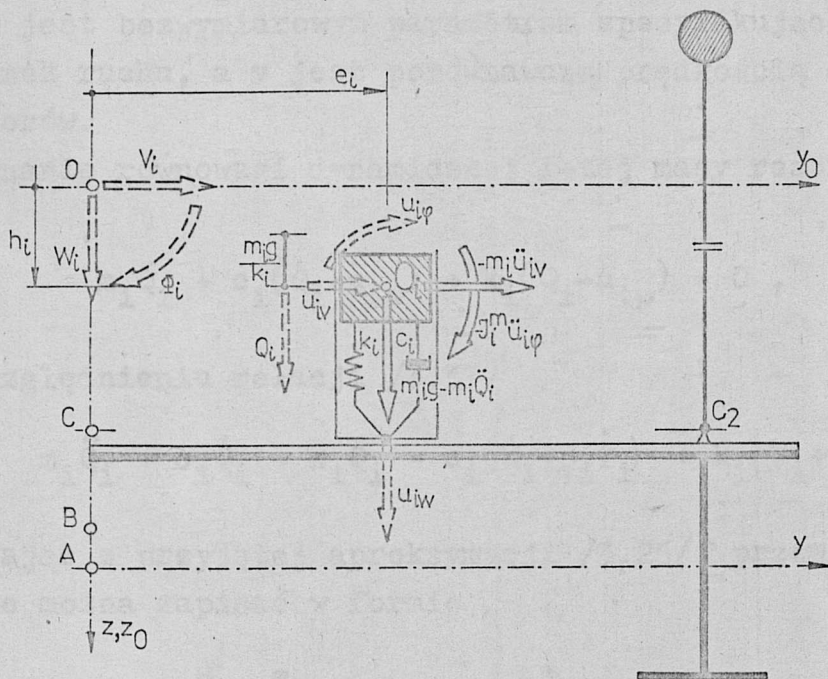
nych, przedstawioną przez Langerę w pracy [26].

3.5. Model obciążenia ruchomego

Przyjęto, że ruchomym obciążeniem użytkowym mostu jest tabor drogowy złożony z dowolnej liczby pojazdów poruszających się po torach prostoliniowych, równoległych do osi podłużnej obiektu i dowolnie usytuowanych w jego przekroju poprzecznym. Prędkości pojazdów oraz odstęp między nimi mogą być różne. Model pojazdu należy tak dobrać, aby był miarodajny w zakresie analizy dynamicznej mostu. Powinien więc opisywać cechy charakterystyczne dla obciążenia pojazdami, ze szczególnym uwzględnieniem sposobu przekazywania się tego obciążenia na most. Sam pojazd może być natomiast modelowany w skali makro, gdyż jego drgania nie są przedmiotem analizy.

Zasadnicze znaczenie w rozważanym przypadku ma wpływ inercji i resorowania pojazdów oraz efekt ciągłej zmiany ich lokalizacji [21,26,36]. W dotychczasowych pracach z zakresu dynamiki mostów wiszących poddanych działaniu ruchomego obciążenia zakładano zwykle znacznie odbiegający od rzeczywistości model obciążenia w postaci ruchomej siły lub nieresorowanej masy skupionej [15,17,20,45]. W niniejszej pracy pojazd jest modelowany jednomasowym oscylatorem o liniowych charakterystykach lepkich i sprężystych. W rzeczywistości charakterystyki zawieszonych współczesnych pojazdów są na ogół nieliniowe [42], efekt ten jednak pominięto jako drugorzędny wobec nieliniowych własności obiektu. W przyjętym modelu założono, że kontakt pojazdu z pomostem jest punktowy, co nie odwzorowuje przypadku rzeczywistego, ale jest w pewnym stopniu uzasadnione małymi, w porównaniu z rozpiętością i szerokością mostu wiszącego, wymiarami pojazdu. W przypadku samochodów ciężarowych o większych długościach istnieje naturalna możliwość zastosowania modelu bogatszego w postaci dwu /lub więcej/ oscylatorów odpowiadających przedniej i tylnej osi /kolejnym osiom/ pojazdu. Strumień pojazdów poruszających

się po moście jest opisany według przyjętego wzorca zbiorem oscylatorów o odpowiednio dobranych parametrach. Przez m_i oznaczono masę i -tego oscylatora, skoncentrowaną w punkcie O_i , który odpowiada środkowi masy pojazdu /rys. 3.6/. Charakterystyki więzi sprężystej i lepkiej wynoszą odpowiednio k_i i c_i . J_i^m jest biegunowym momentem bezwładności masy pojazdu względem O_i , mierzonym w płaszczyźnie przekroju mostu i wynoszącym $J_i^m = m_i r_i^2$, gdzie r_i jest odpowiednim promieniem bezwładności. Przyjęto, że oscylator ma jeden stopień swobody względem pomostu, określony współrzędną Q_i , która opisuje pionowe przemieszczenie masy mierzone od stanu przemieszczenia statycznego $m_i g / k_i$.



Rys. 3.6

Ponadto oscylator doznaje przemieszczeń u_{iw} , u_{iv} , $u_{iφ}$ wynikających ze stanu przemieszczenia przekroju belki usztywniającej, przy czym zakłada się, że przy poziomych poprzecznych wychyleniach i obrocie dźwigara oscylator jest sztywno związany z pomostem. Wówczas otrzymujemy zależności

$$u_{iw} = W_i + e_i \Phi_i ,$$

$$u_{iv} = V_i - h_i \Phi_i ,$$

/3.37/

$$u_{i\varphi} = \Phi_i ,$$

gdzie e_i, h_i są współrzędnymi środka masy oscylatora O_i w układzie współrzędnych $y_0 z_0$ i opisują lokalizację pojazdu w umownej chwili początkowej $t=0$. Współrzędne stanu przemieszczenia przekroju belki, śledzące położenie oscylatora oznaczono przez

$$W_i = w(x_i, t) , \quad V_i = v(x_i, t) , \quad \Phi_i = \varphi(x_i, t) . /3.38/$$

Funkcja $x_i = a_i + g_i vt$ opisuje prawo ruchu oscylatora wzdłuż osi x , przy czym a_i określa jego położenie na osi x w chwili $t=0$, g_i jest bezwymiarowym parametrem specyfikującym prędkość i kierunek ruchu, a v jest porównawczą prędkością dla zbioru oscylatorów.

Równanie równowagi dynamicznej i -tej masy resorowanej ma postać

$$m_i \ddot{Q}_i + c_i (\dot{Q}_i - \dot{u}_{iw}) + k_i (Q_i - u_{iw}) = 0 , \quad /3.39/$$

a po uwzględnieniu relacji /3.37/

$$m_i \ddot{Q}_i + c_i \dot{Q}_i + k_i Q_i = c_i (\dot{W}_i + e_i \dot{\Phi}_i) + k_i (W_i + e_i \Phi_i) . /3.40/$$

Korzystając z przyjętej aproksymacji /3.25/, przemieszczenia śledzące można zapisać w formie

$$W_i(t) = \bar{s}^T(\xi_i) \cdot \bar{Q}_w(t) = \bar{s}_i^T \bar{Q}_w ,$$

$$V_i(t) = \bar{s}^T(\xi_i) \cdot \bar{Q}_v(t) = \bar{s}_i^T \bar{Q}_v ,$$

/3.41/

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{e} \bar{s}^T(\xi_i) \cdot \bar{Q}_\varphi(t) = \frac{1}{e} \bar{s}_i^T \bar{Q}_\varphi .$$

$\bar{s}_i = \bar{s}(\xi_i)$ jest wektorem śledzących funkcji aproksymacyjnych o bezwymiarowym argumencie $\xi_i = x_i/l = \alpha_i + g_i \tau$ z przedziału domkniętego $\langle 0, 1 \rangle$. Symbolem $\tau = vt/l$ oznaczono bezwymiarową zmienną czasową, natomiast $\alpha_i = a_i/l$. Wyznaczenie pochodnych funkcji /3.41/ wymaga przeprowadzenia operacji różniczkowania

wektora \bar{S}_i według zależności

$$\dot{\bar{S}}_i = \frac{d}{dt}[\bar{s}(\xi_i)] = \varrho_i \frac{v}{l} \{d\} \bar{c}(\xi_i) = \varrho_i \frac{v}{l} \{d\} \bar{C}_i, \quad /3.42/$$

gdzie $\bar{c}(\xi) = [\cos \pi \xi, \cos 2\pi \xi, \dots]^T$ oraz $\bar{C}_i = \bar{c}(\xi_i)$ dla $\xi_i \in \langle 0, 1 \rangle$. Dla zmiennych $\xi_i \notin \langle 0, 1 \rangle$ należy przyjmować $\bar{S}_i = \bar{C}_i = \bar{0}$. Prędkości śledzące położenie oscylatora wynoszą wówczas

$$\begin{aligned} \dot{W}_i(t) &= \dot{\bar{S}}_i^T \bar{Q}_w + \bar{S}_i^T \dot{\bar{Q}}_w = \varrho_i \frac{v}{l} \bar{C}_i^T \{d\} \bar{Q}_w + \bar{S}_i^T \dot{\bar{Q}}_w, \\ \dot{V}_i(t) &= \dot{\bar{S}}_i^T \bar{Q}_v + \bar{S}_i^T \dot{\bar{Q}}_v = \varrho_i \frac{v}{l} \bar{C}_i^T \{d\} \bar{Q}_v + \bar{S}_i^T \dot{\bar{Q}}_v, \quad /3.43/ \\ \dot{\Phi}_i(t) &= \frac{1}{e} \dot{\bar{S}}_i^T \bar{Q}_\varphi + \frac{1}{e} \bar{S}_i^T \dot{\bar{Q}}_\varphi = \varrho_i \frac{v}{le} \bar{C}_i^T \{d\} \bar{Q}_\varphi + \frac{1}{e} \bar{S}_i^T \dot{\bar{Q}}_\varphi. \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu formuł /3.41/ i /3.43/ do równań typu /3.40/ otrzymuje się dla zbioru pojazdów macierzowe równanie ruchu postaci

$$\{m\} \ddot{\bar{Q}}_p + \{c\} \dot{\bar{Q}}_p + \{k\} \bar{Q}_p = \bar{F}_p, \quad /3.44/$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{F}_p &= (\{k\} S^T + \frac{v}{l} \{c\} G^T \{d\}) \bar{Q}_w + \{c\} S^T \dot{\bar{Q}}_w + \\ &+ (\{k\} \varepsilon S^T + \frac{v}{l} \{c\} \varepsilon G^T \{d\}) \bar{Q}_\varphi + \{c\} \varepsilon S^T \dot{\bar{Q}}_\varphi. \quad /3.45/ \end{aligned}$$

Wektor $\bar{Q}_p = [Q_1, Q_2, \dots]^T$ jest zbiorem współrzędnych analizowanej grupy oscylatorów, których parametry zestawiono w formie macierzy diagonalnych

$$\begin{aligned} \{k\} &= \text{diag}(k_1, k_2, \dots), \quad \{m\} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots), \\ \{c\} &= \text{diag}(c_1, c_2, \dots), \quad \{r\} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots), \\ \{\varepsilon\} &= \frac{1}{e} \{e\} = \frac{1}{e} \text{diag}(e_1, e_2, \dots), \\ \{\delta\} &= \frac{1}{e} \{h\} = \frac{1}{e} \text{diag}(h_1, h_2, \dots), \\ \{\varrho\} &= \text{diag}(\varrho_1, \varrho_2, \dots). \end{aligned} \quad /3.46/$$

Macierze S i G są zbudowane z wektorów funkcji śledzących \bar{S}_i i \bar{C}_i , przy czym $S = [\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots]$ i $G = [\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots]$.

Nacisk statyczny $m_i g$ oraz siły inercji $-m_i \ddot{Q}_i$, $-m_i \ddot{u}_{iv}$, $-J_{i i \varphi}^m \ddot{u}_{i \varphi}$ masy każdego oscylatora przekazują się na belkę usztywniającą mostu /rys. 3.6/. Składowe tych obciążeń zredukowane do środka ścinania przekroju belki i zapisane dla zbioru oscylatorów wynoszą

$$\begin{aligned} P_z &= \sum_i (m_i g - m_i \ddot{Q}_i) \delta(x-x_i) , \\ P_y &= \sum_i (-m_i \ddot{u}_{iv}) \delta(x-x_i) , \\ M_x &= \sum_i [-J_{i i \varphi}^m \ddot{u}_{i \varphi} + m_i \ddot{u}_{iv} h_i + (m_i g - m_i \ddot{Q}_i) e_i] \delta(x-x_i) , \end{aligned} \quad /3.47/$$

gdzie $i=1,2,\dots,p$, a p jest liczbą oscylatorów. Symbolem δ oznaczono funkcję Diraca. Dla obciążeń zdefiniowanych wzorami /3.47/ należy wyznaczyć wektor uogólnionych sił czynnych \bar{F}_0 . Kolejne jego bloki, obliczone według relacji /3.35/, mają postać

$$\begin{aligned} \bar{F}_w &= \int_0^l \bar{s} P_z dx = \sum_i \bar{s}_i (m_i g - m_i \ddot{Q}_i) , \\ \bar{F}_v &= \int_0^l \bar{s} P_y dx = \sum_i [-\bar{s}_i m_i (\ddot{v}_i - h_i \ddot{\Phi}_i)] , \\ \bar{F}_\varphi &= \frac{1}{e} \int_0^l \bar{s} M_x dx = \frac{1}{e} \sum_i \bar{s}_i [-J_{i i \varphi}^m \ddot{\Phi}_i + m_i h_i (\ddot{v}_i - h_i \ddot{\Phi}_i) + \\ &\quad + (m_i g - m_i \ddot{Q}_i) e_i] . \end{aligned} \quad /3.48/$$

Przyspieszenia śledzące \ddot{v}_i , $\ddot{\Phi}_i$ można na podstawie zależności /3.43/ zapisać w formie

$$\begin{aligned} \ddot{v}_i(t) &= -\varrho_i^2 \frac{v^2}{l^2} \bar{s}_i^T \{d^2\} \bar{Q}_v + 2\varrho_i \frac{v}{l} \bar{c}_i^T \{d\} \dot{\bar{Q}}_v + \bar{s}_i^T \ddot{Q}_v , \\ \ddot{\Phi}_i(t) &= -\varrho_i^2 \frac{v^2}{e l^2} \bar{s}_i^T \{d^2\} \bar{Q}_\varphi + 2\varrho_i \frac{v}{e l} \bar{c}_i^T \{d\} \dot{\bar{Q}}_\varphi + \frac{1}{e} \bar{s}_i^T \ddot{Q}_\varphi . \end{aligned} \quad /3.49/$$

Po wprowadzeniu formuł /3.49/ do /3.48/ i po uporządkowaniu otrzymano wzory opisujące szczegółową strukturę wektora uogólnionych sił czynnych

$$\bar{F}_W = gS\{m\}\bar{1} - S\{m\}\ddot{Q}_p, \quad /3.50/$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_V &= \frac{v^2}{1^2} S\{m\delta^2\} S^T\{d^2\} \bar{Q}_V - 2\frac{v}{1} S\{m\delta\} G^T\{d\} \dot{Q}_V - S\{m\} S^T \ddot{Q}_V - \\ &- \frac{v^2}{1^2} S\{m\delta\delta^2\} S^T\{d^2\} \bar{Q}_\varphi + 2\frac{v}{1} S\{m\delta\delta\} G^T\{d\} \dot{Q}_\varphi + S\{m\delta\} S^T \ddot{Q}_\varphi, \quad /3.51/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_\varphi &= \frac{v^2}{1^2} S\{m\nu\delta^2\} S^T\{d^2\} \bar{Q}_\varphi - 2\frac{v}{1} S\{m\nu\delta\} G^T\{d\} \dot{Q}_\varphi - S\{m\nu\} S^T \ddot{Q}_\varphi - \\ &- \frac{v^2}{1^2} S\{m\delta\delta^2\} S^T\{d^2\} \bar{Q}_V + 2\frac{v}{1} S\{m\delta\delta\} G^T\{d\} \dot{Q}_V + S\{m\delta\} S^T \ddot{Q}_V + \\ &+ gS\{m\epsilon\}\bar{1} - S\{m\epsilon\}\ddot{Q}_p. \quad /3.52/ \end{aligned}$$

We wzorach wprowadzono dodatkowo wektor sumacyjny $\bar{1} = [1, 1, \dots]^T$ o rozmiarze p oraz macierz diagonalną $\{v\} = (\{h^2\} + \{r^2\})/e^2$.

W pracy rozważono również prostszy model pojazdu w postaci klasycznego jednomasowego oscylatora lepkosprężystego o wyłącznie pionowej inercji masy i o zachowawczym pionowym kierunku resorowania. Przypadek taki można otrzymać przez pominięcie poziomej i obrotowej bezwładności masy oscylatora w modelu zasadniczym. Równanie /3.44/ pozostaje bez zmian, natomiast składowe obciążenia belki opisane są prostszymi zależnościami

$$\begin{aligned} P_z &= \sum_i (m_i g - m_i \ddot{Q}_i), \\ P_y &= 0, \\ M_x &= \sum_i (m_i g - m_i \ddot{Q}_i) e_i, \end{aligned} \quad /3.53/$$

którym odpowiada wektor uogólnionych sił czynnych postaci

$$\bar{F}_0 = \begin{bmatrix} gS\{m\}\bar{1} - S\{m\}\ddot{Q}_p \\ \bar{0} \\ gS\{m\epsilon\}\bar{1} - S\{m\epsilon\}\ddot{Q}_p \end{bmatrix}. \quad /3.54/$$

3.6. Macierzowe równanie ruchu układu pojazdy+przeszło

Macierzowe równanie ruchu przęsła /3.30/ i równowagi dynamicznej resorowanych mas pojazdów /3.44/ są sprzężone ze względu na strukturę wektorów \bar{F}_o i \bar{F}_p . Układ tych równań można zapisać kompleksowo tworząc poszerzony wektor współrzędnych uogólnionych

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_o \\ \bar{Q}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_w \\ \bar{Q}_v \\ \bar{Q}_p \end{bmatrix} \quad /3.55/$$

Otrzymuje się wówczas macierzowe równanie opisujące ruch układu dynamicznego złożonego z przęsła mostu i zespołu poruszających się pojazdów. Ma ono postać

$$(B_Q + \tilde{B}_Q) \ddot{\bar{Q}} + (C_Q + \tilde{C}_Q) \dot{\bar{Q}} + (K_Q + K_Q^z + \tilde{K}_Q) \bar{Q} = \bar{F}_Q \quad /3.56/$$

Macierze bezwładności, tłumienia i sztywności rozważanego układu są sumami składników macierzowych B_Q, C_Q, K_Q o elementach niezależnych od czasu i $\tilde{B}_Q, \tilde{C}_Q, \tilde{K}_Q$ o elementach zmiennych w czasie. Te ostatnie są efektem działania ruchomych mas resorowanych. Macierz sztywności zawiera ponadto składnik sztywności geometrycznej K_Q^z , reprezentujący nieliniowe własności układu /objektu/. Poniżej przedstawiono struktury opisanych macierzy i wektora \bar{F}_Q

$$B_Q = \begin{bmatrix} B_o & | & 0 \\ \hline 0 & | & \{m\} \end{bmatrix}, \quad C_Q = \begin{bmatrix} \mu B_o & | & 0 \\ \hline 0 & | & \{c\} \end{bmatrix}, \quad K_Q = \begin{bmatrix} K_o & | & 0 \\ \hline 0 & | & \{k\} \end{bmatrix}, \quad K_Q^z = \begin{bmatrix} K_o^z & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_Q(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & S\{m\} \\ 0 & S\{m\}S^T & -S\{m\delta\}S^T & | & 0 \\ 0 & -S\{m\delta\}S^T & S\{m\nu\}S^T & | & S\{m\epsilon\} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \quad /3.57/$$

/3.58/

$$\tilde{K}_Q(\tau) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v^2}{l^2}S\{m\varrho^2\}S^T\{d^2\} & \frac{v^2}{l^2}S\{m\delta\varrho^2\}S^T\{d^2\} & 0 \\ 0 & \frac{v^2}{l^2}S\{m\delta\varrho^2\}S^T\{d^2\} & -\frac{v^2}{l^2}S\{m\nu\varrho^2\}S^T\{d^2\} & 0 \\ \hline -\{k\}S^T - \frac{v}{l}\{c\varrho\}G^T\{d\} & 0 & -\{k\varepsilon\}S^T - \frac{v}{l}\{c\varepsilon\varrho\}G^T\{d\} & 0 \end{array} \right] \quad , /3.59/$$

$$\tilde{C}_Q(\tau) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{v}{l}S\{m\varrho\}G^T\{d\} & -2\frac{v}{l}S\{m\delta\varrho\}G^T\{d\} & 0 \\ 0 & -2\frac{v}{l}S\{m\delta\varrho\}G^T\{d\} & 2\frac{v}{l}S\{m\nu\varrho\}G^T\{d\} & 0 \\ \hline -\{c\}S^T & 0 & -\{c\varepsilon\}S^T & 0 \end{array} \right] \quad , /3.60/ \quad \bar{F}_Q(\tau) = \left[\begin{array}{c} gS\{m\}\bar{1} \\ \bar{0} \\ gS\{m\varepsilon\}\bar{1} \\ \bar{0} \end{array} \right] \quad , /3.61/$$

Niesymetryczne bloki macierzy \tilde{B}_Q , \tilde{C}_Q , \tilde{K}_Q reprezentują sprzężenia dwu zasadniczych grup równań, opisujących ruch przęsła i drgania pojazdów. Przyjęty model obciążenia generuje ponadto powstanie dodatkowych sprzężeń w równaniach ruchu obiektu, w zakresie przemieszczeń typu v i φ .

Równanie /3.56/ zostało wyprowadzone przy użyciu na ogół wielkości wymiarowych. Dla celów analizy studyjnej wygodniejsze jest stosowanie do opisu badanego układu parametrów bezwymiarowych. Właściwą parametryzację można przeprowadzić dopiero po sprowadzeniu równania /3.56/ do formy bezwymiarowej. W tym celu dokonano zamiany zmiennej t , wprowadzając zmienną bezwymiarową $\tau = vt/l$. Różniczkowanie po t i τ łączy związek

$$\dot{(\)} = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{v}{l} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{v}{l} (\)' \quad /3.62/$$

Jako podstawowe wielkości mianowane przyjęto pierwszą masę główną $m^* = m_b l/2$ i zredukowaną /pomnożoną przez π^{-4} / pierwszą sztywność główną $k^* = EJ_y/2l^3$, obliczone dla swobodnie podpartej belki o parametrach m_b , l , EJ_y , wykonującej pionowe drgania giętne. Jednocześnie wprowadzono bezwymiarowe współrzędne uogólnione według relacji

$$\bar{q}(\tau) = \frac{k^*}{m^* g} \bar{Q}(t) = \frac{EJ}{m_b g l^4} \bar{Q}(t) \quad /3.63/$$

oraz parametr impulsywności ruchu

$$\beta = \frac{v}{l} \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} = vl \sqrt{m_b/EJ_y} \quad /3.64/$$

Na podstawie wielkości porównawczych m^* , k^* określono dla obiektu bezwymiarowe macierze sztywności $K_{oq} = K_o/k^*$, $K_{oq}^? = K_o^?/k^*$, bezwładności $B_{oq} = B_o/m^*$ oraz tłumienia $C_{oq} = \gamma B_{oq}$, przy czym

$$\gamma = \mu m^* / \sqrt{k^* m^*} = \mu l^2 \sqrt{m_b/EJ_y} \quad /3.65/$$

Bezwymiarowe parametry masowe mostu wynoszą

$$\mu_1 = m/m_b, \quad \mu_2 = m_b b/m_b e, \quad \mu_3 = j_0/m_b e^2, \quad /3.66/$$

a parametry sztywności mają postać

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2H_0 l^2 / EJ_y, & \alpha_2 &= 128kfl^3 / EJ_y, & \alpha_3 &= J_z / J_y, \\ \alpha_4 &= m_b g l^4 / h EJ_y, & \alpha_5 &= J_\omega / e^2 J_y, & \alpha_6 &= GJ_s l^2 / e^2 EJ_y, & /3.67/ \\ \alpha_7 &= m_b g (b-c) l^4 / e^2 EJ_y, & \alpha_8 &= m_b g c l^4 / e h EJ_y. \end{aligned}$$

Wprowadzono ponadto diagonalne macierze bezwymiarowych charakterystyk analizowanego zbioru oscylatorów

$$\{\mu\} = \{m\} / m^*, \quad \{\alpha\} = \{k\} / k^*, \quad \{\xi\} = \{\gamma \sqrt{\alpha \mu}\}, \quad /3.68/$$

gdzie $\{\gamma\} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ jest zbiorem współczynników tłumienia określonych znaną zależnością

$$\gamma_i = c_i / \sqrt{k_i m_i}. \quad /3.69/$$

Poszukiwane rozwiązanie /3.25/ przyjmuje po podstawieniu /3.63/ formę

$$\begin{aligned} w(\xi, \tau) &= \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T \bar{q}_w, \\ v(\xi, \tau) &= \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T \bar{q}_v, \\ \varphi(\xi, \tau) &= \frac{m_b g l^4}{e EJ_y} \bar{s}^T \bar{q}_\varphi, \end{aligned} \quad /3.70/$$

a parametry naciągu cięgien /3.13/ będą obliczane według wzorów

$$\eta_1 = \alpha_c \bar{s}^T \bar{q}_w, \quad \eta_2 = \alpha_c \bar{s}^T \bar{q}_\varphi, \quad /3.71/$$

gdzie

$$\alpha_c = 2m_b g k l^5 / H_0 EJ_y \quad /3.72/$$

jest bezwymiarowym parametrem sztywności cięgna.

Po uwzględnieniu związków /3.63/ - /3.68/ i obustronnym pomnożeniu przez czynnik $1/m^* g$ przekształcono równanie /3.56/ do postaci

$$(B+\tilde{B})\bar{q}'' + (C+\tilde{C})\bar{q}' + (K+K^{\nu}+\tilde{K})\bar{q} = \bar{F} . \quad /3.73/$$

Struktury macierzy występujących w /3.73/ są następujące

$$B = \beta^2 \left[\begin{array}{c|c} B_{0q} & 0 \\ \hline 0 & \{\mu\} \end{array} \right] = \beta^2 \left[\begin{array}{ccc|c} \mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -\mu_2 I & 0 \\ 0 & -\mu_2 I & \mu_3 I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \{\mu\} \end{array} \right] ,$$

/3.74/

$$\tilde{B}(\tau) = \beta^2 \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & s\{\mu\} \\ 0 & s\{\mu\}s^T & -s\{\mu\delta\}s^T & 0 \\ 0 & -s\{\mu\delta\}s^T & s\{\mu\nu\}s^T & s\{\mu\varepsilon\} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] ,$$

$$C = \beta \left[\begin{array}{c|c} \gamma B_{0q} & 0 \\ \hline 0 & \{\delta\} \end{array} \right] = \beta \left[\begin{array}{ccc|c} \mu_1 \gamma I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I & -\mu_2 \gamma I & 0 \\ 0 & -\mu_2 \gamma I & \mu_3 \gamma I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \{\delta\} \end{array} \right] ,$$

/3.75/

$$\tilde{C}(\tau) = \beta \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta s\{\mu\delta\}G^T\{d\} & -2\beta s\{\mu\delta\delta\}G^T\{d\} & 0 \\ 0 & -2\beta s\{\mu\delta\delta\}G^T\{d\} & 2\beta s\{\mu\nu\delta\}G^T\{d\} & 0 \\ \hline -\{\delta\}s^T & 0 & -\{\delta\varepsilon\}s^T & 0 \end{array} \right] ,$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K_{0q} & 0 \\ \hline 0 & \{\kappa\} \end{array} \right] =$$

/3.76/

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \{d^4\} + \kappa_1 \{d^2\} + \kappa_2 \bar{g}\bar{g}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_3 \{d^4\} + \kappa_4 I & -\kappa_8 I & 0 \\ 0 & -\kappa_8 I & \kappa_5 \{d^4\} + (\kappa_1 + \kappa_6) \{d^2\} + \kappa_2 \bar{g}\bar{g}^T + \kappa_7 I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \{\kappa\} \end{array} \right] ,$$

$$K^{\eta} = \left[\begin{array}{c|c} K_{0q}^{\eta} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \eta_1 x_1 \{d^2\} & 0 & \eta_2 x_1 \{d^2\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \eta_2 x_1 \{d^2\} & 0 & \eta_1 x_1 \{d^2\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad /3.77/$$

$$\tilde{K}(\tau) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 s\{\mu g^2\} s^T\{d^2\} & \beta^2 s\{\mu \delta g^2\} s^T\{d^2\} & 0 \\ 0 & \beta^2 s\{\mu \delta g^2\} s^T\{d^2\} & -\beta^2 s\{\mu \nu g^2\} s^T\{d^2\} & 0 \\ \hline -\{x\} s^T - & 0 & -\{x \epsilon\} s^T - & 0 \\ -\beta\{j g\} G^T\{d\} & & -\beta\{j \epsilon g\} G^T\{d\} & \end{array} \right], \quad /3.78/$$

$$\bar{F}(\tau) = \left[\begin{array}{c} s\{\mu\} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \hline s\{\mu \epsilon\} \bar{1} \\ \bar{0} \end{array} \right]. \quad /3.79/$$

Macierzowe równanie /3.73/ jest układem niejednorodnych, nieliniowych, sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, o zmiennych w czasie współczynnikach. Opisuje ono niestacjonarny ruch złożonego układu dynamicznego, jakim jest prześło mostu wiszącego obciążonego zbiorem ruchomych pojazdów. Zmienne w czasie macierze \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{K} są matematycznym przejawem wpływu inercji obciążenia ruchomego. Tworzą one efemeryczne składniki macierzy bezwładności, tłumienia i sztywności układu.

W równaniu /3.73/ uwzględniono szereg istotnych cech ruchu obiektu, a mianowicie przestrzenny charakter drgań, efekty nieliniowości geometrycznej, wpływ statycznych poprawek drugiego rzędu /efekt wahadkowy/ oraz sprzężenie bezwładnościowe drgań. Poprawki drugiego rzędu reprezentowane przez parametry sztywności α_4 , α_7 , α_8 oraz ^{nieliniowość} reprezentowana macierzą sztywności geometrycznej K^{η} są wynikiem pewnych uściśleń klasycznej teorii /częściowe odrzucenie zasady zeszywnienia, uwzględnienie członów nieliniowych/. Pominięcie wpływu wymienionych efektów jest równoznaczne z przyjęciem $\alpha_4 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0$, $K^{\eta} = 0$. Natomiast sprzę-

zenie bezwładnościowe jest ściśle związane z przyjętym modelem obiektu i znika jedynie w przypadku dźwigara o przekroju bisymetrycznym, gdy jego środek jest utożsamiony ze środkiem bezwładności.

Struktura macierzy zmiennych w czasie \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{K} jest dość skomplikowana, co jest spowodowane uwzględnieniem sił poziomej i obrotowej inercji masy oscylatora, działających w poprzecznej płaszczyźnie pionowej. W przypadku klasycznego oscylatora /o inercji pionowej/ wektor \bar{F} pozostaje bez zmian i struktura macierzy \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{K} znacznie się upraszcza, a mianowicie

$$\tilde{B}(\tau) = \beta^2 \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & S\{\mu\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S\{\mu\epsilon\} \\ \hline 0 & 0 & & 0 \end{array} \right], \quad \tilde{C}(\tau) = \beta \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\{j\}S^T & 0 & -\{j\epsilon\}S^T & 0 \end{array} \right],$$

/3.80/

$$\tilde{K}(\tau) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\{x\}S^T - \beta\{j_s\}G^T\{d\} & 0 & -\{x\epsilon\}S^T - \beta\{j_{\epsilon s}\}G^T\{d\} & 0 \end{array} \right],$$

/3.81/

Sformułowany problem dynamiczny można sprowadzić do zadania statycznego przyjmując $\beta = 0$, co odpowiada quasi-statycznemu przebiegowi obciążenia. Równanie /3.73/ jest wówczas macierzowym równaniem równowagi statycznej rozpatrywanego układu. Dla oznaczenia wektora uogólnionych współrzędnych statycznych wprowadzono symbol \bar{q}_s , przy czym

$$\bar{q}_s = \begin{bmatrix} \bar{q}_{os} \\ \bar{q}_{ps} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{ws} \\ \bar{q}_{vs} \\ \bar{q}_{\varphi s} \\ \bar{q}_{ps} \end{bmatrix} \quad /3.82/$$

Pierwsza, dotycząca obiektu grupa równań separuje się do postaci

$$(K_{oq} + K_{oq}^{\eta}) \bar{q}_{os} = \bar{F}_{oq} \quad , \quad /3.83/$$

gdzie

$$\bar{F}_{oq} = \begin{bmatrix} S\{\mu\} \bar{1} \\ \bar{0} \\ S\{\mu\varepsilon\} \bar{1} \end{bmatrix} \quad . \quad /3.84/$$

Druga grupa równań daje relację kontrolną

$$- S^T \bar{q}_{ws} - \{\varepsilon\} S^T \bar{q}_{\varphi s} + \bar{q}_{ps} = \bar{0} \quad . \quad /3.85/$$

Nieliniowy problem statyczny opisany równaniem /3.83/ można rozwiązać stosując metodę opisaną w punkcie 3.3. . Zmienna czasowa τ ma w tym przypadku sens parametru identyfikującego położenie przyjętej grupy obciążeń. Rozwiązanie uzyskuje się sukcesywnie "krok po kroku" dla kolejnych punktów węzłowych τ_i . Na długości kroku równanie /3.83/ jest liniowe, przy czym macierz K_{oq}^{η} obliczana jest na podstawie parametrów η_{1s}, η_{2s} prognozowanych według formuł /3.23/, /3.24/. W każdym kroku wyznacza się wektor współrzędnych statycznych

$$\bar{q}_{os} = (K_{oq} + K_{oq}^{\eta})^{-1} \bar{F}_{oq} \quad , \quad /3.86/$$

oraz dokonuje się korekcji parametrów naciągu cięgien, obliczając je ze wzorów

$$\eta_{1s} = \alpha_c \bar{s}^T \bar{q}_{ws} \quad , \quad \eta_{2s} = \alpha_c \bar{s}^T \bar{q}_{\varphi s} \quad . \quad /3.87/$$

Skorygowane według /3.87/ wartości η_{1s}, η_{2s} są podstawą ich dalszej prognozy. Statyczne przebiegi składowych stanu przemieszczenia belki określa się według analogicznej do /3.70/ relacji

$$\begin{aligned} w_s(\xi, \tau) &= \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T \bar{q}_{ws} \quad , \\ v_s(\xi, \tau) &= \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T \bar{q}_{vs} \quad , \\ \varphi_s(\xi, \tau) &= \frac{m_b g l^4}{eEJ_y} \bar{s}^T \bar{q}_{\varphi s} \quad . \end{aligned} \quad /3.88/$$

Rozwiązanie statyczne i dynamiczne dla liniowego modelu obiektu otrzymamy przyjmując $K_0^? = 0$.

3.7. Metoda numerycznego całkowania równań

Nieliniowe równanie ruchu /3.73/ można rozwiązać numerycznie za pomocą maszyn cyfrowych. Pewną metodę całkowania równań tego typu podał Argyris [4]. Podstawą jego metody jest założenie odcinkowej linearyzacji oraz lokalna aproksymacja sił bezwładności sześciennym wielomianem Hermite'a. Nieliniowe reakcje sprężyste określa się według metody przyrostów liniowych z wykorzystaniem zmodyfikowanej macierzy sztywności stycznej. Algorytm metody Argyrisa jest skomplikowany, szczególnie ze względu na wprowadzenie zmodyfikowanej macierzy sztywności, której obliczenie wymaga dwukrotnego w każdym kroku wyznaczenia macierzy sztywności stycznej /por. pkt 2.2./. W przypadku mocnych wpływów nieliniowych jest to zabieg uzasadniony, gdyż powoduje wyraźne zwiększenie dokładności rozwiązania. Jego efektywność jest jednak wątpliwa dla nieliniowości słabszej i dostatecznie regularnej, a więc takiej, jaką charakteryzuje się nieliniowa odpowiedź mostu wiszącego na działanie ruchomego obciążenia.

W niniejszej pracy numeryczne całkowanie równania /3.73/ będzie przeprowadzane jednocześnie z prognozą nieliniowych parametrów, według zasad opisanych w punkcie 3.3. . Na podstawie prognozowanych wartości parametrów η_1, η_2 będzie w każdym kroku wyznaczana aktualna postać geometrycznego składnika macierzy sztywności, stałego w obrębie kroku. Zlinearyzowane w ten sposób odcinkowo równanie /3.73/ może być wówczas całkowane dowolną metodą numeryczną. Przegląd metod numerycznego całkowania równań ruchu zawarto m.in. w pracach [23,25,33].

Metoda całkowania powinna być tak dobrana, aby umożliwiła uzyskanie rozwiązania nieobciążonego błędami spowodowanymi efektem tłumienia pasożytniczego [25]. Warunek ten spełniają najczęściej stosowane kolokacyjne metody stałego przyspieszenia lub Newmarka [25]. W omawianym przypadku najbardziej przydatna

jest metoda z punktem kolokacji na końcu kroku, a więc metoda Newmarka. Zmienne w czasie współczynniki macierzowe równania oraz macierz sztywności geometrycznej są wówczas generowane w punktach węzłowych. Możliwe jest zatem stosowanie jednolitej prognozy statycznych i dynamicznych wartości parametrów η_1, η_2 .

Formuły całkowania metodą Newmarka [37] można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \bar{q}_{i+1} &= \bar{q}_i + h\bar{q}'_i + \alpha^* h^2 \bar{q}''_i + \beta^* h^2 \bar{q}''_{i+1} , \\ \bar{q}'_{i+1} &= \bar{q}'_i + \frac{1}{2} h \bar{q}''_i + \frac{1}{2} h \bar{q}''_{i+1} , \end{aligned} \quad /3.89/$$

gdzie $\alpha^* = \frac{1}{2} - \beta^*$, a $h = \tau_{i+1} - \tau_i$ jest stałą, równą długości kroku czasowego. Nieznany wektor \bar{q}_{i+1} wyznacza się w każdym kroku z warunku kolokacji, który ma postać równania algebraicznego

$$\begin{aligned} (D_{i+1} + \frac{1}{2} h T_{i+1} + \beta^* h^2 R_{i+1}) \bar{q}''_{i+1} &= \bar{F}_{i+1} - T_{i+1} (\bar{q}'_i + \frac{1}{2} h \bar{q}''_i) - \\ &- R_{i+1} (\bar{q}_i + h \bar{q}'_i + \alpha^* h^2 \bar{q}''_i) . \end{aligned} \quad /3.90/$$

D, T, R są współczynnikami macierzowymi równania ruchu /3.73/ i wynoszą $D = B + \tilde{B}$, $T = C + \tilde{C}$, $R = K + K^{\mathcal{L}} + \tilde{K}$. Indeksy "i" oraz "i+1" są symbolami chwil τ_i, τ_{i+1} / punktów węzłowych /, w których są generowane macierze D, T, R, wektor \bar{F} , wektor współrzędnych uogólnionych \bar{q} oraz wektory prędkości \bar{q}' i przyspieszeń uogólnionych \bar{q}'' . W punkcie τ_{i+1} macierz $K^{\mathcal{L}}$ jest wyznaczana na podstawie prognozowanych według /3.23/, /3.24/ wartości $\eta_1^{(i+1)}, \eta_2^{(i+1)}$. Na wstępie procedury całkowania należy określić wektor przyspieszeń początkowych \bar{q}''_0 z równania /3.73/, które w chwili $\tau_0=0$ ma postać

$$D_0 \bar{q}''_0 = \bar{F}_0 - T_0 \bar{q}'_0 - R_0 \bar{q}_0 . \quad /3.91/$$

Wektory \bar{q}_0 i \bar{q}'_0 są znane dla danych warunków początkowych.

Stabilność numeryczną procedury całkowania zapewnia się przez odpowiedni dobór długości kroku h. Musi być spełniony warunek [25]

$$\omega h < 2/\sqrt{1-4\beta^*} , \quad 0 \leq \beta^* \leq 1/4 , \quad /3.92/$$

gdzie ω jest dominującą częstością drgań własnych. W przypadku $\beta^* = 1/4$ otrzymuje się wariant metody Newmarka o nieograniczonej stabilności, co stwarza możliwość całkowania stosunkowo dużymi krokami. Zalety tej nie można jednakże w pełni wykorzystać, ponieważ ze względu na nieliniowy charakter rozwiązania krok czasowy musi być dostatecznie mały. Ostatecznie do obliczeń zastosowano wariant z parametrem $\beta^* = 1/8$, któremu odpowiada ograniczenie $\omega h < \sqrt{8}$. Wariant ten wybrano na podstawie kryterium minimalizacji błędu fazowego [37].

Rozwiązanie uzyskane metodą numerycznego całkowania jest zawsze obarczone błędem dyskretyzacji, spowodowanym zastosowaniem kroku o skończonej długości. Dostateczną dokładność można zagwarantować dobierając długość kroku spełniającą warunek [25]

$$\hat{\omega} h \leq 2\pi / N, \quad /3.93/$$

gdzie N jest minimalną liczbą kroków koniecznych do wymodelowania jednego cyklu oscylacji z częstością $\hat{\omega}$, przy czym $\hat{\omega}$ oznacza taką częstość drgań własnych, której odpowiada forma drgań mająca jeszcze istotne znaczenie w kształtowaniu pełnego rozwiązania.

Wyznaczone na podstawie wymienionych warunków granice stabilności i dokładności numerycznej rozwiązania są w przypadku nieliniowego równania ruchu jedynie pewnym przybliżeniem, jeśli za ω i $\hat{\omega}$ zostaną podstawione częstości obliczone dla układu zlinearyzowanego. Przybliżenie to będzie tym dokładniejsze im słabsze będą wpływy nieliniowe. W ostatnich latach ukazało się kilka prac, w których badano stabilność metody Newmarka zastosowanej do rozwiązywania nieliniowych równań ruchu [5, 16, 34]. Nie sformułowano jednakże praktycznie przydatnego warunku, określającego granicę stabilności. Wobec powyższego ostateczna kontrola dokładności rozwiązywania nieliniowego będzie przeprowadzana metodą podwajania liczby kroków całkowania.

3.8. Opis stanu przemieszczenia i stanu naprężenia w wybranych elementach mostu

Stan przemieszczenia belki usztywniającej mostu, wywołany dynamicznym oddziaływaniem rozważanego obciążenia, określony jest w przekroju ξ współrzędnymi w , v , φ , które są opisane relacjami /3.70/. Ciężna doznają w przekroju ξ pionowych przesunięć w_1 , w_2 , wynoszących po uwzględnieniu /3.70/

$$w_1(\xi, \tau) = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T(\bar{q}_w - \bar{q}_\varphi) , \quad /3.94/$$

$$w_2(\xi, \tau) = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T(\bar{q}_w + \bar{q}_\varphi) .$$

W warunkach statycznych przesunięcia ciężenia określają funkcje

$$w_{1s}(\xi, \tau) = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T(\bar{q}_{ws} - \bar{q}_{\varphi s}) , \quad /3.95/$$

$$w_{2s}(\xi, \tau) = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T(\bar{q}_{ws} + \bar{q}_{\varphi s}) .$$

Statyczne i dynamiczne rozkłady geometryczno-czasowe przesunięć i innych analizowanych wielkości będą dalej opisywane w formie przebiegów normowanych, znacznie przydatniejszych dla celów analizy studyjnej. Za normę będzie przyjmowana największa modularnie wartość statyczna danej wielkości. Normy przesunięć ciężenia w przekroju ξ wynoszą więc

$$\|w_1\| = \max_{\tau} [w_{1s}(\xi, \tau)] , \quad \|w_2\| = \max_{\tau} [w_{2s}(\xi, \tau)] . \quad /3.96/$$

Dla uproszczenia zapisu pominięto we wzorach /3.96/ znak wartości bezwzględnej, nałożony na wielkości w_{1s} , w_{2s} . Uproszczenie to będzie konsekwentnie stosowane we wszystkich dalszych wzorach definiujących normy rozpatrywanych wielkości. Przebiegi czasowe przesunięć są określone na podstawie wyznaczonych numerycznie w dyskretnym zbiorze punktów węzłowych przebiegów współrzędnych

uogólnionych \bar{q} , \bar{q}_s . Metoda numerycznej realizacji rozwiązania pozwala na bezpośrednią obserwację jego rozwoju w czasie, co z kolei umożliwia naturalną identyfikację norm. Normowane, statyczne i dynamiczne przebiegi przesunięć cięgien są opisane związkami

$$w_{1s}^n(\xi, \tau) = \frac{w_{1s}(\xi, \tau)}{\|w_1\|} = \frac{\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} - \bar{q}_{\varphi s})}{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} - \bar{q}_{\varphi s})]},$$

$$w_{2s}^n(\xi, \tau) = \frac{w_{2s}(\xi, \tau)}{\|w_2\|} = \frac{\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} + \bar{q}_{\varphi s})}{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} + \bar{q}_{\varphi s})]},$$

$$w_1^n(\xi, \tau) = \frac{w_1(\xi, \tau)}{\|w_1\|} = \frac{\bar{s}^T(\bar{q}_w - \bar{q}_{\varphi})}{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} - \bar{q}_{\varphi s})]},$$

$$w_2^n(\xi, \tau) = \frac{w_2(\xi, \tau)}{\|w_2\|} = \frac{\bar{s}^T(\bar{q}_w + \bar{q}_{\varphi})}{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} + \bar{q}_{\varphi s})]},$$

/3.97/

przy czym $\max_{\tau} [w_{1s}^n(\xi, \tau)] = \pm 1$, $\max_{\tau} [w_{2s}^n(\xi, \tau)] = \pm 1$.

Przeciążenia dynamiczne elementów konstrukcji są zwykle oceniane na podstawie współczynników dynamicznych, obliczanych w odniesieniu do wybranych wielkości stanu przemieszczenia lub sił przekrojowych /naprężeń/. Współczynniki dynamiczne dla przesunięć cięgien w przekroju ξ można zdefiniować wzorami

$$\varphi_{w_1}(\xi) = \max_{\tau} [w_1^n(\xi, \tau)] = \frac{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_w - \bar{q}_{\varphi})]}{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} - \bar{q}_{\varphi s})]},$$

$$\varphi_{w_2}(\xi) = \max_{\tau} [w_2^n(\xi, \tau)] = \frac{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_w + \bar{q}_{\varphi})]}{\max_{\tau} [\bar{s}^T(\bar{q}_{ws} + \bar{q}_{\varphi s})]}.$$

/3.98/

Określają one proporcję między największymi pełnymi przemieszczeniami dynamicznymi, a największymi przemieszczeniami statycznymi, przy jednoczesnym uwzględnieniu najniekorzystniejszych sytuacji konfiguracyjnych w procesie przejazdu obciążenia.

W analogiczny sposób wprowadza się współczynnik dynamiczny dla przyrostów sił naciągu cięgien ΔH_1 , ΔH_2 . Pełne dynamiczne

przyrosty naciągów wynoszą /por. wzory /3.12/ /

$$\Delta H_1(\tau) = H_0 (\eta_1 - \eta_2) , \quad \Delta H_2(\tau) = H_0 (\eta_1 + \eta_2) , \quad /3.99/$$

przyrosty statyczne określają funkcje

$$\Delta H_{1s}(\tau) = H_0 (\eta_{1s} - \eta_{2s}) , \quad \Delta H_{2s}(\tau) = H_0 (\eta_{1s} + \eta_{2s}) . /3.100/$$

Normy i przebiegi normowane definiuje się analogicznie jak dla pionowych przesunięć cięgien

$$\|\Delta H_1\| = \max_{\tau} [\Delta H_{1s}(\tau)] , \quad \|\Delta H_2\| = \max_{\tau} [\Delta H_{2s}(\tau)] , \quad /3.101/$$

$$\Delta H_{1s}^n(\tau) = \frac{\Delta H_{1s}(\tau)}{\|\Delta H_1\|} , \quad \Delta H_{2s}^n(\tau) = \frac{\Delta H_{2s}(\tau)}{\|\Delta H_2\|} ,$$

$$\Delta H_1^n(\tau) = \frac{\Delta H_1(\tau)}{\|\Delta H_1\|} , \quad \Delta H_2^n(\tau) = \frac{\Delta H_2(\tau)}{\|\Delta H_2\|} . \quad /3.102/$$

Współczynniki dynamiczne wynoszą odpowiednio

$$\varphi_{\Delta H_1} = \max_{\tau} [\Delta H_1^n(\tau)] , \quad \varphi_{\Delta H_2} = \max_{\tau} [\Delta H_2^n(\tau)] . \quad /3.103/$$

W przypadku belki usztywniającej mostu określenie przemieszczeń i sił wewnętrznych oraz odpowiadających im współczynników dynamicznych jest ze względu na przestrzenny opis dźwigara zadaniem bardziej skomplikowanym. Składowe w_i , v_i przemieszczenia dowolnego punktu "i" przekroju ξ /rys. 3.7/ związane są z odniesionymi do środka ścinania współrzędnymi w , v , φ relacjami

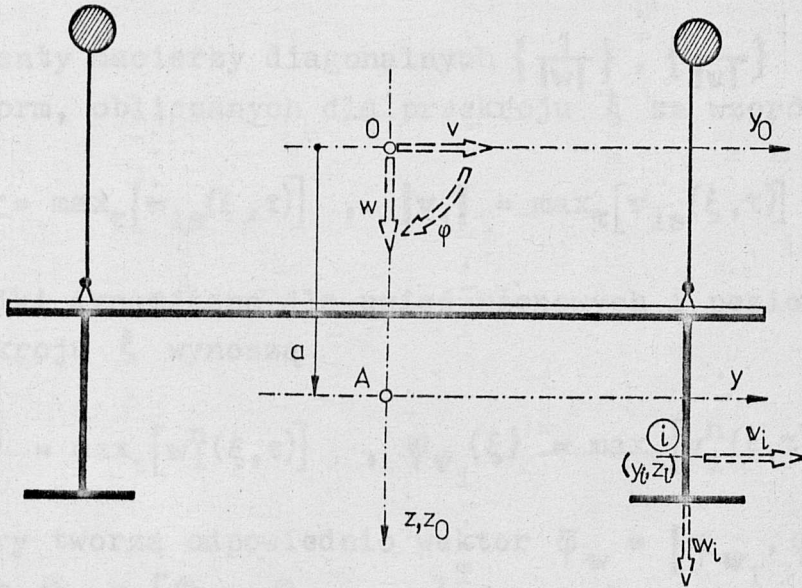
$$w_i = w + y_i \varphi , \quad v_i = v - (z_i + a) \varphi , \quad /3.104/$$

gdzie y_i , z_i są współrzędnymi punktu "i" w układzie osi y, z . Pełne dynamiczne ugięcia pionowe i poziome są określone po uwzględnieniu zależności /3.70/ funkcjami

$$w_i(\xi, \tau) = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T \left(\bar{q}_w + \frac{y_i}{e} \bar{q}_\varphi \right),$$

/3.105/

$$v_i(\xi, \tau) = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \bar{s}^T \left(\bar{q}_v - \frac{z_i + a}{e} \bar{q}_\varphi \right).$$



Rys. 3.7

Wartości ugięć dla zbioru analizowanych punktów przekroju zestawiono w postaci wektorów $\bar{w} = [w_1, w_2, \dots]^T$ i $\bar{v} = [v_1, v_2, \dots]^T$, gdzie

$$\bar{w} = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} (\bar{1} \bar{q}_w^T + \bar{\lambda}_y \bar{q}_\varphi^T) \bar{s}, \quad \bar{v} = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} (\bar{1} \bar{q}_v^T - \bar{\lambda}_o \bar{q}_\varphi^T) \bar{s}, \quad /3.106/$$

przy czym wprowadzono oznaczenia $\bar{\lambda}_y = \frac{1}{e} [y_1, y_2, \dots]^T$, $\bar{\lambda}_z = \frac{1}{e} [z_1, z_2, \dots]^T$, $\bar{\lambda}_o = \bar{\lambda}_z + \frac{a}{e} \bar{1}$. Wektory ugięć statycznych mają postać

$$\bar{w}_s = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} (\bar{1} \bar{q}_{ws}^T + \bar{\lambda}_y \bar{q}_{\varphi s}^T) \bar{s}, \quad \bar{v}_s = \frac{m_b g l^4}{EJ_y} (\bar{1} \bar{q}_{vs}^T - \bar{\lambda}_o \bar{q}_{\varphi s}^T) \bar{s}.$$

/3.107/

Wektory normowanych przemieszczeń statycznych i dynamicznych

oblicza się według relacji

$$\begin{aligned} \bar{w}_s^n &= \left\{ \frac{1}{\|w\|} \right\} \bar{w}_s & , & \quad \bar{v}_s^n = \left\{ \frac{1}{\|v\|} \right\} \bar{v}_s & , \\ \bar{w}^n &= \left\{ \frac{1}{\|w\|} \right\} \bar{w} & , & \quad \bar{v}^n = \left\{ \frac{1}{\|v\|} \right\} \bar{v} & , \end{aligned} \quad /3.108/$$

gdzie elementy macierzy diagonalnych $\left\{ \frac{1}{\|w\|} \right\}$, $\left\{ \frac{1}{\|v\|} \right\}$ są odwrotnościami norm, obliczanych dla przekroju ξ ze wzorów

$$\|w_i\| = \max_{\tau} [w_{is}(\xi, \tau)] \quad , \quad \|v_i\| = \max_{\tau} [v_{is}(\xi, \tau)] \quad , \quad /3.109/$$

Współczynniki dynamiczne dla ugięć pionowych i poziomych punktu "i" w przekroju ξ wynoszą

$$\varphi_{w_i}(\xi) = \max_{\tau} [w_i^n(\xi, \tau)] \quad , \quad \varphi_{v_i}(\xi) = \max_{\tau} [v_i^n(\xi, \tau)] \quad , /3.110/$$

a ich zbiory tworzą odpowiednio wektor $\bar{\varphi}_w = [\varphi_{w_1}, \varphi_{w_2}, \dots]^T$ oraz wektor $\bar{\varphi}_v = [\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}, \dots]^T$.

W zginanej i nieswobodnie skręcanej cienkościennej belce usztywniającej powstają zdefiniowane następującymi wzorami momenty zginające

$$\begin{aligned} M_y(\xi, \tau) &= -EJ_y \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial x^2} = -\frac{EJ_y}{l^2} \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} & , \\ M_z(\xi, \tau) &= EJ_z \frac{\partial^2 v(\xi, \tau)}{\partial x^2} = \frac{EJ_z}{l^2} \frac{\partial^2 v(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} & , \end{aligned} \quad /3.111/$$

siły tnące

$$\begin{aligned} T_z(\xi, \tau) &= -EJ_y \frac{\partial^3 w(\xi, \tau)}{\partial x^3} = -\frac{EJ_y}{l^3} \frac{\partial^3 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} & , \\ T_y(\xi, \tau) &= -EJ_z \frac{\partial^3 v(\xi, \tau)}{\partial x^3} = -\frac{EJ_z}{l^3} \frac{\partial^3 v(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} & , \end{aligned} \quad /3.112/$$

moment czystego skręcania de Saint-Venanta

$$M_S(\xi, \tau) = GJ_S \frac{\partial \varphi(\xi, \tau)}{\partial x} = \frac{GJ_S}{l} \frac{\partial \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi} \quad , \quad /3.113/$$

bimoment

$$B_\omega(\xi, \tau) = -EJ_\omega \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \tau)}{\partial x^2} = -\frac{EJ_\omega}{l^2} \frac{\partial^2 \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \quad , \quad /3.114/$$

oraz moment giętno-skrętny

$$M_\omega(\xi, \tau) = -EJ_\omega \frac{\partial^3 \varphi(\xi, \tau)}{\partial x^3} = -\frac{EJ_\omega}{l^3} \frac{\partial^3 \varphi(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \quad . \quad /3.115/$$

W przekroju o dodatniej normalnej zewnętrznej dodatnie są siły przekrojowe, których wektory mają zwroty zgodne ze zwrotami osi układu współrzędnych x, y, z . Siłom wewnętrznym odpowiada stan naprężenia, którego składowe w punkcie "i" przekroju belki określone są wzorami

$$\sigma_i(\xi, \tau) = \frac{M_Y}{J_Y} z_i - \frac{M_Z}{J_Z} y_i + \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega_i \quad , \quad /3.116/$$

$$\tau_i(\xi, \tau) = -\frac{1}{d_i} \left(\frac{T_Z}{J_Y} \tilde{S}_{yi} + \frac{T_Y}{J_Z} \tilde{S}_{zi} + \frac{M_\omega}{J_\omega} \tilde{S}_{\omega i} \right) \quad , \quad /3.117/$$

$$\tau_i^S(\xi, \tau) = \frac{M_S}{J_S} d_i \quad , \quad /3.118/$$

przy czym $\sigma_i, \tau_i, \tau_i^S$ oznaczają odpowiednio naprężenia normalne i styczne oraz naprężenia styczne wywołane czystym skręcaniem, w punkcie przekroju o współrzędnych kartezjańskich y_i, z_i i współrzędnej wycinkowej ω_i . $\tilde{S}_{yi}, \tilde{S}_{zi}$ oznaczają momenty statyczne odciętej części przekroju, obliczone względem osi y, z , $\tilde{S}_{\omega i}$ jest wycinkowym momentem statycznym odciętej części przekroju, d_i oznacza grubość ścianki odpowiadającą punktowi "i".

Po podstawieniu do formuł /3.116/ ÷ /3.118/ zależności /3.111/ ÷ /3.115/ i po uwzględnieniu /3.70/ oraz wykonaniu obli-

czeń otrzymuje się

$$\begin{aligned} \sigma_i(\xi, \tau) &= \frac{z_i}{J_y} \left(- \frac{EJ_y}{l^2} \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \frac{\partial^2 \bar{s}^T}{\partial \xi^2} \bar{q}_w \right) - \frac{y_i}{J_z} \left(\frac{EJ_z}{l^2} \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \frac{\partial^2 \bar{s}^T}{\partial \xi^2} \bar{q}_v \right) + \\ &+ \frac{\omega_i}{J_\omega} \left(- \frac{EJ_\omega}{e l^2} \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \frac{\partial^2 \bar{s}^T}{\partial \xi^2} \bar{q}_\varphi \right) = \\ &= \frac{Q_b l}{J_y} \bar{s}^T \{d^2\} (z_i \bar{q}_w + y_i \bar{q}_v + \frac{\omega_i}{e} \bar{q}_\varphi) , \end{aligned} \quad /3.119/$$

$$\begin{aligned} \tau_i(\xi, \tau) &= - \frac{\tilde{S}_{yi}}{d_i J_y} \left(- \frac{EJ_y}{l^3} \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \frac{\partial^3 \bar{s}^T}{\partial \xi^3} \bar{q}_w \right) - \frac{\tilde{S}_{zi}}{d_i J_z} \left(- \frac{EJ_z}{l^3} \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \frac{\partial^3 \bar{s}^T}{\partial \xi^3} \bar{q}_v \right) - \frac{\tilde{S}_{\omega i}}{d_i J_\omega} \left(- \frac{EJ_\omega}{e l^3} \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \frac{\partial^3 \bar{s}^T}{\partial \xi^3} \bar{q}_\varphi \right) = \\ &= - \frac{Q_b}{J_y} \frac{1}{d_i} \bar{c}^T \{d^3\} (\tilde{S}_{yi} \bar{q}_w + \tilde{S}_{zi} \bar{q}_v + \frac{\tilde{S}_{\omega i}}{e} \bar{q}_\varphi) , \end{aligned} \quad /3.120/$$

$$\tau_i^S(\xi, \tau) = \frac{d_i}{J_s} \left(\frac{GJ_s}{le} \frac{m_b g l^4}{EJ_y} \frac{\partial \bar{s}^T}{\partial \xi} \bar{q}_\varphi \right) = \frac{Q_b l^2}{e J_y} \frac{G}{E} d_i \bar{c}^T \{d\} , \quad /3.121/$$

gdzie $Q_b = m_b g l$ jest ciężarem własnym belki. Zbiory wartości naprężeń obliczonych w analizowanych punktach przekroju tworzą wektory $\bar{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots]^T$, $\bar{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots]^T$, $\bar{\tau}^S = [\tau_1^S, \tau_2^S, \dots]^T$, przy czym

$$\bar{\sigma} = \frac{Q_b l e}{J_y} \left(\bar{\lambda}_z \bar{q}_w^T + \bar{\lambda}_y \bar{q}_v^T + \bar{\lambda}_\omega \bar{q}_\varphi^T \right) \{d^2\} \bar{s} ,$$

$$\bar{\tau} = - \frac{Q_b e^2}{J_y} \{ \lambda_d^{-1} \} \left(\bar{\lambda}_1 \bar{q}_w^T + \bar{\lambda}_2 \bar{q}_v^T + \bar{\lambda}_3 \bar{q}_\varphi^T \right) \{d^3\} \bar{c} \quad /3.122/$$

$$\bar{\tau}^S = \frac{Q_b l^2}{J_y} \frac{G}{E} \{ \lambda_d \} \bar{1} \bar{q}_\varphi^T \{d\} \bar{c} .$$

We wzorach /3.122/ wprowadzono oznaczenia

$$\{\lambda_d\} = \frac{1}{e} \text{diag}(d_1, d_2, \dots) ,$$

$$\bar{\lambda}_\omega = \frac{1}{e^2} [\omega_1, \omega_2, \dots]^T , \quad \bar{\lambda}_1 = \frac{1}{e^3} [\tilde{s}_{y1}, \tilde{s}_{y2}, \dots]^T ,$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{1}{e^3} [\tilde{s}_{z1}, \tilde{s}_{z2}, \dots]^T , \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{1}{e^4} [\tilde{s}_{\omega1}, \tilde{s}_{\omega2}, \dots]^T .$$

/3.123/

W warunkach statycznych wektory naprężeń mają formę

$$\bar{\sigma}_s = \frac{Q_b l e}{J_y} (\bar{\lambda}_z \bar{q}_{ws}^T + \bar{\lambda}_y \bar{q}_{vs}^T + \bar{\lambda}_\omega \bar{q}_{\varphi s}^T) \{d^2\} \bar{s} ,$$

$$\bar{\tau}_s = -\frac{Q_b e^2}{J_y} \{\lambda_d^{-1}\} (\bar{\lambda}_1 \bar{q}_{ws}^T + \bar{\lambda}_2 \bar{q}_{vs}^T + \bar{\lambda}_3 \bar{q}_{\varphi s}^T) \{d^3\} \bar{c} , \quad /3.124/$$

$$\bar{\tau}_s^S = \frac{Q_b l^2}{J_y} \frac{G}{E} \{\lambda_d\} \bar{1} \bar{q}_{\varphi s}^T \{d\} \bar{c} .$$

Normowanie przebiegów czasowych naprężeń przeprowadza się podobnie jak w przypadku normowania ugięć, a więc według zależności.

$$\bar{\sigma}_s^n = \left\{ \frac{1}{|\bar{\sigma}|} \right\} \bar{\sigma}_s , \quad \bar{\sigma}^n = \left\{ \frac{1}{|\bar{\sigma}|} \right\} \bar{\sigma} ,$$

$$\bar{\tau}_s^n = \left\{ \frac{1}{|\bar{\tau}|} \right\} \bar{\tau}_s , \quad \bar{\tau}^n = \left\{ \frac{1}{|\bar{\tau}|} \right\} \bar{\tau} , \quad /3.125/$$

$$\bar{\tau}_s^{Sn} = \left\{ \frac{1}{|\bar{\tau}_s^S|} \right\} \bar{\tau}_s^S , \quad \bar{\tau}^{Sn} = \left\{ \frac{1}{|\bar{\tau}_s^S|} \right\} \bar{\tau}_s^S .$$

Elementy macierzy diagonalnych $\left\{ \frac{1}{|\bar{\sigma}|} \right\}$, $\left\{ \frac{1}{|\bar{\tau}|} \right\}$, $\left\{ \frac{1}{|\bar{\tau}_s^S|} \right\}$ są odwrotnościami norm, które zdefiniowane są dla przekroju ξ wzorami

$$\|\sigma_i\| = \max_{\tau} [\sigma_{is}(\xi, \tau)] , \quad \|\tau_i\| = \max_{\tau} [\tau_{is}(\xi, \tau)] ,$$

$$\|\tau_i^S\| = \max_{\tau} [\tau_{is}^S(\xi, \tau)] . \quad /3.126/$$

Współczynniki dynamiczne dla naprężeń w punkcie "i" przekroju wynoszą

$$\varphi_{\sigma_i}(\xi) = \max_{\tau} [\sigma_i^n(\xi, \tau)] \quad , \quad \varphi_{\tau_i}(\xi) = \max_{\tau} [\tau_i^n(\xi, \tau)] \quad ,$$

$$\varphi_{\tau_i^S}(\xi) = \max_{\tau} [\tau_i^{Sn}(\xi, \tau)] \quad . \quad /3.127/$$

Zbiory współczynników dynamicznych obliczonych dla trzech typów naprężeń można zapisać w postaci wektorów $\bar{\varphi}_{\sigma} = [\varphi_{\sigma_1}, \varphi_{\sigma_2}, \dots]^T$, $\bar{\varphi}_{\tau} = [\varphi_{\tau_1}, \varphi_{\tau_2}, \dots]^T$, $\bar{\varphi}_{\tau^S} = [\varphi_{\tau_1^S}, \varphi_{\tau_2^S}, \dots]^T$.

4. INNE ZASTOSOWANIA SFORMUŁOWANEJ TEORII

4.1. Zagadnienie własne [29]

W przypadku analizy drgań własnych efekty nieliniowości mogą być pominięte, gdyż rozważa się małe drgania wokół położenia równowagi, a ponadto przyrosty naciągów uśrednione w okresie drgań są równe zeru. Drgania własne mostu opisuje równanie różniczkowe

$$\beta^2 B_{oq} \bar{q}'' + K_{oq} \bar{q} = \bar{0} \quad /4.1/$$

W celu uproszczenia zapisu przyjęto w dalszym ciągu oznaczenia $B = B_{oq}$, $K = K_{oq}$, $\bar{q} = \bar{q}_o$. Przy założeniu harmonicznego charakteru drgań otrzymuje się

$$\ddot{\bar{q}} = \left(\frac{v}{l}\right)^2 \bar{q}'' = -\omega^2 \bar{q} \quad , \quad /4.2/$$

gdzie ω jest częstością kołową drgań własnych. Równanie /4.1/ przekształca się do postaci

$$(K - \lambda B) \bar{q} = \bar{0} \quad , \quad /4.3/$$

$$\lambda = m_b l^4 \omega^2 / EJ_y \quad . \quad /4.4/$$

Jest to układ sprzężonych, jednorodnych równań algebraicznych, których niezerowe rozwiązanie istnieje, jeśli

$$\det(K - \lambda B) = 0 \quad . \quad /4.5/$$

Zbiór wartości spełniających warunek /4.5/ jest widmem wartości własnych $\{\lambda\} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, którym odpowiada zbiór rozwiązań \bar{q} , tworzący macierz własną $Q = [\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots]$. Rozwiązanie sprzężonego zagadnienia własnego /4.3/ można sprowadzić do rozwiązania dwóch czystych zagadnień własnych dla macierzy symetrycznych [6]. W tym celu należy najpierw rozwiązać problem pomocniczy

$$(B - \varrho I) \bar{r} = \bar{0} \quad . \quad /4.6/$$

Wyznaczone wartości własne $\{\rho\} = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \dots)$ oraz unormowaną macierz własną $R = [\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots]$ wykorzystuje się następnie w celu przekształcenia /4.3/ do czystego zagadnienia własnego. Macierz bezwładności można przedstawić w postaci $B = R \{\rho\} R^T$, wówczas /4.3/ przybiera formę

$$(K - \lambda R \{\rho^{1/2}\} \cdot \{\rho^{1/2}\} R^T) \bar{q} = \bar{0} \quad /4.7/$$

Po dokonaniu według relacji $\bar{y} = \{\rho^{1/2}\} R^T \bar{q}$ zmiany bazy współrzędnych i lewostronnym pomnożeniu równania /4.7/ przez czynnik $\{\rho^{-1/2}\} R^T$ otrzymuje się czyste zagadnienie własne

$$(A - \lambda I) \bar{y} = \bar{0} \quad /4.8/$$

dla macierzy symetrycznej

$$A = \{\rho^{-1/2}\} R^T K R \{\rho^{-1/2}\} \quad /4.9/$$

Rozwiązanie /4.8/ daje widmo wartości własnych $\{\lambda\}$ oraz macierz własną $Y = [\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots]$. Macierz wektorów własnych w bazie współrzędnych \bar{q} wyznacza się z zależności

$$Q = R \{\rho^{-1/2}\} Y \quad /4.10/$$

Częstości drgań własnych mostu oblicza się ze wzoru

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i E J_y / m_b l^4} \quad /4.11/$$

a odpowiadające im formy drgań są opisane kolejnymi wektorami macierzy Q . W bazie ciągłych współrzędnych stanu przemieszczenia /3.70/ formy drgań są określone z dokładnością do stałego czynnika funkcjami

$$\begin{aligned} w_i(\xi) &= \bar{q}_w^T \bar{s}, \\ v_i(\xi) &= \bar{q}_v^T \bar{s}, \\ \varphi_i(\xi) &= \frac{1}{e} \bar{q}_\varphi^T \bar{s}. \end{aligned} \quad /4.12/$$

Jak wynika ze struktury macierzy B i K /por. wzory /3.74/, /3.76/ /, pionowe drgania giętne separują się, natomiast drgania skrętne i poziome drgania giętne są sprzężone. Separowane

formy drgań pionowych można opisać funkcjami unormowanymi, przyjmując jako normę dla i -tej formy drgań wartość największego ugięcia belki $\|w_i\| = \max_{\xi} [w_i(\xi)]$. Rzędne unormowanej formy oblicza się ze wzoru

$$w_i^n(\xi) = \frac{w_i(\xi)}{\|w_i\|} = \frac{\bar{q}_{wi}^T \bar{s}}{\max_{\xi} (\bar{q}_{wi}^T \bar{s})}, \quad /4.13/$$

przy czym $\max_{\xi} [w_i^n(\xi)] = 1$.

Sprzężone formy drgań poziomych i skrętnych są opisane niewspółmiernymi wymiarowo współrzędnymi $v_i(\xi)$, $\varphi_i(\xi)$. Normowanie można przeprowadzić po wprowadzeniu zastępczej, współmiernej wymiarowo z $v_i(\xi)$, współrzędnej rotacyjnej $p_i(\xi) = e \varphi_i(\xi)$. Normę dla i -tej formy drgań giętno-skrętnych definiuje wzór

$$\|n_i\| = \max \{ \max_{\xi} [v_i(\xi)], \max_{\xi} [p_i(\xi)] \}, \quad /4.14/$$

a unormowaną formę określają funkcje

$$\begin{aligned} v_i^n(\xi) &= \frac{v_i(\xi)}{\|n_i\|} = \frac{\bar{q}_{vi}^T \bar{s}}{\max [\max_{\xi} (\bar{q}_{vi}^T \bar{s}), \max_{\xi} (\bar{q}_{\varphi i}^T \bar{s})]}, \\ p_i^n(\xi) &= \frac{p_i(\xi)}{\|n_i\|} = \frac{\bar{q}_{\varphi i}^T \bar{s}}{\max [\max_{\xi} (\bar{q}_{vi}^T \bar{s}), \max_{\xi} (\bar{q}_{\varphi i}^T \bar{s})]}. \end{aligned} \quad /4.15/$$

Czyste zagadnienie własne typu /4.6/, /4.8/ można rozwiązać numerycznie stosując np. uniwersalną metodę iteracji wierszowej Jacobiego [11]. Problem /4.3/ może być rozwiązywany globalnie lub niezależnie dla drgań pionowych i giętno-skrętnych. W drugim przypadku należy, korzystając z blokowej struktury macierzy B i K, dokonać rozdzielenia dwu separowanych grup równań.

4.2. Pionowe nieliniowe drgania mostu pod ruchomym obciążeniem inercyjnym [9]

W praktyce inżynierskiej może być przydatne rozwiązanie problemu dynamicznego sformułowanego dla płaskiego modelu mostu. Rozwiązanie takie daje podstawę do przeprowadzenia wstępnych oszacowań odporności konstrukcji na działanie ruchomego obciążenia. Płaski model obiektu otrzymany przyjmując $v(\xi, \tau) \equiv 0$ i $\varphi(\xi, \tau) \equiv 0$. Równanie ruchu ma formalnie postać /3.73/

$$(B + \tilde{B})\ddot{\bar{q}} + (C + \tilde{C})\dot{\bar{q}} + (K + K^? + \tilde{K})\bar{q} = \bar{F} \quad , \quad /4.16/$$

przy czym wektor współrzędnych uogólnionych dla obiektu \bar{q}_0 redukuje się do bloku \bar{q}_w , a współczynniki macierzowe równania opisane są wzorami

$$B = \beta^2 \left[\begin{array}{c|c} \mu_1 I & 0 \\ \hline 0 & \{\mu\} \end{array} \right] \quad , \quad \tilde{B}(\tau) = \beta^2 \left[\begin{array}{c|c} 0 & S\{\mu\} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad , \quad /4.17/$$

$$C = \beta \left[\begin{array}{c|c} \mu_1 \dot{\gamma} I & 0 \\ \hline 0 & \{\dot{\gamma}\} \end{array} \right] \quad , \quad \tilde{C}(\tau) = \beta \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -\{\dot{\gamma}\} S^T & 0 \end{array} \right] \quad , \quad /4.18/$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c} \{d^4\} + \alpha_1 \{d^2\} + \alpha_2 \bar{g}\bar{g}^T & 0 \\ \hline 0 & \{\alpha\} \end{array} \right] \quad , \quad K^? = \left[\begin{array}{c|c} \eta_1 \alpha_1 \{d^2\} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad , \quad /4.19/$$

$$\tilde{K}(\tau) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -\{\alpha\} S^T - \beta \{\dot{\gamma}\} \bar{g} & 0 \end{array} \right] \quad , \quad \bar{F}(\tau) = \left[\begin{array}{c|c} S\{\mu\} I & \\ \hline 0 & \end{array} \right] \quad . \quad /4.20/$$

Równanie ruchu /4.16/ opisuje pionowe nieliniowe drgania mostu poddanego działaniu ruchomego resorowanego obciążenia inercyjnego. Analizowany w pracy obiekt przestrzenny wykonuje wyłącznie drgania tego typu w szczególnym przypadku obciążenia symetrycznego względem osi podłużnej mostu i warunków początkowych nie powodujących zaburzeń symetrii stanu przemieszczenia belki.

Rozwiązanie nieliniowego różniczkowego równania drgań pionowych /4.16/ generuje się numerycznie, w sposób analogicz-

ny jak w przypadku równania ruchu dla modelu przestrzennego. Na podstawie przebiegów czasowych współrzędnych uogólnionych \bar{q}_w wyznacza się rozkład geometryczno-czasowy ugięć mostu $w(\xi, \tau)$ określonych pierwszym wzorem z grupy /3.70/. Dynamiczne przyrosty naciągów cięgien są równe i wynoszą

$$\Delta H = \eta_1 H_0, \quad \eta_1 = \alpha_c \bar{g}^T \bar{q}_w. \quad /4.21/$$

Wektory naprężeń normalnych o elementach $\sigma_i = M_y z_i / J_y$ i naprężeń stycznych o elementach $\tau_i = -T_z \tilde{S}_{yi} / d_i J_y$ określają relacje

$$\bar{\sigma} = \frac{Q_b l e}{J_y} \bar{\lambda}_z \bar{q}_w^T \{d^2\} \bar{s}, \quad \bar{\tau} = - \frac{Q_b e^2}{J_y} \{\lambda_d^{-1}\} \bar{\lambda}_1 \bar{q}_w^T \{d^3\} \bar{c}. \quad /4.22/$$

Przebiegi unormowane oraz współczynniki dynamiczne dla wymienionych wielkości oblicza się zgodnie z zasadami podanymi w punkcie 3.8., przy czym rozwiązanie statyczne otrzymuje się przez podstawienie do /4.16/ $\beta = 0$, co prowadzi do równania

$$(K_w + K_w^?) \bar{q}_{ws} = \bar{F}_w, \quad /4.23/$$

gdzie

$$K_w = \{d^4\} + \alpha_1 \{d^2\} + \alpha_2 \bar{g} \bar{g}^T, \quad K_w^? = \eta_{1s} \alpha_1 \{d^2\}, \quad \bar{F}_w = S \{\mu\} \bar{1}, \quad /4.24/$$

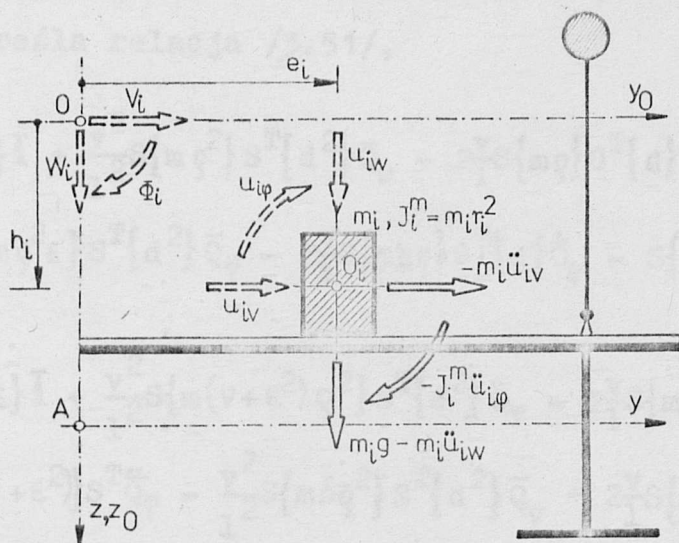
oraz do relacji kontrolnej $-\bar{S}^T \bar{q}_w = \bar{q}_p$. Parametr η_{1s} jest wstępnie prognozowany i następnie korygowany według wzoru

$$\eta_{1s} = \alpha_c \bar{g}^T \bar{q}_{ws}. \quad /4.25/$$

4.3. Nieresorowany model obciążenia ruchomego

W niniejszym punkcie rozważymy model obciążenia w postaci zbioru mas nieresorowanych, poruszających się ze stałą prędkością po torach prostoliniowych, równoległych do osi podłużnej mostu. Pojazd jest modelowany pojedynczą masą skupioną bezpośrednio obciążającą pomost, przy czym uwzględnia się

bezwładność obrotową masy oraz pionową i poziomą składową siły inercji w płaszczyźnie przekroju mostu /rys.4.1/.



Rys. 4.1

Obciążenie opisują zdefiniowane grupą wzorów /3.46/ macierze diagonalne specyfikacji mas $\{m\}$ i ich momentów bezwładności $\{mr^2\}$, prędkości i kierunku ruchu $\{\rho\}$ oraz położenia środków mas w przekroju poprzecznym mostu $\{\xi\}, \{\delta\}$. Zbiorowi mas odpowiadają macierze S, G wektorów funkcji śledzących $\bar{S}_i = \bar{s}(\xi_i)$, $\bar{C}_i = \bar{c}(\xi_i)$, gdzie $\xi_i = \alpha_i + \rho_i vt$, /por. pkt 3.5./.

Stan przemieszczenia środka O_i i -tej masy określają składowe $u_{iw}, u_{iv}, u_{i\phi}$ opisane wzorami /3.37/. Siły inercji $-m_i \ddot{u}_{iw}, -m_i \ddot{u}_{iv}, -J_i^m \ddot{u}_{i\phi}$ oraz siła ciężkości $m_i g$ przekazują się bezpośrednio na belkę usztywniającą mostu. Po redukcji do środka ścinania przekroju belki składowe obciążenia zbiorem mas wynoszą

$$\begin{aligned}
 P_z &= \sum_i (m_i g - m_i \ddot{u}_{iw}) \delta(x-x_i) , \\
 P_y &= \sum_i (-m_i \ddot{u}_{iv}) \delta(x-x_i) , \\
 M_x &= \sum_i [-J_i^m \ddot{u}_{i\phi} + m_i \ddot{u}_{iv} h_i + (m_i g - m_i \ddot{u}_{iw}) e_i] \delta(x-x_i) . /4.26/
 \end{aligned}$$

Drgania układu most+nieresorowane inercyjne obciążenie ruchome opisuje macierzowe równanie /3.30/. Wektor uogólnionych sił czynnych \bar{F}_0 obliczony według relacji /3.35/ ma postać

$$\bar{F}_o = \begin{bmatrix} \bar{F}_w \\ \bar{F}_v \\ \bar{F}_\varphi \end{bmatrix}, \quad /4.27/$$

gdzie \bar{F}_v określa relacja /3.51/,

$$\begin{aligned} \bar{F}_w = & gS\{m\}\bar{1} + \frac{v^2}{1^2}S\{m\varrho^2\}S^T\{d^2\}\bar{Q}_w - 2\frac{v}{1}S\{m\varrho\}G^T\{d\}\dot{\bar{Q}}_w - S\{m\}S^T\ddot{\bar{Q}}_w + \\ & + \frac{v^2}{1^2}S\{m\varrho^2\varepsilon\}S^T\{d^2\}\bar{Q}_\varphi - 2\frac{v}{1}S\{m\varepsilon\varrho\}G^T\{d\}\dot{\bar{Q}}_\varphi - S\{m\varepsilon\}S^T\ddot{\bar{Q}}_\varphi, \quad /4.28/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_\varphi = & gS\{m\varepsilon\}\bar{1} + \frac{v^2}{1^2}S\{m(v+\varepsilon^2)\varrho^2\}S^T\{d^2\}\bar{Q}_\varphi - 2\frac{v}{1}S\{m(v+\varepsilon^2)\varrho\}G^T\{d\}\dot{\bar{Q}}_\varphi - \\ & - S\{m(v+\varepsilon^2)\}S^T\ddot{\bar{Q}}_\varphi - \frac{v^2}{1^2}S\{m\delta\varrho^2\}S^T\{d^2\}\bar{Q}_v + 2\frac{v}{1}S\{m\delta\varrho\}G^T\{d\}\dot{\bar{Q}}_v + \\ & + S\{m\delta\}S^T\ddot{\bar{Q}}_v + \frac{v^2}{1^2}S\{m\varepsilon\varrho^2\}S^T\{d^2\}\bar{Q}_w - 2\frac{v}{1}S\{m\varepsilon\varrho\}G^T\{d\}\dot{\bar{Q}}_w - \\ & - S\{m\varepsilon\}S^T\ddot{\bar{Q}}_w. \quad /4.29/ \end{aligned}$$

W /4.29/ wprowadzono, podobnie jak w /3.52/, oznaczenie $\{v\} = \{\delta^2\} + \varepsilon^{-2}\{r^2\}$.

Po uporządkowaniu struktury równania /3.30/ i dokonaniu, zgodnie z zasadami podanymi w punkcie 3.6., bezwymiarowej parametryzacji otrzymuje się macierzowe równanie ruchu

$$(B_{oq} + \tilde{B}_{oq}) \bar{q}_o'' + (C_{oq} + \tilde{C}_{oq}) \bar{q}_o' + (K_{oq} + K_{oq}^? + \tilde{K}_{oq}) \bar{q}_o = \bar{F}_{oq} \quad /4.30/$$

o zmiennych w czasie współczynnikach

$$\tilde{B}_{oq}(\tau) = \beta^2 \begin{bmatrix} S\{\mu\}S^T & 0 & S\{\mu\varepsilon\}S^T \\ 0 & S\{\mu\}S^T & -S\{\mu\delta\}S^T \\ S\{\mu\varepsilon\}S^T & -S\{\mu\delta\}S^T & S\{\mu(v+\varepsilon^2)\}S^T \end{bmatrix}, \quad /4.31/$$

$$\tilde{C}_{oq}(\tau) = 2\beta^2 \begin{bmatrix} S\{\mu\varrho\}G^T\{d\} & 0 & S\{\mu\varepsilon\varrho\}G^T\{d\} \\ 0 & S\{\mu\varrho\}G^T\{d\} & -S\{\mu\delta\varrho\}G^T\{d\} \\ S\{\mu\varepsilon\varrho\}G^T\{d\} & -S\{\mu\delta\varrho\}G^T\{d\} & S\{\mu\varrho(v+\varepsilon^2)\}G^T\{d\} \end{bmatrix} \quad /4.32/$$

$$\tilde{K}_{oq}(\tau) = \beta^2 \begin{bmatrix} -S\{\mu\varrho^2\}S^T\{d^2\} & 0 & -S\{\mu\varepsilon\varrho^2\}S^T\{d^2\} \\ 0 & -S\{\mu\varrho^2\}S^T\{d^2\} & S\{\mu\delta\varrho^2\}S^T\{d^2\} \\ -S\{\mu\varepsilon\varrho^2\}S^T\{d^2\} & S\{\mu\delta\varrho^2\}S^T\{d^2\} & -S\{\mu\varrho^2(v+\varepsilon^2)\}S^T\{d^2\} \end{bmatrix}.$$

/4.33/

Macierze $B_{oq}, C_{oq}, K_{oq}, K_{oq}^{\eta}$ są opisane wzorami /3.74/-/3.77/, wektor \bar{F}_{oq} - wzorem /3.84/. Pominięcie bezwładności poziomej i obrotowej mas prowadzi do częściowej redukcji bloków macierzy zmiennych w czasie. Przypadek taki otrzymamy podstawiając $\{\delta\} = 0, \{v\} = 0$ oraz przyjmując bloki typu vv jako zerowe.

Z matematycznego punktu widzenia równanie /4.30/ jest tego samego typu co równanie /3.73/, a więc może być rozwiązywane opisaną w punkcie 3.7. metodą numerycznego całkowania równań nieliniowych.

Nieresorowany model obciążenia nie wprowadza, w przeciwieństwie do modelu resorowanego, dodatkowych stopni swobody. Zmienne w czasie współczynniki macierzowego równania ruchu zawierają nowe bloki powodujące silniejsze sprzężenie grup równań typu w i φ . Uwzględnienie wpływu resorowania zwiększa rozmiar zadania, jednakże w każdym kroku numerycznego całkowania generowane są macierze o prostszej strukturze. Ponadto model w postaci masy resorowanej opisuje pojazd w sposób bardziej zbliżony do rzeczywistości.

4.4. Obciążenie w postaci zbioru ruchomych sił skupionych

Założmy, że obciążenie mostu ma postać zbioru pionowych sił skupionych o wartościach $P_i = m_i g$, poruszających się z dowolną, lecz stałą prędkością i w dowolnym kierunku po torach prostoliniowych, równoległych do podłużnej osi mostu, dowolnie usytuowanych w jego przekroju poprzecznym. Jest to najprostszy, nieinercyjny model obciążenia ruchomego. Równanie ruchu mostu obciążonego grupą ruchomych sił P_i otrzymamy pomijając w równaniu /4.30/ wpływ inercji mas resorowanych. Ma ono postać

$$B_{oq} \bar{q}_o'' + C_{oq} \bar{q}_o' + (K_{oq} + K_{oq}^{\eta}) \bar{q}_o = \bar{F}_{oq} . \quad /4.34/$$

Macierzowe równanie /4.34/ jest układem sprzężonych, nieliniowych, niejednorodnych równań różniczkowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Rozwiązania nie da się uzyskać w postaci zamkniętej, można je wyznaczyć numerycznie za pomocą metody przedstawionej w punkcie 3.7. .

5. PRZYKŁAD NUMERYCZNEJ REALIZACJI ALGORYTMU

5.1. Opis programów na EMC

Przedstawiony w pracy algorytm analizy dynamicznej i statycznej wybranej klasy mostów wiszących zaprogramowano na EMC w języku FORTRAN 1900. Wydzielono trzy główne zadania algorytmu, które oprogramowano niezależnie. Opracowano trzy programy o nazwach DMW1, DMW2, DMW3, przeznaczone do realizacji na maszynach cyfrowych serii Odra 1300.

Program DMW1 służy do analizy przestrzennych drgań własnych mostu wiszącego /pkt. 4.1./. Zawiera podprogram WIR rozwiązujący z żadaną dokładnością dowolne czyste zagadnienie własne. W podprogramie zastosowano algebraiczną wersję algorytmu uniwersalnej metody iteracji wirowej Jacobiego, pozwalającej na wyznaczenie widma wartości własnych i wektorów własnych dla dodatnio określonej macierzy symetrycznej. Danymi wejściowymi programu jest zbiór bezwymiarowych parametrów masy i sztywności obiektu, rozmiar bazy funkcji aproksymacyjnych /wektora $\bar{s}(\xi)$ /, stopień dokładności metody iteracji wirowej, wymiarowy parametr częstości kołowej drgań własnych. Program automatycznie generuje macierz sztywności i macierz bezwładności obiektu, oblicza za pomocą segmentu WIR wartości własne i unormowane wektory własne dla macierzy bezwładności, przeprowadza modyfikację problemu /4.3/ do czystego zagadnienia własnego /4.8/, które następnie rozwiązuje w podprogramie WIR w zakresie widma wartości własnych i wektorów własnych. Ostatnim etapem obliczeń jest transformacja rozwiązania problemu /4.8/ i wyprowadzenie wyników w postaci widma częstości drgań własnych mostu oraz zbioru unormowanych form drgań pionowych i giętno-skrętnych, określonych wzorami /4.13/ /4.15/.

Do uruchomienia programu konieczna jest pamięć operacyjna o pojemności min. 21K /kilosłów/.

Program DMW2 zawiera przedstawiony w punkcie 4.2 algorytm analizy pionowych drgań liniowych mostu wiszącego obciążonego zbiorem ruchomych oscylatorów. Realizacja programu odbywa się w sposób opcyjny dla wariantu liniowego i nieliniowego.

Dane wejściowe tworzą:

- zbiór bezwymiarowych parametrów masy, sztywności i tłumienia obiektu $\mu_1, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_c, \gamma$,
- zbiór bezwymiarowych parametrów mas resorowanych $\{\mu\}, \{\kappa\}, \{\eta\}, \{\rho\}, \{\alpha\}$,
- liczba oscylatorów,
- parametr porównawczej prędkości obciążenia β ,
- liczba i wartości współrzędnych ξ wybranych do analizy przekrojów mostu,
- odpowiadający analizowanym punktom przekroju zbiór parametrów geometrycznych $\bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_1, \{\lambda_d\}$ oraz liczba wybranych punktów przekroju,
- rozmiar bazy funkcji aproksymacyjnych $\bar{s}(\xi)$,
- długość kroku i liczba kroków całkowania numerycznego,
- odstęp odczytu rzędnych przebiegów czasowych analizowanych wielkości stanu przemieszczenia i stanu naprężenia,
- wyróżnik wariantu rozwiązania /wg. teorii liniowej lub nieliniowej/,
- wyróżnik realizacji obliczeń dla naprężeń normalnych i stycznych.

Program generuje i całkuje numerycznie w żądanej liczbie kroków równanie ruchu /4.16/. Całkowanie odbywa się z zastosowaniem formuł Newmarka /3.89/, /3.90/, dla parametru $\beta^* = 1/8$. W wariacie nieliniowym obliczana jest ponadto w każdym kroku prognozowana według /3.23/ wartość parametru dynamicznego przyrostu naciągu cięgien η_1 , na podstawie której wyznacza się aktualną postać geometrycznej macierzy sztywności K^q . Generowany w kolejnych krokach wektor obciążenia \bar{F} /wzór /4.20// wykorzystywany jest jednocześnie do rozwiązania problemu statycznego /4.23/, przy czym w przypadku nieliniowym dokonuje się prognozy wartości parametru η_{1s} , określającego statyczny przyrost naciągu cięgien. Statyczne i dynamiczne rozwiązanie otrzymuje się w każdym kroku w postaci wektorów współrzędnych

uogólnionych \bar{q}_{ws} i \bar{q}_w oraz parametrów η_{1s} , η_1 , obliczanych na podstawie zależności /4.25/, /4.21/. Przechowywany w dyskowej pamięci zewnętrznej zbiór rozwiązań jest sukcesywnie transformowany na unormowane, statyczne i dynamiczne przebiegi czasowe przyrostu naciągów cięgien, ugięć w wybranych przekrojach mostu oraz naprężeń normalnych i stycznych w wybranych punktach danego przekroju. Generowanie przebiegów naprężeń nie jest obligatoryjne. Wyniki obliczeń wyprowadzane są dla każdej analizowanej wielkości w postaci zbioru rzędnych przebiegu statycznego i dynamicznego oraz w formie wykresu przebiegu dynamicznego nałożonego na tło statyczne. Drukowana jest również wartość normy przebiegu statycznego.

W programie wykorzystano standardowy program biblioteczny o nazwie F4SOLVE, służący do rozwiązywania układu niejednorodnych, liniowych równań algebraicznych. Dla uruchomienia programu konieczna jest pamięć operacyjna o pojemności min. 19K oraz jedna jednostka dyskowa.

Program DMW3 rozwiązuje problem przestrzennych, liniowych i nieliniowych drgań mostu wiszącego poddanego działaniu ruchomego resorowanego obciążenia inercyjnego /pkt 3./. Warianty algorytmu odpowiadające teorii liniowej i nieliniowej są realizowane opcyjnie. Możliwy jest również wybór jednej z dwu ścieżek rozwiązania: dla mostu obciążonego zbiorem klasycznych oscylatorów /resorowanych mas skupionych o inercji pionowej/ oraz dla mostu obciążonego zbiorem oscylatorów niekonwencjonalnych /pionowo resorowanych tarcz masowych/.

System działania programu DMW3 jest analogiczny jak programu DMW2. Program buduje i rozwiązuje równanie ruchu /3.73/ oraz równanie statyczne /3.83/. Zbiór wyznaczonych rozwiązań jest przetwarzany na unormowane, statyczne i dynamiczne przebiegi czasowe następujących wielkości:

- pionowe przesunięcia cięgien w_1, w_2 ,
- przyrosty naciągów cięgien $\Delta H_1, \Delta H_2$,
- składowe translacji wybranych punktów przekroju - w_i, v_i ,
- składowe stanu naprężenia w wybranych punktach przekroju
- $\sigma_i, \tau_i, \tau_i^S$.

Obliczenia dla każdej z trzech składowych stanu naprężenia nie są obligatoryjne.

W programie wykorzystano standardowy program biblioteczny F4SOLVE. Do uruchomienia programu konieczna jest pamięć operacyjna o minimalnej pojemności wynoszącej 27K oraz jedna jednostka dyskowa.

5.2. Charakterystyki liczbowe obiektu i obciążenia

Celem numerycznej realizacji algorytmu było zbadanie efektywności i poprawności merytorycznej sformułowanej teorii, pogładowe przedstawienie możliwości działania algorytmu, kontrola formalnej poprawności programów na EMC. Obliczenia przeprowadzono dla przykładowego obiektu mostowego. W dostępnych opracowaniach technicznych i naukowych autorzy nie podają w sposób precyzyjny wartości wszystkich parametrów wymiarowych niezbędnych dla zastosowania opracowanego algorytmu. Wobec powyższego dane do przykładu określono zgodnie z ogólnymi zasadami kształtowania mostów wiszących [20,51].

Charakterystyki wymiarowe testowanego obiektu są następujące:

$$\begin{aligned} l=300\text{m}, l_0=315\text{m}, l_1=98\text{m}, f=30\text{m}, e=7,5\text{m}, h=40\text{m}, \beta_1=35,25^\circ, \\ a=2,43\text{m}, b=1,90\text{m}, c=1,02\text{m}, EJ_y=1,98 \cdot 10^{11} \text{Nm}^2, EJ_z=5,35 \cdot 10^{12} \text{Nm}^2, \\ EJ_\omega=7,85 \cdot 10^{12} \text{Nm}^4, GJ_s=2,02 \cdot 10^7 \text{Nm}^2, E_c A_c=2,2 \cdot 10^{10} \text{N}, H_0=2,207 \cdot 10^7 \text{N}, \\ m_b=10000\text{kg/m}, m_c=1000\text{kg/m}, j_B=3,18 \cdot 10^5 \text{kgm}^2/\text{m}. \end{aligned}$$

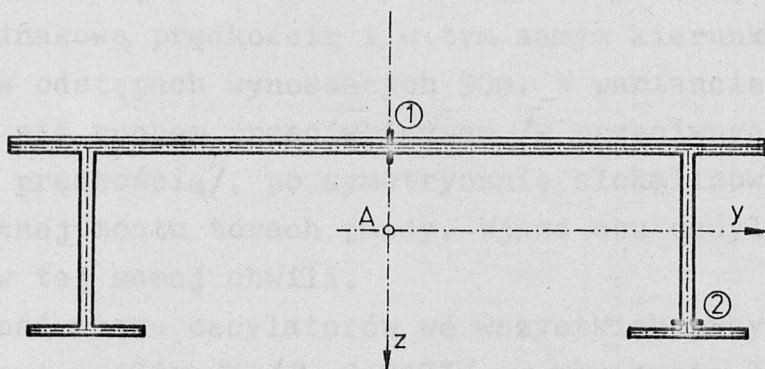
Wartości bezwymiarowych parametrów masy i sztywności belki usztywniającej, obliczone według wzorów /3.66/, /3.67/, wynoszą

$$\begin{aligned} \mu_1=1,200, \mu_2=0,253, \mu_3=0,830, \\ \alpha_1=20,066, \alpha_2=43686,000, \alpha_3=27,042, \alpha_4=100,330, \alpha_5=0,705, \\ \alpha_6=0,163, \alpha_7=62,784, \alpha_8=13,645. \end{aligned}$$

Parametr sztywności cięga, określony wzorem /3.72/, przyjmuje wartość $\kappa_c = 9101,250$. Bezwymiarowy współczynnik tłumienia $\gamma = \mu l^2 \sqrt{m_p/EJ_y}$ oszacowano na podstawie parametru $\mu = \gamma_1 \omega_1$, odpowiadającego pierwszej formie drgań własnych mostu. Przyjęto, że bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej formy drgań wynosi $\gamma_1 = 0,02$, co odpowiada 1% tłumienia krytycznego.

Do analizy stanu przemieszczenia i naprężenia wybrano dwa punkty przekroju dźwigara, których położenie zaznaczono schematycznie na rys. 5.1. Punktom tym odpowiadają następujące zbiory parametrów geometrycznych /wzory /3.106/, /3.123/ /:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_y &= [0, 0, 1, 0]^T, & \bar{\lambda}_z &= [-0,1333, 0,2667]^T, \\ \bar{\lambda}_\omega &= [0, 0, 2,2093]^T, & \bar{\lambda}_1 &= 10^{-4}[0, 0, 2,3704]^T, \\ \bar{\lambda}_2 &= 10^{-4}[45,3926, 8,8889]^T, & \bar{\lambda}_3 &= 10^{-4}[-0,8326, 1,8607]^T, \\ \{\lambda_d\} &= 10^{-3} \text{diag}(2,667, 5,333). \end{aligned}$$



Rys. 5.1

Jednostką ruchomego taboru drogowego obciążającego most jest pojazd ciężarowy o wymiarach poprzecznych nadwozia $2,5\text{m} \times 3,0\text{m}$ i o normowym ciężarze $30\text{T} = 294\text{kN}$. Masa oscylatora modelującego pojazd wynosi $m_i = 30000\text{kg}$, moment bezwładności obrotowej masy $J_i^m = m_i r_i^2 = 38100\text{kgm}^2$, $r_i^2 = 1,27\text{m}^2$. Współczynniki sprężystości k_i i tłumienia c_i dobrano tak, aby częstość drgań własnych i bezwymiarowy współczynnik tłumienia oscylatora wynosiły $\omega_i = 10\text{rad/s}$, $\gamma_i = 0,3$. Wartości te odpowiadają charakterystykom zawiesznień współczesnych pojazdów ciężarowych [42].

Bezwymiarowe parametry masy, sztywności i tłumienia oscylatora wynoszą $\mu_i=0,0200$, $\kappa_i=818,1818$, $\zeta_i=1,2135$. Parametr δ_i , określający w umownej chwili początkowej położenie środka masy oscylatora względem poziomej osi przechodzącej przez środek ścinania przekroju dźwigara, wynosi $\delta_i=-0,1333 / h_i=-1,0/$. Lokalizację toru jazdy oscylatora względem osi podłużnej mostu opisuje parametr ε_i , który przyjmuje wartości 0,0 dla $e_i=0,0m$ oraz 0,6 dla $e_i=4,5m$.

W zależności od liczby oscylatorów n_p i lokalizacji torów ich jazdy ε_i wyróżniono cztery warianty obciążenia:

- I. $n_p=1$, $\varepsilon_i=0$,
- II. $n_p=3$, $\varepsilon_i=0$, $i=1,2,3$,
- III. $n_p=3$, $\varepsilon_i=0,6$, $i=1,2,3$,
- IV. $n_p=2$, $\varepsilon_1=0,6$, $\varepsilon_2=-0,6$.

W przypadkach II, III ruch oscylatorów odbywa się po jednym torze, z jednakową prędkością i w tym samym kierunku /ruch współbieżny/, w odstępach wynoszących 90m. W wariacie IV oscylatory poruszają się ruchem przeciwbieżnym /w przeciwnych kierunkach, z tą samą prędkością/, po symetrycznie zlokalizowanych względem osi podłużnej mostu torach jazdy. Wjazd obu oscylatorów na most zachodzi w tej samej chwili.

Prędkość ruchu oscylatorów we wszystkich przypadkach obciążenia wynosi $v=120km/h / \beta=2,2473/$, w wariacie II analizowano ponadto przejazd grupy oscylatorów z prędkościami 90km/h / $\beta=1,6855/$ i 150km/h / $\beta=2,8092/$.

Obliczenia wykonano przy zerowych warunkach początkowych dla obiektu i obciążenia / $\bar{q}(\tau)=\bar{0}$ /, prognozowane wartości parametrów $\eta_1^{(i)}$, $\eta_2^{(i)}$ dla kroków $i=0, -1, -2$ należy wówczas przyjąć równe zero.

Dla pierwszych trzech wariantów obciążenia problem przestrzennych drgań mostu sprowadza się do analizy pionowych drgań giętych /por. pkt 4.2./. Realizację numeryczną przeprowadzono za pomocą programu DMW2. W pozostałych przypadkach obliczenia wykonywano przy użyciu programu DMW3.

5.3. Analiza wyników obliczeń

Pierwszym analizowanym zagadnieniem numerycznym było sprawdzenie efektywności przyjętej aproksymacji w rozwiązaniu zagadnienia własnego. Rozmiar bazy funkcji aproksymacyjnych wynosi n , gdzie n jest liczbą elementów wektora $\bar{s}(\xi)$, aproksymującego każdy z trzech podzbiorów przemieszczeń /3.70/. Globalna liczba funkcji aproksymacyjnych dla zadania przestrzennego jest równa $3n$. W tabeli 5.1 zestawiono, uporządkowane w kolejności wzrastania, częstości kołowe pionowych drgań własnych mostu, obliczone dla $n=4,6,8$.

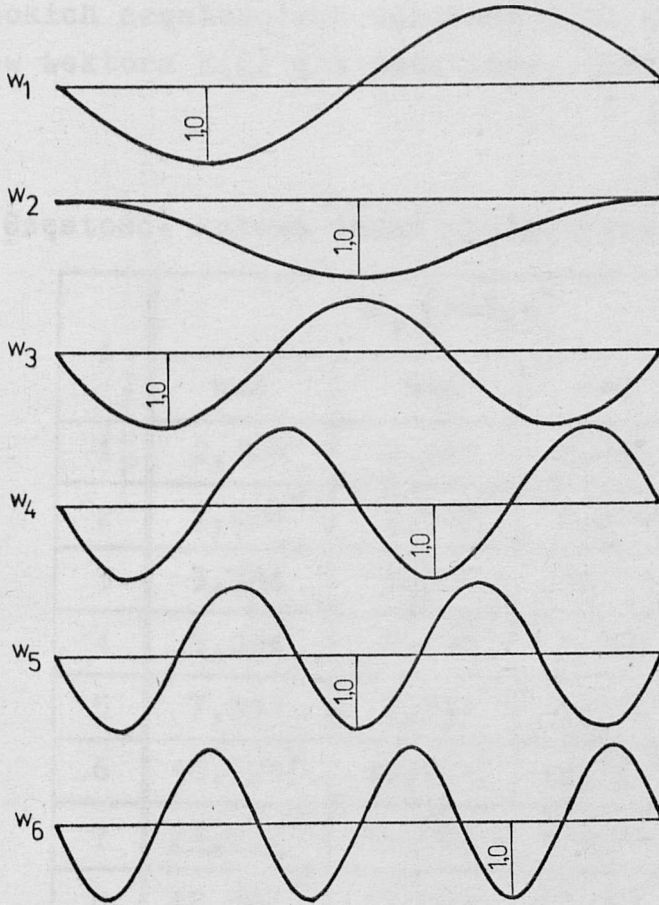
Tabela 5.1
Częstości kołowe drgań pionowych

i	ω_i [rad/s]		
	n=4	n=6	n=8
1	2,213	2,213	2,213
2	3,009	3,006	3,006
3	4,686	4,685	4,685
4	7,652	7,652	7,652
5		11,728	11,728
6		16,669	16,669
7			25,531
8			29,285

Na rys. 5.2 pokazano obrazy kolejnych sześciu form, odpowiadających początkowej strefie widma częstości drgań pionowych.

Liczba funkcji aproksymacyjnych nie wpływa na dokładność obliczania częstości drgań antysymetrycznych, gdyż w tym przypadku funkcje aproksymacyjne są funkcjami własnymi. Liczba ta wpływa natomiast na dokładność wyników w zakresie częstości drgań symetrycznych, przy czym do wyznaczenia technicznie dok-

ładnych wartości w początkowej strefie widma wystarcza przyjęcie $n=6$. W obrazie form drgań pionowych występuje zaburzenie sekwencji form symetrycznych i antysymetrycznych. Zjawisko to zostało szerzej omówione w pracach [27,29].



Rys. 5.2

Częstości giętno-skrętnych drgań własnych mostu, obliczone dla trzech rozmiarów bazy aproksymacyjnej $n=4, 6, 8$, zestawiono w tabeli 5.2, a odpowiadające sześciu początkowym częstościom formy drgań ilustruje rys. 5.3.

W zbiorze form giętno-skrętnych można wyróżnić formy z dominacją zginania poziomego, których częstości oznaczono symbolem v oraz formy z dominacją skręcania. W wyniku ograniczenia liczby funkcji aproksymacyjnych następuje w końcowej strefie widma pominięcie częstości odpowiadających formom z dominacją skręcania, co wynika z braku funkcji, potrzebnych do wymodelo-

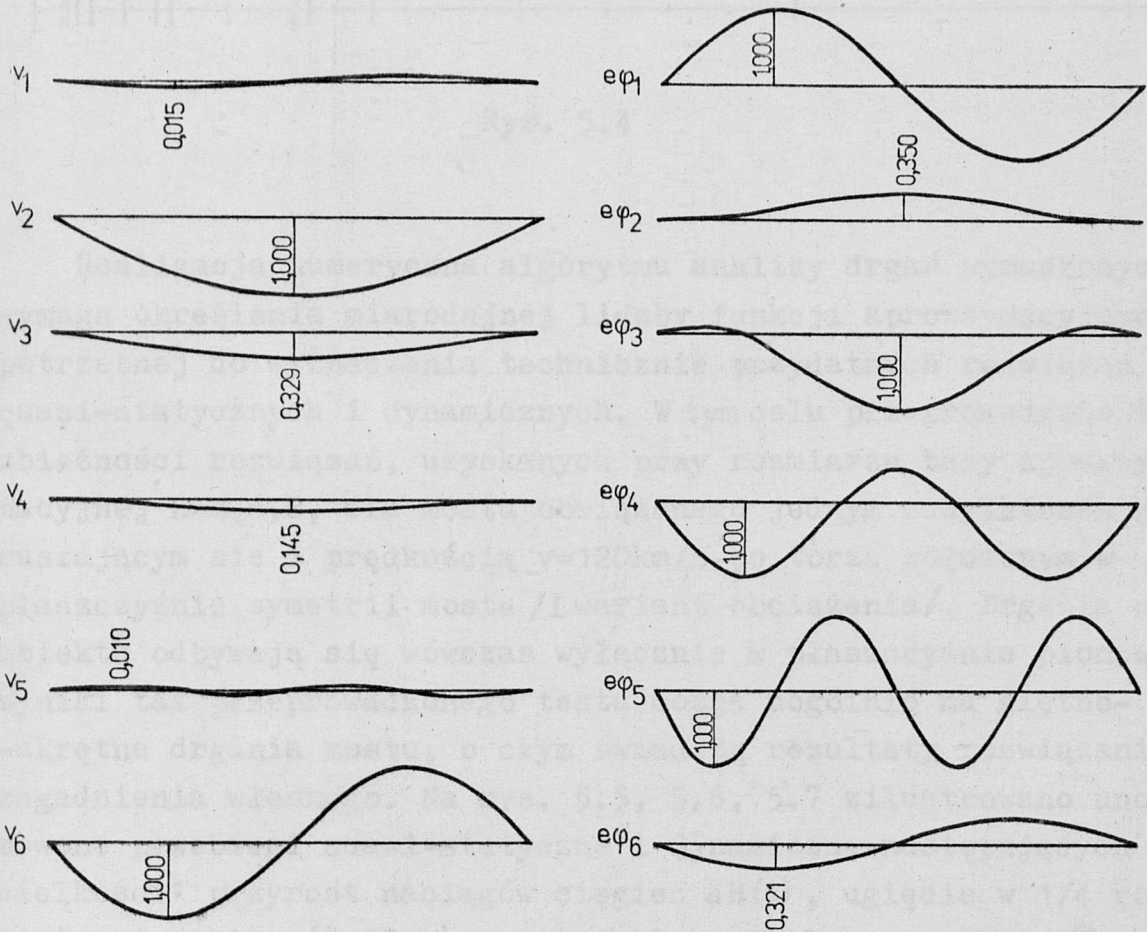
wania tych form. Są natomiast obliczone wyższe częstotliwości drgań według form z dominacją zginania poziomego. Dostateczną dokładność obliczania częstotliwości uzyskuje się dla $n=6$, przy czym dla poprawnej identyfikacji 10 początkowych prążków widma konieczne jest przyjęcie co najmniej $n=8$. W przypadku analizy drgań o wysokich częstotliwościach wskazane jest zróżnicowanie liczby elementów wektora $\bar{s}(\xi)$ dla podzbiorów przemieszczeń typu v i φ .

Tabela 5.2

Częstotliwości kołowe drgań giętno-skrętnych

i	ω_i [rad/s]		
	n=4	n=6	n=8
1	2,425	2,425	2,425
2	2,528 ^v	2,528 ^v	2,528 ^v
3	3,784	3,780	3,779
4	5,094	5,091	5,090
5	7,911	7,911	7,911
6	10,721 ^v	10,721 ^v	10,721 ^v
7	<u>24,090^v</u>	12,029	12,029
8	<u>42,807^v</u>	17,004	17,004
9		<u>24,090^v</u>	22,917
10		<u>42,807^v</u>	24,090 ^v
11		<u>66,877^v</u>	29,726
12		<u>96,297^v</u>	<u>42,807^v</u>
13			<u>66,877^v</u>
14			<u>96,297^v</u>
15			<u>131,066^v</u>
16			<u>171,185^v</u>

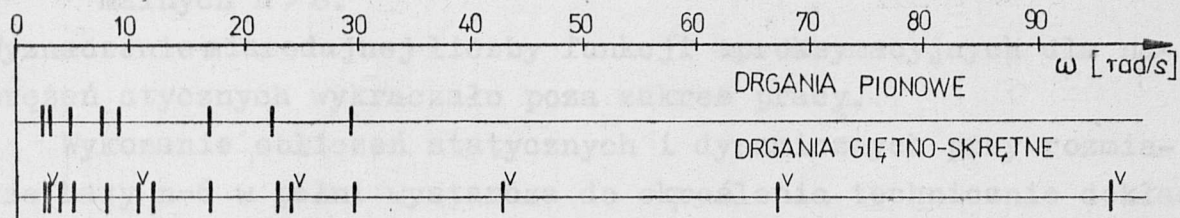
Charakter sprzężeń poziomych drgań giętnych i drgań skrętnych zależy od konfiguracji punktów O, B, C w przekroju mostu. Dla analizowanego obiektu sprzężenie form z dominacją zginania poziomego jest większe niż pozostałych. Wśród form z dominacją skręcania bardziej sprzężone są formy symetryczne. Sprzężenia form niskich są większe niż w formach wyższych.



Rys. 5.3

Rozkład prążków widma częstości drgań własnych mostu, obliczonych dla $n=8$, przedstawiono na rys. 5.4. W zakresie częstości od 0,0 do 30,0 rad/s znajduje się 8 prążków, którym odpowiadają formy drgań pionowych i 11 prążków dla form giętno-skrętnych, w tym 3 odpowiadają formom z dominacją zginania poziomego. Decydujący wpływ na kształtowanie stanu przemieszczenia mostu ma pięć pierwszych form pionowych i siedem

początkowych form giętno-skrętnych. Odpowiednie grupy częstości są odsunięte na lewo od pozostałej części widma.



Rys. 5.4

Realizacja numeryczna algorytmu analizy drgań wymuszonych wymaga określenia miarodajnej liczby funkcji aproksymacyjnych, potrzebnej do wyznaczenia technicznie przydatnych rozwiązań quasi-statycznych i dynamicznych. W tym celu przeprowadzono test zbieżności rozwiązań, uzyskanych przy rozmiarze bazy aproksymacyjnej $n=4,6,8$, dla mostu obciążonego jednym oscylatorem poruszającym się z prędkością $v=120\text{km/h}$ po torze położonym w płaszczyźnie symetrii mostu /Iwariant obciążenia/. Drgania obiektu odbywają się wówczas wyłącznie w płaszczyźnie pionowej. Wyniki tak przeprowadzonego testu można uogólnić na giętno-skrętne drgania mostu, o czym świadczą rezultaty rozwiązania zagadnienia własnego. Na rys. 5.5, 5.6, 5.7 zilustrowano unormowane przebiegi quasi-statyczne i dynamiczne następujących wielkości: przyrost naciągów cięgien $\Delta H(\tau)$, ugięcie w $1/4$ rozpiętości mostu $w(0,25,\tau)$, naprężenia normalne w punkcie ② przekroju dźwigara dla $1/2$ i $1/4$ rozpiętości $\sigma_2(0,5,\tau)$, $\sigma_2(0,25,\tau)$. Współczynniki dynamiczne i ekstrema statyczne oraz względne odchylenia ich wartości obliczone przy analizowanych rozmiarach bazy, zestawiono w tabeli 5.3.

Na podstawie różnic jakościowych widocznych na rozpatrywanych wykresach i różnic ilościowych przedstawionych w tabeli 5.3 ustalono miarodajny rozmiar bazy

- dla quasi-statycznych i dynamicznych rozwiązań w zakresie naciągów i stanu przemieszczenia $n=6$,

- dla dynamicznych rozwiązań w zakresie naprężeń normalnych $n=8$,
- dla quasi-statycznych rozwiązań w zakresie naprężeń normalnych $n > 8$.

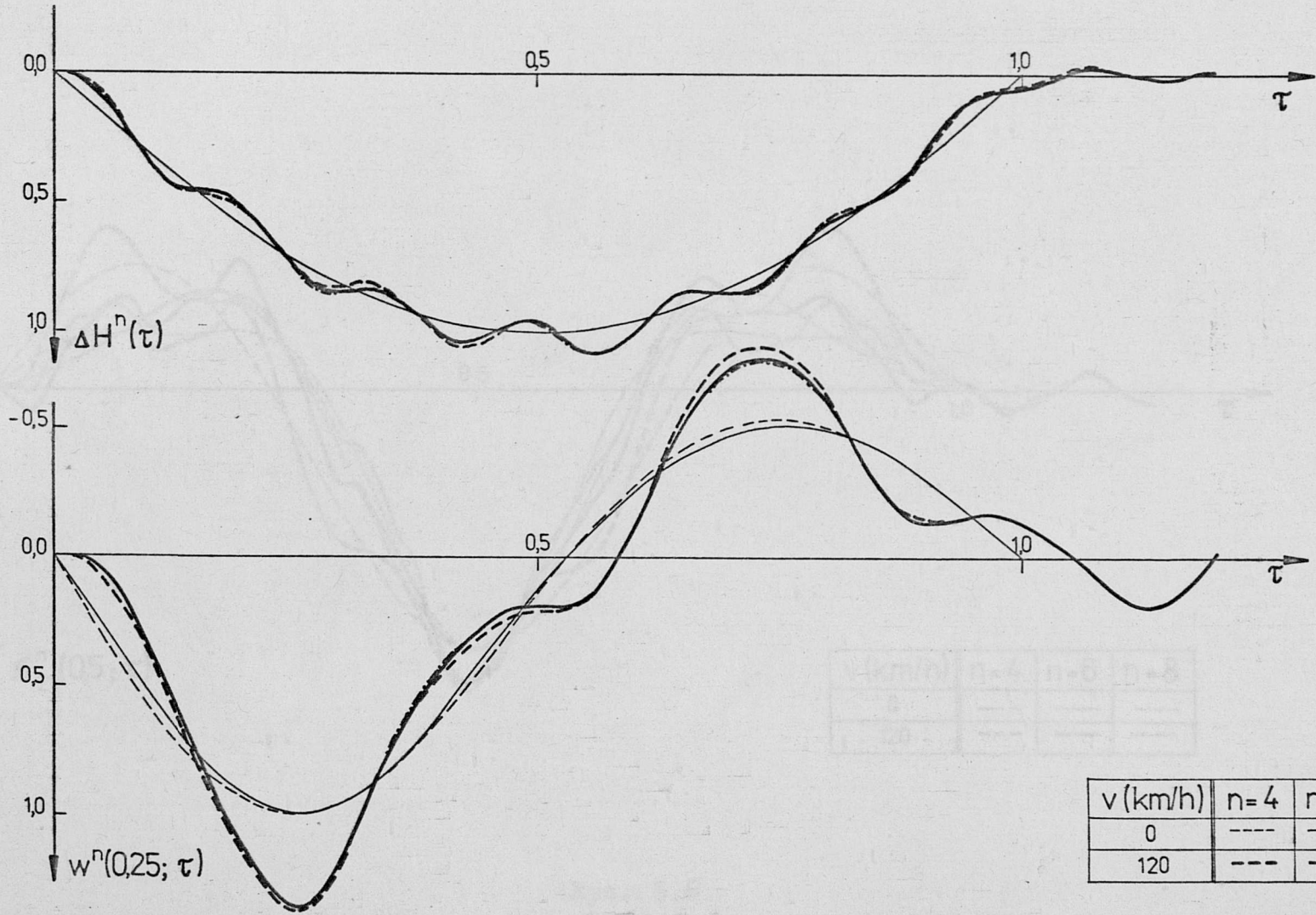
Wyznaczenie miarodajnej liczby funkcji aproksymacyjnych dla naprężeń stycznych wykraczało poza zakres pracy.

Wykonanie obliczeń statycznych i dynamicznych przy rozmiarze bazy $n=6$ w pełni wystarcza do określenia technicznie dokładnych wartości naciągów i ugięć, natomiast wyniki w zakresie naprężeń mają raczej charakter pogładowy, są bowiem obarczone pewnym błędem aproksymacji.

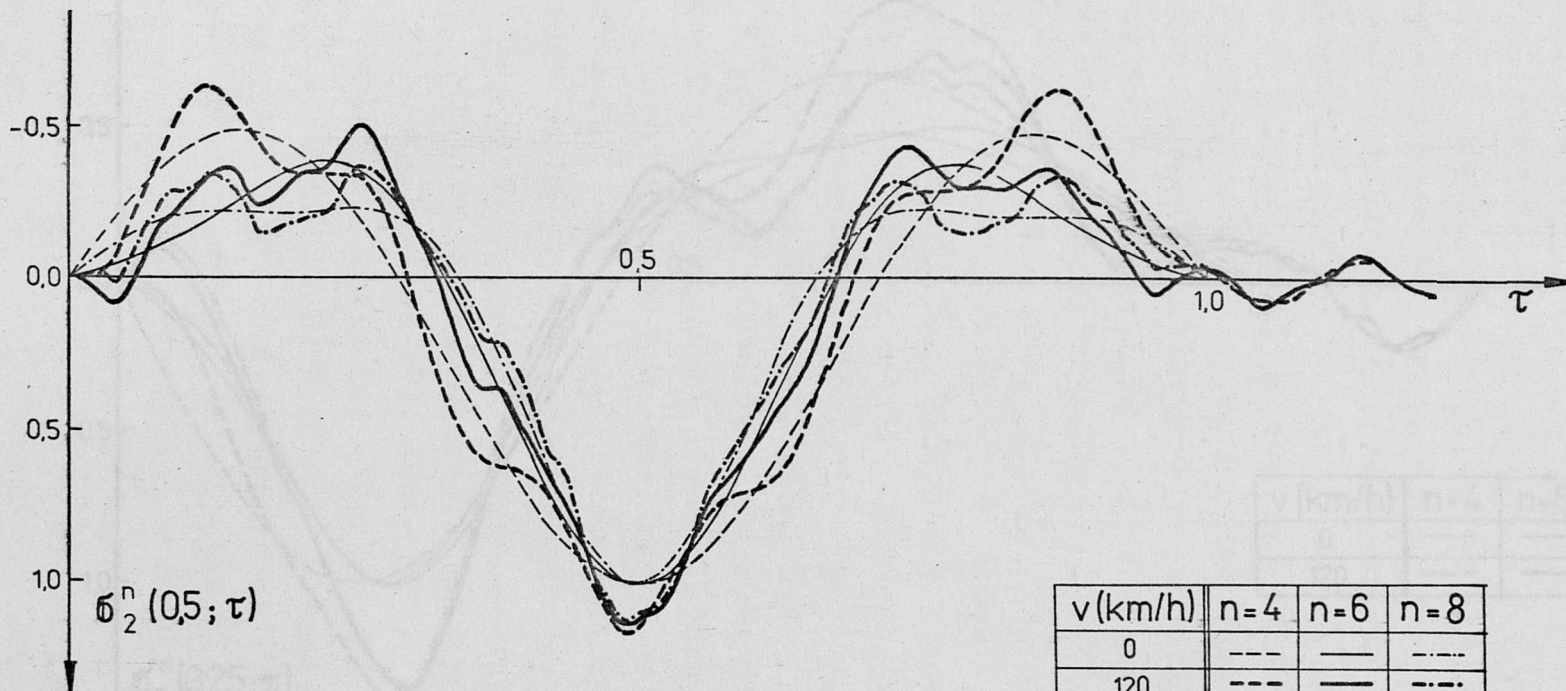
Tabela 5.3

Współczynniki dynamiczne i normy obliczone przy różnych rozmiarach bazy aproksymacyjnej

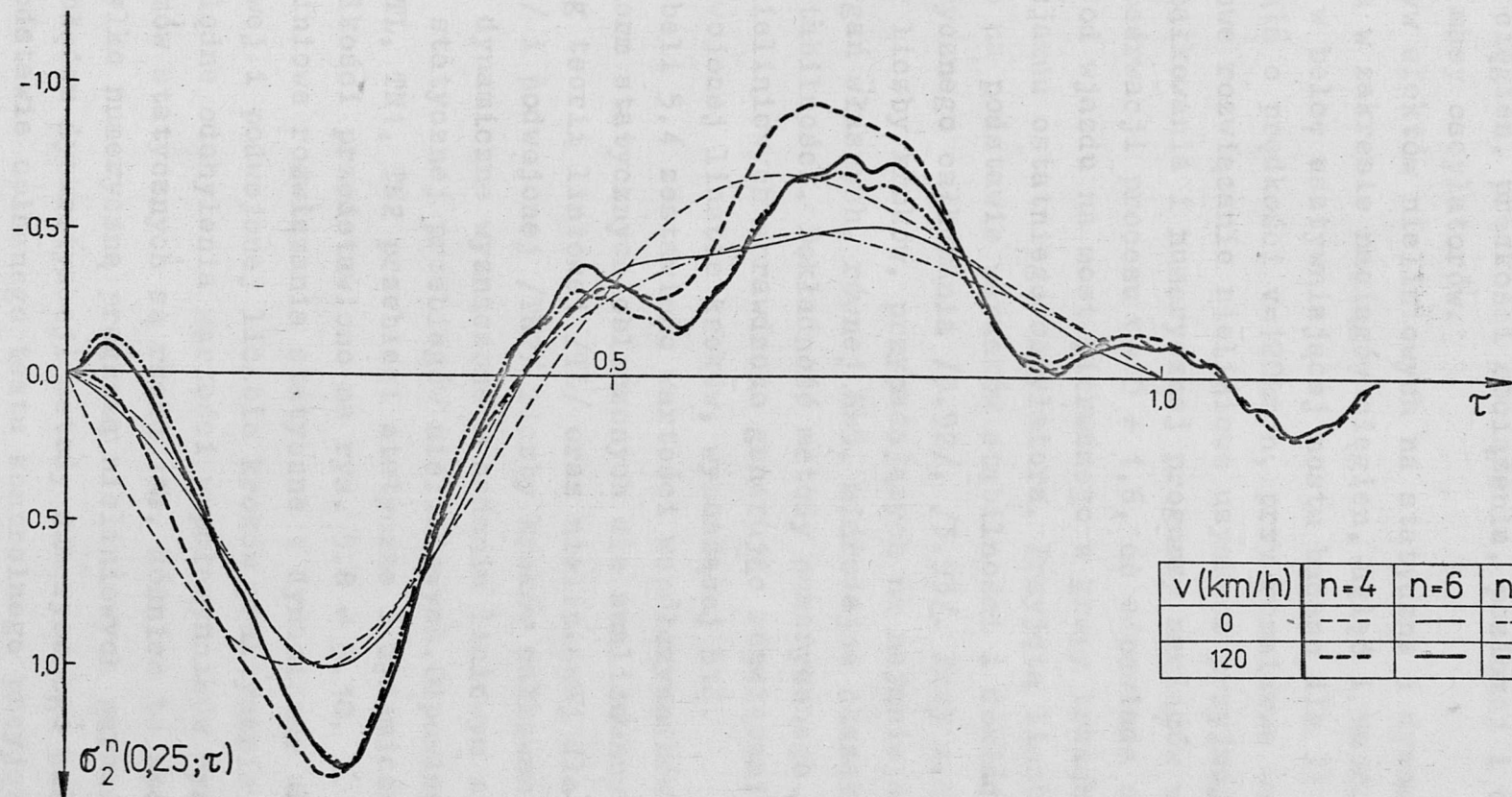
Wielkość analizowana Z	n=4		n=6		n=8		Względne odchylenia [%]			
	φ_Z	$\ z\ $	φ_Z	$\ z\ $	φ_Z	$\ z\ $	n=4 i n=6		n=6 i n=8	
							φ_Z	$\ z\ $	φ_Z	$\ z\ $
$\Delta H(\tau)$	1,0798	0,012000	1,0871	0,012104	1,0890	0,012106	0,6	0,0	0,2	0,0
$w(0,25,\tau)$	1,3758	$1,10867 \times 10^{-5}$	1,3658	$1,14510 \times 10^{-5}$	1,3658	$1,15011 \times 10^{-5}$	0,7	3,3	0,0	0,4
$w(0,5,\tau)$	1,0784	$7,77527 \times 10^{-6}$	1,0725	$7,97689 \times 10^{-6}$	1,0768	$8,07892 \times 10^{-6}$	2,0	2,6	1,7	1,3
$\sigma_2(0,25,\tau)$	1,3782	$1,15547 \times 10^{-4}$	1,3569	$1,37243 \times 10^{-4}$	1,3412	$1,44265 \times 10^{-4}$	1,5	18,8	1,1	5,1
$\sigma_2(0,5,\tau)$	1,1712	$7,72975 \times 10^{-5}$	1,1345	$9,34653 \times 10^{-5}$	1,1262	$10,5361 \times 10^{-5}$	3,1	20,9	0,7	12,7



Rys. 5.5



Rys. 5.6



Rys. 5.7

W analizie dynamicznej mostu rozważono wpływ następujących czynników: efektów nieliniowości geometrycznej związanej z pracą ciągów, prędkości obciążenia, poziomej i obrotowej inercji masy oscylatorów.

Wpływ efektów nieliniowych na statyczne i dynamiczne rozwiązania w zakresie naciągów ciągów, ugięć i naprężeń normalnych w belce usztywniającej mostu badano dla II wariantu obciążenia o prędkości $v=120\text{km/h}$, przy rozmiarze bazy $n=6$. Podstawowe rozwiązanie nieliniowe uzyskano przyjmując 256 kroków całkowania i numerycznej prognozy naciągów w obszarze czasu obserwacji procesu $\tau = 0 \div 1,6$, co odpowiada czasowi mierzonemu od wjazdu na most pierwszego z grupy trzech oscylatorów do zjazdu ostatniego oscylatora. Przyjętą liczbę kroków ustalono na podstawie warunków stabilności i dokładności metody numerycznego całkowania /3.92/, /3.93/. Przy założeniu minimalnej liczby kroków, przypadających na najmniejszy znaczący okres drgań własnych, równej $N=5$, miarodajne okazało się kryterium stabilności. Dokładność metody numerycznego całkowania równań nieliniowych sprawdzono generując rozwiązanie kontrolne przy podwojonej liczbie kroków, wynoszącej 512.

W tabeli 5.4 zestawiono wartości współczynników dynamicznych i norm statycznych obliczonych dla analizowanych wielkości według teorii liniowej /TL/ oraz nieliniowej dla podstawowej /TN1/ i podwojonej /TN2/ liczby kroków całkowania. Współczynniki dynamiczne wyznaczone w zadaniu liniowym sprowadzono do normy statycznej przebiegów nieliniowych. Odpowiadające wariantom TL, TN1, TN2 przebiegi statyczne i dynamiczne wybranych wielkości przedstawiono na rys. 5.8 \div 5.10.

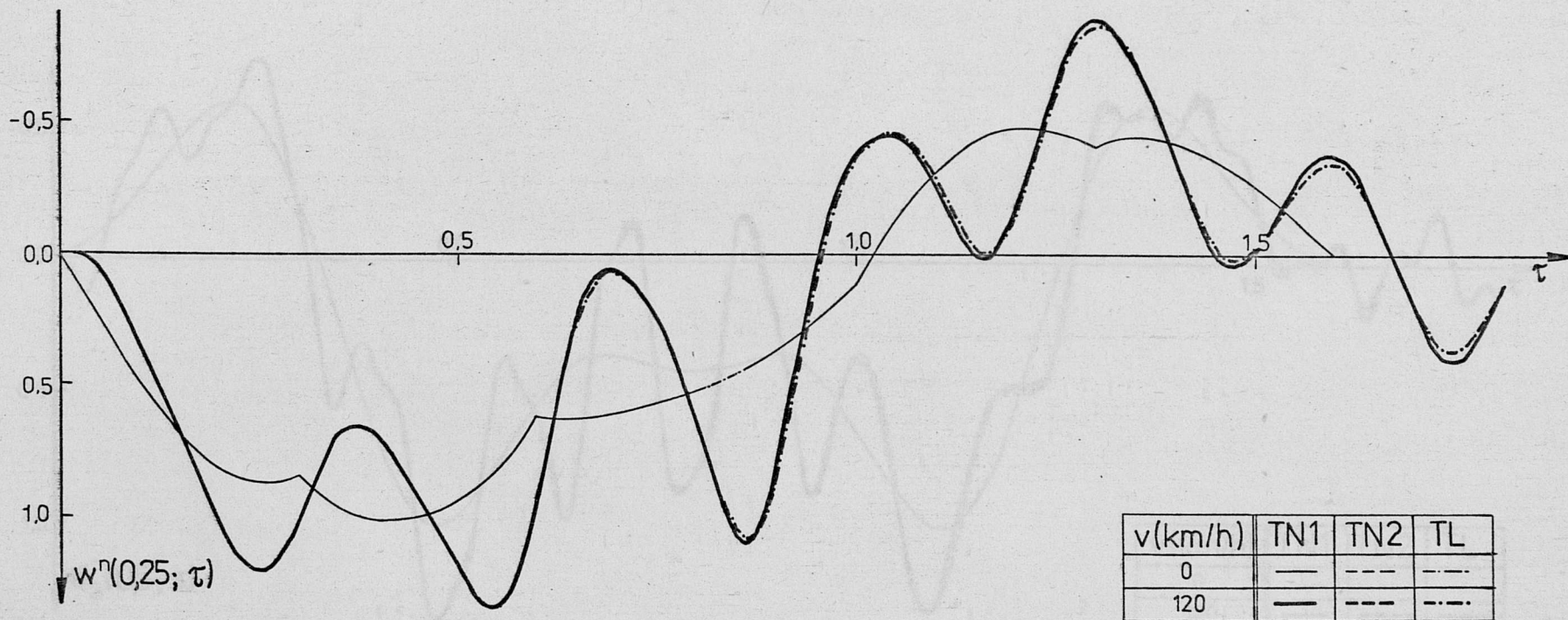
Nieliniowe rozwiązania statyczne i dynamiczne uzyskane przy podstawowej i podwojonej liczbie kroków praktycznie nie różnią się. Względne odchylenia wartości współczynników dynamicznych i ekstremów statycznych są rzędu 1%. Różnice te spowodowane są nie tylko numeryczną prognozą nieliniowych parametrów, lecz również błędem dyskretyzacji metody numerycznego całkowania.

Na podstawie opisanego testu kontrolnego przyjęto, że rozwiązanie nieliniowe typu TN1 jest technicznie dokładne.

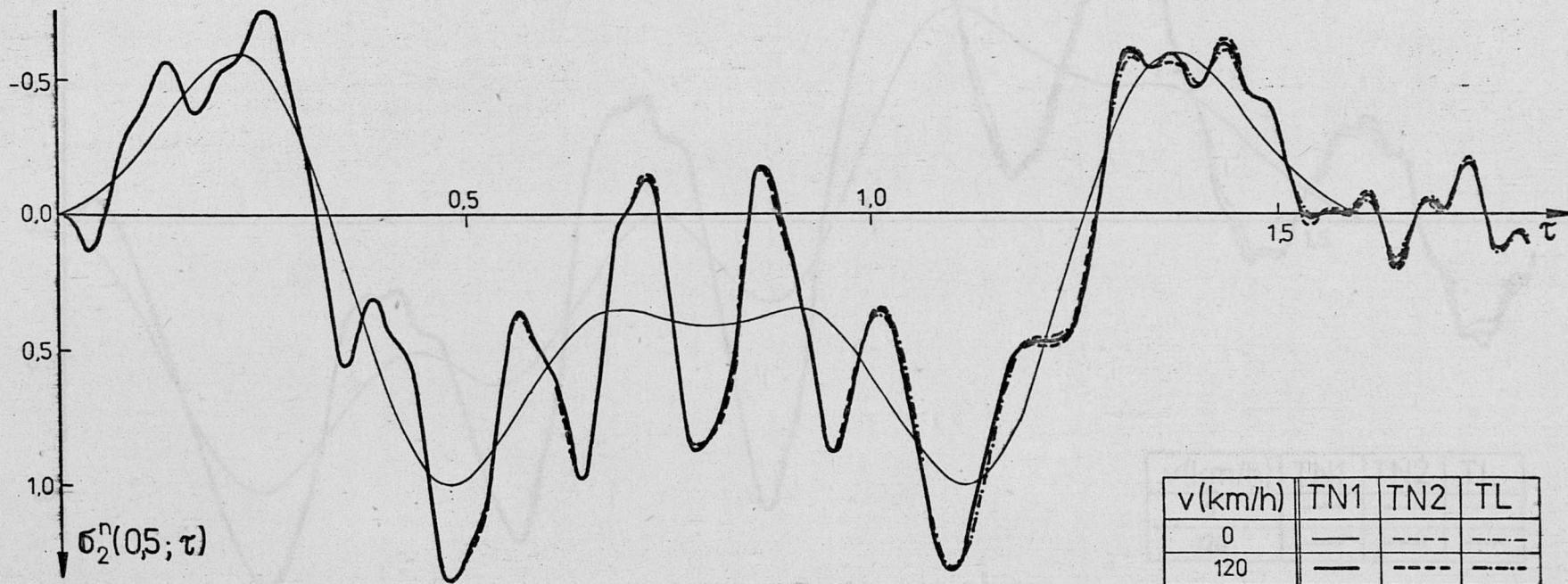
Tabela 5.4

Współczynniki dynamiczne i normy obliczone według teorii liniowej i nieliniowej

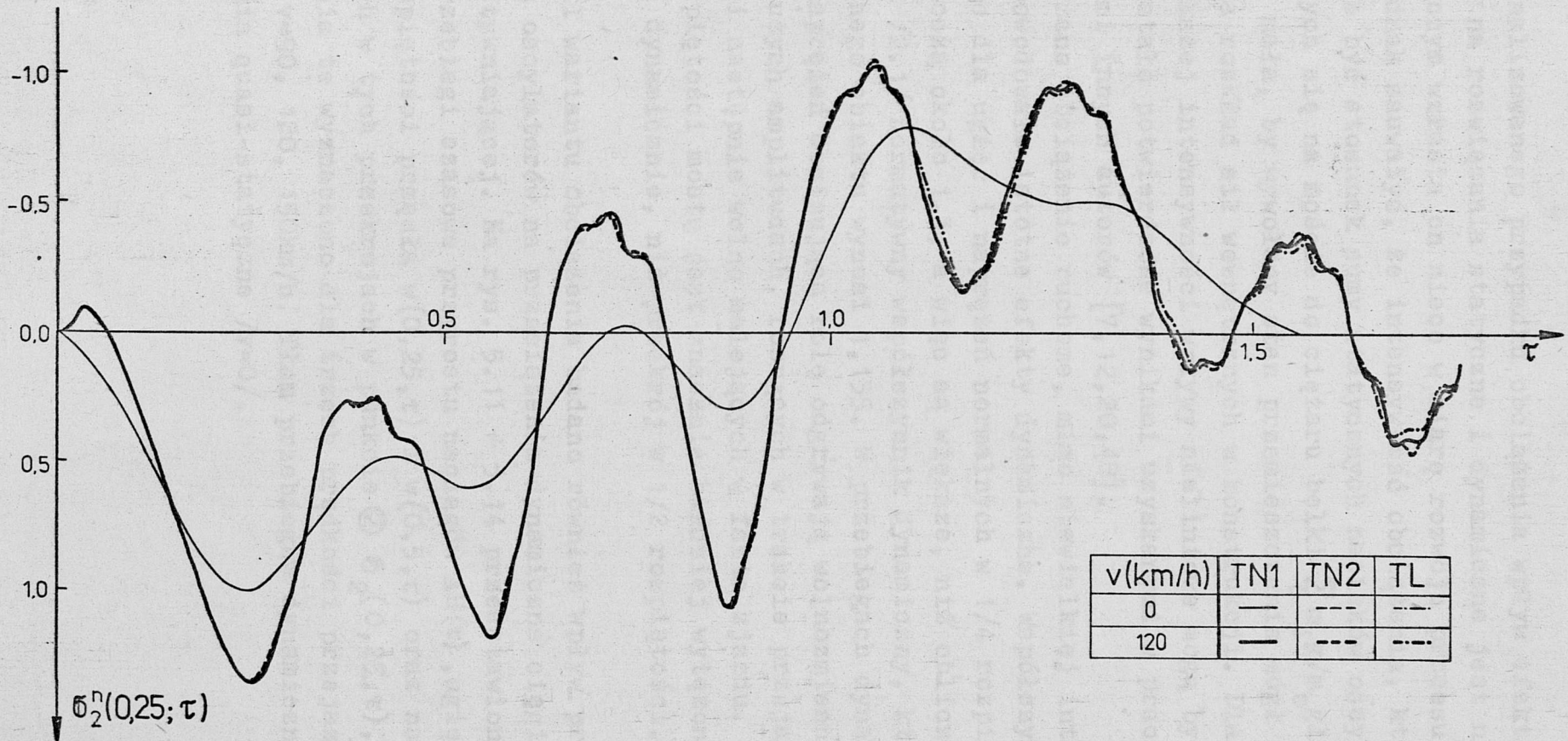
Wielkość analizowana Z	TL		TN1		TN2		Względne odchylenia %			
	φ_Z	$\ z\ $	φ_Z	$\ z\ $	φ_Z	$\ z\ $	TL i TN1		TN1 i TN2	
							φ_Z	$\ z\ $	φ_Z	$\ z\ $
$\Delta H(\tau)$	1,0517	0,026730	1,0508	0,026701	1,0513	0,026701	0,14	0,11	0,04	0,00
$w(0,25,\tau)$	1,3359	$1,31596 \times 10^{-5}$	1,3303	$1,31047 \times 10^{-5}$	1,3322	$1,31047 \times 10^{-5}$	0,42	0,42	0,14	0,00
$w(0,5,\tau)$	1,0910	$9,36822 \times 10^{-6}$	1,0892	$9,35134 \times 10^{-6}$	1,0908	$9,35134 \times 10^{-6}$	0,16	0,18	0,14	0,00
$\sigma_2(0,25,\tau)$	1,3611	$1,37546 \times 10^{-4}$	1,3576	$1,37243 \times 10^{-4}$	1,3596	$1,37243 \times 10^{-4}$	0,26	0,22	0,14	0,00
$\sigma_2(0,5,\tau)$	1,3433	$6,00783 \times 10^{-5}$	1,3419	$5,99356 \times 10^{-5}$	1,3388	$5,99356 \times 10^{-5}$	0,10	0,24	0,23	0,00



Rys. 5.8



Rys. 5.9

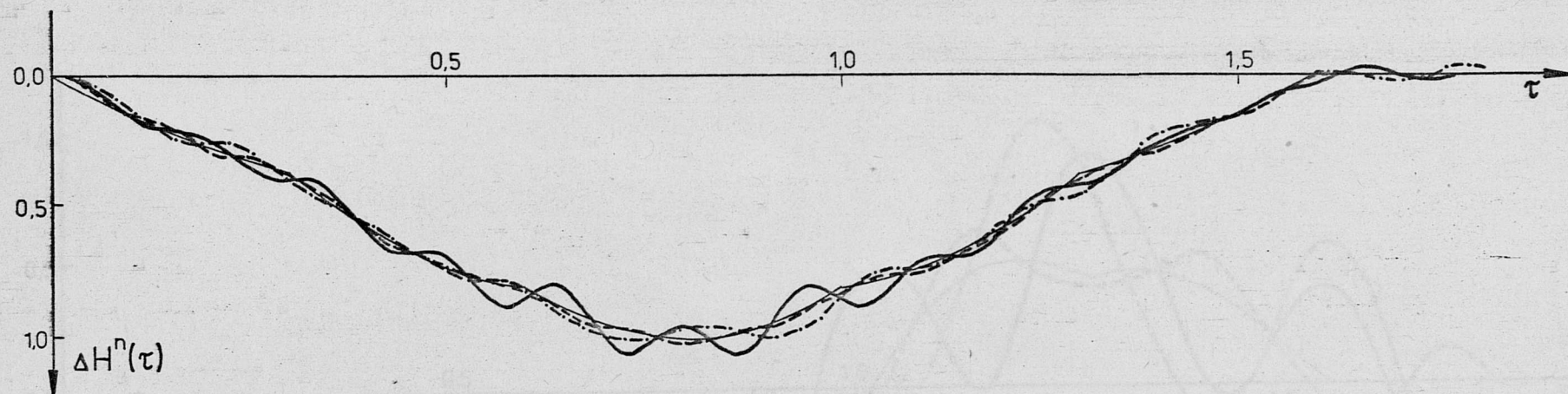


Rys. 5.10

Dla analizowanego przypadku obciążenia wpływ efektów nieliniowych na rozwiązania statyczne i dynamiczne jest nieistotny, przy czym wzrasta on nieco w miarę rozwoju procesu drgań. Należy jednak zauważyć, że intensywność obciążenia, której miarą może być stosunek sumy statycznych nacisków oscylatorów znajdujących się na moście do ciężaru belki $\sum_i m_i g / m_b g l = 0,01$, jest zbyt mała, by wywołany stan przemieszczenia mógł znacząco wpłynąć na rozkład sił wewnętrznych w konstrukcji. Dla obciążeń o większej intensywności wpływy nieliniowe mogą być istotne, co zostało potwierdzone wynikami uzyskanymi w pracy [28] i badaniami innych autorów [7,12,20,48].

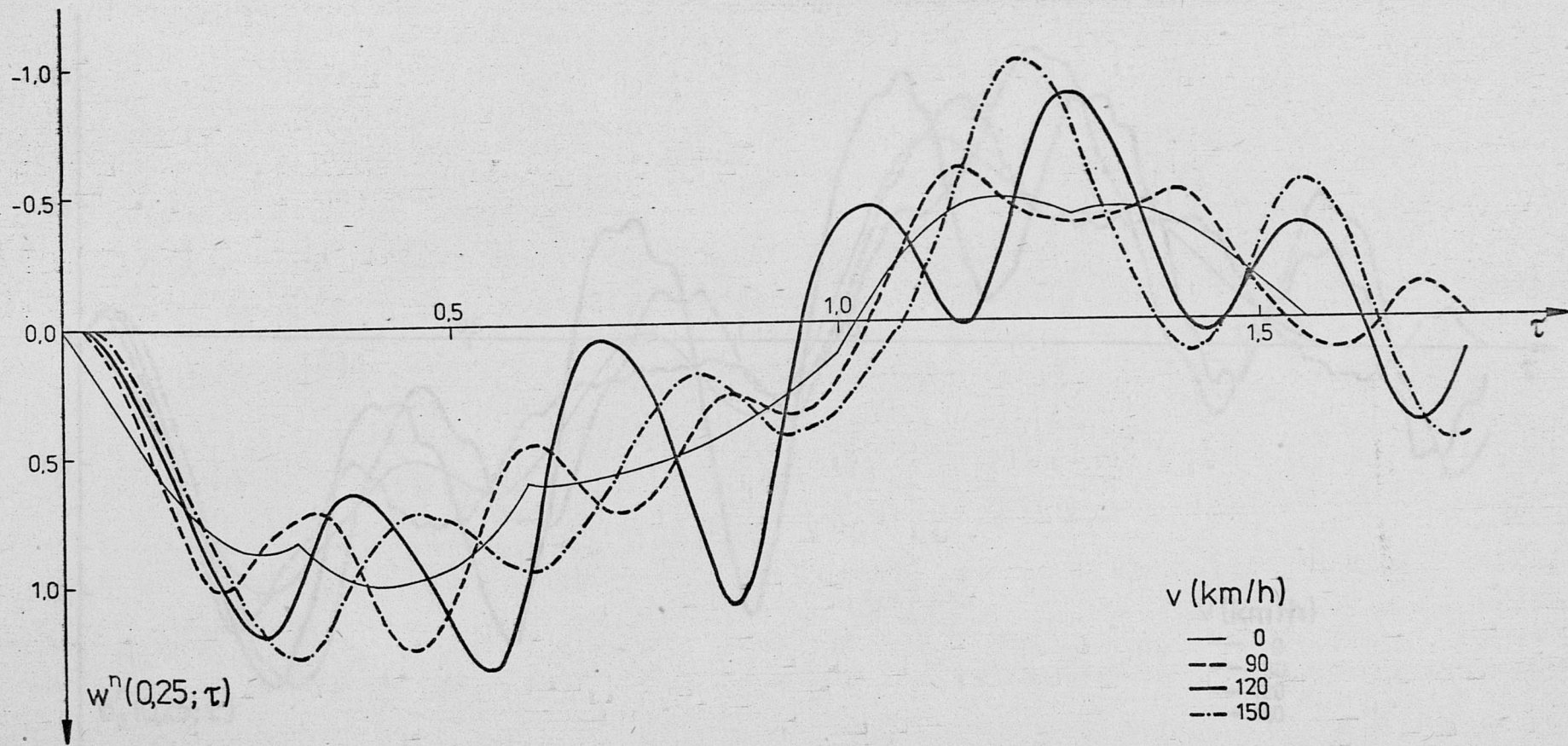
Rozważane obciążenie ruchome, mimo niewielkiej intensywności, spowodowało istotne efekty dynamiczne. Współczynniki dynamiczne dla ugięć i naprężeń normalnych w 1/4 rozpiętości mostu wynoszą około 1,3, a więc są większe, niż obliczony według wzoru /2.1/ normatywny współczynnik dynamiczny, który dla analizowanego obiektu wynosi 1,135. W przebiegach dynamicznych ugięć i naprężeń dominującą rolę odgrywają wolnozmiennie oscylacje o dużych amplitudach, rosnących w trakcie przejazdu obciążenia i następnie wolno malejących w fazie zjazdu. Przekrój w 1/4 rozpiętości mostu jest znacznie bardziej wyiężony statycznie i dynamicznie, niż przekrój w 1/2 rozpiętości.

Dla II wariantu obciążenia badano również wpływ prędkości przejazdu oscylatorów na przeciążenia dynamiczne ciągien i belki usztywniającej. Na rys. 5.11 ÷ 5.14 przedstawiono unormowane przebiegi czasowe przyrostu naciągów $\Delta H(\tau)$, ugięć w 1/4 i 1/2 rozpiętości przęsła w $w(0,25,\tau)$ i $w(0,5,\tau)$ oraz naprężeń normalnych w tych przekrojach w punkcie ② $\sigma_2(0,25,\tau)$, $\sigma_2(0,5,\tau)$. Rozwiązania te wyznaczono dla trzech prędkości przejazdu obciążenia $v=90, 120, 150\text{km/h}$. Tłem przebiegów dynamicznych są rozwiązania quasi-statyczne $/v=0/$.

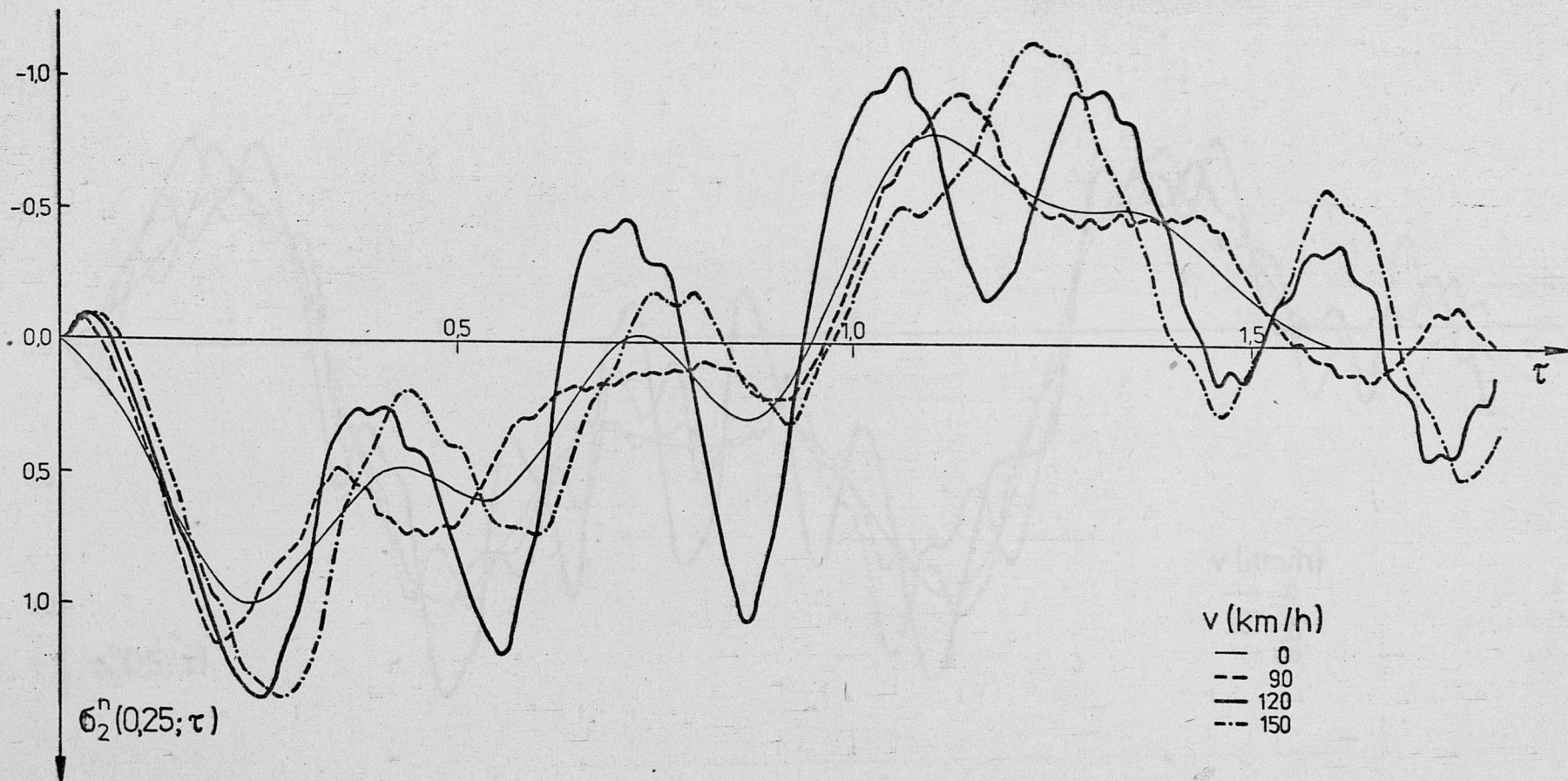


v (km/h)
 — 0
 - - - 90
 — 120
 - - - 150

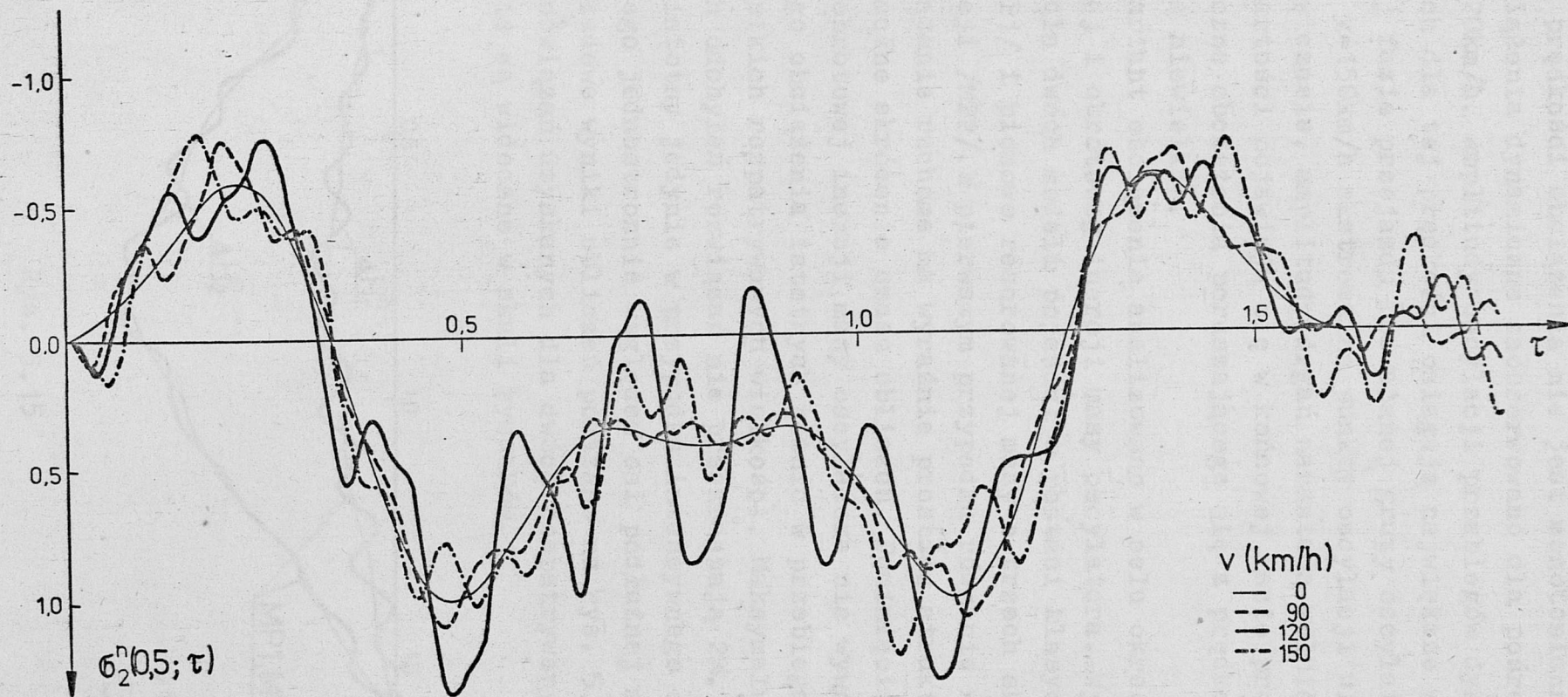
Rys. 5.11



Rys. 5.12



Rys. 5.13

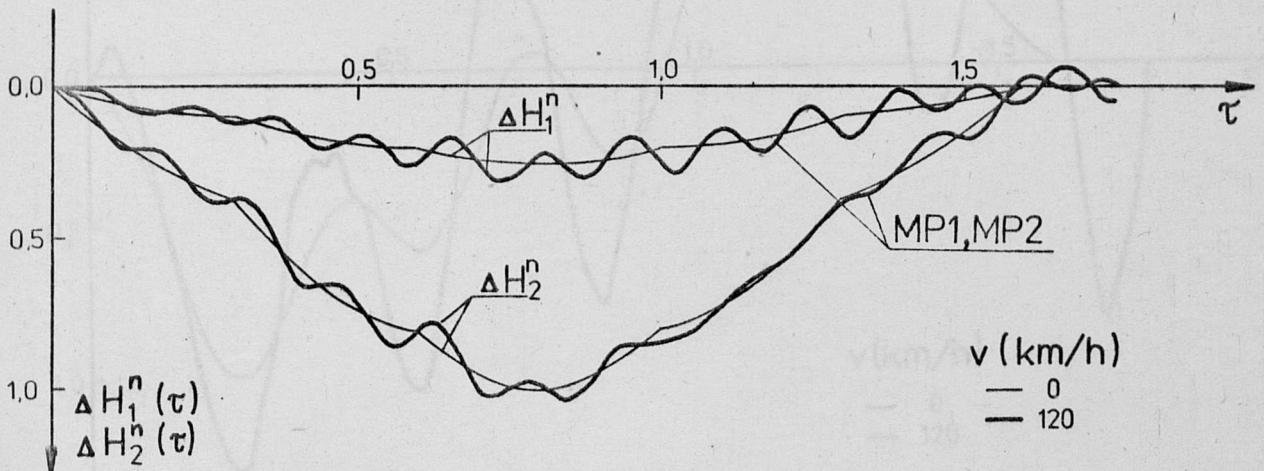


Rys. 5.14

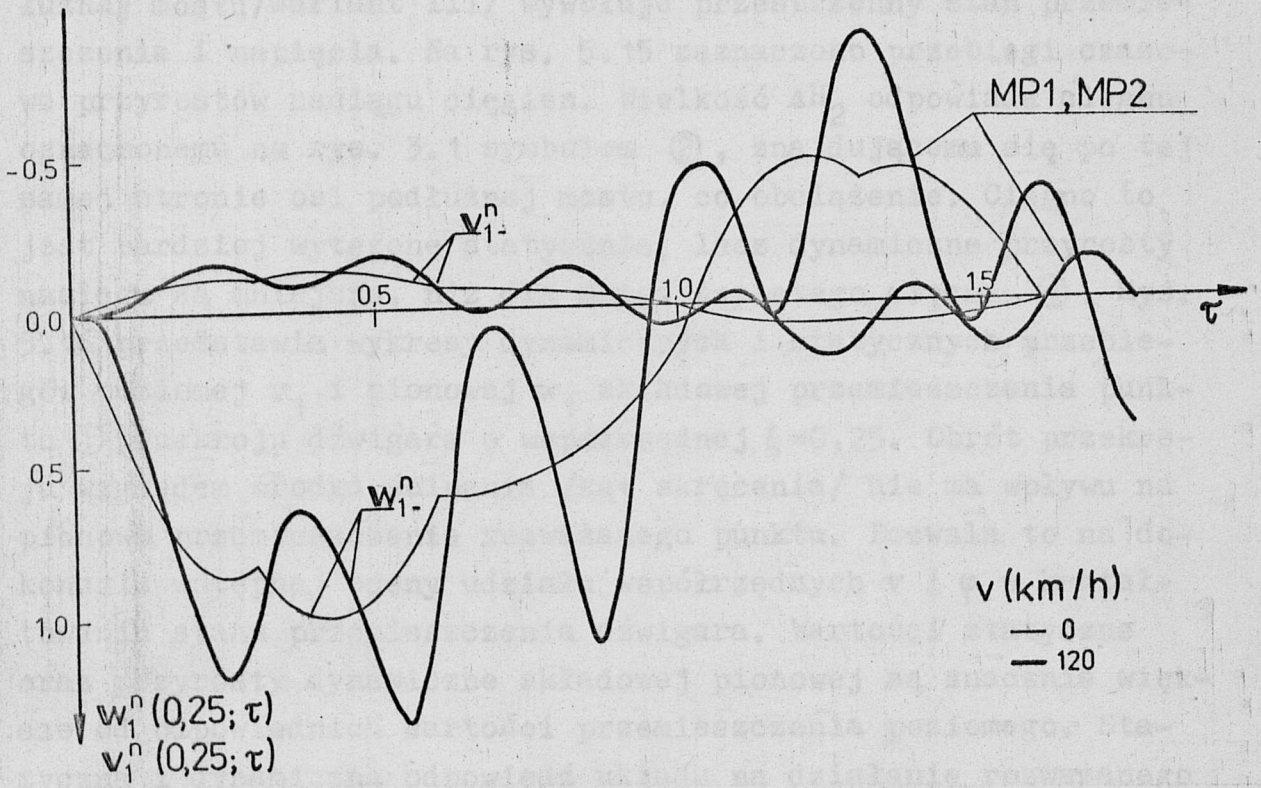
Wpływ prędkości obciążenia nie jest monotoniczny, największe przeciążenia dynamiczne zaobserwowano dla pośredniej wartości $v=120\text{km/h}$. Amplitudy oscylacji przebiegów dynamicznych obliczonych dla tej prędkości osiągają największe wartości w pośredniej fazie przejazdu rozważanej grupy oscylatorów. Przy prędkości $v=150\text{km/h}$ ekstremalne punkty oscylacji ulegają przesunięciu w czasie, amplitudy drgań narastają wolniej, największe ich wartości pojawiają się w końcowej fazie procesu. Wpływy dynamiczne obciążenia poruszającego się z prędkością $v=90\text{km/h}$ są niewielkie.

III wariant obciążenia analizowano w celu określenia wpływu poziomej i obrotowej inercji masy oscylatora. Wykonano obliczenia dla dwóch modeli pojazdu: w postaci klasycznego oscylatora /MP1/ i pionowo resorowanej masy o trzech składowych siły inercji /MP2/. W pierwszym przypadku równanie ruchu układu most+obciążenie ruchome ma wyraźnie prostszą strukturę, co powoduje znaczne skrócenie czasu obliczeń. Pominięcie wpływu poziomej i obrotowej inercji masy oscylatora nie wywołuje dla rozważanego obciążenia istotnych różnic w przebiegach dynamicznych wszystkich rozpatrywanych wielkości. Maksymalne wartości względnych odchylen rozwiązań nie przekraczają 2%. Wpływ ten może być istotny jedynie w przypadku intensywnego obciążenia działającego jednostronnie względem osi podłużnej mostu.

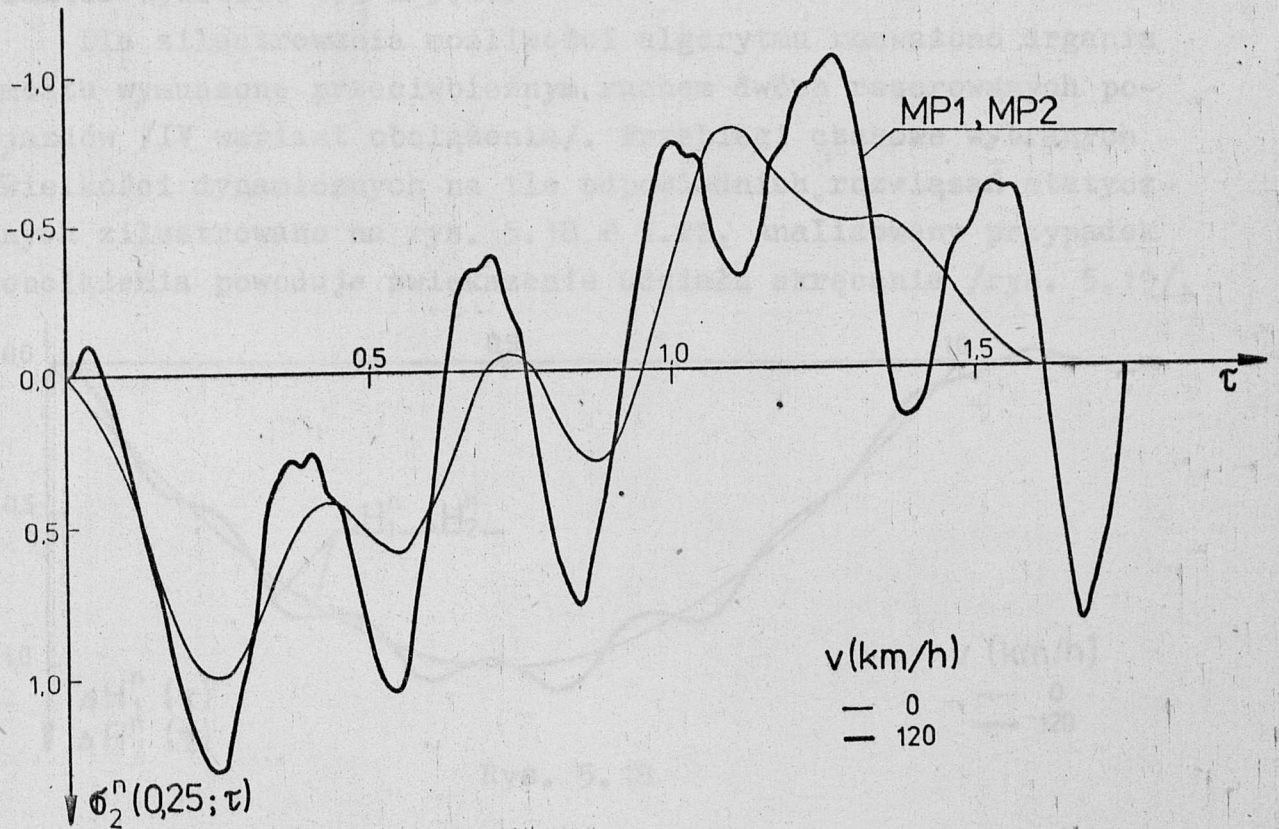
Przykładowe wyniki obliczeń pokazano na rys. 5.15 ÷ 5.17. Różnice rozwiązań uzyskanych dla dwóch rozpatrywanych modeli pojazdu nie są widoczne w skali rysunków.



Rys. 5.15



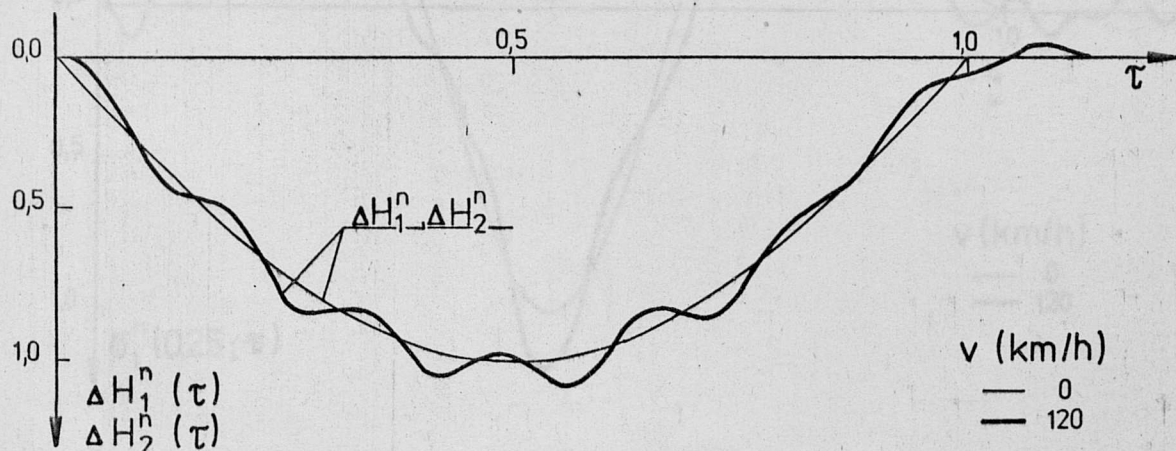
Rys. 5.16



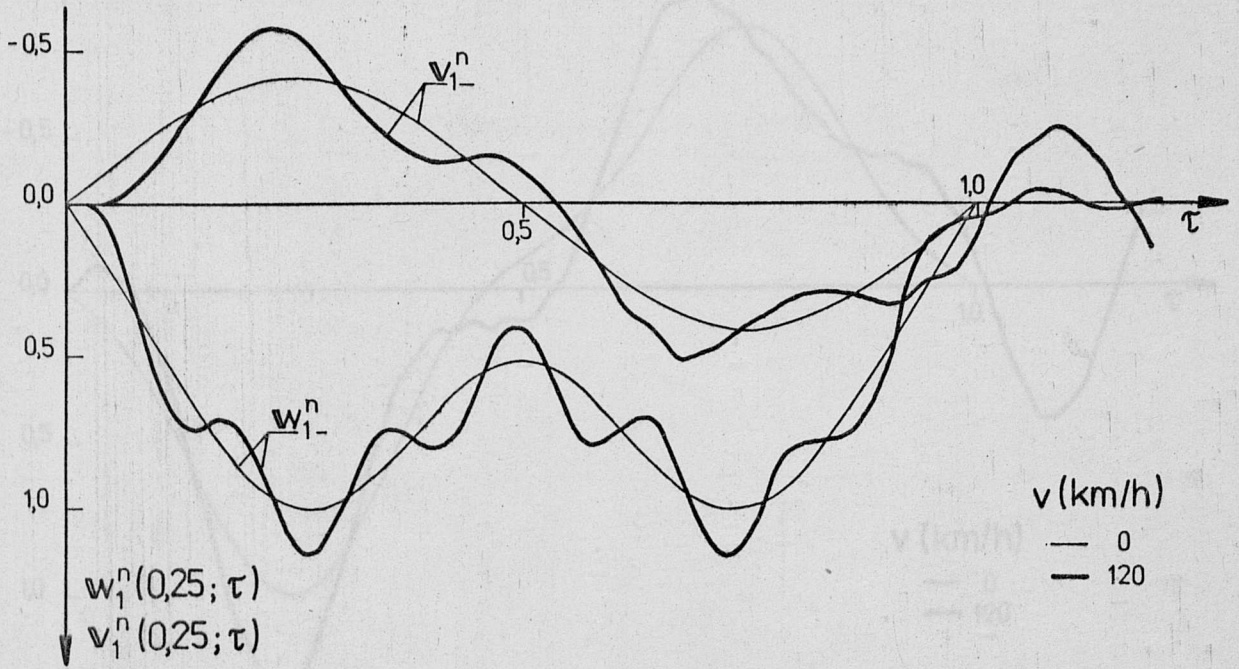
Rys. 5.17

Obciążenie poruszające się mimosłowo względem osi podłużnej mostu/wariant III/ wywołuje przestrzenny stan przemieszczenia i napięcia. Na rys. 5.15 zaznaczono przebiegi czasowe przyrostów naciągu cięgien. Wielkość ΔH_2 odpowiada cięgnu oznaczonemu na rys. 3.1 symbolem ②, znajdującemu się po tej samej stronie osi podłużnej mostu, co obciążenie. Ciężno to jest bardziej wyteżone statycznie, lecz dynamiczne przyrosty naciągu są mniejsze, niż dla mniej napiętego cięgna ①. Rys. 5.16 przedstawia wykresy dynamicznych i statycznych przebiegów poziomej w_1 i pionowej w_2 składowej przemieszczenia punktu ① przekroju dźwigara o współrzędnej $\xi = 0,25$. Obrót przekroju względem środka ścinania /kąt skręcenia/ nie ma wpływu na pionowe przemieszczenie rozważanego punktu. Pozwala to na dokonanie wstępnej oceny udziału współrzędnych v i φ w kształtowaniu stanu przemieszczenia dźwigara. Wartości statyczne oraz przyrosty dynamiczne składowej pionowej są znacznie większe od odpowiednich wartości przemieszczenia poziomego. Statyczna i dynamiczna odpowiedź układu na działanie rozważanego obciążenia ruchomego kształtuje się głównie pod wpływem pionowego zginania. Potwierdzeniem tego faktu jest zbliżony charakter wykresów 5.9 i 5.17.

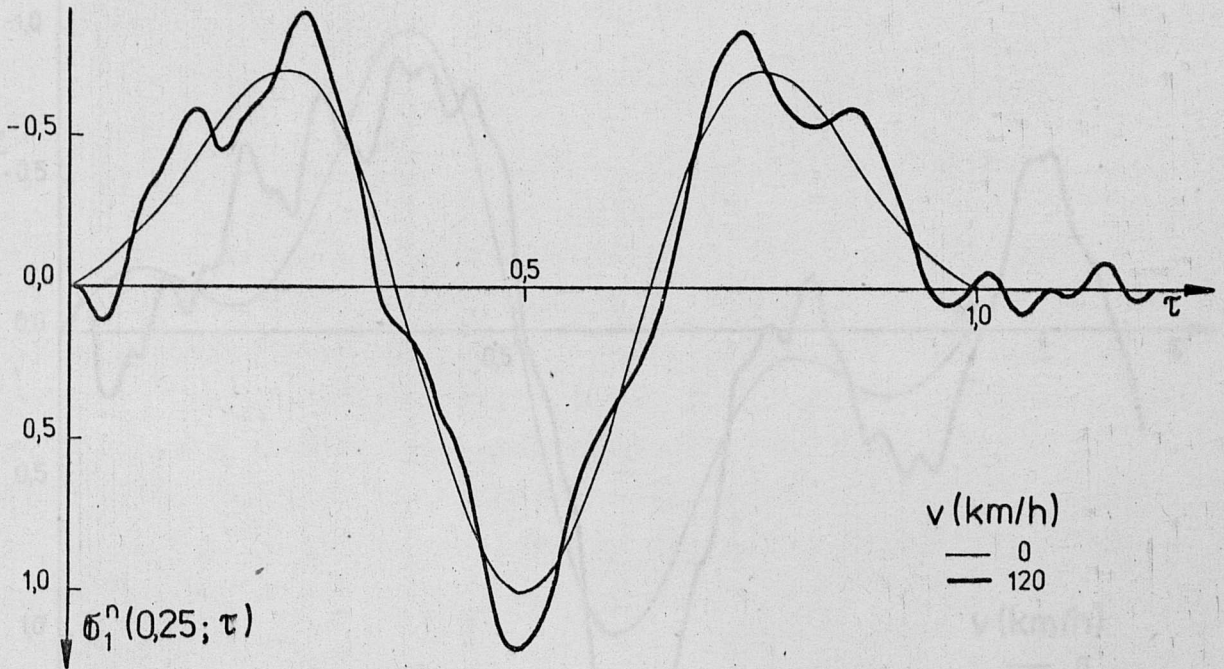
Dla zilustrowania możliwości algorytmu rozważono drgania mostu wymuszone przeciwbieżnym ruchem dwóch resorowanych pojazdów /IV wariant obciążenia/. Przebiegi czasowe wybranych wielkości dynamicznych na tle odpowiednich rozwiązań statycznych zilustrowano na rys. 5.18 ÷ 5.22. Analizowany przypadek obciążenia powoduje zwiększenie udziału skręcania /rys. 5.19/.



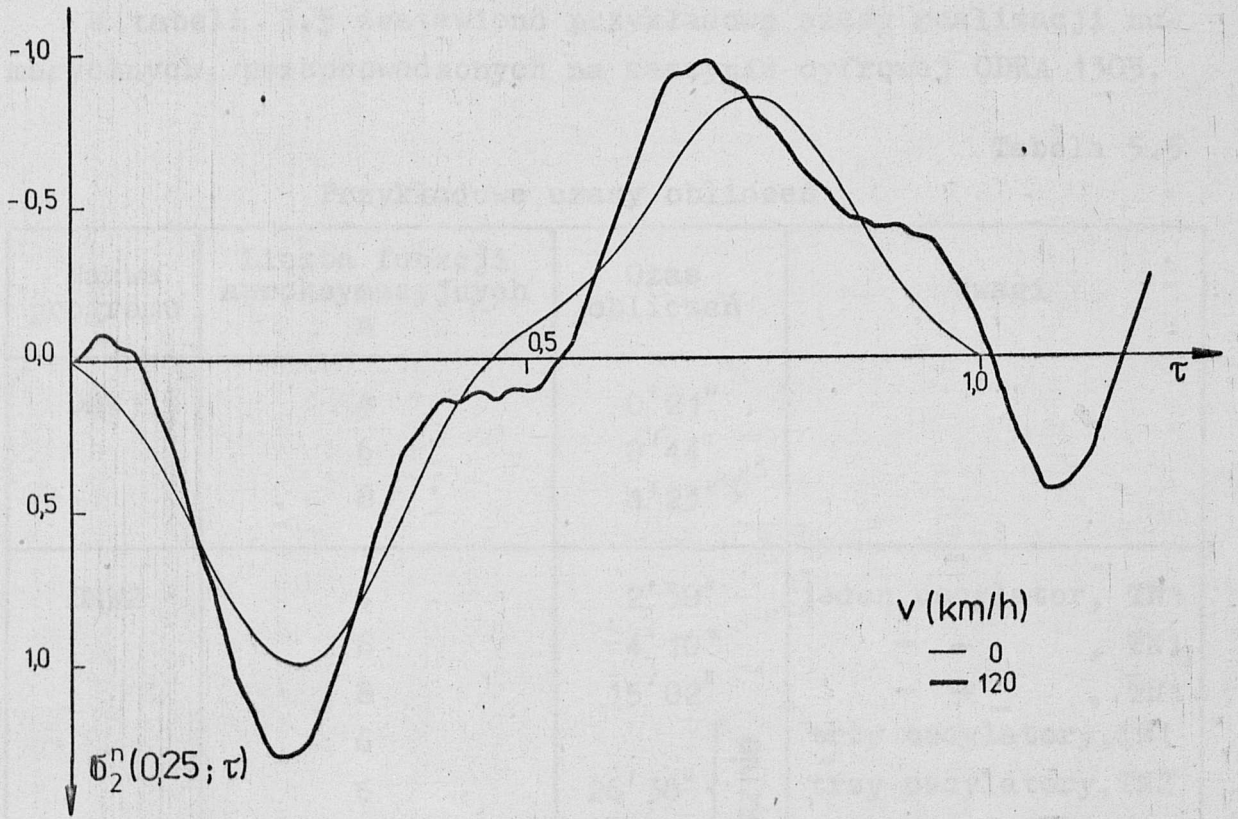
Rys. 5.18



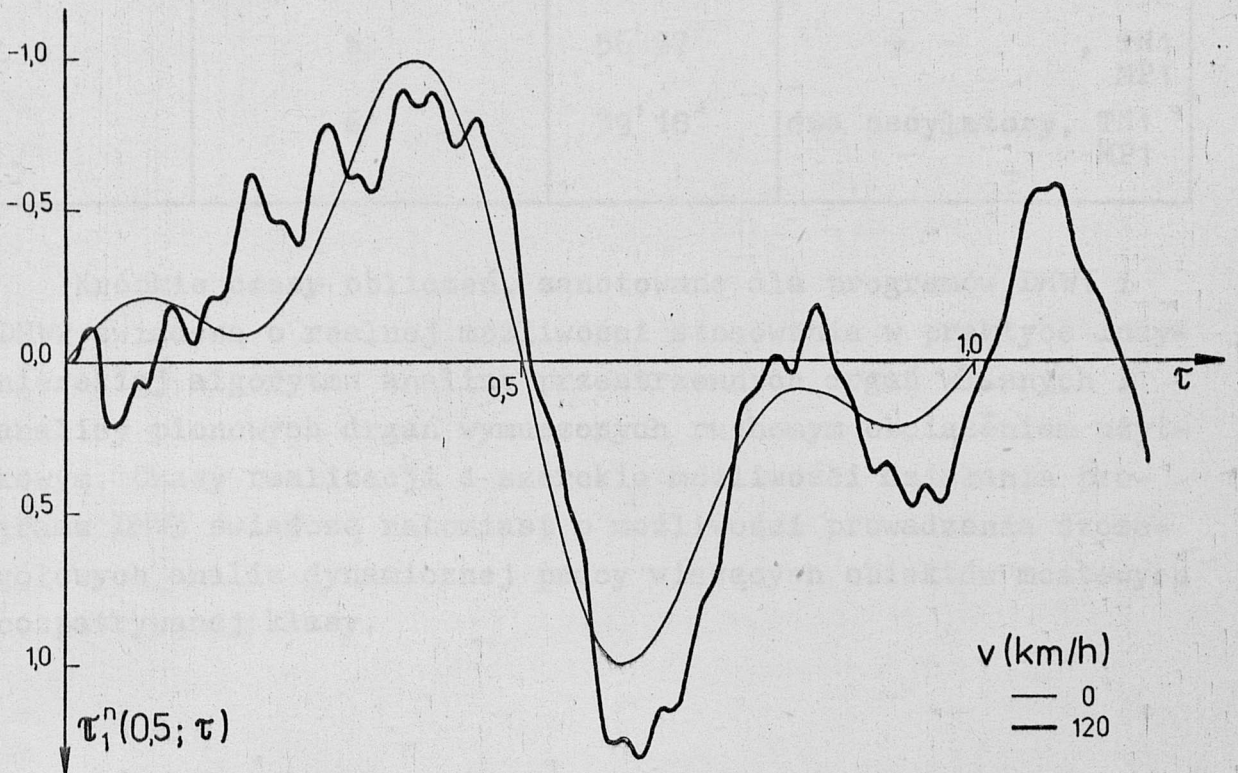
Rys. 5.19



Rys. 5.20



Rys. 5.21



Rys. 5.22

W tabeli 5.5 zestawiono przykładowe czasy realizacji numerycznych, przeprowadzonych na maszynie cyfrowej ODRA 1305.

Tabela 5.5

Przykładowe czasy obliczeń

Nazwa programu	Liczba funkcji aproksymacyjnych n	Czas obliczeń	Uwagi
DMW1	4	0' 21"	
	6	0' 44"	
	8	1' 23"	
DMW2	4	2' 30"	jeden oscylator, TN1
	6	4' 10"	- - , TN1
	8	15' 02"	- - , TN1
	6	26' 38" } łącznie	trzy oscylatory, TN1
	6		trzy oscylatory, TN2
	6		trzy oscylatory, TL
DMW3	6	71' 18"	trzy oscylatory, TN1 MP2
	6	56' 57"	- - , TN1 MP1
	6	39' 18"	dwa oscylatory, TN1 MP1

Krótkie czasy obliczeń, zanotowane dla programów DMW1 i DMW2 świadczą o realnej możliwości stosowania w praktyce inżynierskiej algorytmu analizy przestrzennych drgań własnych i analizy pionowych drgań wymuszonych ruchomym obciążeniem użytkowym. Czasy realizacji i szerokie możliwości działania programu DMW3 świadczą natomiast o możliwości prowadzenia szczegółowych analiz dynamicznej pracy wiszących obiektów mostowych rozpatrywanej klasy.

6. PODSUMOWANIE

W pracy sformułowano teorię i opracowano macierzowy algorytm rozwiązania problemu przestrzennych nieliniowych drgań mostów wiszących wybranego typu, poddanych działaniu ruchomego obciążenia użytkowego. Algorytm dotyczy jednoprzęsłowych obiektów mostowych ze swobodnie podpartą i podwieszoną do dwóch wiotkich ciągłych belką usztywniającą, której model może być przyjęty w postaci balastowanego dźwigara cienkościennego o monosymetrycznym otwartym przekroju. Analizowanym obciążeniem użytkowym jest tabor drogowy złożony z pojazdów samochodowych poruszających się ze stałą prędkością. Model pojazdu przyjęto w postaci pionowo resorowanej masy, z uwzględnieniem bezwładności obrotowej oraz pionowej i poziomej składowej siły inercji w płaszczyźnie prostopadłej do osi mostu.

Przestrzenny ruch obiektu opisano globalnie, wykorzystując teorię wytrzymałości złożonej prętów cienkościennych i uwzględniając wpływ sprzężeń charakterystycznych dla drgań mostów wiszących. Rozróżnienie w przekroju poprzecznym balastowanego dźwigara środka masy przekroju sprężystego, środka bezwładności i środka ścinania umożliwiło poprawne określenie bezwładnościowych sprzężeń poziomych drgań giętnych i drgań skrętnych mostu. Uwzględniono ponadto sprzężenie drgań skrętnych z pionowymi drganiami giętnymi, wywołane wpływem efektów nieliniowości geometrycznej związanej z pracą ciągłych. Dokonano pewnych uściśleń klasycznej teorii formułując statyczne poprawki drugiego rzędu /odrzućenie zasady zeszywnienia/, dzięki czemu ujawniono efekt wahadłowy charakterystyczny dla drgań podwieszanej belki mostu.

Przyjęty model obciążenia sformułowano przy założeniach zbliżonych do warunków rzeczywistych działania taboru drogowego. Uwzględniono wpływ resorowania i inercji pojazdów oraz możliwość dowolnej specyfikacji szeregu parametrów charakteryzujących pojazd, jego położenie na obiekcie oraz prędkość i kierunek ruchu.

W wyniku realizacji algorytmu otrzymuje się przebiegi cza-

sowe dynamicznych przyrostów sił naciągu cięgien oraz pełne dynamiczne rozwiązanie w postaci geometryczno-czasowych rozkładów składowych stanu przemieszczenia i naprężenia w belce usztywniającej. Opis rozwiązań w formie unormowanych, statycznych i dynamicznych przebiegów czasowych umożliwia natchmiastową ocenę przeciążeń dynamicznych dla kolejnych położeń przyjętej grupy obciążeń i wyznaczenie współczynników dynamicznych dla każdej analizowanej wielkości.

Przykład realizacji numerycznej wykazał dużą efektywność algorytmu i świadczy o jego przydatności w praktyce inżynierskiej i badawczej. Efektywność algorytmu wynika przede wszystkim z dyskretyzacji zadania metodą aproksymacji ciągłej, przy trafnym doborze bazy aproksymacyjnej w postaci funkcji trygonometrycznych, zapewniających w rozważanym przypadku szybką zbieżność rozwiązania. Drugą korzystną okolicznością jest zastosowanie nowoczesnych metod numerycznych w celu rozwiązania nieliniowych równań ruchu.

W pracy przeprowadzono testy numeryczne, na podstawie których uzyskano potwierdzenie efektywności przyjętej aproksymacji w kształtowaniu rozwiązań statycznych i dynamicznych, obejmujących siły naciągu cięgien i stan przemieszczenia. Dokonano również wstępnej analizy studyjnej w zakresie wpływu efektów nieliniowych, prędkości przejazdu obciążenia oraz wpływu poziomej i obrotowej bezwładności obciążenia.

Efekty nieliniowe dla rozważanego obiektu i obciążenia okazały się nieistotne, podobnie jak wpływ poziomej i obrotowej inercji obciążenia ruchomego. W obu przypadkach twierdzenia tego nie można uogólniać, gdyż rozważane było obciążenie o małej intensywności. Wpływ prędkości przejazdu obciążenia nie jest monotoniczny. Największe efekty zaobserwowano dla pośredniej z trzech rozpatrywanych prędkości, wynoszącej 120km/h.

Oddziaływanie rozpatrywanych obciążeń ruchomych wywołuje duże przeciążenia dynamiczne w przekroju mostu o współrzędnej $\xi = 0,25$. Przekrój w $1/2$ rozpiętości przęsła oraz cięgna są znacznie mniej wyteżone. Główny udział w kształtowaniu dynamicznej odpowiedzi mostu na działanie ruchomego obciążenia użytkowego mają pionowe drgania giętne.

Przedstawiony w pracy algorytm został opracowany przy pewnych założeniach upraszczających. Między innymi pominięto odkształcenia wieszaków oraz poziome przesunięcia cięgien, wywołane obciążeniem użytkowym. Wpływy te mogą być uwzględnione przez odpowiednią modyfikację algorytmu. Należałoby dokonać niezależnego opisu stanu przemieszczenia cięgien i belki. Prowadzi to do zwiększenia bazy współrzędnych uogólnionych o podzbiory odpowiadające dodatkowym niezależnym przesunięciom. Wzrost rozmiaru zadania powoduje zmniejszenie numerycznej efektywności algorytmu, przy czym można by ten niekorzystny wpływ ograniczyć dokonując po przeprowadzeniu transformacji własnej obciążenia nieistotnych oscylacji wysokoczęstotliwościowych.

W analizie dynamicznego wpływu ruchomego obciążenia pominięto efekty związane z przejazdem obciążenia po nierówności progowej oraz po nierównościach toru ruchu. Pominięto również wpływ pionowej krzywizny toru. Sposób uwzględnienia i charakter tych wpływów jest opisany w pracach [22,26].

LITERATURA

1. Abdel-Ghaffar A.M., Free Torsional Vibrations of Suspension Bridges, Journ. of the Struct. Div., ASCE, 4, 1979
2. Abdel-Ghaffar A.M., Housner G.W., Ambient Vibration Tests of Suspension Bridge, Journ. of the Eng. Mech. Div., ASCE, 5, 1978
3. Andermann F., Tarcze prostokątne. Obliczenia statyczne, Arkady, Warszawa, 1966
4. Argyris J.H. i in., Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej, IPPT PAN, Ossolineum, Warszawa, 1977
5. Belytschko T., Schoeberle D.F., On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics, Journ. of Applied Mech., 12, 1975
6. Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L., Michaelson S., Macierzowa analiza drgań, WNT, Warszawa, 1972
7. Bleich F., Mc Collough C.B. i in., The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, U.S. Govern. Princ. Office, Washington, 1950
8. Bryja D., Równania ruchu mostu wiszącego dla wybranych modeli obciążenia ruchomego, Inst. Inż. Łąd. Polit. Wrocław., Raport PRE nr 61/80
9. Bryja D., Langer J., Drgania mostu wiszącego wymuszone ruchomym obciążeniem inercyjnym, V Konf. "Met. komp. w mech. konstr.", Wrocław 1981
10. Caplin C.A., Visjačie mosty, Dorizdat, Moskva, 1950
11. Faddiejew D.K., Faddiejewa V.N., Vyčislitelnyje metody linejnoj algebry, Moskva, 1963
12. Fleming J.F., Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridge Structures, Computers and Structures, 10, 1979
13. Gol'denblat I.V., Dinamičeskaja ustojčivost' sooruzenij, Strojizdat, Moskva, 1948
14. Hawranek A., Steinhardt O., Theorie und Berechnung der Stahlbrücken, Springer V., Berlin, 1958
15. Hirai A., Ito M., Response of Suspension Bridges to Moving Vehicles, Journ. of the Faculty of Eng., 1, 1967
16. Hughes T.J.K., A Note on the Stability of Newmark's Algorithm

- in Nonlinear Structural Dynamics, Int. Journ. Num. Meth. Eng., 1976
17. Ito M., Kitagawa A.M., Response of Multi-Span Suspension Bridges to a Moving Concentrated Load, Eng. Res. Inst., Tokyo, 29, 1970
 18. Jarzyński F., Nguyen Van Tinh, Zastosowanie metody macierzy przeniesienia w obliczaniu drgań własnych układu belkowo-linowego, Mech. Teoret. i Stos., t.12, z.2, 1976
 19. Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W., Wytrzymałość materiałów, Arkady, Warszawa, 1974
 20. Kačurin V.K., Bragin A.V., Erunov B.G., Proektirovanie vi-sjačich i vantovych mostov, Izd. Transport, Moskva, 1971
 21. Kączkowski Z., O drganiach belki mostowej pod wpływem przesuwających się obciążeń, Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, 201, 1967
 22. Klasztorny M., Analiza dynamiczna ortotropowych przęseł mostów drogowych, Inst. Inż. Łąd. Polit. Wrocł., Praca doktorska, Wrocław, 1977
 23. Langer J., Dynamika budowli, Wyd. Polit. Wrocł., Wrocław, 1980
 24. Langer J., Analiza dynamiczna przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem, Arch. Inż. Łąd., t.20, z.4, 1974
 25. Langer J., Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równania ruchu, Arch. Inż. Łąd., t.25, z.3, 1979
 26. Langer J., Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem, Arch. Inż. Łąd., t.19, z.2, 1973
 27. Langer J., Bryja D., Analiza struktury widma częstości pionowych drgań własnych mostu wiszącego, Arch. Inż. Łąd., t.25, z.1, 1979
 28. Langer J., Bryja D., Statyka mostu wiszącego z uwzględnieniem efektów nieliniowych, XXV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1979
 29. Langer J., Bryja D., Przestrzenne drgania własne mostu wiszącego, Arch. Inż. Łąd., t.24, z.3, 1978
 30. Langer J., Klasztorny M., Rola hipotezy tłumienia wiskotycznego w zagadnieniu obciążeń ruchomych, XX Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1974

31. Langer J., Klasztorny M., Bryja D., Drgania własne rurociągowego mostu wiszącego, Arch. Inż. Łąd., t.25, z.2, 1979
32. Langer J., Paszke W., Uwagi o zastosowaniu metod wariacyjnych w zagadnieniach brzegowych mechaniki budowli, XII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1966
33. Legras J., Praktyczne metody analizy numerycznej, WNT, Warszawa, 1974
34. Lewandowski R., O stabilności metod Newmarka i Langerera zastosowanych do całkowania równań ruchu układów nieliniowych, V Konf. "Met. komp. w mech. konstr.", Wrocław, 1981
35. Nakamura Y., Yoshimura T., Binary Flutter of Suspension Bridge Deck Sections, Journ. of the Eng. Mech. Div., ASCE, 8, 1976
36. Naleszkiewicz J., Działania dynamiczne pojazdów na mosty, Postęp techniczny w dziedzinie mostów, Warszawa, 1954
37. Newmark N.W., A Method of Computation for Structural Dynamics, Journ. Eng. Div., ASCE, 7, 1959
38. Nguyen Van Tinh, Macierzowe sformułowanie drgań własnych układu ciągnowo-prętowego, Arch. Inż. Łąd., t.21, z.4, 1975
39. Nguyen Van Tinh, Drgania i stateczność mostu wiszącego, Polit. Pozn., Praca doktorska, Poznań, 1976
40. Nowacki W., Dynamika budowli, Arkady, Warszawa, 1972
41. Rakowski J., Statyka i dynamika wybranych układów belkowo-ciężnowych, V Konf. "Met. komp. w mech. konstr.", Wrocław, 1981
42. Rottenberg R.W., Zawieszenie samochodu, Warszawa, 1974
43. Rutecki J., Cienkościenne konstrukcje nośne. Obliczenia wytrzymałościowe, PWN, Warszawa, 1966
44. Ružanskij I.L., O krutil'nych kolebanijach visjačego mosta s korobčatoj balkoj žëstkosti, Stroit. Mech. i Ras. Soor., Izd. Lit. po Stroit., 6, 1971
45. Ružanskij I.L., O vlijanii mas i skorostej dvižuščejsja nagruzki na usilija i peremeščenija v elementach visjačego mosta, Stroit. Mech. i Ras. Soor., Izd. Lit. po Stroit., 4, 1973
46. Ružanskij I.L., Praktičeskaja proverka metoda dinamičeskogo rasčëta visjačego mosta, Stroit. Mech. i Ras. Soor., Izd.

Lit. po Stroit., 6, 1974

47. Shirasi N., On the Coupled Free Vibrations of a Suspension Bridge, Mem. Fac. Engng., Kyoto, Univ., 2, 1963
48. Smirnov V.A., Visjačie mosty bol'sich prolětov, Izd. Vysš. Šk., Moskva, 1970
49. Solecki R., Szymkiewicz J., Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne, Arkady, Warszawa, 1964
50. Steinman D.B., A Practical Treatise Suspension Bridges, New York-London, 1929
51. Szelaowski F., Mosty metalowe, cz.II, WKiŁ, Warszawa, 1972
52. Timoshenko S.P., Teorija kolebanij v inženernom dele, Gos. Tech.-Teoret. Izd. Moskva, 1934
53. Vellozi F., Vibration of Suspension Bridges under Moving Loads, Civil Engrs, 14, 1967
54. SN-200-62, Statičeskij i dinamičeskij rasčët visjačich i vantovyh mostov

Spatial vibration of a suspension bridge under inertial moving load

Summary

A theory has been developed and the algorithm of solution presented for the non-linear, spatial vibration of a suspension bridge subjected to moving, sprung inertial load. The algorithm deals with single-span, highway suspension bridges with unisymmetric, open cross-section thin-walled stiffening girder. The load is assumed as the set of viscoelastic oscillators moving at constant speed. Three components of the inertia force of the oscillator in the plane perpendicular to the bridge axis are taken into account.

Spatial vibration of the bridge are described by the set of coupled, integro-differential equations in space-time domain. The equations have been formulated basing on the theory of a flexible cable and on the theory of the combined stress of thin-walled rods, taking into account the inertial coupling of vibrations and geometrical non-linear effects. More precise statements are contributed to the classical theory, consisting in the determination of the statical second order effects and revealing the pendular nature of the horizontal vibrations of the bridge.

The continuous model of the structure has been discretized in space domain, making use of Galerkin method. The matrix equation of motion of the system consisting of the bridge and moving load has been formulated in explicit form, in dimensionless variables. This equation has been solved with the help of numerical integration, by Newmark β -method. Based on parabolic extrapolation, the numerical forecast has been used for the non-linear characteristics of tensions in cables.

The expressions for displacements, internal forces and stresses in the structure are given, namely for vertical displacements and increments of tensions in cables as well as components of the displacement and stress in an arbitrary point of the stiffening girder. The normalized, statical and dynamical history curves for the analyzed quantities have been determined.

In addition, free vibrations, the case of the planar model of the structure as well as the load in the form of unsprung masses and concentrated forces have been considered.

The computer program has been also developed and the computations carried out for an example bridge. The results are presented in tables and graphically. The efficiency of the approximation has been examined and preliminary dynamic analysis of the bridge performed.