

Na prawach rękopisu

PRACA NAUKOWA
INSTYTUTU CYBERNETYKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii PREPRINT nr 60/81

ZASTOSOWANIE METOD SYMULACYJNYCH
DO ROZWIĄZYWANIA ZADANIA ANALIZY
DLA SPRZĘŻONYCH PROCESÓW WYMIANY
CIEPŁA I MASY

/rozprawa doktorska/

Antoni Izworski

Promotor:
doc. dr inż.
LUDWIK ŻEBROWSKI

Słowa kluczowe:
symulacja, wymiana masy
i energii, metody siat-
kowe

Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 1981

SPIS TREŚCI

1.	WSTĘP	4
1.1.	Wprowadzenie	4
1.2.	Cel i zakres pracy	5
1.3.	Układ pracy	6
2.	WYBRANE FRAGMENTY TEORII UKŁADÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH	7
2.1.	Klasyfikacja układów równań	7
2.2.	Zagadnienia graniczne dla układów równań	8
2.3.	Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych dla układów parabolicznych	9
2.4.	Model matematyczny quasiliniowego procesu wymiany ciepła i masy	13
3.	WYBRANE FRAGMENTY TEORII METOD SIATKOWYCH	17
3.1.	Metoda różnic skończonych	17
3.1.1.	Siatka i funkcje siatkowe	17
3.1.2.	Aproksymacja, stabilność i zbieżność operatorów różnicowych	1
3.1.3.	Badanie stabilności schematów różnicowych	20
3.2.	Metoda Galerkina	22
3.3.	Modelowanie zagadnień brzegowych na siatkach R-C	23
4.	ZASTOSOWANIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO MODELOWANIA QUASILINIOWEGO PROCESU WYMIANY CIEPŁA I MASY	24
4.1.	Algorytm linearyzacji równań quasiliniowych w przedziałach czasowych	24
4.2.	Schemat jawny	28
4.2.1.	Budowa schematu różnicowego, badanie aproksymacji	28
4.2.2.	Badanie stabilności schematu jawnego	32
4.2.3.	Algorytm modelowania zagadnień brzegowych	36
4.3.	Schemat niejawny	38
4.3.1.	Budowa schematu różnicowego, badania aproksymacji	38
4.3.2.	Badanie stabilności schematu niejawnego	39
4.3.3.	Algorytm modelowania zagadnień brzegowych	43
4.4.	Dokładność rozwiązań w metodzie różnic skończonych	45
5.	ZASTOSOWANIE METODY RITZA-GALERKINA	46
5.1.	Przestrzeń rozwiązań	46
5.2.	Dyskretyzacja zagadnienia brzegowego	47
5.3.	Zastosowanie elementów skończonych liniowych do modelowania procesu wymiany energii i masy	50

5.3.1.	Dyskretyzacja zagadnienia brzegowego	50
5.3.2.	Funkcje bazowe dla warunków brzegowych II i III rodzaju.....	51
5.3.3.	Modelowanie I zagadnienia brzegowego	55
5.3.4.	Modelowanie II zagadnienia brzegowego	58
5.3.5.	Modelowanie III zagadnienia brzegowego	59
6.	WYKORZYSTANIE ANALOGOWEJ SIECI R-C DO MODELOWANIA PROCESU WYMIANY ENERGII I MASY	63
6.1.	Linearyzacja i dyskretyzacja zagadnienia brzegowego	63
6.2.	Model analogowy	64
6.3.	Modelowanie zagadnień brzegowych na analogowej siatce R-C siatce R-C	66
7.	TESTOWANIE SIATKOWYCH METOD MODELOWANIA QUASILINIOWEGO PROCESU WYMIANY ENERGII I MASY	67
7.1.	Zadanie testowe	67
7.2.	Programy testujące	69
7.3.	Wyniki testowania metod siatkowych	70
7.3.1.	Testowanie metod rozwiązywania I zagadnienia brzegowego	70
7.3.2.	Testowanie metod rozwiązywania II i III zagadnienia brzegowego	80
8.	ZASTOSOWANIE METOD SIATKOWYCH DO SYMULACJI CYFROWEJ PROCESU SUSZENIA PRZEGRODY BUDOWLANEJ	82
8.1.	Przedstawienie problemu	82
8.2.	Model matematyczny procesu suszenia przegrody budowlanej	82
8.3.	Wyniki symulacji	85
9.	WNIOSKI	87
10.	LITERATURA	

W pracy przedstawiono cyfrowe i hybrydowe metody rozwiązywania zadania analizy dla sprzężonego przepływu ciepła i masy. Określono klasę modelu matematycznego opisującego badany proces oraz podano warunki istnienia rozwiązania zagadnienia brzegowego. Rozwiązania numeryczne uzyskuje się stosując linearyzację równań w przedziałach czasowych oraz metodę różnic skończonych lub metodę elementów skończonych. Zbadano zbieżność i stabilność tych metod. Została również przedstawiona metoda hybrydowa z wykorzystaniem analogowej sieci R-C. Proponowane metody przetestowano symulując je dla pewnej klasy modelu matematycznego procesu i różnych rodzajów warunków brzegowych.

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

Terminy "modelowanie" i "symulacja" mają różny zakres pojęciowy w spotykanych publikacjach. W prezentowanej pracy, wzorem [18], przez modelowanie procesu rozumiemy tworzenie modelu matematycznego procesu, zaś badanie uzyskanego modelu w celu otrzymania pewnych informacji o procesie nazywamy symulacją procesu. W procesie jednoczesnego przenoszenia ciepła i substancji w ciałach porowatych, potencjał temperatury i potencjał substancji oddziałują na siebie poprzez ośrodek, w którym zjawisko to zachodzi. Proces taki nazywamy sprzężonym [52]. W przypadku procesów o stałych rozłożonych, najczęściej używanym modelem matematycznym jest zagadnienie graniczne (początkowe lub początkowo-brzegowe) dla równań różniczkowych cząstkowych lub układów równań różniczkowych cząstkowych. Zagadnienie to może być proste (zadanie analizy), jeżeli znane są warunki graniczne i wymuszenia lub odwrotnie (zadanie syntezy), gdy znany jest rozkład potencjału a szuka się jednej z wielkości, które są dane w zadaniu analizy.

Symulacja procesu wymiany masy i energii sprowadza się do rozwiązywania zagadnień granicznych dla układu równań różniczkowych cząstkowych. Dokładne rozwiązania takich zagadnień znane są tylko w pewnych szczególnych przypadkach i nie mają one większego zastosowania praktycznego. Dlatego opracowano metody przybliżonego rozwiązywania zagadnień granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych.

Najczęściej stosuje się metody siatkowe. Metody siatkowe wykorzystuje się również do symulacji procesów o stałych rozłożonych na analizatorach pól. Rozwiązanie zagadnień granicznych dla liniowych równań różniczkowych cząstkowych jest dobrze znane w literaturze. Problemowi temu jest poświęcone wiele monografii z teorii.

schematów różnicowych [16], [17], [33], [44], [45] i elementów skończonych [50]. Więcej trudności sprawiają procesy, których symulacja wymaga rozwiązywania zagadnień granicznych dla równań różniczkowych nieliniowych. Większość procesów nieustalonych wymaga przyjęcia właśnie takiego modelu nieliniowego. Linearyzacja modelu prowadzi do znacznych błędów, zwłaszcza gdy funkcje potencjałów przyjmują wartości ze względnie dużego przedziału. W ostatnich latach pojawiło się wiele prac poświęconych rozwiązywaniu zagadnień granicznych dla pojedynczego quasilineowego równania różniczkowego [1], [2], [23], [27], [28], [54], [55]. Natomiast zagadnienia graniczne dla nieliniowej wymiany masy i energii nie mają dostatecznego opracowania. Zagadnienie to wymaga szczegółowego zbadania, ponieważ dotychczasowe prace [11], [26], [30], [31], [40], [41], [52] traktują tylko o pewnych szczególnych zagadnieniach związanych z symulacją procesu wymiany masy i energii.

1.2. Cel i zakres pracy

Celem pracy jest adaptacja metod opracowanych dla liniowych i quasilineowych równań przewodzenia ciepła do symulacji sprzężonych procesów wymiany ciepła i masy opisywanych układem quasilineowych równań różniczkowych cząstkowych typu parabolicznego. W tym celu określono klasę modelu matematycznego dla procesu wymiany ciepła i masy oraz podano warunki silnej paraboliczności układu równań różniczkowych opisujących ten proces. Pozwoliło to na sprecyzowanie warunków istnienia klasycznego i uogólnionego rozwiązania dla zagadnień brzegowych, co uzasadnia stosowanie metod siatkowych. Następnie wzorem pracy [54], zastosowano algorytm linearyzacji w przedziałach czasowych, który sprowadza równanie quasilineowe do ciągu równań liniowych. Zagadnienia graniczne dla liniowych równań różniczkowych cząstkowych rozwiązano wykorzystując metodę różnic skończonych, elementów skończonych oraz analogową siatkę R-C.

W metodzie różnic skończonych zbadano dwa schematy różnicowe, jawny i niejawny, wzorowane na schematach budowanych dla liniowych równań przewodzenia ciepła. Zbadano aproksymację oraz stabilność zaproponowanych schematów. Dyskretyzacja Ritza-Galerkina z wykorzystaniem elementów skończonych, sprowadza zagadnienie graniczne do zagadnienie początkowe dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. Otrzymane w ten sposób zagadnienie początkowe rozwiązano metodą różnic skończonych. Zbudowano odpowiednie schematy różnicowe i zbadano ich stabilność.

W celu zastosowania analogowej siatki R-C przeprowadzono dyskretyzację obszaru. Zaproponowano model elektryczny procesu wymiany masy i energii oraz podano warunki zgodności. Wymienione metody zastosowano do zagadnień granicznych z warunkami brzegowymi I, II i III rodzaju w obszarze jednowymiarowym. Zaproponowane metody zostały przetestowane dla pewnego układu jednorodnych quasiliniowych równań silnie parabolicznych z warunkami początkowymi i brzegowymi I, II i III rodzaju. Na zakończenie pokazano zastosowanie omawianych metod do symulacji procesu suszenia przegrody budowlanej.

1.3. Układ pracy

Praca składa się z dziewięciu rozdziałów. Rozdział pierwszy ma charakter wprowadzający. Rozdział drugi zawiera definicje podstawowych pojęć z teorii równań różniczkowych cząstkowych. Podano w nim warunki istnienia klasycznych i uogólnionych rozwiązań zagadnień granicznych dla układu równań silnie parabolicznych oraz udowodniono, że proces wymiany masy i energii jest opisywany silnie parabolicznym układem równań różniczkowych cząstkowych. Rozdział trzeci podaje podstawowe pojęcia stosowanych metod siatkowych. Zasadniczą część pracy stanowią rozdziały czwarty, piąty i szósty. W rozdziale czwartym opisano zastosowanie metody różnic skończonych do symulacji rozpatrywanego procesu. Rozdział ten zawiera opis algorytmu linearyzacji w przedziałach czasowych, opis schematu jawnego i niejawnego oraz twierdzenia o aproksymacji, stabilności i zbieżności tych schematów. Podano również algorytmy rozwiązywania zagadnień granicznych oparte na tych schematach. Rozdział piąty zawiera opis zastosowania metody Ritza-Galerkina z wykorzystaniem elementów skończonych. Przedstawiono w nim proces dyskretyzacji oraz budowanie i dobór funkcji bazowych w zależności od rodzaju warunków brzegowych. Zaproponowano algorytm rozwiązania zagadnień granicznych z wykorzystaniem elementów liniowych oraz aproksymacji różnicami skończonymi. Udowodniono odpowiednie twierdzenia o stabilności. Rozdział szósty zawiera opis zastosowania analogowej sieci R-C do symulacji procesu wymiany masy i energii. Podano w nim schemat elektryczny i opis funkcjonowania modelu analogowego, warunki zgodności modelu z modelowanym procesem oraz algorytm rozwiązywania zagadnienia granicznego. W rozdziale siódmym zamieszczono wyniki testowania przedstawionych metod siatkowych. Rozdział ósmy pokazuje sposób rozwiązania przykładowego zagadnienia praktycznego z wykorzy-

stanem metod przedstawionych w rozdziałach czwartym i piątym. Wnioski i uwagi końcowe zamieszczono w rozdziale dziewiątym.

Uwaga! Wyniki obliczeń numerycznych ze względu na ich dużą ilość przedstawiono w postaci wykresów ciągłych. Należy jednak rozumieć, że linia ciągła łączy jedynie pewną skończoną liczbę punktów, gdyż przedstawiane funkcje są funkcjami siatkowymi, określonymi jedynie w węzłach siatki. Wyjątek stanowi metoda Ritz-Galerkina, w której rozwiązanie dla ustalonej chwili czasowej, jest funkcją odcinkami liniową.

2. WYBRANE FRAGMENTY TEORII UKŁADÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

2.1. Klasyfikacja układów równań

Równania różniczkowe oraz układy równań różniczkowych często zapisujemy w postaci operatorowej

$$L u = f, \quad (2.1)$$

gdzie L jest pewnym operatorem różniczkowym, czyli wyrażeniem różniczkowym. Operator działa na funkcję $u(x,t)$ określoną w pewnym obszarze $Q \subset E_{n+1}$. Jeżeli współczynniki występujące w tym wyrażeniu różniczkowym zależą od x i t , mówimy wówczas, że operator $L(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$ jest liniowy.

Operatorem quasiliniowym nazywamy operator, którego współczynniki zależą dodatkowo od funkcji $u(x,t)$. Badając własności operatora quasiliniowego $L(x, t, u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$ zwykle zakłada się pewien obszar zmienności funkcji $u(x,t)$ oraz jej odpowiednią gładkość.

Wiele zagadnień fizyki matematycznej jest opisywanych przez równania paraboliczne. Badany proces wymiany energii i masy jest również opisywany takimi równaniami. Podamy definicję tych układów. Zauważmy, że dla ustalonych $(x,t) \in Q$ i u funkcja $L(x, t, u, i\zeta, p)$, gdzie ζ n -wymiarowy wektor o współrzędnych $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, p - zespolony parametr, jest wielomianem względem ζ_i i p .

Niech b będzie pewną liczbą całkowitą i niech stopień wielomianu $L(x, t, u, i\zeta, p\lambda^{2b})$ względem λ jest równy $2br$, gdzie $r > 0$ jest liczbą całkowitą. Oznaczmy przez L_0 część główną wielomianu L , tzn. sumę wszystkich jego członów, dla których

$$L_0(x, t, u, i\zeta, p\lambda^{2b}) = \lambda^{2b} L_0(x, t, u, i\zeta, p) \quad (2.2.)$$

D e f i n i c j a 2.1. Operator L nazywamy parabolicznym w sensie Pietrowskiego ($2b$ -parabolicznym) [32], [38] w punkcie (x, t)

na rozwiązaniu $u(x,t)$, jeżeli dla dowolnego rzeczywistego ξ pierwiastek p_s wielomianu $L_0(x,t,u,i\xi,p)$ względem zmiennej p , spełnia warunek

$$\operatorname{Re} p_s \leq -\delta |\xi|^{2b}, \quad (\delta > 0). \quad (2.3.)$$

D e f i n i c j a 2.2. Macierzowy operator różniczkowy $\mathcal{L}(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ z elementami $L_{kj}(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ ($k,j = 1,\dots,m$) nazywamy parabolicznym w sensie Pietrowskiego, jeżeli:

1° operator $L(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) = \det \mathcal{L}(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$ jest $2b$ -paraboliczny w sensie definicji 2.1,

2° stopień wielomianu $L_{kj}(x,t,u,i\xi\lambda,p\lambda^{2b})$ względem λ nie przewyższa $2br_j$ i $L_{kj}(x,t,u,i\xi,p) = \delta_k^j p^{r_j} + L'_{kj}(x,t,u,i\xi,p)$, gdzie L'_{kj} - wielomian, nie zawierający p^{r_j} .

Ważnym i najlepiej zbadanym przypadkiem parabolicznych układów Pietrowskiego są układy równań, dla których wszystkie $r_j = 1$. Mają one postać

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{H}(x,t,u,\frac{\partial}{\partial x})u = f, \quad (2.4)$$

gdzie \mathcal{H} - operator rzędu $2b$.

Główną częścią wielomianu $L_{kj}(x,t,u,i\xi,p)$ nazywamy sumę L_{kj}^0 wszystkich członów L_{kj} , dla których spełniony jest warunek jednorodności

$$L_{kj}^0(x,t,u,i\xi\lambda,p\lambda^{2b}) = \lambda^{2br_j} L_{kj}^0(x,t,u,i\xi,p), \quad (2.5)$$

a macierz \mathcal{L}^0 zbudowaną z elementów L_{kj}^0 , nazywamy częścią główną operatora \mathcal{L} .

D e f i n i c j a 2.3. Układ postaci (2.4) nazywamy silnie parabolicznym, jeżeli operator \mathcal{H} jest silnie eliptyczny [52], tzn. jego rząd jest równy $2b$ i jego główna część \mathcal{H}_0 spełnia warunek

$$\operatorname{Re} [\mathcal{H}_0(x,t,u,i\xi)z,z] \geq \delta |\xi|^{2b} |z|^2, \quad (2.6)$$

gdzie: $z = (z_1, \dots, z_m)$ - wektor o współczynnikach zespolonych,

$$[a,b] = \sum_{i=1}^m a_i \bar{b}_i \quad - \text{oznacza iloczyn skalarny.}$$

Dla układów silnie parabolicznych znane są liczne twierdzenia o rozwiązywalności zagadnień brzegowych.

2.2. Zagadnienia graniczne dla układów równań

Rozważmy ogólne zagadnienie brzegowe dla znalezienia wektor funkcji $u(x,t) = (u^1(x,t), \dots, u^m(x,t))^T$ spełniających warunki

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u &= f & ((x,t) \in Q_T) \\
 \mathcal{B}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u|_{S_T} &= \phi \\
 \mathcal{C}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u|_{t=0} &= \varphi
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie: $x \in \Omega \subset E_n$,

S - granica Ω ,

$Q_T = \Omega \times (0, T) \subset E_{n+1}$,

$S_T = \{(x,t) \in E_{n+1}, x \in S, t \in [0, T]\}$.

W pracach [7], [48] sformułowano algebraiczne warunki, jakie muszą spełniać części główne operatorów \mathcal{B} i \mathcal{C} (warunki zgodności) i metodą potencjałów wykazano istnienie jednoznacznego rozwiązania zagadnienia (2.7).

W praktyce spotykamy najczęściej następujące zagadnienia brzegowe mieszane:

pierwsze zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u(x,t) &= f(x,t), \\
 u|_{t=0} &= \varphi(x), \\
 u|_{S_T} &= \phi(x,t),
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

drugie zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u(x,t) &= f(x,t), \\
 u|_{t=0} &= \varphi(x), \\
 \mathcal{B}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}) u|_{S_T} &\equiv \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \phi(x,t)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

oraz trzecie zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u(x,t) &= f(x,t), \\
 u|_{t=0} &= \varphi(x), \\
 \mathcal{B}(x,t,u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u|_{S_T} &\equiv \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x,t) u|_{S_T} = \phi(x,t).
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

W pracach matematyków [32], [53] zagadnienie (2.10) nazywa się drugim zagadnieniem brzegowym, zaś zagadnienia (2.9) nie rozpatruje się oddzielnie.

2.3. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych dla układów parabolicznych

W podrozdziale tym, zostanie przytoczonych kilka twierdzeń o istnieniu jednoznacznego rozwiązania zagadnień brzegowych dla układów silnie parabolicznych w sensie definicji 2.3. Będziemy za-

kładali, że funkcje f , φ i ϕ w (2.8), (2.9) i (2.10) spełniają warunki zgodności dla $x \in S$ i $t=0$. Warunki te polegają na tym, że pochodne $D_t^k u$, które mogą być określone dla $t=0$ za pomocą równania i warunku początkowego, powinny spełniać dla $x \in S$ warunki brzegowe podane odpowiednio w (2.8), (2.9), (2.10).

Rozważmy następującą postać operatora

$$\mathcal{L}(x, t, u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u \equiv D_t^1 u - \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha^0(x, t, u) D_x^\alpha u + \sum_{|\alpha|=1} A_\alpha^1(x, t, u) D_x^\alpha u + A^2(x, t, u) u \quad (2.11)$$

gdzie: $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $u = (u^1(x, t), \dots, u^s(x, t))^T$

$A_\alpha^0, A_\alpha^1, A^2$ - funkcje macierzowe o wymiarze $s \times s$,

$$D_x^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - wielowskiąznik,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

α_i - całkowite liczby nieujemne,

$$D_t^k \equiv \frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$u^{(k)}(x) = D_t^k u(x, t) \Big|_{t=0} \quad (2.12)$$

$$\mathcal{H}(x, t, u, \frac{\partial}{\partial x}) u = \sum_{|\alpha|=2} A_\alpha^0(x, t, u) D_x^\alpha u - \sum_{|\alpha|=1} A_\alpha^1(x, t, u) D_x^\alpha u - A^2(x, t, u) u \quad (2.13)$$

Widzimy, że funkcje $u^{(k)}(x)$ ($k=1, 2$) są równe

$$u^{(0)}(x) = \varphi(x),$$

$$u^{(1)}(x) = \mathcal{H}(x, t, \varphi(x), \frac{\partial}{\partial x}) \varphi(x) + f(x, 0).$$

Pozostałe funkcje wyliczamy rekurencyjnie

$$u^{(k+1)}(x) = D_t^k \mathcal{H}(x, t, u(x, t), \frac{\partial}{\partial x}) u(x, t) + D_t^k f(x, t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mathcal{H}^{(j)}(x, 0, \varphi(x), \frac{\partial}{\partial x}) u^{(k-j)}(x) + f^{(k)}(x) \quad (2.14)$$

gdzie operator $\mathcal{H}^{(k)}$ otrzymano z operatora (2.13) przez zróżniczkowanie jego współczynników po t k -razy.

D e f i n i c j a 2.4. Mówimy, że dla zagadnień (2.8), (2.9), (2.10) są spełnione warunki zgodności rzędu $m \geq 0$, jeżeli są spełnione warunki

$$u^{(k)}(x) \Big|_{x \in S} = D_t^k \phi \Big|_{t=0} = \phi^{(k)}(x), \quad (k=0, 1, \dots, m), \quad (2.15)$$

lub

$$D_t^k \left\{ \sum_{|\alpha|=1}^n b_\alpha(x, t) D_x^\alpha u + b(x, t) u \right\} \Big|_{x \in S} = \phi^{(k)}(x), \quad (k=0, 1, \dots, m) \quad (2.16)$$

Dla zagadnienia (2.9) warunek zgodności otrzymamy przez odrzucenie funkcji b w (2.16). Warunek (2.16) możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} b_{\alpha}^{(k-j)}(x) D_x^{\alpha} u^{(j)}(x) + b^{(k-j)}(x) u^{(j)}(x) \right\} \Big|_{x \in S} = \phi^{(k)} \quad 2.17$$

$k=0, 1, \dots, m$.

Rozwiązań zagadnień (2.8) - (2.9) poszukujemy w przestrzeniach

Geldera $H^1(\bar{\Omega})$, $H^{1,1/2}(\bar{\Omega})$, gdzie

$H^1(\bar{\Omega})$ - przestrzeń Banacha funkcji $u(x)$ ciągłych na $\bar{\Omega}$, mających ciągłe pochodne do rzędu [1] oraz skończone miary tych pochodnych i samej funkcji $u(x)$ w sensie Lebesgue'a,

$H^{1,1/2}(\bar{\Omega})$ - przestrzeń Banacha funkcji $u(x,t)$ ciągłych w \bar{Q}_T wraz ze swymi pochodnymi postaci $D_t^r D_x^{\alpha}$ dla $2r+|\alpha| < 1$, funkcja u oraz wymienione pochodne są sumowalne w sensie Lebesgue'a.

W pracach [32], [48] podano następujące twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 2.1. Niech dla zagadnienia (2.8) będą spełnione następujące założenia dla $(x,t) \in \bar{Q}_T \setminus \Gamma_T$ i $|u| < M$

a) operator \mathcal{L} jest silnie 2-paraboliczny i jest postaci (2.11),

b) $[A^2(x,t,u)u, u] \geq -C_1|u|^2 - C_2$, $C_i \geq 0$ ($i=1,2$),

c) macierze $A_{\alpha}^0, A_{\alpha}^1, A^2, D_x^{\alpha} A_{\alpha}^0$ ($|\alpha|=1$) i $D_u^{\alpha} A_{\alpha}^0$ ($|\alpha|=1$) mają ciągłe elementy i spełniają warunki

$$|A_{\alpha}^1(x,t,u)| \leq \mu(|u|)$$

$$|A_{\alpha}^2(x,t,u)| \leq \mu(|u|)$$

$$|D_x^{\alpha} A_{\alpha}^0(x,t,u)|, |D_u^{\alpha} A_{\alpha}^0(x,t,u)| \leq \mu(|u|)$$

d) elementy macierzy $A_{\alpha}^0, A_{\alpha}^1, A^2$ mają ciągłe pochodne po x, t, u oraz pochodne mieszane

$$\frac{\partial^2}{\partial u^l \partial u^m} A_{\alpha}^0(x,t,u), \frac{\partial^2}{\partial u^l \partial x_k} A_{\alpha}^0(x,t,u)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^l \partial t} A_{\alpha}^0(x,t,u), \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial t} A_{\alpha}^0(x,t,u)$$

są ciągłe,

e) $\varphi(x) \in H^{2+\beta}(\Omega)$ i $\phi(x,t) \in H^{2+\beta}(S_T)$ oraz spełniają warunki zgodności rzędu 1,

f) $S \in H^{2+\beta}$.

Wówczas w klasie $H^{2+\beta, 4+\beta/2}(\bar{Q}_T)$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (2.8).

Stała M spełnia warunek $\max_{\bar{Q}_T} |u(x,t)| \leq M$ i jest funkcją norm

wymuszeń w równaniach (2.8) - (2.10), zaś $\mu(t)$ oznacza dowolną rzeczywistą funkcję niemalejącą, określoną dla $t \geq 0$.

T w i e r d z e n i e 2.2. Niech dla zagadnienia (2.10) będą spełnione założenia twierdzenia 2.1 oraz dodatkowo niech macierz b spełnia

$$\text{warunki } b(x, t, u) u \in H^{\beta, \beta/2} \quad \text{dla } |u| \leq M \\ [b(x, t, u) u, u] \geq C_1 |u|^2 + C_2, \quad C_i > 0 \quad (i=1, 2).$$

Wówczas istnieje jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia (2.10) w klasie $u(x, t) \in H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\overline{Q_T})$.

Rozważa się również tak zwane rozwiązania uogólnione dla zagadnień brzegowych. W pracy [53] dla silnie parabolicznego układu postaci

$$D_t^1 u + \sum_{|\alpha|, |\gamma| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha A^\alpha(x, t, D_x^\gamma u) = D_t^1 u + L(u) = f \quad (2.18)$$

rozważano zagadnienie mieszane z warunkami początkowym i brzegowymi postaci

$$u|_{t=0} = \psi(x) \quad (2.19)$$

$$u|_S = \varphi(x', t), \quad \dots, \quad D_x^\omega u|_S = \varphi_\omega(x', t), \quad x' \in S, \quad |\omega| \leq m-1$$

Przez rozwiązanie zagadnienia (2.18), (2.19) rozumiemy taką funkcję $u(x, t)$ z odpowiedniej przestrzeni, spełniającą warunki (2.19), dla której

$$[D_t^1 u, v] + \sum_{|\alpha|, |\gamma| \leq m} [A_\alpha(x, t, D_x^\gamma u), D_x^\alpha v] = [f, v] \quad (2.20)$$

dla dowolnych $v \in V_0 \subset V$. Przestrzenie U i V wybiera się w zależności od rzędu wzrostu A_α względem $D_x^\gamma u$. Udowodniono następujące twierdzenie [53]:

T w i e r d z e n i e 2.3. Jeżeli L jest silnoeliptycznym półograniczonym operatorem, to dla dowolnych warunków (2.19) i prawej części f spełniającej określone warunki gładkości, zagadnienie (2.18), (2.19) ma jednoznaczne rozwiązanie.

W cytowanej pracy podano kilka przykładów warunków gładkości o których mówi twierdzenie 2.3. Jeżeli A_α i $D_x^1 A_\alpha$ mają rząd wzrostu po $D_x^\gamma u$ nie wyższy niż $1-\delta$ ($\delta > -1$), zaś $A_{\alpha\beta}$ i $D_x^1 A_{\alpha\beta}$, gdzie $A_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial D_x^\alpha u} A_\alpha$, mają rząd wzrostu nie wyższy niż δ , wówczas jako przestrzenie V i U można wziąć przestrzenie $W_p^{(m)}$ ($p=2-\delta$), do której należą funkcje posiadające skończone normy

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_2 + \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| D_x^\alpha u \right\|_p < \infty, \quad (2.21)$$

gdzie norma $\| \cdot \|_q$ jest brana po Ω z wagą q .

2.4. Model matematyczny quasiliniowego procesu wymiany ciepła i masy

Model matematyczny procesu przenoszenia ciepła i masy został zbadany przez Łykowa w latach czterdziestych [35], [37]. Był to wynik badania wpływu różnych czynników na proces suszenia. Rezultatem żmudnych badań było wiele materiału doświadczalnego [42]. W literaturze spotykamy model Łykowa w następujących postaciach:

$$\begin{aligned} D_t^1 W &= a_m D_x^2 u + a_m \delta_1 D_x^2 T \\ D_t^1 T &= a_q D_x^2 T + \frac{\epsilon r}{c_q} D_t^1 W \end{aligned} \quad (2.22)$$

lub w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} D_t^1 W &= A_{11} D_x^2 W + A_{12} D_x^2 T \\ D_t^1 T &= A_{21} D_x^2 W + A_{22} D_x^2 T \end{aligned} \quad (2.23)$$

gdzie: $W(x, t)$ - wilgotność, $T(x, t)$ - temperatura,

$$A_{11} = a_m$$

$$A_{12} = a_m \delta_1$$

$$A_{21} = \frac{\epsilon r}{c_q} a_m$$

$$A_{22} = a_q + \frac{\epsilon r}{c_q} a_m \delta_1$$

$a_m, a_q, \delta, \epsilon, r, c_q$ - współczynniki charakteryzujące ośrodek,

w którym zachodzi badany proces [8], [35], [42], [52].

Model matematyczny omawianego procesu, uwzględniający zależność współczynników od rozwiązania oraz występowania źródeł, w ośrodku jednorodnym ma postać

$$D_t^1 u = D_x^1 (A(u) D_x^1 u) + f(x, t)$$

$$\text{lub } \mathcal{L}(u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) u \equiv D_t^1 u - D_x^1 (A(u) D_x^1 u) = f \quad (2.24)$$

gdzie: $f(x, t)$ - funkcja wymuszeń źródłowych,

$$u(x, t) = (w(x, t), T(x, t))^T,$$

$$A(u) = \begin{bmatrix} A_{11}(w, T) & A_{12}(w, T) \\ A_{21}(w, T) & A_{22}(w, T) \end{bmatrix}.$$

Równania (2.24) mogą opisywać również inne zjawiska fizyczne, wobec tego w dalszej części pracy obstrahujemy od interpretacji fizycznej składowych wektora $u(x, t)$ i będziemy oznaczać je następująco

$$u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t))^T, \quad (2.25)$$

dla macierzy współczynników otrzymujemy odpowiednio

$$A(u) = \begin{bmatrix} A_{11}(u) & A_{12}(u) \\ A_{21}(u) & A_{22}(u) \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

W praktyce inżynierskiej dostępne są zestawy wartości współczynników macierzy A dla różnych wartości u . Nie można z góry przewidzieć

jakimi funkcjami należy przybliżać wartości elementów macierzy A (2.26). Z drugiej strony, przyjęcie zbyt ogólnego modelu opisu zjawiska, nie pozwala uzyskać zadawalających rezultatów. W trakcie badań okazało się, że układ równań opisujących przepływ masy i energii jest silnie paraboliczny. Pozwoliło to na skorzystanie z twierdzeń o istnieniu jednoznacznych rozwiązań dla silnoparabolicznych układów równań różniczkowych cząstkowych. Zostały w pracy dowiedzione twierdzenia, określające zależności między współczynnikami macierzy A w (2.26).

Zakładamy dalej, że $x \in \Omega \in E_1$.

T w i e r d z e n i e 2.4. Układ równań (2.24) jest 2-paraboliczny, jeżeli składowe rzeczywiste wartości własnych macierzy współczynników $A(u)$ (2.26) są dodatnie dla dowolnych wartości u z zadanego obszaru.

Dowód. Ustalmy $u = u_0$. Zgodnie z warunkiem (2.5) część główna operatora macierzowego \mathcal{L} ma postać

$$\mathcal{L}^0(x, t, u_0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \mathcal{L}^0(u_0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) \equiv D_t^2 - A(u_0) D_x^2 \quad (2.27)$$

Istotnie, $\mathcal{L}^0(u_0, i\xi, \rho) = \rho E + A(u_0) \xi^2$,

oraz $\mathcal{L}^0(u_0, i\xi\lambda, \rho\lambda^2) = \rho\lambda^2 E + A(u_0) \xi^2 \lambda^2$

gdzie E - macierz jednostkowa.

Obliczamy operator L z definicji (2.2)

$$L(u_0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}) = \det \{ D_t^2 - A(u_0) D_x^2 \}, \quad (2.28)$$

i otrzymujemy $L(u_0, i\xi, \rho) = \det \{ \rho E + A(u_0) \xi^2 \}$. (2.29)

Wyznaczamy pierwiastki p_s wielomianu $L(u_0, i\xi, p)$

$$| p_s E + A(u_0) \xi^2 | = 0 \quad (2.30)$$

Jeżeli $\xi = 0$, wówczas $p_s = 0$.

Jeżeli $\xi \neq 0$, warunek (2.30) można zapisać w postaci

$$| \frac{p_s}{\xi^2} E + A(u_0) | = 0$$

i otrzymujemy $\frac{p_s}{\xi^2} = -\lambda^A$.

gdzie λ^A oznacza wartość własną macierzy $A(u_0)$.

Ostatecznie dla dowolnego ξ mamy

$$p_s = -\lambda^A |\xi|^2 \quad (2.31)$$

zaś $\operatorname{Re} p_s = -\operatorname{Re} \lambda^A \cdot |\xi|^2$ (2.32)

Jeżeli $\operatorname{Re} \lambda^A > 0$, wówczas warunek 1^o definicji 2.2 jest spełniony i stała \mathcal{J} z definicji 2.1 jest równa

$$\mathcal{J} = \operatorname{Re} \lambda^A. \quad (2.33)$$

Sprawdzimy obecnie spełnienie warunku 2^o definicji 2.2. Ponieważ

$$\mathcal{L}^0(u_0, i\zeta\lambda, \rho\lambda^2) = \rho\lambda^2 E + \zeta^2 \lambda^2 A(u_0)$$

widać więc, że warunek 2^o tej definicji jest spełniony dla stałych $r_1, r_2=1$ i $b=1$, co kończy dowód.

Twierdzenie 2.5. Układ równań (2.24) jest silnie paraboliczny dla dowolnego u z zadanego obszaru, jeżeli elementy macierzy współczynników spełniają warunki

$$1^{\circ} \quad a_{11}, a_{22} > a_0, \tag{2.34}$$

$$2^{\circ} \quad a_0 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \geq 0,$$

gdzie $A(u) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Dowód. Ustalmy $u=u_0$ i oznaczmy

$$A(u_0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Dowodząc twierdzenia 2.4 wskazaliśmy, że rząd składowej eliptycznej operatora (2.24) jest równy 2. Należy dowieść jeszcze warunku (2.26).

Dla części głównej operatora (2.24), zgodnie z (2.27) mamy

$$\mathcal{L}^0(u, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x})u \equiv D_x^2 u_0 + \mathcal{H}^0(u, \frac{\partial}{\partial x}) \tag{2.35}$$

$$\text{gdzie: } \mathcal{H}^0(u, \frac{\partial}{\partial x}) \equiv -A(u) D_x^2 u. \tag{2.36}$$

Należy wykazać, że

$$\operatorname{Re} [\mathcal{H}^0(u, i\zeta)z, z] \geq \delta |\zeta|^2 |z|^2 \quad (\delta > 0) \tag{2.37}$$

gdzie: $z = (z_1, z_2)^T$ - wektor o składowych zespolonych,

$[\cdot, \cdot]$ - oznacza iloczyn skalarny.

Uwzględniając postać operatora (2.36) dla ustalonego $u=u_0$, warunek (2.37) przyjmie postać:

$$\operatorname{Re} [\zeta^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}] \geq \delta |\zeta|^2 \cdot \left| \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right|^2 \tag{2.38}$$

gdzie: $z = (u, v)^T$,

$$u = u_1 + j \cdot u_2,$$

$$v = v_1 + j \cdot v_2. \tag{2.39}$$

Jeżeli $\zeta = 0$, warunek (2.38) a tym samym i warunek (2.37) jest spełniony. Jeżeli $\zeta \neq 0$, po podzieleniu stron nierówności (2.38) przez ζ^2 i obliczeniu składowych rzeczywistych iloczynu skalarnego otrzymamy

$$\begin{aligned} & a_{11}(u_1^2 + u_2^2) + a_{22}(v_1^2 + v_2^2) + \\ & + (a_{12} + a_{21})(u_1 v_1 + u_2 v_2) \geq \delta (u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Prawą stronę nierówności (2.40) rozbijmy na dwa składniki

$$\delta_1 (u_1^2 + u_2^2) + \delta_2 (v_1^2 + v_2^2) .$$

Niech $\delta_1 = a_{11} - a_0$,

$$\delta_2 = a_{22} - a_0 . \quad (2.41)$$

Z założenia 1^o mamy $\delta_1, \delta_2 > 0$. Uwzględniając związek (2.41) w zmodyfikowanej nierówności (2.40), otrzymujemy

$$(\alpha_{11} - \delta_1)(u_1^2 + u_2^2) + (\alpha_{22} - \delta_2)(v_1^2 + v_2^2) + (\alpha_{12} + \alpha_{21})(u_1 v_1 + u_2 v_2) \geq 0, \quad (2.42)$$

lub postać równoważną

$$(\alpha_{12} + \alpha_{21}) [u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 + 2(u_1 v_1 + u_2 v_2)] \geq 0. \quad (2.43)$$

Jeżeli $a_0 = a_{12} + a_{21} = 0$, wówczas nierówność (2.43) jest prawdziwa, co pociąga prawdziwość nierówności (2.40) i (2.38).

Jeżeli $a_0 > 0$, wówczas po uproszczeniu (2.43) otrzymamy nierówność

$$(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2 \geq 0, \quad (2.44)$$

która otrzywiście jest prawdziwa dla dowolnych u_1, u_2, v_1, v_2 a tym samym są prawdziwe nierówności (2.40) i (2.38). W obydwu przypadkach można przyjąć

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \min(a_{11} - a_0, a_{22} - a_0) > 0 \quad (2.45)$$

co kończy dowód.

Układy silnie paraboliczne są równocześnie układami parabolicznymi w sensie Pietrowskiego. Zatem podane w twierdzeniu 2.5 założenia, pociągają założenia twierdzenia 2.4. Prawdziwy jest następujący lemat:

L e m a t 2.1. Założenia twierdzenia 2.5 są mocniejsze od założeń twierdzenia 2.4 .

Dowód. Niech λ_i, z_i ($i=1,2$) będą wartościami własnymi i odpowiadającymi im unormowanymi wektorami własnymi macierzy $A(u)$ dla ustalonego $u=u_0$. Mamy wówczas

$$A z_i = \lambda_i z_i . \quad 2.46$$

Ponieważ spełnione są założenia twierdzenia 2.5, zachodzi nierówność (2.38) dla dowolnych ζ i z a w szczególności dla $\zeta=1$ i $z=z_i$ mamy

$$\operatorname{Re} [A z_i, z_i] \geq \delta [z_i, z_i] . \quad 2.47$$

Po uwzględnieniu (2.46) mamy

$$\operatorname{Re} [\lambda_i z_i, z_i] \geq [z_i, z_i] . \quad 2.47$$

Wektory z_i są unormowane, zatem $[z_i, z_i] = 1$ i otrzymujemy warunek

$$\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0, \quad 2.47$$

gdzie δ jest określone wzorami (2.45) i (2.41), co kończy dowód.

Udowodnione twierdzenia podają pewne warunki, jakie musi spełniać model matematyczny zjawiska, aby można było stosować do niego

twierdzenia 2.1, 2.2. i 2.3 oraz rezultaty uzyskane w dalszej części pracy. Z postaci współczynników (2.24) wynika, że spełniają one znacznie ostrzejsze założenia. Dokładna analiza modelu pozwala stwierdzić, że są również spełnione warunki

$$\begin{aligned} a_{ij} &> 0 \quad (i, j=1, 2) , \\ a_{ii} &> a_{ij} \quad (i, j=1, 2, i \neq j) . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Uzyskanie jednak słabszych rezultatów, pozwoli zastosować proponowane metody modelowania do badania innych zjawisk.

3. WYBRANE FRAGMENTY TEORII METOD SIATKOWYCH

3.1. Metoda różnic skończonych

3.1.1. S i a t k a i f u n k c j e s i a t k o w e. Metody różnic skończonych przybliżonego rozwiązywania zagadnień brzegowych, polegają na zastąpieniu pochodnych cząstkowych odpowiednimi ilorazami różnicowymi, co sprowadza równania różniczkowe do odpowiednich operatorów różnicowych. Zamiana ta dotyczy zarówno układów równań jak i zależności określających warunki brzegowe.

Jeżeli ciągła funkcja $u(x, t)$ jest określona na obszarze $Q_T = \Omega \times (0, T) \subset E_{n+1}$, wówczas zastosowanie metody różnic skończonych pozwala na wyznaczenie rozwiązania jedynie w pewnych punktach obszaru Q_T . Zbiór tych punktów nazywamy siatką, zaś obcięcie funkcji u do tej siatki, funkcją siatkową. Najczęściej wykorzystuje się siatki równomierne dla których odległość między sąsiednimi punktami wzdłuż każdej osi, zwana krokiem siatki, jest stała

$$\begin{aligned} x_i^1 - x_{i-1}^1 &= \Delta x^1 > 0, \quad (i=1, \dots, n), \\ t_j - t_{j-1} &= \Delta t > 0 . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Przyjmuje się stałą zależność między krokami siatki wzdłuż poszczególnych osi

$$\begin{aligned} \Delta x^1 &= h \\ \Delta x^l &= g_l(h) , \quad (l=2, \dots, n), \\ \Delta t &= g(h) . \end{aligned} \quad (3.2)$$

W ten sposób siatka jest jednoznacznie wyznaczona przez krok h . W celu uzyskania pełnej jednoznaczności należy przyjąć jeszcze jeden węzeł. Można założyć, że siatka zawiera zawsze początek układu współrzędnych lub inny wyróżniony punkt. Zbiór punktów siatki oznaczamy przez D_h , przestrzeń funkcji określonych na siatce D_h , nazywanych

dalej funkcjami siatkowymi $u^{(h)}$, oznaczmy przez U_h . Operację obcię-
cia funkcji u określonej na Q_T , do siatki D_h , oznaczamy następująco
 $[u]_h$.

Rozpatrujemy zagadnienie brzegowe

$$L u = f, \quad (3.3)$$

które będziemy rozwiązywać metodą różnic skończonych. Równanie to za-
wiera zarówno równania opisujące modelowany proces jak i odpowiednie
warunki graniczne. Dla zagadnienia (2.8) mamy odpowiednio

$$L u \equiv \begin{cases} \mathcal{L}(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) u(x, t) & , (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) & , x \in \Omega, \\ u(x, t) & , (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \end{cases} \quad (3.4)$$

oraz

$$f \equiv \begin{cases} f(x, t) & , (x, t) \in Q_T, \\ \varphi(x) & , x \in \Omega, \\ \phi(x, t) & , (x, t) \in \Gamma \times [0, T]. \end{cases} \quad 3.5$$

Układ równań różnicowych odpowiadających (3.3) zapiszemy w postaci

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad 3.6$$

gdzie L_h aproksymuje L , a $f^{(h)}$ aproksymuje prawą stronę f . Przestrzeń
prawych stron (3.6) oznaczamy przez F_h . Należy tutaj dodać, że sia-
tka na której są określone funkcje $f^{(h)}$ może się różnić od siatki D_h ,
która jest dziedziną przybliżonych rozwiązań $u^{(h)}$. Różnica ta, jeżeli
wogule występuje, polega najczęściej na przesunięciu siatek o pół
kroku i zmniejszeniu liczby składowych w (3.5) tak, że węzły drugiej
siatki leżą pośrodku węzłów siatki D_h . W przestrzeniach U_h i F_h wpro-
wadza się odpowiednie normy $\| \cdot \|_{F_h}$ i $\| \cdot \|_{U_h}$. Najczęściej są to normy
typu max po wartościach dla wszystkich węzłów siatki.

3.1.2. A p r o k s y m e j a , s t a b i l n o ś ć i z b i e -
ż n o ś ć o p e r a t o r ó w r ó ż n i c o w y c h . Podamy obecnie
kilka podstawowych definicji z zakresu zagadnień brzegowych i ich
aproksymacji operatorami różnicowymi. Zostanie również przytoczone
podstawowe w tej dziedzinie twierdzenie Laxa. Przytoczone w pracy
pojęcia są nowszą wersją prac Laxa [33] opracowane przez Rabinikina
[15], [16], [44], [46], [47].

D e f i n i c j a 3.1. Mówimy, że rozwiązanie $u^{(h)}$ różnicowego
zagadnienia (3.6) przy zmniejszaniu kroku siatki jest zbieżne do roz-
wiązania u zagadnienia brzegowego (3.3), jeżeli

$$\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \rightarrow 0 \text{ przy } h \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Jeżeli jeszcze dodatkowo zachodzi nierówność

$$\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \leq C_1 \cdot h^k, \quad (3.8)$$

gdzie C_1 i k stałe, niezależne od h , to mówimy, że zbieżność jest rzędu k , lub że schemat różnicowy ma k -ty rząd dokładności.

Operator różnicowy (3.6) aproksymuje operator różniczkowy (3.3) z pewnym błędem, zwanym residuum $\delta f^{(h)}$, zdefiniowanym następująco

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}, \quad (3.9)$$

gdzie u jest pewnym rozwiązaniem. Zmniejszanie się residuum $\delta f^{(h)}$ do zera dla $h \rightarrow 0$, przyjmujemy za określenie aproksymacji.

D e f i n i c j a 3.2. Mówimy, że operator różnicowy $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ aproksymuje zagadnienie $Lu = f$ na rozwiązaniu u , jeżeli $\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \rightarrow 0$

dla $h \rightarrow 0$. Jeżeli jeszcze dodatkowo zachodzi nierówność

$$\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \leq C \cdot h^k, \quad (3.10)$$

gdzie $C > 0, k > 0$ - pewne stałe, to mówimy, że zachodzi aproksymacja rzędu h^k , lub że aproksymacja jest rzędu k względem h .

Podamy obecnie dwie równoważne definicje stabilności operatora różnicowego.

D e f i n i c j a 3.3. Różnicowy operator (3.6) nazywamy stabilnym, jeżeli istnieją takie liczby $h_0 > 0$ i $\delta > 0$, że dla dowolnych $h < h_0$

i $\varepsilon^{(h)} \in F_h$, $\| \varepsilon^{(h)} \|_{F_h} < \delta$, zagadnienie brzegowe

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)} \quad (3.11)$$

posiada tylko jedno rozwiązanie $z^{(h)}$, spełniające warunek

$$\| z^{(h)} - u^{(h)} \|_{F_h} \leq C \| \varepsilon^{(h)} \|_{F_h}, \quad C > 0 \quad (3.12)$$

gdzie stała C jest niezależna od h , $u^{(h)}$ rozwiązanie zagadnienia (3.6).

D e f i n i c j a 3.3a. Operator różnicowy (3.6) nazywamy stabilnym, jeżeli dla dowolnego $f^{(h)} \in F_h$, równanie $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ ma jednoznaczne rozwiązanie, spełniające warunek

$$\| u^{(h)} \|_{U_h} \leq C \| f^{(h)} \|_{F_h}, \quad (3.13)$$

gdzie stała $C > 0$ jest niezależna od h .

Równoważność definicji 3.3 i 3.3a dowiedziono w pracy [16]. Wprowadzone pojęcia pozwalają na sformułowanie twierdzenia o tym, że dla stabilnych operatorów różnicowych aproksymacja pociąga zbieżność.

T w i e r d z e n i e 3.1. Niech operator różnicowy $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$, aproksymujący zagadnienie $Lu = f$ na rozwiązaniu u z rzędem h^k , będzie stabilny. Wówczas rozwiązanie $u^{(h)}$ jest zbieżne do $[u]_h$, przy czym prawdziwe jest szacowanie

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq (C_1 \cdot C) h^k, \quad (3.14)$$

gdzie C i C_1 - stałe, wchodzące w szacowania (3.13) i (3.10).

Dowód. Podstawmy $\varepsilon^{(h)} = f^{(h)}$ i $[u]_h = z^{(h)}$. Z (3.12) mamy

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|\delta f^{(h)}\|_{F_h}$$

Wykorzystując szacowanie (3.10), otrzymujemy (3.14), co kończy dowód.

W literaturze [6], [44], [46] spotykamy w cytowanym twierdzeniu dodatkowe założenie, że zagadnienie (3.3) jest poprawnie postawione, co oznacza, że operator rozwiązujący zagadnienie (3.3) jest gęsty w F_h i jednostajnie ograniczony. Dla układów silnie parabolicznych na podstawie twierdzenia 2.1, 2.2 i 2.3 można przyjąć, że warunki te są spełnione.

3.1.3. B a d a n i e s t a b i l n o ś c i s c h e m a t ó w r ó ż n i c o w y c h . Podstawowym problemem, związanym z zastosowaniem metody różnic skończonych, jest badanie stabilności operatorów różnicowych. Zagadnienie to jest stosunkowo dobrze opracowane i znane w literaturze. Jednak podstawowy problem, stwierdzenie stabilności, w każdym przypadku należy rozwiązywać oddzielnie.

Dla układów parabolicznych, można budować operatory różnicowe w postaci schematów dwuwarstwowych. Niech $u^n = u^n(x)$ oznacza przybliżenie dla $u(x, n\Delta t)$, otrzymane z układu równań różnicowych. Równania różnicowe mają postać $u^{n+1} = C(\Delta t) u^n$

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in N_1} B_{\beta}^1 u^{n+1}(x_1 + \beta_1 \Delta x^1, \dots, x_n + \beta_n \Delta x^n) + \\ & + \sum_{\beta \in N_0} B_{\beta}^0 u^n(x_1 + \beta_1 \Delta x^1, \dots, x_n + \beta_n \Delta x^n) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Stosując przekształcenie Fouriera dla równania (3.15) otrzymujemy

$$H_1 v^{n+1}(k) + H_0 v^n(k) = 0, \quad (3.16)$$

gdzie

$$H_1 = \sum_{\beta \in N_1} B_{\beta}^1 \exp\{i[k_1 \beta_1 \Delta x^1 + \dots + k_n \beta_n \Delta x^n]\}, \quad (3.17)$$

$$H_0 = \sum_{\beta \in N_0} B_{\beta}^0 \exp\{i[k_1 \beta_1 \Delta x^1 + \dots + k_n \beta_n \Delta x^n]\}. \quad (3.18)$$

Ostatecznie schematowi różnicowemu (3.15) w dziedzinie zespolonej odpowiada operator $G(\Delta t, k)$

$$v^{n+1}(k) = G(\Delta t, k) v^n(k), \quad (3.19)$$

gdzie $G(\Delta t, k) = -(H_1)^{-1} H_0. \quad 3.20$

Macierz $G(\Delta t, k)$ nazywa się macierzą przejścia. Jest ona operatorem, odpowiadającym operatorowi $C(\Delta t)$, działającemu na funkcje u^n . Dzięki tej odpowiedniości, badanie stabilności sprowadzić można do badania macierzy przejścia.

Operator różnicowy (3.15) jest stabilny, jeżeli dla pewnego $\tau > 0$, macierze

$$G(\Delta t, k)^n \text{ dla } \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ 0 \leq n \cdot \Delta t \leq T \\ \text{dowolnych } k \end{cases} \quad (3.21)$$

są jednostajnie ograniczone.

Znanym koniecznym warunkiem stabilności schematu różnicowego 3.15, jest warunek Neumana [15], [16], [47].

T w i e r d z e n i e 3.2 Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ - będą wartościami własnymi macierzy przejścia (3.20). Warunkiem koniecznym stabilności schematu (3.15) jest warunek

$$|\lambda_i| \leq 1 + C \cdot \Delta t \text{ dla } \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ i = 1, \dots, p \\ \text{dowolnych } k, \end{cases} \quad (3.22)$$

gdzie stała $C > 0$ nie zależy od k i od Δt .

Wymieniony warunek jest jedynie warunkiem koniecznym. Podamy obecnie kilka warunków wystarczających [44].

T w i e r d z e n i e 3.3. Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

- a^o Jeżeli macierz przejścia $G(\Delta t, k)$ jest normalna ($G^*G - GG^* = 0$), wówczas warunek Neumana jest konieczny i wystarczający dla stabilności schematu (3.15).
- b^o Jeżeli $\mu_i, i = 1, \dots, p$, wektory własne macierzy $G^*(\Delta t, k) \cdot G(\Delta t, k)$ spełniają warunek

$$|\mu_i| \leq 1 + o(\Delta t) \text{ dla } \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ i = 1, \dots, p \\ k - \text{dowolne} \end{cases} \quad (3.23)$$

to schemat (3.15) jest stabilny.

- c^o Jeżeli dla pewnej normy macierzy $\| \cdot \|$ zgodnej z normą wektora zachodzi

$$\|G(\Delta t, k)\| \leq 1 + o(\Delta t) \text{ dla } \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ \text{dowolnych } k \end{cases} \quad (3.24)$$

przy czym stała wchodząca w warażenie $o(\Delta t)$ nie zależy od k , i jeżeli $\|G(0,k)\| \leq 1$, to równanie różnicowe jest stabilne. d° Jeżeli elementy macierzy $G(\Delta t, k)$ są ograniczone dla $0 < \Delta t < \tau$ i wszystkich k , i jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $G(\Delta t, k)$ za wyjątkiem być może jednej, leżą w okręgu jednostkowym, wówczas warunek Neumana jest również warunkiem wystarczającym stabilności schematu (3.15).

W praktyce mamy do czynienia z operatorami, których współczynniki zależą od zmiennej przestrzennej x . Wówczas żąda się, aby warunki stabilności były spełnione dla każdego x . W przypadku stosowania operatorów różnicowych dla rozwiązywania zagadnień brzegowych z jednym równaniem parabolicznym, badanie stabilności jest znacznie prostsze. Macierz przejścia jest macierzą o wymiarze 1×1 i jest oczywiście macierzą normalną. Zgodnie z twierdzeniem 3a, warunek Neumana jest konieczny i wystarczający. W przypadku zagadnień brzegowych opisywanych układem równań parabolicznych, macierz przejścia z reguły nie jest macierzą normalną i należy szukać innych warunków wystarczających stabilności.

3.2. Metoda Galerkina

Metoda Galerkina jest pewną modyfikacją metody Ritzza, polegającej na minimalizacji pewnego funkcjonału na zadanej klasie funkcji. Postać funkcjonału dobiera się w metodzie Ritzza w ten sposób, aby równanie Eulera dla tego funkcjonału, było równaniem opisującym wyjściowe zagadnienie brzegowe. Zaletą metody Galerkina jest fakt, że dla rozwiązania zagadnienia brzegowego, nie wymaga konstruowania funkcjonału. W pewnych przypadkach skonstruowanie takiego funkcjonału może być bardzo trudne, lub prowadzi do postaci funkcjonału nieprzydatnej do dalszych badań.

Dane jest zagadnienie brzegowe:

$$Lu = f, \quad (3.25)$$

z jednorodnymi zerowymi warunkami brzegowymi. Równanie to zapisujemy w postaci słabej

$$[Lu, v^{(h)}] = [f, v^{(h)}], \quad (3.26)$$

Żądamy aby równanie (3.26) było spełnione dla każdej funkcji $v^{(h)} \in V$ oraz aby funkcja u spełniała jednorodne warunki brzegowe. Przybliżonego rozwiązania zadania (3.26) poszukujemy w pewnej przestrzeni S^h z bazą $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Rozwiązanie to ma postać

$$u^{(h)}(x, t) = \sum_{i=1}^N Q_i(t) \varphi_i(x), \quad x \in \Omega, t \in (0, T). \quad (3.27)$$

Uwzględniając liniowość iloczynu skalarnego, otrzymujemy

$$\left[L \left(\sum_{j=1}^N Q_j(t) \varphi_j(x) \right), \psi_k(x) \right] = [f(x,t), \psi_k(x)], \quad k=1, \dots, N \quad (3.28)$$

gdzie $\psi(x), (i=1, \dots, N)$ baza w przestrzeni V^h .

O funkcjach bazowych zakładamy, że są układem zupełnym liniowo niezależnych funkcji, spełniających jednorodne warunki brzegowe. Warunek (3.28) można interpretować jako warunek ortogonalności funkcji ψ_k względem Lu^h w obszarze Ω .

Wymaga się aby ciąg przestrzeni S^h był gęsty w przestrzeni S , do której należy rozwiązanie zagadnienia (3.25). Najczęściej przyjmuje się, że $V^h \subset S^h \subset S = H^s(\bar{\Omega})$ oraz, że $\varphi_i(x) = \psi_i(x)$.

W postaci macierzowej układu równań (3.26) ma postać

$$GQ = F \quad (3.29)$$

gdzie $G_{kj} = [L\varphi_j, \psi_k], F_k = [f, \psi_k]$.

W zagadnieniu, będącym tematem niniejszej pracy, rozwiązanie zagadnienia jest funkcją wektorową o dwóch składowych. W rozdziale piątym zostanie pokazany sposób tworzenia bazy funkcji wektorowych, gdy zadana jest baza dla przypadku jednowymiarowego. Konstrukcja ta zapewnia zachowanie podstawowych właściwości, prawdziwych dla zadań jednowymiarowych.

Najczęściej za funkcje bazowe przyjmuje się funkcje wielomianowe. Jeżeli operator L jest $2-m$ paraboliczny oraz jeżeli S^h jest przestrzenią elementów skończonych stopnia $k-1$, a V^h - przestrzenią elementów skończonych stopnia $l-1$, wówczas dla metody Galerkiina szybkość zbieżności s -tych pochodnych rozwiązania jest następująca [50]

$$\|u - u^{(h)}\|_s = o(h^{k-s} + h^{k+l-2m}). \quad (3.30)$$

3.3. Modelowanie zagadnień brzegowych na siatkach R-C.

Zagadnienia graniczne dla układów równań parabolicznych stopnia drugiego można modelować na analogowych siatkach R-C. Dotychczas znane są udane próby konstruowania i eksploatacji analogowych siatek dla modelowania równania przewodnictwa ciepła. W Instytucie Cybernetyki Technicznej skonstruowano kilka analizatorów pola, pozwalających modelować quasiliniowe równania paraboliczne [26], [55]. Dla układu dwóch równań 2-parabolicznych

w pracy [12] spotykamy schemat sieci R-C do modelowania liniowych układów parabolicznych z symetryczną macierzą współczynników. Proponowany w tej pracy model nie nadaje się do modelowania zagadnień quasiliniowych. W oparciu o koncepcję multiplikacji pojemności zawartej w pracy [26], autor zaproponował siatkę R-C pozwalającą modelować układ dwóch równań 2-parabolicznych.

Koncepcja modelowania równań parabolicznych na analogowych siatkach R-C, wykorzystuje analogię procesów nieustalonych w sieci R-C z pewną postacią układu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Równania te, uzyskujemy w wyniku aproksymacji różnicowej pochodnych cząstkowych $\frac{\partial}{\partial x}$.

Modelowanie zagadnień nieliniowych na siatkach R-C wymaga stosowania liniowych równań (2.24) oraz modyfikacji warunków brzegowych i początkowych dla siatki. Metody takie są efektywne w systemach hybrydowych. Siatka R-C pełni wówczas funkcję podprogramu rozwiązującego układ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych.

4. ZASTOSOWANIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO MODELOWANIA QUASILINIOWEGO PROCESU WYMIANY CIEPŁA I MASY

4.1. Algorytm linearyzacji równań quasiliniowych w przedziałach czasowych

Niech będzie dane zagadnienie brzegowe dla funkcji $u(x, t)$

$$\begin{aligned} D_t^1 u - D_x^1 (A(u) D_x^1 u) &= f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) &= \phi(x, t), & (x, t) \in S_T \end{aligned} \quad (4.1)$$

w cylindrze $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$.

Przedział $(0, T)$ dzielimy na odcinki o długości ΔT .

Rozważmy następującą aproksymację układu (4.1)

$$\begin{aligned} D_t^1 u^k(x, t) - D_x^1 (A(u^k(x, 0)) D_x^1 u^k(x, t)) &= f^k(x, t), & x \in \Omega, t \in (0, \Delta T), \\ u^k(x, 0) &= \varphi^k(x), & x \in \Omega, \\ u^k(x, t) &= \phi^k(x, t), & x \in \Gamma, t \in (0, \Delta T), \\ k &= 0, 1, \dots, [T/\Delta T], \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie

$$\varphi^k(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \text{ dla } k=0 \\ u^{k-1}(x, \Delta T) & , \text{ dla } k \geq 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$f^k(x, t) = f(x, k \cdot \Delta T + t). \quad (4.4)$$

Równania (4.2) są liniowe. Rozwiązanie zagadnienia (4.2) $u^k(x, t)$ w przedziale $x \in \Omega$, $t \in (0, \Delta T)$ jest przybliżeniem rozwiązania $u(x, t)$ w przedziale $x \in \Omega$, $t \in (k \cdot \Delta T, k \cdot \Delta T + \Delta T)$.

Warunki brzegowe uzyskujemy przez przesunięcie na osi czasu drugiego argumentu funkcji $\phi(x, t)$, podobnie powstają zmodyfikowane prawe strony równań (4.2).

Warunek początkowy dla kolejnego u^k otrzymujemy z rozwiązania u^{k-1} dla $t = \Delta T$.

Zauważymy, że aproksymacja jest tym lepsza, im mniejszy jest krok linearyzacji ΔT . Zależy ona od rzędu wzrostu macierzy $A(u)$ względem u oraz od szybkości zmian rozwiązania w czasie.

W sposób analogiczny przeprowadzamy linearyzację quasiliniowych zagadnień brzegowych dla warunków brzegowych drugiego i trzeciego rodzaju.

T w i e r d z e n i e 4.1 Jeżeli zagadnienie (4.1) spełnia założenia twierdzenia 2.1, wówczas rozwiązania ciągu zagadnień brzegowych (4.2) u^k są zbieżne do rozwiązania u zagadnienia (4.1)

$$\|u^k(x, t) - u(x, k \Delta T + t)\| \rightarrow 0 \text{ dla } \Delta T \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

dla dowolnych $x \in \Omega$, $t \in (0, \Delta T)$, $k=0, 1, \dots, [T/\Delta T]$.

Dowód tego twierdzenia, przy dodatkowym założeniu, że rozwiązanie u jest ciągłe względem współczynnika równania zamieszczono w pracy [54]. Ciągłość rozwiązania u od współczynników, dla modelu (4.2) została wykazana w pracy [39].

T w i e r d z e n i e 4.2 Wystarczającym warunkiem stabilności operatora różnicowego dla ciągu zagadnień (4.2), jest stabilność tego operatora dla każdego z tych zagadnień oddzielnie.

Dowód. Dowód twierdzenia przeprowadzimy w kilku etapach. Najpierw wskażemy zapis operatora różnicowego $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ w postaci rekurencyjnej. Następnie zostanie udowodniony lemat, podający sposób sprrowadzania badania stabilności schematu różnicowego zapisanego w postaci operatorowej, do badania stabilności operatora przejścia. W końcu zostanie wykazana stabilność ciągu rekurencyjnych operatorów różnicowych, zbudowanych dla ciągu linearyzowanych zagadnień brzegowych (4.2).

Schemat różnicowy, zapisany w postaci operatorowej $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$

można zapisać w postaci rekurencyjnej

$$u^{p+1} = R_h u^p + \Delta t \cdot \zeta^p \quad (p=0,1,\dots, [\Delta T / \Delta t]),$$

$$u^0 - \text{zadane}, \quad (4.6)$$

gdzie u^p jest obcięciem funkcji $u^{(h)}$ do siatki D_h^p

$$D_h^p = \{ (x,t) \in Q_T, x = ih \ (i=0,1,\dots,N), t = p \cdot \Delta t \}. \quad (4.7)$$

Można powiedzieć, że operator R_h przekształca wartości $u^{(h)}$ znajdujące się na warstwie p ($t = p \cdot \Delta t$), na wartości funkcji $u^{(h)}$ znajdujące się na następnej warstwie czasowej.

Znacznie prościej jest zbudować nową siatkę

$$D_h^* = \{ x \in \Omega, x = i \cdot h \ (i = 0,1,\dots,N) \} \quad (4.8)$$

i badać operator R_h działający w zbiorze funkcji siatkowych u^p określonych na siatce D_h^* . Wówczas u^p oznaczają kolejne wyniki działania operatora R_h na u^0 i odpowiadają rozwiązaniu $u^{(h)}$ na siatce D_h^p .

L e m a t 4.1 Jeżeli są spełnione warunki :

$$1^\circ \quad \|\zeta^p\| \leq K_1 \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad p=0,1,\dots,p_0, \quad (4.9)$$

$$2^\circ \quad \|u^0\| \leq K_2 \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad (4.10)$$

gdzie $p_0 = [\Delta T / \Delta t]$, zaś stałe $K_1, K_2 > 0$ nie zależą od $f^{(h)}$ i h , wówczas koniecznym warunkiem stabilności schematu $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ jest jednostajna ograniczoność potęg operatora przejścia

$$\|R_h^p\| \leq K, \quad p = 0,1,\dots,p_0, \quad (4.11)$$

gdzie stała K nie zależy od h .

Dowód. Zgodnie z definicją stabilności, należy wykazać, że zachodzi

$$\|u^p\| \leq C \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad \text{dla } p=0,1,\dots,p_0, \quad (4.12)$$

gdzie stała C nie zależy od $f^{(h)}$ i h .

Korzystając ze wzoru (4.6) mamy

$$u^p = R_h u^{p-1} + \Delta t \cdot \zeta^{p-1} = \dots = R_h^p u^0 + \Delta t (R_h^{p-1} \zeta^0 + R_h^{p-2} \zeta^1 + \dots + \zeta^{p-1}). \quad (4.13)$$

Obliczone w ten sposób rozwiązanie szacujemy przy pomocy nierówności (4.11)

$$\|u^p\| \leq K \|u^0\| + \Delta t \cdot K (\|\zeta^0\| + \|\zeta^1\| + \dots + \|\zeta^{p-1}\|). \quad (4.14)$$

Wykorzystując warunki (4.9) i (4.10) mamy potrzebne szacowanie

$$\|u^p\| \leq (K K_2 + \Delta t \cdot p K K_1) \|f^{(h)}\|_{F_h} \leq K (K_2 + T K_1) \|f^{(h)}\|_{F_h} \quad (4.15)$$

W ten sposób wykazaliśmy, że zachodzi nierówność (4.12) ze stałą $C = K(K_2 + T K_1)$ niezależną od h i $f^{(h)}$, co kończy dowód lematu.

Przejdziemy obecnie do trzeciego i ostatniego etapu dowodu. Zapišemy w postaci rekurencyjnej ciąg schematów różnicowych, odpowiadający ciągowi zlinearyzowanych zagadnień brzegowych (4.2). Niech $m_1 = [T/\Delta T]$ i $m_2 = [\Delta T/\Delta t]$. Wówczas schemat różnicowy dla zagadnienia (4.2) można zapisać w następującej postaci,

$$\begin{aligned} u^{n \cdot m_2 + p + 1} &= R_{h,n} u^{n \cdot m_2 + p} + \Delta t \cdot \zeta^{n \cdot m_2 + p}, \quad p=0,1,\dots,m_2, \\ u^{n \cdot m_2} &\text{ - zadane,} \\ n &= 0,1,\dots,m_1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

gdzie operator $R_{h,n}$ odpowiada n -temu z liniowych zagadnień brzegowych (4,2).

Dla każdego n schemat (4.16) jest stabilny, mamy więc

$$\|\zeta^{n \cdot m_2 + p}\| \leq K_{n,1} \|f^{(h)}\|_{F_n}. \quad (4.17)$$

Założmy, że

$$\|u^0\| \leq K_{0,2} \|f^{(h)}\|_{F_h} \quad (4.18)$$

oraz, że każdy z operatorów $R_{h,n}$ ma jednostajnie ograniczone swoje potęgi

$$\|R_{h,n}^p\| \leq K_n, \quad n=0,1,\dots,m_1, \quad p=0,1,\dots,m_2. \quad (4.19)$$

Zdefiniujmy kolejne potęgi pewnego operatora R_h^* w sposób następujący

$$R_h^{* n \cdot m_2 + p} = \left(\prod_{k=0}^n R_{h,k}^{m_2} \right) R_{h,n+1}^p, \quad n=0,1,\dots,m_1-1, \quad p=0,1,\dots,m_2. \quad (4.20)$$

Schemat różnicowy (4.16) możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned} u^{p+1} &= R_h^* u^p + \Delta t \cdot \zeta^p, \quad p=0,1,\dots,m_2 \cdot m_1 \\ u^0 &\text{ - zadane,} \end{aligned} \quad (4.21)$$

gdzie potęgi operatora R_h^* są jednostajnie ograniczone.

Istotnie, niech

$$K = \max \left\{ \max_n K_n, 1 \right\}.$$

wówczas na podstawie (4.21) mamy

$$\|R_h^{* n \cdot m_2 + p}\| \leq \prod_{k=0}^n K_n \cdot K_{n+1} \leq K^{m_1} = K_0,$$

gdzie K_0 nie zależy od h . Zatem schemat (4.16) jest stabilny.

4.2 Schemat jawny

Pojęcie schematu jawnego i niejawnego, związane jest ze sposobem obliczania rozwiązania przybliżonego. Większość operatorów różnicowych można zapisać w postaci rekurencyjnej (4.6).

Mówimy, że schemat różnicowy jest jawny, jeżeli każdą ze współrzędnych wektora u^{p+1} w równaniu (4.6), można wyliczyć bezpośrednio, mając dane u^p oraz $\Delta t \xi^p$. W przypadku przeciwnym, gdy obliczenie współrzędnych rozwiązania u^{p+1} wymaga odwracania pewnej macierzy, wówczas mówimy, że schemat jest niejawny.

4.2.1. Budowa schematu różnicowego, badanie aproksymacji. Należy znaleźć schemat różnicowy dla rozwiązania $u(x,t)$ quasiliniowego równania

$$D_t^1 u - D_x^1 (A(u) D_x^1 u) = f(x,t), \quad x \in \Omega, t \in (0, T) \quad (4.22)$$

gdzie $\Omega = (0, L)$,

z warunkiem początkowym

$$u(x, 0) = \gamma(x), \quad x \in (0, L) \quad (4.22a)$$

spełniające jeden z podanych warunków brzegowych

I rodzaju

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad t \in (0, T) \quad (4.23)$$

$$u(L, t) = \beta(t), \quad t \in (0, T)$$

II rodzaju

$$D_x^1 u(x, t)|_{x=0} = \alpha(t), \quad t \in (0, T) \quad (4.24)$$

$$D_x^1 u(x, t)|_{x=L} = \beta(t), \quad t \in (0, T)$$

lub III rodzaju

$$B \cdot D_x^1 u(x, t) + u(x, t)|_{x=0} = \alpha(t), \quad t \in (0, T) \quad (4.25)$$

$$C \cdot D_x^1 u(x, t) + u(x, t)|_{x=L} = \beta(t), \quad t \in (0, T)$$

gdzie $\alpha(t), \beta(t), \gamma(x), f(x, t)$ są zadanymi funkcjami wektorowymi, zaś B i C macierzami współczynników.

Zakładamy, że do równania (4.22) zastosowano algorytm linearyzacji w przedziałach czasowych. Ustalamy k , numer kolejnego przedziału linearyzacji. Rozważamy jedno z równań (4.22), które po opuszczeniu indeksu k ma postać następującą

$$D_t^1 u(x, t) - D_x^1 (A(u(x, 0)) D_x^1 u(x, t)) = f(x, t), \quad x \in (0, L), t \in (0, \Delta T). \quad (4.26)$$

Zauważmy, że macierz współczynników $A(u(x, 0))$ w (4.26) zależy tylko od zmiennej x i dla ustalonego k -tego przedziału lineary-

zacji, nie zależy od t , dla $t \in (0, \Delta T)$.

Przyjmijmy, że siatka na której poszukujemy przybliżonego rozwiązania, jest równomierna i ma krok czasowy Δt oraz krok przestrzenny h

$$h = \frac{L}{M-1} \quad (4.27)$$

gdzie M ilość punktów na osi x .

Oznaczmy przez u_i^p wartość funkcji siatkowej $u^{(h)}$ w węźle

$x = (i-1)h$, $t = p \cdot \Delta t$, dla $i = 1, \dots, M$, $p = 0, 1, \dots, [\Delta T / \Delta t]$

oraz

$$A_i = A(u((i-1)h, 0)), \quad (4.28)$$

gdzie i może być liczbą rzeczywistą.

Do aproksymacji lewej strony równania (4.26) wykorzystamy wyrażenia typu

$$D_t^1 u|_{u=u_i^p} \cong (u_i^{p+1} - u_i^p) / \Delta t \quad (4.29)$$

$$D_x^1 [A(u(x, 0)) D_x^1 u(x, t)]|_{u=u_i^p} \cong (A_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^p - u_i^p) + A_{i-\frac{1}{2}}(u_{i-1}^p - u_i^p)) / h^2 \quad (4.30)$$

Zbadamy obecnie dokładność aproksymacji równania (4.26) za pomocą wyrażeń (4.29), (4.30). Chcemy, aby prawa strona równania (4.30) aproksymowała formułę na obliczanie pochodnej iloczynu.

$$D_x^1 (A(x) D_x^1 u(x, t)) = D_x^1 A(x) \cdot D_x^1 u(x, t) + A(x) D_x^2 u(x, t) \quad (4.31)$$

W celu zbadania aproksymacji rozkładamy funkcję u na sumę Taylora w otoczeniu punktu u_i^p

$$u_i^{p+1} = u_i^p + \Delta t (D_t^1 u)_i^p + o((\Delta t)^2) \quad (4.32)$$

$$u_{i+1}^p = u_i^p + h (D_x^1 u)_i^p + \frac{h^2}{2} (D_x^2 u)_i^p + \frac{h^3}{6} (D_x^3 u)_i^p + o(h^4) \quad (4.33)$$

$$u_{i-1}^p = u_i^p - h (D_x^1 u)_i^p + \frac{h^2}{2} (D_x^2 u)_i^p - \frac{h^3}{6} (D_x^3 u)_i^p + o(h^4) \quad (4.34)$$

Korzystając z równań (4.33), (4.34) obliczamy prawą stronę równania (4.30)

$$\begin{aligned} & [A_{i-\frac{1}{2}}(u_{i-1}^p - u_i^p) + A_{i+\frac{1}{2}}(u_{i-1}^p - u_i^p)] / h^2 = \\ & = \frac{A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}}{h} (D_x^1 u)_i^p + \frac{A_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}}}{2} (D_x^2 u)_i^p + h \frac{A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}}{6} (D_x^3 u)_i^p + o(h^2) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Porównując równania (4.35) i (4.31) otrzymujemy następujące warunki aproksymacji

$$\frac{A_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}}}{2} = A(u_i^0) + o(h^2) \quad (4.36)$$

$$\frac{A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}}}{h} = D_x^1 A(u(x,t)) \Big|_{\substack{x=(i-\frac{1}{2})h \\ t=0}} \quad 4.37$$

Zauważmy, że spełnienie równań (4.32), (4.36) i (4.37) zapewnia aproksymację równania rzędu $o(\Delta t) + o(h^2)$.

Wskazemy, że współczynniki A_i określone wzorem (4.28) spełniają równania (4.36) i (4.37).

Istotnie rozwińmy w szereg Taylora funkcję $A(x) = A(u(x,0))$ w punkcie $x = (i - \frac{1}{2})h$

$$A_{i+\frac{1}{2}} = A_i + \frac{h}{2} (D_x^1 A)_i + o(h^2), \quad (4.38)$$

$$A_{i-\frac{1}{2}} = A_i - \frac{h}{2} (D_x^1 A)_i + o(h^2). \quad (4.39)$$

Z równań (4.38) i (4.39) widać że są spełnione warunki (4.36) i (4.37). Można pokazać, że również dla współczynników $A_{i+\frac{1}{2}}$, $A_{i-\frac{1}{2}}$ zdefiniowanych następująco

$$A_{i+\frac{1}{2}} = \frac{A(u_i^0) + A(u_{i+1}^0)}{2} \quad (4.40)$$

$$A_{i-\frac{1}{2}} = \frac{A(u_i^0) + A(u_{i-1}^0)}{2} \quad (4.41)$$

są również spełnione warunki (4.36) i (4.37).

Obecnie przystępujemy do aproksymacji warunków brzegowych.

Niech $t^p = p \cdot \Delta t$, $p = 0, 1, \dots, [\Delta T / \Delta t]$.

Warunki brzegowe I rodzaju dają zależność

$$u_1^{p+1} = \alpha(t^{p+1}), \quad (4.42)$$

$$u_M^{p+1} = \beta(t^{p+1}). \quad (4.43)$$

Dla warunków brzegowych II rodzaju stosujemy następującą aproksymację

$$\frac{u_2^{p+1} - u_1^{p+1}}{h} = \alpha(t^{p+1}), \quad (4.44)$$

$$\frac{u_M^{p+1} - u_{M-1}^{p+1}}{h} = \beta(t^{p+1}). \quad (4.45)$$

która aproksymuje pochodne z równań (4.24) z dokładnością $O(h)$.

Podobnie aproksymujemy warunki brzegowe III rodzaju (4.25)

$$B \cdot \frac{1}{h} (u_2^p - u_1^p) + u_1^{p+1} = \alpha(t^{p+1}), \quad (4.46)$$

$$G \cdot \frac{1}{h} (u_M^p - u_{M-1}^p) + u_M^{p+1} = \beta(t^{p+1}). \quad (4.47)$$

Zauważmy, że równanie różnicowe aproksymujące warunki brzegowe trzeciego rodzaju zawiera wartości funkcji siatkowej $u^{(h)}$ z dwóch warstw czasowych u^{p+1} i u^p . Jest to warunek konieczny, aby można było w sposób bezpośredni, bez odwracania macierzy, wyliczać wartości $u^{(h)}$ na brzegu. Dokładność aproksymacji w tym przypadku wynosi $o(h) + o(\Delta t)$.

Na podstawie dotychczasowych rozważań, przeprowadzonych w tym punkcie, możemy zapisać w postaci operatorowej $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$, schematy różnicowe aproksymujące zagadnienia brzegowe (4.22) - (4.25). Dla pierwszego zagadnienia brzegowego mamy

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} (u_i^{p+1} - u_i^p) / \Delta t - [A_{i-\frac{1}{2}}(u_{i-\frac{1}{2}}^p - u_i^p) + A_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+\frac{1}{2}}^p - u_i^p)] / h^2, \\ \quad i = 2, \dots, M-1, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ u_i^0, \quad i = 1, \dots, M, \\ u_1^{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ u_M^{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, p_0. \end{cases} \quad (4.48)$$

oraz

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f_i^p, \quad i = 2, \dots, M-1, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ \varphi_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ \alpha^p, \quad p = 0, 1, \dots, p_0 \\ \beta^p, \quad p = 0, 1, \dots, p_0 \end{cases} \quad (4.49)$$

gdzie $p_0 = [\Delta T / \Delta t]$

$$f_i^p = f((i-1)h, p \cdot \Delta t),$$

$$\varphi_i = \varphi((i-1)h),$$

$$\alpha^p = \alpha((p+1) \cdot \Delta t),$$

$$\beta^p = \beta((p+1) \cdot \Delta t).$$

Odpowiednio wykorzystując równania (4.44) i (4.45) bądź (4.46) i (4.47), otrzymamy schematy różnicowe w postaci operatorowej dla warunków brzegowych II i III rodzaju.

W celu określenia dokładności aproksymacji, należy oszacować normę wektora residuum $\delta f^{(h)}$, zdefiniowanego następująco

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}, \quad (4.50)$$

gdzie $[u]_h$, jest obcięciem do siatki D_h , pewnej gładkiej funkcji.

Proponowany schemat różnicowy (4.48) , (4.49) aproksymuje równanie różniczkowe (4.26) z błędem o wielkości rzędu $o(\Delta t) + o(h^2)$, natomiast warunki brzegowe i początkowe z błędem równym zero. Mamy więc oszacowane normy wektora residuum.

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq o(\Delta t) + o(h^2). \quad (4.51)$$

Będziemy dalej zakładali, że

$$\frac{\Delta t}{h^2} = r = \text{const}, \quad (4.52)$$

pozwała to oszacować normę wektora residuum następująco

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C \cdot h^2, \quad (4.53)$$

gdzie stała C zależy od pochodnych funkcji u oraz od pochodnych A względem u , nie zależy zaś od h . Norma $\|\cdot\|_{F_h}$, jest zdefiniowana w następnym podrozdziale. Jednakże w przypadku aproksymacji warunków brzegowych II i III rodzaju, formuły (4.44) - (4.47) zapewniają jedynie aproksymację rzędu jeden. W ten sposób aproksymacja warunków brzegowych, wpływa na obniżenie dokładności aproksymacji zagadnień brzegowych, która dla II i III zagadnienia brzegowego jest rzędu h^1 .

4.2.2. B a d a n i a s t a b i l n o ś c i s c h e m a t u j a w n e g o . W celu zbadania stabilności schematu różnicowego zapiszmy schemat różnicowy w postaci rekurencyjnej. Schemat (4.48) , (4.49) można zapisać następująco:

$$\begin{cases} u_i^{p+1} = u_i^p + r[A_{i-\frac{1}{2}}(u_{i-1}^p - u_i^p) + A_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^p - u_i^p)] + \Delta t \cdot f_i^p, \\ \quad i=2, \dots, M-1, p=0, 1, \dots, p_0, \\ u_i^0 = \gamma_i, \quad i=1, \dots, M, \\ u_i^{1+p} = u_1^p + \Delta t \cdot [(\alpha^{p+1} - \alpha^p) / \Delta t], \quad p=0, 1, \dots, p_0, \\ u_M^{p+1} = u_M^p + \Delta t \cdot [(\beta^{p+1} - \beta^p) / \Delta t], \quad p=0, 1, \dots, p_0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Aby zapisać te równania w postaci

$$\begin{cases} u^{p+1} = R_h u^p + \Delta t \cdot \zeta^p \\ u^0 - \text{zadane} \end{cases} \quad (4.51)$$

zdefiniujemy operator R_h w sposób następujący.

Niech $a = (a_1, \dots, a_M)$, $b = (b_1, \dots, b_M)$ i $b = R_h a$, gdzie

$$\begin{cases} b_i = a_i + r[A_{i-\frac{1}{2}}(a_{i-1} - a_i) + A_{i+\frac{1}{2}}(a_{i+1} - a_i)], \quad i=2, \dots, M-1, \\ b_1 = a_1, \\ b_M = a_M. \end{cases} \quad (4.52)$$

Niech dalej $u^0 = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_M)$ (4.53)

oraz niech

$$\zeta^p = \left(\frac{\alpha^{p+1} - \alpha^p}{\Delta t}, f_2^p, f_3^p, \dots, f_{M-1}^p, \frac{\beta^{p+1} - \beta^p}{\Delta t} \right) \quad (4.54)$$

gdzie $f_i^p = f((i-1)h, p \cdot \Delta t)$,

$$\gamma_i = \gamma((i-1)h),$$

$$\alpha^p = \alpha(p \cdot \Delta t),$$

$$\beta^p = \beta(p \cdot \Delta t).$$

Wprowadzimy normy w przestrzeniach U_h i F_h

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_p \|u^p\| = \max_p \max_i \|u_i^p\| \quad (4.55)$$

$$\|u_i^p\| = \max \{ |u_i^{p(1)}|, |u_i^{p(2)}| \}, \quad (4.56)$$

gdzie indeksy górne (1) i (2) oznaczają pierwszą i drugą składową wektora u_i^p .

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_p \max_i \|f_i^p\| + \max_i \|\gamma_i\| + \max_p \|\alpha^p\| + \max_p \|\beta^p\| + \max_p \left\| \frac{\alpha^{p+1} - \alpha^p}{\Delta t} \right\| + \max_p \left\| \frac{\beta^{p+1} - \beta^p}{\Delta t} \right\|, \quad (4.57)$$

gdzie normy $\| \cdot \|$, występujące po prawej stronie równości w (4.57), oznaczają maximum po współrzędnych.

Przy tak zdefiniowanym operatorze R_h (postać operatora R_h wyznacza w sposób jednoznaczny postać ζ^p) oraz normach w przestrzeniach U_h i F_h mamy spełnione następujące nierówności

$$\|u^0\| \leq C_1 \|f^{(h)}\|_{F_h} \quad (4.58)$$

$$\|\zeta^p\|_{U_h} \leq C_2 \|f^{(h)}\|_{F_h}. \quad (4.59)$$

Rzeczywiście, zapiszmy wyrażenia na $\|u^0\|$ i $\|\zeta^p\|$,

$$\|u^0\|_{U_h} = \max_p \max_i \|u_i^0\| = \max_i \|\gamma_i\|, \quad (4.60)$$

$$\|\zeta^p\|_{U_h} = \max \left\{ \left\| \frac{\alpha^{p+1} - \alpha^p}{\Delta t} \right\|, f_2^p, \dots, f_{M-1}^p, \left\| \frac{\beta^{p+1} - \beta^p}{\Delta t} \right\| \right\}. \quad (4.61)$$

Porównując (4.60) i (4.61) ze wzorem (4.57) widzimy, że warunki (4.58) i (4.59) są spełnione ze stałymi $C_1 = C_2 = 1$.

W celu stwierdzenia stabilności schematu różnicowego (4.51), należy zgodnie z lematem 4.1 wykazać ograniczoność potęg operatora przejścia R_h^p , $p = 0, 1, \dots, p_0$.

Macierz przejścia dla operatora R_h ma następującą postać

$$G(\Delta t, k) = E - \zeta R_i, \quad (4.62)$$

$$\text{gdzie } A_i = (A_{i-\frac{1}{2}} + A_{i+\frac{1}{2}}) / 2 \quad (4.63)$$

$$\varphi = 4 \cdot r \cdot \sin^2 \frac{k \cdot h}{2}$$

L e m a t 4.2 Niech macierz $B = E + \varphi \cdot A$. Wówczas zachodzi

$$\lambda^B = 1 + \varphi \lambda^A \quad (4.64)$$

gdzie λ^A i λ^B są wartościami własnymi odpowiednio macierzy A i B .

Dowód. Zgodnie z definicją wartości własnej mamy

$$\det [\lambda^B E - B] = \det [\lambda^B E - (E + \varphi A)] = 0. \quad (4.65)$$

Niech $\varphi \neq 0$, wówczas otrzymujemy

$$\left| \frac{\lambda^B - 1}{\varphi} E - A \right| = 0. \quad (4.65)$$

z drugiej strony wartość własna macierzy A spełnia równanie

$$|\lambda^A E - A| = 0. \quad (4.67)$$

Porównując (4.66) i (4.67) mamy

$$\frac{\lambda^B - 1}{\varphi} = \lambda^A$$

stąd

$$\lambda^B = 1 + \varphi \lambda^A.$$

Jeżeli $\varphi = 0$, wówczas $B = E$ i $\lambda^B = \lambda^E = 1$, zatem warunek (4.64) też jest spełniony, co kończy dowód lematu.

Korzystając z lematu (4.2) możemy wyznaczyć wartość własną macierzy przejścia

$$\lambda = 1 - \varphi \cdot \lambda^A \quad 4.68$$

gdzie λ^A jest wartością własną macierzy A_i , określonej wzorem (4.63), $\varphi = 4r \sin^2 \alpha$ ($\alpha \in (0, 2\pi)$).

Konieczny warunek stabilności Neumana wymaga, aby zachodziła nierówność

$$|1 - 4r \beta \lambda^A| \leq 1 \text{ dla } \beta \in (0, 1). \quad (4.69)$$

Warunek (4.69) wymaga, aby tak dobrać wartość parametru r , by wartości własne macierzy A leżały na płaszczyźnie zespolonej w okręgu o środku $\frac{1}{r}$ i promieniu równym $\frac{1}{r}$.

T w i e r d z e n i e 4.3 Niech macierz A o rozmiarze 2×2 spełnia warunki

$$\alpha_{11} > |\alpha_{12}|$$

$$\alpha_{22} > |\alpha_{21}|$$

oraz niech $0 < \varphi \leq \min \left\{ \frac{1}{\alpha_{11}}, \frac{1}{\alpha_{22}} \right\}$, wówczas $\|E - \varphi A\| \leq 1$,

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

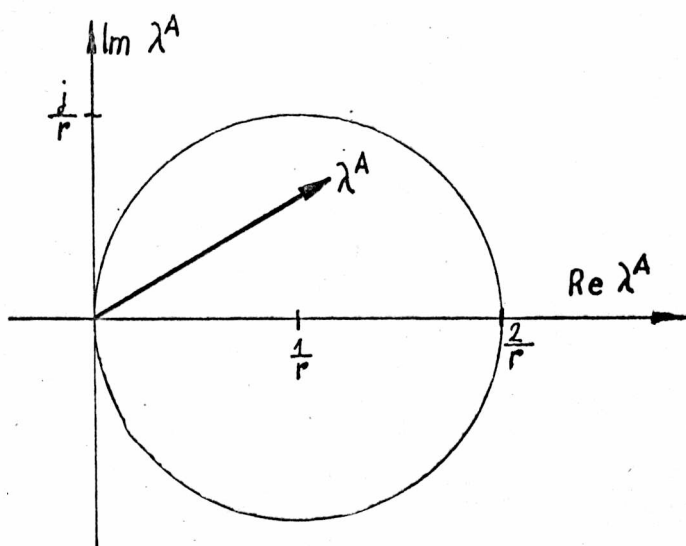
Dowód. Obliczamy normę macierzy $E - \varrho A$

$$\|E - \varrho A\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 - \varrho a_{11} & -\varrho a_{12} \\ -\varrho a_{21} & 1 - \varrho a_{22} \end{pmatrix} \right\| = \max \{ |1 - \varrho a_{11}| + |\varrho a_{12}|, |1 - \varrho a_{22}| + |\varrho a_{21}| \}. \quad (4.70)$$

Ponieważ $a_{11}, a_{22} > 0$ oraz $\varrho a_{11}, \varrho a_{22} \leq 1$ mamy

$$\|E - \varrho A\| = \max \{ 1 - \varrho a_{11} + |\varrho a_{12}|, 1 - \varrho a_{22} + |\varrho a_{21}| \}. \quad (4.71)$$

Jeżeli elementy na głównej przekątnej dominują nad pozostałymi, wówczas każda z sum po prawej stronie wyrażenia (4.71) jest mniejsza od jedności, co kończy dowód twierdzenia.



Rys. 4.1. Interpretacja geometryczna warunków Neumana dla schematu jawnego.

Twierdzenie 3.3 c i udowodnione twierdzenie 4.3 dają następujący warunek wystarczający stabilności schematu jawnego, ze stałymi współczynnikami $A_i = A$

$$4r\alpha \leq \alpha_0, \text{ dla } \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \quad (4.72)$$

gdzie $\alpha_0 = \min \{ a_{11}, a_{22} \}$, oraz współczynniki macierzy A spełniają założenia twierdzenia 4.3. Stąd warunek na wartość r jest następujący

$$r \leq \frac{1}{4} \alpha_0. \quad 4.72$$

W przypadku, gdy współczynniki $A_{i+\frac{1}{2}}, A_{i-\frac{1}{2}}$ zależą od parametru i , jeżeli dla każdego i elementy macierzy $A_{i+\frac{1}{2}}, A_{i-\frac{1}{2}}$ spełniają założenia twierdzenia 4.3, warunek

$$r \leq \frac{1}{4} \min_i \min \left\{ \frac{1}{a_{11}(i+\frac{1}{2})}, \frac{1}{a_{22}(i+\frac{1}{2})}, \frac{1}{a_{11}(i-\frac{1}{2})}, \frac{1}{a_{22}(i-\frac{1}{2})} \right\} \quad (4.73)$$

jest tylko warunkiem koniecznym stabilności schematu (4.48), (4.49), gdzie $\alpha_{11}(i \pm \frac{1}{2})$, $\alpha_{22}(i \pm \frac{1}{2})$ oznaczają elementy odpowiednio macierzy $A_{i+\frac{1}{2}}$ i $A_{i-\frac{1}{2}}$, znajdujące się na głównej przekątnej.

W praktyce przyjmujemy

$$\alpha_0 = \min_{u \in U_0} \min \left\{ \frac{1}{A_{11}(u)}, \frac{1}{A_{22}(u)} \right\} \quad (4.74)$$

gdzie U_0 oznacza zbiór przewidywanych wartości u .

4.2.3. Algorytm modelowania zagadnień brzegowych. W oparciu o zbadany schemat jawny, zostanie przedstawiony algorytm modelowania zagadnień brzegowych. Algorytm ten, wykorzystuje linearyzację równań quasilineowych w przedziałach czasowych. Przyjęto następujące założenia i oznaczenia:

- A. Rozwiązania zagadnień brzegowych (4.22) - (4.25) poszukuje się w obszarze $D_h = \{(x,t), x = (i-1)h, i = 1, \dots, M, t = p \cdot \Delta t, p = 0, 1, \dots, [T/\Delta t]\}$, gdzie $h = L/(M-1)$, L - długość odcinka $(0, L) = \Omega$.
- B. W celu wyprowadzenia wyników i ewentualnego obliczenia błędów należy wywołać segment WYNIK. Wyniki należy wyprowadzać w chwilach czasowych $t_l = \Delta t_2 \cdot l$, gdzie Δt_2 jest parametrem, $l = 0, 1, \dots, [T/\Delta t_2]$.
- C. Funkcje prawych stron $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ oraz elementy macierzy współczynników $A(u)$ są zadane w postaci odpowiednich segmentów funkcji.
- D. Występujące w algorytmie zmienne R , U są wektorami, stąd

$$u_i \equiv \begin{bmatrix} u_1(i) \\ u_2(i) \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

gdzie u_1, u_2 macierze o rozmiarze M .

Podobnie wartości współczynników równania

$$A_i \equiv \begin{bmatrix} A_1(i) & A_2(i) \\ A_3(i) & A_4(i) \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

gdzie A_1, A_2, A_3, A_4 są macierzami o rozmiarach M .

Algorytm.

0° Parametry formalne $M, \tau, \Delta t_1, \Delta t_2, T, L$ ($\tau \equiv \Delta t$).

1° Obliczyć stałe współczynniki oraz nadać wartości początkowe wskaźnikom

$$h = L / (M-1)$$

$$r = \tau / h^2$$

$$i t, i t_1, i t_2 = 0$$

$$t_1, t_{01}, t_{02} = 0.$$

Dla warunków brzegowych III rodzaju liczymy macierze współczynników

$$D = B/h$$

$$E = C/h.$$

2° Obliczyć rozwiązanie początkowe

$$\left. \begin{array}{l} x_i = (i-1) \cdot h \\ u_i = \gamma(x) \end{array} \right\} \quad i = 1, M. \quad (4.77)$$

3° Zlinearyzować równanie

$$A_i = r(A(u_{i+1}) + A(u_i)) / 2, \quad i = 1, 2, \dots, M-1. \quad (4.78)$$

4° Krok iteracyjny

$$a) \quad it = it + 1, \quad t1 = it \cdot \tau$$

$$R_i = A_{i-1}(u_{i-1} - u_i) + A_i(u_{i+1} - u_i), \quad i = 2, \dots, M-1. \quad (4.79)$$

b) Obliczyć rozwiązania w węzłach brzegowych

1) przypadek, gdy dane są warunki brzegowe I rodzaju

$$u_1 = \alpha(t1) \quad (4.80)$$

$$u_M = \alpha(t1)$$

2) przypadek, gdy dane są warunki brzegowe II rodzaju

$$u_1 = u_2 - h \cdot \alpha(t1) \quad (4.81)$$

$$u_M = u_{M-1} + h \cdot \beta(t1)$$

3. przypadek, gdy dane są warunki brzegowe III rodzaju

$$u_1 = \alpha(t1) + D(u_1 - u_2) \quad (4.82)$$

$$u_M = \beta(t1) + E(u_{M-1} - u_M)$$

c) Obliczyć rozwiązania w węzłach wewnętrznych

$$x = (i-1)h \quad (4.83)$$

$$u_i = u_i + R_i + \tau \cdot f(x, t1)$$

5° Zamknięcie pętli

a) jeżeli $(t1 - t01 < \Delta t1)$ i $(t1 - t02 < \Delta t2)$, skok do 4°

b) jeżeli $(t1 - t02 < \Delta t2)$, skok do 4d

$$c) \quad it2 = it2 + 1$$

$$t02 = it2 \cdot \Delta t2$$

CALL WYNIK (u)

jeżeli $(t_1 \geq T)$, koniec obliczeń

jeżeli $(t_1 - t_{01} < \Delta t_1)$, skok do 4°

$$d) \quad it1 = it1 + 1$$

$$t01 = it1 \cdot \Delta t1$$

skok do 3°

W przedstawianym algorytmie, zastosowanie całkowitych wskaźników $it, it1, it2$, zliczających odpowiednio ilość kroków czasowych τ , ilość linearyzacji oraz ilość wyprowadzeń czynników, zapewnia

wyeliminowanie błędów, związanych z liczeniem czasu. W przypadku małych wartości τ , błędy te mogą wpływać na rozwiązanie numeryczne w sposób istotny.

4.3 Schemat niejawny

4.3.1. Budowa schematu różnicowego, badanie aproksymacji. Podobnie, jak w przypadku schematu jawnego, należy rozwiązać jedno z zagadnień (4.22)-(4.25) metodą różnic skończonych. Zakładamy, że dana jest siatka równomierna opisana w p. 4.2.1 oraz, że zastosowano algorytm linearyzacji w przedziałach czasowych dla wyjściowych zagadnień brzegowych. W rezultacie należy rozwiązać skończony ciąg zagadnień brzegowych, dla równania o następującej postaci:

$$D_t^1 u(x,t) - D_x^1 (A(u(x,0)) D_x^1 u(x,t)) = f(x,t), \quad (4.84)$$

$$x \in (0,L), \quad t \in (0, \Delta T).$$

Składniki występujące w lewej stronie równania (4.84) aproksymujemy następującymi wyrażeniami różnicowymi

$$D_t^1 u \Big|_{u=u_i^{p+1}} \cong (u_i^{p+1} - u_i^p) / \Delta t \quad (4.85)$$

$$D_x^1 (A(u(x,0)) D_x^1 u(x,t)) \Big|_{u=u_i^{p+1}} \cong (A_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^{p+1} - u_i^{p+1}) + A_{i-\frac{1}{2}}(u_{i-1}^{p+1} - u_i^{p+1})) / h^2 \quad (4.86)$$

gdzie $A_{i+\frac{1}{2}}$ i $A_{i-\frac{1}{2}}$ są określone wzorami (4.36) i (4.37) lub (4.40) i (4.41).

Schemat ten różni się od schematu jawnego, aproksymacją pochodnej rozwiązania po czasie. Aproksymacja (4.85) aproksymuje pochodną po czasie różnicą wstecz.

Podobnie jak dla schematu jawnego, warunki brzegowe I i II rodzaju aproksymujemy różnicami skończonymi, zgodnie z wzorami (4.44) i (4.45) oraz (4.46) i (4.47). Natomiast warunki brzegowe III rodzaju, aproksymujemy w sposób następujący

$$B \cdot \frac{1}{h} (u_2^{p+1} - u_1^{p+1}) + u_1^{p+1} = \alpha(t^{p+1}), \quad (4.87)$$

$$C \cdot \frac{1}{h} (u_M^{p+1} - u_{M-1}^{p+1}) + u_M^{p+1} = \beta(t^{p+1}). \quad (4.88)$$

Schemat różnicowy dla pierwszego zagadnienia brzegowego, w postaci operatorowej, ostatecznie jest następujący

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \quad (4.89)$$

gdzie

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_i^{p+1} - u_i^p}{\Delta t} - [A_{i-\frac{1}{2}} (u_{i-1}^{p+1} - u_i^{p+1}) + A_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^{p+1} - u_i^{p+1})] / h^2, \\ \quad i = 2, \dots, M-1, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ u_i^0, \quad i = 1, \dots, M, \\ u_1^{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ u_M^{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, p_0 \end{cases} \quad (4.90)$$

oraz

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f_i^{p+1}, \quad i = 2, \dots, M-1, \\ \psi_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ \alpha^{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ \beta^{p+1}, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \end{cases} \quad (4.91)$$

gdzie podobnie jak dla schematu jawnego

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \lceil \Delta T / \Delta t \rceil, \\ f_i^{p+1} &= f((i-1)h, (p+1)\Delta t), \\ \psi_i &= \psi((i-1)h), \\ \alpha^{p+1} &= \alpha((p+1)\Delta t), \\ \beta^{p+1} &= \beta((p+1)\Delta t). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Dla zagadnień brzegowych II i III rodzaju, we wzorze (4.90), definiującym operator L_{h1} ostatnie dwa wiersze należy zamienić lewymi stronami odpowiednio wzorów (4.45) i (4.46) bądź (4.87) i (4.88).

Badając dokładność aproksymacji zauważamy, że podobnie jak w przypadku schematu jawnego, dla ustalonego stosunku $\Delta t/h^2 = r$, dokładność aproksymacji równania jest rzędu h^2 . Błąd aproksymacji warunków brzegowych I rodzaju jest równy zero, natomiast dla warunków brzegowych II i III rodzaju jest rzędu h^1 . Rozważania i ciąg obliczeń, związane z badaniem aproksymacji schematu niejawnego, są dokładnie takie same, jak dla schematu jawnego, przeprowadzone w p. 4.2.1.

4.3.2. B a d a n i e s t a b i l n o ś c i s c h e m a t u n i e j a w n e g o . W celu zbadania stabilności, zapiszmy schemat różnicowy (4.89) - (4.92) w postaci rekurencyjnej

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{p+1} - r \left(A_{i-\frac{1}{2}} (u_{i-1}^{p+1} - u_i^{p+1}) + A_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1}^{p+1} - u_i^{p+1}) \right) = u_i^p + \Delta t \cdot f_i^{p+1}, \\ \quad i = 2, \dots, M-1, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ u_i^0 = \varphi_i, \quad i = 1, \dots, M, \\ u_1^{p+1} = u_1^p + \frac{\alpha^{p+1} - \alpha^p}{\Delta t} \cdot \Delta t, \quad p = 0, 1, \dots, p_0, \\ u_M^{p+1} = u_M^p + \frac{\beta^{p+1} - \beta^p}{\Delta t} \cdot \Delta t, \quad p = 0, 1, \dots, p_0. \end{array} \right. \quad (4.93)$$

Aby zapisać te równania w postaci klasycznej, zdefiniujmy operator przejścia R_h . Niech $a = (a_1, \dots, a_M)$, $b = (b_1, \dots, b_M)$ i $b = R_h a$, gdzie

$$\left\{ \begin{array}{l} b_i - r \left(A_{i-\frac{1}{2}} (b_{i-1} - b_i) + A_{i+\frac{1}{2}} (b_{i+1} - b_i) \right) = a_i, \quad i = 2, \dots, M-1, \\ b_1 = a_1 \\ b_M = a_M \end{array} \right. \quad (4.94)$$

Wówczas u^0 i ζ^p określamy w sposób następujący

$$u^0 = (\gamma_0, \dots, \gamma_M) \quad (4.95)$$

$$\zeta^p = \left(\frac{\alpha^{p+1} - \alpha^p}{\Delta t}, f_2^{p+1}, \dots, f_M^{p+1}, \frac{\beta^{p+1} - \beta^p}{\Delta t} \right). \quad (4.96)$$

Normy w przestrzeniach U_h i F_h , podobnie jak dla schematu jawnego, są określone wzorami (4.55)-(4.57), co zapewnia spełnienie nierówności

$$\|u^0\|_{U_h} \leq C_1 \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad (4.97)$$

$$\|\zeta^p\|_{U_h} \leq C_2 \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad (4.98)$$

ze stałymi $C_1 = C_2 = 1$, (niezależnymi od h i od $f^{(h)}$).

W celu zbadania stabilności, należy zażądać by potęgi operatora przejścia R_h były jednostajnie ograniczone

$$\|R_h^p\| \leq K, \quad p = 0, 1, \dots, p_0. \quad (4.99)$$

Macierz przejścia, dla operatora R_h zdefiniowanego wzorem (4.94) jest następująca

$$G(\Delta t, k) = (E + \zeta A_i)^{-1}, \quad (4.100)$$

gdzie

$$A_i = (A_{i-\frac{1}{2}} + A_{i+\frac{1}{2}}) / 2, \quad (4.101)$$

$$\zeta = 4r \sin^2(k \cdot h / 2). \quad (4.102)$$

Skorzystamy, ze znanej własności algebraicznej, wyrażającej się w postaci lematu [13], [29].

L e m a t 4.3

Jeżeli λ_i ($i = 1, \dots, n$) są wartościami własnymi kwadratowej nieosobliwej macierzy A , to dla dowolnego całkowitego k , wartościami własnymi macierzy A^k są liczby λ_i^k ($i = 1, 2, \dots, n$).

W przypadku macierzy A osobliwej, lemat jest prawdziwy dla k naturalnego.

T w i e r d z e n i e 4.4. Jeżeli wartości własne λ_1, λ_2 , macierzy współczynników A_i mają składowe rzeczywiste dodatnie, wówczas schemat różnicowy (4.89) - (4.91), ze stałymi, niezależnymi od indeksu i współczynnikami jest stabilny. Jeżeli natomiast współczynniki A_i zmieniają się wraz ze zmianą indeksu, wówczas spełnienie tego warunku w każdym węźle i jest warunkiem koniecznym stabilności schematu (4.89) - (4.91).

Dowód twierdzenia przeprowadzimy w kilku etapach.

Najpierw udowodnimy, że macierz G istnieje. Następnie korzystając z lematu 4.2 i lematu 4.3 zostaną obliczone wartości własne macierzy przejścia. Wreszcie, zostanie pokazane, że elementy macierzy G są jednostajnie ograniczone, co pozwoli skorzystać z twierdzenia 3.3d.

Dana jest macierz

$$G(\Delta t, k) = (E + \varphi A)^{-1}$$

gdzie $\varphi = 4r \sin^2 \alpha$, ($\alpha \in (0, 2\pi)$).

Macierz G istnieje, jeżeli $\det(E + \varphi A) \neq 0$.

$$|E + \varphi A| = \begin{vmatrix} 1 + \varphi A_{11} & \varphi A_{12} \\ \varphi A_{21} & 1 + \varphi A_{22} \end{vmatrix} = 1 + \varphi(A_{11} + A_{22}) + \varphi^2 \det A \quad (4.103)$$

Rozważmy obecnie równanie kwadratowe, które spełniają wartości własne macierzy A

$$|\lambda E - A| = \lambda^2 - \lambda(A_{11} + A_{22}) + \det A = 0. \quad (4.104)$$

ze wzorów Vietty dla równania (4.104) mamy

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A_{11} + A_{22} \quad (4.105)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$$

Z równań (4.105) wnioskujemy, że jeżeli składowe rzeczywiste wartości własnych macierzy A są dodatnie, wówczas $A_{11} + A_{22} > 0$.

i $\det A > 0$. Ponieważ $\varphi \geq 0$, zatem

$$|E + \varphi A| \geq 1, \quad (4.106)$$

co oznacza, że macierz $E + \varphi A$ nie jest osobliwa, zatem macierz $G = (E + \varphi A)^{-1}$ zawsze istnieje.

Przystępujemy do obliczania wartości własnych macierzy przejścia.

Do macierzy $B = E + \varphi A$ zastosujemy lemat 4.2 i wówczas otrzymamy

$$\lambda^B = 1 + \varphi \lambda^A, \quad (4.107)$$

gdzie λ^B i λ^A są odpowiednio wartościami własnymi macierzy B i A. Następnie korzystając z lematu 4.3 dla $k = -1$ obliczamy wartość własną macierzy przejścia

$$\lambda = \frac{1}{1 + \varrho \lambda^A} \quad (4.108)$$

z założeń o macierzy A i ze wzoru (4.108) natychmiast wynika, że

$$|\lambda| \leq 1 \quad (4.109)$$

Aby móc skorzystać z twierdzenia 3.3d, należy wykazać jednostajną ograniczoność elementów macierzy przejścia. Obliczamy macierz przejścia

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1 + \varrho A_{22}}{\Delta} & \frac{-\varrho A_{21}}{\Delta} \\ \frac{-\varrho A_{12}}{\Delta} & \frac{1 + \varrho A_{11}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

gdzie $\Delta = |E + \varrho A|$. Ponieważ $\Delta \gg 1$ dla $\varrho \gg 0$, wobec tego, elementy macierzy G są jednostajnie ograniczone, jeżeli

$$|\varrho| < C,$$

gdzie C pewna stała. Warunek ten jest spełniony, jeżeli iloraz $r = \Delta t / h^2$ nie przekracza wartości $\frac{1}{4} C$. Zwykle przyjmuje się stałą wartość r, zatem elementy macierzy przejścia są ograniczone. Z twierdzenia 3.3d wynika, że schemat (4.90) - (4.92) ze stałymi współczynnikami $A_i = A$ jest stabilny.

W przypadku, gdy współczynniki zależą od zmiennej x, macierz współczynników $A(u(x, 0))$, musi mieć wartości własne o składowych rzeczywistych dodatnich, dla $x \in (0, L)$. Warunek ten jest jednak tylko konieczny dla zapewnienia stabilności schematu niejawnego. W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.

Badanie stabilności schematów różnicowych dla zagadnień brzegowych z warunkami brzegowymi II i III rodzaju prowadzi do takiej samej macierzy przejścia (4.100). Do schematów tych stosuje się również twierdzenie 4.4.

W literaturze znane są liczne schematy różnicowe, aproksymujące równanie przewodnictwa ciepła [16], [44], [47]. W pracy autor świadomie ograniczył się tylko do zbadania dwóch schematów, które są wzorowane na dwóch prostych schematach, stosowanych do modelowania jednego liniowego równania przewodnictwa ciepła.

Przedstawiona metoda badania stabilności, dla dwóch typowych przypadków, powinna być również skuteczna, dla innych schematów, aproksymujących układ dwóch równań parabolicznych.

4.3.3. Algorytm modelowania zagadnień brzegowych. Zastosowanie schematu niejawnego do aproksymacji zagadnień brzegowych, prowadzi do rozwiązania układu równań algebraicznych. W przypadku zastosowania schematu jawnego, rozwiązanie u^{p+1} można było wyliczyć na drodze przekształceń algebraicznych. Obecnie, w celu wyznaczenia nowego rozwiązania u^{p+1} należy odwrócić pewną macierz kwadratową o wymiarze $2M$. Stosowanie typowych metod odwracania macierzy byłoby mało efektywne i nieuzasadnione.

Uzyskane schematy różnicowe można zapisać w postaci ciągu równań

$$\begin{aligned} \bar{A}_i x_{i-1} + \bar{B}_i x_i + \bar{C}_i x_{i+1} &= \bar{D}_i, \quad i=1, \dots, M \\ \bar{A}_1 = \bar{C}_M &= \theta \end{aligned} \quad (4.111)$$

gdzie $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i$ są macierzami 2×2 , \bar{D}_i, x_i - wektorami o dwóch składowych, zaś θ oznacza macierz zerową. Dla układów równań postaci (4.111) znane są bardzo skuteczne metody rozwiązywania, wykorzystujące tzw. zwrotne przejści. W proponowanym algorytmie, wykorzystuje się procedurę BITRI (BITRIDIONAL), napisaną przez autora i wzorowaną na algorytmie przedstawionym w pracy [43]. Aby móc korzystać z procedury rozwiązywania układów równań postaci (4.111), należy schematy różnicowe, zapisać w odpowiedniej postaci. Równanie różnicowe, aproksymujące równania paraboliczne (4.84) można zapisać w następującej formie

$$\begin{aligned} -r A_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1}^{p+1} + (E + r A_{i-\frac{1}{2}} + r A_{i+\frac{1}{2}}) u_i^{p+1} - r A_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1}^{p+1} &= u_i^p + \Delta t \cdot f_i^{p+1} \\ i &= 2, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Porównując (4.112) z (4.111) mamy

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= -r A_{i-\frac{1}{2}}, \quad i=2, \dots, M-1, \\ \bar{B}_i &= E + r A_{i-\frac{1}{2}} + r A_{i+\frac{1}{2}}, \quad i=2, \dots, M-1, \\ \bar{C}_i &= -r A_{i+\frac{1}{2}}, \quad i=2, \dots, M-1, \\ \bar{D}_i &= u_i^p + \Delta t \cdot f_i^{p+1}, \quad i=2, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (4.113)$$

gdzie E - macierz jednostkowa, p jest ustalone.

Podobnie, zestawiając wzory (4.45) - (4.47) oraz (4.87) i (4.88) z równaniem (4.111), wyznaczamy współczynniki równania (4.111) posiadające indeksy równe 1 bądź $M-1$.

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 &= \alpha^{p+1}, \\ \bar{D}_M &= \beta^{p+1}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Dla warunków brzegowych I rodzaju

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 = \bar{B}_M &= E \\ \bar{A}_1 = \bar{C}_1 = \bar{A}_M = \bar{C}_M &= \theta \end{aligned} \quad (4.115)$$

Dla warunków brzegowych II rodzaju

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= \bar{C}_M = \theta, \\ \bar{B}_M &= \bar{C}_1 = \frac{1}{h} E \\ \bar{B}_1 &= \bar{A}_M = -\frac{1}{h} E\end{aligned}\quad (4.116)$$

Dla warunków brzegowych III rodzaju

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= \bar{C}_M = \theta \\ \bar{B}_1 &= E - \frac{1}{h} B \\ \bar{C}_1 &= \frac{1}{h} B \\ \bar{A}_M &= -\frac{1}{h} C \\ \bar{B}_M &= E + \frac{1}{h} C\end{aligned}\quad (4.117)$$

Założenia dotyczące algorytmu są takie same, jak wymienione w p.4.2.3. Dodatkowo θ - oznacza macierz zerową, a E - macierz jednostkową o wymiarze 2×2 .

Algorytm.

0° Parametry formalne $M, \tau, \Delta t_1, \Delta t_2, L$ ($\tau \equiv \Delta t$)

1° Obliczyć stałe współczynniki oraz nadać wartości początkowe wskaźnikom

$$\begin{aligned}h &= L / (M-1) \\ r &= \tau / h^2\end{aligned}\quad (4.118)$$

$$\begin{aligned}it, it1, it2 &= 0 \\ t1, t01, t02 &= 0. \\ \bar{A}_1, \bar{C}_M &= 0.\end{aligned}\quad (4.119)$$

1) przypadek, gdy dane są warunki brzegowe I rodzaju

$$\begin{aligned}\bar{B}_1, \bar{B}_M &= E \\ \bar{C}_1, \bar{A}_M &= \theta\end{aligned}\quad (4.120)$$

2) przypadek, gdy dane są warunki brzegowe II rodzaju

$$\begin{aligned}\bar{B}_M &= \bar{C}_1 = \frac{1}{h} E \\ \bar{B}_1, \bar{A}_M &= -\frac{1}{h} E\end{aligned}\quad (4.121)$$

3) przypadek, gdy dane są warunki brzegowe III rodzaju

$$\begin{aligned}\bar{B}_1 &= E - \frac{1}{h} B \\ \bar{C}_1 &= \frac{1}{h} B \\ \bar{A}_M &= -\frac{1}{h} C \\ \bar{B}_M &= E + \frac{1}{h} C\end{aligned}\quad (4.122)$$

2° Obliczyć rozwiązanie początkowe

$$\left. \begin{aligned}x &= (i-1)h \\ u_i &= \tau(x)\end{aligned} \right\} i = 1, \dots, M.\quad (4.123)$$

3° Zlinearyzować równanie

$$\begin{aligned}\bar{A}_i, \bar{C}_{i+1} &= -rA(u_i) & , i=1, \dots, M-1 \\ \bar{B}_i &= E - \bar{A}_i - \bar{C}_i & , i=2, \dots, M-1\end{aligned}\quad (4.124)$$

4° Krok iteracyjny

$$it = it + 1$$

$$t1 = it \cdot \tau$$

$$x = (i-1)$$

$$\bar{D}_i = u_i + \tau \cdot f(x, t1) \quad \left. \vphantom{\bar{D}_i} \right\} i = 2, \dots, M-1 \quad (4.125)$$

$$\bar{D}_1 = \alpha(t1)$$

$$\bar{D}_M = \beta(t1) \quad (4.126)$$

Wywołać procedurę BITRI

5° Zamknięcie pętli

a) jeżeli $(t1 - t01 < \Delta t1)$ i $(t1 - t02 < \Delta t2)$ skok do 4°

b) jeżeli $(t1 - t02 < \Delta t2)$ skok do 4°d

c) $it2 = it2 + 1$

$$t02 = it2 \cdot \Delta t2$$

wywołać WYNIK (u)

jeżeli $(t1 \gg T)$, koniec obliczeń

jeżeli $(t1 - t01 < \Delta t1)$ skok do 4°

d) $it1 = it1 + 1$

$$t01 = it1 \cdot \Delta t1$$

skok do 3°

Wykorzystywana procedura BITRI ma tę właściwość, że wektory \bar{D}_i mogą być utożsamione z wektorem rozwiązań u_i . Procedura ta zakłada, że $\bar{A}_1 = C_M = \Theta$, ale nie wykorzystuje tych elementów do obliczeń, w związku z tym można zrezygnować z obliczania (4.18) i podstawienia (4.23) są dopuszczalne mimo, że nie zapewniają spełnienia warunku (4.18).

4.4. Dokładność rozwiązań w metodzie różnic skończonych.

W celu oszacowania błędu rozwiązania, skorzystamy z przytoczonego w rozdziale 3 twierdzenia 3.1.

Jeżeli rząd aproksymacji jest h^k i zachodzi

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C_1 h^k, \quad (4.127)$$

oraz jeżeli schemat jest stabilny i zachodzi

$$\|u^{(h)}\|_{u_h} \leq C \cdot \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad (4.128)$$

wówczas prawdziwe jest następujące szacowanie błędu

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{u_h} \leq C_1 \cdot C h^k, \quad (4.129)$$

gdzie u jest rozwiązaniem dokładnym.

Z rozważań przeprowadzonych w punktach 4.22 i 4.32 wynika, że dla obydwu schematów nierówności (4.9) i (4.10) są spełnione, przy czym można przyjąć stałe $K_1 = K_2 = 1$. Wykorzystując ten fakt oraz nierówność (4.15) mamy, że w (4.128) $C = 1 + T$, ponieważ normy operatorów przejścia R_h w obydwu przypadkach są mniejsze od jedności o ile są spełnione wymagane warunki stabilności. Ostatecznie mamy następujące oszacowanie błędu rozwiązania.

$$\| [u]_h - u^{(h)} \|_{u_h} \leq C_1 (1+T) h^k, \quad (4.130)$$

gdzie stała C_1 występuje w (4.127). Oszacowanie (4.130) zwykle jest bardzo grube i praktycznie może służyć jedynie do stwierdzenia faktu zbieżności rozwiązania dyskretnego do rozwiązania ciągłego.

Niedokładność szacowania wynika stąd, że błąd aproksymacji szacujemy na podstawie reszt Taylora, powstających w równaniach (4.32) - (4.37). Reszty te szacujemy z góry, przez przewidywane wartości maksymalne co znacznie zawyża wartość stałej C_1 . Jednakże w przypadkach, gdy wyższe pochodne rozwiązania oraz pochodne macierzy współczynników są bliskie zera lub równe zero, szacowanie (4.130) może mieć również walory praktyczne.

5. ZASTOSOWANIE METODY RITZA-GALERKINA

5.1. Przestrzeń rozwiązań

Należy znaleźć rozwiązanie zagadnienia brzegowego, dla równania zapisanego w postaci słabej

$$[Lu, v^{(h)}] = [f, v^{(h)}], \text{ dla } v^{(h)} \in V_h, \quad (5.1)$$

gdzie $u \in U$, spełnia jednorodne warunki brzegowe.

Warunek ortogonalności Galerkin dla zagadnienia (5.1) ma postać

$$[L(\sum_{j=1}^M Q_j(t) \varphi_j(x)), \psi_k(x)] = [f(x,t), \psi_k(x)], \quad k=1, \dots, M \quad (5.2)$$

gdzie $\varphi_j, (j=1, M)$ baza w podprzestrzeni S^h

$\psi_j, (j=1, \dots, M)$ baza w V_h

Rozwiązanie u zagadnienia (5.1) jest przybliżone funkcją

$$u^{(h)} = \sum_{j=1}^M Q_j(t) \varphi_j(x), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T). \quad (5.3)$$

Zakładamy, że $\varphi_i(x) = \psi_i(x)$ są funkcjami wielomianowymi o nośniku należącym do przedziału $\langle (i-1)h, (i+1)h \rangle$, gdzie

$$h = \frac{L}{M-1} \quad (5.4)$$

oraz, że zachodzi

$$D_i \varphi_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad (5.5)$$

gdzie $x_i = (i-1)h$ - węzeł siatki,

δ_{ij} - funkcja Kronekera,

D_i - operator rzędu równego zero lub wyższego.

Aby zbudować bazę B_h w przestrzeni próbnych funkcji S_h , przyjmuje się pewną funkcję $g(x)$, która jest różna od zera co najwyżej w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ i spełnia warunek

$$D_i g(0) = 1. \quad (5.6)$$

Baz B_h stanowią wówczas funkcje

$$g_i(x) = g\left(\frac{x}{h} - i\right), \quad i = 1, \dots, M. \quad (5.7)$$

W przypadku, gdy rozwiązanie zagadnienia (5.1) jest funkcją wektorową w dwóch składowych, należy przyjąć za bazę funkcje

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= (g_i(x) \quad 0)^T, \quad i = 1, \dots, M, \\ \varphi_{M+i}(x) &= (0 \quad g_i(x))^T, \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aby przestrzeń zawierała funkcje posiadające ciągłe pierwsze pochodne, należy wówczas wybrać dwie funkcje, spełniające warunek (5.5), jedna dla operatora D_i rzędu zerowego, zaś druga dla operatora D_i rzędu pierwszego. Wówczas przy tej samej ilości węzłów, liczba wektorów bazy będzie dwukrotnie wyższa. Każdemu węzłowi będą odpowiadać dwa parametry, wartość funkcji oraz wartość pochodnej. Tym samym ilość niewiadomych Q_j wzrośnie dwukrotnie. Zakładamy dalej, że baza przestrzeni funkcji próbnych jest postaci (5.7).

5.2. Dyskretyzacja zagadnienia brzegowego

Podobnie, jak w rozdziale czwartym zakładamy, że do quasilinio-
wego zagadnienia brzegowego zastosowano algorytm linearyzacji
w przedziałach czasowych. Obecnie, należy rozwiązać ciąg zagadnień
brzegowych dla układu dwóch liniowych silnie parabolicznych równań
(4.2).

W metodzie Ritza-Galerkina wymaga się, aby zagadnienie brzegowe
posiadało jednorodne zerowe warunki brzegowe. Istnieje wiele
metod sprowadzania zagadnień z warunkami brzegowymi niejednorodnymi,
do zagadnień z warunkami brzegowymi jednorodnymi. Zagadnienie to
zostanie szczegółowo omówione w punkcie 5.3.

Należy rozwiązać zagadnienie brzegowe (5.1) dla operatora L

$$Lu \equiv D_t^1 u(x,t) - D_x^1 (A(x) D_x^1 u(x,t)). \quad (5.9)$$

Rozwiązania poszukujemy w przestrzeni funkcji próbnych S^h

$$u^{(h)}(x,t) = \sum_{j=1}^{2M} Q_j(t) \varphi_j(x), \quad (5.10)$$

gdzie φ_j są określone wzorami (5.5) - (5.7), przy czym funkcje $\varphi_1, \varphi_M, \varphi_{M+1}, \varphi_{2M}$ spełniają jednorodne warunki brzegowe.

Równanie (5.2) dla operatora (5.9) przy założeniu, że bazy w przestrzeniach V^h i S^h są jednakowe, ma postać

$$\sum_{j=1}^{2M} Q_j'(t) [\varphi_j(x), \varphi_k(x)] - \sum_{j=1}^{2M} Q_j(t) [(A(x)\varphi_j(x))', \varphi_k(x)] = [f(x,t), \varphi_k(x)] \quad (5.11)$$

$$k=1, \dots, 2M,$$

gdzie kreska ' oznacza różniczkowanie funkcji po jej argumentach. Ponieważ są to funkcje jednej zmiennej, więc nie prowadzi takie oznaczenie do niejednoznaczności.

Zauważmy, że funkcje bazowe określone wzorami (5.7), (5.8) spełniają dla $j, k = 1, \dots, M$ równania

$$\begin{aligned} [\varphi_j, \varphi_k] &= [g_j, g_k], \\ [\varphi_{M+j}, \varphi_k] &= [\varphi_j, \varphi_{M+k}] = 0, \\ [\varphi_{M+j}, \varphi_{M+k}] &= [g_j, g_k]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Wynikają z tych równań następujące tożsamości

$$\begin{aligned} [(A(x)\varphi_j(x))', \varphi_k(x)] &= [(A_{11}(x)g_j'(x))', g_k(x)] \\ [(A(x)\varphi_{M+j}(x))', \varphi_k(x)] &= [(A_{12}(x)g_j'(x))', g_k(x)] \\ [(A(x)\varphi_j'(x))', \varphi_{M+k}(x)] &= [(A_{21}(x)g_j'(x))', g_k(x)] \\ [(A(x)\varphi_{M+j}'(x))', \varphi_{M+k}(x)] &= [(A_{22}(x)g_j'(x))', g_k(x)] \end{aligned} \quad (5.13)$$

oraz

$$[f(x,t), \varphi_k(x)] = [f^1(x,t), g_k(x)] \quad (5.14)$$

$$[f(x,t), \varphi_{M+k}(x)] = [f^2(x,t), g_k(x)]$$

dla $j, k = 1, 2, \dots, M$,

gdzie

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$f(x,t) = \begin{bmatrix} f^1(x,t) \\ f^2(x,t) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Uwzględnienie tożsamości (5.12) = (5.16) w równaniach (5.11) daje następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\sum_{j=1}^M Q_j' [g_j, g_k] - \sum_{j=1}^M Q_j [(A_{11} \cdot g_j)', g_k] - \sum_{j=1}^M Q_{M+j} [(A_{12} \cdot g_j)', g_k] = [f^1, g_k] \quad 5.17$$

$$\sum_{j=1}^M Q_{M+j}' [g_j, g_k] - \sum_{j=1}^M Q_j [(A_{21} \cdot g_j)', g_k] - \sum_{j=1}^M Q_{M+j} [(A_{22} \cdot g_j)', g_k] = [f^2, g_k]$$

$$k=1, 2, \dots, M.$$

W równaniu tym, dla skrócenia zapisu, pominięto argumenty funkcji Q_j , g_j , f^1 , f^2 , A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} .

Aby można było obliczyć całki iloczynu skalarnego w (5.17), należy założyć, że g_k mają całkowne z kwadratem okręgu pochodne

$$g_k \in S_h \subset H^2(\Omega), \quad k=1, \dots, M. \quad (5.18)$$

Można również założyć, że $S_h \in H^1(\Omega)$ i wówczas w (5.17) obliczamy całki, stosując wzory Greena oraz wykorzystując fakt, że funkcje g_k spełniają jednorodne warunki brzegowe. Układ równań różniczkowych ma wówczas postać

$$\sum_{j=1}^M Q_j' [g_j, g_k] + \sum_{j=1}^M Q_j [A_{11} g_j', g_k'] + \sum_{j=1}^M Q_{M+j} [A_{12} g_j', g_k'] = [f^1, g_k] \quad (5.19)$$

$$\sum_{j=1}^M Q_{M+j}' [g_j, g_k] + \sum_{j=1}^M Q_j [A_{21} g_j', g_k'] + \sum_{j=1}^M Q_{M+j} [A_{22} g_j', g_k'] = [f^2, g_k]$$

$$k=1, 2, \dots, M.$$

Zauważmy, że w układzie równań (5.17) i (5.18) znaczna część składników znika, ponieważ funkcje g_j są różne od zera tylko w otoczeniu j -tego węzła.

Układ równań różniczkowych (5.17), (5.19) można dalej dyskretyzować, stosując metodę Ritz-Galerkina. Wówczas należałoby zbudować siatkę dwuwymiarową i otrzymalibyśmy w wyniku dyskretyzacji zmiennej t , układ równań algebraicznych wiążących rozwiązania we wszystkich węzłach dwuwymiarowej sieci. Natomiast zastosowanie aproksymacji różnicami skończonymi, pozwoli obliczać rozwiązania w następujących po sobie chwilach czasowych, krok po kroku.

Postępowanie takie jest bardziej uzasadnione.

Również komentarza wymaga sposób obliczania współczynników równań (5.17), (5.19), które są całkami z pewnych funkcji.

Jeżeli współczynniki równania $A(\bar{x})$ są wolnozmiennie, wówczas można je wyłączyć przed znak iloczynu skalarnego. Pozostała funkcja jest znana i stała dla zadanej funkcji $g(x)$, generującej funkcje bazowe $g_j(x)$.

Jeżeli funkcji $A(x)$ nie można uznać za stałą, wówczas należa przeprowadzić całkowanie numeryczne. Wyjątkowo skuteczna jest wówczas kwadratura Legendre'a, ponieważ część z funkcji podcałkowych jest znana.

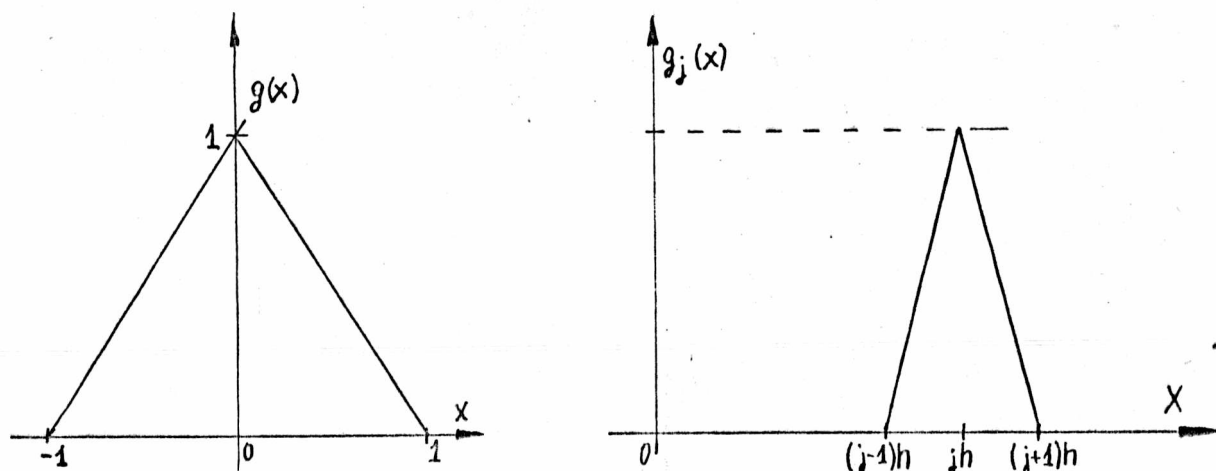
5.3. Zastosowanie elementów skończonych liniowych do modelowania procesu wymiany energii i masy

5.3.1. Dyskretyzacja zagadnienia brzegowego. Rozwiązania zagadnienia (5.1) poszukujemy w przestrzeni $S^h \subset H^1$ generowanej przez elementy liniowe.

Niech

$$g(x) = 1 - |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Bazę w przestrzeni S^h określamy wzorami (5.7) i (5.8).



Rys. 5.1. Element liniowy oraz odcinkami liniowa funkcja bazowa.

Na rysunku 5.1. pokazano przebieg funkcji $g(x)$ oraz jedną z funkcji bazowych. Funkcje $g_j(x)$ spełniają zerowe warunki brzegowe I rodzaju. Jeżeli w zagadnieniu brzegowym są zadane warunki brzegowe II lub III rodzaju, należy odpowiednio modyfikować funkcje bazowe $\psi_1, \psi_M, \psi_{M+1}, \psi_{2M}$.

Zakładamy, że funkcje $A(x)$ i $F(x, t)$ są wolno zmienne.

Można je wówczas wyłączyć przed znak całki. Ponieważ wiele składników sum w (5.19) zanika, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_j^0 K_{j,k}^0 + A11(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_j^1 K_{j,k}^1 + A12(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_{M+j}^1 K_{j,k}^1 &= h \cdot f^1(kh, t) \\ \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_{M+j}^0 K_{j,k}^0 + A21(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_j^1 K_{j,k}^1 + A22(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_{M+j}^1 K_{j,k}^1 &= h \cdot f^2(kh, t) \end{aligned} \quad (5.20)$$

gdzie

$$K_{j,k}^0 = [g_j, g_k]$$

$$K_{j,k}^1 = [g_j', g_k']$$

$$K_{0,k}^n = K_{M+1,k}^n = 0, \text{ dla } n = 0, 1.$$

Ponieważ

$$g_j'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{dla } x \in ((j-1)h, jh), \\ -\frac{1}{h}, & \text{dla } x \in (jh, (j+1)h), \\ 0, & \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle \setminus \langle (j-1)h, (j+1)h \rangle \end{cases} \quad (5.21)$$

mamy

$$K_{j,j}^1 = \frac{2}{h}, \quad j = 1, \dots, M, \quad (5.22)$$

$$K_{j,j+1}^1 = K_{j+1,j}^1 = \frac{-1}{h}, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad (5.23)$$

oraz

$$K_{j,j}^0 = \frac{2h}{3}, \quad j = 1, \dots, M \quad (5.24)$$

$$K_{j+1,j}^0 = K_{j,j+1}^0 = \frac{h}{6}, \quad j = 1, \dots, M-1. \quad (5.25)$$

Oznaczmy

$$u_i(t) = \begin{bmatrix} Q_j(t) \\ Q_{M+j}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$F_i(t) = \begin{bmatrix} f^1(ih, t) \\ f^2(ih, t) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Wówczas równanie (5.20) po uwzględnieniu (5.22) - (5.25) dają

$$(u'_{i-1} + 4u'_i + u'_{i+1}) + \frac{6}{h^2} A(ih) (-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = 6F_i, \quad (5.28)$$

z tym, że składniki i indeksach $i = M + 1$ znikają.

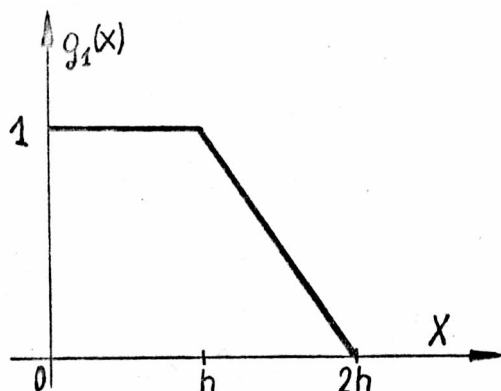
5.3.2. Funkcje bazowe dla warunków brzegowych II i III rodzaju. Jednorodny zerowy warunek brzegowy II rodzaju

$$D_x^1 u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad (5.29)$$

wymaga odpowiedniego doboru funkcji $g_1(x)$. Warunek ten spełnia funkcja

$$g_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, h \rangle, \\ 2 - \frac{x}{h}, & x \in \langle h, 2h \rangle, \\ 0, & x \in \langle 2h, 1 \rangle \end{cases} \quad (5.30)$$

przedstawiona na rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Funkcja bazowa spełniająca zerowy warunek brzegowy II rodzaju.

Dla tej funkcji mamy

$$g_1'(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (0, h) \cup (2h, 1), \\ -\frac{1}{h} & , x \in (h, 2h). \end{cases} \quad (5.31)$$

Jednorodny warunek brzegowy drugiego rodzaju w punkcie $x = 1$, aproksymuje funkcja $g_M(x) = 1 - g_1(x)$. Na podstawie wzorów (5.30) i (5.31) możemy określić współczynniki występujące w równaniach (5.20)

$$K_{1,1}^0 = K_{M,M}^0 = \frac{4h}{3}, \quad (5.32)$$

$$K_{1,1}^1 = K_{M,M}^1 = \frac{1}{h}, \quad (5.33)$$

zaś pozostałe współczynniki, określone są wzorami (5.22)-(5.25). Ostatecznie równania (5.20) dla jednorodnych warunków brzegowych II rodzaju mają postać

$$(8u_1' + u_2') + \frac{6}{h^2} A(h)(u_1 - u_2) = 9F_1, \quad (5.34)$$

$$(u_{i-1}' + 4u_i' + u_{i+1}') + \frac{6}{h^2} A(ih)(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = 6F_i, \quad i=2, \dots, M-1, \quad (5.35)$$

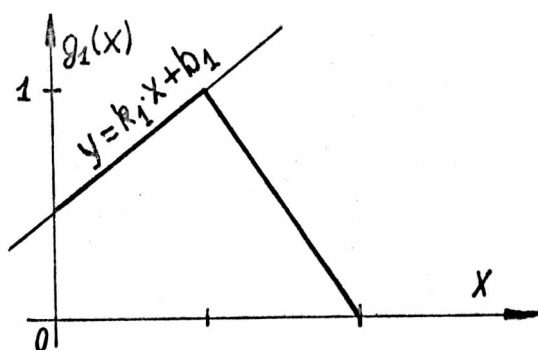
$$(u_{M-1}' + 8u_M') + \frac{6}{h^2} A(Mh)(-u_{M-1} + u_M) = 9F_M \quad (5.36)$$

Należy pamiętać, że dla funkcji (5.30), jest dopuszczalne przejście z równań (5.17) do równań (5.19), bez wprowadzania dodatkowych składników. Sama funkcja $g_1(x)$ nie znika w zerze, natomiast funkcja $g_1'(x)$ jest równa zero w otoczeniu punktu $x = 0$.

Rozważmy obecnie warunek brzegowy III rodzaju

$$B D_x^1 u + C u|_{x=0} = 0. \quad (5.37)$$

Odcinkami liniowe funkcje bazowe $\varphi_1(x)$, $\varphi_{M+1}(x)$, powinny spełniać równanie (5.37) w otoczeniu zera. Równocześnie powinny mieć wartość równą jeden dla $x = h$. Składową niezerową takiej funkcji przedstawia rysunek 5.3.



Rys. 5.3. Składowa niezerowa funkcji bazowej, spełniającej jednorodny warunek brzegowy III rodzaju.

Niech funkcje φ_1 , φ_{M+1} w przedziale $(0, h)$ mają postać

$$\varphi_1(x) = \begin{bmatrix} k_1 x + b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{M+1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{M+1} x + b_{M+1} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Funkcje te przyjmują wartość równą jeden dla $x = h$ oraz mają spełniać warunek (5.37). Stąd mamy

$$\begin{aligned} B \cdot k + C \cdot b &= \theta \\ h \cdot k + b &= \mathbb{1} \end{aligned} \quad (5.39)$$

gdzie $\mathbb{1} = (1, 1)^T$

$$k = (k_1, k_{M+1})^T$$

$$b = (b_1, b_{M+1})^T.$$

Obliczamy niezerowe rozwiązanie układu (5.39)

$$k = (h \cdot C - B)^{-1} \cdot C \cdot \mathbb{1} \quad (5.40)$$

$$b = \mathbb{1} - h \cdot k \quad (5.41)$$

Jeżeli warunek brzegowy jest postaci (4.25) otrzymujemy

$$k_0 = (hE - B)^{-1} \mathbb{1}, \quad (5.42)$$

$$b_0 = \mathbb{1} - h \cdot k, \quad (5.43)$$

$$k_L = -(hE + C)^{-1} \mathbb{1}, \quad (5.44)$$

$$b_L = \mathbb{1} + h \cdot k, \quad (5.45)$$

gdzie k_0, b_0 są parametrami dla funkcji φ_1, φ_{M+1} , zaś k_L, b_L są parametrami dla funkcji φ_M, φ_{2M} .

Funkcje φ_1, φ_{M+1} określone wzorami (5.38) w otoczeniu zera nie muszą być równe zero. Zastosowanie wzorów Greena do takich funkcji, spowoduje pojawienie się dodatkowych składników w równaniach (5.19). Można tego uniknąć, zakładając, że funkcje

testujące $\psi_1, \psi_M, \psi_{M+1}, \psi_{2M}$ spełniają zerowe warunki brzegowe I rodzaju. Dla takiego dodatkowego założenia, równanie (5.2) przyjmie postać

$$\sum_{j=k-1}^{k+1} Q_j \bar{K}_{j,k}^0 + A11(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_j \bar{K}_{j,k}^1 + A12(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_{M+j} \bar{K}_{M+j,k}^1 = h \cdot f^1(kh, t) \quad (5.46)$$

$$\sum_{j=k-1}^{k+1} Q_{M+j} \bar{K}_{M+j,M+k}^0 + A21(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_j \bar{K}_{j,M+k}^1 + A22(kh) \sum_{j=k-1}^{k+1} Q_{M+j} \bar{K}_{M+j,M+k}^1 = h \cdot f^2(kh, t)$$

$$k=1, 2, \dots, M,$$

gdzie $\bar{K}_{j,k}^0 = [\varphi_j, \psi_k]$, $j, k=1, \dots, 2M$ (5.47)

$$\bar{K}_{j,k}^1 = [\varphi_j', \psi_k']$$
, $j, k=1, \dots, 2M$. (5.48)

Równań tych nie można zapisać w postaci (5.20), ponieważ funkcje bazowe z przestrzeni rozwiązań, odpowiadające węzłom brzegowym, są dobierane indywidualnie, w zależności od warunków brzegowych. W węzłach wewnętrznych siatki, współczynniki (4.47) i (4.48) obliczamy na podstawie wzorów (5.22) - (5.25) według zależności

$$\bar{K}_{j,k}^0 = \bar{K}_{M+j, M+k}^0 = K_{j,k}^0, \quad j=k-1, k, k+1, \quad k=2, \dots, M-1, \quad (5.49)$$

$$\bar{K}_{j,k}^1 = \bar{K}_{M+j,k}^1 = \bar{K}_{j, M+k}^1 = \bar{K}_{M+j, M+k}^1 = K_{j,k}^1, \quad j=k-1, k, k+1, \quad k=2, \dots, M-1. \quad (5.50)$$

Natomiast współczynniki o indeksach $j = 1, M, M+1, 2M$ zależą od odpowiadających im funkcji bazowych ψ_j .

Niech pary liczb (k_j, b_j) , $j = 1, M, M+1, 2M$ będą współczynnikami równania prostej, z której zbudowane są odpowiednie funkcje bazowe w pobliżu brzegu obszaru. Brakujące współczynniki w (5.46) obliczamy według wzorów

$$\bar{K}_{1,1}^0 = (5 - k_1 h) h / 6 \quad (5.51)$$

$$\bar{K}_{M,M}^0 = (5 + k_M h) h / 6$$

$$\bar{K}_{M+1, M+1}^0 = (5 - k_{M+1} h) h / 6$$

$$\bar{K}_{2M, 2M}^0 = (5 + k_{2M} h) h / 6$$

oraz $\bar{K}_{1, M+1}^1 = \bar{K}_{1,1}^1 = (1 + k_1 h) / h$

$$\bar{K}_{M, 2M}^1 = \bar{K}_{M, M}^1 = (1 - k_M h) / h$$

$$\bar{K}_{M+1, 1}^1 = \bar{K}_{M+1, M+1}^1 = (1 + k_{M+1} h) / h$$

$$\bar{K}_{2M, M}^1 = \bar{K}_{2M, 2M}^1 = (1 - k_{2M} h) / h$$

(5.52)

Po uwzględnieniu tych zależności, układ równań różniczkowych zwyczajnych (5.46) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{aligned} Y_1 u_1' + u_2' + \frac{6}{h^2} A_1 (Y_2 u_1 - u_2) &= 6 F_1 \\ u_{i-1}' + 4 u_i' + u_{i+1}' + \frac{6}{h^2} A_i (-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) &= 6 F_i, i=2, \dots, M-1, \\ u_{M-1}' + Y_3 u_M' + \frac{6}{h^2} A_M (-u_{M-1} + Y_4 u_M) &= 6 F_M \\ u_i(0) = \bar{\gamma}(ih), i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (5.53)$$

gdzie Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 są macierzami diagonalnymi

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{diag}(5 - k_1 h, 5 - k_{M+1} h), \\ Y_2 &= \text{diag}(1 + k_1 h, 1 + k_{M+1} h), \\ Y_3 &= \text{diag}(5 + k_M h, 5 + k_{2M} h), \\ Y_4 &= \text{diag}(1 - k_M h, 1 - k_{2M} h) \end{aligned} \quad (5.54)$$

oraz

$$u_i = (Q_i, Q_{M+i})^T, \quad (5.55)$$

$$A_i = \bar{A}(ih).$$

Układ równań (5.53) jest ogólny i obejmuje wszystkie przypadki jednorodnych warunków brzegowych. Równania te są wygodne do obliczeń numerycznych. Po ustaleniu współczynników kierunkowych prostych, z których są zbudowane funkcje bazowe w węzłach brzegowych, dalsze postępowanie jest niezależne od rodzaju wyjściowych warunków brzegowych.

5.3.3. Modelowanie I zagadnienia brzegowego. Algorytm linearyzacji dla równań quasi-liniowych w przedziałach czasowych, sprowadza zagadnienie nieliniowe do ciągu liniowych zagadnień brzegowych postaci

$$\begin{aligned} D_t^1 u(x,t) - D_x^1 (A(u(x,0)) D_x^1 u(x,t)) &= f(x,t), x \in \Omega, t \in (0, \Delta T), \\ u(x,0) &= \gamma(x), x \in \Omega, \\ u(0,t) &= \alpha(t), t \in (0, \Delta T), \\ u(L,t) &= \beta(t), t \in (0, \Delta T). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Wprowadzenie nowej zmiennej

$$v(x,t) = u(x,t) - \alpha(t) - \frac{x^2}{L^2} (\beta(t) - \alpha(t)), \quad (5.57)$$

sprowadza zagadnienie (5.56) do zagadnienia jednorodnego

$$\begin{aligned} D_t^1 v(x,t) - D_x^1 (\bar{A}(x) D_x^1 v(x,t)) &= \bar{f}(x,t), x \in \Omega, t \in (0, \Delta T), \\ v(x,0) &= \bar{\gamma}(x), x \in \Omega, \\ v(0,t) = v(L,t) &= 0, t \in (0, \Delta T), \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\text{gdzie } \bar{A}(x) = A(v(x,0) + \alpha(0) + \frac{x^2}{L} (\beta(0) - \alpha(0))), \quad (5.59)$$

$$\bar{y}(x) = y(x) - \alpha(0) - \frac{x^2}{L} (\beta(0) - \alpha(0)), \quad (5.60)$$

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \alpha'(t) - \frac{x^2}{L} (\beta'(t) - \alpha'(t)) + D_x' (\bar{A}(x) \frac{2x}{L} (\beta(x) - \alpha(x))) \quad (5.61)$$

Jeżeli funkcje $A(u)$ są wolnozmiennie, można stosować wówczas przybliżenie

$$\bar{f}(x,t) \cong f(x,t) - \alpha'(t) - \frac{x^2}{L} (\beta'(t) - \alpha'(t)) + \frac{2}{L} \bar{A}(x) (\beta(t) - \alpha(t)). \quad (5.62)$$

Równania (2.28) dyskretyzujemy względem czasu, wprowadzając różnicowe aproksymacje pochodnych czasowych

$$D_t^1 u_i |_{t=p \cdot \Delta t} = (u_i^{p+1} - u_i^p) / \Delta t, \quad (5.63)$$

lub

$$D_t^1 u_i |_{t=p \cdot \Delta t} = (u_i^p - u_i^{p-1}) / \Delta t, \quad (5.64)$$

gdzie $u_i^p = u_i(p \cdot \Delta t)$.

W wyniku zastosowania takiej aproksymacji otrzymujemy układy równań różnicowych

$$u_{i-1}^{p+1} + 4u_i^{p+1} + u_{i+1}^{p+1} = u_{i-1}^p + 4u_i^p + u_{i+1}^p + 6r A_i (u_{i-1}^p - 2u_i^p + u_{i+1}^p) + 6\Delta t \cdot F_i^p \quad (5.65)$$

$$i = 1, \dots, M, \quad p = 0, 1, \dots, [\Delta T / \Delta t],$$

$$u_i^p = \bar{y}_i(ih), \quad i = 1, \dots, M$$

oraz

$$(E + s_1 A_i) u_{i-1}^{p+1} + (4E - 2s_1 A_i) u_i^{p+1} + (E + s_1 A_i) u_{i+1}^{p+1} = u_{i-1}^p + 4u_i^p + u_{i+1}^p + 6\Delta t \cdot F_i^{p+1} \quad (5.66)$$

$$i = 1, \dots, M, \quad p = 0, 1, \dots, [\Delta T / \Delta t],$$

$$u_i^p = \bar{y}(ih), \quad i = 1, \dots, M,$$

gdzie E - macierz jednostkowa,

$$s_1 = -6r,$$

$$A_i = \bar{A}(ih),$$

$$F_i^p = \bar{f}(ih, p \cdot \Delta t),$$

z tym, że składniki o indeksach $i = 0$ lub $i = M + 1$ znikają.

Schematy (5.65) i (5.66) są niejawne. Dla zagadnień brzegowych z warunkami brzegowymi II i III rodzaju uzyskujemy podobne schematy różnicowe. Różnić się one będą współczynnikami równania, występującymi przy niewiadomych o indeksach $i = 1$ bądź $i = M$ oraz postacią funkcji $\bar{f}, \bar{A}, \bar{y}$, które zależą od sposobu sprowadzania warunków brzegowych niejednorodnych, do warunków brzegowych jednorodnych.

Obecnie zbadamy stabilność tych schematów.

Dla schematu (5.65) macierz przejścia operatora pomocniczego R_h wyraża się wzorem

$$G(\Delta t, k) = E - 6 \frac{\beta}{6-\beta} \frac{\Delta t}{h^2} A_i, \quad (5.67)$$

gdzie $\beta = 4 \sin^2 \frac{kh}{2}$.

5.68

Na podstawie twierdzeń 4.3 i 3.3a warunek stabilności schematu (5.65), przy założeniu, że współczynniki równania (5.6) spełniają założenia twierdzenia 4.3, jest następujący

$$\Delta t \leq \frac{h^2 \alpha_0}{12} \quad (5.69)$$

gdzie $\alpha_0 = \min \left\{ \frac{1}{A_{11}(ih)}, \frac{1}{A_{22}(ih)} \right\}$.

Dla schematu (5.66), macierz przejścia $G(\Delta t, k)$ dla operatora pomocniczego R_h , wyraża się wzorem

$$G(\Delta t, k) = (E + \beta A_i)^{-1} (E - \beta A_i), \quad (5.70)$$

gdzie $\beta = 6 \cdot \frac{\Delta t}{h^2} \cdot \frac{1 - \cos(k \cdot h)}{2 + \cos(k \cdot h)}$.

(5.71)

Z (5.71) wynika, że wartości β są nieujemne i należą do przedziału $\langle 0, 3 \frac{\Delta t}{h^2} \rangle$.

T w i e r d z e n i e 5.1. Schemat 5.66 jest bezwzględnie stabilny, jeżeli współczynniki macierzy A_i spełniają warunki

$$|A_{12}|, |A_{21}| \leq \min\{A_{11}, A_{22}\} \quad (5.72)$$

Dowód. Skorzystajmy w dowodzie z twierdzenia 3.3c oraz z lematu 4.1. Należy więc wykazać, że

$$\|G(\Delta t, k)\| \leq 1. \quad (5.73)$$

Elementy macierzy przejścia wyrażają się wzorami

$$G_{11} = \frac{1}{\Delta} (1 + \beta(A_{22} - A_{11}) - \beta^2 \det A) \quad (5.74)$$

$$G_{12} = \frac{1}{\Delta} (-2 \beta A_{12})$$

$$G_{21} = \frac{1}{\Delta} (-2 \beta A_{21})$$

$$G_{22} = \frac{1}{\Delta} (1 + \beta(A_{11} - A_{22}) - \beta^2 \det A)$$

gdzie $\Delta = \det(E + \beta A) = 1 + \beta(A_{11} + A_{22}) + \beta^2 \det A$ (5.75)

$$G(\Delta t, k) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

Jeżeli normę wektora $(a \ b)^T$ określimy $\|(a, b)^T\| = \max\{|a|, |b|\}$, wówczas normę macierzy określimy następująco

$$\|G\| = \max\{|G_{11}|+|G_{12}|, |G_{21}|+|G_{22}|\}. \quad (5.76)$$

Zgodnie z (5.74) i (5.75) warunek $|G_{11}|+|G_{12}| \leq 1$ daje ciąg nierówności

$$\frac{|1+\beta(A_{22}-A_{11})-\beta^2 \det A|+2\beta|A_{12}|}{1+\beta(A_{11}+A_{22})+\beta^2 \det A} \leq \frac{1+\beta|A_{22}-A_{11}|+\beta^2 \det A+2\beta|A_{12}|}{1+\beta(A_{11}+A_{22})+\beta^2 \det A} \leq 1, \quad (5.77)$$

$$|A_{22}-A_{11}|+2|A_{12}| \leq A_{11}+A_{22}. \quad (5.78)$$

Jeżeli są spełnione założenia twierdzenia, wówczas nierówności (5.78) i (5.77) są prawdziwe i tym samym zachodzi

$$|G_{11}|+|G_{12}| \leq 1. \quad (5.79)$$

Poprzez wykonanie analogicznych szacowań dowodzimy, że założenia twierdzenia pociągają prawdziwość nierówności

$$|G_{21}|+|G_{22}| \leq 1 \quad (5.80)$$

tym samym zachodzi (5.73), co kończy dowód twierdzenia.

Schemat (5.65) ma stałą macierz współczynników. Zatem, wystarczy tylko jeden raz obliczyć macierz odwrotną. Wadą natomiast tego schematu jest dosyć ostry warunek stabilności (5.69).

Schemat (5.66), jeżeli są spełnione założenia (5.72) jest bezwarunkowo stabilny. Jednak każda iteracja wymaga odwracania macierzy współczynników.

5.3.4. Modelowanie II zagadnienia brzegowego. Dla II zagadnienia brzegowego zastosowanie algorytmu linearyzacji w przedziałach czasowych, prowadzi do następnego zagadnienia liniowego

$$D_t^1 u(x,t) - D_x^1 (A(u(x,0)) D_x^1 u(x,t)) = f(x,t), \quad x \in \Omega, t \in (0, \Delta t), \quad (5.81)$$

$$u(x,0) = \gamma(x), \quad x \in \Omega,$$

$$D_x^1 u(x,t)|_{x=0} = \alpha(t), \quad t \in (0, \Delta t),$$

$$D_x^1 u(x,t)|_{x=L} = \beta(t), \quad t \in (0, \Delta t).$$

Wprowadzenia nowej zmiennej

$$v(x,t) = u(x,t) - x \cdot \alpha(t) + \frac{x^2}{2L} (\beta(t) - \alpha(t)), \quad (5.82)$$

sprowadza zagadnienie (5.81) do jednorodnego zagadnienia

$$D_t^1 v(x,t) - D_x^1 (\bar{A}(x) D_x^1 v(x,t)) = \bar{f}(x,t), \quad x \in \Omega, t \in (0, \Delta t), \quad (5.83)$$

$$v(x,0) = \bar{\gamma}(x), \quad x \in \Omega,$$

$$D_x^1 v(x,t)|_{x=0} = D_x^1 v(x,t)|_{x=L} = 0,$$

$$\text{gdzie } \bar{A}(x) = A(v(x,0) + x \cdot \alpha(0) + \frac{x^2}{2L} (\beta(0) - \alpha(0))), \quad (5.84)$$

$$\bar{f}(x) = f(x) - x \cdot \alpha(0) - \frac{x^2}{2L} (\beta(0) - \alpha(0)), \quad (5.85)$$

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - x \cdot \alpha'(t) - \frac{x^2}{2L} (\beta'(t) - \alpha'(t)) + D_x^1 (\bar{A}(x) (\alpha(t) + \frac{x}{L} (\beta(t) - \alpha(t))).$$

Jeżeli $A(u)$ jest funkcją wolnozmienną, stosujemy przybliżenie

$$\bar{f}(x,t) \approx f(x,t) - x \cdot \alpha'(t) - \frac{x^2}{2L} (\beta'(t) - \alpha'(t)) + \frac{1}{L} \bar{A}(x) (\beta(t) - \alpha(t)). \quad (5.86)$$

Zastosowanie dyskretyzacji zmiennej przestrzennej metodą Ritza-Galerkina, sprowadza zagadnienie (5.83) do układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} 5u_1' + u_2' + \frac{6}{h^2} A_1(u_1 - u_2) &= 6F_1 \\ u_{i-1}' + 4u_i' + u_{i+1}' + \frac{6}{h^2} A_i(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) &= 6F_i, \quad i=2, \dots, M-1, \\ u_{M-1}' + 5u_M' + \frac{6}{h^2} A_M(-u_{M-1} + u_M) &= 6F_M \\ u_i(0) &= \bar{f}(ih), \quad i=1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Układ ten otrzymano z układu (5.53), (5.54), po przyjęciu współczynników k_i równych zero. Pochodne po czasie w (5.87) aproksymujemy różnicami skończonymi. Zastosowanie aproksymacji (5.63) daje następujący schemat różnicowy

$$\begin{aligned} 5u_1^{p+1} + u_2^{p+1} &= 5u_1^p + u_2^p + 6rA_1(-u_1^p + u_2^p) + 6 \cdot \Delta t \cdot F_1^p, \\ u_{i-1}^{p+1} + 4u_i^{p+1} + u_{i+1}^{p+1} &= u_{i-1}^p + 4u_i^p + u_{i+1}^p + 6rA_i(u_{i-1}^p - 2u_i^p + u_{i+1}^p) + 6 \cdot \Delta t \cdot F_i^p, \\ u_{M-1}^{p+1} + 5u_M^{p+1} &= u_{M-1}^p + 5u_M^p + 6rA_M(u_{M-1}^p - u_M^p) + 6 \cdot \Delta t \cdot F_M^p, \\ u_i^0 &= \bar{f}(ih), \quad i=1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Natomiast zastosowanie aproksymacji (5.64) daje schemat różnicowy

$$\begin{aligned} (5E + 6rA_1)u_1^{p+1} + (E - 6rA_1)u_2^{p+1} &= 5u_1^p + u_2^p + 6\Delta t F_1^{p+1} \\ (E - 6rA_i)u_{i-1}^{p+1} + (4E + 6rA_i)u_i^{p+1} + (E - 6rA_i)u_{i+1}^{p+1} &= u_{i-1}^p + 4u_i^p + u_{i+1}^p + 6\Delta t F_i^{p+1} \\ (E - 6rA_M)u_{M-1}^{p+1} + (5E + 6rA_M)u_M^{p+1} &= u_{M-1}^p + 5u_M^p + 6\Delta t F_M^{p+1} \\ u_i^0 &= \bar{f}(ih), \quad i=1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Zmiany indeksów jak w (5.88).

Stabilność tych schematów została zbadana w p. 5.3.3.

5.3.5. Modelowanie III zagadnienia brzegowego. Zastosowanie algorytmu linearyzacji w przedziałach czasowych, dla quasiliniowego III zagadnienia brzegowego,

prowadzi do następujących zagadnień brzegowych:

$$D_t^1 u(x,t) - D_x^2 (A(u(x,0)) D_x^1 u(x,t)) = f(x,t), \quad x \in \Omega, t \in (0, \Delta T), \quad (5.90)$$

$$u(x,0) = \gamma(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(0,t) + B \cdot D_x^1 u(x,t) \Big|_{x=0} = \alpha(t)$$

$$u(L,t) + C \cdot D_x^1 u(x,t) \Big|_{x=L} = \beta(t).$$

Wprowadzenie nowej zmiennej

$$v(x,t) = u(x,t) - \alpha(t) - x^2 \cdot Z \cdot (\beta(t) - \alpha(t)), \quad (5.91)$$

sprowadza zagadnienie (5.90) do zagadnienia jednorodnego

$$D_t^1 u(x,t) - D_x^2 (\bar{A}(x) D_x^1 v(x,t)) = \bar{f}(x,t), \quad x \in \Omega, t \in (0, \Delta T), \quad (5.92)$$

$$v(x,0) = \bar{\gamma}(x), \quad x \in \Omega,$$

$$v(0,t) + C \cdot D_x^1 v(x,t) \Big|_{x=0} = v(L,t) + D \cdot D_x^1 v(x,t) \Big|_{x=L} = 0, \quad t \in (0, \Delta T),$$

gdzie

$$Z = (L^2 E - 2LC)^{-1}, \quad (5.93)$$

$$\bar{A}(x) = A(v(x,0) + \alpha(0) + x^2 Z (\beta(0) - \alpha(0))), \quad (5.94)$$

$$\bar{\gamma}(x) = \gamma(x) - \alpha(0) - x^2 Z \cdot (\beta(0) - \alpha(0)), \quad (5.95)$$

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \alpha'(t) - x^2 Z (\beta'(t) - \alpha'(t)) + D_x^2 (\bar{A}(x) \cdot 2 \cdot x \cdot Z \cdot (\beta(t) - \alpha(t))). \quad (5.96)$$

Jeżeli $A(u)$ jest wolnozmienną funkcją, można stosować przybliżenia

$$\bar{f}(x,t) \cong f(x,t) - \alpha'(t) - x^2 Z (\beta'(t) - \alpha'(t)) + 2 \bar{A}(x) Z (\beta(t) - \alpha(t)).$$

Dyskretyzacja zagadnienia (5.92), metodą Galerkiną, prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych (5.53), gdzie współczynniki k_i i Y_i oblicza się ze wzorów (5.42), (5.44) oraz (5.54).

Zastosowanie aproksymacji (5.63) dla równań (5.53) daje schemat

$$\begin{aligned} Y_1 u_1^{p+1} + u_2^{p+1} &= Y_1 u_1^p + 6rA_1(-Y_2 u_1^p + u_2^p) + 6\Delta t F_1^{p+1} \\ u_{i-1}^{p+1} + 4u_i^{p+1} + u_{i+1}^{p+1} &= u_{i-1}^p + 4u_i^p + u_{i+1}^p + 6rA_i(u_{i-1}^p - 2u_i^p + u_{i+1}^p) + 6\Delta t F_i^{p+1} \\ u_{M-1}^{p+1} + Y_3 u_M^{p+1} &= u_{M-1}^p + Y_3 u_M^p + 6rA_M(u_{M-1}^p - Y_4 u_M^p) + 6\Delta t F_M^{p+1} \\ u_i^p &= \bar{\gamma}(ih) \end{aligned} \quad (5.97)$$

gdzie wskaźniki i, p zmieniają się jak w (5.88).

Zastosowanie aproksymacji (5.64) dla równań (5.53) daje schemat

$$\begin{aligned} (Y_1 + 6rA_1) u_1^{p+1} + (E - 6rA_1) u_2^{p+1} &= Y_1 u_1^p + u_2^p + 6\Delta t F_1^{p+1}, \\ (E - 6rA_i) u_{i-1}^{p+1} + (4E + 6rA_i) u_i^{p+1} + (E - 6rA_i) u_{i+1}^{p+1} &= u_{i-1}^p + 4u_i^p + u_{i+1}^p + 6\Delta t F_i^{p+1}, \\ (E - 6rA_M) u_{M-1}^{p+1} + (Y_3 + 6rA_M) u_M^{p+1} &= u_{M-1}^p + Y_3 u_M^p + 6\Delta t F_M^{p+1}, \\ u_i^p &= \bar{\gamma}(ih) \end{aligned} \quad (5.98)$$

gdzie wskaźniki i, p zmieniają się jak w (5.88).

Rozważania dotyczące stabilności, przeprowadzone w p. 5.33 mają również zastosowanie do schematów (5.97) i (5.98).

Obećnie zostanie przedstawiony algorytm modelowania III zagadnienia brzegowego, z wykorzystaniem schematu (5.99).

Przyjmujemy oznaczenia i założenia wymienione w p. 4.23.

Zakładamy dodatkowo, że dane są funkcje $\alpha'(t), \beta'(t)$ oraz macierz B i C .

Oznaczmy

$$Y_1 = \text{diag}(y_{11}, y_{12}) \quad (5.99)$$

$$Y_2 = \text{diag}(y_{21}, y_{22})$$

$$Y_3 = \text{diag}(y_{31}, y_{32})$$

$$Y_4 = \text{diag}(y_{41}, y_{42})$$

W macierzy A_i będą przechowywane współczynniki zlinearyzowanego równania

$$A_i = \delta \cdot r \cdot A(ih)$$

Macierze $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i$ oznaczają parametry procedury BITRI, rozwiązujące układ postaci (4.111).

Algorytm.

0° Parametry formalne: $M, \tau, \Delta t_1, \Delta t_2, T, L$ ($\tau \equiv \Delta t$)

1° Obliczyć stałe współczynniki oraz nadać wartości początkowe wskaźnikom

$$h = L / (M + 1)$$

$$r = \tau / h^2$$

$$i_1, i_{t1}, i_{t2} = 0$$

$$t_1, t_{01}, t_{02} = 0.$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_{M+1} \end{bmatrix} = (hE - B)^{-1} \mathbb{1}, \quad \begin{bmatrix} k_M \\ k_{2M} \end{bmatrix} = -(hE + C)^{-1} \mathbb{1}$$

$$y_{11} = 5 - k_1 h, \quad y_{12} = 5 - k_{M+1} h,$$

$$y_{21} = 1 + k_1 h, \quad y_{22} = 1 + k_{M+1} h,$$

$$y_{31} = 5 + k_M h, \quad y_{32} = 5 + k_{2M} h,$$

$$y_{41} = 1 - k_M h, \quad y_{42} = 1 - k_{2M} h,$$

$$Z = (L^2 E + 2LC)^{-1}.$$

2° Obliczyć rozwiązanie początkowe

$$u_i = \gamma_i(ih) - \alpha(t_1) + (ih)^2 Z (\beta(t_1) - \alpha(t_1))$$

$$P = \alpha(t_1)$$

$$Q = \beta(t_1) - P$$

$$x = ih$$

$$u_i = \gamma(x) - P - x^2 Z Q \quad \left. \vphantom{u_i} \right\} i = 1, \dots, M.$$

3° Zlinearyzować równanie

a) obliczyć macierz współczynników

$$P = \alpha(t_1)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= ih \\ Y &= u_i + P + x^2 Z Q \\ A_i &= 6 \cdot r \cdot A(Y) \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, M,$$

b) obliczyć współczynniki dla procedury BITRI

$$\bar{B}_1 = Y_1 + A_1 Y_2,$$

$$\bar{B}_M = Y_3 + A_M Y_4,$$

$$\bar{A}_i \equiv \bar{C}_i = E - A_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$\bar{B}_i = 4E + A_i, \quad i = 2, \dots, M-1.$$

4° Krok iteracyjny

$$it = it + 1, \quad t_1 = it \cdot \tau$$

a) obliczenie funkcji $\bar{f}(x, t_1) = f(x, t_1) - d'(t_1) - x^2 Z (\beta'(t_1) - d'(t_1)) + 2\bar{A}(x) Z (\beta(t) - d(t))$

$$P = d'(t_1)$$

$$Q = \beta(t_1) - d(t_1)$$

$$S = \beta'(t_1) - P$$

$$x = ih$$

$$D_i = f(x, t_1) - P - x^2 Z \cdot S + 2 \cdot A_i \cdot Z \cdot Q \quad \left. \vphantom{D_i} \right\} i = 1, \dots, M$$

b) obliczanie prawych stron dla BITRI

$$\bar{D}_1 = Y_1 u_1 + u_2 + 6 \cdot \tau \cdot D_1$$

$$\bar{D}_i = u_{i-1} + 4u_i + u_{i+1} + 6 \cdot \tau \cdot D_i, \quad i = 2, \dots, M-1$$

$$\bar{D}_M = u_{M-1} + Y_4 u_M + 6 \cdot \tau \cdot D_M$$

c) obliczyć nowe rozwiązanie wywołując BITRI

5° Zamknięcie pętli

a) jeżeli $(t_1 - t_{01} < \Delta t_1)$ i $(t_1 - t_{02} < \Delta t_2)$ skok do 4°b) jeżeli $(t_1 - t_{02} < \Delta t_2)$ skok do 4°dc) $it_2 = it_2 + 1$

$$t_{02} = it_2 \cdot \Delta t_2$$

skalowanie rozwiązania

$$D_1 = u_1 - h \begin{bmatrix} k_1 \\ k_{M+1} \end{bmatrix}$$

$$D_{M+2} = u_M + h \begin{bmatrix} k_M \\ k_{2M} \end{bmatrix}$$

$$D_{i+1} = u_i, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$P = d(t_1)$$

$$x = (i-1)h$$

$$D_i = P + x^2 Z \cdot Q + D_i, \quad i = 1, \dots, M+2$$

wywołać WYNIK (D)

jeżeli $(t_1 > T)$, koniec obliczeń
 jeżeli $(t_1 - t_{01} < \Delta t_1)$ skok do 4°
 d) $it_1 = it_1 + 1$
 $t_{01} = it_1 \cdot \Delta t_1$
 skok do 3°

Algorytm dla schematów różnicowych (5.65), (5.66), (5.88) i (5.89) mają taką samą strukturę. Różnią się tylko sposobem obliczania współczynników oraz funkcji \bar{f} . Przedstawiony algorytm można zastosować do schematu (5.66), przyjmując macierze $B = C = \theta$.

6. WYKORZYSTANIE ANALOGOWEJ SIECI R-C DO MODELOWANIA PROCESU WYMIANY ENERGII I MASY

6.1. Linearyzacja i dyskretyzacja zagadnienia brzegowego

Model Łykowa (2.22) procesu wymiany energii i masy, dla zagadnienia quasiliniowego, można zapisać w następującej postaci

$$B(u) D_t^1 u(x,t) - D_x^1 (A(u) D_x^1 u(x,t)) = f(x,t) \quad (6.1)$$

$$x \in (0, L), t \in (0, T),$$

gdzie macierz współczynników $A(u)$ jest diagonalna.

Równanie (6.1) należy uzupełnić odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi (4.22) - (4.25). Zastosowanie algorytmu linearyzacji w przedziałach czasowych, dla równania (6.1), daje ciąg linearyzowanych zagadnień brzegowych postaci

$$\bar{B}(x) D_t^1 u(x,t) - D_x^1 (\bar{A}(x) D_x^1 u(x,t)) = f(x,t), x \in (0, L), t \in (0, \Delta T), \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = \gamma(x), x \in (0, L),$$

$$u(0, t) = \alpha(t), t \in (0, \Delta T),$$

$$u(L, t) = \beta(t), t \in (0, \Delta T),$$

gdzie $\bar{B}(x) = B(u(x, 0))$, $\bar{A}(x) = A(u(x, 0))$.

Dla zmiennej x wprowadzamy siatkę o kroku $h = L / (M - 1)$.

Aproksymacja pochodnych po x , według zależności (4.30), daje układ równań różniczkowych zwyczajnych.

$$B_i u_i' - (A_{i-\frac{1}{2}} (u_{i-1} - u_i) + A_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} - u_i)) / h^2 = f_i, i = 2, \dots, M-1 \quad (6.3)$$

$$u_i(0) = \gamma((i-1)h), i = 2, \dots, M-1,$$

$$u_1(t) = \alpha(t)$$

$$u_2(t) = \beta(t)$$

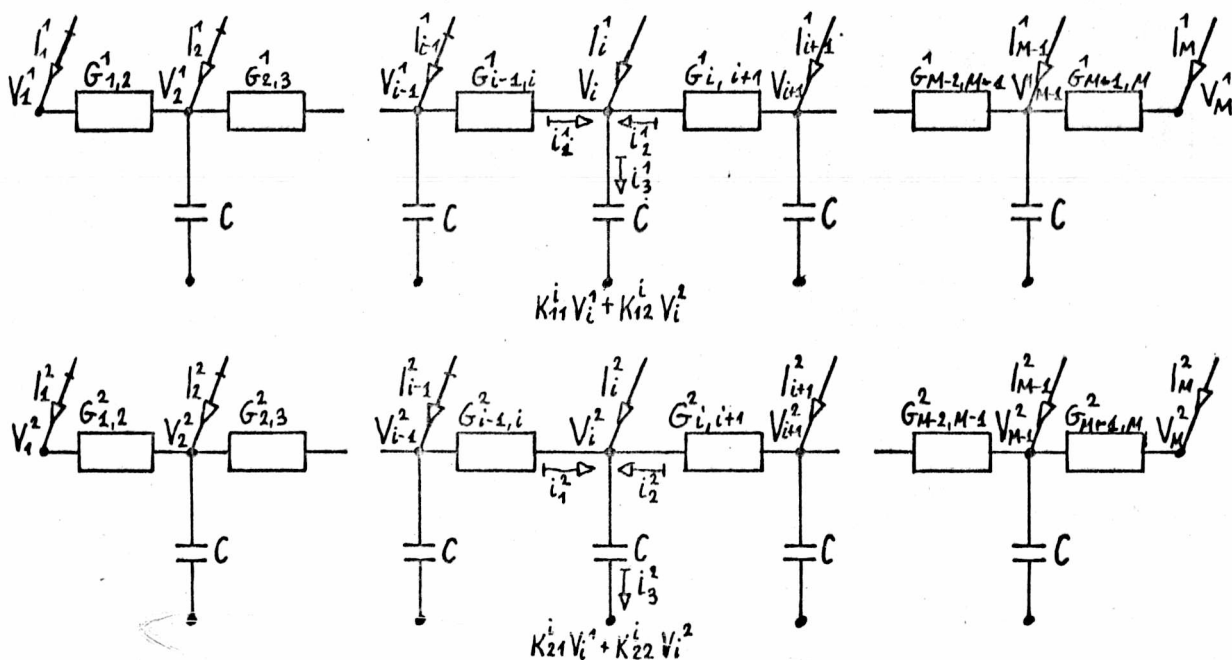
dla $t \in (0, \Delta T)$.

Współczynniki $A_{i+\frac{1}{2}}$, $A_{i-\frac{1}{2}}$ można określić wzorami (4.28) lub (4.40) i (4.41). Podobnie określamy współczynniki B_i oraz f_i . Można również określić te współczynniki, jako średnie całkowe w odpowiednich przedziałach o długości h .

Dla zagadnień brzegowych z warunkami brzegowymi II i III rodzaju, należy odpowiednio zmodyfikować lewe strony dwóch ostatnich wzorów w (6.3).

6.2 Model analogowy

Zagadnienie brzegowe (6.3) można modelować na sieci R-C. Schemat elektryczny modelu analogowego przedstawia rysunek 6.1. Na jednej sieci modeluje się pierwszą składową rozwiązania, na drugiej sieci składową drugą. Sprzężenie między sieciami następuje poprzez pojemności C , na które podaje się potencjał, będący kombinacją liniową potencjałów z obu sieci. Sprzężenia takie można zrealizować w prosty sposób przy pomocy wzmacniaczy operacyjnych.



Rys. 6.1. Schemat elektryczny modelu analogowego.

W i -tym węźle pierwszej siatki na podstawie I prawa Kirchoffa otrzymujemy

$$i_3 - i_1 - i_2 = i_i^1 \quad (6.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} i_1^1 &= (V_{i-1}^1 - V_i^1) G_{i-1,i}^1, \\ i_2^1 &= (V_{i+1}^1 - V_i^1) G_{i,i+1}^1, \\ i_3^1 &= C \cdot \frac{d}{d\tau} (V_i^1 - K_{11}^i V_i^1 - K_{12}^i V_i^2), \end{aligned} \quad (6.5)$$

τ - czas modelu analogowego.

Podobnie dla drugiej siatki

$$i_3^2 - i_4^2 - i_2^2 = l_i^2, \quad (6.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} i_1^2 &= (V_{i-1}^2 - V_i^2) G_{i-1,i}^2, \\ i_2^2 &= (V_{i+1}^2 - V_i^2) G_{i,i+1}^2, \\ i_3^2 &= C \frac{d}{d\tau} (V_i^2 - K_{21}^i V_i^1 - K_{22}^i V_i^2). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Równania (6.4) i (6.6), po uwzględnieniu zależności (6.5) i (6.7), dają równanie modelu elektrycznego

$$C(E - K_i) \frac{d}{d\tau} V_i - [G_i(V_{i-1} - V_i) + G_{i+1}(V_{i+1} - V_i)] = J_i \quad (6.8)$$

gdzie

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$G_i = \text{diag}(G_{i-1,i}^1, G_{i-1,i}^2) \quad (6.10)$$

$$l_i = (l_i^1 \quad l_i^2)^T. \quad (6.11)$$

Wprowadźmy współczynniki analogii

$$\begin{aligned} u &= C_v \cdot V \\ t &= C_\tau \cdot \tau \\ f &= C_f \cdot I \\ A_{i-\frac{1}{2}} &= C_G \cdot G_i \end{aligned} \quad (6.12)$$

C_τ jest skalarem, zaś C_v , C_G , C_f zakładamy, że są macierzami diagonalnymi.

W celu otrzymania warunków analogii modelu elektrycznego (6.8) i modelowanego procesu (6.3), podstawiamy zależności (6.12) do pierwszego z równań (6.3) i otrzymujemy

$$C_f^{-1} \frac{1}{C_\tau} C_v B_i \frac{dV_i}{d\tau} - C_f^{-1} \frac{1}{h^2} C_G C_v (G_i(V_{i-1} - V_i) + G_{i+1}(V_{i+1} - V_i)) = l_i. \quad (6.13)$$

Porównując (6.13) z (6.8), otrzymujemy warunki analogii

$$C_f^{-1} C_\tau^{-1} C_v B_i = C(E - K_i), \quad (6.14)$$

$$C_f^{-1} \frac{1}{h^2} C_G C_v = E. \quad (6.15)$$

Można przyjąć, że najpierw ustala się macierz współczynników C_v i C_G oraz stałą C_τ . Następnie z równań (6.14) i (6.15) wyznacza się współczynniki oraz macierz wzmocnień K .

$$C_i = \frac{1}{h^2} C_G C_v \quad (6.16)$$

$$K_i = E - \frac{h^2}{C \cdot C_T} C_G^{-1} B_i. \quad (6.17)$$

6.3. Modelowanie zagadnień brzegowych na analogowej siatce R-C

Sposób wykorzystania modelu analogowego, do modelowania quasiliniowych zagadnień brzegowych, zależy od właściwości eksploatacyjnych wykonanego modelu analogowego. Tworzenie podstaw konstrukcyjnych, takiego modelu wykracza poza zakres tej pracy. Dlatego zagadnienie to zostanie tylko ogólnie omówione. Wskazane byłoby, aby model posiadał sterowanie, umożliwiające jego pracę autonomiczną oraz alternatywnie pracę automatyczną z maszyną cyfrową. Analizatory pola HAF-1 i HAF-2, wykonane w Instytucie Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, posiadają takie możliwości. Jednak sieć, jaką one dysponowały była przystosowana do modelowania pojedynczego równania parabolicznego.

Modelowanie na analogowej sieci R-C przebiega w kilku etapach.

1) Ustalenie współczynników analogii 6.12 spełniających warunki zgodności.

2) Obliczyć wartość początkową rozwiązania

$$V_i(0) = C_v^{-1} u_i(0) = C_v^{-1} f((i-1)h), \quad i=1, \dots, M, \quad (6.18)$$

oraz wymuszenia na końcach sieci, zależne od warunków brzegowych.

3) Obliczyć zlinearyzowane współczynniki modelowanego procesu oraz parametry modelu elektrycznego

$$B_i = B(C_v \cdot V_i), \quad (6.19)$$

$$A_i = A(C_v \cdot V_i), \quad (6.20)$$

$$G_i = C_G^{-1} A_i, \quad (6.21)$$

$$K_i = E - \frac{h^2}{C \cdot C_T} C_G^{-1} B_i, \quad (6.22)$$

$$I_i = C_i^{-1} f_i. \quad (6.23)$$

4) Zbudować model analogowy o parametrach (6.21) i (6.22).

5) Zadać warunek początkowy (6.18) i odpowiednie warunki brzegowe oraz wymuszenia prądowe.

6) Uruchomić model analogowy i modelować proces w zadanym przedziale czasowym

$$\Delta \tau = C_T^{-1} \cdot \Delta T \quad (6.24)$$

7) Zamrozić proces i odczytać rozwiązania modelu V_i .

8) Powtarzać postępowanie od punktu 3, aż do uzyskania rozwiązania w chwili

$$\tau_0 = C_T^{-1} T \quad (6.25)$$

Algorytm ten można zmodyfikować, jeżeli chcemy parametry modelu dobrać z wyprzedzeniem. Wymaga to postępowania iteracyjnego. Ponieważ autor pracy, nie miał do dyspozycji modelu analogowego o strukturze sieci jak na rysunku 6.1., więc metoda ta nie została zbadana. Przeprowadzenie symulacji takiej metody w maszynie cyfrowej jest uzasadnione, jeżeli traktujemy tę symulację, jako badanie proponowanej metody. Natomiast symulowanie cyfrowe metody analogowej, w celu uzyskania rozwiązania zagadnień brzegowych, nie jest uzasadnione. Dlatego w rozdziale sódym, podano wyniki symulacji, której celem było zbadanie wrażliwości metody na zakłócenia losowe, związane z odczytem wyników i zadawaniem parametrów modelu.

7. TESTOWANIE SIATKOWYCH METOD MODELOWANIA QUASILINIOWEGO PROCESU WYMIANY ENERGII I MASY

7.1. Zadania testowe

Testowanie metod siatkowych opisanych w rozdziałach czwartym i piątym, ma na celu sprawdzenie słuszności algorytmu linearyzacji w przedziałach czasowych, słuszności wyprowadzonych warunków stabilności oraz zbadanie dokładności obliczeń prowadzonych w oparciu o te metody. Testowanie metody modelowania na analogowej sieci R-C, zostało ograniczone do zbadania wpływu błędu odczytywania wyników oraz błędów strojenia modelu, na wyniki rozwiązania. Do testowania wybrano quasiliniowy układ równań

$$D_t^2 u - A(u) D_x^2 u = 0, \quad x \in (0, 1), t \in (0, T), \quad (7.1)$$

gdzie

$$A(u) = \begin{bmatrix} 0.7 u^1 & -0.2 u^2 \\ 0.2 u^1 & 0.3 u^2 \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

$$u = (u^1 \ u^2)^T, \quad (7.3)$$

którego rozwiązaniem analitycznym dla warunku początkowego

$$u(x, 0) = \begin{bmatrix} \frac{x - x^2}{b_0} \\ \frac{x - x^2}{b_0} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

i zerowego warunku brzegowego

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (7.5)$$

jest funkcja

$$u(x,t) = \begin{bmatrix} \frac{x-x^2}{b_0+t} \\ \frac{x-x^2}{b_0+t} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

gdzie b_0 - jest stałą dodatnią, $(0,1)$ - odcinek, na którym poszukiwane jest rozwiązanie zagadnienia brzegowego.

Dla pierwszego zagadnienia brzegowego mamy więc

$$\alpha(t) = \beta(t) = 0. \quad (7.7)$$

Zamiast warunków brzegowych I rodzaju, można zadawać inne warunki brzegowe. Obliczmy w tym celu pochodną względem zmiennej x rozwiązania (7.6)

$$D_x^1 u(x,t) = \begin{bmatrix} \frac{1-2x}{b_0+t} \\ \frac{1-2x}{b_0+t} \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Dla warunków brzegowych II rodzaju, odpowiednie funkcje wymuszające wyrażają się wzorami

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_0+t} \\ \frac{1}{b_0+t} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{b_0+t} \\ \frac{-1}{b_0+t} \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Dla warunków brzegowych III rodzaju

$$B D_x^1 u(x,t) + u(x,t) \Big|_{x=0} = \alpha(t), \quad (7.11)$$

$$C D_x^1 u(x,t) + u(x,t) \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad (7.12)$$

funkcje wymuszające warunki brzegowe określimy następująco

$$\alpha(t) = B \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{b_0+t} \\ \frac{1}{b_0+t} \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

$$\beta(t) = C \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{b_0+t} \\ \frac{-1}{b_0+t} \end{bmatrix}. \quad 7.14$$

Przedstawione zadanie testowe ma tę zaletę, że znane jest jego rozwiązanie analityczne. Również jego współczynniki są nieliniowe, co spowoduje, że zadanie to będzie dobrym sprawdzianem proponowanych metod.

7.2. Programy testujące

Algorytmy rozwiązania zagadnień brzegowych zostały omówione szczegółowo w rozdziale czwartym i piątym. W oparciu o te algorytmy zbudowano trzy programy w języku FORTRAN 1900, realizujące algorytmy odpowiednio dla pierwszego, drugiego i trzeciego zagadnienia brzegowego. Dla każdego z zagadnień brzegowych, rozwiązanie uzyskuje się trzema metodami: metodą różnic skończonych dla schematu jawnego i niejawnego oraz metodą Ritza-Galerkina z wykorzystaniem liniowych elementów skończonych. Uzyskane w wyniku zastosowania tej metody układy równań różniczkowych zwyczajnych, rozwiązuje się stosując aproksymację pochodnych czasowych krokiem wstecz. Każda z trzech metod została napisana w postaci segmentu SUBROUTINE. Segment główny programu organizuje wywołanie kolejnych procedur. Parametrami każdej z metod są wartości $M, K, TAL, DT1, DT2, T$. Znaczenie tych parametrów zostało opisane w p. 4.23 z tym, że K oznacza ilość pierwszych kolejnych węzłów, dla których wyprowadza się wyniki.

Rozwiązanie zagadnienie brzegowego poszukuje się w przedziale czasowym $(0, T)$, z tym, że wyniki wyprowadza się z krokiem czasowym $DT2$. W skład wyników wchodzi: rozwiązanie, błędy procentowe rozwiązań w poszczególnych węzłach oraz błąd maksymalny.

Dla każdej składowej rozwiązania, w chwili $t_p = p \Delta t$, zdefiniowano normę rozwiązania

$$\|u^p\| = \max_i |u_i^p|, \quad (7.15)$$

błąd procentowy rozwiązania w węźle

$$\delta_i^p [\%] = 100 |\hat{u}_i^k - u_i^k| \cdot \|\hat{u}^p\|^{-1}, \quad (7.16)$$

gdzie δ_i^p - błąd procentowy w punkcie $(x_i, t_p) = ((i-1)h, p \Delta t)$,

\hat{u}_i^p - wartość rozwiązania analitycznego w punkcie (x_i, t_p) ,

u_i^p - wartość rozwiązania numerycznego w punkcie (x_i, t_p) ,

oraz błąd maksymalny

$$\delta_m = \max_i \delta_i^p. \quad (7.17)$$

Dla schematów niejawnych, w celu określenia warunków stabilności, wykorzystuje się stałą

$$\alpha_0 = \min \left\{ \frac{1}{A11}, \frac{1}{A22} \right\}.$$

Na podstawie (7.6) przyjmuje ona wartość

$$\alpha_0 = \frac{4 b_0}{0.7}. \quad (7.18)$$

W celu zbadania wrażliwości modelu analogowego na błędy spowodowane niedokładnym pomiarem rozwiązania oraz rozstrojeniem modelu elektrycznego, zasymulowano tę metodę w maszynie cyfrowej. Wymienione błędy uwzględnia się podając zakłócenie losowe o rozkładzie normalnym. Zakłóca się rozwiązanie V_i rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej zero i odchyleniu σ_1 oraz parametry modelu G_i i K_i rozkładem normalnym o wartości średniej równej zero i odchyleniu standardowym σ_2 .

7.3 Wyniki testowania metod siatkowych

7.3.1. Testowanie metod rozwiązywania I zagadnienia brzegowego. Badając właściwości opisanych metod siatkowych zamodelowano zagadnienie (7.1) - (7.5) przyjmując stałe $b_0 = 10$ i $b_0 = 1$ oraz czas modelowania $T = 1$ i $T = 0,1$. Metody te badano dla wielu zestawów parametrów, przyjmując niezależnie ilość węzłów

$$M = 11, 16, 21, 26, 31, 41, 51, \quad (7.19)$$

krok linearyzacji $\Delta t_1 = 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,10$ (7.20)
oraz krok obserwacji procesu

$$\Delta t_2 = 0,05; 0,1. \quad (7.21)$$

Wartość kroku czasowego najczęściej zadawano według zależności

$$\tau = \frac{\tau_0}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, n_0, \quad (7.22)$$

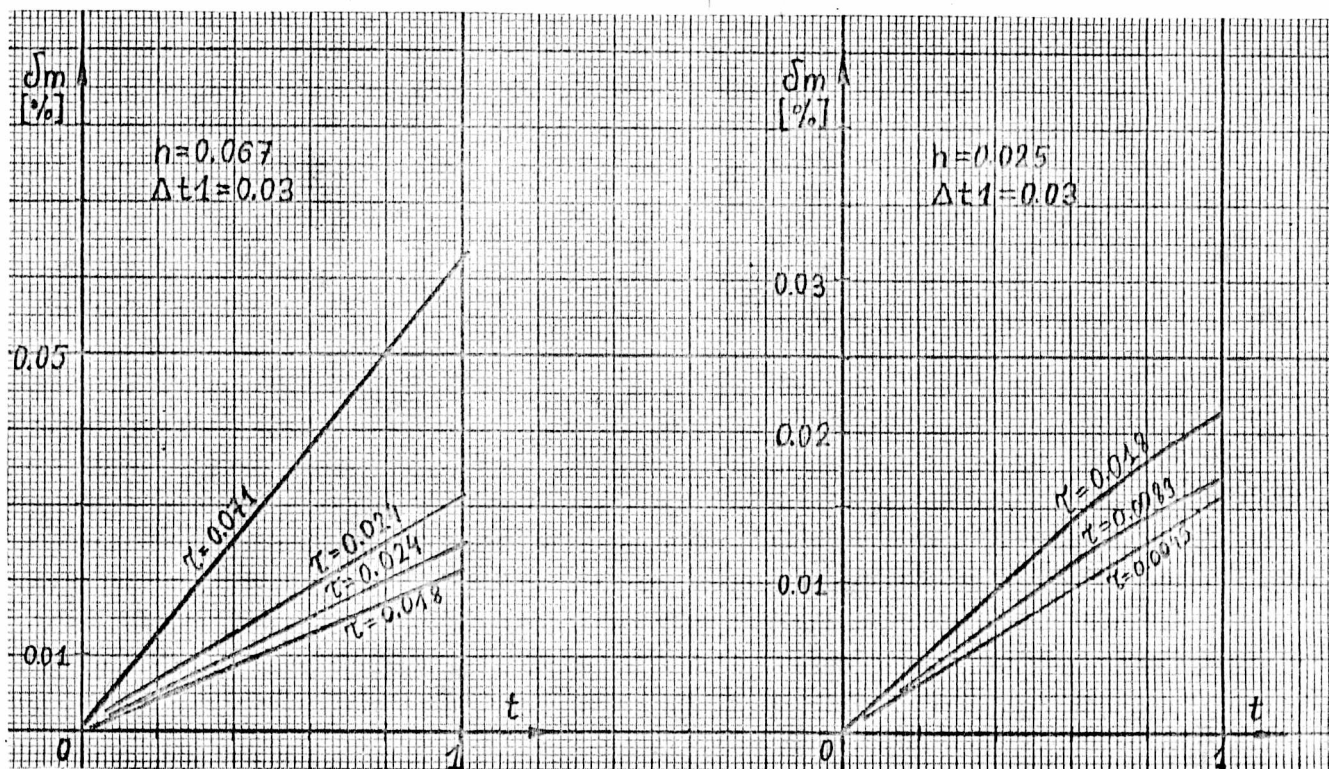
gdzie τ_0 jest pewnym krokiem początkowym.

Przystępujemy obecnie do prezentacji wyników testowania kolejnych metod. W badaniu zbieżności schematów jawnych, stabilnych warunkowo, istotne jest spełnienie warunku stabilności. Aby wyrazić ilościowo spełnienie warunku stabilności, został wprowadzony na wykres krok czasowy τ^* , który jest maksymalnym krokiem czasowym, spełniającym warunek stabilności (4.72). Po uwzględnieniu zależności (7.18) otrzymamy

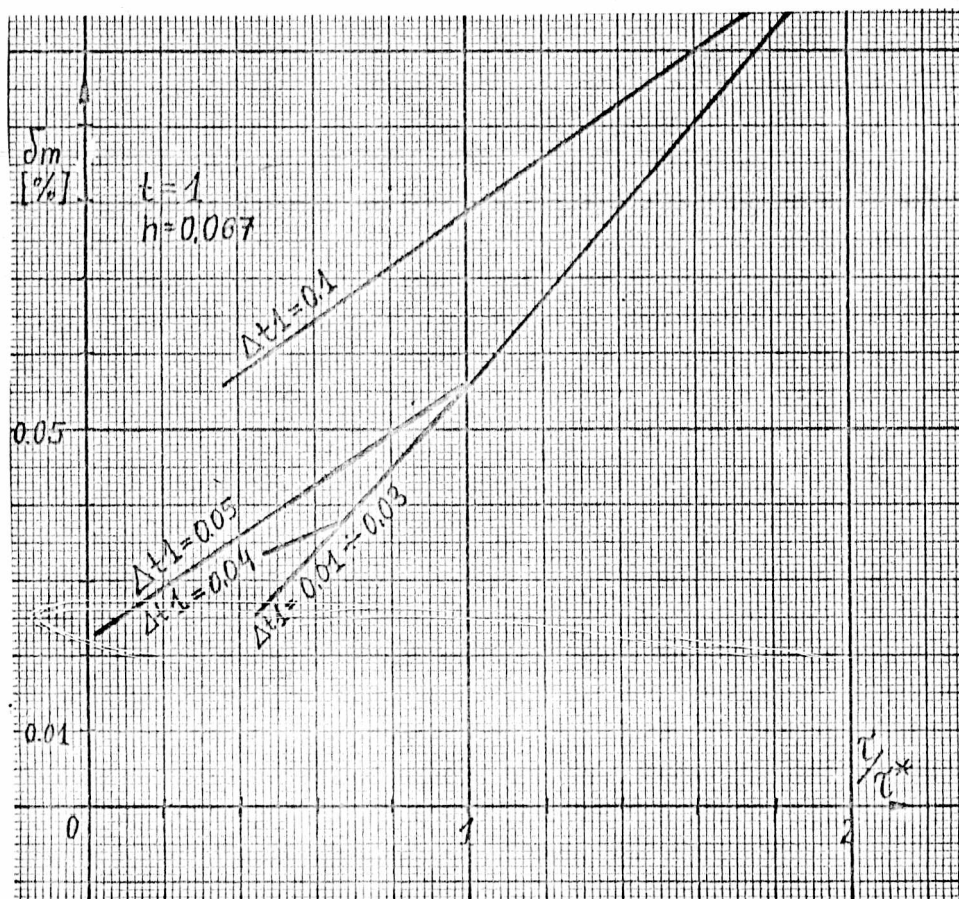
$$\tau^* \cong 1,43 \cdot b_0 \cdot h^2. \quad (7.23)$$

Modelowane zagadnienie brzegowe jest quasiliniowe, zbadano więc szczegółowo wpływ algorytmu linearyzacji dobór parametru na dokładność rozwiązania.

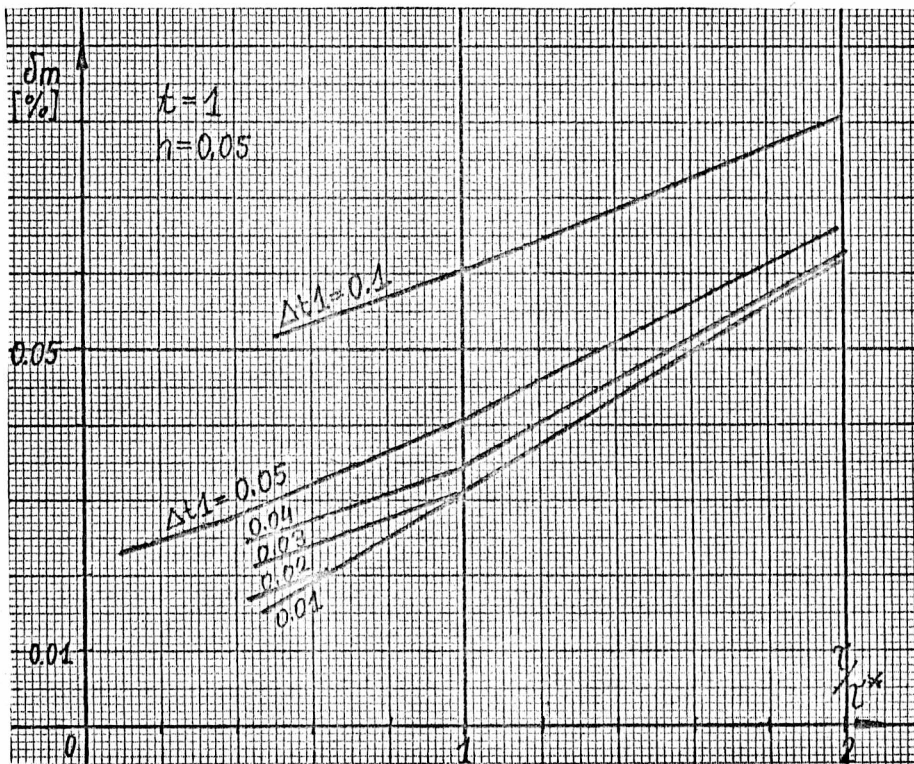
Rysunek 7.1. ilustruje przebieg błędu δ_m , zdefiniowanego wzorem (7.17), dla kilku parametrów h i τ .



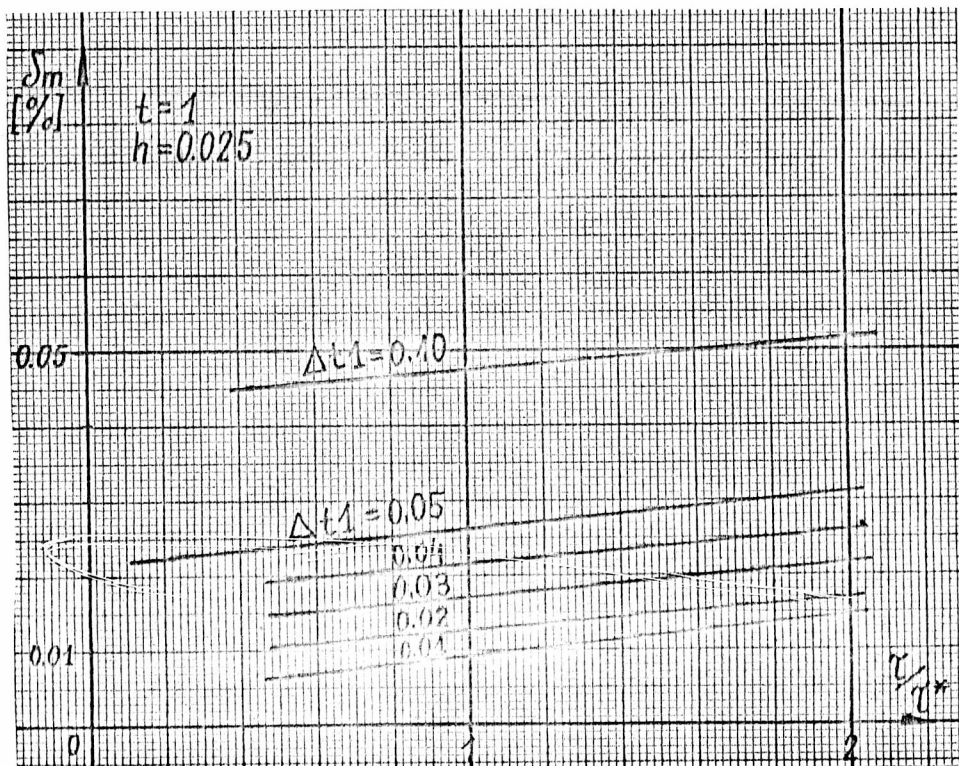
Rys. 7.1. Zależność błędu od czasu trwania procesu
a) dla $h=0,067$ $M=16$, b) dla $h=0,025$ $M=41$.



Rys. 7.2. Zależność błędu od kroku czasowego dla $h=0,067$ i $\Delta t_1 = \text{cnst.}$



Rys. 7.3, Zależność błędu Δm od kroku czasowego dla $h=0,05$ i $\Delta t_1 = \text{const}$.

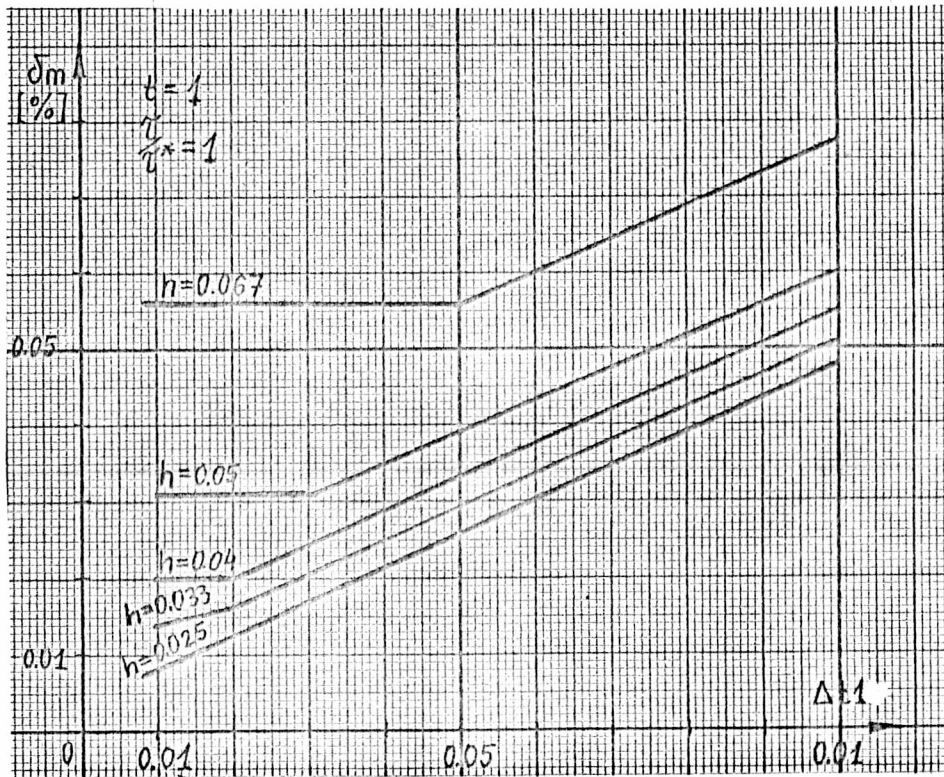


Rys. 7.4. Zależność błędu od kroku czasowego dla $h=0,025$ i $\Delta t_1 = \text{const}$.

Łatwo zauważyć, że szybkość narastania błędu maleje wraz ze zmniejszaniem się kroku czasowego τ . Wartość τ dobrano według zależności (7.23) w ten sposób, że tylko największa z wartości τ nie spełnia warunku stabilności.

Kolejne rysunki (7.2) - (7.4) ilustrują zależność błędu maksymalnego δ_m od kroku linearyzacji Δt_1 i od kroku czasowego kolejno dla $M=16, 21$ i 41 .

Dla wszystkich par $(h, \Delta t_1)$ błąd rozwiązania maleje wraz ze zmniejszaniem kroku czasowego τ . Można zauważyć jednak, że duży wpływ na wielkość błędu ma krok linearyzacji Δt_1 . Natomiast krok czasowy τ , jeżeli już spełnia warunek stabilności, wpływa na ten błąd w mniejszym stopniu. Dla małych wartości h , wraz ze zmniejszaniem się kroku czasowego, błąd maleje nieznacznie.



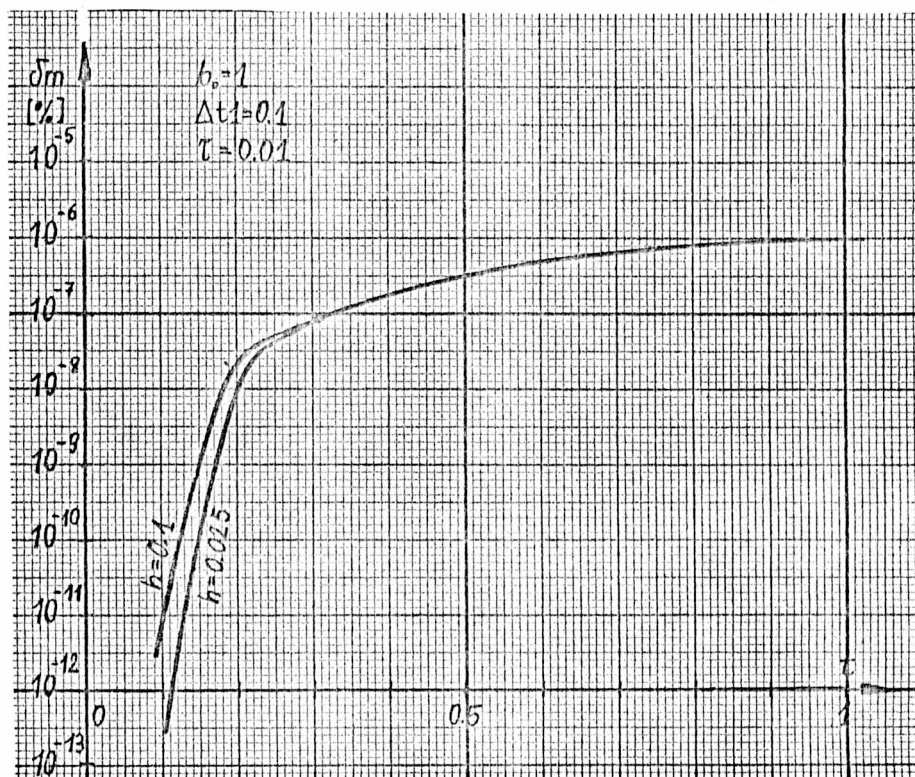
Rys. 7.5. Zależność błędu δ_m od kroku linearyzacji dla $T=1$, $\tau/\tau^* = 1$, $h = \text{const}$.

Z wykresów tych wynika, że nie warto zmniejszać zbyt kroku czasowego, ponieważ prowadzi to do wydłużenia czasu obliczeń, nie dając istotnej poprawy dokładności rozwiązania.

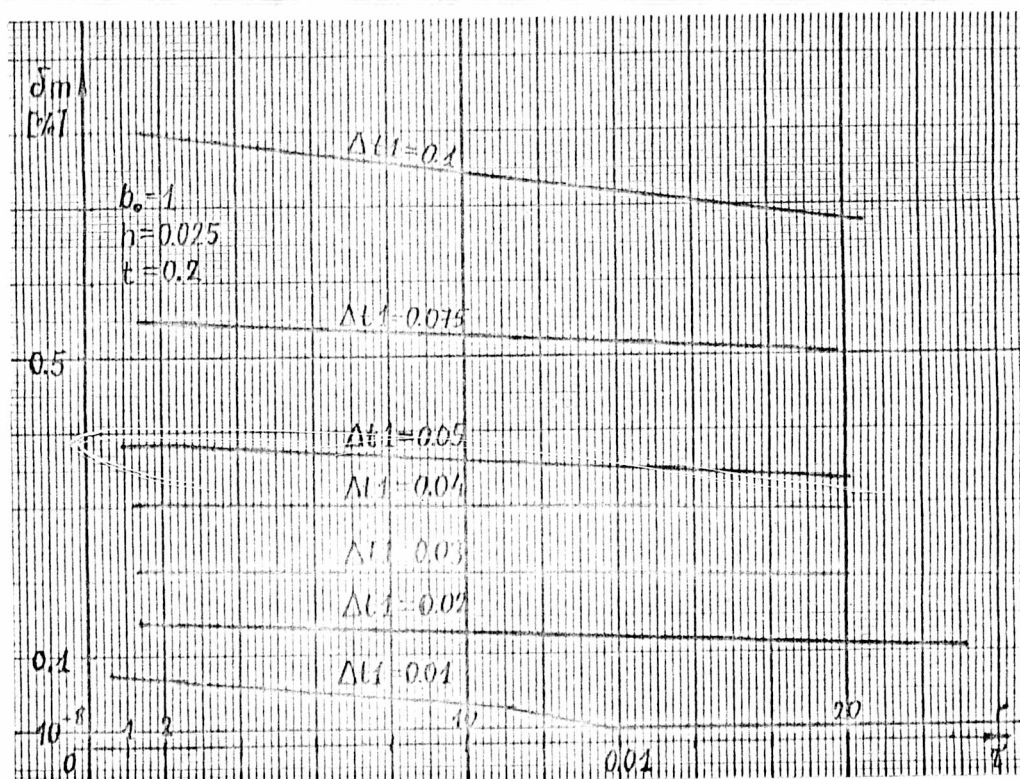
Na rysunku (7.5) pokazana jest zależność błędu rozwiązania od kroku linearyzacji, dla ustalonych wartości h . Przyjęto krok czasowy, równy wartości τ^* , określonej wzorem (7.23).

W zbadanych przypadkach zaobserwowano silną zależność błędu roz-

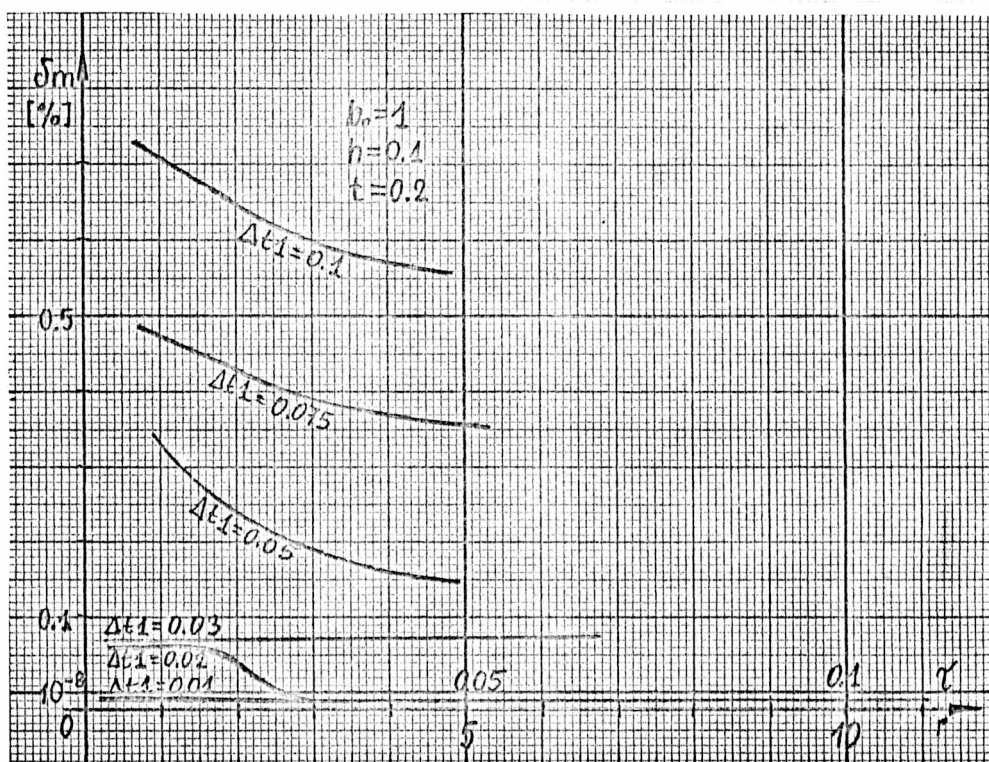
wiązania od wielkości przedziału linearyzacji Δt_1 . Przy zadawaniu parametru $\Delta t_1 < \tau$ błąd ma wartość stałą, ponieważ działanie algorytmu opisanego w punkcie 4.2.3 jest takie same, jak dla $\Delta t_1 = \tau$.



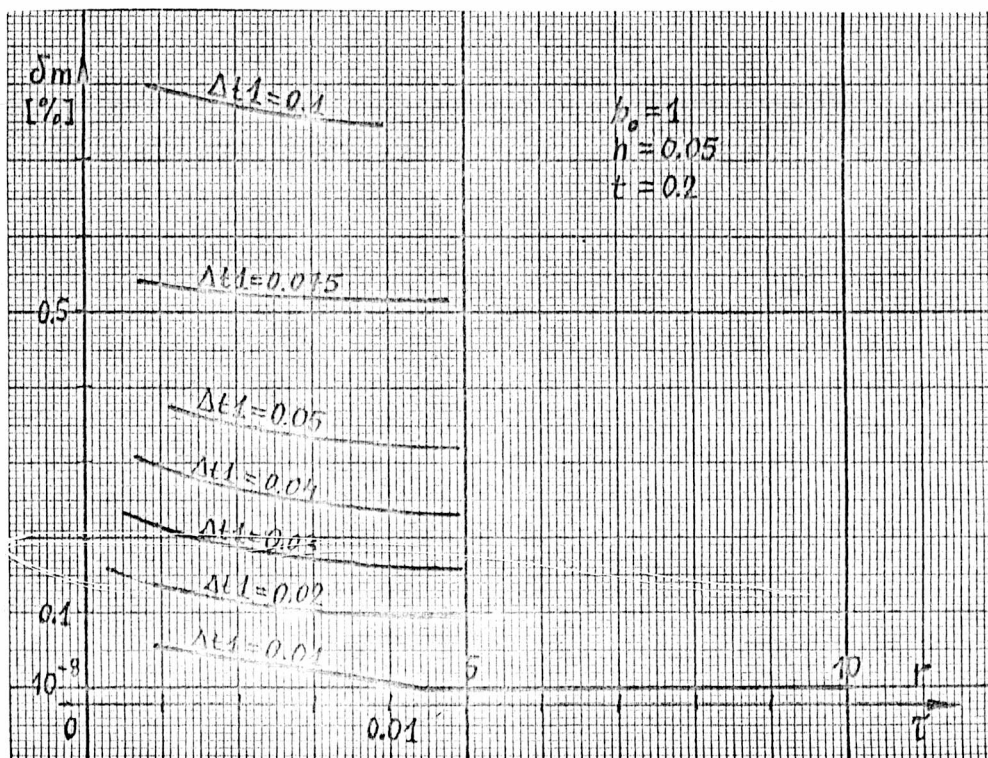
Rys. 7.6. Zależność błęd δ_m od czasu trwania procesu t , dla $\tau = 0,01$, $\Delta t_1 = 0,1$ i $h = \text{const}$.



Rys. 7.7. Zależność błędu rozwiązania od wielkości kroku czasowego dla $h = 0,025$, $\Delta t_1 = \text{const}$.

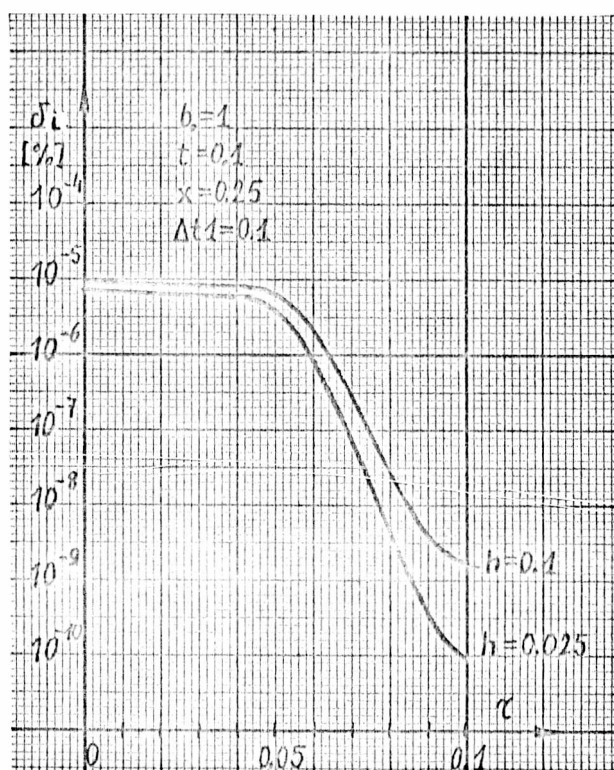


Rys. 7.8. Zależność błędu rozwiązania od wielkości kroku czasowego ζ dla $h=0,10$, $\Delta t_1 = \text{const}$.



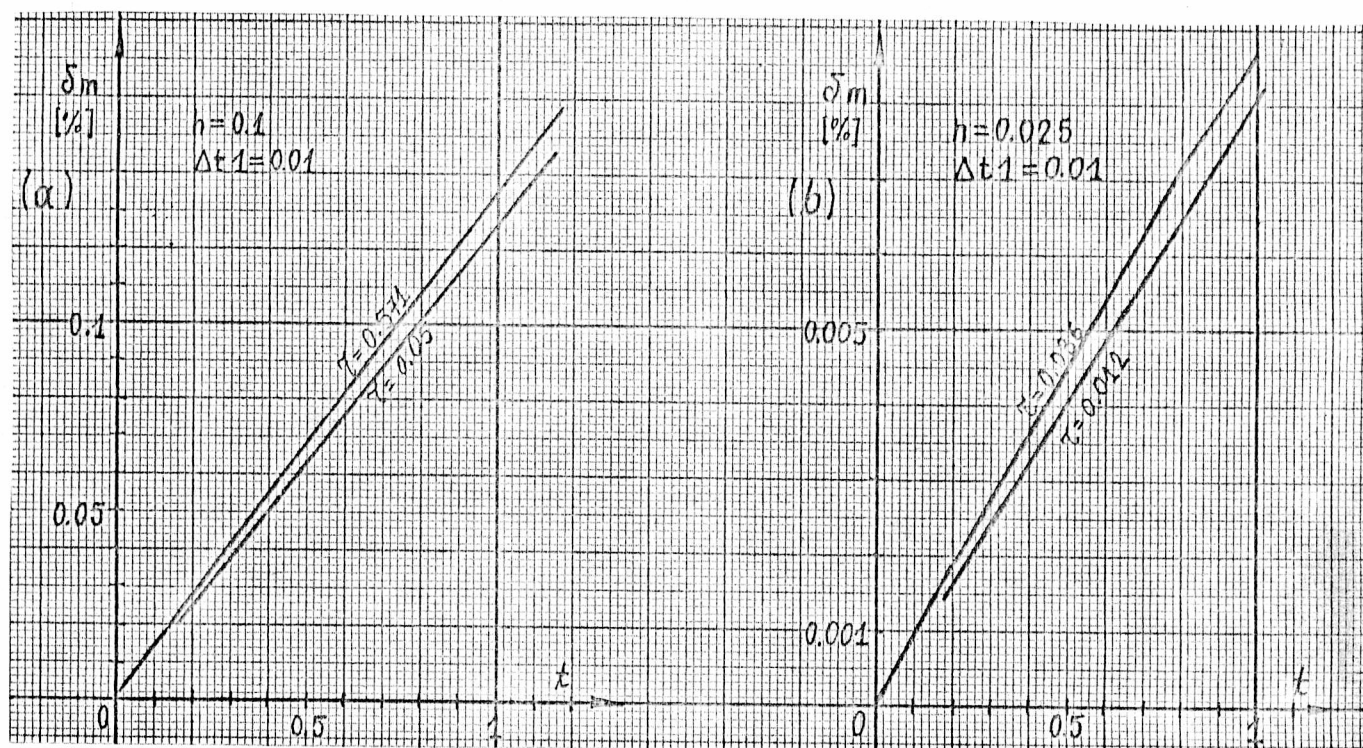
Rys. 7.9. Zależność błędu rozwiązania od wielkości kroku czasowego ζ dla $h=0,05$, $\Delta t_1 = \text{const}$.

Zależność błędu rozwiązania od czasu trwania procesu, dla schematu niejawnego pokazano na rysunku 7.6. Zauważamy, że rozwiązanie, uzyskane w pierwszych krokach czasowych jest obarczone bardzo małym błędem, rzędu 10^{-12} . Zmniejszenie kroku przestrzennego h , daje poprawę dokładności, zwłaszcza w pierwszych krokach czasowych. Na kolejnych rysunkach 7.7 - 7.10 pokazano zależność błędu rozwiązania od kroku czasowego dla różnych zestawów wartości h i Δt . Obserwujemy, że błędy rozwiązań maleją, wraz ze wzrostem kroku czasowego τ . Zauważamy również, że dla małych wartości Δt występuje gwałtowne zmniejszenie się błędu rozwiązania, o kilka rzędów wielkości. Następnie błąd szybko rośnie. Aby pokazać ten efekt, na rysunkach 7.7 - 7.9 oś błędów ma nierównomierną skalę. Przyczyną tej "anomalii" jest wprowadzony do modelowania algorytm linearyzacji w przedziałach czasowych. Jeżeli krok linearyzacji jest stosunkowo duży, wówczas ciąg zlinearyzowanych zagadnień brzegowych (4.2) - (4.3) ma rozwiązanie różniące się od rozwiązania wyjściowego zagadnienia (4.1). Zmniejszając krok siatki, uzyskujemy rozwiązania zbieżne do rozwiązania zagadnienia zlinearyzowanego (4.2) - (4.3). Widzimy, że skok wartości błędu rozwiązania występuje dla $\tau \approx \Delta t$, a więc wtedy, gdy każda iteracja jest poprzedzona obliczeniem współczynników. Ten sam efekt pokazano na rysunku 7.10, przyjmując na osi błędów skalę logarytmiczną.

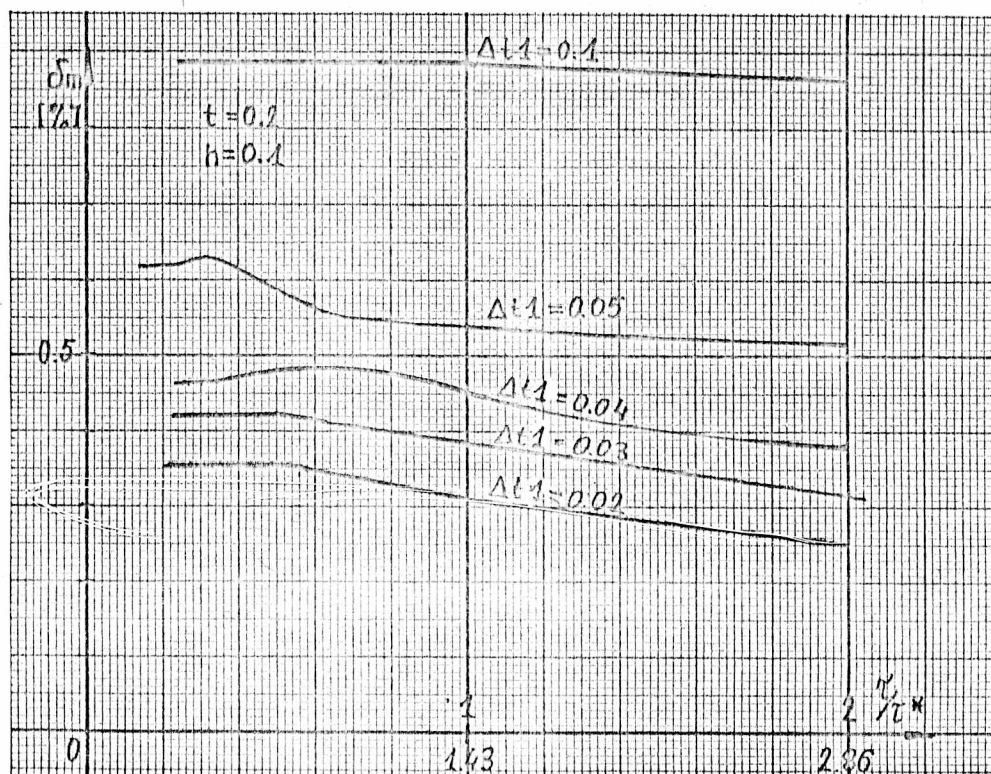


Rys. 7.10. Zależność błędu rozwiązania od kroku czasowego w punkcie $x=0,25$ dla $\Delta t=0,1$ i $h=\text{const}$.

Przystępujemy obecnie do prezentacji wyników testowania metody Ritza-Galerkina. Na rysunku 7.11 pokazano zależność błędu rozwiązania od czasu trwania procesu, dla różnych zestawów wartości h i τ .

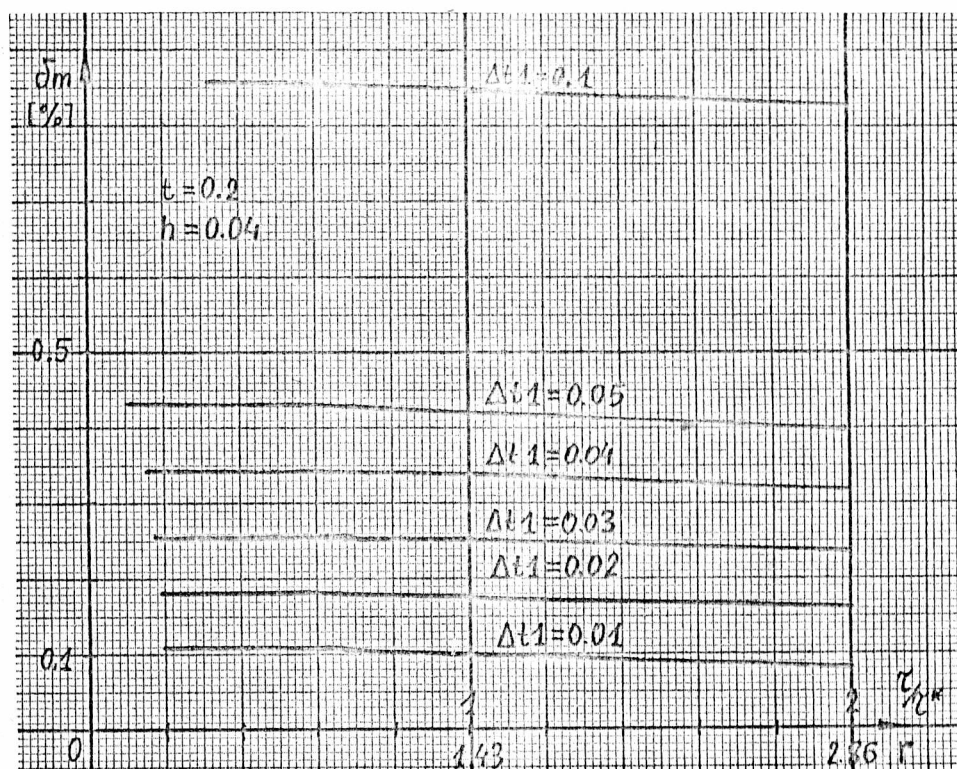


Rys. 7.11. Zależność błędu rozwiązania od czasu trwania procesu dla $\Delta t_1 = 0,01$, $\tau = \text{const}$, a) dla $h=0,1$, b) dla $h=0,025$.

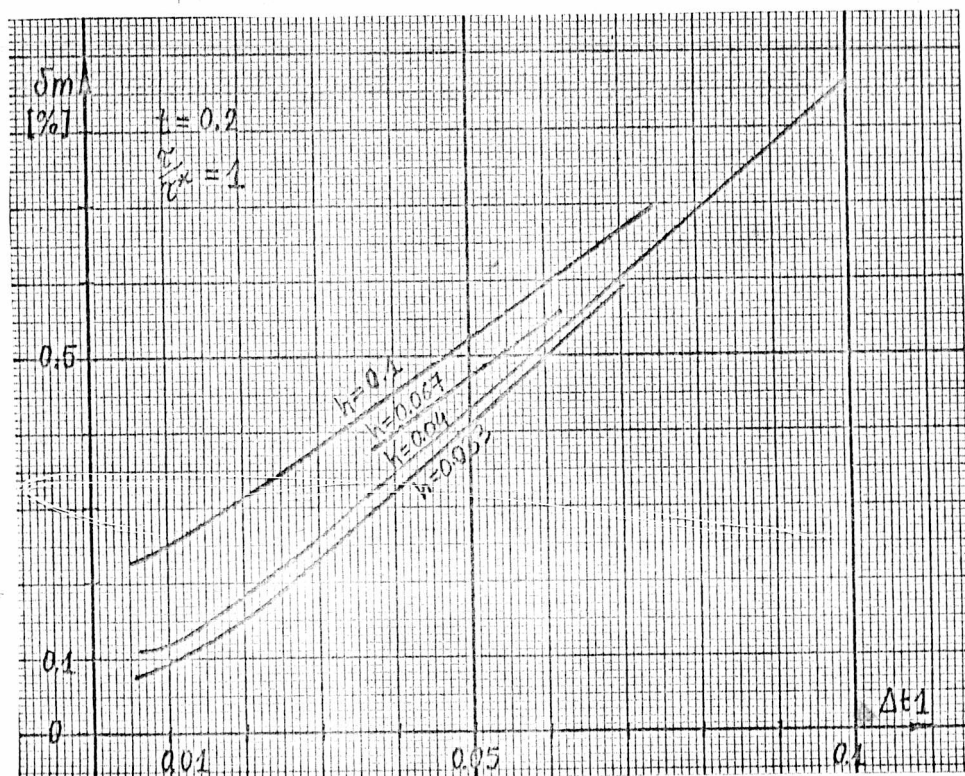


Rys. 7.12. Zależność błędu rozwiązania od kroku czasowego dla $h=0,1$, $\Delta t_1 = \text{const}$.

Zauważymy, że dla ustalonego kroku przestrzennego h , błędy zmniejszają się nieznacznie wraz ze zmniejszaniem się kroku czasowego τ . Natomiast przy zmniejszaniu się kroku przestrzennego, błąd szybko maleje.



Rys. 7.13. Zależność błędu rozwiązania od kroku czasowego dla $h=0,04$, $\Delta t_1 = \text{const}$.



Rys. 7.14. Zależność błędu rozwiązania od kroku linearyzacji Δt_1 dla $\tau = \tau^*$, $h = \text{const}$.

Na wykresach 7.12 i 7.13 pokazano zależność błędu rozwiązania od kroku czasowego dla różnych par h i Δt . Obserwujemy silną zależność błędu rozwiązania od kroku linearyzacji Δt oraz nieznaczną zależność od kroku czasowego. Na wykresach tych wielkość kroku czasowego τ odnoszono do kroku τ^* wyrażonego wzorem (7.23).

Na rysunku 7.14 pokazano wpływ kroku linearyzacji Δt na wielkość błędu rozwiązania, dla różnych wartości h . Przyjęto przy tym dodatkowo $\tau = \tau^*$. Z wykresów 7.12 i 7.13 wynika, że przyjęcie wartości $\tau < \tau^*$ praktycznie nie zmieniałoby przebiegu wykresów na rysunku 7.14.

Na zakończenie tego podpunktu, zostaną przytoczone rezultaty symulacji modelowania i zagadnienia brzegowego na analogowej siatce R-C. Celem symulacji było zbadanie wpływu losowych zmian parametrów modelu i losowego zakłócania pomiaru rozwiązania, na dokładność metody. W symulacji wykorzystano biblioteczne generatory niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym.

Odchylenie standardowe zmiennej losowej zakłócającej parametry modelu analogowego oznaczono przez σ_1 , zaś przez σ_2 oznaczono odchylenie standardowe zmiennej losowej zakłócającej pomiar. Metodę zasymulowano kilkakrotnie dla różnych wartości parametrów początkowych generatorów losowych. Na tej podstawie obliczono estymatory wartości średniej i wariancji maksymalnego błędu rozwiązania. Zasymulowana sieć R-C miała 10 węzłów. Otrzymano wartość średnią błędu równą zero.

Odchylenia standardowe σ maksymalnego błędu rozwiązania zestawiono w tabeli.

Tabela 7.1. Wartość odchylenia standardowego σ maksymalnego błędu rozwiązania dla $\sigma_1, \sigma_2 = \text{const}$.

$\sigma_2 \backslash \sigma_1$	0.001	0.005	0.010
0.001	0.13	0.87	2.3
0.005	0.28	2.3	6.8
0.01	1.5	7.3	11.2

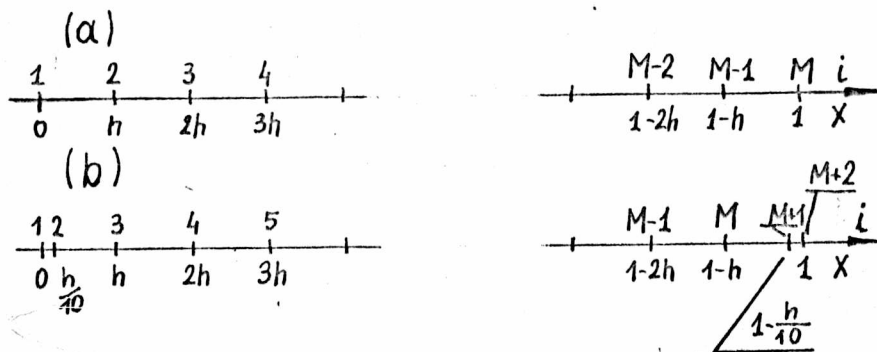
7.3.2. Testowanie metod rozwiązywania II i III zagadnienia brzegowego

Omawiając aproksymację warunków brzegowych II i III rodzaju w punkcie 4.2.1 zauważono, że aproksymacja różnicowa tych warunków prowadzi do obniżania rzędu aproksymacji. W przypadku metody różnic skończonych, warunki brzegowe są zastępowane schematami (4.44) i (4.45) lub (4.46) i (4.47). W metodzie Ritza-Galerkina konstruuje się odpowiednie funkcje bazowe. We wszystkich jednak przypadkach wartość pochodnej u_x na odcinku $(0, h)$ jest jednoznacznie wyznaczona (zwykle ma stałą wartość) przez wartość pochodnej w punkcie $x=0$, Podobnie w przedziale $(1-h, 1)$. W przeprowadzonych eksperymentach, uzyskiwano bardzo duże błędy rozwiązania. Zwykle już po kilku krokach czasowych, błąd na brzegu obszaru osiągał wartość 100%. Natomiast wewnątrz obszaru błąd rozwiązania był o kilka rzędów mniejszy. Zmniejszanie kroku przestrzennego, jedynie mogło opóźnić o kilka kroków moment osiągnięcia przez rozwiązanie błędu 100%.

Aby rozwiązywać zagadnienia brzegowe z warunkami brzegowymi II i III rodzaju, została zastosowana wzdłuż osi x siatka nierównomierna. Nierównomierność polega na wprowadzeniu dodatkowego węzła w odległości

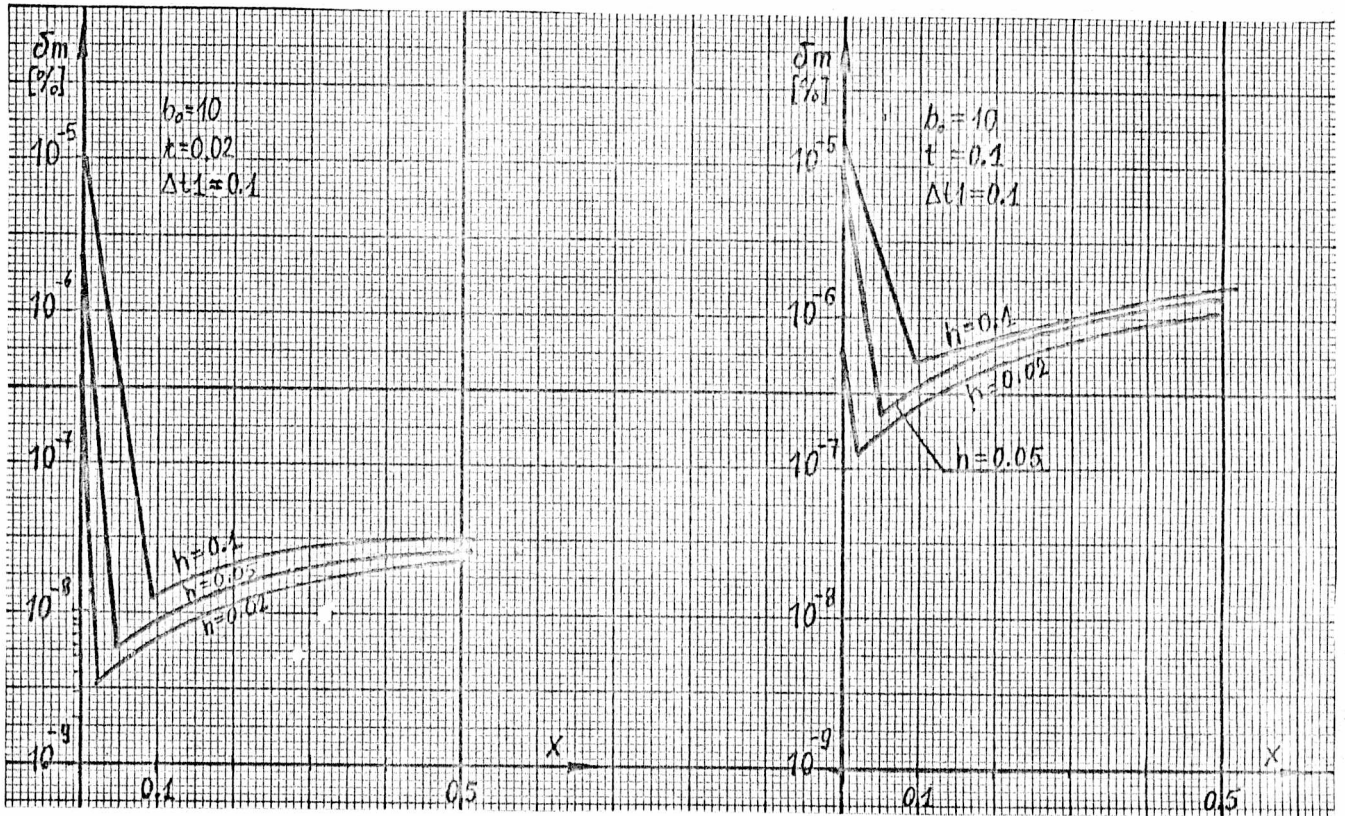
$$h_0 = 0.1 \cdot h$$

od brzegu obszaru. Siatki równomierną i nierównomierną wraz z numeracją węzłów pokazano na rysunku 7.15

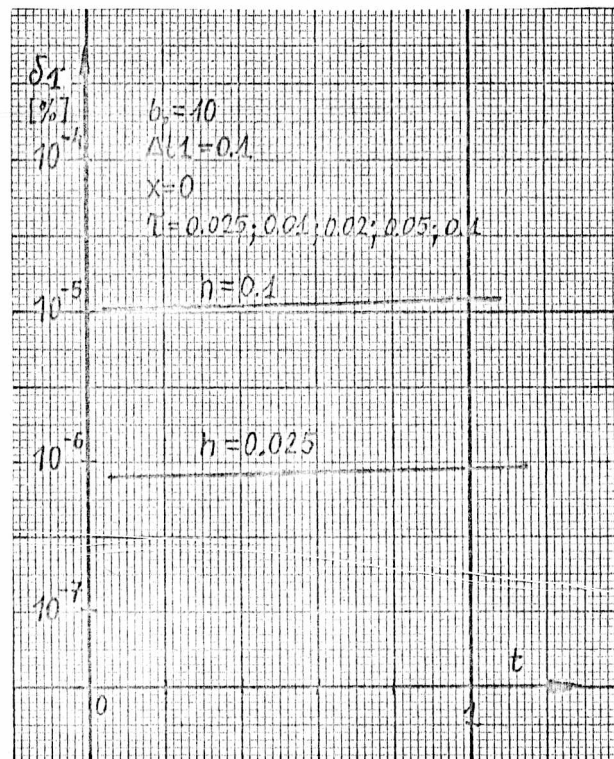


Rys. 7.15. Równomierna a) i nierównomierna b) siatka wzdłuż osi x .

Dla takiej nierównomiernej siatki zbadano wpływ kroku przestrzennego na wielkość błędu rozwiązania.



Rys. 7.16. Rozkład błędu rozwiązania wzdłuż osi x
 a) dla $t = 0.02$ i b) dla $t = 0.1$ przy $h = \text{const}$.



Rys. 7.17. Zależność błędu rozwiązania na brzegu obszaru ($x = 0$)
 od czasu trwania procesu dla $h = \text{const}$, $\Delta t_1 = 0.1$ i $\tau \in (0.005, 0.1)$

Na rysunku 7.16 pokazano rozkład błędu wzdłuż osi x . Podobnie jak w przypadku siatki równomiernej, największe wartości błędów rozwiązania występują na brzegach obszaru, jednak wartość tego błędu jest o siedem rzędów wielkości mniejsza. Zauważmy również, że dla dużych wartości h , błąd na brzegu obszaru jest o kilka rzędów większy od błędów w środku obszaru.

Rozkład błędu na brzegu obszaru w funkcji czasu trwania procesu pokazano na rysunku 7.17. Na wykresach nie zaznaczono wartości kroku czasowego, ponieważ zmiana wartości τ w zakresie $0,005 - 0,1$ nie wpływała na zmianę wyników.

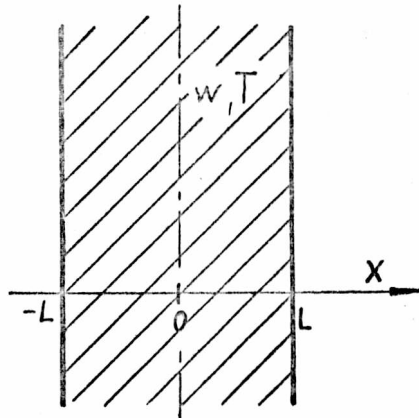
8. ZASTOSOWANIE METOD SIATKOWYCH DO SYMULACJI CYFROWEJ PROCESU SUSZENIA PRZEGRODY BUDOWLANEJ

8.1. Przedstawienie problemu

Proces suszenia jest procesem złożonym, w którym oddziałują na siebie proces dyfuzji wody i proces przewodzenia ciepła. W procesach technologicznych zachodzi potrzeba uzyskania odpowiedniego przebiegu procesu. Z jednej strony dążymy do skrócenia czasu suszenia, z drugiej strony należy unikać lokalnego przesuszenia i przegrzania, które mogą doprowadzić do zapieczenia porów i pęknięć. W większości wypadków proces suszenia jest sterowany "na wyczucie", na podstawie dużego doświadczenia, nie jest znana dokładnie dynamika procesu. Podobnie większość parametrów opisujących proces suszenia, a zwłaszcza oddziaływanie otoczenia na powierzchnię suszonego obiektu, można wyznaczyć jedynie badając istniejący już układ. Jednak symulacja takiego procesu, pozwoli na analizę wielu wariantów procesu technologicznego. Celem symulacji będzie zbadanie wpływu temperatury i wilgotności powietrza oraz warunków wentylacji na przebieg procesu suszenia.

8.2. Model matematyczny procesu suszenia przegrody budowlanej

Proces suszenia opisuje rozkład dwóch wielkości zawartości wilgoci w (x, t) oraz temperatury $T(x, t)$. Zawartość wilgoci jest zdefiniowana jako iloraz masy wody zawartej w szkielecie ciała porowatego do masy suchego szkieletu. Będziemy poszukiwać rozkładu tych wielkości w przegrodzie budowlanej pokazanej na rysunku 8.1.



Rys. 8.1. Przekrój przez przegrodę budowlaną jednorodną.

Proces suszenia opisuje układ równań różniczkowych cząstkowych

$$D_t^1 \begin{bmatrix} w(x,t) \\ T(x,t) \end{bmatrix} = D_x^1 \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_m & a_m \delta_1 \\ \frac{\xi r}{c_q} \alpha_m & \alpha_q + \frac{\xi r}{c_q} a_m \delta_1 \end{bmatrix} D_x^1 \begin{bmatrix} w(x,t) \\ T(x,t) \end{bmatrix} \right\} \quad (8.1)$$

gdzie: w - zawartość wilgoci (kg/kg)

T - temperatura bezwzględna (K)

α_m - współczynnik wyrównania zawartości wilgoci (m^2/s)

α_q - współczynnik wyrównania temperatury (m^2/s)

δ_1 - współczynnik termodyfuzji (K^{-1})

ξ - ciepło parowania ($J kg^{-1}$)

c_q - ciepło właściwe (właściwa pojemność cieplna) ($J kg^{-1} K^{-1}$)

ξ - współczynnik odprowadzania wody

oraz zachodzi

$$\alpha_q = \frac{\lambda_q}{c_q \gamma_0} \quad 8.2$$

gdzie λ_q - współczynnik przewodzenia ciepła ($W m^{-1} K^{-1}$)

γ_0 - masa właściwa ($kg m^{-3}$)

Zakładamy dalej, że z obydwu stron przegrody panują jednakowe warunki atmosferyczne, co pozwala założyć symetrię przebiegu procesu oraz przyjęcie w środku przegrody gradientów równych zero. Otrzymujemy stąd warunek brzegowy dla $x=0$,

$$\begin{aligned} D_x^1 w &= 0, \\ D_x^1 T &= 0. \end{aligned}$$

Na granicy ośrodków zachodzą równania wynikające z ciągłości strumienia ciepła i potencjału wilgoci [35],[52]:

$$\alpha_m D_x^1 w(L,t) + \alpha_m \delta_1 D_x^1 T(L,t) + \beta [w(L,t) - \frac{c_m}{c_{mp}} w_p] = 0, \quad (8.3)$$

$$-\lambda_q D_x^1 T(L,t) + \alpha (T_p - T(L,t)) - (1-\xi) \gamma_0 \beta (w(L,t) - \frac{c_m}{c_{mp}} w_p) = 0,$$

gdzie: β - współczynnik przejmowania masy (ms^{-1})

α - współczynnik przejmowania ciepła ($\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$)

c_m - właściwa pojemność substancji ($^{\circ}\text{M}^{-1}$)

oraz c_{mp} , T_p , w_p oznaczają odpowiednio właściwą pojemność substancji dla powietrza, temperaturę powietrza i zawartość wilgoci powietrza.

Na podstawie wyników badań laboratoryjnych przeprowadzonych dla cegły o składzie: glina 29,5%, szamot 70%, ciekłe szkło 0,5% [34] uzyskano wartości stałych oraz funkcje aproksymujące współczynniki równań (8.1), (8.2)

$$\rho = 2.26 \cdot 10^6 [\text{J kg}^{-1}],$$

$$\gamma_0 = 1846 [\text{kg m}^{-3}],$$

$$\alpha_m = 1.21 \cdot 10^{-9} / (2019.8 \cdot T^{-1.31} - 6.22 w) [\text{m}^2 \text{s}^{-1}],$$

$$c_q = 4187 (0.226 + w) [\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$$

$$\lambda_q = (-0.0020543 \cdot T^2 + 1.424477 \cdot T - 242.2546) [\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}],$$

$$c_m = 5.17 \cdot 10^{-4} [^{\circ}\text{M}^{-1}],$$

$$\delta_1 = (0.075 - w / (-2.976 + 0.016 \cdot T)) [\text{K}^{-1}].$$

Parametry powietrza dla kilku wartości temperatury i wilgotności względnej zestawiono w tabeli 8.1.

Tabela 8.1. Wartości zawartości wilgoci w_p oraz właściwej pojemności substancji c_{mp} powietrza.

T	Wilgotność względna %									
	20		30		40		50		60	
	w_p	100 c_{mp}	w_p	100 c_{mp}	w_p	100 c_{mp}	w_p	100 c_{mp}	w_p	100 c_{mp}
$^{\circ}\text{C}$	—	$^{\circ}\text{M}^{-1}$	—	$^{\circ}\text{M}^{-1}$	—	$^{\circ}\text{M}^{-1}$	—	$^{\circ}\text{M}^{-1}$	—	$^{\circ}\text{M}^{-1}$
20	0.0034	0.013	0.0045	0.0167	0.006	0.0227	0.0075	0.0275	0.009	0.0361
40	0.01	0.032	0.015	0.0517	0.0195	0.0667	0.024	0.09	0.029	0.11
45	0.016	0.0577	0.025	0.0937	0.0325	0.109	0.04	0.148	0.049	0.20
55	0.02	0.073	0.031	0.12	0.042	0.163	0.0525	0.187	0.064	0.224
60	0.027	0.089	0.04	0.13	0.054	0.185	0.068	0.239	0.084	0.342

8.3. Algorytm obliczeń i wyniki symulacji

Symulację procesu przeprowadzono wykorzystując do obliczeń metodę różnic skończonych, schemat niejawny. Ponieważ w symulowanym procesie występują warunki brzegowe III rodzaju, zastosowano siatkę nierównomierną pokazaną na rysunku 7.15. Warunek brzegowy (8.3) zapisano w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \alpha_m & \alpha_m \delta_1 \\ 0 & \lambda q \end{bmatrix} \cdot D_x^{-1} \begin{bmatrix} w \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ (1-\varepsilon) \gamma_0 \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \frac{c_m}{c_{mp}} w_p \\ (1-\varepsilon) \gamma_0 \beta \frac{c_m}{c_{mp}} w_p + \alpha T_p \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

oraz aproksymowano schematem różnicowym

$$-\bar{A}_{M+2} u_{M+1}^{p+1} + \bar{B}_{M+2} u_M^{p+1} = h_0 \bar{D}_{M+2} \quad (8.5)$$

gdzie

$$\bar{A}_{M+2} = \begin{bmatrix} \alpha_m & \alpha_m \delta_1 \\ 0 & \lambda q \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_{M+2} = \bar{A}_{M+2} + h_0 \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ (1-\varepsilon) \gamma_0 \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

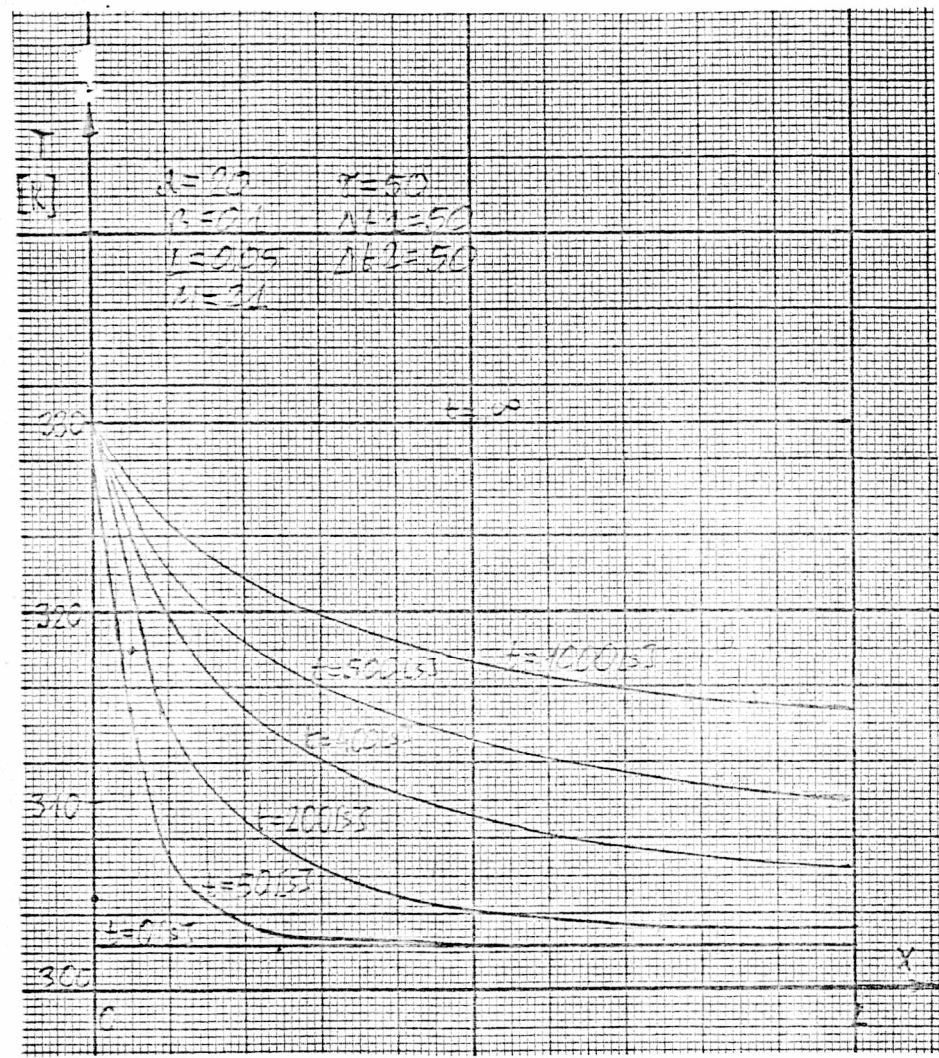
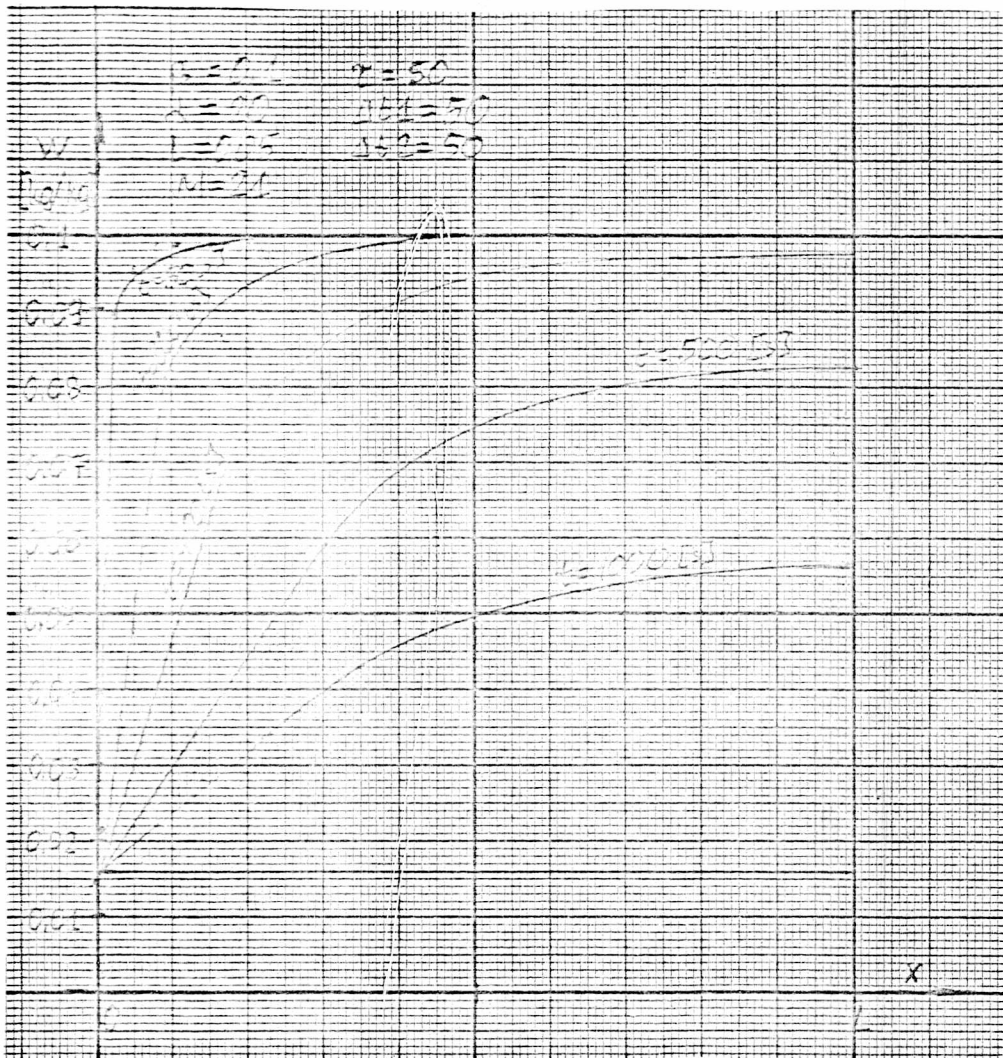
$$\bar{D}_{M+2} = \begin{bmatrix} \beta \frac{c_m}{c_{mp}} w_p \\ (1-\varepsilon) \gamma_0 \beta \frac{c_m}{c_{mp}} w_p + \alpha T_p \end{bmatrix}$$

$$u_i^p = \begin{bmatrix} w((i-1)h, p \Delta t) \\ T((i-1)h, p \Delta t) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 3, 4, \dots, M, M+2,$$

$$u_2^p = \begin{bmatrix} w(h_0, p \Delta t) \\ T(h_0, p \Delta t) \end{bmatrix}$$

$$u_{M+1}^p = \begin{bmatrix} w(L-h_0, p \Delta t) \\ T(L-h_0, p \Delta t) \end{bmatrix}$$

Obliczenia przeprowadzono dla kilku zestawów par parametrów $\tau, h, \Delta t$. Przyjęto krok $\tau = \Delta t$ i zbadano zmiany rozwiązania przy zmniejszaniu kroków siatki. Obliczenia wykonano dla $M=6, 11, 16, 21, 41$. Stwierdzono, że przyjęcie ilości węzłów $M=21$ daje wynik różniący się od rozwiązania dla $M=41$ dopiero na trzeciej cyfrze znaczącej wyniku. Wynik symulacji przedstawiono graficznie na rysunku 8.2. Ponieważ proces jest symetryczny względem środka przegrody, rozwiązania pokazano dla $x \in (0, L)$.



Rys. 8.2. Rozkład temperatury w przegrodzie budowlanej dla $M=21$.

9. WNIOSKI

W pracy zaproponowano ogólne metody rozwiązywania zagadnień granicznych dla quasiliniowych układów równań silnie parabolicznych, opisujących proces wymiany masy i energii. Pozwalają one tworzyć proste i efektywne algorytmy numeryczne rozwiązywania tych zagadnień wykorzystując metody stosowane dla zagadnień liniowych. Badano możliwość zastosowania schematów różnicowych, elementów skończonych oraz systemu hybrydowego z analogową siatką R-C do symulacji procesu wymiany ciepła i masy.

W wyniku badań modelu matematycznego udowodniono, że proces wymiany masy i energii jest opisywany układem quasiliniowych silnie parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych. Stwierdzenie to ma istotne znaczenie praktyczne, ponieważ ta klasa równań jest stosunkowo dobrze zbadana. Znane twierdzenia o rozwiązaniach zagadnień granicznych dla układów silnie parabolicznych, podają warunki poprawnego postawienia zadania analizy i pozwalają zastosować metody przybliżone poszukiwania tych rozwiązań.

Stabilność schematów różnicowych dla zagadnień quasiliniowych badano w oparciu o metody opracowane dla zagadnień liniowych. Było to możliwe dzięki udowodnionemu twierdzeniu o stabilności schematów różnicowych dla zagadnień quasiliniowych, tworzonych z użyciem algorytmu linearyzacji w przedziałach czasowych. Zbadano dokładnie dwa schematy różnicowe wzorowane na schematach różnicowych dla równania przewodnictwa ciepła. Udowodniono twierdzenia algebraiczne, które wykorzystując szczególną postać macierzy przejścia dla operatorów różnicowych aproksymujących silnie paraboliczne układy równań różniczkowych cząstkowych, sprowadzają badanie stabilności tych operatorów, do badania wartości własnych macierzy współczynników równania różniczkowego. Rozważenie tylko dwóch schematów różnicowych nie jest ograniczeniem zastosowania tej metody. Wymienione twierdzenia można stosować również do schematów różnicowych opartych na innych szablonach.

Zbadano również możliwość zastosowania metody elementów skończonych do symulacji procesu wymiany masy i energii. Zaproponowana konstrukcja tworzenia bazy w przestrzeni rozwiązań przybliżonych, zachowuje takie własności rozwiązań jak rząd aproksymacji i zbieżność. W metodzie tej zastosowano algorytm linearyzacji w przedziałach czasowych. Dyskretyzację zagadnienia wyjściowego przeprowadzono

wykorzystując warunek ortogonalności Galerkina. Zaletą tego podejścia, w stosunku do metody minimalizacji funkcjonału, jest prosty proces dyskretyzacji wyjściowego zagadnienia granicznego, prowadzący do zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. Zbieżność rozwiązania uzyskanego tą metodą do rozwiązania dokładnego zapewnia poprawnie postawione zadanie analizy oraz odpowiednia konstrukcja bazy w przestrzeni rozwiązań.

Wykorzystanie systemu hybrydowego do symulacji zadania anlizy dla procesu wymiany masy i energii zbadano w wąskim zakresie. Został zaproponowany model sieci analogowej R-C wykorzystującej multiplikację pojemności. Autor nie dysponował rzeczywistym modelem analogowym, więc zasymulował metodę w maszynie cyfrowej. Został zbadany wpływ zakłóceń losowych w modelu analogowym na uzyskane rozwiązanie. Doświadczenia z dotychczas wykonanymi tego typu systemami hybrydowymi wskazują, że jest to jeden z bardziej istotnych parametrów systemu.

Ograniczeniem pracy jest brak prostej i efektywnej metody szacowania błędu otrzymanych rozwiązań przybliżonych. Jest to jednak wspólna wada wszystkich metod siatkowych symulacji procesów o stałych rozłożonych. Przedstawiona metoda szacowania błędu rozwiązania na podstawie dokładności aproksymacji jest mało efektywna, gdyż znacznie zawyża szacowanie błędu.

Opierając się na przedstawionych w pracy rozważaniach teoretycznych oraz wynikach testu można sformułować kilka uwag, przyczyniających się do optymalnego wykorzystania przedstawionych metod.

- 1^o We wszystkich przetestowanych metodach na wielkość błędu rozwiązania istotnie wpływał algorytm linearyzacji w przedziałach czasowych. Wielkość przedziału linearyzacji równań, należy uzależniać od rzędu wzrostu współczynników równania względem rozwiązania.
- 2^o W metodzie różnic skończonych z zastosowaniem schematu jawnego nie należy zbytnio zmniejszać kroku czasowego, gdyż prowadzi to do znacznego wzrostu czasu obliczeń i nie daje istotnego wzrostu dokładności. Wystarczy dobierać krok czasowy tak, aby spełnić warunek stabilności.
- 3^o W metodzie różnic skończonych z wykorzystaniem schematu niejawnego dobór kroków siatki i długość przedziału linearyzacji należy uzależnić od współczynników równania. Optymalnie jest przyjąć krok czasowy równy długości przedziału linearyzacji. Wielkość zaś ostatniego należy ustalić eksperymentalnie, obserwując zmiany rozwiązania przybliżonego.

4° Rozwiązując zadanie analizy z warunkami brzegowymi II i III rodzaju należy w zasadzie zrezygnować z siatki równomiernej.

Błędy spowodowane aproksymacją warunków brzegowych na tej siatce przewyższają o kilka rzędów wielkości błędy rozwiązań wewnątrz obszaru. Zagęszczenie siatki przy brzegu obszaru prawie wyeliminowało wpływ błędów aproksymacji warunków brzegowych.

Przedstawione w pracy uwagi są oczywiście tylko sugestiami. Wybór metody oraz dobór parametrów metody siatkowej zależy zawsze od specyfiki zadania i decyzja musi opierać się na wiedzy i doświadczeniu prowadzącego obliczenia.

Pokazany w pracy przykład praktycznego wykorzystania metody różnic skończonych do symulacji procesu suszenia, wskazuje na możliwość szerokiego stosowania tych metod w pracach o charakterze projektowym, do rozwiązania zadania analizy. W przypadku zadania syntezy /jeżeli nie jest wymagana zbyt duża dokładność/ wygodniej jest stosować metodę hybrydową z siatką R-C.

Wyrażam podziękowanie mojemu Promotorowi doc. dr inż. Ludwikowi Żebrowskiemu za opiekę i cenne spostrzeżenia oraz Kolegom z Instytutu Cybernetyki Technicznej, których uwagi były pomocne w czasie powstawania rozprawy doktorskiej. Szczególne podziękowanie pragnę wyrazić Koledze Andrzejowi Jabłońskiemu i Zbigniewowi Zajdzie.

mgr inż. Antoni Izworski

Raport złożono w Redakcji I-6

VII 1981 r.

10. LITERATURA

- [1] Ames W.F.: Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Mathematics in Science and Engineering, vol. 18, Academic Press, New York 1965.
- [2] Auer A.: Modelowanie analogowe procesów o stałych rozłożonych. PWN, Warszawa 1976.
- [3] Bekey G.A.; Karplus W.,J.: Hybrid Computation. John Willy Sons Inc.,New York /tłum. ros. Moskwa 1970/.
- [4] Bubnicki Z.: Identyfikacja obiektów sterowania. PWN Warszawa 1974.
- [5] Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych. PWN , Warszawa 1960.
- [6] Douglas J.: The Application of Stability Analysis of the Numerical Solution of Quasilinear Parabolic Differential Equations. Trans. of the Amer. Math. Soc.,vol. 89,1958.
- [7] Ejdelman S.D.: Paraboličeskije sistemy. Izd. Nauka, Moskva 1964
- [8] Ekkert E.R.: Vvedenije v teoriju teplo - i massoobmena. Gosenergoizdat. , Moskva - Leningrad 1957.
- [9] Evans G.W.; Wallance G.F.; Sutherland G.L.: Symulacja na maszynach cyfrowych. WNT, Warszawa 1973.
- [10] Forsythe G.E., Wasow W.R.: Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. John Willy Sons Inc.,London 1964
- [11] Fridlender N.A.: Metod kompleksnogo modelirovanija nestacionarnych procesov masso- i teploprovodnosti. IFŽ, T. IX No 5, 1965,ss. 577-582.
- [12] Fridlender N.A.: Rešenje nielinejnych zadač teplo- i massopere-nosa na elektronnych maszynach. IFŽ, T.XXII No 3,1972, ss.548-552.
- [13] Gantmacher F.R.: Teorija matric. Nauka, Moskva 1966.
- [14] Godunov S.K.: Uravnienija matematičeskoj fiziki. Izd. Nauka, Moskva 1971.
- [15] Godunov S.K., Filipov A.F.: Ob ustojčivosti raznostnych uravnienij. Gosenergoizdat.,Moskva 1968.
- [16] Godunov S.K., Rabenkij W.S.: Raznostnyje schemy - vvedenije v teoriju. Moskva 1977.
- [17] Godunov S.K., Rabenkij W.S.: Vvedenije v teoriju raznostnych schem. Moskva 1962.
- [18] Gordon G.: Symulacja Systemów. WNT, Warszawa 1974.

- [19] Gruder H.: Różnicowa aproksymacja pewnych uogólnionych zagadnień brzegowych dla quasiliniowego równania dyfuzji / zadanie syntezy /. Materiały IV Konferencji "Modelowanie Zagadnień Brzegowych", Jabłonna 1978, Warszawa 1978, ss. 52-64.
- [20] Izvorski A., Podleśny M.: Wykorzystanie siatek R-C do wyznaczania warunków brzegowych dla procesów sprzężonych przepływu masy i energii. Prace VIII KKA, T.1, Szczecin 1980, ss. 411-416.
- [21] Izvorski A., Podleśny M.: Zadača analiza dla sviazannyh procesov diffuzji i teploobmena. Prosidings of the Fourth International Symposium "System - Modelling - Control" Zakopane 1979, Łódź 1979, ss. 53-57.
- [22] Jabłoński A.: Hybrid computing systems structures for processes simulation of distributed parameters. Prosidings of the Fourth International Symposium "System - Modelling - Control" Zakopane 1979, Łódź 1979, ss. 58 - 63.
- [23] Jabłoński A.: Modelowanie metodami siatek R-R i R-C wybranych procesów o stałych rozłożonych opisywanych równaniem różniczkowym cząstkowym. Praca doktorska ICT PWr, Komunikat nr 285, Wrocław 1975.
- [24] Jabłoński A., Kolberg Z.: Metoda i realizacja multiplikacji pojemności w modelach siatkowych R-C. Materiały IV Konferencji "Modelowanie Zagadnień Brzegowych" Jabłonna 1978, Warszawa 1978
- [25] Jabłoński A., Żebrowski L.: Niektóre problemy modelowania procesów o stałych rozłożonych. Prace Nauk. ICT PWr nr 20, Studia i Materiały 14, Wrocław 1975.
- [26] Kaćki E., Niewiarowicz T.: Adaptacyjny system sterowania dla pewnego przypadku wymiany masy i ciepła. Prace VII KKA, T.1, Rzeszów 1970, ss. 207-218.
- [27] Karplus W.J.: Analog Simulation - Solution of Field Problem. Mc Graw Hill Book Comp., New York Toronto London 1958.
- [28] Karplus W.J.: A Hybrid Computer Technik for Treating Nonlinear Partial Differential Equations. IEEE Trans. on Elektronik Computers EC-13, 5 October 1964.
- [29] Kowalczyk B.: Macierze i ich zastosowania. PWN, Warszawa 1975.
- [30] Kozdoba L.A.: Metody modelowania elektrycznego nieliniowych zadań przenoszenia ciepła i masy. W zbiorze "Modelowanie zagadnień brzegowych", PAN Ossolineum 1974.
- [31] Kozdoba L.A.: Električeskoje modelirovanije teplo- i massoprenosa. Izd. Energja, Moskva 1972.
- [32] Ladyženskaja O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N.: Linejnyje i kvazilinejnyje uravnenija paraboličeskogo tipa. Nauka, Moskva 1967.

- [33] Lax P.D., Richtmayer R.D.: Survey of the Stability of Linear Difference Equations. *Com. Pur. Apl. Math.*, 9/1956/, 267.
- [34] Lykov A.V.: Massoteploperenos v kapilarno poristych sredach. Praca zbiorowa: Teplo- i massoobmien v kapilarnoporistych telach. Nauka i Technika, Minsk 1969.
- [35] Lykov A.V.: Teorija suszki. Moskva 1968.
- [36] Lykov A.V., Michajlov J.A.: Teorija perenosa energii i veszczestva. Minsk 1959.
- [37] Lykov A.V., Michajlov J.A.: Teorija teplo- i massoperenosa. Moskva 1963.
- [38] Marcinkowska H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1972.
- [39] Mroczka M.: Identyfikacja obiektów o parametrach rozłożonych opisywanych układem równań różniczkowych cząstkowych. Rozprawa doktorska. Raport Pre. 109 ICT PWr, Wrocław 1980.
- [40] Niewiarowicz T.: Model cyfrowy dielektrycznego suszenia cylindrycznej ścianki. *Rozprawy elektrotechniczne*, T.XX No 1, 1974.
- [41] Niewiarowicz T.: Symulacja pewnego przypadku wymiany masy i ciepła w układzie adaptacyjnym. *Materiały IV Konferencji "Modelowanie Zagadnień Brzegowych"* Jabłonna 1978, Warszawa 1978.
- [42] Nikitina L.M.: Termodinamičeskiye parametry i koefficienty massoperenosa vo vlažnych materialach. *Izd. Enerdija*, Moskva 1968.
- [43] Rosenberg D.U.: *Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. New York 1969.
- [44] Rychtmyer R.D., Morton K.: *Difference Methods for Initial - value Problems*. London 1968.
- [45] Samarskij A.A.: *Teorija raznostnyh schem*. Nauka, Moskva 1972.
- [46] Samarskij A.A.: *Ustojčivost raznostnyh schem*. Moskva 1973.
- [47] Samarskij A.A.: *Vvedenije v teoriju raznostnyh schem*. Nauka, Moskva 1971.
- [48] Solnikov V.A.: Ob obszczich krajevych zadačach dla sistiem differencialnyh uravnienij eliptičeskogo i paraboličeskogo tipov. Novosibirsk 1963.
- [49] Stańko J.: *Język FORTRAN maszyn serii ODRA 1300*. Wydawnictwo PWr, Wrocław 1975.
- [50] Strang G., Fix G.J.: *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs., New York 1973.
- [51] Tichonov A.N., Samarskij A.A.: *Równania fizyki matematycznej*. Warszawa 1963.
- [52] Tomczak W.: *Analiza sprzężonych procesów nieustalonego przepływu ciepła i substancji w ciałach porowatych*. Prace Naukowe PWr, Monografia nr 5, Wrocław 1973.

- [53] Visznik M.I.: O silno eliptycznych systemach różniczkowych równań. DAN SSSR 74, 1950, ss 881-884.
- [54] Zajda Z.: Symulacja cyfrowa procesów o stałych rozłożonych opisywanych quasilinearnym równaniem przewodnictwa ciepła. Praca doktorska. Komunikat nr 264 ICT PWr, Wrocław 1975.
- [55] Żebrowski L., Jabłoński A., Klimesz J., Wasilewski S.: Możliwości modelowania oraz symulacji procesów odwodnieniowych w górnictwie odkrywkowym. Prace naukowe Instytutu Górnictwa PWr nr 18, Wrocław 1975.

THE SIMULATIONAL APPROACH TO THE SOLUTION OF PROBLEMS
OF THE ANALYSIS OF CONJUGATED PROCESSES OF HEAT AND
MASS TRANSFER

The paper deals with application of simulational methods to the solution of quasilinear analysis problem of heat and mass transfer. Proposed methods make possible to solve the analysis problem for given mathematical model being a set of the parabolic partial differential equations, together with initial and boundary conditions. The methods are developed for boundary conditions of first, second and third kind. The conditions of existence and uniqueness for analytical and generalized solution are given.

The original set of partial differential equations is linearised through time intervals what made possible to consider the series of linear boundary problems instead of preliminary quasilinear problem. The numerical methods of finite-difference and finite elements as well as hybrid method making use of analog R-C net are considered.

For finite-difference method two differential operators have been constructed using similar approach as these used for heat transfer problem. Accuracy of approximations, stability and convergence have been investigated. The stability conditions are determined.

As for finite elements approach original problem of analysis have been transformed to the weak form. Applying orthogonality conditions to the solution in respect the basis of test function reduces the problem of analysis to the Cauchy problem /initial problem/. The algorithms and the results are given for linear basis functions - finite differences method is used to solve Cauchy problem. The construction of basis function for different kinds of boundary conditions is shown. Algorithms reducing problems with non-zero boundary conditions to the problem with zero boundary conditions are given. Convergence of such a method is investigated.

As for hybrid method, the model of R-C net using multiplicity of capacitances is proposed. R-C net is used to solve successive linear analysis problems. The method has been implemented on digital computer and the influence of random disturbances in analogue model on accuracy of solution have been checked.

These algorithms were tested in practice using certain test problems. The calculations were made on digital computers. The results of these tests and conclusions drawn from them are presented.

Niniejszy raport otrzymują:

1. OINT - Biblioteka Międzyinstytutowa I-6, I-25	1 egz.
2. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1 egz.
3. Zastępca Dyrektora I-6 d/s Kształcenia Kadry Naukowej	1 egz.
4. Promotor: doc. dr inż. Ludwik Żebrowski	1 egz.
5. Recenzenci	2 egz.
6. Zespół Automatyki i Modelowania	1 egz.
7. Autor	3 egz.

Razem 10 egz.

