

Jacek Barbarski

Akademia Ekonomiczna w Krakowie

ANALITYCZNA FUNKCJA PRODUKCJI. ASPEKTY TEORETYCZNE I APLIKACYJNE

1. Wstęp

Jednym z podstawowych zadań rachunkowości jest dostarczanie wielkości ekonomicznych, które pozwalają na ocenę procesów gospodarczych w przedsiębiorstwie. Zrozumienie prawidłowych współzależności występujących w procesach wytwórczych wymaga budowy różnych modeli opisujących najważniejsze charakterystyki działalności produkcyjnej. Najczęściej spotykane w literaturze – modele ekonometryczne – nie zawsze odzwierciedlają naturę procesów gospodarczych, dlatego też istnieje potrzeba poszukiwania innych modeli, które byłyby oparte na teorii rachunkowości i ekonomii.

Celem artykułu jest zaprezentowanie nowej koncepcji modelowania produkcji, opracowanej przez M. Dobiję. Koncepcja ta różni się w sposób znaczący od dotychczas opisanych w literaturze, przede wszystkim sposobem podejścia do złożoności produktu finalnego, popartego zarówno analizą z zakresu teorii rachunkowości i ekonomii, jak i specyfikacją zmiennych wyjaśniających procesy komponowania się kapitału ludzkiego i rzeczowego. Wyprowadzona funkcja produkcji uwzględnia w ten sposób produktywność pracy jako istotny czynnik zwiększający produkt finalny.

2. Aspekty teoretyczne funkcji produkcji

Ogólnie model funkcji produkcji uwzględniający tradycyjne zmienne, jakimi są siła robocza i kapitał, oraz dodatkowe elementy, takie jak wiedza i technologia, ma następującą postać [6, s. 23]:

$$Y = F(X, K, u),$$

gdzie: Y – funkcja produkcji, przekształcająca nakłady w produkty,

- X – tradycyjne nakłady, jak siła robocza oraz kapitał stały i obrotowy,
 K – miara wiedzy technologicznej określona nakładami na prace badawczo-rozwojowe,
 u – inne niemierzalne determinanty produkcji i produktywności.

Problematyka modelowania produkcji ściśle się wiąże z modelowaniem wzrostu gospodarczego i jest rozwiązywana w różnych ujęciach, zwłaszcza w ekonometrycznym i makroekonomicznym. Już A. Smith (za [2, s. 321]) w swoim dziele z 1776 r. *Wealth of Nations* przedstawił model wzrostu w postaci funkcji produkcji: $Y = f(L, K, T)$, gdzie: Y oznacza produkt, L – zasoby pracy, K – kapitał, a T – ziemię. Jego rozważania stanowią istotę klasycznej teorii wzrostu, modyfikowanej przez kolejnych autorów.

W latach dwudziestych XX w. modelowaniem produkcji zajmowali się C.W. Cobb i P.H. Douglas [3]. Powszechnie znana ich trójczynnikowa funkcja produkcji przedstawia się następująco:

$$Y = A \cdot (L^\alpha) \cdot (K^\beta) \cdot (M^\gamma) = f(L, K, M),$$

gdzie: Y – produkt,
 L – praca,
 K – kapitał,
 M – surowce i materiały,
 A, α, β, γ – parametry funkcji.

Kapitał, w rozumieniu autorów, stanowią maszyny i urządzenia. Można zatem dokonać uproszczeń, łącząc środki trwałe z obrotowymi. Funkcja produkcji przyjmuje wówczas następującą postać:

$$Y = A \cdot (N^\alpha) \cdot (K^\beta) = f(N, K),$$

gdzie: N – wielkość zatrudnienia,
 K – fizyczny zasób kapitału.

Jak słusznie zauważa M. Dobija [8], funkcja produkcji Cobba – Douglasa powstała w czasach, gdy rozumienie kapitału było niepełne i oznaczało faktycznie środki trwałe i obrotowe. W związku z tym dobór zmiennych do modelu jest również niepełny i dokonany bez odpowiedniego, teoretycznego uzasadnienia. Ponadto zmienna K , określająca środki pracy i produkcji nie posiada określonej miary wartości, mimo, że dostępna jest miara według historycznego kosztu nabycia, niekoniecznie właściwa w odniesieniu do podanej konstrukcji miary. Wiadomo również, że w procesach wytwórczych występuje stratność aktywów, czego nie uwzględnia funkcja produkcji Cobba – Douglasa. Problem stratności, lecz w kontekście makroekonomicznym, podnosi również Z. Hellwig [12, s. 32], pisząc o zaniedbaniach w naszej gospodarce w latach dziewięćdziesiątych poprzedniego wieku: „osiągnięty poziom produktu krajowego brutto (PKB) mówi o tym, co zostało wysiłkiem społeczeństwa wyprodukowane, a w znacznym stopniu ignoruje

to, co zostało zmarnowane, zniszczone, zagrabione, nie wykorzystane w interesie ogólnospołecznym”.

W ujęciu makroekonomicznym najbardziej jest znany model R. M. Solova [14, 1957]. Opiera się on na stwierdzeniu, że w każdym punkcie czasu gospodarka dysponuje pewnym zasobem kapitału, siły roboczej i wiedzy, łącząc te elementy ze sobą w celu wytwarzania produktu [13, s. 27]. Wyraża to następujące, ogólne równanie:

$$Y(t) = F [K(t), A(t), L(t)],$$

gdzie: Y – produkt,

K – kapitał,

A – wiedza lub efektywność (wydajność) pracy,

L – siła robocza,

t – czas.

Zdaniem M. Dobii [8] powyższe uogólnienie jest nadmierne i nie specyfikuje odpowiedniego układu zmiennych, zwłaszcza produktywności pracy. Ponadto kategoria kapitału jest tutaj niejasno określona.

Główne zastrzeżenia do tych popularnych w naukach ekonomicznych modeli, zwanych funkcjami produkcji, wynikają z obserwacji cech gospodarki towarowo-pieniężnej, w której czynniki wytwórcze mierzone są w jednostkach pieniężnych, więc wartość nakładów produkcyjnych (koszty pracy, zużycie materiałów i inne) powinna być określana kwotowo w jednolitej jednostce miary. Te czynniki wytwórcze sumują się w produkcji, zgodnie z zasadami rachunku kosztów i zdrowym rozsądkiem, a zatem to suma składników tworzących produkt w rezultacie kompozycji czynników powinna stanowić punkt wyjścia [8].

Skoro produkt powstaje w wyniku dodawania wartości czynników wytwórczych, to funkcja produkcji powinna opierać się również na sumowaniu. W modelu Cobba – Douglasa czynniki K oraz N są mnożone i potęgowane, ale nie uwzględnia on ryzyka działalności i związanej z tym stratności aktywów. Model wzrostu Solova wyraża się ogólną funkcją, która co prawda nie wyklucza, ale i nie wymienia wprost stratności aktywów. Dodatkowo oba modele operują mało zidentyfikowanym pojęciem kapitału zamiennym z kategorią aktywów. Te obserwacje prowadzą do naturalnego postulatu sformułowania funkcji produkcji wyrażającej naturalne podejście oparte na sumowaniu czynników produkcji z uwzględnieniem stratności aktywów [8].

Warto też zauważyć, że w ujęciach ekonometrycznych zmienna endogeniczna występująca po lewej stronie równania (wielkość produkcji) musi być dana, ponieważ zasadniczym ich celem jest oszacowanie parametrów funkcji. A przecież chodzi o to, aby stanowiła ona wynikową wartość funkcji. Natomiast w koncepcji zaproponowanej przez M. Dobiję wielkości produkcji jest, jak się okaże w dalszej części artykułu, wielkością obliczaną.

W celu lepszego zrozumienia natury kapitału i nowej koncepcji funkcji produkcji, warto przytoczyć kilka dalszych, istotnych spostrzeżeń M. Dobii [8, s. 2]. Otóż strumień produktów to strumień realny i aktywny, strumień zaś pieniądza jest natury informacyjnej i wyraża zobowiązania systemu ekonomicznego wobec zatrudnionych i innych dysponentów należności z tytułu pracy. Strumienie produktów i pieniądza przeciwstawiają się sobie na rynku, gdzie mechanizm rynkowy wyrównuje ich wartość (ceny rynkowe i inflację pieniądza). Ich konfrontacja jest podstawą równania wymiany produktów na pieniądze i odwrotnie. Funkcja produkcji powinna więc przedstawiać proces komponowania się pracy i pozostałych czynników wytwórczych, generując, z udziałem rynku, wartość produktów. Temu realnemu, fizycznemu procesowi odpowiada proces informacyjny, w którym występuje funkcja kreacji pieniądza jako atrybut systemu bankowego. Gospodarka towarowo-pięniężna charakteryzuje się zatem dualizmem przejawiającym się występowaniem dwóch równoległych strumieni, których wspólnym źródłem jest kapitał ludzki i jego praca. Praca w ujęciu ekonomicznym mierzona jest kosztami pracy, które to koszty z jednej strony komponują się z aktywami, tworząc produkt, a z drugiej strony stanowią należności z tytułu pracy, czyli pieniądze należące do pracujących.

Zatem strumień produktów powstaje w wyniku kompozycji pracy ludzkiej mierzonej kosztami pracy W i aktywów w formie środków trwałych i obrotowych, materialnych i niematerialnych. Proces ten opisuje funkcja produkcji PR . Najogólniejsza postać tej funkcji jest iloczynem kosztów pracy W i niemianowanego czynnika zwiększającego WP , określającego produktywność pracy: $PR = W \cdot WP$. Zasadniczym problemem poznawczym jest tutaj wyspecyfikowanie zmiennych kształtujących produktywność pracy WP .

Na podstawie powyższych rozważań w ujęciu dedukcyjnym dochodzi się do funkcji produkcji z siedmioma wyspecyfikowanymi argumentami, które odzwierciedlają wszystkie istotne zmienne, a podstawowa analityczna postać funkcji nie wymaga estymacji parametrów. Może ona być narzędziem analizy ekonomicznej z zastosowaniem rachunku różniczkowego lub też źródłem wielu nieliniowych modeli opisujących zachowanie się wybranej wielkości. Jej wartość można przedstawić jako sumę nakładów [8, s. 6-7]:

$$PR = (W + z \cdot A - s \cdot A) \cdot (1 + r) \cdot (1 + I),$$

gdzie: PR – wartość produkcji w rynkowych cenach realizacji,

W – koszty pracy,

A – aktywa w cenach historycznych, bilansowych,

z – wskaźnik rocznego zużycia aktywów,

s – stratność aktywów w procesach wytwórczych,

r – podwyższenie cen historycznych do cen rynkowych,

I – dodatkowe podwyższenie wartości w rezultacie istnienia kapitału intelektualnego w przedsiębiorstwie.

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń funkcja produkcji przyjmuje następującą postać:

$$PR = W \cdot [1 + A/W \cdot (z - s)] \cdot (1 + r) \cdot (1 + I).$$

Zmienna W reprezentująca koszty pracy jest pochodną kapitału ludzkiego, a więc

$$W = u \cdot H,$$

gdzie: u – stopa opłacenia kapitału ludzkiego,

H – całkowita wartość kapitału ludzkiego.

Po uwzględnieniu powyższej zależności, model można wyrazić następująco:

$$PR = u \cdot H \cdot [1 + A/H \cdot (z - s)/u] \cdot (1 + r) \cdot (1 + I).$$

W powyższym równaniu zmienne r i I są bliskie zera, co pozwala na wykorzystanie zależności $1 + x = e^x$, za pomocą której funkcję produkcji można przedstawić jako:

$$PR = u \cdot H \cdot e^{r+I} \cdot [1 + A/H \cdot (z - s)/u] = W \cdot WP,$$

gdzie $WP = e^{r+I} \cdot [1 + A/H \cdot (z - s)/u]$ wyraża produktywność pracy.

Wyprowadzona funkcja produkcji znajduje więc oparcie w teorii rachunkowości i wiąże wartość produkcji z kosztami pracy i jej produktywnością. Co istotne, zawiera również zmienną określającą wartość kapitału ludzkiego. Wartość produkcji można postrzegać zatem jako wartość kosztów pracy powiększoną o czynnik produktywności pracy. Na podstawie wyprowadzonej zależności można łatwo wyznaczyć produktywność pracy: $WP = PR/W$, którą można interpretować jako mnożnik kosztów pracy generujący wielkość produkcji, a jednocześnie wartość produkcji przypadającej na 1 zł kosztów pracy.

3. Aspekty aplikacyjne funkcji produkcji

Przedstawiona funkcja produkcji ukazuje w sposób jednoznaczny relacje pomiędzy zmiennymi w procesie pracy. Produktywność pracy wzrasta dzięki zwiększeniu poziomu technicznego uzbrojenia pracy (A/H) i podwyższeniu sprawności zarządzania (zmienne z , r , s). Na szczególną uwagę zasługuje zmienna u odzwierciedlająca stopień opłacenia pracy. Analiza przedstawionej funkcji produkcji pokazuje, iż w wyniku obniżenia kosztów pracy można uzyskać łatwy wzrost produktywności pracy. Jednak wówczas zmniejsza się popyt (prawo Saya) i trudniej jest maksymalizować rotację aktywów oraz rynkową stopę zwrotu r . Z tego względu zagadnienie właściwego opłacania pracy wymaga odpowiednich teorii,

przede wszystkim opartych na rachunku kapitału ludzkiego. Myślą przewodnią jest w tym wypadku zgodność opłacenia pracy z wartością jej wykonania. Jest to najważniejsza idea gospodarki towarowo-pieniężnej, a nauka może przyczynić się do jej urzeczywistnienia (por. [8]).

W celu praktycznego zastosowania omawianej funkcji produkcji należy dokonać pewnych uproszczeń i wykorzystać jej bardziej zwięzłą postać:

$$PR = W \cdot e^{(A/H) \cdot Z}$$

gdzie: Z – syntetyczna zmienna określająca poziom zarządzania.

Zmienna Z jest funkcją zużycia aktywów z , stratności aktywów w procesach wytwórczych s , opłacenia kapitału ludzkiego u , podwyższenia cen historycznych do cen rynkowych r oraz dodatkowego kapitału intelektualnego w przedsiębiorstwie I :

$$Z = Z(z, s, u, r, I).$$

Podlega ona mierzeniu na gruncie systemu rachunkowości i sprawozdawczości. Systemy te generują niezbędne dane w zakresie pomiaru zmiennej Z . Przedstawiona powyżej funkcja produkcji może zatem posłużyć do pomiaru poziomu zarządzania w przedsiębiorstwie. Przykładowe obliczenia w tym zakresie przedstawione zostały w tab. 1.

Tabela 1. Pomiar poziomu zarządzania z wykorzystaniem funkcji produkcji

Okres	PR (mln zł)	W (mln zł)	A (mln zł)	H (mln zł)	H/A	$\ln(PR/W)$	Z
1	3,0	0,5	2,0	6,0	3,0	1,79	5,38
2	3,5	0,5	4,0	6,0	1,5	1,95	2,92
3	4,0	1,8	3,0	6,0	2,0	0,80	1,60
4	4,5	2,4	3,5	8,0	2,3	0,63	1,44
5	5,0	3,5	4,0	8,0	2,0	0,36	0,71
6	6,0	4,5	4,0	10,0	2,5	0,29	0,72

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie tych obliczeń najwyższy poziom zarządzania występuje w okresie pierwszym. Nie wnikając głębiej w analizę przyczynową, można stwierdzić, iż w okresie tym na wysoki poziom zarządzania wpłynął relatywnie wysoki poziom technicznego uzbrojenia pracy. Kolejne okresy wprowadzają zmiany, a obliczenia pokazują systematyczny spadek poziomu zarządzania. Poprzez dodatkowe obliczenia można dokonać szczegółowej analizy przyczynowo-skutkowej, odzwierciedlającej wpływ zmian zasobów technicznych i ludzkich oraz poziomu zarządzania na kształtowanie się produktywności pracy. Należy podkreślić, iż

zmienna Z równa zero oznacza brak jakiegokolwiek wpływu systemu zarządzania na produktywność pracy. Jej wartość ujemna oznaczałaby wpływ negatywny, w wyniku którego poziom produkcji byłby niższy od poziomu kosztów pracy.

Szczególnie istotnym elementem analizy produkcji jest wpływ poziomu stratności na wartość produkcji. W analizie tej należy zwrócić uwagę, iż stratność aktywów jest zmienną, zależną od wielu czynników. Rynek nie pokryje bowiem nadmiernego zużycia materiałów (tylko to, co jest zgodne z normą) ani zbyt kosztownych środków trwałych (jeśli nie było takiej konieczności), ani też nadmiernych wynagrodzeń (tylko te zgodne z wartością pracy). Zatem stratność należy przedstawić przynajmniej jako funkcję liniową o następującej postaci [8]:

$$s = a + b \cdot (u - 0,08),$$

gdzie: a oznacza stratność na aktywach materialnych i niematerialnych, a b określa stratność pracy ludzkiej. Powody stratności pracy ludzkiej mogą być różne, a ogólnie są to odstępstwa od zasady zgodności płacy z wartością pracy. Liczbowa wartość 0,08 przedstawia minimalny poziom opłacenia pracy ludzkiej.

Uwzględnivszy stratność sformułowaną w powyższy sposób, funkcję produkcji można wyrazić w następujący sposób:

$$PR = u \cdot H \cdot \exp \{r + I + A / H \cdot [z - a - b \cdot (u - 0,08)] / u\}.$$

Na podstawie powyższej formuły funkcji produkcji można szukać maksimum funkcji ze względu na stopień opłacenia kapitału ludzkiego u , o ile uprzednio dokonana zostanie estymacja parametrów a i b . Jeśli założyć, że stratność przedstawia się przykładową liniową funkcją $s = 0,04 + 3,0 \cdot (u - 0,08)$, i przyjąć zmienne $z = 0,02$ i $r + I = 0,04$ można dokonać obliczeń wyznaczających maksimum wartości funkcji produkcji ze względu na zmienną u (tab. 2).

Tabela 2. Wartość funkcji produkcji przy różnych poziomach stratności

Okres	Poziom opłacenia pracy u	Poziom stratności s	Wartość funkcji produkcji (mln zł)
1	0,07	0,01	1,08
2	0,08	0,04	1,90
3	0,09	0,07	1,16
4	0,09	0,07	1,41
5	0,10	0,10	1,37
6	0,08	0,04	1,85

Źródło: obliczenia własne.

Obliczenia te wykazują (na podstawie danych), że wartość funkcji produkcji osiąga maksimum (1,90 mln zł) przy stopniu opłacenia pracy na poziomie 8% (w pierwszym przypadku). W drugim przypadku ośmioprocentowa wartość funkcji produkcji jest bliska maksimum (1,85 mln zł).

Z punktu widzenia indywidualnego zatrudnionego zagadnienie poszukiwania optymalnego stopnia opłacenia pracy wchodzi w zakres problematyki zachowania kapitału ludzkiego i zbliża się do problematyki równowagi popytu i podaży. Rozmiar wynagrodzenia powinien umożliwić przynajmniej zachowanie wartości kapitału pracownika. Jeśli kapitał pracownika z doświadczeniem zawodowym T lat oznaczmy przez $H(T)$, to zestawivszy równanie wewnętrznej stopy zwrotu (W – wynagrodzenie roczne):

$$H(T) \cdot (1 + r) = W + H(T + 1),$$

określamy rozmiar wynagrodzenia jako:

$$W = H(T) \cdot \Delta Q(T),$$

gdzie: $\Delta Q(T)$ – roczny przyrost doświadczenia zawodowego.

Ta ostatnia wielkość z biegiem czasu dąży do zera, zatem można przyjąć, że płacę zasadniczą określa procent od kapitału pracownika [8].

Badania nad stopą zwrotu na papierach wartościowych prowadzone przez Ibbotsona i Sinqfielda, przedstawione przez R. Brealeya i S. Myersa [1, s. 131] ukazują wartość premii za ryzyko w tej ważnej dziedzinie inwestowania. Długoterminowe badania i rezultaty obliczeń prowadzonych od 1926 r. na danych dotyczących akcji i innych papierów wartościowych występujących w USA szacują realną stopę zwrotu na poziomie 8%, przy tym realna stopa zwrotu bez ryzyka nie przekracza połowy procenta. Zatem w długim okresie znajduje potwierdzenie teoria, iż przy przeciętnym ryzyku stopa procentowa na poziomie 8% przedstawia naturalną właściwość ekonomicznej rzeczywistości [8].

Z punktu widzenia całej gospodarki produkt wytworzony i sprzedany to produkt krajowy brutto (PKB). Jeśli zastosować odpowiedni zapis, wyznaczona funkcja produkcji może także posłużyć do badań makroekonomicznych, a zwłaszcza do określania PKB:

$$PKB = W \cdot WP.$$

W powyższym ujęciu W oznacza koszty pracy w skali całej gospodarki, a WP jej produktywność.

4. Podsumowanie

W artykule przedmiotem rozważań jest funkcja produkcji, której zmienne zostały wyprowadzone na gruncie teorii rachunkowości i ekonomii. Funkcja ta

zawiera wszystkie istotne argumenty wpływające na wartość produktu finalnego. Co ważne, uwzględnia czynnik pomijany w innych modelach, czyli stratność aktywów. Umożliwia także identyfikację elementów wpływających na kreację wartości w procesach wytwórczych. Do najważniejszych z nich należy niewątpliwie kapitał intelektualny. Od jakości kapitału intelektualnego zależy bowiem wzrost produktywności i dobrobytu społeczeństwa.

Zaprezentowana funkcja produkcji poprzez agregację danych w skali całej gospodarki prowadzi do sformułowania modelu wzrostu gospodarki.

Literatura

- [1] Brealey R., Myers S., *Principles of Corporate Finance*, ed. IV, McGraw-Hill, New York 1991.
- [2] Campbell, Skinner, Todd (red.), *An Inquiry into the Nature and Consensus of Wealth of Nations*, Clarendon Press Oxford, 1976.
- [3] Cobb C.W., Douglas P.H., *A Theory of Production*, „American Economic Review” 1928, vol. 18.
- [4] Dobija D., *Metody mierzenia wartości kapitału ludzkiego i kosztów pracy w firmie*, [w:] *Strategiczne zarządzanie zasobami ludzkimi*, red. A. Ludwiczynski, Polska Fundacja Promocji Kadr, Warszawa 2000.
- [5] Dobija D., *Możliwości pomiaru kapitału intelektualnego organizacji i jego prezentacji w sprawozdaniach finansowych*, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie nr 553, Kraków 2000.
- [6] Dobija D., *Pomiar i sprawozdawczość kapitału intelektualnego przedsiębiorstwa*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Przedsiębiorczości i Zarządzania im. Leona Koźmińskiego, Warszawa 2003.
- [7] Dobija D., *Pomiar kapitału ludzkiego i możliwości raportowania wyników*, *Zarządzanie zasobami ludzkimi*, Komitet Nauk o Pracy i Polityce Społecznej PAN, Warszawa 2002.
- [8] Dobija M., *Funkcja produkcji w ujęciu teorii rachunkowości*, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie (złożony do druku).
- [9] Dobija M., *Kapitał ludzki i intelektualny w aspekcie teorii rachunkowości*, „Przegląd Organizacji” 2002, nr 1.
- [10] Dobija M., *Modele pomiaru i analizy produktywności pracy w aspekcie ekonomii i rachunkowości*, Zeszyty Teoretyczne Rady Naukowej SKwP nr 56, Warszawa 2000.
- [11] Dobija M., *Monetary Unit – The Theory of Value, in Money Unit Stability in Holistic Approach*, [w:] red. M. Dobija, WSPiZ, Warszawa 2002.
- [12] Hellwig Z. (red), *Ekspansja gospodarcza Polski końca XX wieku*, Wyższa Szkoła Bankowa, Poznań 1997.
- [13] Romer D., *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Warszawa 2000.
- [14] Solov R.M., *Technical Change and the Aggregate Production Function*, „Review of Economics and Statistics” 1957, vol. 39 (3).

ANALYTICAL FUNCTION OF PRODUCTION. THEORETICAL AND APPLICATIONAL ASPECTS

Summary

This article is dedicated to the function of production on a field of accounting and economy.